Tej. 67

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

Integración Numérica de la Ecuación Diferencial del Flujo Gradualmente Variado

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

Ingeniero Civil

PRESENTA

ARTURO MARCO ANTONIO GOMEZ MANCILLA

México, D. F. Septiembre 1981

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-I-335

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA

Al Pasante señor ARTURO MARCO ANTONIO GOMEZ MANCILLA,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor M. I. Moisés Berezowsky V., para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"INTEGRACION NUMERICA DE LA ECUACION DIFERENCIAL DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO"

Introducción.
1. Métodos de integración numérica.
2. Ecuación diferencial del flujo gradualmente variado.
3. Aplicación a perfiles tipo M.
4. Aplicación a perfiles tipo S.
5. Aplicación a perfiles tipo H.
6. Conclusiones.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 10 de noviembre de 1980
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/CGLH/ser

I N D I C E

INTRODUCCION

El cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado en canales prismáticos es uno de los problemas a los que a menudo se enfrenta el ingeniero hidráulico y no obstante su común aparición en la práctica, dicho cálculo se ha venido realizando, en la mayoría de los casos, usando el método tradicional de incrementos finitos. Este método, como es sabido, plantea la ecuación de la energía entre las secciones inicial y final de un tramo de canal de longitud finita (incremento finito) e iguala la energía de la sección inicial a la suma de las pérdidas por fricción más la energía en la sección final. Obviamente, las condiciones en la sección inicial son conocidas ya que al principio del cálculo, ellas corresponden a las de una sección de control. Sin embargo, para conocer el tirante en la sección final, se presenta el problema de que éste no puede expresarse en forma explícita por lo cual se hace necesario un proceso de ensayo y error, es decir, iterativo.

La necesidad de tales iteraciones ha obligado al ingeniero práctico a usar incrementos demasiado grandes con el fin de reducir el número de secciones y con ello realizar el cálculo del perfil en un tiempo razonablemente corto. Sin embargo, tal afán de ahorro de tiempo conduce en algunos casos a resultados erróneos debidos al bajo grado de aproximación que posee este método. En él, las pérdidas por fricción se calculan ya sea con la pendiente de fricción promedio, o bien, con otra calculada a partir de valores medios de velocidad, área y radio hidráulico en las secciones extremas del tramo analizado. Esto, como puede entenderse, es cada vez menos cierto en tanto se aumenta la longitud del tramo analizado.

Los objetivos del presente trabajo son: proponer algunos métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias que puedan ser aplicados al cálculo de perfiles de flujo en forma fácil y accesible, proporcionar criterios de selección de un método apropiado para cada tipo de perfil y demostrar la aplicabilidad de estos métodos en comparación con el tradicional método de incrementos finitos.

Para cumplir con los objetivos de este trabajo se creyó conveniente dividirlo en dos partes: la primera de ellas comprende la parte teórica que corresponde, en el capítulo 1, a la presentación de los métodos de integración numérica más comunes, al estudio de sus diferentes características y a la presentación de ejemplos numéricos con el fin de aclarar la mecánica del cálculo; y en el capítulo 2, al planteamiento y deducción de la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado y a la determinación de los métodos más adecuados para cada tipo de perfil. La segunda parte corresponde, en sus capítulos 3, 4 y 5, a la aplicación de los métodos seleccionados a casos concretos de perfiles de flujo con el fin de demostrar la aplicabilidad de los métodos propuestos y en el capítulo 6, a la presentación de las conclusiones a las que se llegó al analizar los tres capítulos precedentes.

PARTE I

TEORIA Y ANALISIS

Esta primera parte comprende los capítulos 1 y 2. En el primero de ellos se presentarán los métodos de integración numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias; se analizarán los errores que se cometen al aplicarlos, su convergencia y estabilidad, se resolverán algunas ecuaciones diferenciales a manera de ejemplos y finalmente se darán algunas recomendaciones para la selección de un método de integración adecuado. En el segundo se obtendrá la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado y se analizará su comportamiento con el fin de determinar los diferentes perfiles de flujo y con ello poder dar una relación de métodos de integración recomendados para cada tipo de perfil.

CAPITULO 1

METODOS NUMERICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1.1 INTRODUCCION

En este capítulo se estudiarán los métodos más comunes para resolver una sola ecuación diferencial ordinaria de primer orden, con una condición inicial:

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_o) = y_o$$

suponiendo que f es tal que el problema tiene una solución única en algún intervalo que contenga a x_o, con el fin de obtener valores numéricos de la solución.

En su forma más sencilla, la solución numérica de una ecuación diferencial se obtiene como sigue: La ecuación diferencial da la pendiente de la curva en cualquier punto como función de x y y; al empezar se conoce solamente un punto de la curva, es decir, x_o, y_o. Por lo tanto, se empieza en dicho punto. Se calcula la pendiente de la curva en $x = x_0$ y se avanza una pequeña distancia a lo largo de la tangente correspondiente. Si el incremento en x se denomina h, se habrá llegado a un nuevo punto $x_1 = x_0 + h$, y a partir de la pendiente de la tangente, obtenida de la ecuación diferencial, se obtendrá un nuevo valor de y, llamado y_1, procediendo de esta manera puede obtenerse una secuencia de líneas rectas cortas, las cuales, se espera, se aproximen con suficiente precisión a la curva verdadera que es la solución.

Obviamente, existen fallas en esta aproximación simplificada a la solución numérica. Se está aproximando una curva mediante una secuencia de líneas rectas, lo cual sugiere dificultades desde el principio. Puede suceder que tal secuencia de líneas rectas se desvíe considerablemente de la curva verdadera, como se indica en la figura 1.1, lo cual constituye el problema de la inestabilidad del que se hablará más tarde.

Es claro que se debe encontrar alguna manera de tomar en cuenta la curvatura de la verdadera solución en vez de aproximarla simplemente por medio de una secuencia de rectas. Esto conduce a dos categorías básicas de métodos de solución.

Métodos directos de un solo paso, en los cuales se usa la información acerca de la curva en un solo punto y no se itera la solución. Dentro de este grupo se estudiarán los métodos de Taylor, Euler, Heun, Runge-Kutta y Ralston.

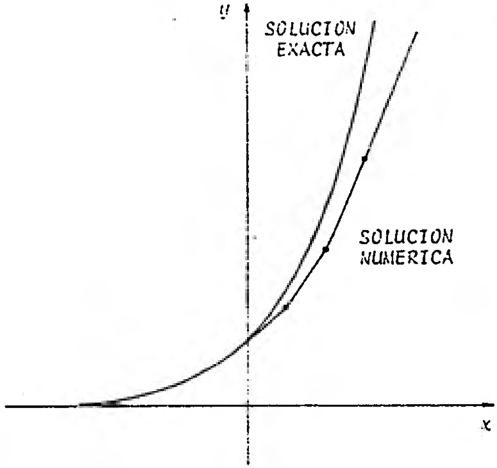


Fig 1.1 Representación gráfica del significado de la solución numérica de una ecuación diferencial

Métodos directos de varios pasos, en los que el siguiente punto de la curva se encuentra usando información de puntos anteriores y que requieren iteraciones para llegar a un valor suficientemente preciso. La mayoría de estos métodos son llamados Predictor-Corrector. Incluídos en este grupo se tratarán: el método modificado de Euler, el método de Milne y el método de Adams.

Conviene hacer notar que todos los métodos del primer grupo pertenecen al tipo Runge-Kutta excepto el de Series de Taylor y que el método de Euler es de primer orden, el de Heun de segundo y los de Runge-Kutta y Ralston de cuarto. Por otra par te, los métodos, modificado de Euler, Milne y Adams son del tipo predictor-corrector de segundo, cuarto y cuarto orden respectivamente.

1,2 RESUMEN DE METODOS

Con el fin de lograr una mejor identificación de los métodos, se ha creído conveniente incluir en esta sección, únicamente las expresiones que los definen, algunas de sus principales características y, en los casos básicos su interpretación geométrica. Lo anterior en virtud de que en secciones subsecuentes se hablará de errores, estabilidad, convergencia y ventajas de los diferentes métodos.

Series de Taylor. Este método es muy usado cuando $f(x,y)$ es una función analítica sencilla pues es necesario obtener de ella sus derivadas de orden superior. En este trabajo se presentará la serie de Taylor involucrando hasta la cuarta derivada de la función. Al truncar la serie en la cuarta derivada, se está aceptando un error del orden de h^5. El método usa la siguiente expresión

$$(1.1) \qquad y_{m+1} = y_m + hy'_m + \frac{1}{2}h^2 y_m^{(2)} + \frac{1}{6}h^3 y_m^{(3)} + \frac{1}{24}h^4 y_m^{(4)}$$

Método de Euler. Este método resulta ser del tipo de Runge-Kutta de primer orden y equivale también a una serie de Taylor truncada hasta la primera derivada. Aunque no requiere de calcular las derivadas de orden superior como el método de Taylor, el de Euler suele ser muy poco usado debido a su lentitud en la producción de soluciones aceptablemente precisas. Como el método es de primer orden, se espera un error de truncamiento del orden de h^2. La expresión usada es

$$y_{m+1} \doteq y_m + hy'_m \tag{1.2}$$

Como el método de Euler proporciona una gran ayuda en la comprensión de la naturaleza de las soluciones, se presenta a continuación su interpretación geométrica.

Partiendo del punto conocido (x_m, y_m), se puede dibujar una recta de pendiente $m = y'_m$ y que pase por el punto (x_m, y_m).

La situación se representa en la figura 1.2, en que la curva es la solución exacta (que se desconoce) y la línea descrita es llamada L_1. La solución y_{m+1} será la ordenada del punto en que L_1 intersecta a la vertical levantada por $x = x_{m+1} = x_m+h$. El error en x_{m+1} se denota por e.

Método de Heun. También conocido como Método mejorado de Euler, es también del tipo Runge-Kutta de segundo orden, en elcual se trabaja promediando las pendientes en (x_m, y_m) y $(x_m+h, y_m+hy'_m)$. El último punto es el que se llama (x_{m+1}, y_{m+1}) en el método de Euler. Este es un método que converge más rápidamente que el de Euler y como es de segundo orden po

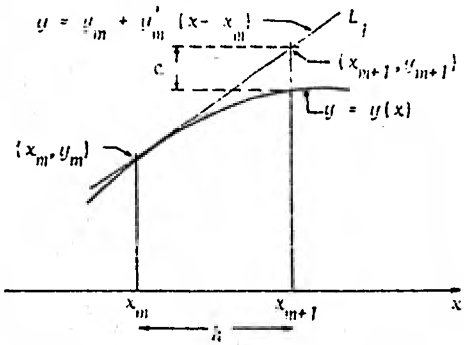


Fig 1.2 Representación geométrica del método de Euler

see un error de truncamiento del orden de h^3. El método de Heun usa las siguientes expresiones:

(1.3) $$k_1 = hf(x_m, y_m)$$

(1.4) $$k_2 = hf(x_m+h, y_m+k_1)$$

(1.5) $$y_{m+1} \doteq y_m+\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Geométricamente, se usa el método de Euler para determinar el punto $(x_m+h, y_m+hy'_m)$ que está en la línea L_1 del diagrama mostrado en la figura 1.3. En este punto, se calcula la pendiente de la curva, que es la de la línea L_2. Se promedian las dos pendientes y se obtiene la de la línea $\overline{L}$. Finalmente se traza la línea L paralela a $\overline{L}$ y que pase por (x_m, y_m). El punto en el que la línea L intersecta a la vertical levantada por $x = x_{m+1} = x_m + h$ se considera el punto (x_{m+1}, y_{m+1}).

