UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

ANALISIS DINAMICO DE ROTORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A N

FLORES BURGOS ALBERTO

LEAL GUERRERO MARIO ALBERTO

MARTINEZ LOPEZ JUAN OMAR

MUNGUIA MARTINEZ JAVIER ENRIQUE

Director de Tesis: Alejandro Lozano Guzmán

México, D.F. 1986

ANALISIS DINAMICO

DE

ROTORES

1986

I N D I C E

Pág.

A P E N D I C E

R E S U M E N

En este trabajo se presentan dos programas de cômputo que permiten, uno de ellos, encontrar las velocidades críticas y deformaciones modales por el método de la matriz de transferencia y el otro obtiene el sistema óptimo de masas que balancea un roto usando el método de coeficientes de influencia.

El trabajo incluye una serie de antecedentes teóricos sobre vibraciones que introducen al análisis del problema rotor-chumacera. Una vez establecido dicho problema, se presentan algunos de los diferentes métodos de análisis para encontrar velocidades críticas, deformaciones modales y balanceo de rotores.

El siguiente capítulo presenta las bases teóricas para el modelado de rotores, las cuales, permiten la introducción del rotor real al programa de cómputo que calcula sus velocidades críticas.

Por último, se indican las conclusiones a las que se llegó.

INTRODUCCION

Todo sistema físico con cierta masa y elasticidad, es susceptible de vibrar. Una vibración puede provocar condiciones de inestabilidad que sean origen de una falla o inclusive, condiciones de operación riesgosas que lleven al paro indefinido del sistema. Si éste fuera el caso en el equipo turbina-generador de una planta termoeléctrica, el impacto económico, no sólo se vería reflejado en la planta, sino también sobre la región a la que suministre energía. Es por tanto necesario conocer los aspectos de la operación, que involucren mayor riesgo, para poder así establecer medidas preventivas. Uno de estos aspectos críticos, son los niveles de vibración del sistema turbina-generador.

El desarrollo de este trabajo consta de ocho capítulos, en los que se describen los fundamentos para determinar los niveles de vibración de un sistema turbina-generador.

El primer capítulo contiene los antecedentes teóricos importantes para la comprensión del resto del trabajo y en general, de las vibraciones en rotores.

El capítulo II, analiza los parámetros que definen el problema rotor-chumacera, tales como: el módulo del vector de posición del centro geométrico del rotor y la fuerza transmitida.

Siendo uno de los objetivos la determinación de velocidades críticas, el capítulo III presenta dos métodos para el cálculo de las mismas. Estos métodos son el de Holzer y el de Prohl. Holzer analiza los sistemas sometidos a torsión y Prohl analiza los sistemas sujetos a flexión. Las velocidades críticas y deflexiones modales se calculan por medio de la formulación sistemática de Prohl.

El capítulo IV referente al balanceo de rotores, describe inicialmente el análisis modal. Se presenta además el método de coeficientes de influencia mediante el cual, se puede balancear al ro tor a una determinada velocidad.

En el capítulo V, se presenta el modelado de rotores como herramienta para el cálculo de velocidades críticas y deflexiones modales. Este modelado permite considerar en forma general las variaciones de diámetro en el rotor.

Los capítulos VI y VII, contienen la descripción de los programas para el cálculo de velocidades críticas VCR-MATRA. Y para el balanceo de rotores BACOIN respectivamente.

Como último capítulo, se presentan las conclusiones a las que se llegó aplicando los programas VCR-MATRA y BACOIN.

Finalmente, se tiene un apéndice con dos programas en lenguaje BASIC para microcomputadora.

I. ANTECEDENTES TEORICOS

Los conceptos sobre la teoría de vibraciones son la base fundamental del análisis de vibración en rotores, y de éstos se desprende precisamente la formulación del problema en estudio.

En este capítulo, se presenta una breve discusión sobre la teoría de vibraciones para casos particulares afines a nuestro objetivo.

Para fines de análisis y modelado de sistemas físicos, clasificaremos a éstos en discretos y continuos. La característica principal de los sistemas discretos está en la concentración de rigidez y masa en determinados puntos a lo largo del mismo; en cambio, un sistema continuo tiene la particularidad de una distribución uniforme de masa y rigidez.

1.1. Sistemas discretos

Analizando un sistema en forma discreta, la concentración de parámetros nos permite aplicar métodos numéricos en el planteamiento de su solución, con lo que facilitamos en gran medida el estudio de un problema de parámetros concentrados.

1.1.1. Vibración libre en sistemas con un grado de libertad

La vibración libre físicamente tiene una importancia particular, ya que el sistema permanece en movimiento oscilatorio sin la existencia de alguna fuerza externa que lo excite. La Figura 1.1. muestra un sistema masa-resorte y la Figura 1.2. un sistema masa-amortiguador-resorte.

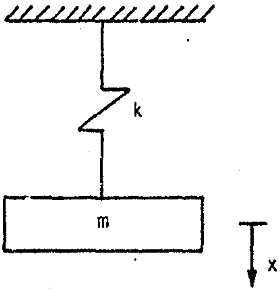


Figura 1.1

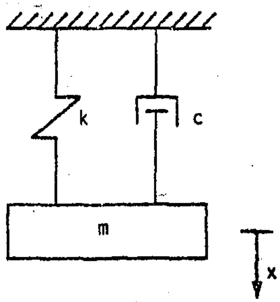


Figura 1.2

cuyas representaciones matemáticas son respectivamente [1] .

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \qquad \text{..... (1.1)}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \qquad \text{..... (1.2)}$$

donde:

c es la constante de amortiguamiento

k es la constante de rigidez

$\ddot{x}$ es la aceleración

$\dot{x}$ es la velocidad

x es el desplazamiento.

La solución general de las ecuaciones diferenciales (1.1) y (1.2) es de la forma [1], [2] .

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad \text{..... (1.3)}$$

con $$r_1, r_2 = \frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \qquad \text{..... (1.4)}$$

La ecuación (1.3), representa una curva del tipo armónico manifestando así el comportamiento del sistema en el tiempo, c_1 y c_2 son constantes que están determinadas por las condiciones iniciales.

1.1.2. Vibración forzada en sistemas con un grado de libertad

Este tipo de vibración, se presenta cuando el sistema es excitado por una fuente externa, tal como lo muestra la Figura 1.3.

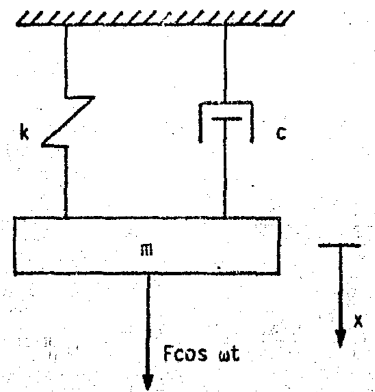


Figura 1.3

Se analiza este caso, ya que para el presente trabajo, la -- fuerza centrífuga debido a la deflexión del rotor, equivaldría a - una fuerza externa.

La ecuación general de movimiento de estos sistemas es:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \cos \omega t \qquad \ldots\ldots (1.5)$$

siendo F la fuerza y ω la frecuencia de excitación. La solución - para este tipo de ecuaciones es de la forma [3]

$$x(t) = X_h(t) + X_p(t) \qquad \ldots\ldots (1.6)$$

donde

$$X_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad \ldots\ldots (1.7)$$

y

$$X_p = X \cos (\omega t - \emptyset) \qquad \ldots\ldots (1.8)$$

Como nos interesa solamente el estado estable del sistema, sólo - mencionaremos la solución particular, ya que el efecto de las condiciones iniciales es transitorio [2]

$$X = \frac{F}{\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right\}^{1/2}} \qquad \ldots\ldots (1.9)$$

donde

$$\zeta = \frac{C}{2m\omega_n} \qquad \ldots\ldots (1.10)$$

y

$$\emptyset = \tan^{-1} \frac{2 \zeta \omega/\omega_n}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad \ldots\ldots (1.11)$$

Siendo ζ el factor de amortiguamiento y ∅ el defasamiento entre la fuerza de excitación y el desplazamiento.

1.1.3. Sistemas con múltiple grado de libertad sin excitación externa

En la Figura 1.4, se muestra el caso general de un sistema con n grados de libertad para un movimiento rectilíneo, mientras que la Figura 1.5, representa un sistema con dos grados de libertad, que son establecidos por las coordenadas x y θ, donde E es el centro de masa.

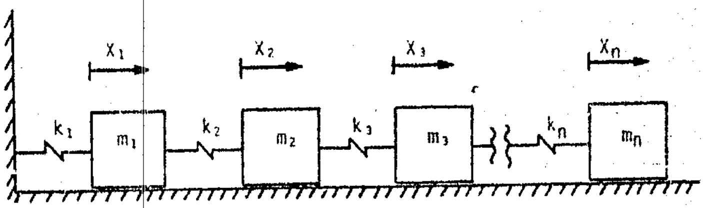


Figura 1.4

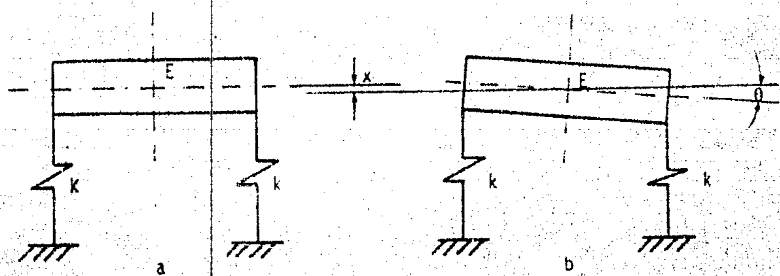


Figura 1.5

Para la Figura 1.4, las ecuaciones de movimiento son [1]

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2-x_1) - k_3(x_2-x_3) \\ m_3\ddot{x}_3 &= -k_3(x_3-x_2) - k_4(x_3-x_4) \\ &\;\;\vdots \\ m_n\ddot{x}_n &= -k_n(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1.12)$$

cuyas soluciones propuestas son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 \text{ sen } \omega t \\ x_2 &= X_2 \text{ sen } \omega t \\ x_3 &= X_3 \text{ sen } \omega t \\ &\;\;\vdots \\ x_n &= X_n \text{ sen } \omega t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1.13)$$

A fin de comprender mejor el comportamiento de este tipo de problemas, se hará referencia a un sistema con tres grados de libertad por simplicidad de desarrollo. Encontrando las segundas derivadas de la ecuación (1.13) con $n = 3$ y sustituyéndolas en la ecuación (1.12), se obtiene el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & -m_3\omega^2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots (1.14)$$

Esta ecuación es homogénea y en razón de que las amplitudes no pueden ser cero, entonces la suma de las matrices de inercia y rigidez debe ser una matriz singular para satisfacer la igualdad, es decir, su determinante tiene que ser igual con cero. El desarrollo de este determinante será la ecuación característica del sistema. Resolviendo ésta, se encuentran las raíces que satisfacen dicha ecuación. Las raíces obtenidas son las frecuencias naturales del sistema.

Para el caso general, se definen los elementos de la ecuación --- (1.14) como:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad \text{matriz de inercia}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{matriz de rigidez}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{Bmatrix} \quad \text{vector desplazamiento}$$

1.2. Definición del problema de valores característicos

Las limitaciones del análisis de los sistemas con múltiple grado de libertad lleva a usar métodos matriciales, ya que el manejo de ecuaciones es fácil y al mismo tiempo la teoría sobre matrices está ampliamente desarrollada.

Como se acaba de ver, el determinante de la ecuación matricial (1.14) nos conduce a la ecuación característica del sistema. La forma matricial de la ecuación general de movimiento es:

$$\{-\omega^2[M]+[K]\}\{X\} = \{0\} \qquad \ldots\ldots (1.15)$$

Se estudiará esta última ecuación a partir de la matriz dinámica, la cual se define como la suma de las matrices de rigidez y de inercia. [2]

$$\text{Matriz dinámica} = [-\omega^2 M] + [K] \qquad \ldots\ldots (1.16)$$

Premultiplicando la ecuación (1.15) por $[M]^{-1}$, se tiene:

$$\{-[M]^{-1}[M]\omega^2+[M]^{-1}[K]\}\{X\} = \{0\} \qquad \ldots\ldots (1.17)$$

como $[M]^{-1}[M] = I$

y $[M]^{-1}[K] = A$

$$\{-I\omega^2 + A\}\{X\} = 0 \qquad \ldots\ldots (1.18)$$

haciendo $\omega^2 = \lambda$

$$\{A - \lambda I\}\{X\} = \{0\} \qquad \ldots\ldots (1.19)$$

Siendo la ecuación característica del sistema el determinante igualado a cero

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \ldots\ldots (1.20)$$

los valores característicos son las raíces de la ecuación (1.20). Estas raíces representan los valores de las frecuencias que satisfacen dicha ecuación, o sea las frecuencias naturales del sistema.

No se analizan los sistemas de múltiple grado de libertad con excitación, ya que lo único que interesa es evitar, en lo máximo posible, que el sistema trabaje a alguna frecuencia natural para no caer dentro del fenómeno de resonancia.

1.3. Ortogonalidad de los modos de vibración

Sustituyendo los valores característicos en la ecuación de movimiento se obtiene un vector, el cual describe el comportamiento del sistema a una frecuencia natural determinada. Este vector es precisamente el llamado modo principal de vibración.

Los modos principales son vectores ortogonales entre sí, o sea son vectores linealmente independientes y esto puede demostrarse por el principio de ortogonalidad que establece:

— En base a las matrices de rigidez e inercia, se tiene

$$m_i X_i X_j = \begin{Bmatrix} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots (1.21)$$

donde:

X_i y X_j son los modos de vibración o vectores propios del sistema y m_i es la matriz de inercia o de masa.

1.4. Métodos de obtención de frecuencias naturales

La obtención de las frecuencias naturales de sistemas con varios grados de libertad es generalmente laboriosa, por lo cual, la utilización de métodos numéricos facilita la obtención de las mismas.

Ahora, la aplicación de programas de cómputo a los análisis realizados con métodos numéricos facilita la solución de problemas de valores característicos. A continuación se presenta el método de Rayleigh, para determinar las frecuencias naturales.

1.4.1. Método de Rayleigh

La utilidad de la presentación de este método en el problema de valores característicos, radica principalmente en la buena aproximación que se logra al obtener las frecuencias respecto a la fundamental. Precisamente dicha frecuencia será en muchos casos la que más interese, por lo cual no siempre se requiere calcular todas las frecuencias.

En general, en sistemas que contienen elementos flexibles tales como resortes, vigas, la frecuencia de Rayleigh será muy próxima a la fundamental.

Definiendo a M como el momento flexionante y a θ como la pendiente de la curva elástica, se obtiene en forma diferencial la ecuación de la energía de deformación que es

$$d\mu = \frac{1}{2} M \, d\theta \qquad \text{..... (1.22)}$$

y mediante la teoría de vigas

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{R} \qquad \text{..... (1.23)}$$

donde R es el radio de curvatura.

De acuerdo a las consideraciones hechas, la energía de deformación es

$$Umáx = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI}\, dx = \frac{1}{2}\, EI \int \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \qquad \ldots\ldots (1.24)$$

La integración debe realizarse a lo largo de la viga. La ecuación para la energía cinética está dada por

$$Tmáx = \frac{1}{2} \int \dot{y}^2 dm = \frac{1}{2}\, \omega^2 \int y^2\, dm \qquad \ldots\ldots (1.25)$$

en donde "y" es la curva de deflexión.

En un extremo, la energía total acumulada será la energía cinética o la energía potencial. Entonces igualando ambas expresiones se obtiene la frecuencia aproximada a la fundamental. [2]

$$\omega^2 = \frac{\int EI \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx}{\int y^2 dm} \qquad \ldots\ldots (1.26)$$

1.5. Sistemas continuos

Análogamente al caso de los sistemas discretos se menciona la característica principal de los sistemas continuos, es decir, la uniformidad en la distribución de masa y rigidez.

En esta sección se consideran algunas formas de vibración de cuerpos elásticos, cuyas soluciones estarán referidas a movimientos armónicos en correspondencia a cada raíz de la ecuación de frecuencia planteada.

1.5.1. Vibración torsional libre de una barra de sección uniforme

La expresión matemática para el comportamiento dinámico del sistema viene dada por [2]

$$c^2 \; \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad \ldots\ldots (1.27)$$

Para esta expresión $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, donde G es el módulo de rigidez torsional y ρ su densidad. La solución de la ecuación (1.27) es de la forma [1]

$$\theta(x,t) = (c_1 \mathrm{Sen}\,\omega t + c_2 \cos \omega t)\,(c_3 \mathrm{sen}\,\frac{\omega}{c}\,x + c_4 \cos\frac{\omega}{c}\,x) \qquad \ldots\ldots (1.28)$$

1.5.2. Vibración transversal libre de una cuerda

Para este caso, la ecuación de movimiento es [4]

$$c^2 \; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \ldots\ldots (1.29)$$

siendo $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ o velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda. Donde T es la fuerza de tracción y ρ su densidad.

La solución general para este sistema viene dada por [4]

$$Y(x,t) = (c_1 \;\mathrm{sen}\;\omega t + c_2 \;\cos\;\omega t)\;(c_3 \;\mathrm{sen}\;\frac{\omega}{c}\,x + c_4 \;\cos\;\frac{\omega}{c}\,x) \qquad \ldots\ldots (1.30)$$

II. DEFINICION DEL PROBLEMA ROTOR-CHUMACERA

Un sistema rotor-chumacera, en su forma más sencilla, consta de una flecha soportada en un par de apoyos Figura 2.1. Estos apoyos a su vez, pueden ser rígidos o flexibles.

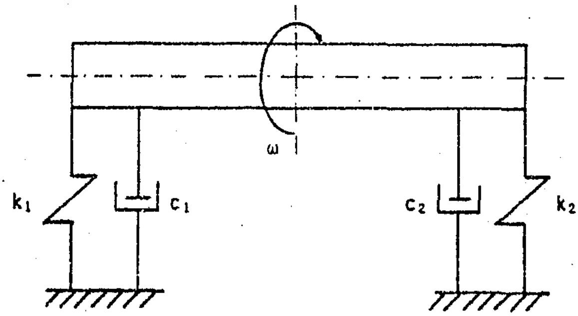


Figura 2.1

La función de este tipo de sistemas es permitir libremente el giro de una pieza simétrica axialmente, con mínimas pérdidas por fricción en sus soportes.

La vibración en un sistema rotor-chumacera, es debida a la fuerza centrífuga producida por el desbalanceo existente en el rotor.

Considerando un disco simétricamente colocado entre dos soportes, como lo muestra la Figura 2.2, su centro de masa C_m se encuentra a una distancia (excentricidad) $\bar{a}$ del centro geométrico E del disco.

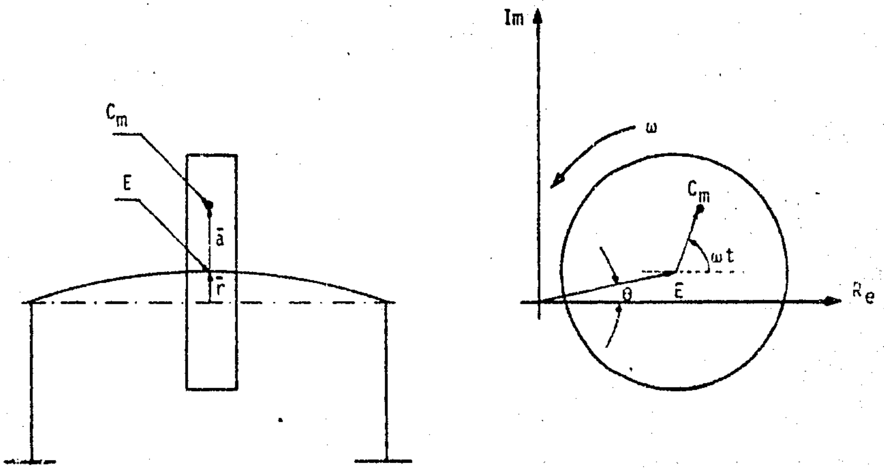


Figura 2.2

Su análisis dinámico se hará suponiendo una fuerza restauradora del eje y un amortiguamiento viscoso actuando en E . Para el caso más general, se supone girando al vector $\bar{r}$ a una velocidad $\dot{\theta}$ y al vector $\bar{a}$ a una velocidad ω . La ecuación de movimiento del sistema es de la forma [5]

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\bar{a} + \bar{r}) = -C\dot{r} - Kr \qquad \ldots\ldots (2.1)$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{r}$ se definen como

$$\bar{a} = a\ e^{i\omega t} \qquad \ldots\ldots (2.2)$$

$$\bar{r} = r\ e^{i\dot{\theta} t} \qquad \ldots\ldots (2.3)$$

Obteniendo las respectivas derivadas de las ecuaciones (2.2) y (2.3) y sustituyendo a éstas en la ecuación (2.1), se tiene:

$$-m(\omega^2 a e^{i\omega t} + \dot{\theta}^2 r^{i\dot{\theta} t}) = -iCre^{i\dot{\theta} t} - Kre^{i\dot{\theta} t} \qquad \ldots\ldots (2.4)$$

Para el caso en que la velocidad $\dot{\theta}$ del vector $\bar{r}$, sea igual a la velocidad de rotación ω del vector $\bar{a}$, la ecuación de movimiento del sistema rotor-chumacera es de la forma [5]

$$-mr\omega^2 + iCr\omega + Kr = ma\omega^2 \qquad \ldots\ldots (2.5)$$

De la ecuación (2.5) se calcula el módulo del vector de posición $\bar{r}$, del centro geométrico E, respecto al eje teórico de giro, el cual es

$$|\bar{r}| = \frac{m\,a\,\omega^2}{\left[(K - m\omega^2)^2 + C^2\omega^2\right]^{1/2}} \qquad \ldots\ldots (2.6)$$

Si se considera al sistema críticamente amortiguado, se tiene que

$$Cc = 2\sqrt{Km} \qquad \ldots\ldots (2.7)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad \ldots\ldots (2.8)$$

y $$\zeta = \frac{C}{Cc} \qquad \ldots\ldots (2.9)$$

donde:

Cc es el coeficiente de amortiguamiento crítico,
ω es la velocidad de excitación del sistema,
ω_n es la velocidad crítica del sistema,

K es la constante de rigidez del rotor,
m es la masa del disco,
C es el coeficiente de amortiguamiento, y
ζ es el factor de amortiguamiento en el sistema.