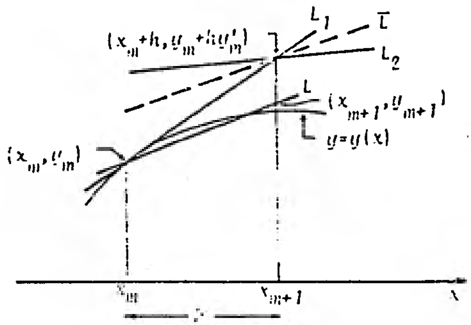


Fig 1.3 Representación geométrica del método de Heun

Método de Runge-Kutta. Este es quizás el más común de los métodos del tipo Runge-Kutta; es tan común que la literatura del análisis numérico lo llama simplemente "el método de Runge-Kutta". Por ser éste un método de cuarto orden se espera que el error por truncamiento sea del orden de h^5. Se desarrolló con el fin de evitar el posiblemente oneroso cálculo de las derivadas de orden superior necesario en el método de Taylor. En lugar de las derivadas se usan valuaciones extras de la función en diferentes posiciones, de manera que esencialmente se duplica la exactitud del polinomio de Taylor. Es interesante observar que si f es independiente de y el método de Runge-Kutta se reduce a la regla de Simpson aplicada a $y(x) = f(x)$. El método queda definido por las siguientes ex-

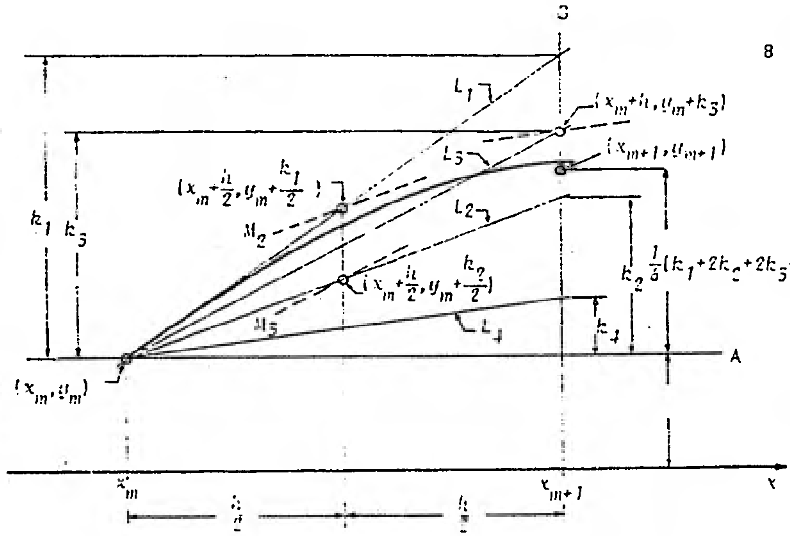


Fig 1.4 Representación geométrica del método de Runge-Kutta de cuarto orden

presiones:

(1.6) $K_1 = h\,f(x_m,\ y_m)$

(1.7) $K_2 = h\,f(x_m+h/2,\ y_m+K_1/2)$

(1.8) $K_3 = h\,f(x_m+h/2,\ y_m+K_2/2)$

(1.9) $K_4 = h\,f(x_m+h,\ y_m+K_3)$

(1.10) $y_{m+1} \doteq y_m+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$

Geométricamente, el método de Runge-Kutta equivale a sumar al valor de y_m el promedio pesado de una serie de valores k_1, k_2, k_3 y k_4 encontrados como sigue: Primero se encuentra el valor de la pendiente de la curva en el punto (x_m, y_m) con la cual se traza la línea L_1 de la figura 1.4. La distancia que hay entre la línea horizontal A que pasa por el punto (x_m, y_m) y la intersección de L_1 con la vertical B que pasa por $x=x_{m+1}$ es el valor K_1. Ahora se calcula la pendiente de la curva en el punto $(x_m+h/2, y_m+K_1/2)$, la cual queda representada por la línea M_2 y se le traza una paralela que pase por el punto (x_m, y_m), llamada L_2. La distancia existente entre la hori - zontal A y la intersección de L_2 con la vertical B es K_2. Se procede ahora a calcular la pendiente de la curva en el punto $(x_m+h/2 , y_m+K_2/2)$ la cual queda representada por la línea pun teada M_3. Se traza una línea paralela a M_3 que pase por el punto (x_m, y_m) llamada L_3. La distancia que se encuentra en- tre la intersección de las líneas L_3 y B y la línea A es K_3. Finalmente se valúa la pendiente de la curva en el punto (x_m+h, y_m+K_3) la que queda representada por la línea M_4. Se traza una línea paralela a M_4 que pase por el punto (x_m, y_m) y se le llama L_4. La distancia que hay entre la línea A y la intersección de las líneas L_4 y B es lo que se llama K_4. Una vez calculados K_1, K_2, K_3 y K_4; se encuentra su promedio pesa do y se suma a y_m como se indica en la ecuación 1.10.

Método de Ralston. Este es una variación del método de Runge -Kutta y es, por tanto, un método de este tipo. Como el méto do es también de cuarto orden se espera que el error de trun- camiento sea del orden de h^5. La principal característica de este método es la de minimizar la cota superior de la constan te de proporcionalidad del error de truncamiento (ref 1). Las expresiones a las que llegó Ralston son las siguientes:

(1.11) $K_1 = hf(x_m, y_m)$

(1.12) $K_2 = hf(x_m+mh, y_m+mK_1)$

(1.13) $K_3 = hf\left[x_m+nh, y_m+rK_2+(n-r)K_1\right]$

(1.14) $K_4 = hf\left[x_m+hp, y_m+sK_2+tK_3+(p-s-t)K_1\right]$

(1.15) $y_{m+1} \doteq y_m+aK_1 + bK_2 + cK_3 + dK_4$

$m = 0.4$	$r = 0.15875964$	$a = 0.17476028$
$n = 0.45573725$	$s = -3.05096516$	$b = -0.55148066$
$p = 1.0$	$t = 3.83286476$	$c = 1.20553560$
		$d = 0.17118478$

Método modificado de Euler. Este método predictor-corrector de segundo orden se incluye con el fin de obtener una idea clara de la naturaleza e interpretación geométrica de los métodos Predictor-Corrector. Como su nombre lo indica, primero se predice un valor de y_{m+1} para después usar otra fórmula diferente para corregir el valor predicho. Se puede, si es necesario, usar nuevamente la fórmula correctora para recorregir el valor de y_{m+1}. Se debe detener el proceso cuando el valor absoluto de la diferencia de dos valores consecutivos del corrector sea menor que un valor ε fijado de antemano, sin embargo la práctica recomienda que el número de iteraciones más adecuado es de dos. Las expresiones que constituyen este método son:

$$(1.16) \qquad y_{m+1}^{(0)} \doteq y_{m-1} + 2hf(x_m, y_m)$$

$$(1.17) \qquad y_{m+1}^{(i)} \doteq y_m + \frac{h}{2}\left[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)}) \right]$$

La primera es usada como predictor y en ella el superíndice cero indica que se trata de la primera suposición de y_{m+1}. La segunda es usada como corrector y en ella el superíndice i indica que se trata de la iésima aplicación del corrector. Geométricamente, el predictor equivale a determinar la pendiente de la curva en el punto (x_m, y_m) y a dibujar una línea L_1 con esa pendiente y que pase por el punto (x_m, y_m). Después se dibuja una línea L, paralela a L_1, que pase por el punto (x_{m-1}, y_{m-1}) como se indica en la figura 1.5. En donde esta línea intersecta a la vertical levantada por $x = x_{m+1}$ se encuentra el valor predicho para $y_{m+1}^{(0)}$. Ahora bien, como se conoce aproximadamente el valor de y_{m+1}, es posible calcular la pendiente aproximada de la curva en el punto $(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)})$ y dibujar una recta con esa pendiente y que pase por dicho punto. Esta se muestra en la figura 1.6 como la línea L_2. La línea L_1 de esta figura es la misma línea L_1 de la figura 1.5, y tiene la pendiente dada por $f(x_m, y_m)$. Se promedian ahora las pendientes de las líneas L_1 y L_2 con lo que se ob -

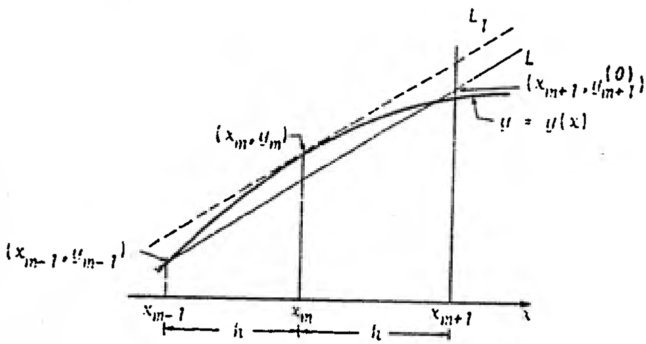


Fig 1.5 Representación geométrica del predictor del método modificado de Euler

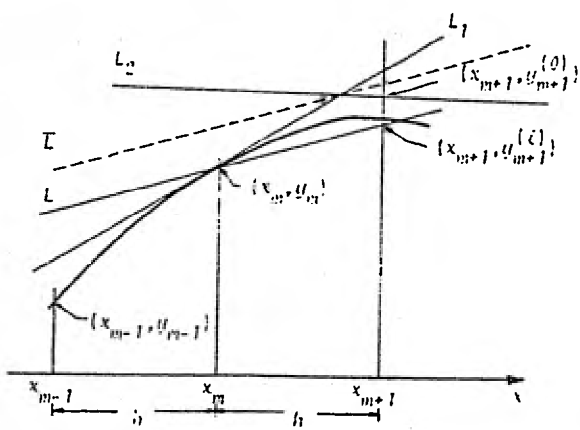


Fig 1.6 Representación geométrica del corrector del método modificado de Euler

tiene la línea $\bar{L}$. Finalmente, se dibuja una línea L, paralela a $\bar{L}$ y que pase por el punto (x_m, y_m). Su intersección con la vertical levantada por $x = x_{m+1}$ produce una nueva aproximación a y_{m+1} llamándose a este valor $y_{m+1}^{(1)}$.

Método de Milne. Habiendo ya dado una idea de la naturaleza e interpretación geométrica de los métodos predictor-corrector, solo resta decir que el predictor usado en este método es de cuarto orden por lo que requiere de cuatro valores previos que mezcla en $y_{m+1}^{(0)}$. El valor inicial $y_0 = y(x_0)$ es uno de ellos, los otros deben obtenerse usando alguno de los métodos directos de un solo paso. El método de Runge-Kutta es, a menudo, el más indicado en estos casos. Como todo el cálculo va a estar basado en los valores iniciales, vale la pena un esfuerzo extra para obtenerlos con una razonable aproximación. Las ecuaciones usadas por el método de Milne son las siguientes:

$$(1.18) \qquad y_{m+1}^{(0)} = y_{m-3} + \frac{4}{3}h\,(2y'_{m-2} - y'_{m-1} + 2y'_m)$$

$$(1.19) \qquad y_{m+1}^{(i)} = y_{m-1} + \frac{1}{3}h\,(y'_{m+1} + 4y'_m + y'_{m-1})$$

Método de Adams. Al igual que el método de Milne, el de Adams es un método predictor-corrector de cuarto orden y requiere también de cuatro valores previamente calculados para "arrancar". Como en el caso de Milne, es común usar el método de Runge-Kutta para generar dichos valores iniciales. Aunque el método de Milne es el más conocido, el de Adams suele dar mayor aproximación. Las fórmulas predictora y correctora que usa este método son, respectivamente

$$y_{m+1}^{(0)} \doteq y_m + \frac{1}{24}h(55y'_m - 59y'_{m-1} + 37y'_{m-2} - 9y'_{m-3}) \tag{1.20}$$

$$y_{m+1}^{(i)} \doteq y_m + \frac{1}{24}h(9y'_{m+1} + 19y'_m - 5y'_{m-1} + y'_{m-2}) \tag{1.21}$$

1.3 ERRORES, CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

En todos los métodos que se han presentado en la sección anterior se ha sustituido la ecuación diferencial por una ecuación de diferencia o bien se ha aceptado la sustitución de la ecuación diferencial por una serie truncada. Lo anterior, aunado al hecho de que los datos de entrada rara vez son exactos, ya que a menudo se basan en experimentos o son estimados, y a que los procesos numéricos a su vez introducen errores, es necesario tener, si no un análisis exhaustivo de los errores ocurridos en un cálculo (pues en algunos casos no existe un procedimiento sencillo para realizarlo), sí una idea del rango de éstos y un claro conocimiento de su naturaleza. Con este fin, a continuación se definen los diferentes tipos de errores que pueden existir en un cálculo numérico dando una breve explicación de su origen.

Primero es necesario establecer la diferencia entre error relativo y error abasoluto. El *error absoluto* en una cantidad es la diferencia entre el valor verdadero, suponiendo que se conoce, y una aproximación al valor verdadero. Se puede escribir

$$e_x = x - \bar{x}$$

donde e_x es el error absoluto, x es el valor verdadero y $\bar{x}$ es la aproximación al valor verdadero.

El *error relativo* es el cociente que resulta de dividir el error absoluto entre una aproximación al valor verdadero. Si se expresa el error relativo en porciento, se puede escribir

$$e_{Rx} = 100 \frac{e_x}{\bar{x}}$$

Ahora bien, existen tres tipos de errores en un cálculo numérico: inherentes, por truncamiento y por redondeo y cada uno de ellos puede expresarse en forma absoluta o relativa.

Errores inherentes. Son los errores que existen en los valores de los datos, causados por incertidumbre en las mediciones, por verdaderas equivocaciones, por la naturaleza necesariamente aproximada de la representación, mediante un número finito de dígitos, de números irracionales, o por un incompleto o erróneo conocimiento de las leyes físicas.

Errores por truncamiento. Este tipo de errores son los que se deben a la propia manera en que se efectúan los procesos numéricos.

Por ejemplo, la conocida serie infinita de Taylor

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \quad . \; . \; .$$

se puede usar para calcular el seno de cualquier ángulo expresado en radianes. Por supuesto que no se pueden usar todos los términos de la serie, porque la serie es infinita, entonces debe deternerse la operación después de calcular un número finito de términos, quizá hasta x^7 ó x^9 . Los términos omitidos (que son infinitos en número) introducen un error en los resultados calculados. A este error se le llama error por truncamiento, puesto que es debido al truncamiento de un proceso mantemático infinito.