Dividiendo entre ω_n a la ecuación (2.6) y sustituyendo las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) en la ecuación (2.6) se tiene que

$$\left|\bar{r}\right| = \frac{a\,\Omega^2}{\left[(1-\Omega^2)^2 + (2\,\zeta\,\Omega)^2\right]^{1/2}} \qquad \ldots\ldots (2.10)$$

y el ángulo de defasamiento entre la fuerza excitadora y el vector $|\bar{r}|$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\,\zeta\,\Omega}{1-\Omega^2} \qquad \ldots\ldots (2.11)$$

Para obtener la magnitud de la fuerza transmitida, se toman los módulos de la ecuación (2.5) y utilizando las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) se tiene

$$F_{tr} = r\left[1 + (2\,\zeta\,\Omega)^2\right]^{1/2} \qquad \ldots\ldots (2.12)$$

En la Figura 2.3 puede observarse la construcción de la fuerza transmitida.

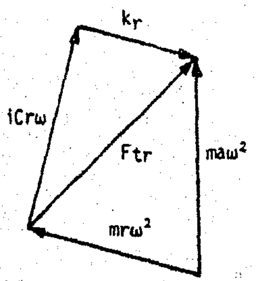


Figura 2.3

Al sustituir el módulo de $\bar{r}$ en la ecuación (2.12) y trabajando algebraícamente el numerador y denominador con las ecuaciones (2.8) y (2.9) se obtiene la fuerza máxima transmitida, cuya ecuación es

$$F_{tr}\ \text{máx} = \frac{ma\omega^2\left[1 + (2\,\zeta\,\Omega)^2\right]^{1/2}}{\left[(1 - \Omega^2)^2 + (2\,\zeta\,\Omega)^2\right]^{1/2}} \quad \ldots\ldots (2.13)$$

De la ecuación (2.13) se obtiene la amplitud máxima de la fuerza transmitida que está dada por

$$\frac{F_{tr}\ \text{máx}}{m\,a\,\omega^2} = \left[\frac{1 + (2\,\zeta\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\,\zeta\,\Omega)^2}\right]^{1/2} \quad \ldots\ldots (2.14)$$

y el ángulo de fase entre la fuerza transmitida y la fuerza excitadora es

$$\gamma = \emptyset - \tan^{-1}\left(\frac{C\ \omega}{K}\right) \quad \ldots\ldots (2.15)$$

Para complementar este análisis, se menciona el fenómeno de cabeceo. Este fenómeno se define como la trayectoria que describe el centro de masa de la sección, debido a la rotación del vector $\bar{r}$ alrededor del eje teórico de rotación, más la rotación del vector $\bar{a}$ con respecto al centro geométrico de la sección, como lo muestra la Figura 2.4.

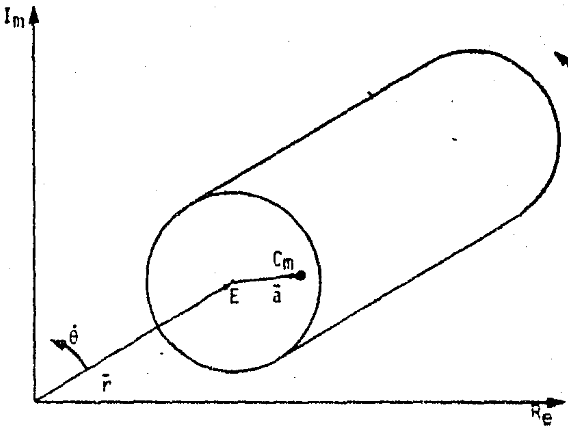


Figura 2.4

El cabeceo se presenta en un rotor debido a la excentricidad entre el centro de masa y el centro geométrico de la sección. Las trayectorias que describe el centro de masa tienen diferentes configuraciones, las cuales son generadas al pasar el rotor por sus velocidades críticas [5]

III. VELOCIDADES CRITICAS

El análisis dinámico realizado en el capítulo anterior, nos permite observar que en el sistema rotor-chumacera se genera una fuerza de excitación, la cual, es máxima a las velocidades críticas. En este capítulo se presentan algunos métodos para la obtención de estas velocidades críticas.

El método del Holzer, analiza a los sistemas torsionales, tomando en cuenta el momento torsional y la deflexión angular como vectores de estado; mientras que Myklestad y Prohl analizan a los sistemas para el caso de flexión, tomando en cuenta como vectores de estado a la deflexión, deflexión angular, momento flexionante y fuerza cortante. Para el cálculo de velocidades críticas del sistema rotor-chumacera, en este trabajo se utiliza el método de Prohl en forma sistemática, ya que la deflexión de la flecha es el parámetro a partir del cual se hace el análisis dinámico.

3.1. Método de Holzer

Holzer propuso un método para calcular frecuencias naturales y formas modales para sistemas torsionales, bajo la suposición de una frecuencia dada y una amplitud unitaria en el extremo del sistema. De esta manera, se realizan los cálculos del momento torsionante y el desplazamiento angular en todos los puntos de interés, hasta llegar al otro extremo.

La sistematización del método de Holzer, para casos simples, puede ser de manera tabular e iterativa, pero en casos en que el sistema sea grande, se puede utilizar la forma matricial, con lo cual los cálculos son más rápidos.

Las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

$$\frac{\partial\,\theta(x,t)}{\partial x} = \frac{M(x,t)}{G\,J(x)} \qquad \text{..... (3.1)}$$

y

$$\frac{\partial\,M(x,t)}{\partial x} = I(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{..... (3.2)}$$

que representan la relación entre el desplazamiento angular, el momento y la segunda ley de Newton para sistemas rotatorios.

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) se obtiene

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{GI\;(x)} \qquad \text{..... (3.3)}$$

en donde:

$\theta(x)$ es la amplitud angular y

$M(x)$ es el momento.

Ahora, de la ecuación (3.2) se llega a

$$\frac{dM(x)}{dx} = -I(x)\omega^2\theta(x) \qquad \text{..... (3.4)}$$

ecuación que se obtiene para el caso de vibración armónica, cuyas soluciones propuestas son de la forma [1]

$$\theta(x,t) = \theta(x)\cos(\omega t - \emptyset) \qquad \text{..... (3.5)}$$

$$M(x,t) = M(x)\cos(\omega t - \emptyset) \qquad \text{..... (3.6)}$$

En la Figura 3.1 se supone la posición del disco como la estación i, en donde

$$\theta_i^L = \theta_i^R = \theta i \qquad \text{..... (3.7)}$$

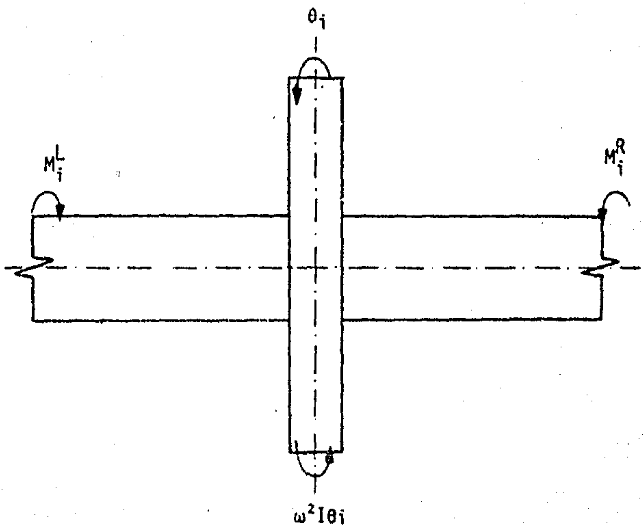


Figura 3.1

En equilibrio

$$M_i^L = M_i^R + \omega^2 \, I\theta_i \qquad \text{..... (3.8)}$$

$$M_{i+1}^L = M_i^R \qquad \text{..... (3.9)}$$

luego, las ecuaciones (3.7) y (3.8) podemos ordenarlas en un arreglo matricial, de la forma

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^L \qquad \text{..... (3.10)}$$

Como se está en el lado derecho del disco, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix}$$

nos traslada directamente de un lado a otro del disco. A este -- arreglo se le llama matriz de transferencia de punto. Análogamente a la ecuación (3.9) y de acuerdo a la Figura 3.2, se tiene

$$\theta_{i+1}^{L} = \theta_i^{R} + \frac{\ell}{G\,J_i} M_i^{R} \qquad \ldots\ldots (3.11)$$

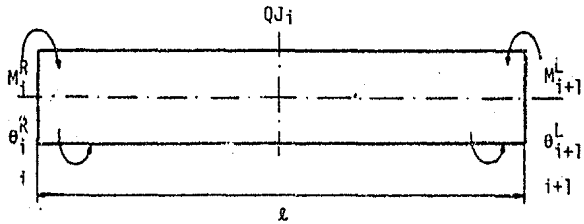


Figura 3.2

Las ecuaciones (3.9) y (3.11) se pueden ordenar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{GJ_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots (3.12)$$

al arreglo $\begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{GJ_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se le llama matriz de campo para un tramo de la viga. Ahora, en base a las matrices de punto y campo definidas anteriormente, se determina la siguiente ecuación matricial

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i+1}^{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{GJ_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i}^{L} \quad \ldots\ldots (3.13)$$

finalmente se tiene que

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i+1}^{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{GJ_i} \\ -\omega^2 I_i & \frac{\ell}{GJ_i}(-\omega^2 I_i) + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i}^{L} \quad \ldots\ldots (3.14)$$

Así se llega a la matriz de transferencia que relaciona los vectores de estado i con el estado $i+1$.

Condiciones de frontera.

a) Viga libremente apoyada

Para este caso, las condiciones de frontera son:

$$M_1^L = 0$$

$$M_{n+1}^R = 0$$

b) Viga empotrada - libre

$$\theta_1^L = 0$$

$$M_{n+1}^R = 0$$

c) Viga libre - empotrada

$$M_1^L = 0$$

$$\theta_{n+1}^R = 0$$

d) Viga empotrada - empotrada

$$\theta_1^L = 0$$

$$\theta_{n+1}^R = 0$$

3.2. Método de Prohl-Myklestad

El segundo método que se presenta, para calcular velocidades críticas es el método de Prohl-Myklestad el cual combina la generalidad con la simplicidad, es decir, es útil para calcular velocidades críticas mayores que la fundamental.

El método considera que el rotor puede variar de sección, -- siempre y cuando la simetría circular se mantenga. Pueden incluirse cualquier número de discos o masas unidas al rotor y puede suponerse a éste apoyado sobre soportes rígidos o flexibles. Y es por todo esto que es el método más apropiado para este trabajo.

Consideraciones generales.

La ecuación de la elástica es,

$$\frac{d^4y}{dx^4} EI = \mu \omega^2 y \qquad \ldots\ldots (3.15)$$

en donde:

y es la deflexión del rotor

E es el módulo de Young del material

I es el momento de inercia de la sección transversal

μ es la masa por unidad de longitud.

Esta expresión representa una ecuación de cuarto orden, por lo que requiere de cuatro condiciones de frontera para su solución, las cuales son: $Y_0 = 0$, $M_0 = 0$, $Y_n = 0$ y $M_n = 0$. Estas condiciones se cumplen cuando el rotor gira a una velocidad crítica.

La ecuación (3.15) se puede reescribir de la forma siguiente

$$\frac{d^2M}{d\,x^2} = \mu\,\omega^2\,y \qquad \text{..... (3.16)}$$

ya que

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad \text{..... (3.17)}$$

Con cualquier velocidad ω propuesta, se pueden construir los diagramas de deflexión y momento, los cuales satisfacen tres condiciones, pero sólo la velocidad crítica logrará satisfacer las cuatro condiciones de frontera antes mencionadas, de ahí que, encontrando la función que haga que la discrepancia con la cuarta condición sea cero, entonces, la velocidad o velocidades encontradas serán las velocidades críticas.

Para aplicar un método numérico a esta teoría, el rotor se idealiza como un sistema de discos unidos a una flecha sin masa. La masa de los discos se elige de modo que sea una representación de la masa distribuida del rotor real.

La deflexión del sistema será igual a la deflexión del rotor real. Se supone que los discos no tienen momento de inercia, por lo que, se les considera como masas puntuales.

Sabiendo que [6]

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad ..... (3:18)$$

donde Q es la fuerza cortante.

La variación del esfuerzo cortante es igual a la fuerza de inercia de las masas, entonces

$$\Delta Q = m\,\omega^2\, y \qquad ..... (3.19)$$

El cambio de la fuerza cortante produce un cambio en la pendiente del diagrama de momentos y debido a la continuidad del rotor, el diagrama de deflexión es una curva suave sin cortes ni discontinuidades.

Si se supone que en la Figura 3.3 se conocen, para el estado cero, los siguientes parámetros:

Q_0 = fuerza cortante (debido a la reacción del soporte)

M_0 = momento flexionante

Y'_0 = pendiente de la curva de deflexión

Y_0 = deflexión.

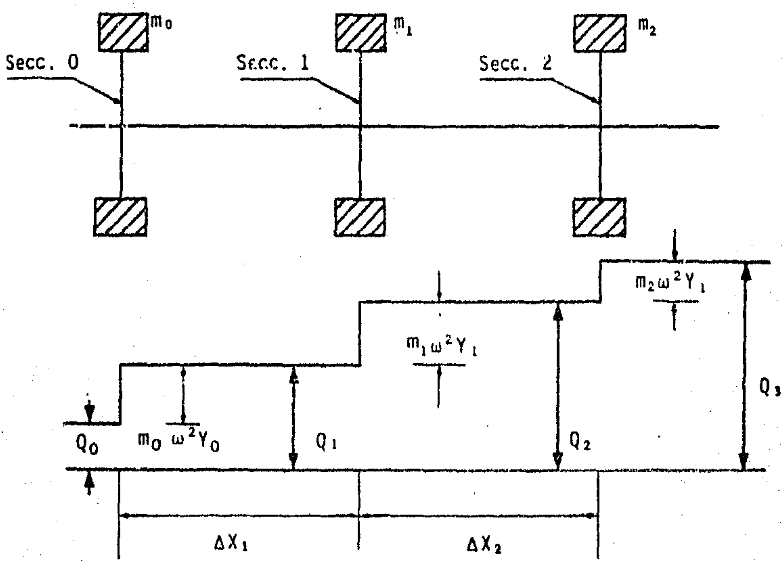


Figura 3.3

y de acuerdo con la ecuación (3.19) existirá un cambio en la fuerza cortante en cero debido a la fuerza de inercia, que es de la forma [7]

$$Q_1 = Q_0 + M_0 \omega^2 y_0 \qquad \ldots\ldots (3.20)$$

donde Q_1 es la fuerza cortante que actúa en la sección 1 del rotor, el momento flexionante para dicha sección está dado por

$$M_1 = M_0 + Q_1 (\Delta X)_1 \qquad \ldots\ldots (3.21)$$

siendo ΔX_i la longitud de la sección considerada.

Ahora, si

$$M = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{(\Delta X)_0} X \qquad \text{..... (3.22)}$$

y sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (3.22) e integrando, se obtiene

$$Y' = \frac{1}{EI_0}\left[M_0 X + \frac{M_1 - M_0}{\Delta X_0}\frac{X^2}{2}\right] + Y'_0 \qquad \text{..... (3.23)}$$

Integrando nuevamente, se tiene

$$Y = \frac{1}{EI_0}\left[M_0 \frac{x^2}{2} + \frac{M_1 - M_0}{\Delta X_0}\frac{X^3}{6}\right] + Y'_0 x + Y_0 \qquad \text{..... (3.24)}$$

Al utilizar las relaciones $\beta_1 = \frac{\Delta X}{(EI)_1}$ y $\Delta X = X$; para la sección n, se tienen las siguientes expresiones

$$Y'_n = \beta_n \left[\frac{Mn-1}{2} + \frac{Mn}{2}\right] + Y'_{n-1} \qquad \text{..... (3.25)}$$

$$Y_n = \beta_n \left[\frac{Mn-1}{3} + \frac{Mn}{6}\right] (\Delta X)n + Y'_{n-1} (\Delta X)_n + Y_{n-1} \qquad \text{..... (3.26)}$$

como las ecuaciones (3.25) y (3.26) son funciones lineales, se puede escribir la siguiente expresión

$$Y_n = A_n Q_0 + B_n M_0 + C_n Y'_0 + D_n Y_0 \qquad \text{..... (3.27)}$$

donde A_n, B_n, C_n y D_n son coeficientes numéricos que pueden obte--

nerse en forma tabular por medio de las ecuaciones anteriores. En nuestro sistema las condiciones de frontera en el extremo son conocidas, de esta forma, dos términos de la ecuación (3.27) pueden eliminarse.

3.3. Formulación sistemática del método de Prohl

El uso sistemático del método de Prohl, se aplica al cálculo de las velocidades críticas en rotores. Este método consiste en encontrar los vectores de estado consecutivos, mediante el uso de una matriz de transferencia, así, la utilidad de este método se basa en un proceso iterativo, el cual, llegará a su fin al cumplir con las condiciones de frontera.

Los valores que satisfacen las condiciones de frontera, serán las velocidades críticas encontradas en el proceso iterativo aplicado al rotor en estudio.

Convenciones para la aplicación del método en apoyos rígidos:

- El rotor se divide en tramos, un tramo es la parte del rotor soportada entre dos apoyos rígidos.

- Cada tramo se divide en n elementos sin masa, de acuerdo a la geometría del rotor.

- La masa concentrada de cada elemento se colocará a la derecha del mismo, incluyendo masas externas.

- Se considera la fuerza cortante y se desprecian las deformaciones por cortante y efectos giroscópicos.

En la Figura 3.4, se muestran los ejes coordenados y la nomenclatura de las convenciones mencionadas anteriormente.

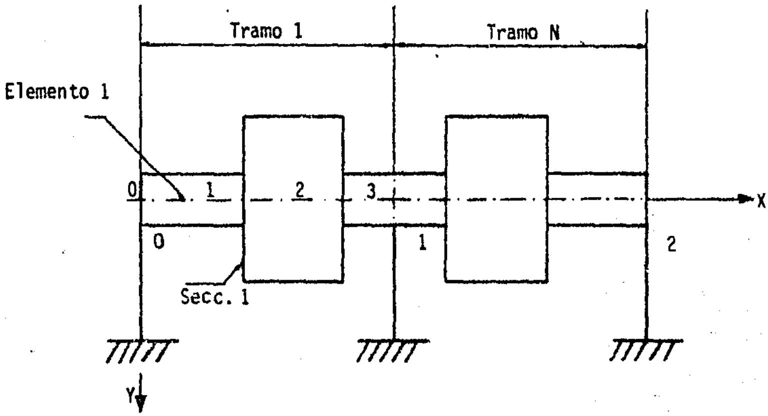


Figura 3.4

A partir de las ecuaciones (3.20), (3.21), (3.23) y (3.24) para el cálculo de un estado i+1 cualquiera, se tiene

$$Y_{i+1} = \left(1 + \frac{\Delta X_i^3}{6EI} m_i\omega^2\right) Y_i + \Delta X_i \, Y'_i + \frac{\Delta X_i^2}{2EI} M_i + \frac{\Delta X_i^3}{6EI} Q_i \qquad \ldots\ldots (3.28)$$

$$Y'_{i+1} = \left(\frac{\Delta X_i^2}{2EI} m_i\omega^2\right) Y_i + Y'_i + \frac{\Delta X_i}{EI} M_i + \frac{\Delta X_i^2}{2EI} Q_i \qquad \ldots\ldots (3.29)$$

$$M_{i+1} = \Delta X_i \, m_i\omega^2 Y_i + M_i + \Delta X_i \, Q_i \qquad \ldots\ldots (3.30)$$

$$Q_{i+1} = m_i\omega^2 Y_i + Q_i \qquad \ldots\ldots (3.31)$$

Ahora, si se agrupan las ecuaciones (3.28), (3.29), (3.30) y (3.31) en forma matricial, se obtiene la matriz de transferencia del estado i al i+1 , cuya forma es

$$\xi_{i+1} = \xi_i \begin{bmatrix} 1 + c_i m_i \omega^2 & b_i m_i \omega^2 & \Delta X_i m_i \omega^2 & m_i \omega^2 \\ \Delta X_i & 1 & 0 & 0 \\ b_i & a_i & 1 & 0 \\ c_i & b_i & \Delta X_i & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (3.32)$$

donde

$$a_i = \frac{\Delta X_i}{EI} \quad ; \quad b_i = \frac{\Delta X_i^2}{2EI} \quad ; \quad c_i = \frac{\Delta X_i^3}{6EI}$$

con

$$\xi_i = \left[Y_i, \; Y'_i, \; M_i, \; Q_i \right] \quad y \quad \xi_{i+1} = \left[Y_{i+1}, \; Y'_{i+1}, \; M_{i+1}, \; Q_{i+1} \right]$$

siendo ξ_i el estado i y ξ_{i+1} el estado i+1, en cualquier sección.

La ecuación (3.32) puede escribirse de la forma

$$\left. \begin{array}{l} \xi_{i+1} = \xi_i \, A_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_i \quad = \xi_{i-1} \, A_i \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots (3.33)$$

Al sustituir la equivalencia del estado ξ_i en el estado ξ_{i+1} tenemos que

$$\xi_{i+1} = \xi_{i-1} \, A_i \, A_{i+1} \quad \ldots\ldots (3.34)$$

Si se conoce un estado anterior K al estado i+1 la ecuación ---- (3.34) será de la forma

$$\xi_{i+1} = \xi_{i-k} \prod_{j=i-k+1}^{i+1} A_j \qquad ..... (3.35)$$

y tomando $r = i - k + 1$,

$$\xi_{i+1} = \xi_{r-1} Z_r^{i+1} \qquad ..... (3.36)$$

donde

$$Z_r^{i+1} = \prod_{j=r}^{i+1} A_j \qquad ..... (3.37)$$

La ecuación (3.36) indica las características en la sección - i+1 (a la derecha del elemento i+1) dadas por un estado ante--- rior cualquiera y el producto de las matrices de transferencia en- tre las seciones r-1 e i+1 . En el caso particular en que las - secciones r-1 e i+1 estén apoyadas en soportes rígidos, como - se muestra en la Figura 3.5.

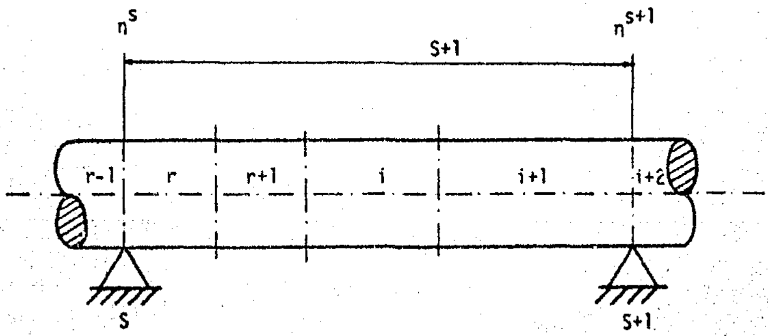


Figura 3.5

los estados r-1 e i+1 quedarán relacionados mediante la expresión

$$\eta^{s+1} = \eta^{s}\ \chi^{s+1} \qquad \ldots\ldots (3.38)$$

donde η^{s} es el valor de ξ sobre el soporte y χ^{s+1} es el producto de las matrices de transferencia [A] , de los elementos comprendidos entre los dos soportes.

Cualquier estado η^{s} será de la forma [8] .

$$\eta^{s} = \left[y^{s},\ y'^{s},\ M^{s},\ Q^{s} \right] \quad ; \quad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ N$$

donde $Y^{s} = 0$

3.3.1. Cálculo de las velocidades críticas

Para realizar el cálculo de estas velocidades, utilizando la formulación sistemática de Prohl, es necesario dividir al rotor, recordando que un tramo es la parte del rotor comprendida entre dos apoyos rígidos, como lo muestra la Figura 3.6.

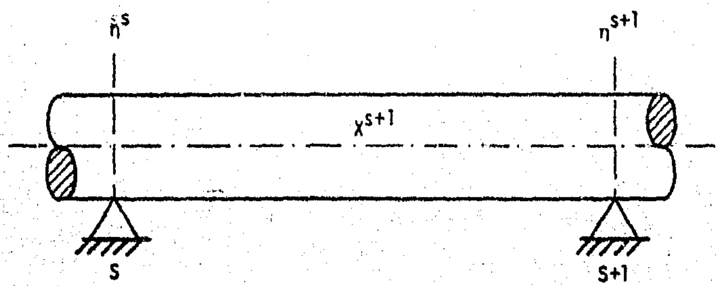


Figura 3.6

A partir de la ecuación (3.38) en la que X_{ij}^{s+1} son los elementos de la matriz X^{s+1} y sustituyendo los vectores de estado, la ecuación quedará de la forma

$$\left[0,\ Y'^{s+1},\ M^{s+1},\ Q^{s+1}\right] = \left[0,\ Y'^{s},\ M^{s},\ Q^{s}\right]\left[X^{s+1}\right] \qquad \text{.....}\ (3.39)$$

El desarrollo de la ecuación (3.39), conduce a un sistema de cuatro ecuaciones con seis incógnitas de la forma [8] .

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Y'^{s}X_{21}^{s+1} + M^{s}\,X_{31}^{s+1} + Q^{s}\,X_{41}^{s+1} \\ Y' &= Y'^{s}X_{22}^{s+1} + M^{s}\,X_{32}^{s+1} + Q^{s}\,X_{42}^{s+1} \\ M^{s+1} &= Y'^{s}X_{23}^{s+1} + M^{s}\,X_{33}^{s+1} + Q^{s}\,X_{43}^{s+1} \\ Q^{s+1} &= Y'^{s}X_{24}^{s+1} + M^{s}\,X_{34}^{s+1} + Q^{s}\,X_{44}^{s+1} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....}\ (3.40)$$

Para analizar el sistema de ecuaciones obtenido, se utiliza, primero, la condición de que la deflexión en los apoyos es cero y posteriormente, se normaliza la variable Y'^{s}, quedando así, reducido el número de incógnitas a cuatro.

Ahora, si se despeja el cortante de la primera ecuación, (3.40)

$$Q^{s} = \frac{-Y'^{s}\ X_{21}^{s+1} - M^{s}\ X_{31}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}} \qquad \text{.....}\ (3.41)$$

Y sustituyendo la ecuación (3.41) en la ecuación (3.40) se obtiene un sistema de tres ecuaciones que son de la forma

$$\left.\begin{aligned}
Y'^{s+1} &= Y'^{s}\left(X_{22}^{s+1} - \frac{X_{21}^{s+1}\,X_{42}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}}\right) + M^{s}\left(X_{32}^{s+1} - \frac{X_{42}^{s+1}\,X_{31}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}}\right)\\
M^{s+1} &= Y'^{s}\left(X_{23}^{s+1} - \frac{X_{43}^{s+1}\,X_{21}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}}\right) + M^{s}\left(X_{33}^{s+1} - \frac{X_{43}^{s+1}\,X_{31}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}}\right)\\
Q^{s+1} &= Y'^{s}\left(X_{24}^{s+1} - \frac{X_{44}^{s+1}\,X_{21}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}}\right) + M^{s}\left(X_{34}^{s+1} - \frac{X_{44}^{s+1}\,X_{31}^{s+1}}{X_{41}^{s+1}}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.42)$$

El sistema de ecuaciones (3.42), es la base para determinar los estados intermedios del rotor. Esto se hace, sustituyendo una velocidad de rotación ω propuesta en el sistema de ecuaciones (3.42). Para que la velocidad ω corresponda a una velocidad crítica del rotor, es necesario que cumpla con las condiciones η^{o} y η^{n}, las cuales son

$$\left.\begin{aligned}
\eta^{o} &= 0,\ Y'^{o},\ 0,\ Q^{o}\\
\eta^{N} &= 0,\ Y'^{N},\ 0,\ Q^{N}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.43)$$

con $$Y'^{o} = 1 \quad \ldots\ldots (3.44)$$

3.3.2. Análisis modal para soportes rígidos

Una vez obtenido el valor de la velocidad crítica ω_c, se hace uso de la siguiente ecuación

$$\xi_n = \xi_o\, X \quad \ldots\ldots (3.45)$$

y como $Y'^{o} = 1$

$$\left[0,\ y'^{N},\ 0,\ Q^{N}\right] = \left[0,\ 1,\ 0,\ Q^{0}\right] \left[X\right] \qquad \ldots\ldots (3.46)$$

Donde $[X]$ es el producto de todas las matrices $[A]$.

El desarrollo de la ecuación (3.46), lleva a

$$0 = X_{21} + Q^{0} X_{41} \qquad \ldots\ldots (3.47)$$

por lo que

$$Q^{0} = -\frac{X_{21}}{X_{41}} \qquad \ldots\ldots (3.48)$$

y así, el estado cero es de la forma

$$\xi_{0} = \left[0,\ 1,\ 0,\ -\frac{X_{21}}{X_{41}}\right] \qquad \ldots\ldots (3.49)$$

Una vez calculado el estado cero, el estado 1 se obtiene de

$$\xi_{1} = \xi_{0}\ [A]_{1} \qquad \ldots\ldots (3.50)$$

El siguiente estado será:

$$\xi_{2} = \xi_{1}\ [A]_{2} \qquad \ldots\ldots (3.51)$$

En forma análoga se calculan los demás estados hasta el extremo del rotor, donde

$$\xi_{n} = \xi_{n-1}\ [A]_{n} \qquad \ldots\ldots (3.52)$$

3.3.3. Soportes flexibles

Para este análisis se suponen las siguientes consideraciones:

a) Las condiciones de frontera están dadas por:

$$Y_i \neq 0 \quad , \quad M_i = 0$$

$$Y_i' \neq 0 \quad , \quad Q_i = 0$$

b) Los elementos del vector que indican el comportamiento de un estado, cuando éste se encuentre sobre un apoyo flexible, se verá afectado por la respuesta en el apoyo R_A que es de la forma

$$R_A = -K\ Y_i \qquad \ldots\ldots (3.53)$$

c) El rotor se divide en elementos, los cuales se toman entre extremos.

En la Figura 3.7, se puede observar la consideración mencionada en el inciso b), donde

$$Q_I - K\ Y = Q_D \qquad \ldots\ldots (3.54)$$

Q_I es la fuerza cortante del lado izquierdo del apoyo.

Q_D es la fuerza cortante del lado derecho.

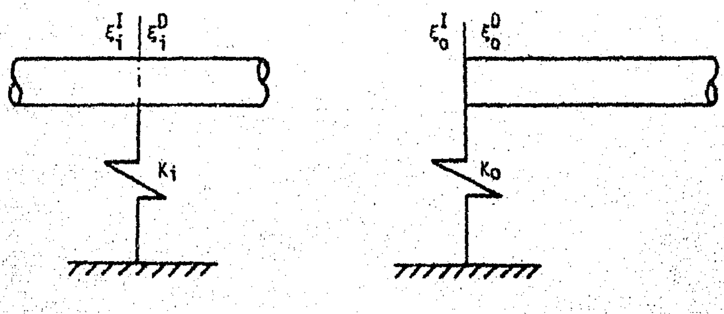


Figura 3.7

Ampliando el análisis anterior, la condición de frontera es - $\xi_0 = \left[Y_0,\ Y'_0,\ 0,\ 0\right]$ por encontrarse fuera del rotor [9] . Como lo muestra la Figura 3.8.

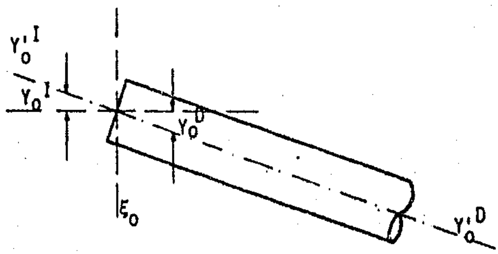


Figura 3.8

De lo anterior

$$\left.\begin{aligned} Y_0^I &= Y_0^D \neq 0 \\ Y'^{I}_{0} &= Y'^{D}_{0} \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (3.55)$$

y

$$Q_0^D = -KY_0 \qquad \ldots\ldots (3.56)$$

Empleando las ecuaciones (3.54) y (3.55), el vector de estado que se encuentra sobre un apoyo es

$$\xi_i = \left[Y_i,\ Y'_i,\ M_i,\ Q_i - K\,Y_i\right] \qquad \ldots\ldots (3.57)$$

Y matricialmente tiene la forma

$$\xi_i = \xi_i \, [V] \qquad \ldots\ldots (3.58)$$

donde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo que, para llegar a la frontera extrema del rotor, se tiene que:

$$\xi_n = \xi_0^D \prod_{j=1}^{n} (A_j V_j) \qquad \ldots\ldots (3.59)$$

con

$$\xi_0^D = \xi_0 \, [V]_0 \qquad \ldots\ldots (3.60)$$

Al aplicar la ecuación (3.59) al ejemplo de la Figura 3.9

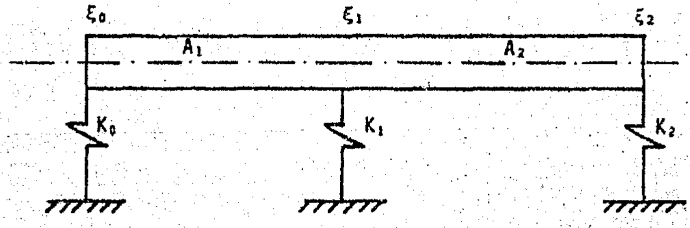


Figura 3.9

se obtiene

$$\xi_1 = \xi_o \; V_o \; A_1 V_1 \qquad \text{..... (3.61)}$$

$$\xi_2 = \xi_1 \; A_2 \; V_2 \qquad \text{..... (3.62)}$$

Si se sustituye la ecuación (3.61) en la ecuación (3.62),

$$\xi_2 = \xi_o \; V_o \; A_1 V_1 A_2 V_2 \qquad \text{..... (3.63)}$$

$$\xi_2 = \xi_o^D \prod_{j=1}^{2} A_j V_j \qquad \text{..... (3.64)}$$

Ahora, si

$$X = V_o \prod_{j=1}^{n} A_j V_j \qquad \text{..... (3.65)}$$

y

$$B = \prod_{j=1}^{n} A_j V_j \qquad \text{..... (3.66)}$$

se llega a

$$\xi_2 = \xi_o \; X \qquad \text{..... (3.67)}$$

$$\xi_n = \xi_o \begin{bmatrix} B_{11}-K_0B_{41} & B_{12}-K_0B_{42} & B_{13}-K_0B_{43} & B_{14}-K_0B_{44} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{..... (3.68)}$$

Al aplicar condiciones de frontera y utilizando las ecuaciones (3.59) y (3.65) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Y_0 X_{13} + Y'_0 X_{23} \\ 0 &= Y_0 X_{14} + Y'_0 X_{24} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (3.69)$$

Y en forma matricial se tiene que

$$\begin{bmatrix} 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0, & Y'_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{13} & X_{14} \\ X_{23} & X_{24} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (3.70)$$

Para que la ecuación (3.70) tenga soluciõn no trivial, el determinante de la matriz $[X]$ debe ser igual con cero. Por lo tanto

$$X_{13}\ X_{24} - X_{23}\ X_{14} = 0 \qquad \ldots\ldots (3.71)$$

La ecuaciõn anterior es la base para el cãlculo de las velocidades criticas, debido a que en ella se incluyen las condiciones de frontera del rotor y solamente la velocidad crítica puede satisfacer a la ecuación (3.71).

3.3.4. Análisis modal para soportes flexibles

El análisis modal para soportes flexibles, consiste en determinar un estado ξ_i cualquiera, en función de los valores que tomen las variables que definen dicho estado. Estos valores son, a la vez, función de la velocidad crítica con la que se realice el análisis.

Partiendo de la ecuación (3.67) para n estados, tenemos que

$$\xi_n = \xi_0\ X \qquad \ldots\ldots (3.72)$$

Y el arreglo matricial queda de la forma

$$\begin{bmatrix} Y_n, & Y'_n, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_o, & Y'_o, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (3.73)$$

Al desarrollar la ecuación (3.73) se llega a

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -Y_n + Y_o X_{11} + Y'_o X_{21} \\ 0 &= -Y'_n + Y_o X_{12} + Y'_o X_{22} \\ 0 &= Y_o X_{13} + Y'_o X_{23} \\ 0 &= Y_o X_{14} + Y'_o X_{24} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.74)$$

Si se agrupan las deflexiones y pendientes en un vector de estado, la ecuación (3.74) en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} -Y_n, & -Y'_n, & Y_o, & Y'_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots (3.75)$$

que puede escribirse

$$\begin{bmatrix} \{-Y_n, -Y'_n, Y_o, 0\} + Y'_o\{0, 0, 0, 1\} \end{bmatrix} R = 0 \quad \ldots\ldots (3.76)$$

Si efectuamos el producto y al pasar Y'_o al segundo miembro, con $Y'_o = 1$ se tiene que

$$\begin{bmatrix} -Y_n, & -Y'_n, & Y_o, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} X_{21}, & X_{22}, & X_{23}, & X_{24} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (3.77)$$

La ecuación (3.77) es soluble si el determinante de la misma es diferente de cero. Por lo tanto, aplicando la regla de Cramer para obtener la deflexión inicial Y_o, se obtiene la siguiente expresión

$$Y_o = -\frac{X_{23}}{X_{13}} \quad \ldots\ldots (3.78)$$

De esta forma el estado cero es

$$\xi_o = \left[-\frac{X_{23}}{X_{13}}, 1, 0, 0 \right] \quad \ldots\ldots (3.79)$$

Y para determinar el estado 1 normalizado, se hace uso de la siguiente ecuación

$$\xi_1 = \xi_o V_o A_1 V_1 \quad \ldots\ldots (3.80)$$

En general, con la formulación secuencial

$$\xi_j = \xi_{j-1} A_j V_j \quad \ldots\ldots (3.81)$$

se determinan los estados subsecuentes.

Como complemento a este capítulo, se incluye en el apéndice de este trabajo, el programa de cómputo VCR-MATRA, en lenguaje BASIC, el cual, calcula las velocidades críticas y deflexiones modales de un rotor, aplicando el método sistemático de Prohl.

IV. BALANCEO DE ROTORES FLEXIBLES

El objetivo de balancear un elemento giratorio es el de reducir las amplitudes de vibración al máximo. Para el caso particular de un rotor flexible, que es aquel que gira a una velocidad cercana o mayor a la crítica, el balanceo permitirá disminuir las deflexiones que sufra el rotor debido a los efectos de la velocidad crítica.

4.1. Análisis modal

La teoría de este análisis se basa en el concepto de que los modos son movimientos linealmente independientes y que cada modo, representa el comportamiento del sistema rotor-chumacera vibrando a una frecuencia natural.

Si se supone la ecuación de movimiento del sistema de la forma [10] ,

$$[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \qquad \ldots\ldots (4.1)$$

premultiplicando por $[M]^{-1}$ la ecuación (4.1) se tiene

$$I\ddot{x} + Ax = 0 \qquad \ldots\ldots (4.2)$$

donde A es la matriz dinámica del sistema.

Suponiendo un movimiento armónico de la forma

$$x(t) = x\cos\omega t \qquad \ldots\ldots (4.3)$$

y

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x\cos\omega t \qquad \ldots\ldots (4.4)$$

la ecuación (4.2) se puede reescribir de la forma

$$\left[A - \lambda I\right] \{x\} = 0 \qquad \ldots\ldots (4.5)$$

La ecuación característica del sistema se obtiene, igualando el determinante a cero, de tal forma que

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \ldots\ldots (4.6)$$

De la expresión anterior se obtienen las raíces λ_i, las cuales serán las frecuencias naturales del sistema. Calculadas estas frecuencias, se procede a determinar los modos de vibración del mismo. Haciendo uso de la matriz adjunta de $\left[A - \lambda I\right]$, y sustituyendo en ésta a λ_i, se obtiene el modo X_i, siendo éste la primera columna de la matriz adjunta.

Por lo tanto, la matriz modal $[P]$ se puede escribir de la forma

$$P = \left[\{X_j\}\lambda_i \ \{X_j\}\lambda_2 \ . \ . \ . \ \{X_n\}\lambda_n\right] = \left[X_1 \quad X_2 \quad . \ . \ . \quad X_n\right] \qquad \ldots\ldots (4.7)$$

Para el caso de un sistema excitado y con amortiguamiento, trataremos de expresar las ecuaciones de movimiento mediante coordenadas principales, (sistema no acoplado) [2] .

Para esto, se consideran las propiedades ortogonales de los modos de vibración. Estas propiedades indican que,

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \ X'_i \ m \ X_j \qquad \ldots\ldots (4.8)$$

si $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$X'_i \ m \ X_j = 0 \qquad \ldots\ldots (4.9)$$

con lo que se cumple [2]

$$X'_i \; K \; X_j = 0 \qquad \ldots\ldots (4.10)$$

Finalmente para $i = j$

$$X'_i \; m \; X_i = m_i \qquad \ldots\ldots (4.11)$$

y

$$X'_i \; K \; X_i = K_i \qquad \ldots\ldots (4.12)$$

donde, m_i es la masa generalizada, K_i es la rigidez generalizada y X'_i es la matriz transpuesta de X_i .

Ahora si se divide cada columna de la matriz modal $[P]$, entre la masa generalizada m_i, se obtiene $[\tilde{P}]$ llamada matriz modal reducida.

Para desacoplar la ecuación original, se premultiplica el vector de coordenadas principales por la matriz modal reducida y debido a las condiciones

$$\tilde{P}' \; m \; \tilde{P} = I \qquad \ldots\ldots (4.13)$$

y

$$\tilde{P}' \; K \; \tilde{P} = \lambda I \qquad \ldots\ldots (4.14)$$

la ecuación dinámica del sistema en coordenadas principales es de la forma [10] ,

$$\tilde{P}' \; m \; \tilde{P} \; \ddot{y} + \tilde{P}' \; C \; \tilde{P} \; \dot{y} + \tilde{P}' \; K \; \tilde{P} \; y = \tilde{P}'F \qquad \ldots\ldots (4.15)$$

Si ahora se supone un sistema como excitación senoidal, definido por la siguiente ecuación [10] .

$$[Z] \{X\} = \emptyset \qquad \ldots\ldots (4.16)$$

premultiplicando esta ecuación por $[Z]^{-1}$, se obtiene

$$\{X\} = [Z]^{-1}\{\emptyset\} \qquad \ldots\ldots (4.17)$$

donde $[Z]$ es la matriz de rigidez dinámica y está dada por

$$[Z] = \{-\omega^2 [M] + [K]\} \qquad \ldots\ldots (4.18)$$

$\emptyset$ es la amplitud de la fuerza de excitación (fuerza centrífuga).

$\{X\}$ es el vector de desplazamientos.

Si a $[Z]^{-1}$ se le llama receptancia del sistema y es definida como

$$[\alpha] = [Z]^{-1} \qquad \ldots\ldots (4.19)$$

la ecuación (4.17) se puede reescribir de la forma [10]

$$\{X\} = [\alpha]\{\emptyset\} \qquad \ldots\ldots (4.20)$$

Lo que da el desplazamiento, en función de la fuerza centrífuga y la rigidez dinámica del sistema.

4.2. Balanceo de rotores aplicando el método de coeficientes de influencia

El análisis que se presenta a continuación, tiene el fin de minimizar las vibraciones de un rotor en diferentes planos. El balanceo de un rotor se hace mediante la aplicación del conocimiento de la matriz de coeficientes de influencia, la cual caracteriza al rotor estableciendo una relación lineal entre una vibración y la masa de prueba que la produce.

Posteriormente, mediante la suposición de que el vector de vibraciones resultante del sistema es igual a cero en su módulo, se encontrará el sistema de masa que cumpla con dicha restricción. Esto significa balancear detidamente el rotor.

4.2.1. Descripción del método de coeficientes de influencia

En este método, las vibraciones inducidas $\overline{V}_n$ debidas a una masa de prueba m* en el plano j, será la diferencia entre las vibraciones iniciales $\overline{V}_B$ y las vibraciones resultantes $\overline{V}_A$ al agregar la masa de prueba al sistema.