Errores por redondeo. Aún si se supone que los datos de entrada no tienen errores inherentes y se aplican procesos de computación finitos y que por lo tanto no introducen errores por truncamiento, se introducen otro tipo de errores al aplicar aritmética simple: los errores por redondeo.

Supóngase por el momento que se tiene una computadora en la cual cada número contiene cinco dígitos y que deseamos sumar

9.2654 y 7.1625, los que se suponen exactos. La suma es 16.4279, que tiene seis dígitos y por lo tanto no puede ser almacenada en la computadora hipotética. La computadora debe entonces redondear el resultado de seis dígitos a 16.428 y al hacerlo introduce un error por redondeo. Como el trabajo de una computadora se efectúa con cantidades que tienen algún número fijo de dígitos, la necesidad de redondear ocurre con frecuencia.

Es un hecho que los métodos de Taylor, Euler y Heun son realmente poco usados, el primero por la dificultad existente para calcular las derivadas de orden superior que requiere (las expresiones de $f(x, y)$ son generalmente complicadas pues por ello se recurre a una solución numérica aproximada), y los de Euler y Heun por su escasa aproximación.

En vista de lo anterior solo se estudiará el comportamiento del error en los métodos de Runge-Kutta y Ralston que corresponden al mismo caso y en los métodos modificado de Euler, Milne y Adams, que son del tipo predictor-corrector.

Análisis del error en los métodos Runge-Kutta. Se ha observado que el error por truncamiento en un método de Runge-Kutta de orden p es Kh^{p+1}, en que K es alguna constante. Los límites a los valores de K para p = 2, 3 y 4 están dados en un artículo de Ralston (ref 1). Uno de los inconvenientes más serios de los métodos de Runge-Kutta es la falta de un procedimiento simple para estimar el error por truncamiento.

Merson ha demostrado que se puede tener una estimación del error por truncamiento a expensas de una evaluación adicional de $f(x,y)$. Esto puede ser costoso si $f(x,y)$ es complicada (ref 2).

Una estimación más precisa del error por truncamiento se puede obtener a expensas de considerable esfuerzo adicional usando la aproximación diferida al límite de Richardson (ref 3). Para hacer esto, sea Y_m el valor "verdadero" de la solución en $x = x_0 + mh$. Entonces, para el método clásico de cuarto orden (Runge-Kutta o Ralston)

$$Y_m = y_m^{(h)} + Kh^5 \tag{1.22}$$

en que el superíndice (h) en Y_m indica que Y_m se calculó con un tamaño h de intervalo. Se recalcula entonces la solución usando un intervalo de magnitud $h/2$, de tal manera que

$$Y_m = y_m^{(h/2)} + K\left(\frac{h}{2}\right)^5 \tag{1.23}$$

Restando (1.22) de (1.23) se obtiene

$$y_m^{(h)} - y_m^{(h/2)} = -\frac{15}{16} Kh^5$$

y el error por truncamiento para el método es

$$E_T = Kh^5 = \frac{16}{15}\left[y_m^{(h/2)} - y_m^{(h)}\right] \tag{1.24}$$

Si la quinta derivada de y es razonablemente constante, se tiene una estimación bastante buena. Por supuesto, el problema estriba en que la solución debe computarse dos veces y la información obtenida no justifica el esfuerzo realizado. Resultados similares pueden obtenerse para métodos del tipo Runge-Kutta de segundo orden, en que el error por truncamiento es Kh^3.

Análisis del error en los métodos predictor-corrector. Ya que los métodos predictor-corrector están constituídos por dos fórmulas diferentes llamadas predictor la primera y corrector la segunda, se tiene un error por truncamiento en el predictor y otro distinto en el corrector.

Se iniciará el análisis encontrando, para el método modificado de Euler, el error por truncamiento en el predictor. Para ello es necesario recordar que la serie de Taylor para $y(x)$ en el punto $x = x_m$ es

$$y(x) = y_m + y'_m(x-x_m) + \frac{1}{2}y''_m(x-x_m)^2 + \frac{1}{6}(x-x_m)^3 y'''(\xi)$$

en que ξ se encuentra comprendido entre x y x_m. Haciendo

$x = x_{m+1}$, obtenemos

$$y_{m+1} = y_m + hy'_m + \frac{1}{2}h^2 y''_m + \frac{1}{6}h^3 y'''(\xi_1), \quad x_m \leq \xi_1 \leq x_{m+1}$$

Similarmente, haciendo $x = x_{m-1}$, obtenemos

$$y_{m-1} = y_m - hy'_m + \frac{1}{2}h^2 y''_m - \frac{1}{6}h^3 y'''(\xi_2), \quad x_{m-1} \leq \xi_2 \leq x_m$$

Restándo estas dos ecuaciones se tiene que

$$\frac{y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2)}{2} = y'''(\xi), \quad x_{m-1} \leq \xi \leq x_{m+1}$$

por lo tanto se deduce que

$$y_{m+1} = y_{m-1} + 2hy'_m + \frac{1}{3}h^3 y'''(\xi)$$

El error por truncamiento es entonces

$$E_T^{(p)} = \frac{1}{3}h^3 y'''(\xi), \qquad x_{m-1} \leq \xi \leq x_{m+1}$$

Si la tercera derivada es razonablemente constante, entonces el error por truncamiento es Kh^3, que corresponde al error por truncamiento de un método de segundo orden como lo es éste. De manera análoga se puede encontrar que el error por truncamiento del corrector es

$$E_T^{(c)} = -\frac{1}{12} h^3 y''' (\eta), \qquad x_{m-1} \leq \eta \leq x_{m+1}$$

que también, si y''' es razonablemente constante, el error por truncamiento en el corrector puede expresarse como Kh^3.

El hecho de que los errores por truncamiento tanto en el predictor como en el corrector sean del mismo orden permite desarrollar un método simple para estimar y''', y por tanto $E_T^{(c)}$.

Sea Y_m el valor verdadero de la solución en $x = x_m$. Entonces

$$Y_m = y_m^{(0)} + \frac{1}{3} h^3 y''' (\xi)$$

y

$$Y_m = y_m^{(i)} - \frac{1}{12} h^3 y''' (\eta)$$

en que $y_m^{(0)}$ y $y_m^{(i)}$ están dados por el predictor y el corrector del método.

Restando estas ecuaciones se obtiene

$$0 = y_m^{(i)} - y_m^{(0)} - \frac{1}{12} h^3 \left[y''' (\eta) + 4y''' (\xi) \right]$$

Si suponemos que y''' es razonablemente constante para $x_{m-1} \leq x \leq x_{m+1}$, entonces

$$\frac{5}{12}h^3y''' = y_m^{(i)} - y_m^{(0)}$$

$$h^3y''' = \frac{12}{5}\left[y_m^{(i)} - y_m^{(0)}\right]$$

(1.25a) $$E_T^{(c)} = -\frac{1}{12}\ h^3y''' = \frac{1}{5}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

Finalmente, recordando que

$$y_m - y_m^{(i)} = E_T^{(c)} = \frac{1}{5}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

Entonces una solución más precisa se puede encontrar haciendo una corrección al final de cada paso en la siguiente forma:

(1.25b) $$y_m = y_m^{(i)} + \frac{1}{5}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

Es importante recalcar que y''' no significa realmente lo mismo en el predictor que en el corrector, así que hay aún posibilidad de error apreciable en esta extrapolación al límite. También puede suceder que y''' no sea como se supuso, razonablemente constante en el intervalo (x_{m-1}, x_{m+1}), lo cual hace inciertos los anteriores resultados.

Para el análisis del error en los métodos de Milne y Adams se siguen procedimientos análogos al anterior.

Para el método de Milne se obtiene que

$$E_T^{(p)} = \frac{28}{90} h^5 y^{(5)}(\xi), \qquad x_{m-1} \leq \xi \leq x_{m+1}$$

$$E_T^{(c)} = -\frac{1}{90} h^5 y^{(5)}(\eta), \qquad x_{m-1} \leq \eta \leq x_{m+1}$$

de donde se puede deducir que

(1.26a) $$E_T^{(c)} = \frac{1}{29}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

y por tanto

(1.26b) $$y_m = y_m^{(i)} + \frac{1}{29}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

Para el método de Adams se tiene que

$$E_T^{(p)} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi), \qquad x_{m-1} \leq \xi \leq x_{m+1}$$

$$E_T^{(c)} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\eta), \quad x_{m-1} \leq \eta \leq x_{m+1}$$

pudiéndose deducir que

(1.27a) $$E_T^{(c)} = \frac{19}{270}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

y por tanto

(1.27b) $$y_m = y_m^{(i)} + \frac{19}{270}\left[y_m^{(0)} - y_m^{(i)}\right]$$

Resulta conveniente hacer notar, para evitar confuciones, que $y_m^{(0)}$ y $y_m^{(i)}$ son el primer valor predicho y el último corregido, respectivamente.

La *Convergencia*, a la solución exacta de la ecuación diferencial es una característica deseable en cualquier método. El término convergencia se puede entender, como la tendencia hacia la solución exacta que presentan las soluciones aproximadas, al usar intervalos h más y más pequeños, o al aumentar más y más el grado p del método, esto es, incluir más y más términos de una serie.

En vista de que el análisis de convergencia de los métodos no es la finalidad del presente trabajo, únicamente se mostrará dicho análisis, a manera de ejemplo, para el método predictor -corrector modificado de Euler.

En el caso de un método predictor-corrector, el predictor solo dá un primer valor de y_{m+1}, sin embargo, es el co - rrector el que realmente dá una verdadera aproximación al valor de y_{m+1}. Por lo tanto, la convergencia debe analizarse para la fórmula correctora únicamente.

Se comenzará planteando dos iteraciones sucesivas del corrector

$$y_m^{(i)} = y_m + \frac{h}{2}\left[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)})\right]$$

$$y_{m+1}^{(i+1)} = y_m + \frac{h}{2}\left[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i)})\right]$$

Restando la primera de la segunda

$$y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} = \frac{h}{2}\left[f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i)}) - f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)})\right]$$

Usando el teorema del valor medio,

$$y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} = \frac{h}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y}\left[y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)}\right] \tag{1.28}$$

en donde $\partial f/\partial y$ se valúa para

$$x = x_{m+1} \quad \text{y} \quad y_{m+1}^{(i)} < y < y_{m+1}^{(i+1)}$$

Suponiendo ahora que $\partial f/\partial y$ está acotado, es decir, que existe un valor M tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M$$

Entonces de (1.28) se deduce que

$$\left|y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)}\right| \leq \frac{hM}{2}\left|y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)}\right|$$

Análogamente

$$\left|y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)}\right| \leq \frac{hM}{2}\left|y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)}\right|$$

Sustituyendo ésta en la anterior

$$\left|y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)}\right| \leq \left(\frac{hM}{2}\right)^2\left|y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)}\right|$$

Y continuando de esta manera, se llega finalmente a

$$\left|y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)}\right| \leq \left(\frac{hM}{2}\right)^i\left|y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)}\right|$$

Entonces, si el tamaño h del intervalo se escoge de tal manera que

$$(1.29) \qquad h < \frac{2}{M}$$

la diferencia entre los valores corregidos tiende a cero y el proceso converge.

Sin embargo, debe comprenderse lo que se acaba de probar. Se ha demostrado que si $h < 2/M$, el método modificado de Euler converge a algún valor definido, pero no necesariamente a la solución verdadera. La diferencia entre ambos valores es el error por truncamiento.

Con procedimientos similares se analiza la convergencia de los demás métodos. En la sección 1.5 se resumen los resultados de los análisis de convergencia de los métodos tratados en este trabajo.

La *estabilidad* en los métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales es una característica de los mismos que queda determinada por la forma en que un error, ya sea inherente, por truncamiento o por redondeo, se propaga (crece) a lo largo del cálculo. Se pueden definir dos tipos de estabilidad, dependiendo cada uno de ellos del tipo del error, en función del cual, se está realizando el análisis, esto es, del error absoluto o del error relativo.

La *estabilidad absoluta* en un método, existe cuando el error absoluto en un paso no se amplifica en el siguiente y por lo tanto los errores no crecen. La estabilidad absoluta en un método es muy importante, especialmente cuando la solución es decreciente, es decir, cuando $\delta(x, y) < 0$, ya que al crecer el error absoluto y decrecer la solución exacta, los resultados pueden llegar a carecer completamente de significado como puede apreciarse en la figura 1.7. El problema no es tan grave cuando la solución es creciente, es decir, cuando $\delta(x,y) > 0$, ya que aunque el error absoluto crezca, la solución también lo hace. Claro que el uso de un valor inadecuado del incremento h puede hacer que el error absoluto crezca aún más que la propia solución exacta.

El análisis de estabilidad absoluta se lleva a cabo planteando una ecuación de diferencia para el error absoluto y analizando su comportamiento en función de los parámetros involucrados en dicha ecuación. Una ecuación de diferencia es una relación entre los valores y_m de una función definida sobre un conjunto discreto de argumentos x_m.

Como en el caso de la convergencia y por las mismas razones, solo se analizará la estabilidad, tanto absoluta como relativa, únicamente para el método predictor-corrector modificado de Euler.

En los métodos predictor corrector, la carga del cálculo la tienen los correctores. Es por ello que el error en estos méto

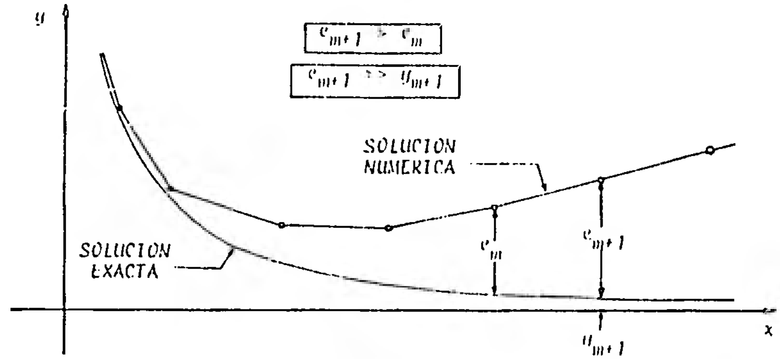


Fig 1.7 Representación gráfica del efecto de la inestabilidad absoluta en un método cuando la solución es decreciente

dos está gobernado por la fórmula correctora. En base a ello se tendrá que la selección final de y_{m+1} satisface

$$(1.30) \qquad y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})\right]$$

independientemente del error por redondeo. Si Y_m es la solución exacta, entonces

$$(1.31) \qquad Y_{m+1} = Y_m + \frac{h}{2}\left[f(x_m, Y_m) + f(x_{m+1}, Y_{m+1})\right] + e_m$$

en que e_m incluye el error por truncamiento y el error por redondeo en (1.30).

Restando (1.30) de (1.31) y haciendo

$$Y_i - y_i = \varepsilon_i$$

se obtiene, acomodando adecuadamente los términos,

$$\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m + \frac{h}{2}\left\{\left[f(x_m, Y_m) - f(x_m, y_m)\right] + \left[f(x_{m+1}, Y_{m+1}) - f(x_{m+1}, y_{m+1})\right]\right\} + e_m$$

y del teorema del valor medio

$$(1.32) \qquad \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m + \frac{h}{2}\left[\delta_y(x_{m+1}, \xi_{m+1})\cdot\varepsilon_{m+1} + \delta_y(x_m, \xi_m)\cdot\varepsilon_m\right] + e_m$$

en que ξ_i está comprendido entre y_i y Y_i.

Despejando ε_{m+1} de (1.32) se obtiene

$$\varepsilon_{m+1} = \left[\frac{1+\frac{h}{2}\delta_y(x_m, y_m)}{1-\frac{h}{2}\delta_y(x_{m+1}, \xi_{m+1})}\right]\varepsilon_m + \frac{e_m}{1-\frac{h}{2}\delta_y(x_{m+1}, \xi_{m+1})}$$

Haciendo

$$(1.33) \qquad \mu = \frac{1+\frac{h\delta_y}{2}}{1-\frac{h\delta_y}{2}}$$

$$(1.34) \qquad \delta = \frac{e_m}{1-\frac{h\delta_y}{2}}$$

se obtiene

$$(1.35) \qquad \varepsilon_{m+1} = \mu\varepsilon_m + \delta$$

en donde se han quitado los argumentos a δ_y y se ha supuesto e_m independiente de m en (1.34).

La ecuación (1.35) es una ecuación de diferencia. Recuérdese que en (1.29) se requiere que

$$\left| \frac{h f_y}{2} \right| < 1 \tag{1.36}$$

para que haya convergencia. Recuérdese que M en (1.29) es la cota superior de f_y y que (1.36) se obtiene pasando todos los términos al primer miembro

Ahora supóngase que

$$f_y < 0$$

Entonces, si h satisface (1.36), se deduce que

$$0 < \mu < 1$$

lo cual quiere decir, que el error ε_m en y_m no se amplifica en ε_{m+1}. Esto significa que los errores no crecen, y que por lo tanto, el método es estable, o más precisamente, posee estabilidad absoluta.

Por otra parte si

$$f_y > 0$$

entonces

$$\mu > 1$$

y el método es inestable pues los errores absolutos crecen, pero ello no significa que no pueda ser usado el método pues, como se verá más adelante, los errores relativos no crecen.

Un método posee *estabilidad relativa*, o se dice relativamente estable, si un error que se cometa al aplicarlo a la ecuación especial $y' = Ay$, tiene un efecto que imita el comportamiento de su solución exacta.

Por supuesto se introducirán errores en cada etapa del cálculo y habrá un efecto acumulativo natural que no revelará un estudio de estabilidad relativa.

El procedimiento de análisis de estabilidad relativa es continuación del descrito para estabilidad absoluta en el cual se planteó la ecuación de diferencia (1.35) para el error absoluto y se analizó el comportamiento de éste en dicha ecuación.

Ahora será necesario encontrar la solución de la ecuación de diferencia para poder determinar el error absoluto y dividirlo entre la solución para encontrar el error relativo.

Entonces partiendo de

$$y' = Ay$$

en que A es una constante. Su solución exacta es

$$y = ae^{Ax}$$

la cual se puede escribir como

$$y_m = ae^{A(x_0+mh)}$$

$$= ae^{Ax_0}e^{(hA)m}$$

(1.37) $$y_m = a^* e^{(hA)m}$$

en la que a^* es una nueva constante que incorpora al factor, también constante, e^{Ax_0}. Si $A > 0$, entonces y_m crece exponencialmente con m. Aún si y_m crece, el error (ε_m / y_m) puede no crecer. De hecho, es irrazonable en este caso pedir que el error absoluto permanezca acotado.

Para investigar el crecimiento del error relativo, observemos que la solución a la ecuación de diferencia (1.35) es

(1.38) $$\varepsilon_m = a_0 \mu^m + \frac{\delta}{1 - \mu}$$

en la que a_0 es una constante arbitraria. Se puede comprobar esta solución sustituyéndola en (1.35).

Ahora, llevando a cabo la división indicada en (1.33) y recordando que

$$\delta_y = \frac{\partial}{\partial y}(y') = A$$

se tiene

$$\mu = (1 + \frac{hA}{2}) \left[1 + \frac{hA}{2} + (\frac{hA}{2})^2 + (\frac{hA}{2})^3 + \ldots\right]$$

(1.39) $$\mu = 1 + hA + \frac{(hA)^2}{2} + \frac{(hA)^3}{4} + \ldots$$

que es una serie convergente para $|hA|<2$, lo cual es la condición (1.36) de convergencia del método predictor-corrector.

Por otra parte, el desarrollo en serie de Maclaurin de la función e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

que para nuestro caso es

(1.40) $$e^{hA} = 1 + hA + \frac{(hA)^2}{2} + \frac{(hA)^3}{6} + \ldots$$

La cual es, hasta el cuarto término, aproximadamente igual a (1.39). Lo cual induce a igualar (1.39) y (1.40) para obte -

ner que

$$\mu = e^{hA} + O(h^3)$$

donde $O(h^3)$ se lee "términos del orden de h^3", lo cual quiere decir que

(1.41) $$\mu = e^{hA}$$

con la misma precisión que el error por truncamiento en el método. Entonces sustituyendo (1.41) en (1.38) se obtiene

(1.42) $$\varepsilon_m = a_o e^{(hA)m} + \frac{\delta}{1 - e^{hA}}$$

en la que el último término es independiente de m, y así el primer término domina conforme m crece.

Obteniendo la relación que guardan (1.42) y (1.37) obtenemos que

$$\frac{\varepsilon_m}{Ym} = \frac{a_o}{a^*} = cte$$

por lo tanto el error relativo permanece constante.

Análogamente para $A < 0$, e_m y Ym se comportan como e^{-hA} y nuevamente el error no crece. Se puede decir que el método modificado de Euler es relativamente estable.

Se debe recordar ahora que los argumentos que nos llevaron a la estabilidad relativa supusieron que δ_y era constante. En cualquier caso de interés esto no es verdad. Sin embargo, existe fuerte evidencia empírica que indica que (en promedio), los errores relativos no aumentan en un método relativamente estable.

Lo mismo puede decirse de los errores absolutos en un proceso absolutamente estable.

En la sección 1.5 se dará un resumen de resultados acerca de la estabilidad de los métodos incluídos en este trabajo.

La *inestabilidad parcial*, según Nayers (ref 4), se presenta en todos los métodos del tipo Runge-Kutta cuando la solución es decreciente. A diferencia de los dos tipos de inestabilidad estudiados antes, la inestabilidad parcial depende de h.

Para aclarar lo anterior se procederá a determinar dicha inestabilidad para el método de Heun que es del tipo Runge-Kutta de segundo orden.

Recuérdense las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5)

$$K_1 = hf(x_m, y_m)$$

$$K_2 = hf(x_m + h, y_m + K_1)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

Como en el caso de la estabilidad relativa, se usará la ecuación lineal especial

$$y' = Ay \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

cuya solución exacta es

$$y = e^{Ax}$$

Para tal ecuación

$$K_1 = hAy_m$$

$$K_2 = hA(y_m + K_1) = hA(y_m + hAy_m)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}\left[hAy_m + hA(y_m + hAy_m)\right] =$$

$$= y_m + \frac{1}{2}(hAy_m + hAy_m + h^2A^2y_m) = y_m + \frac{1}{2}(2hAy_m + h^2A^2y_m)$$

$$= y_m + hAy_m + \frac{h^2A^2}{2}y_m$$

(1.43) $$y_{m+1} = y_m(1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})$$

Haciendo

$$y_m = y_{m-1}(1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})$$

y sustituyêndola en (1.43)

(1.44) $$y_{m+1} = y_{m-1}(1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})^2$$

Haciendo ahora

$$y_{m-1} = y_{m-2}(1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})$$

y sustituyêndola en (1.44)

$$y_{m+1} = y_{m-2}(1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})^3$$

Repitiendo este proceso hasta llegar a y_0, se tiene

$$y_{m+1} = y_0(1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})^{m+1}$$

como $y_0 = 1$

$$y_{m+1} = (1 + hA + \frac{h^2A^2}{2})^{m+1}$$

Si la función es decreciente, es decir, $A < 0$

$$(1.45) \qquad y_{m+1} = \left(1 - hA + \frac{h^2A^2}{2}\right)^{m+1}$$

Se puede apreciar que para $h > \left|\frac{2}{A}\right|$, el término dentro del paréntesis en (1.45) es mayor que 1. Por lo tanto, para valores grandes de m, la solución aproximada y_{m+1} crece, mientras que la solución exacta decrece. Lo anterior produce que los errores absolutos y relativos crezcan también, lo cual es un caso de inestabilidad.

Se debe tomar en cuenta que la inestabilidad parcial se presenta en los métodos de Runge-Kutta aunque la solución exacta no disminuya exponencialmente como en el caso de prueba anterior.

1.4 CAMBIO DEL INCREMENTO H

A continuación se discutirá el manejo del incremento h, que es un problema muy importante en la aplicación de cualquier método. El incremento h no debe ser demasiado pequeño, porque de lo contrario el número de pasos y los errores por redondeo se hacen grandes. Por otra parte, h no puede ser demasiado grande , porque un h grande implica un error por truncamiento grande en cada paso y, además, un error provocado por el hecho de que f se valúa en (x_m, y_m) en lugar de valuarse en $(x_m, y(x_m))$. Este último error es cero si f es independiente de y, y es más importante, cuanto más rápidamente varía f respecto de y, es decir, cuanto más grande es el valor absoluto de la derivada parcial $f_y = \partial f/\partial y$.

El manejo del incremento h tiene importancia, debido al hecho de que no existe ninguna fórmula para escoger el valor inicial de h, con la posible excepción de (1.29), la que usualmente no es de mucha ayuda pues puede ser difícil estimar M, y si f_y varía demasiado en el intervalo de integración, (1.29) será necesariamente conservadora en la mayoría de los puntos. Recuérdese que M es la cota superior mínima de f_y.

Existen diversos criterios para el manejo del incremento h durante el desarrollo de un método. Sin embargo, una vez que estos criterios han indicado que es necesario aumentar o disminuir el valor de h, no existe un criterio razonable para cuantificar tal aumento o, en su caso tal disminución. Por tanto, en este trabajo se optará por usar el criterio más comunmente usado que es el de aumentar o disminuir h, siempre en un 50%.

Se describirán a continuación cinco criterios para el manejo del incremento h. El primero es aplicable a cualquier método de los incluídos en este trabajo, los dos siguientes son aplicables a los métodos del tipo Runge-Kutta de cuarto orden

(Runge-Kutta y Ralston) y los dos últimos son aplicables a los métodos predictor-corrector.