Entonces,

$$\overline{V}_n = \overline{V}_A - \overline{V}_B \qquad \text{..... (4.21)}$$

La medición de las vibraciones mencionadas anteriormente se realiza cuando el rotor gire a una velocidad cercana a la velocidad crítica.

Si se supone que $\overline{V}_n$ es proporcional al desbalanceo, podremos escribir [11] ,

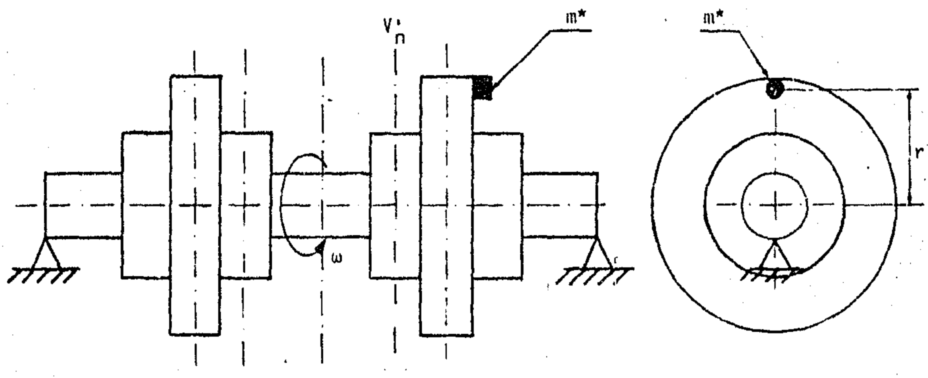
$$\frac{\text{Desbalanceo i}}{\text{Masa m*}} = \text{Coeficiente de influencia} \qquad \text{..... (4.22)}$$

Estos coeficientes de influencia permiten llevar a cabo la caracterización del rotor.

4.2.2. Método de coeficientes de influencia para varios planos de balanceo

La Figura 4.1 muestra un rotor girando a una velocidad ω en -

el que está colocada una masa de prueba m* en el plano j, la cual provoca una vibración inducida $\overline{V}_n^i$ en el plano i .



m* es la masa de prueba

ω es la velocidad de rotación

Figura 4.1 Planos de caracterización del rotor

Los elementos de la matriz [T] se determinan columna por columna, partiendo de la siguiente ecuación

$$\{\overline{V}_n\} = [T]\,\{m_j^*\} \qquad \ldots\ldots (4.23)$$

donde:

$[T]$ es la matriz de coeficientes de influencia que permite la linealidad entre $\bar{V}_n$ y m_j^* .

$\{\bar{V}_n\}$ es el vector columna de vibraciones netas a las que está sujeto el sistema.

$\{m_j^*\}$ es el vector columna de masas de prueba.

Para obtener los elementos de la matriz $[T]$, se coloca una masa de prueba m* a un radio r, en el plano J y se miden las vibraciones producidas por dicha masa en diferentes puntos del sistema, como se mostró en la Figura 4.1. Por lo tanto

$$V_n^i = T_{ij}\ m_j^* \qquad \text{..... (4.24)}$$

Una vez determinada la matriz $[T]$, se procede a calcular el vector de masas $\{S\}$ que minimiza las vibraciones iniciales $\bar{V}_B$ mediante la siguiente ecuación [11] ,

$$\{S\} = [T]^{-1}\{\bar{V}_B\} \qquad \text{..... (4.25)}$$

Se entiende por minimizar las vibraciones del sistema, el disminuirlas en varios planos a diferentes velocidades de rotación y atribuyéndoles una cierta importancia, mediante el uso de coeficientes de ponderación λ_i .

La matriz a minimizar se define como

$$[V_p] = [E]\ \{\bar{V}_s\} \qquad \text{..... (4.26)}$$

en donde

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{..... (4.27)}$$

Aplicando el método de optimación ponderada, el cual es

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \; \overline{V}_{Si})^2 = 0 \qquad \ldots\ldots (4.28)$$

y si
$$\{\overline{V}_S\} = T \; [B+S] \qquad \ldots\ldots (4.29)$$

$$\{\overline{V}_S\} = \overline{V}_B + T\,S \qquad \ldots\ldots (4.30)$$

se tiene,

$$|V_P|^2 = [E \; (\overline{V}_B + TS)]^* \; [E \; (\overline{V}_B + TS)] \qquad \ldots\ldots (4.31)$$

El asterisco (*) indica que es una matriz transpuesta conjuga da.

De la ecuación (4.30) se supone que $\{\overline{V}_S\} = 0$, por lo que

$$\left[\overline{V}_B\right] = - \; [T] \; \{S\} \qquad \ldots\ldots (4.32)$$

El desarrollo de la ecuación (4.31) conduce a

$$|V_P|^2 = [E \; \overline{V}_B + E\,T\,S]^* \; [E\overline{V}_B + E\,T\,S] \qquad \ldots\ldots (4.33)$$

con $\left|V_p\right|^2 \cong 0$, entonces

$$0 = \overline{V}_B^* \; E^* \; E\overline{V}_B + S^*T^*E^*E \; \overline{V}_B + \overline{V}_B^* \; E^*E \; TS + S^*T^*E^*E \; TS \qquad \ldots\ldots (4.34)$$

Sustituyendo la ecuación (4.32) en la ecuación (4.34) únicamente en el primer término para evitar llegar a $0 \cong 0$, se tiene

$$0 = \cancel{-\overline{V}_B^* E^*ETS} + S^*T^*E^*E\overline{V}_B + \cancel{\overline{V}_B^* E^*ETS} + S^*T^*E^*E\,T\,S \qquad \ldots\ldots (4.35)$$

y simplificando

$$0 = \cancel{S^*}T^*E^* \; \overline{V}_B + \cancel{S^*}T^*E^* \; E\,T\,S \qquad \ldots\ldots (4.36)$$

con lo que,

$$S = (T^*E^*ET)^{-1}(T^*E^*E\,\overline{V}_B) \qquad \ldots\ldots (4.37)$$

La ecuación (4.37) define el sistema óptimo de masas que deberá ser colocado en el rotor.

En el apéndice de este trabajo se anexa el programa BACOIN, - que utilizando el método de coeficientes de influencia, determina el sistema óptimo de masas que balancea a un rotor hasta en 20 planos.

V. MODELADO DE ROTORES

En este capítulo, se dan las bases para realizar el modelado de un rotor en función de sus características físicas y geométricas para poder obtener sus velocidades criticas y formas modales.

5.1. Descripción del modelo

El modelo del rotor es una representación de éste que contiene las dimensiones geométricas y de masa que representan las distribuciones de rigidez e inercia a lo largo del rotor.

La Figura 5.1 muestra el modelo de un rotor soportado por n apoyos.

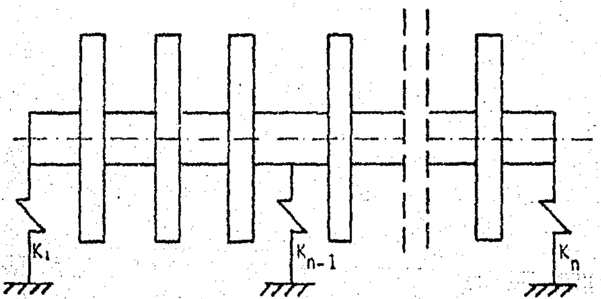


Figura 5.1

Al efectuar el modelado de un rotor se debe tomar en cuenta - que existen, elementos que sólo contribuyen como masas concentra-- das, como es el caso de los álabes de una turbina. Por otro lado existen componentes, cuya configuración, parte contribuye a la ri- gidez y en parte como masa concentrada. Un ejemplo de éstos son - los discos forjados o ensamblados a presión.

En el capítulo III se mencionó que los tramos (segmentos de - rotor entre dos apoyos contiguos), se dividen en elementos cuyas - características geométricas y físicas son constantes, las cuales - son:

- Diámetro exterior	[m]
- Diámetro interior	[m]
- Longitud	[m]
- Masa (la propia más la externa)	[kg]
- Temperatura	[°C]

Este último parámetro se considera constante a lo largo de to do el rotor.

El número de elementos en que se divide un rotor, depende de la experiencia e inventiva del analista. La Figura 5.2 muestra el modelo de los elementos de un rotor.

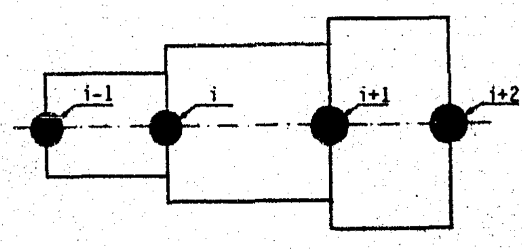


Figura 5.2 Modelado de los elementos de un rotor

5.2. Recomendaciones para el modelado

Para la obtención de un modelo de rotor, es recomendable obtener los datos siguientes:

a. Todos los datos geométricos incluyendo cambios de diámetro y su posición axial.

b. Pesos de los álabes, otras masas externas y su posición axial.

c. Las rigideces de los apoyos.

d. Cálculo de diámetros equivalentes donde existan variaciones de más del 10%.

e. Calcular las masas externas de las partes que no contribuyen a la rigidez.

5.3. Modelado de masas

Para el modelado de masas en un sistema rotor-chumacera, se aplican los siguientes puntos:

i. Para el primer elemento tomaremos la mitad de su propia masa (más la externa si existe) y la mitad de la masa propia y externa del siguiente elemento.

ii. Para el modelado de los siguientes elementos intermedios, se tomará la mitad de la masa del elemento anterior más la mitad de la masa del elemento considerado.

iii. Para el último elemento, se tendrá la mitad de la masa del elemento anterior y la mitad de su propia masa, compensando así la mitad de la masa del primer elemento que no se había considerado.

La Figura 5.3 muestra el modelado de las masas.

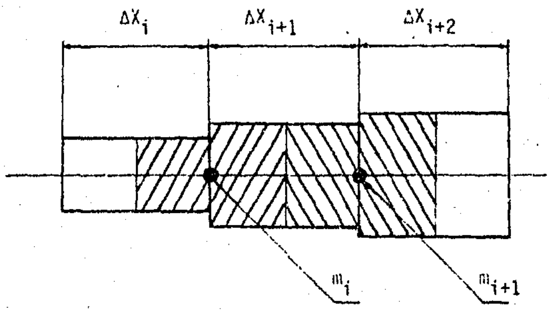


Figura 5.3 Modelado de las masas

5.4. Cálculo de los diámetros que contribuyen a la rigidez del rotor

La rigidez del rotor se ve afectada en el caso real debido a los cambios de sección del mismo, así pues, en el modelado se tendrá especial cuidado cuando:

- Elementos consecutivos tengan una variación del 10% en sus diámetros.
- Contribución de un elemento externo (disco).

Para tales casos, el modelado del elemento se hará tomando un diámetro equivalente D_Z, el cual será menor al diámetro real.

5.4.1. Diámetro equivalente para discos forjados

A manera de guía, se presentan curvas empíricas [11] sobre la determinación de diámetros para discos tanto forjados como ensamblados. Estos últimos se tratarán en la siguiente sección.

Para calcular los diámetros equivalentes en discos forjados, se hace uso del diagrama de la Figura 5.4. La manera de utilizar el diagrama es conociendo el espesor B del disco, el diámetro d de la flecha y el diámetro D, se puede determinar la relación de los momentos de inercia Jz/J a la cual llamaremos Q, de esta forma si:

$$Q = \frac{D_z^4}{d^4} \qquad \ldots\ldots (5.1)$$

se tiene que

$$D_z = d\ Q^{1/4} \qquad \ldots\ldots (5.2)$$

donde:

d es el diámetro de la flecha

D es el diámetro externo del disco y

D_z es el diámetro externo equivalente calculado.

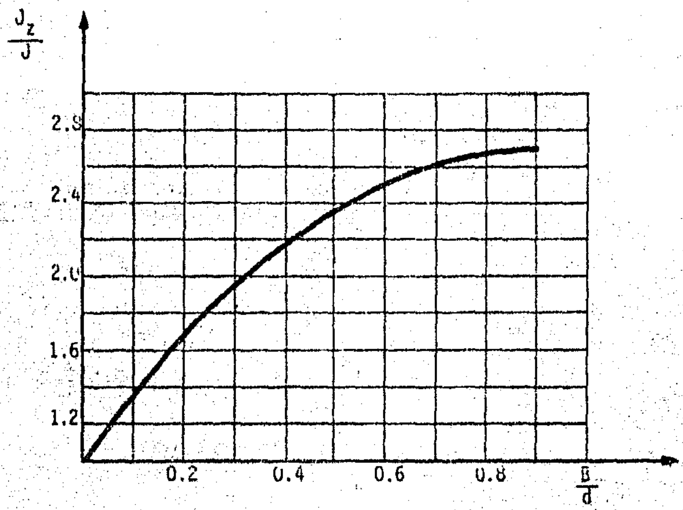


Figura 5.4 Diagrama que relaciona J_z/J y B/d

5.4.2. Diámetro equivalente para discos ensamblados a presión

Este tipo de discos se tiene cuando el disco se calienta, lo que provoca una dilatación del mismo, aumentando así su diámetro y esto facilitará su montaje en la flecha. Al enfriarse, quedará comprimida el área del rotor en la cual fue ensamblado el disco, contribuyendo de esta manera a la rigidez de la flecha.

En la Figura 5.5 se muestra el diagrama que se utiliza para el cálculo del diámetro equivalente. Dados A, B, D y d, se podrá determinar la relación J_Z/J que se sustituirá en la ecuación (5.2)

donde

A	es la interferencia entre el disco y la flecha	[m]
B	es el espesor del disco	[m]
D	es el diámetro externo del disco	[m]
d	es el diámetro de la flecha	[m]

La interferencia A se define como

A = diámetro de la flecha - diámetro interno del disco.

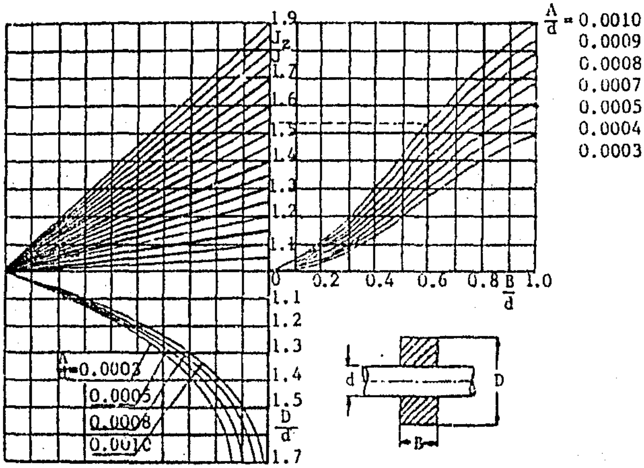


Figura 5.5 Diagrama para obtener las relaciones J_Z/J, A/d, B/d

5.5. Cálculo de masas externas

Para los dos casos anteriores, al introducir como dato el diámetro equivalente D_Z, se deberá incluir como masa externa la masa correspondiente a

$$ME = V\rho \qquad ..... (5.3)$$

con

$$V = \pi \, (D^2 - D_Z^2) \, \frac{B}{4} \qquad ..... (5.4)$$

donde

ME es la masa externa

V es el volumen

ρ es la densidad del material

D es el diámetro externo del disco

D_Z es el diámetro equivalente del disco

B es el espesor del disco.

NOTA: Los capítulos VI y VII que se presentan a continuación, contienen algunos ejemplos de aplicación de los programas VCR-MATRA y BACOIN. Se autoriza la utilización de estos programas, siempre y cuando se les dé crédito a los autores.

VI. P R O G R A M A P A R A C A L C U L A R V E L O C I D A D E S C R I T I C A S VCR - MATRA

La elaboración del programa VCR-MATRA está basada en la formulación sistemática del método de Prohl. El algoritmo utilizado es la iteración de matrices de transferencia que permite encontrar las velocidades críticas y deflexiones modales.

VCR-MATRA se realizó en lenguaje BASIC en una microcomputadora personal Commodore 64 plus/4. El carácter simple del programa permite su adaptación a otro tipo de computadoras con lenguaje BASIC, cambiando únicamente ciertas instrucciones particulares de impresión.

El programa consiste de las siguientes partes:

1) Suministro de datos
2) Modelado del rotor
3) Operaciones matriciales
4) Interpolación
5) Cálculo de las deflexiones modales.

El suministro de datos se efectúa por elementos una vez asignados el número de apoyos y de elementos.

Los datos que se suministran son: longitud, módulo de elasticidad, diámetro de rotor, diámetro del disco (si lo hay), densidad y masa externa (si existe).

El modelado asigna las masas para cada matriz de transferencia. Al mismo tiempo, en caso de haber discos, esta parte del pro grama requiere de la decisión entre discos forjados y discos a pre sión, para poder efectuar una nueva distribución de masas y rigidez en el rotor.

Las operaciones matriciales se elaboran a partir de una decisión entre apoyos rígidos o flexibles. En el caso de apoyos flexibles, es necesario introducir los valores de rigidez de los apoyos. Dada una velocidad ω inicial, el proceso se inicia formando las matrices de transferencia y premultiplicando cada matriz formada por el producto de las matrices anteriores.

Una vez efectuadas todas las multiplicaciones hasta llegar al último elemento, el valor de velocidad, ya sea para apoyos flexibles o rígidos, se ve incrementado en caso de no cumplir las condiciones de frontera establecidas en el capítulo III. Si ocurre un cambio de signo entre el valor anterior y el nuevo del momento o del determinante, dependiendo del tipo de apoyos, el programa realiza una serie de interpolaciones lineales para encontrar el valor de la velocidad que cumpla con las condiciones de frontera.

Finalmente VCR-MATRA realiza, como opción, el cálculo de la deflexión modal, sustituyendo la velocidad crítica en las matrices de transferencia. El proceso implica obtener estado por estado en función del estado anterior y de esta manera, se imprimen los valores de las deflexiones modales en las secciones de los elementos.

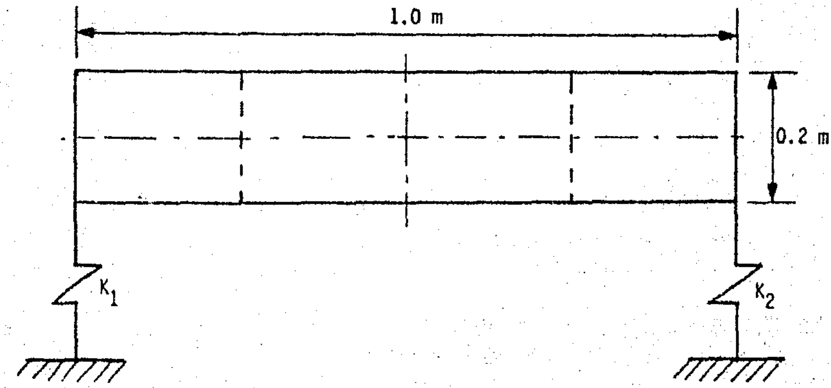
El listado de este programa se presenta en el apéndice A.1 de este trabajo.

6.1. Ejemplos de aplicación del programa VCR-MATRA

A continuación, se presenta un rotor de 1 m de longitud y diámetro constante de 0.2 m. El material del que está hecho el rotor es acero y se encuentra soportado en un par de apoyos en sus extremos.

El objeto de los ejemplos que a continuación se presentan, es para poder comparar las velocidades críticas que puedan obtenerse en función de la rigidez de los apoyos, según el siguiente plan de análisis.