1. Se realiza el cálculo de la solución con un incremento $2h$, lo cual corresponde a incrementar el error por truncamiento por paso en un factor $2^5 = 32$, pero dado que el número de pasos decrece a la mitad, el incremento real es en un factor $2^5/2 = 16$. De aquí que el error del primer cálculo (con incremento h) es igual, aproximadamente, a 1/15 de la diferencia Δ de los valores de y correspondientes calculados con incrementos h y $2h$. Ahora puede elegirse un número t (por ejemplo, una unidad del último dígito que se supone es significativo, si se cree que la cuarta cifra decimal es significativa, $t = 0.0001$) y el manejo de h sera como sigue:

$$(1.46) \qquad h = \begin{cases} h & si \quad 0.2\,t \le |\Delta| \le 10t \\ 0.5\,h & si \quad |\Delta| > 10t \\ 2\,h & si \quad |\Delta| < 0.2t \end{cases}$$

Por supuesto, debe tenerse cuidado de no reducir demasiado h ya que ello ocacionaría un fuerte aumento en el número de pasos y éste, a su vez, un aumento en los errores por redondeo. También debe cuidarse el aumento de h de manera que se le impida llegar a un valor tal que comprometa la exactitud deseada y en algunos casos, la estabilidad del método.

2. Este criterio es el más sencillo de todos y también el

menos formal. Resulta ser una burda receta dada por Collatz (ref 5). El dice que si

$$(1.47) \qquad \frac{|K_2 - K_3|}{|K_1 - K_2|}$$

llega a ser muy grande (más de algunos cientos) entonces h debe reducirse. El criterio no indica cuanto debe incrementarse h, ni cuanto debe reducirse. Es, sin embargo el de más sencillo uso y puede ser usado con algún éxito. Recuérdese que K_1, K_2 y K_3 son las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) del método de Runge-Kutta, o las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) del método de Ralston, respectivamente.

3. Un criterio parecido al anterior, pero más fundamentado, es el que se presenta a continuación. Ya se había mencionado en párrafos anteriores el porqué no es conveniente que h sea demasiado grande, antes bien, h debe ser tal que

$$(1.48) \qquad k = hM$$

se encuentre entre 0.05 y 0.2, aproximadamente. En (1.48), M es una cota superior mínima de la derivada parcial $f_y = \partial f/\partial y$. Es una ventaja de los métodos del tipo Runge-Kutta de cuarto orden el que pueda controlarse h por medio de K_1 , K_2 y K_3 porque, de la definición de f_y, se tiene

$$k = hM = h|\mathfrak{f}_y| = h\left| \frac{\mathfrak{f}(x,\ y^*) - \mathfrak{f}(x,\ y^{**})}{y^* - y^{**}} \right|$$

y si se elige

$$x = x_m + \frac{h}{2}$$

$$y^* = y_m + \frac{K_2}{2}$$

$$y^{**} = y_m + \frac{K_1}{2}$$

entonces

$$\mathfrak{f}(x,\ y^*) = K_3$$

$$\mathfrak{f}(x,\ y^{**}) = K_2$$

$$y^* - y^{**} = (K_2 - K_1)/2$$

y se deduce que

(1.49) $$k_m = 2\left| \frac{K_3 - K_2}{K_2 - K_1} \right|$$

El subíndice m en (1.49) indica que el valor de k está calculado con los valores de K_1, K_2 y K_3 correspondientes al punto $(x_m,\ y_m)$. Por tanto tendremos que valuar k_m en cada paso. Una vez calculado el valor de k_m, se sigue la siguiente regla:

$$
(1.50) \qquad h = \begin{cases} h & si \quad 0.05 \leq k_m \leq 0.2 \\ 0.5h & si \quad k_m > 0.2 \\ 2h & si \quad k_m < 0.05 \end{cases}
$$

Recuérdese que K_1, K_2 y K_3 son las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) del método de Runge-Kutta, o las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) del método de Ralston, respectivamente.

4. El criterio presentado aquí es aplicable a los métodos del tipo predictor-corrector y resulta muy fácil de aplicar. Basta observar el error por truncamiento $E_T^{(c)}$ del corrector en cada paso y adoptar un número t cuyo significado es el mismo que en el inciso (1). Luego observar la siguiente regla:

$$
(1.51) \qquad h = \begin{cases} h & si \quad 0.5t \leq E_T^{(c)} \leq 1.5t \\ 0.5h & si \quad E_T^{(c)} > 1.5t \\ 2h & si \quad E_T^{(c)} < 0.5\ t \end{cases}
$$

Nuevamente hay que tener precaución con el aumento y disminución de h para no tener problemas. También cabe recordar que $E_T^{(c)}$ está dado por la ecuación (1.25a) para el método modificado de Euler (1.26a), para el de Milne y (1.27a) para el de Adams.

5. El último de los criterios presentado es, como el anterior, de muy fácil aplicación y está basado en la ecuación (1.29), que es la condición de convergencia de los métodos predictor-corrector. Dicha ecuación plantea que el método converge si

$$h < \frac{2}{M}$$

Pero no se conoce el valor de M. Sin embargo, mientras menor sea h, será más rápida la convergencia. Se tiene entonces una decisión de índole económico. Si se escoge un valor pequeño de h, no se requerirán muchas iteraciones por punto, pero habrá muchos puntos. Si se escoge un valor mayor de h, habrá menos puntos, pero más iteraciones por punto. Existe una fuerte evidencia empírica (ref 6) que indica que el número de iteraciones más eficiente es dos, es decir, se busca computación mínima para una precisión dada. En otras palabras, si el tamaño del intervalo se escoge de manera que

$$\left| y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} \right| < \varepsilon \tag{1.52}$$

se satisface en dos iteraciones, el monto total de computación será mínimo.

El criterio en sí consiste en contar el número de iteraciones, si se requieren más de dos iteraciones para satisfacer (1.52), se reduce h a la mitad, si una sola iteración es suficiente, se aumenta h al doble y si se requieren exactamente dos, se conserva el valor de h.

En la expresión (1.52), $y_m^{(i+1)}$ y $y_m^{(i)}$, son dos valuaciones consecutivas del corrector y t un número que tiene el mismo significado que en el inciso (1).

Deben cuidarse aquí también los aumentos o disminuciones de h para evitar problemas.

Un comentario final antes de terminar esta sección acerca del procedimiento a seguir al cambiar el valor del incremento h en un método predictor-corrector, es el siguiente

Lo que se hace es detener el cálculo por el método predictor-corrector y tomar x_m, y_m como un nuevo punto de partida. Entonces, el método predictor se vuelve a "hechar a andar" con el nuevo tamaño de intervalo, usando nuevamente un método de Runge-Kutta.

Afortunadamente, en los métodos predictor-corrector no es necesario, por lo general, variar el valor de h, salvo en casos muy especiales.

1.5 COMPARACION DE METODOS

La presente sección tiene como finalidad, dar una orientación en el momento de seleccionar un método ya que, como pudo verse en las secciones anteriores, cada uno de los métodos presentados posee ventajas y desventajas, mismas que definen su aplicabilidad. Es por ello que se han recopilado sus principales características, las que se presentan en la tabla 1.1, cuyo contenido se explica a continuación.

Columna 1. Nombre del método

Columna 2. Aquí se indica el número de veces que es necesario valuar la función $f(x, y)$ en cada paso, como una medida del trabajo computacional que requiere cada método. Nótese que en los métodos predictor-corrector, solo se toma en cuenta una sola valuación de $f(x, y)$ en cada aplicación del corrector ya que las demás, que ya fueron calculadas en el predictor, permanecer constantes en el corrector. En el método de Taylor $f(x, y)$ se valúa una sola vez pero hay que calcular sus siguientes tres derivadas, las cuales, a menudo, resultan más complicadas aún que la propia $f(x, y)$.

Columna 3. En esta columna, t_m es el tiempo de proceso requerido por cada método y T es la suma de los tiempos empleados por todos los métodos para resolver la ecuación 1 de la sección 1.6, con un $h = 0.2$. Los resultados que aquí se pre-

(1) METODO	(2) NUMERO DE VALUACIONES DE LA FUNCION f(x,y) EN CADA PASO	(3) $\frac{t_m}{T}$	(4) NECESIDAD DE OTRO METODO PARA "ARRANCAR"	(5) DIFICULTAD PARA DETERMINAR LA NECESIDAD DE CAMBIAR h
TAYLOR	f(x,y) se valúa una sola vez, sin embargo hay que valuar sus siguientes tres derivadas	0.110	Ninguna	Existe una cierta dificultad ya que hay que calcular dos veces la solución, con (h) y con (2h)
EULER	Una	0.097	Ninguna	Existe una cierta dificultad ya que hay que calcular dos veces la solución con (h) y con (2h)
HEUN	Dos	0.101	Ninguna	Existe una cierta dificultad ya que hay que calcular dos veces la solución, con (h) y con (2h)
RUNGE-KUTTA	Cuatro	0.110	Ninguna	Prácticamente nula ya que existen dos criterios sencillos (2) y (3) en la sección 1.4
RALSTON	Cuatro	0.151	Ninguna	Prácticamente nula ya que existen dos criterios sencillos (2) y (3) en la sección 1.4
MEJORADO DE EULER	Una vez en cada aplicación del corrector cuando el método ha arrancado	0.136	Si, generalmente se usa Runge-Kutta	Prácticamente nula ya que existen dos criterios sencillos (4) y (5) en la sección 1.4
MILNE	Una vez en cada aplicación del corrector cuando el método ha arrancado	0.146	Si, generalmente se usa Runge-Kutta	Prácticamente nula ya que existen dos criterios sencillos (4) y (5) en la sección 1.4
ADAMS	Una vez en cada aplicación del corrector cuando el método ha arrancado	0.149	Si, generalmente se usa Runge-Kutta	Prácticamente nula ya que existen dos criterios sencillos (4) y (5) en la sección 1.4

TABLA 1.1 Resumen de las características de los métodos presentados en este trabajo

TABLA 1.1 Continúa

(6) DIFICULTAD PARA CAMBIAR h DURANTE EL PROCESO	(7) DIFICULTAD PARA OBTENER EL ERROR POR TRUNCAMIENTO	(8) VALOR DEL ERROR POR TRUNCAMIENTO	(9) ¿EL METODO CONVERGE?	(10) ¿EL METODO ES ESTABLE?
Ninguna	Alguna, ya que es necesario calcular la quinta derivada, lo cual, a menudo, no es sencillo	$\frac{1}{120}h^5y^{(5)}(\xi)$	SI	SI Excepto en casos especiales. Ver sección 1.7
Ninguna	Alguna, hay que calcular la solución con h y h/2 y aplicar $E_T=\frac{4}{3}\left[y_m^{(h/2)}-y_m^{(h)}\right]$,	$\frac{1}{2}h^2y^{(2)}(\xi)$	SI	SI Excepto en casos especiales. Ver sección 1.7
Ninguna	Alguna, hay que calcular la solución con h y h/2 y aplicar $E_T=\frac{8}{7}\left[y_m^{(h/2)}-y_m^{(h)}\right]$	$\frac{1}{12}h^3y^{(3)}(\xi)$	SI	SI excepto en casos especiales. Ver sección 1.7; NO cuando $\delta<0$ dependiendo del valor de h
Ninguna	Alguna, pues es necesario calcular dos veces la solución, con h y h/2 y aplicar la ecuación 1.24	No existe una expresión sencilla (ref 10)	SI	SI excepto en casos especiales. Ver sección 1.7; NO cuando $\delta<0$ dependiendo del valor de h
Ninguna	Alguna, pues es necesario calcular dos veces la solución, con h y h/2 y aplicar la ecuación 1.24	No existe una expresión sencilla (ref 10)	SI	SI excepto en casos especiales. Ver sección 1.7; NO cuando $\delta<0$ dependiendo del valor de h
Si, generalmente se usa otra vez Runge-Kutta para volver a "arrancar" con el nuevo h	Prácticamente nula ya que para valuarlo solo se requiere aplicar la ecuación 1.25a	$E_T^{(P)}=\frac{4}{12}h^5y^{(3)}(\xi)$ $E_T^{(c)}=-\frac{1}{90}h^5y^{(5)}(\xi)$	SI	SI Excepto en casos especiales. Ver sección 1.7
Si, generalmente se usa otra vez Runge-Kutta para volver a "arrancar" con el nuevo h	Prácticamente nula ya que para valuarlo solo se requiere aplicar la ecuación 1.26a	$E_T^{(P)}=\frac{28}{90}h^5y^{(5)}(\xi)$ $E_T^{(c)}=-\frac{1}{90}h^5y^{(5)}(\xi)$	SI	SI Excepto en casos especiales. Ver sección 1.7
Si, generalmente se usa otra vez Runge-Kutta para volver a "arrancar" con el nuevo h	Prácticamente nula ya que para valuarlo solo se requiere aplicar la ecuación 1.27a	$E_T^{(P)}=\frac{251}{720}h^5y^{(5)}(\xi)$ $E_T^{(c)}=-\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(\xi)$	SI	SI Excepto en casos especiales. Ver sección 1.7

sentan fueron obtenidos a partir de los datos proporcionados por la computadora Burroughs B 6800 del Centro de Servicios de Cómputo de la UNAM.

Columna 4. La presencia de esta columna obedece a que en los métodos predictor-corrector se requiere de puntos previos para aplicar el predictor. Por ejemplo, en el caso del método de Milne, además de la condición inicial se requieren otros tres puntos, los cuales deben ser calculados con algún método de un solo paso.

Columna 5. Esta columna contiene información acerca de las dificultades que cada método presenta para el manejo del incremento h.

Columna 6. Se puede encontrar una relación en el contenido de esta columna y el de la columna 4. Dicha semejanza estriba en que, cuando se cambia el valor de h, los métodos predictor-corrector tienen que "volver a arrancar" partiendo del último punto calculado, como si fuera el inicial y con el nuevo valor de h.

Columna 7. Aquí se presentan procedimientos para calcular el error por truncamiento en cada paso, para los diversos métodos presentados y se señala el grado de dificultad que tales cálculos representan.

Columna 8. El resumen del error por truncamiento de cada fórmula es presentado en esta columna. Tiene como objetivo el dar una idea de la precisión de cada método.

Columna 9. En esta columna se dá información acerca de la convergencia de cada método.

Columna 10. En ella se presenta un resumen de las caracte - rísticas de estabilidad de cada método.

1.6 EJEMPLOS

La presente sección tiene dos objetivos principales: mostrar el procedimiento de cálculo y dar constancia numérica de las características de convergencia y estabilidad de cada método. Para conseguir ésto, se han seleccionado cuatro ecuaciones diferenciales cuyas soluciones presentan comportamientos característicos. Tales ecuaciones son presentadas a continuación y sus soluciones son mostradas, gráficamente, en la figura 1.8.

Ecuación 1

$$y' = \frac{1}{2}(x+y) - 1 \qquad y(0) = 2$$

cuya solución analítica es

$$y = 2e^{x/2} - x$$

En la figura 1.8a, puede verse que esta ecuación posee solu - ción creciente ($f > 0$), y de la ecuación diferencial, que la variación de la pendiente ($\partial f/\partial x$) es constante (no decrece) y que $\partial f/\partial y > 0$.

Ecuación 2

$$y' = \frac{2}{3} x y^{-2} \qquad y(0) = 0$$

cuya solución analítica es

$$y = x^{2/3}$$

Esta ecuación, también posee solución creciente ($f > 0$) como puede verse en la figura 1.8b. Asimismo, la variación de la pendiente ($\partial f/\partial x$) es cada vez menor y $\partial f/\partial y < 0$, como puede deducirse de la ecuación diferencial.

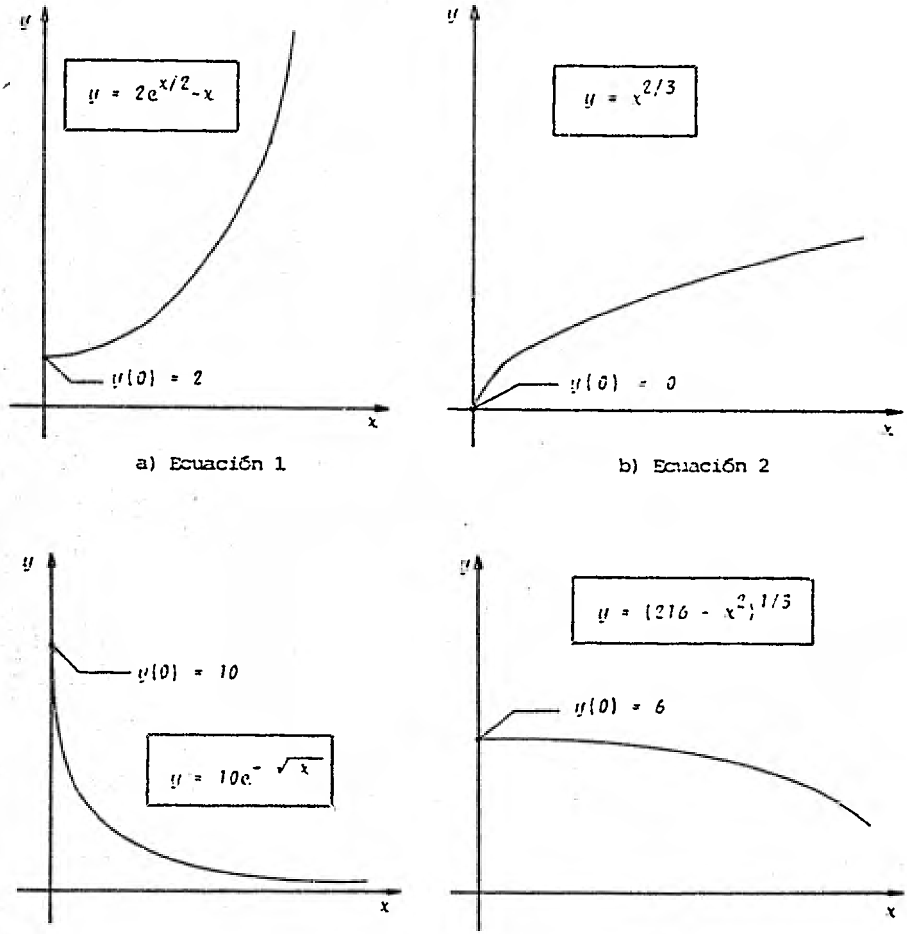
Ecuación 3

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-1/2} y \qquad y(0) = 10$$

cuya solución analítica es

$$y = 10\, e^{-\sqrt{x}}$$

La solución de esta ecuación es decreciente ($f < 0$), como puede observarse en la figura 1.8c. Por otra parte, de la ecuación diferencial se puede ver que la variación de la pendiente



c) Ecuación 3

d) Ecuación 4

Fig 1.3 Representación gráfica de las soluciones a las ecuaciones escogidas como ejemplos

$(\partial f/\partial x)$ es cada vez menor y que $\partial f/\partial y<0$.

<u>Ecuación 4</u>

$$y' = -\frac{2}{3}xy^{-2} \qquad y(0) = 6$$

cuya solución analítica es

$$y = (216 - x^2)^{1/3}$$

La solución de esta ecuación es decreciente ($f<0$ para $x<\sqrt{216}$), figura 1.8d. Asimismo, la variación de la pendiente $(\partial f/\partial x)$ es cada vez mayor y $\partial f/\partial y>0$, lo cual puede deducirse de la ecuación diferencial.

Estas cuatro ecuaciones serán resultas por los ocho métodos presentados y para valores de h 0.2, 0.1 y 0.05. Los resultados de la ecuación 1 se encontrarán resumidos en las tablas 1.2 a 1.9. Los resultados de las ecuaciones 2, 3 y 4, se han omitido por brevedad. Solo se presentará el cálculo de los primeros puntos de la ecuación 1, con h=0.2 y con los ocho métodos, con el fín de mostrar la mecánica del cálculo.

Método de Taylor (ecuación 1.1).- A partir de la ecuación diferencial y de su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y) - 1 \qquad y(0) = 2$$

se encuentran

$$y^{(2)} = \frac{1}{4}(x+y) \qquad y^{(3)} = \frac{1}{8}(x+y) \qquad y^{(4)} = \frac{1}{16}(x+y)$$

y de la condición inicial

$$y'_0 = \frac{1}{2}(0.0 + 2.0) - 1.0 = 0.0$$

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{4}(0.0 + 2.0) = 0.5$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{8}(0.0 + 2.0) = 0.5$$

$$y_0^{(4)} = \frac{1}{16}(0.0 + 2.0) = 0.125$$

sustituyendo estos valores en la ecuación 1.1 con h = 0.2

$$y_1 = y(0.0+0.2) = 2.0+0.2(0.0)+\frac{(0.2)^2(0.5)}{2}+\frac{(0.2)^3(0.25)}{6} + \\ +\frac{(0.2)^4(0.125)}{24}$$

$$y_1 = y(0.2)=2.01034$$

con estos nuevos valores

$$y'_1 = \frac{1}{2}(0.2+2.01034)-1.0 = 0.10517$$

$$y_1^{(2)} = \frac{1}{4}(0.2+2.01034) = 0.55259$$

$$y_1^{(3)} = \frac{1}{8}(0.2+2.01034) = 0.27629$$

$$y_1^{(4)} = \frac{1}{16}(0.2+2.01034) = 0.13815$$

con lo cual, de la ecuación 1.1

$$y_2 = y(0.2+0.2) = 2.01034 + (0.2)(0.10517) + \frac{(0.2)^2(0.55259)}{2} +$$

$$+ \frac{(0.2)^3(0.27629)}{6} + \frac{(0.2)^4(0.13815)}{24}$$

$$y_2 = y(0.4) = 2.04280$$

Siguiendo este mismo procedimiento, se llegó a los resultados que aparecen en la tabla 1.2, en la cual se han puesto solo los valores enteros de x hasta x = 10.0, de dos en dos.

Método de Euler (ecuación 1.2).- De la ecuación diferencial y de su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad y(0) = 2$$

se obtiene

$$y'_0 = \frac{1}{2}(0.0 + 2.0)-1.0 = 0.0$$

sustituyendo este valor en la ecuación 1.2 y con h = 0.2

$$y_1 = y(0.0 + 0.2) = 2.0 + 0.2(0.0)$$

$$y_1 = y(0.2) = 2.0$$

con estos nuevos valores

$$y'_1 = \frac{1}{2}(0.2+2.0)-1.0 = 0.1$$

y con éste, de la ecuación 1.2

$$y_2 = y(0.2+0.2) = 2.0+0.2(0.1)$$

$$y_2 = y(0.4) = 2.02$$

Por este mismo procedimiento se llegó a los resultados mostrados en la tabla 1.3.

Método de Heun (ecuaciones 1.3 al 1.5).- Partiendo de la ecuación diferencial y su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad y(0) = 2$$

y con h = 0.2

$$k_1 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0 + 2.0)-1.0\right] = 0.0$$

$$k_2 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+0.2+2.0+0.0)-1.0\right] = 0.02$$

con estos valores

$$y_1 = y(0.0+0.2) = 2.0+\frac{1}{2}(0.0+0.02)$$

$$y_1 = y(0.2) = 2.01$$

con los valores encontrados

$$k_1 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+2.01)-1.0\right] = 0.021$$

$$k_2 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+0.2+2.01+0.021)-1.0\right] = 0.0431$$

$$y_2 = y(0.2+0.2) = 2.01+\frac{1}{2}(0.021+0.0431)$$

$$y_2 = y(0.4) = 2.04205$$

Los resultados obtenidos con este método se encuentran resumi dos en la tabla 1.4.

Método de Runge-Kutta (ecuaciones 1.6 a 1.10).- De la ecua - ción diferencial y su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad y(0) = 2$$

y con h=0.2 se obtiene

$$k_1 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+2.0)-1.0\right] = 0.0$$

$$k_2 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+\frac{0.2}{2}+2.0+\frac{0.0}{2})-1.0\right] = 0.01$$

$$k_3 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+\frac{0.2}{2}+2.0+\frac{0.01}{2})-1.0\right] = 0.0105$$

$$k_4 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+0.2+2.0+0.0105)-1.0\right] = 0.02105$$

$$y_1 = y(0.0+0.2) = 2.0+\frac{1}{6}\left[0.0+2(0.01)+2(0.0105)+0.02105\right]$$

$$y_1 = y(0.2) = 2.01034$$

con estos nuevos valores

$$k_1 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+2.01034)-1.0\right] = 0.02103$$

$$k_2 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+\frac{0.2}{2}+2.01034+\frac{0.02103}{2})-1.0\right] = 0.03209$$

$$k_3 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+\frac{0.2}{2}+2.01034+\frac{0.03209}{2})-1.0\right] = 0.03264$$

$$k_4 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+0.2+2.01034+0.03264)-1.0\right] = 0.04430$$

$$y_2 = y(0.2+0.2) = 2.01034+\frac{1}{6}\Big[0.02103+2(0.03209)+2(0.03264) +$$

$$+ 0.04430\Big]$$

$$y_2 = y(0.4) = 2.04281$$

Los resultados completos de este método se encuentran en la ta bla 1.5.