Ejemplo	Rigidez de los apoyos
1	1E+12 N/m
2	.1E+9 N/m
3	1E+5 N/m



PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.250	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 4 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 2526.51552 RAD/SEG 24126.446 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.51710145E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .225743594
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .319185906
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .225743562
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 1.51650847E-04

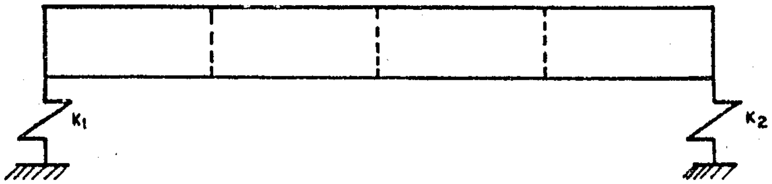
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 10030.8297 RAD/SEG 95787.3676 RPM

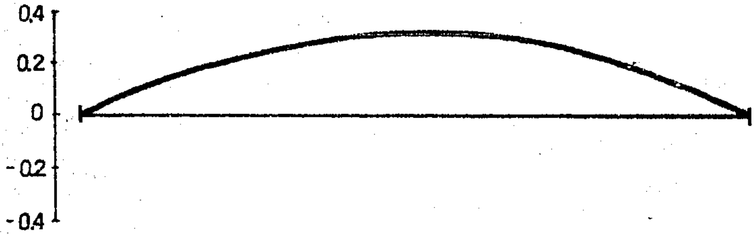
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 5.21535932E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .167101128
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-5.6280237E-07
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.167100705
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-5.18294336E-04

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 21301.245 RAD/SEG 203411.806 RPM

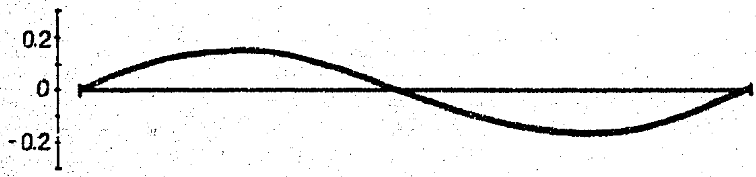
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 9.11949998E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .108239845
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-.153107827
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .108243502
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 8.86495041E-04

DEFLEXIONES MODALES

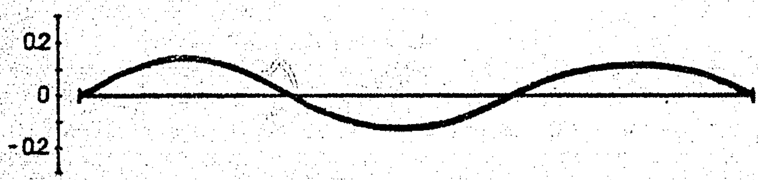




PRIMER MODO
W= 2526.51 R/S



SEGUNDO MODO
W= 10030.82 R/S



TERCER MODO
W= 21301.24 R/S

PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.250	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+09 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 4 ES: 1E+09 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 1955.03431 RAD/SEG 18669.2024 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: .212552353
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .436403749
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .519915401
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .408674393
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .159197074

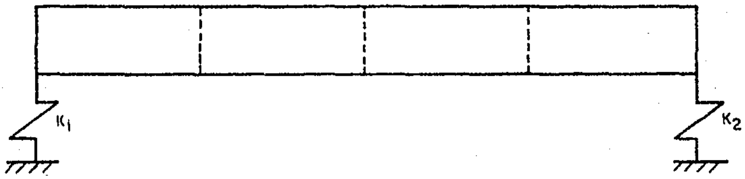
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 4062.11553 RAD/SEG 38790.346 RPM

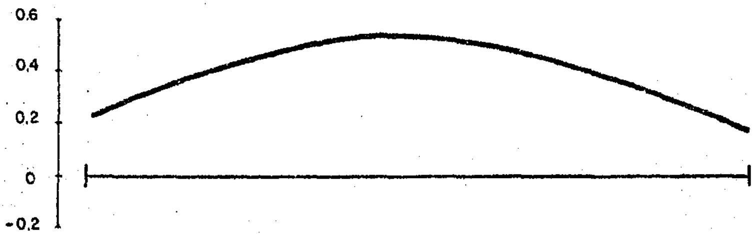
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES:-.373212368
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES:-.124253669
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .0081119374
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .20197504
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .172411699

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 8653.91162 RAD/SEG 82638.7687 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES:-.0922732157
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .104005532
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .0552482231
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.1333578
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-.214207936

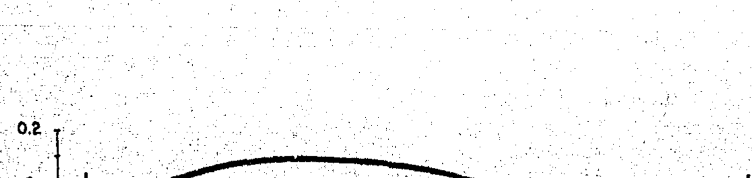
DEFLEXIONES MODALES





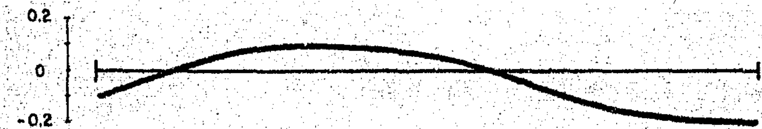
PRIMER MODO

W = 1955 R/S



SEGUNDO MODO

W = 4062.1 R/S



TERCER MODO

W = 8653.9 R/S

PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.250	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 100000 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 4 ES: 100000 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 27.304645 RAD/SEG 260.740153 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES:-1.92677724
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES:-1.67676049
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-1.42665559
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-1.1764346
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-.926132877

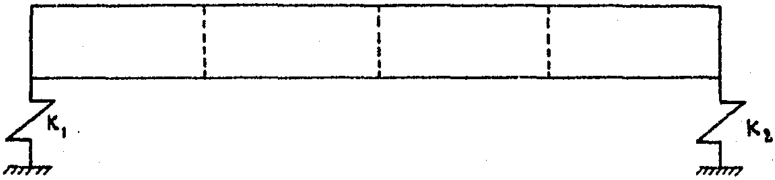
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 53.1256817 RAD/SEG 507.312891 RPM

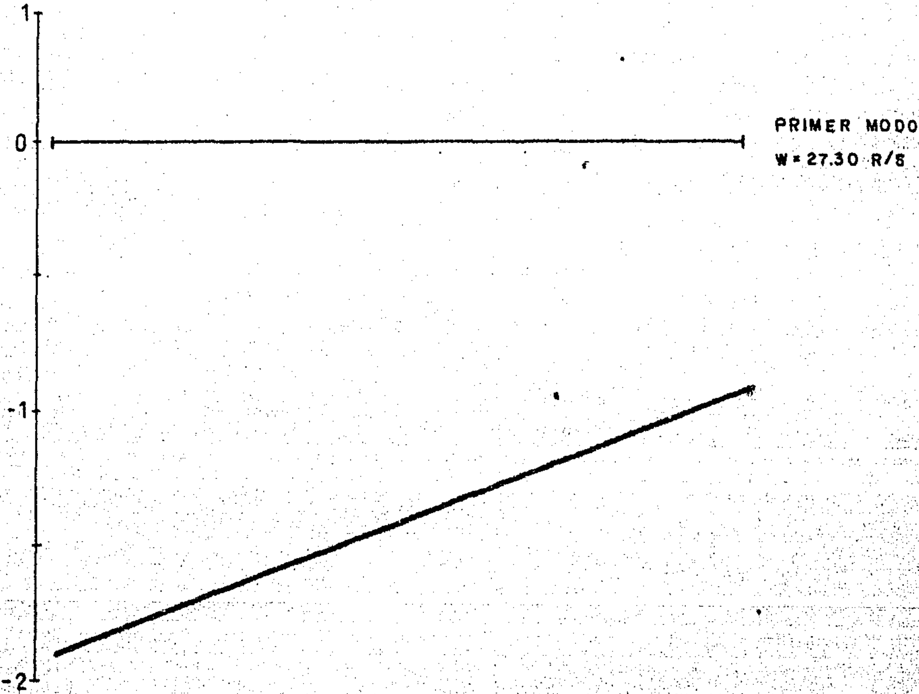
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES:-.324597385
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES:-.0746012513
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .175369594
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .425286418
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .675149953

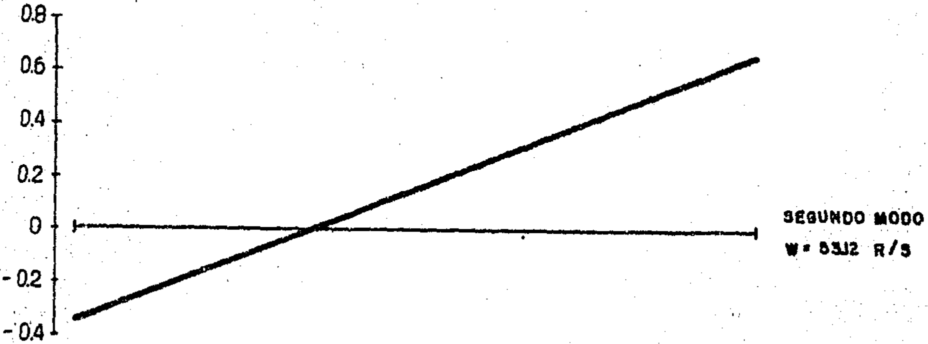
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 6349.39529 RAD/SEG 60632.2588 RPM

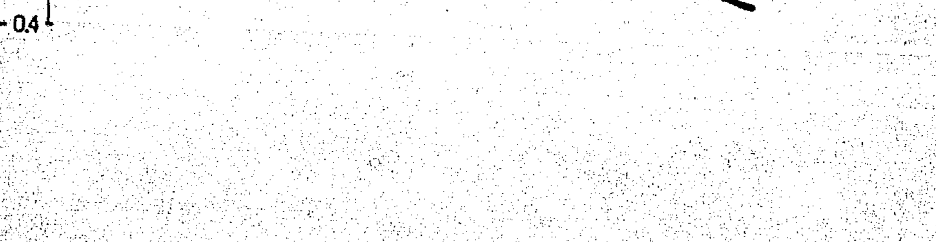
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES:-.104163473
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .10416755
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .104156995
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.104179513
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-.354158889

DEFLEXIONES MODALES

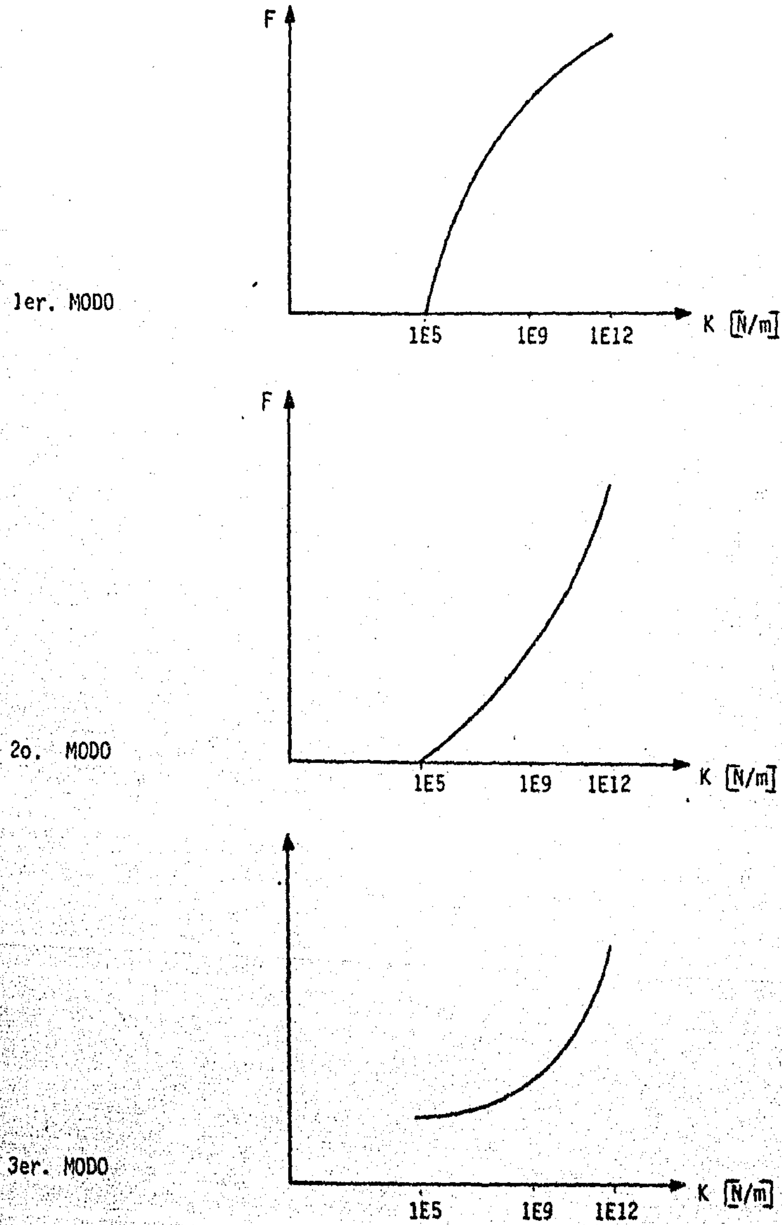





0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
SEGUNDO MODO
W= 5312 R/S


0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
TERCER MODO
W= 6349.39 R/S

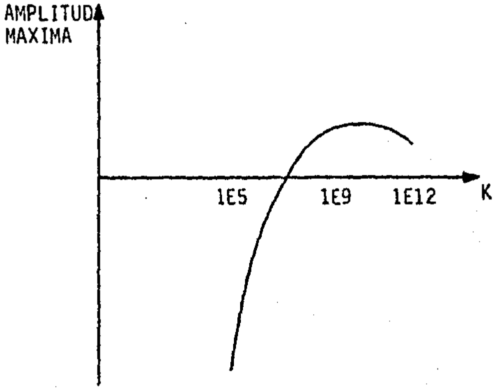
GRAFICAS FRECUENCIA-RIGIDEZ DE UN ROTOR APOYADO EN DOS SOPORTES DE 1 m DE LONGITUD



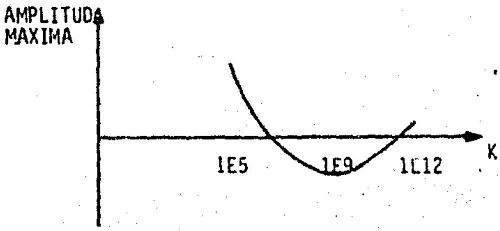
Gráfica 6.1

GRAFICAS AMPLITUD-RIGIDEZ DE UN ROTOR APOYADO EN DOS SOPORTES DE 1 m DE LONG.

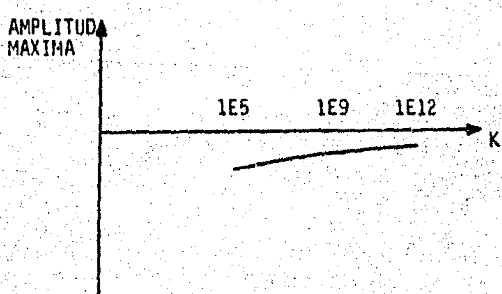
1er. MODO



2o. MODO



3er. MODO

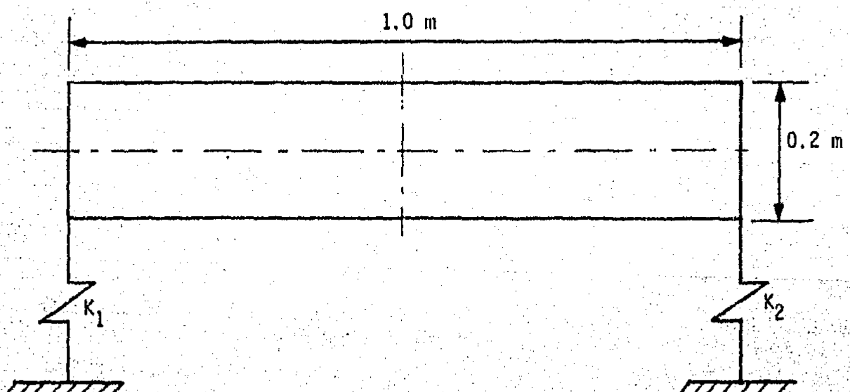


Gráfica 6.2

A continuación, se presenta un rotor de 1 m de longitud y diámetro constante de 0.2 m. El material del que está hecho el rotor es acero y se encuentra soportado en un par de apoyos en sus extremos.

Con la siguiente serie de ejemplos, se desea encontrar si existe variación en el valor de la velocidad crítica de un mismo rotor en función del número de elementos en que se divida al mismo. La variación de elementos se llevará a cabo como se indica:

Ejemplo	Número de elementos
4	4
5	7
6	10



PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.250	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 4 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 2526.51552 RAD/SEG 24126.446 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.51710145E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .225743594
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .319185906
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .225743562
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 1.51650847E-04

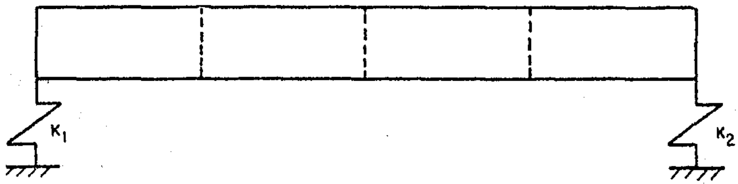
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 10030.8297 RAD/SEG 95787.3676 RPM

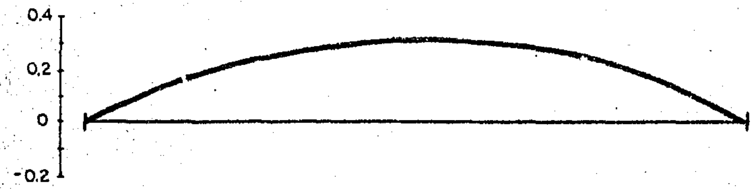
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 5.21535932E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .167101128
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-5.6280237E-07
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.167100705
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-5.18294336E-04

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 21301.245 RAD/SEG 203411.906 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 9.11949990E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .108239845
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-.153107827
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .108243502
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 8.86495041E-04

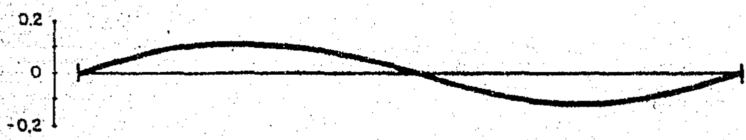
DEFLEXIONES MODALES





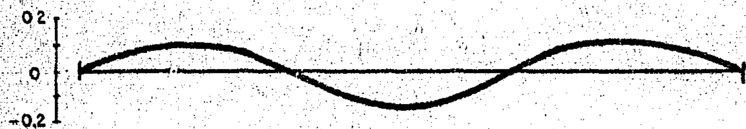
PRIMER MODO

W = 2526.51 R/S



SEGUNDO MODO

W = 10030 R/S



TERCER MODO

W = 21301.2 R/S

PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.142	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.142	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.142	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.142	.200	.000	.0	206.01	7850
5	.142	.200	.000	.0	206.01	7850
6	.142	.200	.000	.0	206.01	7850
7	.142	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 7 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 2527.40945 RAD/SEG 24134.9824 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.57086783E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .13829131
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .249065328
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .31053971
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .310539705
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES: .249065311
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES: .138291283
LA DEFLEXION DE LA SECCION 7 ES: 1.57050553E-04

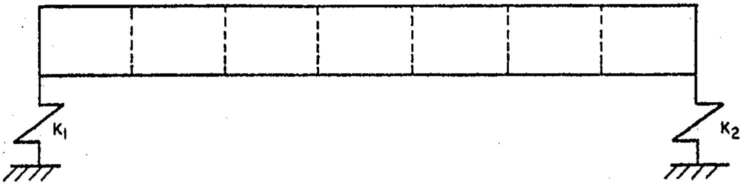
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 10096.3544 RAD/SEG 96413.0824 RPM

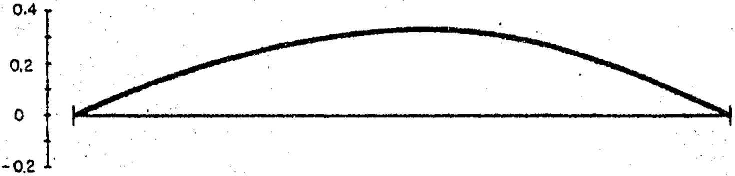
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 6.00098471E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .125495640
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .156196705
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .0694803564
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-.0694811554
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES:-.156196725
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES:-.125494542
LA DEFLEXION DE LA SECCION 7 ES:-5.97929058E-04

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 22630.0328 RAD/SEG 216100.895 RPM

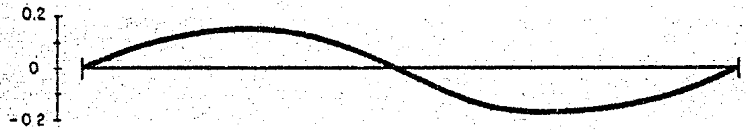
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.28156619E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .106914
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .0472993685
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.08555268
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-.0855468594
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES: .0473071759
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES: .10690852
LA DEFLEXION DE LA SECCION 7 ES: 1.23900621E-03

DEFLEXIONES MODALES

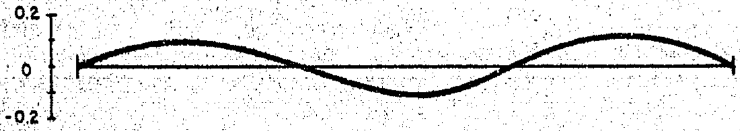




PRIMER MODO
W = 2527.4 R/S



SEGUNDO MODO
W = 10096.3 R/S



TERCER MODO
W = 22630 R/S

PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
5	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
6	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
7	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
8	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
9	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
10	.100	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 10 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 2527.20027 RAD/SEG 24132.9849 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.5841759E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0985268482
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .187265716
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .257688705
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .302902746
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES: .318482385
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES: .302902741
LA DEFLEXION DE LA SECCION 7 ES: .257688694
LA DEFLEXION DE LA SECCION 8 ES: .187265701
LA DEFLEXION DE LA SECCION 9 ES: .0985268283
LA DEFLEXION DE LA SECCION 10 ES: 1.58393538E-04

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 10098.7717 RAD/SEG 96436.1859 RPM

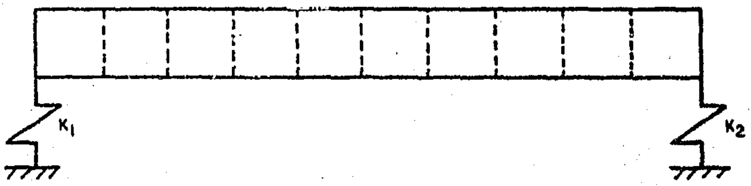
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 6.20664006E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0942434138
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .152044284
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .151986979
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .0938487819
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES:-3.43538852E-07
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES:-.0938493185
LA DEFLEXION DE LA SECCION 7 ES:-.151987081
LA DEFLEXION DE LA SECCION 8 ES:-.152043818
LA DEFLEXION DE LA SECCION 9 ES:-.0942423694
LA DEFLEXION DE LA SECCION 10 ES:-6.19899973E-04

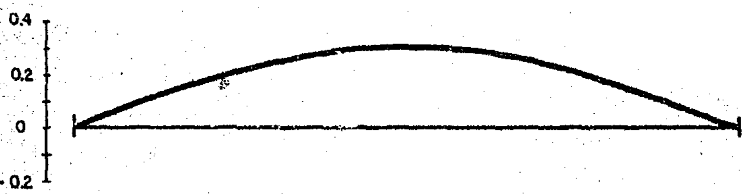
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 22680.7563 RAD/SEG 216585.269 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.3591565E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0875364378
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .102216606
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .0330167095
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-.0632622881

```
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES:-.107470548
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES:-.0632559797
LA DEFLEXION DE LA SECCION 7 ES: .0330237876
LA DEFLEXION DE LA SECCION 8 ES: .102217876
LA DEFLEXION DE LA SECCION 9 ES: .0875280681
LA DEFLEXION DE LA SECCION 10 ES: 1.34166081E-03
```