Método de Ralston (ecuaciones 1.11 a 1.15).- De la ecuación di ferencial y su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad\qquad y(0) = 2$$

y con $h = 0.2$

$$k_1 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+2.0)-1.0\right] = 0.0$$

$$k_2 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+0.4(0.2)+2.0+0.4(0.0))-1.0\right] = 0.008$$

$$k_3 = 0.2\Big[\frac{1}{2}(0.0+0.45573725(0.2)+2.0+0.15875964(0.008) +$$

$$+ (0.45573725-0.15875964)(0.0))-1.0\Big] = 0.00924$$

$$k_4 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.0+1.0(0.2)+2.0-3.05096516(0.008)+\right.$$

$$+\ 3.83286476(0.00924)+(1.0+3.05096516-3.83286476)(0.0))-$$

$$\left.-\ 1.0\right] = 0.02110$$

con estos valores

$$y_1 = y(0.0+0.2) = 2.0+0.17476028(0.0)-0.55148066(0.008)+$$

$$+1.2055556(0.00924)+0.17118478(0.02110)$$

$$y_1 = y(0.2) = 2.01034$$

repitiendo lo anterior con los valores de x_1 y y_1

$$k_1 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+2.01034)-1.0\right] = 0.02103$$

$$k_2 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+0.4(0.2)+2.01034+0.4(0.02103))-1.0\right]=0.02988$$

$$k_3 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+0.45573725(0.2)+2.01034+0.15875964(0.02988)+\right.$$

$$\left.+(0.45573725-0.15875964)(0.02103))-1.0\right] = 0.03125$$

$$k_4 = 0.2\left[\frac{1}{2}(0.2+1.0(0.2)+2.01034-3.05096516(0.02988)+\right.$$

$$+3.83286476(0.03125)+(1.0+3.05096516-3.83286476)$$

$$\left.(0.02103))-1.0\right] = 0.04435$$

$$y_2 = y(0.2+0.2) = 2.01034+0.17476028(0.02103)-$$

$$-0.55148066(0.02988)+1.2055353(0.03125)+$$

$$+0.17118478(0.04435)$$

$$y_2 = y(0.4) = 2.04280$$

Los resultados completos se pueden encontrar en la tabla 1.6.

Método modificado de Euler (ecuaciones 1.16 y 1.17).- De la ecuación diferencial y de su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad y(0) = 2$$

con el método de Runge-Kutta se obtuvo

$$y_1(0.2) = 2.01034$$

con estos valores se calcula

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(0.2+2.01034)-1.0 = 0.10517$$

y con el predictor

$$y_2^{(0)} = 2.0+2(0.2)(0.10517) = 2.04207$$

a este valor predicho se le hace la primera corrección y para ello es necesario calcular solamente $f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)})$ ya que $f(x_m, y_m)$ permanece constante. Así, con $x_2 = 0.4$

$$f(x_2, y_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(0.4+2.04207)-1.0 = 0.22104$$

$$y_2^{(1)} = 2.01034+\frac{1}{2}(0.2)(0.10517+0.22104) = 2.04296$$

haciendo otra corrección

$$f(x_2, y_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(0.4+2.04296)-1.0= 0.22148$$

$$y_2^{(2)} = 2.01034+\frac{1}{2}(0.2)(0.10517+0.22148) = 2.04301$$

$$y_2 = y(0.4) = 2.04301$$

Para el punto siguiente

$$f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}(0.4+2.04301)-1.0=0.22151$$

y la primera predicción será

$$y_3^{(0)} = 2.01034+2(0.2)(0.22151) = 2.09894$$

para hacer la primera corrección hay que calcular

$$f(x_3, y_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(0.6+2.09894)-1.0 = 0.34947$$

$$y_3^{(1)} = 2.04301+\frac{1}{2}(0.2)(0.22151+0.34947) = 2.10011$$

para una nueva corrección

$$f(x_3, y_3^{(1)}) = \frac{1}{2}(0.6+2.10011)-1.0 = 0.35006$$

$$y_3^{(2)} = 2.04301+\frac{1}{2}(0.2)(0.22151+0.35006) = 2.10017$$

$$y_3 = y(0.6) = 2.10017$$

Los resultados completos se encuentran resumidos en la tabla 1.7.

Método de Milne (ecuaciones 1.18 y 1.19).- Partiendo de la ecuación diferencial y de su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad y(0) = 2$$

se obtuvieron los siguientes puntos por el método de Runge-Kutta

$$y_1(0.2) = 2.01034 \qquad y_2(0.4) = 2.04280 \qquad y_3(0.6) = 0.09972$$

y con ellos

$$f(x_1,\ y_1) = \frac{1}{2}(0.2+2.01034)-1.0 = 0.10517$$

$$f(x_2,\ y_2) = \frac{1}{2}(0.4+2.04280)-1.0 = 0.22140$$

$$f(x_3,\ y_3) = \frac{1}{2}(0.6+2.09972)-1.0 = 0.34986$$

Para predecir el valor de y_4 se usa la ecuación 1.18

$$y_4^{(0)} = 2.0+\frac{4}{3}(0.2)\left[2(0.10517)-0.22140+2(0.34986)\right] = 2.18364$$

Como ya fueron calculadas $f(x_m,\ y_m)$ y $f(x_{m-1},\ y_{m-1})$, solo resta calcular $f(x_{m+1},\ y_{m+1}^{(0)})$. Así, con $h = 0.2$

$$f(x_4,\ y_4^{(0)}) = \frac{1}{2}(0.8+2.18364)-1.0 = 0.49182$$

$$y_4^{(1)} = 2.04280+\frac{1}{3}(0.2)\left[0.49182+4(0.34986)+0.22140\right] = 2.18364$$

para una nueva corrección

$$f(x_4,\ y_4^{(1)})=\frac{1}{2}(0.8+2.18364)-1.0=0.49182$$

$$y_4^{(2)} = 2.04280+\frac{1}{3}(0.2)\left[0.49182+4(0.34986)+0.22140\right] = 2.18364$$

$$y_4 = y(0.8) = 2.18364$$

Para calcular el siguiente punto

$$f(x_4,\ y_4) = \frac{1}{2}(0.8+2.18364)-1.0 = 0.49182$$

y aplicando el predictor

$$y_5^{(0)} = 2.01034+\frac{4}{3}(0.2)\left[2(0.22140)-0.34986+2(0.49182)\right] =$$

$$= 2.29745$$

para hacer la primera corrección

$$f(x_5,\ y_5^{(0)}) = \frac{1}{2}(1.0+2.29745)-1.0 = 0.64872$$

$$y_5^{(1)} = 2.09972+\frac{1}{3}(0.2)\left[0.64872+4(0.49182)+0.54986\right] = 2.29744$$

haciendo otra corrección

$$f(x_5,\ y_5^{(1)}) = \frac{1}{2}(1.0+2.29744)-1.0 = 0.64872$$

$$y_5^{(2)} = 2.09972+\frac{1}{3}(0.2)\left[0.64872+4(0.49182)+0.54986\right] = 2.29744$$

$$y_5 = y(1.0) = 2.29744$$

Los cálculos completos se pueden consultar en la tabla 1.8.

Método de Adams (ecuaciones 1.20 y 1.21).- Partiendo de la ecuación diferencial y de su condición inicial

$$y' = \frac{1}{2}(x+y)-1 \qquad\qquad y(0) = 2$$

y usando el método de Runge-Kutta se obtuvieron los siguien - tes puntos

$$y_1(0.2)=2.01034 \qquad\qquad y_2(0.4)=2.04280 \qquad\qquad y_3(0.6)=2.09972$$

y con ellos

$$f(x_0,\ y_0) = \frac{1}{2}(0.0+2.0)-1.0 = 0.0$$

$$f(x_1,\ y_1) = \frac{1}{2}(0.2+2.01034)-1.0 = 0.10517$$

$$f(x_2,\ y_2) = \frac{1}{2}(0.4+2.04280)-1.0 = 0.22140$$

$$f(x_3,\ y_3) = \frac{1}{2}(0.6+2.09972)-1.0 = 0.34986$$

Con estos últimos cálculos, la predicción de y_4 es

$$y_4^{(0)} = 2.09972+\frac{1}{24}(0.2)\Big[55(0.34986)-59(0.22140)+37(0.10517)-$$

$$-9(0.0)\Big] = 2.18364$$

Para hacer la primera corrección

$$f(x_4,\ y_4^{(0)}) = \frac{1}{2}(0.8+2.18364)-1.0 = 0.49182$$

$$y_4^{(1)} = 2.09972+\frac{1}{24}(0.2)\Big[9(0.49182)+19(0.34986)-5(0.22140)+$$

$$+0.10517\Big] = 2.18365$$

Haciendo una nueva corrección

$$f(x_4,\ y_4^{(1)}) = \frac{1}{2}(0.8+2.18365)-1.0 = 0.49183$$

$$y_4^{(2)} = 2.09972+\frac{1}{24}(0.2)\Big[9(0.49183)+19(0.34986)-5(0.22140)+$$

$$+0.10517\Big] = 2.18365$$

$$y_4 = y(0.8) = 2.18365$$

Para encontrar el siguiente punto

$$f(x_4,\ y_4) = \frac{1}{2}(0.8+2.18365)-1.0 = 0.49183$$

y la predicción para y_5 será

$$y_5^{(0)} = 2.18365+\frac{1}{24}(0.2)\Big[55(0.49183)-59(0.34986)+37(0.22140)-$$

$$-9(0.10517)\Big] = 2.29743$$

Para hacer la primera corrección

$$f(x_5,\ y_5^{(0)}) = \frac{1}{2}(1.0+2.29743)-1.0 = 0.64872$$

$$y_5^{(1)} = 2.18365+\frac{1}{24}(0.2)\left[9(0.64872)+19(0.49183)-5(0.34986)+\right.$$

$$\left.+\ 0.22140\right] = 2.29744$$

Haciendo una nueva conrrección

$$f(x_5,\ y_5^{(1)}) = \frac{1}{2}(1.0+2.29744)-1.0 = 0.64872$$

$$y_5^{(2)} = 2.18365+\frac{1}{24}(0.2)\left[9(0.64872)+19(0.49183)-5(0.34986)+\right.$$

$$\left.+0.22140\right] = 2.29744$$

$$y_5 = y(1.0) = 2.29744$$

Los resultados completos se encuentran en la tabla 1.9.

1.7 ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Con el fin de facilitar el análisis de los resultados obtenidos con la solución de las cuatro ecuaciones diferenciales, se han elaborado las tablas 1.10 y 1.11. La primera contiene información acerca de las características analíticas de cada ecuación y la segunda resume las características de convergencia y estabilidad de cada uno de los métodos tratados, mismas

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.43656	4.17E-06	1.21E-06	3.43656	2.72E-07	7.90E-08	3.43656	1.73E-08	5.04E-09
4.0	10.77811	10.77809	2.27E-05	2.10E-06	10.77811	1.48E-06	1.37E-07	10.77811	9.48E-08	8.79E-09
6.0	34.17107	34.17098	9.24E-05	2.70E-06	34.17107	6.02E-06	1.76E-07	34.17107	3.88E-07	1.14E-08
8.0	101.19630	101.19597	3.35E-04	3.31E-06	101.19628	2.18E-05	2.16E-07	101.19630	1.40E-06	1.38E-08
10.0	286.82632	286.82518	1.14E-03	3.97E-06	286.82624	7.41E-05	2.58E-07	286.82631	5.02E-06	1.75E-08

TABLA 1.2 Solución de la ecuación 1 por el método de Taylor

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.18748	2.49E-01	7.25E-02	3.30660	1.30E-01	3.78E-02	3.37013	6.64E-02	1.93E-02
4.0	10.77811	9.45500	1.32E+00	1.23E-01	10.07998	6.98E-01	6.48E-02	10.41914	3.59E-01	3.33E-02
6.0	34.17107	28.89880	5.27E+00	1.54E-01	31.35837	2.81E+00	8.23E-02	32.71630	1.45E+00	4.26E-02
8.0	101.19630	82.51851	1.87E+01	1.85E-01	91.12288	1.01E+01	9.95E-02	95.95574	5.24E+00	5.18E-02
10.0	286.82632	224.78171	6.20E+01	2.16E-01	253.00252	3.38E+01	1.18E-01	269.12779	1.77E+01	6.17E-02

TABLA 1.3 Solución de la ecuación 1 por el método de Euler

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.42816	8.40E-03	2.44E-03	3.43438	2.18E-03	6.35E-04	3.43601	5.56E-04	1.62E-04
4.0	10.77811	10.73247	4.56E-02	4.23E-03	10.76625	1.19E-02	1.10E-03	10.77509	3.02E-03	2.80E-04
6.0	34.17107	33.98511	1.86E-01	5.44E-03	34.12273	4.83E-02	1.41E-03	34.15876	1.23E-02	3.60E-04
8.0	101.19630	100.52283	6.73E-01	6.44E-03	101.02114	1.75E-01	1.73E-03	101.15166	4.46E-02	4.41E-04
10.0	286.82632	284.53974	2.29E+00	7.97E-03	286.23125	5.95E-01	2.07E-03	286.67463	1.52E-01	5.29E-04