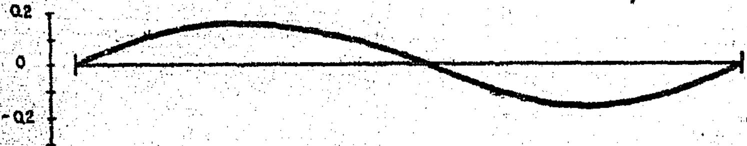
DEFLEXIONES MODALES





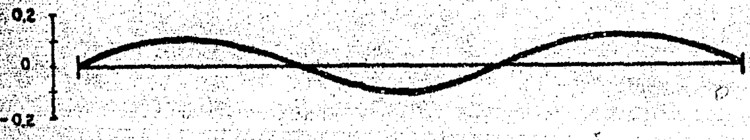
PRIMER MODO

W= 2527.2 R/S



SEGUNDO MODO

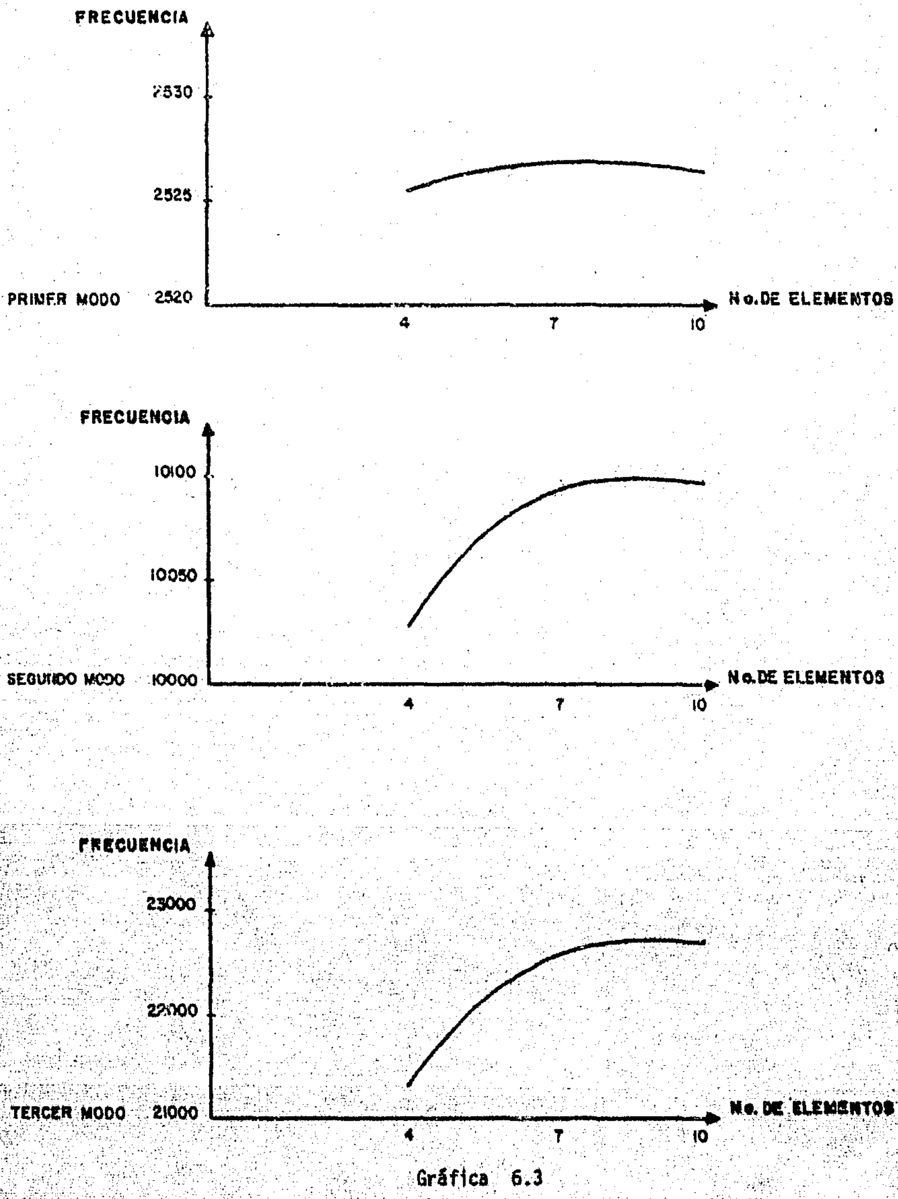
W= 10098.7 R/S



TERCER MODO

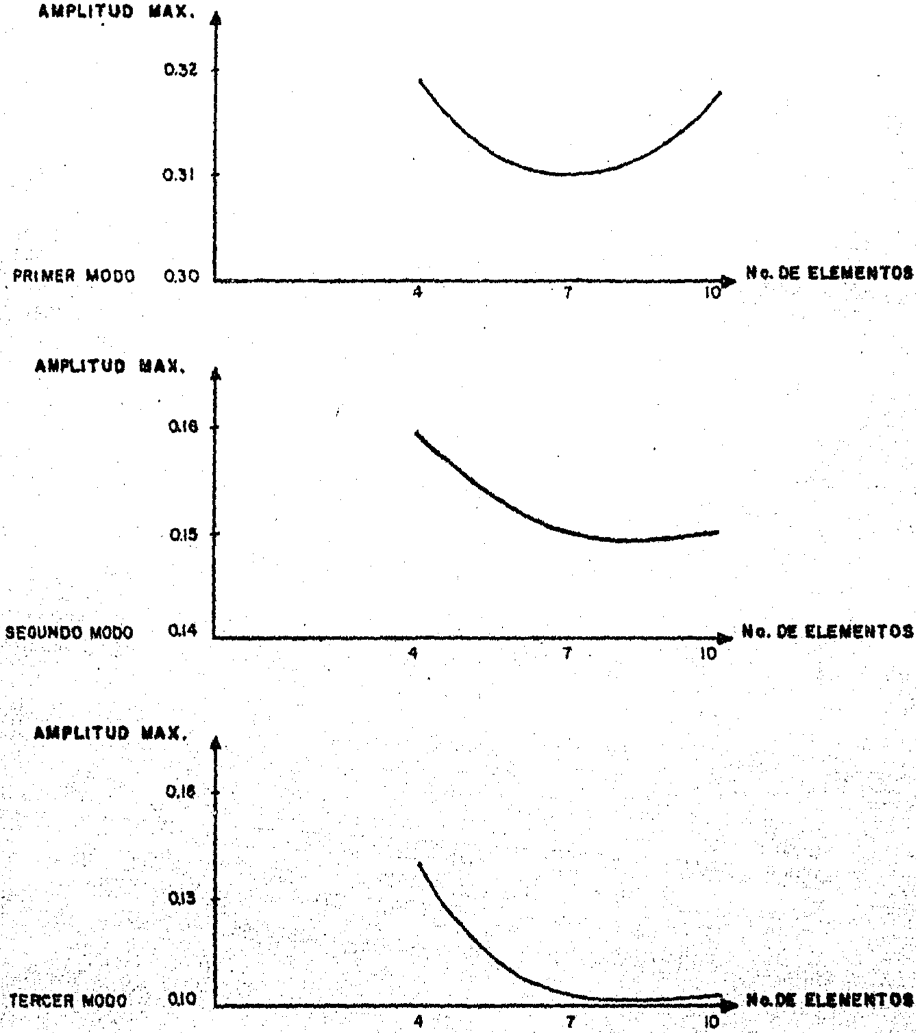
W= 22680.7 R/S

GRAFICAS FRECUENCIA - No. DE ELEMENTOS DE UN ROTOR DE 1 m DE LONGITUD Y 0.2 m DE DIAMETRO APOYADO EN DOS SOPORTES CON RIGIDEZ DE 1E12 N/m.



Gráfica 6.3

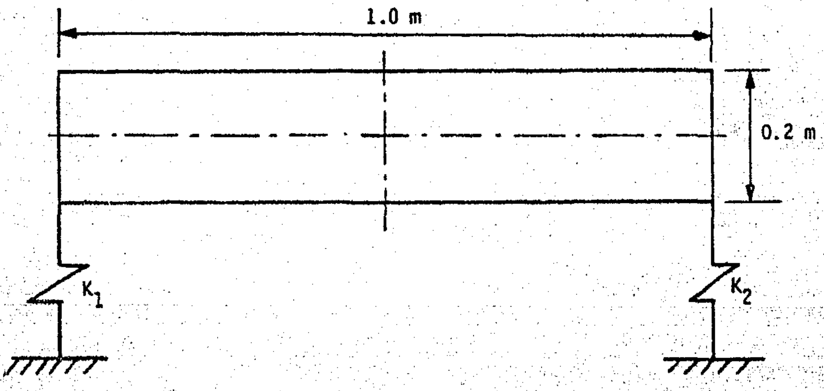
GRAFICAS AMPLITUD - No. DE ELEMENTOS DE UN ROTOR DE 1 m DE LONGITUD Y 0.2 m DE DIAMETRO APOYADO EN DOS SOPORTES CON RIGIDEZ DE 1E12 N/m.



Gráfica 6.4

Si la división de elementos del rotor mostrado en la siguiente figura, se hiciera en forma simétrica o asimétrica puede llevar a velocidades críticas diferentes que es lo que se pretende analizar con los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo	Forma de modelar
7	4 elementos simétricos
8	1 elemento mayor y 2 elementos menores.



PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.250	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 4 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 2526.51552 RAD/SEG 24126.446 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.51718145E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .225743594
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .319185906
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .225743562
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 1.51650847E-04

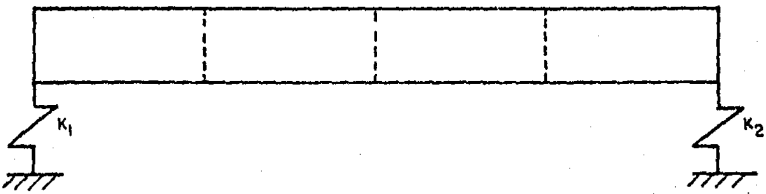
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 10030.8297 RAD/SEG 95787.3676 RPM

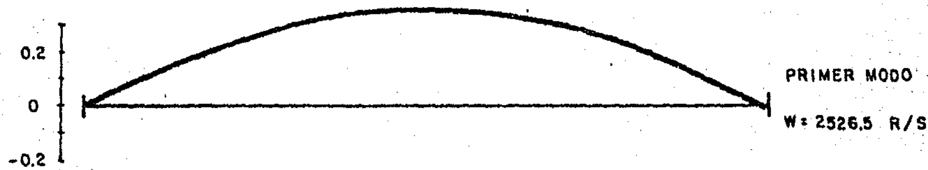
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 5.21535932E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .167101128
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-5.6280237E-07
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.167100705
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-5.18294336E-04

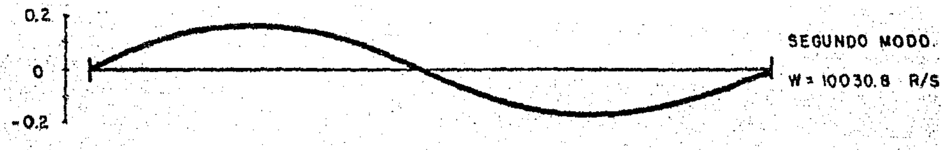
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 21301.245 RAD/SEG 203411.906 RPM

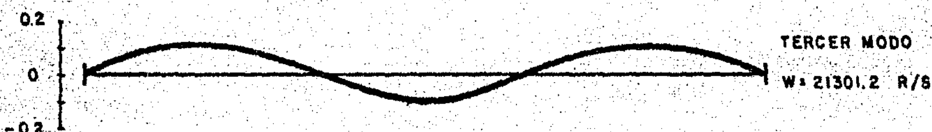
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 9.11949998E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .108239845
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-.153107827
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .108243502
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 8.86495041E-04

DEFLEXIONES MODALES









PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.500	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.250	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.250	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 3 ES: 1E+12 [N/M]

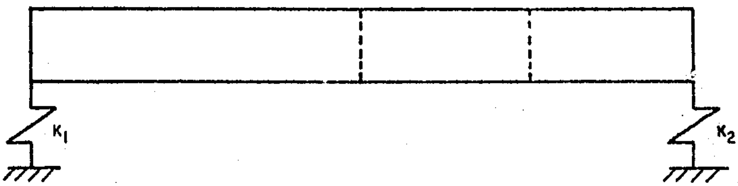
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 2894.52665 RAD/SEG 27640.6835 RPM

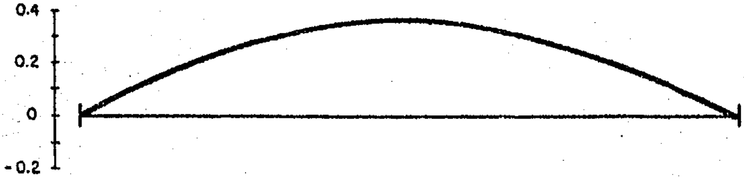
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.21404656E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .343922031
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .251541881
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: 1.86277371E-04

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 14505.3282 RAD/SEG 138515.681 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 2.87457755E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .137359308
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-.187805482
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-9.36272356E-04

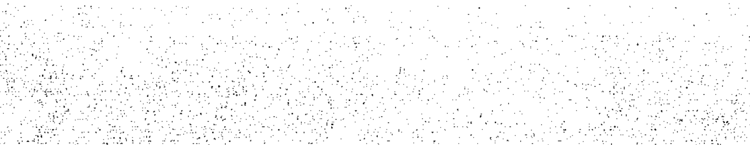
DEFLEXIONES MODALES





PRIMER MODO

W = 2894.5 R/S

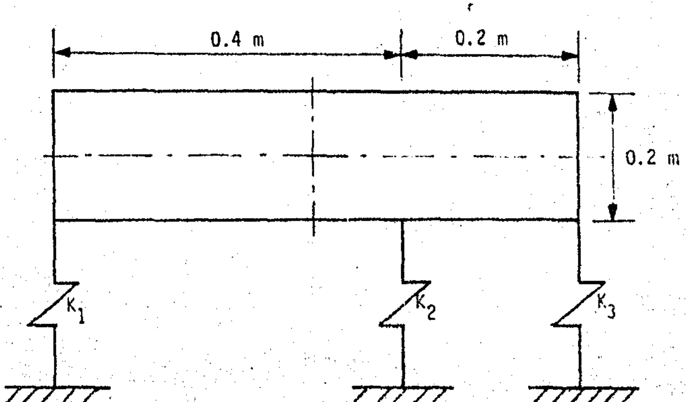


SEGUNDO MODO

W = 14505.3 R/S

El siguiente rotor se encuentra apoyado sobre tres soportes flexibles. La longitud del tramo uno es de 0.4 m y la del segundo tramo es de 0.2 m, con un diámetro constante de 0.2 m. Y el material de fabricación es acero.

Si el modelado de los tramos se hace, primero con todos los elementos simétricos y luego con elementos asimétricos, las velocidades críticas serán diferentes como lo muestran los resultados obtenidos.



PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10↑9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
5	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
6	.100	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 4 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 3 EN LA SECCION 6 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 20004.5953 RAD/SEG 191029.814 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 1.14422382E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0894741353
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .116879446
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .0707012319
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 2.09178327E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES:-.0184991098
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES:-6.52282196E-04

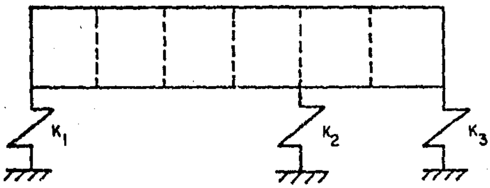
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 62214.0197 RAD/SEG 594100.126 RPM

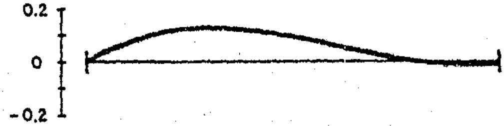
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 3.65572873E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0695933493
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-4.15225823E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.069012143
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 9.8832635E-05
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES: .0704583623
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES: 3.34560541E-03

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 134134.934 RAD/SEG 1280894.26 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: .0109492422
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0482080741
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES:-.0706399349
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .0567916543
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .0213322233
LA DEFLEXION DE LA SECCION 5 ES: 6.99556966E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 6 ES: 3.91602606E-04

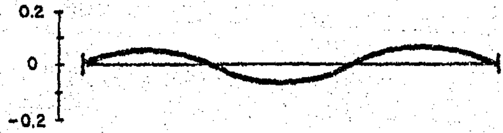
DEFLEXIONES MODALES





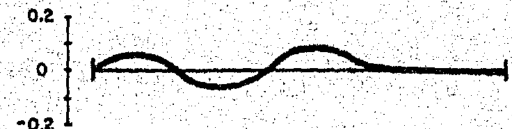
PRIMER MODO

W= 20004.5 R/S



SEGUNDO MODO

W = 62214 R/S



TERCER MODO

W= 134134.9 R/S

PROGRAMA VCR-MATRA

ELEM.	LONG. [M]	DIAM.ROT. [M]	DIAM.DISCO [M]	MASA EXT. [KG]	MOD.ELAST. 10!9[N/M2]	DENSIDAD [KG/M3]
1	.200	.200	.000	.0	206.01	7850
2	.200	.200	.000	.0	206.01	7850
3	.100	.200	.000	.0	206.01	7850
4	.100	.200	.000	.0	206.01	7850

LA RIGIDEZ DEL APOYO 1 EN LA SECCION 0 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 2 EN LA SECCION 2 ES: 1E+12 [N/M]
LA RIGIDEZ DEL APOYO 3 EN LA SECCION 4 ES: 1E+12 [N/M]

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 22533.774 RAD/SEG 215181.691 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 9.25544813E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .126564982
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: 1.94931249E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES:-.0195958539
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES:-6.95305386E-04

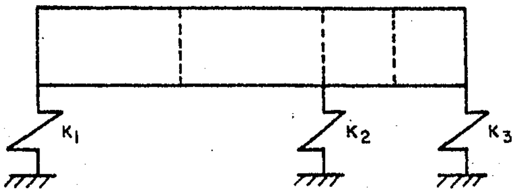
LA VELOCIDAD CRITICA ES: 71852.7534 RAD/SEG 686143.253 RPM

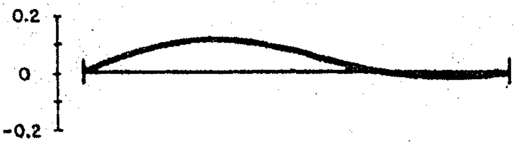
LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES: 2.42285932E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: .0536062142
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: .0555810647
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: .525100523
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: .0268024596

LA VELOCIDAD CRITICA ES: 142624.786 RAD/SEG 1361866.39 RPM

LA DEFLEXION DE LA SECCION 0 ES:-.155781858
LA DEFLEXION DE LA SECCION 1 ES: 1.59571116E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 2 ES: 2.1893721E-03
LA DEFLEXION DE LA SECCION 3 ES: 9.61581681E-04
LA DEFLEXION DE LA SECCION 4 ES: 7.42818152E-05

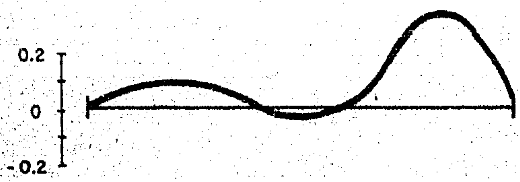
DEFLEXIONES MODALES





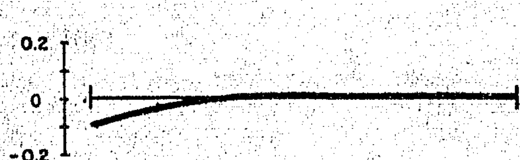
PRIMER MODO

W= 22533.7 R/S



SEGUNDO MODO

W= 71852.7 R/S



TERCER MODO

W= 142624.7 R/S

TABLAS FRECUENCIA- AMPLITUD

FRECUENCIA / AMPLITUD MAX.	MODELADO DEL ROTOR	
	SIMETRICA	ASIMETRICA
1er. MODO	2526.5 / 0.31	2894.5 / 0.34
2do. MODO	10030 / 0.16	14505.3 / -0.18
3er. MODO	21301 / -0.15	

LONGITUD DEL ROTOR = 1 m.
APOYADO EN DOS SOPORTES

FRECUENCIA / AMPLITUD	MODELADO DEL ROTOR	
	SIMETRICA	ASIMETRICA
1er. MODO	20004.5 / 0.11	22533.7 / 0.12
2do. MODO	62214 / 0.07	71852.7 / 0.32
3er. MODO	134134.9 / -0.07	142624.7 / -0.15

LONGITUD DEL ROTOR = 0.6 m.
APOYADO EN TRES SOPORTES

VII. PROGRAMA PARA BALANCEAR POR COEFICIENTES DE INFLUENCIA BACOIN

El presente programa obtiene la magnitud y fase del sistema de masas que balancea a un rotor.

Este programa es un algoritmo en lenguaje BASIC para una computadora personal Commodore 64 Plus/4, el cual utiliza el método de coeficientes de influencia para obtener las masas que balancean a un rotor.

Debído a que la mayoría de los parámetros de interés, como son las vibraciones, tienen amplitud y fase. El proceso de cálculo se realiza manejando matrices complejas, descomponiendo a éstas como la suma de una parte real y otra imaginaria.

El programa permite balancear hasta en 20 planos, teniendo como restricción que el número de planos de balanceo sea igual al número de planos de medición.

El programa se divide en tres partes que son:

1) Suministro de datos
2) Cálculos
3) Obtención y presentación de resultados.

El suministro de datos consiste en proporcionar inicialmente el número de planos de balanceo y la matriz de ponderación.

Posteriormente, el programa solicita los datos de las vibraciones iniciales, radio y dirección de colocación de las masas de prueba. Se recomienda que el radio sea el mismo para todas las -

masas de prueba. Finalmente se introducen los datos de las vibraciones que se originan en el sistema al agregar las masas de prueba. El programa almacena los datos en forma matricial durante el proceso de suministro de datos.

Los cálculos consisten en efectuar las multiplicaciones e inversiones matriciales indicadas por el método de coeficientes de influencia, respetando el álgebra de matrices complejas.

Una vez efectuados todos los cálculos, el programa proporciona el vector óptimo de masas y lo imprime dando como resultados la magnitud y dirección de colocación de las masas que balancean al rotor a una velocidad ω dada.

El listado de este programa se presenta en el apéndice A.2 de este trabajo.

7.1. Ejemplos de aplicación del programa BACOIN

Ejemplo 1.- Para el rotor mostrado en la siguiente Figura, se supuso la vibración inicial en un plano P_1 con valor de 5μ con un defasamiento de 40° con respecto a un eje de referencia A. Por medio del método de coeficientes de influencia se busca el sistema óptimo de masas que balancea al rotor.

La posición de la masa de prueba se presenta en la Figura 7.1,

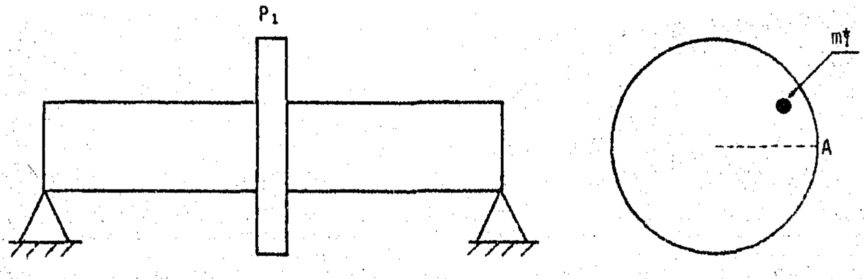


Figura 7.1

PROGRAMA BACOIN

NUMERO DE PLANOS DE BALANCEO: 1   A UNA VELOCIDAD= 350 RPM

ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE PONDERACION:

ELEMENTO 1 , 1 = 1

LAS VIBRACIONES INICIALES:

PLANO	AMPLITUD	DEFASAMIENTO
1	5.0	40.0

COLOCACION DE LAS MASAS DE PRUEBA:

MASA	RADIO	DIRECCION
1	2.0	30.0

VIBRACIONES INDUCIDAS:

PLANO	AMPLITUD	DEFASAMIENTO	MASA DE PRUEBA EN
1	9.0	140.0	1

SISTEMA OPTIMO DE BALANCEO

PLANO	MASA DE COMPENSACION	ANGULO DE FASE
1	.80673	+ 83.48

Ejemplo 2.- Para el rotor mostrado en la Figura 7.2, se midieron las vibraciones iniciales en los planos P_1 y P_2 y se supusieron los siguientes valores: En el plano uno 0.1μ y defasamiento de 5°, en el plano dos se midió un valor de 0.2μ con un defasamiento de 10°. Los defasamientos se midieron con respecto a un eje de referencia A. Utilizando el método de coeficientes de influencia se calcula el sistema óptimo de masas que balancea al rotor.

En la Figura 7.2, se muestra la posición de las masas de prueba en los planos de medición.

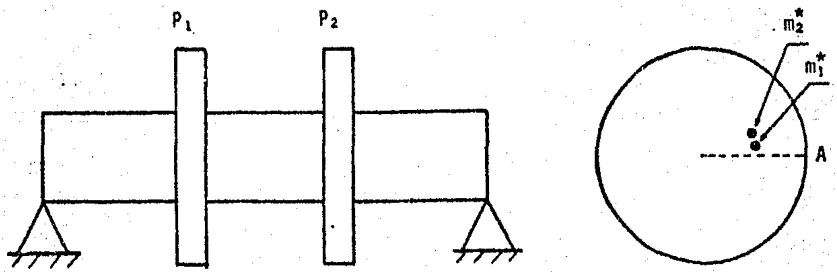


Figura 7.2

PROGRAMA BACOIN

NUMERO DE PLANOS DE BALANCEO: 2   A UNA VELOCIDAD= 500 RPM

ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE PONDERACION:

ELEMENTO 1 , 1 = 1
ELEMENTO 2 , 2 = 1

LAS VIBRACIONES INICIALES:

PLANO	AMPLITUD	DEFASAMIENTO
1	.1	5.0
2	.2	10.0

COLOCACION DE LAS MASAS DE PRUEBA:

MASA	RADIO	DIRECCION
1	1.0	10.0
2	1.0	20.0

VIBRACIONES INDUCIDAS:

PLANO	AMPLITUD	DEFASAMIENTO	MASA DE PRUEBA EN
1	.1	7.0	1
2	.1	103.0	1
1	.1	81.0	2
2	.2	111.0	2

SISTEMA OPTIMO DE BALANCEO

PLANO	MASA DE COMPENSACION	ANGULO DE FASE
1	.74221	+284.50
2	1.09176	+ 81.63

Ejemplo 3.- En el rotor mostrado en la Figura 7.3, se supusieron los siguientes valores de vibraciones iniciales: En el plano P_1 con un valor de 5μ y defasamiento de 30°, en el plano P_2 con un valor de 7μ y defasamiento de 40°, en el plano P_3 con un valor de 8μ y defasamiento de 120°, en el plano P_4 con un valor de 3μ y defasamiento de 220°. Los defasamientos se midieron con respecto a un eje de referencia A. Usando el método de coeficientes de influencia se obtiene el sistema óptimo de masas que balancea al rotor.

En la Figura 7.3 se muestra la posición de las masas de prueba en los planos de medición.

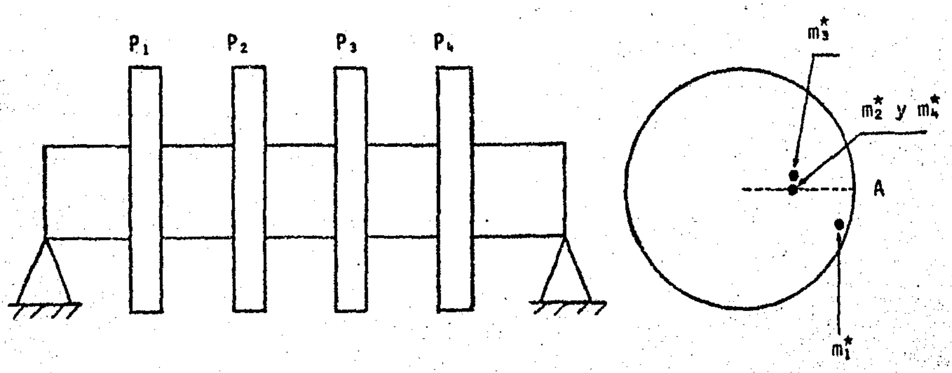


Figura 7.3

PROGRAMA BACOIN

NUMERO DE PLANOS DE BALANCEO: 4   A UNA VELOCIDAD= 1000 RPM

ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE PONDERACION:

ELEMENTO 1 , 1 = 1
ELEMENTO 2 , 2 = 1
ELEMENTO 3 , 3 = 1
ELEMENTO 4 , 4 = 1

LAS VIBRACIONES INICIALES:

PLANO	AMPLITUD	DEFASAMIENTO
1	5.0	30.0
2	7.0	40.0
3	8.0	120.0
4	3.0	220.0

COLOCACION DE LAS MASAS DE PRUEBA:

MASA	RADIO	DIRECCION
1	2.0	340.0
2	1.0	.0
3	1.0	10.0
4	1.0	.0

VIBRACIONES INDUCIDAS:

PLANO	AMPLITUD	DEFASAMIENTO	MASA DE PRUEBA EN
1	8.0	5.0	1
2	8.0	35.0	1
3	5.0	140.0	1
4	3.5	150.0	1
1	4.0	355.0	2
2	6.0	15.0	2
3	4.5	110.0	2
4	4.0	60.0	2
1	5.8	123.0	3
2	4.5	132.0	3
3	6.2	36.0	3
4	10.4	162.0	3
1	8.5	10.0	4
2	9.4	8.5	4
3	7.0	50.0	4
4	5.8	40.0	4

SISTEMA OPTIMO DE BALANCEO

PLANO	MASA DE COMPENSACION	ANGULO DE FASE
1	1.09772	+ 47.07
2	1.24015	- 22.60
3	.35536	+ 20.73

4	.39462	+223.33

VIII. CONCLUSIONES

Los programas de cómputo VCR-MATRA y BACOIN, presentados en este trabajo, permiten su aplicación en computadoras de reducida capacidad, en especial en lugares donde se carezca de equipo sofisticado de cómputo.

VCR-MATRA acepta infinidad de configuraciones físicas y geométricas de rotores; sin embargo, su implementación en una computadora Commodore 64 Plus/4 conduce a un tiempo de cómputo elevado, por ejemplo, para un rotor modelado en 10 elementos, la evaluación del sistema a una velocidad le toma al programa aproximadamente un minuto de cálculos. La experiencia del analista reducirá el tiempo de cómputo asignando los incrementos adecuados al rotor en estudio.

La introducción de datos en BACOIN puede hacerse en cualquier sistema de unidades, con la condición de que éste sea congruente. Como referencia, para determinar el tiempo de cómputo requerido por BACOIN, para 20 planos de balanceo el programa tarda en correr 50 minutos.

De acuerdo a los resultados obtenidos con el programa VCR-MATRA se concluye:

1.- A mayor rigidez en los apoyos, mayor será la velocidad crítica, ya que ésta disminuye la libertad de vibración del rotor, como se observa en las gráficas 6.1.

2.- Las amplitudes de vibración disminuyen entre mayor rigidez tengan los apoyos según las gráficas 6.2.

3.- Modelar un mismo rotor en diferente número de elementos, implica velocidades críticas diferentes, que tienden a coincidir entre mayor sea el número de elementos en que se divida el rotor en su modelado y esto puede comprobarse en las gráficas 6.3.

4.- El número de velocidades críticas que pueden obtenerse es igual al número de elementos en que se divida el rotor menos uno.

5.- Las frecuencias naturales dependen en gran medida de la forma en que se asignen los elementos a un tramo del rotor.

Con respecto al programa BACOIN, se concluye:

1.- El programa obtiene el vector óptimo de masas que anula las vibraciones en los planos de medición.

2.- El programa permite balancear únicamente a una velocidad ω determinada.

3.- Las masas de prueba deben ser iguales para todos los planos.

Finalmente, de todo lo anterior, se sugiere como trabajo futuro, el diseño y fabricación de equipo de laboratorio, tanto para fines didácticos como para aplicación en campo, que permita comprobar los resultados de los programas descritos en este trabajo.

LISTADO DE VCR-MATRA

```
READY.

1 OPEN 3,4
2 PRINT#3, CHR$(147)
3 OPEN 2,4,2
4 OPEN 1,4,1
20 DIM L(50),E(50),F(50),DR(50),DD(50),B(50)
25 DIM RO(50),MA(50),N(20),DI(20),DZ(50),C(50)
30 DIM ME(50),V(50),M(50),X(50),J(50),A(50)
35 DIM K(20),YP(50),Y(50),MO(50),Q(50)
40 PRINT#3,CHR$(14),"   PROGRAMA VCR-MATRA"
45 PRINT#3," "
46 PRINT#3," "
50 REM I. ENTRADA DEL NUMERO DE APOYOS
60 PRINT"CUANTOS APOYOS TIENE EL ROTOR";
80 INPUT M
100 PRINT" "
120 FOR I=1 TO M-1
140 PRINT"CUANTOS ELEMENTOS TIENE EL TRAMO";I;
160 INPUT N(I)
180 N=N(I)+N
200 PRINT" "
220 NEXT I
240 REM II. ENTRADA DE DATOS
260 PRINT" "
280 FOR I=1 TO N
300 PRINT"LONGITUD DEL ELEMENTO";I;
320 INPUT L(I)
340 PRINT" "
360 PRINT"MODULO DE ELASTICIDAD DEL ELEMENTO";I;
380 INPUT E(I)
385 F(I)=E(I)/1000000000
400 PRINT" "
420 PRINT"DIAMETRO DEL ROTOR EN EL ELEMENTO";I;
440 INPUT DR(I)
460 PRINT" "
480 PRINT"DIAMETRO DEL DISCO EN EL ELEMENTO";I;
500 INPUT DD(I)
520 PRINT" "
540 PRINT"DENSIDAD DEL MATERIAL EN EL ELEMENTO";I;
560 INPUT RO(I)
580 PRINT" "
600 PRINT"MASA EXTERNA EN EL ELEMENTO";I;
620 INPUT MA(I)
640 PRINT" "
660 PRINT"ESTAN CORRECTOS LOS DATOS?";"S/N";
680 INPUT W$
700 IF W$="N" THEN 300
720 PRINT" "
740 NEXT I
750 A$="ELEM."
755 B$="DIAM.ROT."
760 C$="DENSIDAD"
765 D$="MASA EXT."
770 E$="MOD.ELAST."
775 F$="DIAM.DISCO"
780 G$="LONG."
```

```
785 H$="[M]"
790 I$="[KG]"
795 J$="10↑9[N/M2]"
800 K$="[KG/M3]"
805 PRINT#3,A$ TAB(6)G$ TAB(8)B$ TAB(9)F$ TAB(8)D$ TAB(6)E$ TAB(6)C$
810 PRINT#3,"    " TAB(9)H$ TAB(12)H$ TAB(15)H$ TAB(14)I$ TAB(9)J$ TAB(7)K$
815 PRINT#3," "
820 FOR I=1 TO N
825 PRINT#2,"99     9.999      9.999         9.999        999.9       999.99
    9999"
827 PRINT#1,I,L(I),DR(I),DD(I),MA(I),F(I),RO(I)
830 NEXT I
835 PRINT#3," "
840 PRINT#3," "
850 REM III. MODELADO DEL ROTOR
860 REM III.1 CALCULO DE DIAMETROS EQUIVALENTES
900 PRINT"SON DISCOS FORJADOS O ENSAMBLADOS A PRESION? FO/PR";
920 INPUT M$
940 PRINT" "
960 IF M$="PR" THEN 1260
980 REM III.1.1 DIAM. EQUIVALENTE DISCOS FORJADOS
1000 FOR I=1 TO N
1020 IF DD(I)=0 THEN 1220
1040 S=L(I)/DR(I)
1060 PRINT"LA RELACION B/D EN EL ELEMENTO";I;"ES:";S
1080 PRINT" "
1100 PRINT"CON EL VALOR B/D LEER JZ/J EN EL NEMOGRAMA 6.6"
1120 PRINT" "
1140 PRINT"CUAL ES EL VALOR JZ/J";
1160 INPUT Q
1180 PRINT" "
1200 DZ(I)=DR(I)*Q↑.25
1220 NEXT I
1240 GOTO 1620
1260 REM III.1.2 DIAM. EQUIVALENTE PARA DISCOS ENSAMBLADOS A PRESION
1280 FOR I=1 TO N
1300 IF DD(I)=0 THEN 1600
1320 PRINT"EL DIAM. INTERIOR DEL DISCO EN EL ELEMENTO";I;"ES:";
1340 INPUT DI(I)
1360 PRINT" "
1380 A=DR(I)-DI(I)
1400 S=L(I)/DR(I)
1420 D=DD(I)/DR(I)
1440 PRINT"CON LOS SIGUIENTES VALORES LEER JZ/J EN EL NEMOGRAMA 6.7"
1460 PRINT" "
1480 PRINT"B/D=";S,"A/D=";A,"DD/D=";D
1500 PRINT" "
1520 PRINT"CUAL ES EL VALOR JZ/J";
1540 INPUT Q
1560 PRINT" "
1580 DZ(I)=DR(I)*Q↑.25
1600 NEXT I
1620 REM III.2 CALCULO DE MASAS EQUIVALENTES
1640 FOR I=1 TO N
1660 IF DZ(I)=0 THEN 1720
1680 V(I)=π*(DD(I)↑2-DZ(I)↑2)*L(I)/4
1700 ME(I)=V(I)*RO(I)
1720 NEXT I
1740 REM III.3 ESTADO FINAL DEL ROTOR EN EL MODELADO
1760 FOR I=1 TO N
```

```
1780 M(I)=π*DR(I)↑2/4*L(I)*RO(I)
1800 NEXT I
1820 FOR I=1 TO N
1840 IF I=N THEN 1960
1850 M(I)=(M(I)+MA(I)+ME(I))/2+(M(I+1)+MA(I+1)+ME(I+1))/2
1860 X(I)=(M(I)+MA(I)+ME(I))/2
1900 IF DZ(I)<>0 THEN 2000
1920 J(I)=π*DR(I)↑4/64
1940 GOTO 2040
1960 M(I)=(M(I)+ME(I)+MA(I))/2+X(I-1)
1980 IF DZ(I)=0 THEN 1920
2000 J(I)=π*DZ(I)↑4/64
2040 NEXT I
2060 T$="NO"
2080 REM IV. CALCULO DE LAS CONSTANTES A,B Y C
2100 FOR I=1 TO N
2120 A(I)=L(I)/(E(I)*J(I))
2140 B(I)=L(I)↑2/(2*E(I)*J(I))
2160 C(I)=L(I)↑3/(6*E(I)*J(I))
2180 NEXT I
2200 REM V. DECISION PARA APOYOS RIGIDOS O FLEXIBLES
2220 PRINT"SON APOYOS RIGIDOS O FLEXIBLES? R/F";
2240 INPUT W$
2260 DIM R(4,4)
2280 DIM S(4,4)
2300 PRINT" "
2320 IF W$="R" THEN 2505
2340 FOR I= 1 TO M
2360 PRINT"LA RIGIDEZ EN EL APOYO";I;"ES:";
2380 INPUT K(I)
2400 PRINT" "
2420 NEXT I
2430 PRINT"ESTAN CORRECTOS LOS APOYOS? S/N";
2431 INPUT W$
2432 IF W$="N" THEN 2340
2440 FOR I=1 TO M
2460 PRINT#3,"LA RIGIDEZ DEL APOYO";I;"EN LA SECCION";N(I-1);"ES:";K(I);"[N/M]"
2480 NEXT I
2500 PRINT#3," "
2501 GOTO 2520
2505 PRINT#3,"LOS APOYOS SON RIGIDOS"
2506 PRINT#3," "
2507 FOR I=1 TO M
2508 PRINT#3,"EL APOYO";I;"ESTA EN LA SECCION";N(I-1)
2509 NEXT I
2510 PRINT#3," "
2520 REM VI. FORMACION DE LA PRIMERA MATRIZ DE TRANSFERENCIA
2521 PRINT"CUAL ES EL INCREMENTO PARA HACER LAS ITERACIONES?";
2522 INPUT U
2523 PRINT" "
2540 PRINT"LA VELOCIDAD OMEGA PROPUESTA INICIAL ES:";
2560 INPUT O
2580 PRINT" "
2600 A1=1+C(1)*M(1)*O↑2
2620 A2=B(1)*M(1)*O↑2
2640 A3=L(1)*M(1)*O↑2
2660 A4=M(1)*O↑2
2680 B1=L(1)
2700 C1=B(1)
2720 C2=A(1)
```

```
2740 D1=C(1)
2760 D2=B(1)
2780 D3=L(1)
2790 FOR I=1 TO 10
2792 PRINT" "
2793 NEXT I
2794 PRINT"VCR-MATRA ESTA CALCULANDO"
2795 PRINT"FAVOR DE ESPERAR"
2797 PRINT" "
2800 R(1,1)=A1
2820 R(1,2)=A2
2840 R(1,3)=A3
2860 R(1,4)=A4
2880 R(2,1)=B1
2900 R(2,2)=1
2920 R(2,3)=0
2940 R(2,4)=0
2960 R(3,1)=C1
2980 R(3,2)=C2
3000 R(3,3)=1
3020 R(3,4)=0
3040 R(4,1)=D1
3060 R(4,2)=D2
3080 R(4,3)=D3
3100 R(4,4)=1
3120 IF W$="R" THEN 3320
3140 A1=A1-K(1)*D1
3160 A2=A2-K(1)*D2
3180 A3=A3-K(1)*D3
3200 A4=A4-K(1)
3220 A8=A4
3240 R(1,1)=A1
3260 R(1,2)=A2
3280 R(1,3)=A3
3300 R(1,4)=A4
3310 FOR I=1 TO 20
3312 PRINT" "
3314 NEXT I
3320 REM VII. FORMACION DE LAS DEMAS MATRICES DE TRANSFERENCIA
3340 M=1
3350 IF N(M)=1 THEN 4340
3351 A=N(M)
3360 FOR I=2 TO N
3380 E1=1+C(I)*M(I)*O↑2
3400 E2=B(I)*M(I)*O↑2
3420 E3=L(I)*M(I)*O↑2
3440 E4=M(I)*O↑2
3460 F1=L(I)
3480 G1=B(I)
3500 G2=A(I)
3520 H1=C(I)
3540 H2=B(I)
3560 H3=L(I)
3580 S(1,1)=E1
3600 S(1,2)=E2
3620 S(1,3)=E3
3640 S(1,4)=E4
3660 S(2,1)=F1
3680 S(2,2)=1
3700 S(2,3)=0
```

```
3720 S(2,4)=0
3740 S(3,1)=G1
3760 S(3,2)=G2
3780 S(3,3)=1
3800 S(3,4)=0
3820 S(4,1)=H1
3840 S(4,2)=H2
3860 S(4,3)=H3
3880 S(4,4)=1
3900 IF T$="NO" THEN 4000
3920 IF W$="R" THEN 6000
3940 IF I=A THEN 6380
3960 GOTO 6000
3980 REM VIII. MULTIPLICACION DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA
4000 FOR J=1 TO 4
4020 FOR Q=1 TO 4
4040 FOR L=1 TO 4
4060 T=T+R(J,L)*S(L,Q)
4080 NEXT L
4100 T(J,Q)=T
4120 T=0
4140 NEXT Q
4160 NEXT J
4180 FOR J=1 TO 4
4200 FOR Q=1 TO 4
4220 T=T(J,Q)
4240 R(J,Q)=T
4260 NEXT Q
4280 NEXT J
4290 T=0
4300 IF I=A THEN 4340
4320 GOTO 4640
4340 M=M+1
4341 C=0
4342 FOR B=1 TO M-1
4343 C=N(M-B)+C
4344 NEXT B
4350 A=N(M)+C
4360 IF W$="R" THEN 4560
4380 A4=R(1,4)-K(M)*R(1,1)
4400 B4=R(2,4)-K(M)*R(2,1)
4420 C4=R(3,4)-K(M)*R(3,1)
4440 D4=R(4,4)-K(M)*R(4,1)
4460 R(1,4)=A4
4480 R(2,4)=B4
4500 R(3,4)=C4
4520 R(4,4)=D4
4540 GOTO 4640
4560 YP(1)=1
4580 MO(1)=0
4600 YP(M)=YP(M-1)*(R(2,2)-R(2,1)*R(4,2)/R(4,1))+MO(M-1)*(R(3,2)-R(4,2)*R(3,1)/R
(4,1))
4620 MO(M)=YP(M-1)*(R(2,3)-R(4,3)*R(2,1)/R(4,1))+MO(M-1)*(R(3,3)-R(4,3)*R(3,1))/
R(4,1)
4640 NEXT I
4650 IF P$="SI" THEN 5500
4660 IF W$="F" THEN 4760
4680 REM IX. CONDICIONES DE FRONTERA EN APOYOS RIGIDOS
4700 PRINT"EL MOMENTO ES:";MO(M),"LA VELOCIDAD OMEGA ES:";O
4720 GOTO 4800
```

```
4740 REM X. CONDICIONES DE FRONTERA EN APOYOS FLEXIBLES
4760 MO(M)=R(1,3)*R(2,4)-R(2,3)*R(1,4)
4780 PRINT"EL DETERMINANTE ES";MO(M),"LA VELOCIDAD OMEGA ES:";O
4800 REM XI. INTERPOLACION LINEAL
4810 IF MO(M)<>0 THEN 4820
4812 O2=0
4814 GOTO 5400
4820 IF O1=0 THEN 4860
4840 GOTO 4940
4860 O1=O
4880 M1=MO(M)
4900 O=O+U
4920 GOTO 2600
4940 IF M3<>0 THEN 5140
4960 IF MO(M)>0 THEN 5020
4980 IF M1>0 THEN 5040
5000 GOTO 4860
5020 IF M1>0 THEN 4860
5040 O2=(-M1/(MO(M)-M1))*(O-O1)+O1
5060 O3=O
5080 M3=MO(M)
5100 O=O2
5120 GOTO 2600
5140 IF MO(M)>0 THEN 5300
5160 IF M1>0 THEN 5320
5180 IF A$="YA" THEN 5380
5200 O1=O
5220 M1=MO(M)
5240 A$="YA"
5260 O=O+U/10
5280 GOTO 2600
5300 IF M1>0 THEN 5180
5320 O2=(-M1/(MO(M)-M1))*(O-O1)+O1
5340 X=MO(M)
5360 GOTO 5400
5380 O2=(-MO(M)/(M3-MO(M)))*(O3-O)+O
5400 RP=O2*60/(2*π)
5401 PRINT"LA VELOCIDAD CRITICA ES:";O2
5405 PRINT#3;" "
5410 PRINT#3,"LA VELOCIDAD CRITICA ES:";O2;"RAD/SEG",RP;"RPM"
5415 PRINT#3," "
5420 O=O2
5440 P$="SI"
5460 GOTO 2600
5480 REM XII. CALCULO DE LA DEFLEXION MODAL
5500 PRINT"QUIERES LA DEFLEXION MODAL?";"SI/NO"
5520 P$="SI"
5530 M=1
5531 A=N(M)
5540 INPUT T$
5560 A$="NU"
5580 PRINT" "
5600 IF  T$="SI" THEN 5720
5620 M3=0
5640 O1=0
5650 PRINT" "
5655 PRINT"CUAL ES LA SIGUIENTE VELOCIDAD OMEGA PROPUESTA?;
5660 INPUT O
5670 PRINT" "
5680 P$="NO"
```

```
5700 GO TO 2600
5720 IF W$="R" THEN 5880
5740 Y=-T(2,3)/T(1,3)
5760 Y(1)=Y*A1+L(1)
5780 YP(1)=Y*A2+1
5800 MO(1)=Y*A3
5820 Q(1)=Y*A8
5840 Y(0)=Y
5860 GO TO 3360
5880 Q=-T(2,1)/T(4,1)
5900 Y(1)=L(1)+C(1)*Q
5920 YP(1)=1+B(1)*Q
5940 MO(1)=L(1)*Q
5960 Q(1)=Q
5980 GO TO 3360
6000 Y(I)=Y(I-1)*S(1,1)+YP(I-1)*S(2,1)+MO(I-1)*S(3,1)+Q(I-1)*S(4,1)
6020 YP(I)=Y(I-1)*S(1,2)+YP(I-1)*S(2,2)+MO(I-1)*S(3,2)+Q(I-1)*S(4,2)
6040 MO(I)=Y(I-1)*S(1,3)+MO(I-1)*S(3,3)+Q(I-1)*S(4,3)+YP(I-1)*S(2,3)
6060 Q(I)=Y(I-1)*S(1,4)+Q(I-1)*S(4,4)+YP(I-1)*S(2,4)+MO(I-1)*S(3,4)
6080 NEXT I
6100 FOR I=0 TO N
6120 PRINT" "
6140 PRINT"LA DEFLEXION DE LA SECCION";I;"ES:";Y(I)
6160 NEXT I
6180 PRINT" "
6220 FOR I=0 TO N
6240 PRINT#3,"LA DEFLEXION DE LA SECCION";I;"ES:";Y(I);"[M]"
6260 NEXT I
6262 PRINT#3," "
6280 PRINT"DESEA ENCONTRAR OTRA FRECUENCIA?";"S/N"
6300 INPUT Z$
6320 IF Z$="N" THEN 6680
6340 T$="NO"
6360 GO TO 5620
6380 M=M+1
6390 AA1=S(1,4)-K(M)*S(1,1)
6400 BB1=S(2,4)-K(M)*S(2,1)
6420 CC1=S(3,4)-K(M)*S(3,1)
6440 DD1=S(4,4)-K(M)*S(4,1)
6460 S(1,4)=AA1
6480 S(2,4)=BB1
6500 S(3,4)=CC1
6520 S(4,4)=DD1
6560 C=0
6580 FOR B=1 TO M-1
6600 C=N(M-B)+C
6620 NEXT B
6640 A=N(M)+C
6660 GOTO 6000
6680 END

READY.
```

LISTADO DE BACOIN

```
READY.

1 OPEN 3,4
5 OPEN 2,4,2
6 PRINT#3, CHR$(147)
10 PRINT"PROGRAMA BACOIN"
11 PRINT#3,CHR$(14),"PROGRAMA BACOIN"
12 PRINT#3," "
14 PRINT" "
15 PRINT#3," "
16 PRINT"A QUE VELOCIDAD SE BALANCEA? EN RPM"
18 PRINT" "
20 OPEN 1,4,1
25 DIM TR(20,20),TC(20,20),R(20,20),C(20,20)
40 DIM O(20,20),P(20,20),Q(20,20),S(20,20)
55 DIM G(20,20),L(20,20),A(20,20),B(20,20)
70 DIM W(20,20),Z(20,20),D(20,20),F(20,20)
85 DIM E(20,20),H(20,20),X(20,20),Y(20,20)
100 DIM AB(20),DB(20),GR(20),GC(20),RA(20)
115 DIM DI(20),AV(20),DV(20),HR(20),HC(20)
130 DIM VR(20),VC(20),RO(20),PR(20),PC(20)
145 DIM BR(20),BC(20),AO(20)
265 PRINT" "
280 PRINT" "
295 REM INTRODUCCION DE DATOS
310 PRINT"DIMENSION DE LA MATRIZ?";
325 INPUT N
326 PRINT#3,"NUMERO DE PLANOS DE BALANCEO:";N,"A UNA VELOCIDAD=";RP;"RPM"
327 PRINT#3," "
329 PRINT#3," "
340 PRINT" "
355 PRINT"MATRIZ DE PONDERACION:"
357 PRINT#3,"ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE PONDERACION:"
358 PRINT#3," "
370 PRINT" "
385 FOR I= 1 TO N
400 PRINT"EL ELEMENTO ";I;",";I;"ES:"
415 INPUT E(I,I)
430 NEXT I
431 FOR I=1 TO N
433 PRINT#3,"ELEMENTO";I;",";I;"=";E(I,I)
435 NEXT I
445 PRINT" "
446 PRINT#3," "
447 PRINT#3," "
460 PRINT"LAS VIBRACIONES INICIALES:"
461 PRINT#3,"LAS VIBRACIONES INICIALES:"
475 PRINT" "
490 PRINT"LA AMPLITUD DE LAS VIBRACIONES SON:"
505 PRINT" "
520 FOR I=1 TO N
535 PRINT"EN EL PLANO DE MEDICION ";I;"ES:"
550 INPUT AB(I)
565 NEXT I
580 PRINT" "
582 PRINT#3," "
595 PRINT"LOS DEFASAMIENTOS DE LAS VIBRACIONES SON:"
```

```
610 PRINT" "
615 PRINT" "
625 FOR I=1 TO N
640 PRINT"EN EL PLANO DE MEDICION ";I;"ES:"
655 INPUT DB(I)
657 DBA=DB(I)*π/180
661 GR(I)=AB(I)*COS(DBA)
663 GC(I)=AB(I)*SIN(DBA)
670 NEXT I
671 PRINT#3,"PLANO     AMPLITUD     DEFASAMIENTO"
672 FOR I=1 TO N
673 PRINT#2," 99          999.9          999.9"
674 PRINT#1,I,AB(I),DB(I)
676 NEXT I
685 PRINT" "
686 PRINT#3," "
687 PRINT#3," "
690 PRINT" "
700 PRINT"COLOCACION DE LAS MASAS DE COMPENSACION"
701 PRINT#3,"COLOCACION DE LAS MASAS DE PRUEBA:"
702 PRINT#3," "
715 PRINT" "
730 FOR I=1 TO N
745 PRINT"EL RADIO DE LA MASA DE PRUEBA?";I
760 INPUT RA(I)
775 PRINT"DIRECCION DE COLOCACION?"
790 INPUT DI(I)
805 NEXT I
807 PRINT#3,"MASA      RADIO      DIRECCION"
808 FOR I=1 TO N
809 PRINT#2," 99        99.9          999.9"
810 PRINT#1,I,RA(I),DI(I)
812 NEXT I
820 PRINT" "
821 PRINT#3," "
822 PRINT#3," "
835 PRINT"DATOS DE LAS VIBRACIONES INDUCIDAS:"
836 PRINT#3,"VIBRACIONES INDUCIDAS:"
850 PRINT" "
851 PRINT#3," "
865 FOR J=1 TO N
880 FOR I=1 TO N
895 PRINT"LA AMP. DE VIB. EN EL PLANO";I;"DEBIDO A LA MASA DE PRUEBA EN ";J
910 INPUT AV(I)
911 F(I,J)=AV(I)
925 PRINT"EL DEFASAMIENTO EN ";I;"DEBIDO A LA MASA EN?";J
930 INPUT DV(I)
931 Z(I,J)=DV(I)
932 DVA=DV(I)*π/180
934 HR(I)=AV(I)*COS(DVA)
936 HC(I)=AV(I)*SIN(DVA)
942 REM FORMACION DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE INFLUENCIA
944 HR(I)=HR(I)-GR(I)
946 HC(I)=HC(I)-GC(I)
950 AV(I)=(HR(I)↑2+HC(I)↑2)↑.5
953 U=HC(I)/HR(I)
955 DV(I)=ATN(U)
956 DV(I)=DV(I)*180/π
957 IF HC(I)>0 THEN 962
958 IF HR(I)>0 THEN 970
```

```
959 DV(I)=DV(I)+180
960 GOTO 970
962 IF HR(I))0 THEN 970
964 DV(I)=DV(I)+180
970 TR=AV(I)/RA(J)
985 TC=DV(I)-DI(J)
1000 TC=TC*2*π/360
1015 TE=TR*COS(TC)
1030 TR(I,J)=TE
1045 TC=TR*SIN(TC)
1060 TC(I,J)=TC
1075 NEXT I
1090 NEXT J
1091 PRINT#3,"PLANO      AMPLITUD     DEFASAMIENTO     MASA DE PRUEBA EN"
1092 FOR J=1 TO N
1093 FOR I=1 TO N
1094 PRINT#2," 99          99.9          999.9                    99"
1095 PRINT#1,I,F(I,J),Z(I,J),J
1096 NEXT I
1097 NEXT J
1105 PRINT" "
1110 FOR I=1 TO 20
1111 PRINT" "
1112 NEXT I
1113 PRINT"BACOIN ESTA HACIENDO CALCULOS"
1114 PRINT" "
1115 PRINT"FAVOR DE ESPERAR"
1116 PRINT" "
1120 REM TRANSPOSICION DE LAS MATRICES DE COEFICIENTES DE INFLUENCIA
1135 FOR I=1 TO N
1150 FOR J=1 TO N
1165 R(I,J)=TR(J,I)
1180 C(I,J)=-TC(J,I)
1195 NEXT J
1210 NEXT I
1225 PRINT" "
1240 REM MULTIPLICACION DE MATRIZ DE PONDERACION POR SU TRANSPUESTA
1255 FOR I=1 TO N
1260 H(I,I)=1
1270 E=E(I,I)*E(I,I)
1285 E(I,I)=E
1300 NEXT I
1330 REM MULTIPLICACION DE LAS MAT. TRANS. DE COEF. DE INF. POR:
1345 REM LA MATRIZ DE PONDERACION Y SU TRANSPUESTA
1360 FOR I= 1 TO N
1375 FOR J= 1 TO N
1390 FOR K= 1 TO N
1405 O=O+R(I,K)*E(K,J)
1420 P=P+C(I,K)*E(K,J)
1435 NEXT K
1450 O(I,J)=O
1465 P(I,J)=P
1480 O=0
1495 P=0
1510 NEXT J
1525 NEXT I
1540 REM MULTIPLICACION DEL RESULTADO ANTERIORMENTE OBTENIDO POR:
1555 REM LA MATRIZ DE COEF. DE INF.
1570 FOR I=1 TO N
1585 FOR J=1 TO N
```

```
1600 FOR K=1 TO N
1615 Q=Q+O(I,K)*TR(K,J)
1630 S=S+O(I,K)*TC(K,J)
1645 G=G+P(I,K)*TR(K,J)
1660 L=L+P(I,K)*TC(K,J)
1675 NEXT K
1690 Q(I,J)=Q
1705 S(I,J)=S
1720 G(I,J)=G
1735 L(I,J)=-L
1750 Q=0
1765 S=0
1780 G=0
1795 L=0
1810 NEXT J
1825 NEXT I
1840 REM FORMACION DE LA MATRIZ A INVERTIR(REAL Y COMPLEJA)
1855 FOR I=1 TO N
1870 FOR J=1 TO N
1885 A=Q(I,J)+L(I,J)
1900 A(I,J)=A
1915 B=G(I,J)+S(I,J)
1930 B(I,J)=B
1945 NEXT J
1960 NEXT I
1975 REM INVERSION DE LA MATRIZ OBTENIDA (COMPLEJA)
1990 P1=P1+1
2005 IF P1=1 GOTO 2035
2020 IF P1=2 GOTO 2125
2035 FOR I=1 TO N
2050 FOR J=1 TO N
2065 Q(I,J)=A(I,J)
2080 NEXT J
2095 NEXT I
2110 GOTO 2200
2125 FOR I=1 TO N
2140 FOR J= I TO N
2155 Q(I,J)=F(I,J)
2170 NEXT J
2185 NEXT I
2186 FOR I=1 TO N
2187 FOR J=1 TO N
2188 IF I=J THEN 2195
2189 H(I,J)=0
2190 NEXT J
2191 NEXT I
2195 H(I,J)=1
2196 NEXT J
2197 NEXT I
2200 FOR J=1 TO N
2215 FOR I=J TO N
2230 IF Q(I,J)()0 THEN 2290
2245 NEXT I
2260 PRINT"MATRIZ SINGULAR"
2275 GOTO 3920
2290 FOR K=1 TO N
2305 R=Q(J,K)
2320 Q(J,K)=Q(I,K)
2335 Q(I,K)=R
2350 R=H(J,K)
```

```
2365 H(J,K)=H(I,K)
2380 H(I,K)=R
2395 NEXT K
2410 L=1/Q(J,J)
2425 FOR K=1 TO N
2440 Q(J,K)=L*Q(J,K)
2455 H(J,K)=L*H(J,K)
2470 NEXT K
2485 FOR A=1 TO N
2500 IF A=J THEN 2590
2515 L=-Q(A,J)
2530 FOR K=1 TO N
2545 Q(A,K)=Q(A,K)+L*Q(J,K)
2560 H(A,K)=H(A,K)+L*H(J,K)
2575 NEXT K
2590 NEXT A
2605 NEXT J
2620 IF P1=2 THEN 2725
2635 FOR I=1 TO N
2650 FOR J=1 TO N
2665 W(I,J)=H(I,J)
2680 NEXT J
2695 NEXT I
2710 GOTO 2815
2725 FOR I=1 TO N
2740 FOR J=1 TO N
2755 X(I,J)=H(I,J)
2770 NEXT J
2785 NEXT I
2800 GOTO 3130
2815 FOR I=1 TO N
2830 FOR J=1 TO N
2845 FOR K=1 TO N
2860 Z=Z+W(I,K)*B(K,J)
2875 NEXT K
2890 Z(I,J)=Z
2905 Z=0
2920 NEXT J
2935 NEXT I
2950 D=0
2965 FOR I=1 TO N
2980 FOR J=1 TO N
2995 FOR K=1 TO N
3010 D=D+B(I,K)*Z(K,J)
3025 NEXT K
3040 D(I,J)=D
3055 D=0
3070 F(I,J)=A(I,J)+D(I,J)
3085 NEXT J
3100 NEXT I
3115 GOTO 1990
3130 Y=0
3132 FOR I=1 TO N
3145 FOR J=1 TO N
3160 FOR K=1 TO N
3205 Y=Y-Z(I,K)*X(K,J)
3220 NEXT K
3235 Y(I,J)=Y
3250 Y=0
3251 NEXT J
```

```
3280 NEXT I
3295 REM FORMACION DEL SEGUNDO TERMINO DEL SISTEMA OPTIMO
3310 FOR I=1 TO N
3325 DB(I)=DB(I)*2*π/360
3340 BR(I)=AB(I)*COS(DB(I))
3355 BC(I)=AB(I)*SIN(DB(I))
3370 NEXT I
3385 FOR I=1 TO N
3400 FOR J=1 TO N
3415 PR=PR+O(I,J)*BR(J)
3430 PC=PC+P(I,J)*BR(J)
3445 QR=QR+P(I,J)*BC(J)
3460 QC=QC+O(I,J)*BC(J)
3475 NEXT J
3490 PR(I)=PR-QR
3505 PC(I)=PC+QC
3520 PR=0
3535 PC=0
3550 QR=0
3565 QC=0
3580 NEXT I
3595 REM OBTENCION DEL VECTOR OPTIMO
3610 FOR I=1 TO N
3625 FOR K=1 TO N
3640 VR=VR+X(I,K)*PR(K)
3655 VC=VC+Y(I,K)*PR(K)
3670 WC=WC+X(I,K)*PC(K)
3685 WR=WR+Y(I,K)*PC(K)
3700 NEXT K
3715 VR(I)=VR-WR
3730 VC(I)=VC+WC
3732 VR=0
3733 VC=0
3734 WR=0
3735 WC=0
3745 NEXT I
3759 REM PRESENTACION DE RESULTADOS
3760 PRINT#3," "
3761 PRINT#3," "
3762 PRINT#3," ","SISTEMA OPTIMO DE BALANCEO"
3763 PRINT#3," "
3765 PRINT#3,"PLANO     MASA DE COMPENSACION     DIRECCION"
3766 PRINT" "
3767 PRINT" "
3768 PRINT"MASAS OPTIMAS DE BALANCEO:"
3769 PRINT" "
3775 FOR I=1 TO N
3790 RO(I)=(VR(I)↑2+VC(I)↑2)↑(1/2)
3805 AO=VC(I)/VR(I)
3820 AO=ATN(AO)
3835 AO(I)=AO*180/π
3836 IF VC(I)>0 THEN 3840
3837 IF VR(I)<0 THEN 3850
3838 AO(I)=AO(I)+180
3839 GOTO 3850
3840 IF VR(I)<0 THEN 3850
3841 AO(I)=AO(I)+180
3842 PRINT" "
3850 PRINT"LA MASA DE COMPENSACION";I;"ES:";RO(I);".SU DEFASAMIENTO ES:";AO(I)
3881 PRINT#2,"  99              999.99999             S999.99"
```

```
3882 PRINT#1,I,RO(I),AO(I)
3885 PRINT" "
3910 NEXT I
3920 END

READY.
```

R E F E R E N C I A S

1 L. Meirovitch. Elem=nts of vibrations analysis.
Editorial Mc Graw Hill. E.U.A., 1975.

2 William T. Thomson. Teoría de vibraciones y aplicaciones.
Editorial Prentice Hall, Internacional. México, 1982.

3 Williams E. Boyce, Richard C. Diprima. Ecuaciones diferencia_
les y problemas con valores en la frontera.
Editorial Limusa. México, 1980.

4 Robert F. Steidel. Introducción al estudio de las vibracio--
nes mecánicas.
Editorial Continental. México, 1981.

5 Rieger H.F. Vibration of rotating machinery Part 1, Rotor
bearing dinamics, the vibrations.
Institute Claredon Hill, Illinois, 1981.

6 Edwin John Hearn. Resistencia de materiales, diseño de es---
tructuras y máquinas.
Editorial Interamericana. México, 1984.

7 M.A. Prohl. A general method for claculating critical speeds
of flexible rotors.
Journal of applied mechanics, Sept. 1945.

8 Bases teóricas para análisis de rotores con soportes rígidos
y flexibles.
Depto. de Equipo Mecánico, División de Equipos.
Instituto de Investigaciones Eléctricas. México, 1983.

9 Eduard C. Pestel, Frederick A. Leckie. Matrix Methods in elaostomechanics.
Editorial Mc Graw-Hill. N. York, 1963.

10 R.E.D. Bishop. The matrix Analysis of vibrations.
Editorial Cambridge University Press. 1965.

11 Apuntes de Balanceo y modelado de rotores.
Depto. de Equipo Mecánico, División de Equipos.
Instituto de Investigaciones Eléctricas. México, 1983.

12 John Boyd, A.A. Raimond. Hydrodynamic lubrication.
Westinhouse Electric Corp.

13 Dudley Fuller. Hydrostatic lubrication.
Colombia University.

14 David V. Hutton. Applied mechanical vibration.
Editorial Mc Graw-Hill. E.U.A., 1981.

15 Víctor H. Muciño, Omar J. Marín A.
Modelado de rotores para análisis modal y respuesta dinámica.
IX Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, 1983.

16 Robert C. Juvinal. Enginering considerations of stress strain and strength.
Editorial Mc Graw-Hill. N. York, 1976.

17 Frank M. White. Mecánica de fluidos.
Editorial Mc Graw-Hill. México, 1983.