TABLA 1.4 Solución de la ecuación 1 por el método de Henn

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.43656	4.17E-06	1.21E-06	3.43656	2.72E-07	7.91E-08	3.43656	1.74E-08	5.07E-09
4.0	10.77811	10.77809	2.27E-05	2.10E-06	10.77811	1.48E-06	1.37E-07	10.77811	9.51E-08	8.82E-09
6.0	34.17107	34.17098	9.24E-05	2.70E-06	34.17107	6.02E-06	1.76E-07	34.17107	3.88E-07	1.14E-08
8.0	101.19630	101.19597	3.35E-04	3.31E-06	101.19628	2.18E-05	2.16E-07	101.19630	1.41E-06	1.39E-08
10.0	286.82632	286.82518	1.14E-03	3.97E-06	286.82624	7.41E-05	2.58E-07	286.82631	5.04E-06	1.76E-08

TABLA 1.5 Solución de la ecuación 1 por el método de Runge-Kutta

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3,43656	3.43656	4.17E-06	1.21E-06	3.43656	2.73E-07	7.94E-08	3.43656	1.83E-08	5.33E-09
4.0	10.77811	10.77809	2.27E-05	2.10E-06	10.77811	1.48E-06	1.38E-07	10.77811	9.91E-08	9.19E-09
6.0	34.17107	34.17098	9.25E-05	2.71E-06	34.17107	6.05E-06	1.77E-07	34.17107	4.04E-07	1.18E-08
8.0	101.19630	101.19596	3.35E-04	3.31E-06	101.19628	2.19E-05	2.17E-07	101.19630	1.47E-06	1.45E-08
10.0	286.82632	286.82518	1.14E-03	3.97E-06	286.82624	7.45E-05	2.60E-07	286.82631	5.25E-06	1.83E-08

TABLA 1.6 Solución de la ecuación 1 por el método de Ralston

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.44059	-4.03E-03	-1.17E-03	3.43764	-1.07E-03	-3.12E-04	3.43684	-2.76E-04	-8.03E-05
4.0	10.77811	10.80125	-2.31E-02	-2.15E-03	10.78410	-5.99E-03	-5.55E-04	10.77963	-1.52E-03	-1.41E-04
6.0	34.17107	34.26710	-9.60E-02	-2.81E-03	34.19569	-2.46E-02	-7.20E-04	34.17729	-6.22E-03	-1.82E-04
8.0	101.19630	101.54748	-3.51E-01	-3.47E-03	101.28591	-8.96E-02	-8.86E-04	101.21889	-2.26E-02	-2.23E-04
10.0	286.82632	288.02617	-1.20E+00	-4.18E-03	287.13160	-3.05E-01	-1.06E-03	286.90318	-7.69E-02	-2.68E-04

TABLA 1.7 Solución de la ecuación 1 por el método modificado de Euler

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.43656	-1.26E-06	-3.67E-07	3.43656	-1.33E-07	-3.87E-08	3.43656	-9.95E-09	-2.90E-09
4.0	10.77811	10.77812	-1.11E-05	-1.03E-06	10.77811	-8.63E-07	-8.00E-08	10.77811	-5.83E-08	-5.41E-09
6.0	34.17107	34.17113	-5.17E-05	-1.51E-06	34.17108	-3.72E-06	-1.09E-07	34.17107	-2.44E-07	-7.13E-09
8.0	101.19630	101.19650	-1.99E-04	-1.97E-06	101.19631	-1.39E-05	-1.37E-07	101.19630	-8.95E-07	-8.84E-09
10.0	286.82632	286.82702	-7.02E-04	-2.45E-06	286.82637	-4.80E-05	-1.67E-07	286.82632	-2.81E-06	-9.78E-09

TABLA 1.8 Solución de la ecuación 1 por el método de Milne

x	y_{EXACTA}	$h = 0.20$			$h = 0.10$			$h = 0.05$		
		y	EA	ER	y	EA	ER	y	EA	ER
0.0	2.00000	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.	2.00000	0.	0.
2.0	3.43656	3.43657	-7.85E-06	-2.29E-06	3.43656	-6.88E-07	-2.00E-07	3.43656	-4.94E-08	-1.44E-08
4.0	10.77811	10.77817	-5.68E-05	-5.27E-06	10.77812	-4.20E-06	-3.90E-07	10.77811	-2.83E-07	-2.62E-08
6.0	34.17107	34.17132	-2.51E-04	-7.33E-06	34.17109	-1.78E-05	-5.20E-07	34.17108	-1.17E-06	-3.43E-08
8.0	101.19630	101.19724	-9.43E-04	-9.32E-06	101.19637	-6.55E-05	-6.47E-07	101.19630	-4.29E-06	-4.24E-08
10.0	286.82632	286.82959	-3.27E-03	-1.14E-05	286.82654	-2.25E-04	-7.84E-07	286.82633	-1.44E-05	-5.01E-08

TABLA 1.9 Solución de la ecuación 1 por el método de Adams

que fueron obtenidas directamente de una detallada inspección de los resultados.

ECUACION	$f(x, y)$	$\partial f/\partial x$	$\partial f/\partial y$
1	> 0	CRECE	> 0
2	> 0	DECRECE	< 0
3	< 0	DECRECE	< 0
4	< 0	CRECE	> 0

TABLA 1.10 Características analíticas de las ecuaciones diferenciales seleccionadas como ejemplos

Por lo que respecta a la convergencia, en la tabla 1.11 se encuentran resumidas las observaciones que a este respecto fueron hechas. Tales observaciones pueden verificarse en las tablas 1.2 a 1.9 en las que aparecen las soluciones de la primera ecuación, con valores decrecientes de h. Este mismo análisis se llevó a cabo para las otras tres ecuaciones solo que por brevedad, se omitieron los resultados del mismo. Sin embargo, las correspondientes observaciones se encuentran consignadas en la tabla 1.11.

Para analizar los resultados obtenidos, en lo que respecta a

METODO	EJ.	CONVERGENCIA	ESTABILIDAD ABSOLUTA	ESTABILIDAD RELATIVA
TAYLOR	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	SI
	4	SI	NO	NO
EULER	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	NO
	4	SI	NO	NO
HEUN	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	SI
	4	SI	NO	NO
RUNGE-KUTTA	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	SI
	4	SI	NO	NO
RALSTON	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	SI
	4	SI	NO	NO
MODIFICADO DE EULER	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	NO
	4	SI	NO	NO
MILNE	1	SI	NO	NO
	2	SI	NO	SI
	3	SI	NO	NO
	4	SI	NO	NO
ADAMS	1	SI	NO	NO
	2	SI	SI	SI
	3	SI	SI	NO
	4	SI	NO	NO

TABLA 1.11 Resumen de características de estabilidad y convergencia de los métodos tratados, obtenido de los ejemplos

la estabilidad de los métodos, lo conveniente es confrontar las tablas 1.10 y 1.11, con el fin de detectar qué características analíticas en las ecuaciones diferenciales, provocan inestabilidad en tal ó cual método de los tratados en este capítulo.

Las conclusiones a las que se llegó después de tal confrontación, pueden expresarse como sigue

1. Cuando La solución crece $(f > 0)$
   $\partial f/\partial x$ crece
   $\partial f/\partial y > 0$
   Todos los métodos son inestables

2. Cuando La solución crece $(f > 0)$
   $\partial f/\partial x$ decrece
   $\partial f/\partial y < 0$
   Todos los métodos son absoluta y relativamente estables, excepto el método de Milne que solo es relativamente estable

3. Cuando La solución decrece $(f < 0)$
   $\partial f/\partial x$ decrece
   $\partial f/\partial y < 0$
   Los métodos de Taylor, Heun, Runge-Kutta y Ralston son absoluta y relatívamente estables; los de Euler, Modificado de Euler y Adams tienen

solo estabilidad absoluta y el método de Milne es inestable

4. Cuando La solución decrece ($\delta < 0$)

$\partial \delta / \partial x$ crece

$\partial \delta / \partial y > 0$

Todos los métodos son inestables

Lo anterior no quiere decir que, cuando se pretenda resolver una ecuación diferencial con las características de los grupos 1 ó 4, sea imposible hacerlo. Más bien se debe entender que es necesario usar un método lo suficientemente preciso, y un valor de h adecuado, para lograr reducir a un valor aceptable los errores por truncamiento en cada paso, de manera que la inestabilidad no represente un problema serio al aumentar x considerablemente.

Es más, como puede constatarse en las tablas 1.2 a 1.9, los errores, tanto absolutos como relativos, producidos por los métodos de cuarto orden (Taylor, Runge-Kutta, Ralston, Milne y Adams), son bastante aceptables. Más aún, si se requiriera de mayor precisión, podría usarse un método del tipo Runge-Kutta de quinto orden el cual tiene un error por truncamiento del orden de h^6 (ref 7). Conviene aclarar también que los resultados obtenidos con los métodos predictor-corrector, equivalen a solamente dos aplicaciones de la fórmula correctora respectiva.

Cuando la ecuación diferencial que se intenta resolver presen te características como las del grupo 2, prácticamente no existe ningún problema con ninguno de los métodos estudiados en este trabajo ya que el de Milne, que es el más desfavora - ble, es relativamente estable.

Si la ecuación diferencial a resolver tiene características analíticas que la sitúen en el grupo 3, se tiene la opción de los métodos anotados como absoluta y relativamente estables. En el caso de que quisiera usar un método predictor-corrector de cuarto orden, con el fin de modificar el valor de h para disminuir el tiempo de cómputo, podría usarse el método de Milne estabilizado (ref 8). No conviene usar el de Adams por que aunque el error absoluto permanece acotado, el error rela tivo aumenta, y ésto, confunde la solución.

1.8 SELECCION DE UN METODO APROPIADO

Con base en lo expuesto en las secciones 1.3 a 1.7 del presen te capítulo, los métodos numéricos de integración de ecuacio- nes diferenciales estudiados, pueden ser vistos de tal manera que sea posible seleccionar el mejor de ellos para una aplica ción dada. Para ello, conviene, antes que nada, hacer un aná lisis de las características analíticas de la ecuación a re - solver, es decir, determinar en cual de los cuatro gru- pos de ecuaciones, descritos en la sección anterior, queda in cluída tal ecuación. Esto se hará con el fin de percatarse de los problemas de estabilidad a los que habrá que enfrentarse, en caso de existir éstos.

Una vez hecho lo anterior, pueden tomarse como guía los siguientes lineamientos en la selección final del método a usar.

1. Cuando resulta obvio que el rango de integración de un problema es relativamente corto, se pueden utilizar tamaños de h relativamente pequeños sin tiempo excesivo de computación, y no existe ninguna razón para analizar el error por truncamiento en cada paso, o para complicar la solución usando uno de los métodos más precisos. Es poco problable que la estabilidad se vuelva un problema en un intervalo corto de integración, de manera que un método simple que inicie por sí mismo, debe resultar satisfactorio.

2. Cuando es obvio que el intervalo de integración de un problema es suficientemente grande como para abarcar un gran número de pasos, se debe utilizar un método que tenga un error por truncamiento por paso, suficientemente pequeño con objeto de minimizar el error acumulativo. Se debe hacer en cada paso un análisis del error por truncamiento por paso, con el objeto de minimizar el tiempo de computación requerido, e intentar al mismo tiempo alcanzar la precisión deseada, controlando el tamaño de h.

3. Cuando se desea un error por truncamiento pequeño en ca-

da paso, y no es tan importante el tiempo de computación como para que se justifique un análisis del error por truncamiento en cada paso, resulta conveniente usar un método del tipo Runge-Kutta de cuarto orden, ya que éstos empiezan por sí mismos y la estabilidad generalmente no representa problemas. También se puede optar por uno del tipo predictor-corrector de cuarto orden que solo valúa $f(x, y)$ una vez por paso.

4. Cuando un problema involucra algún rango intermedio de integración en el que se debe considerar la acumulación del error y el tiempo de computación, pero ninguno es un factor crítico, puede ser satisfactorio el uso de un método de Runge-Kutta de segundo o tercer orden (ref 9). Si se desea una estimación delerror por truncamiento en cada paso con el objeto de controlar el tamaño de h, se debe utilizar un método predictor-corrector de segundo orden.

En cualquiera de los casos en los que haya que usarse un método predictor-corrector por la facilidad que éstos presentan para controlar el tamaño de h, se puede seguir el siguiente procedimiento

1. Iniciar la solución usando un método de Runge-Kutta de orden mayor o igual al del método predictor-corrector que se vaya a usar.

2. Hacer uso del método predictor-corrector para calcular

el siguiente punto.

3. Si se necesitan más de dos iteraciones en el corrector para obtener la precisión deseada o bien, si el error por truncamiento en el paso es demasiado grande, bisectar h. Al contrario, si se requiere de una sola aplicación del corrector para lograr la precisión deseada o bien, si el error por truncamiento es excesivamente pequeño, duplicar, si se desea, el valor de h. De no ocurrir nada de lo anterior, pasar al paso 5.

4. Para cambiar el tamaño del intervalo, considerar el último valor de y_m que fue suficientemente preciso como nuevo punto inicial y reiniciar la solución a partir de ese punto, desde el paso 1.

5. Cuando se ha obtenido un $y_m^{(i)}$ suficientemente preciso, a partir del corrector, puede usarse una técnica de extrapolación al límite para calcular el valor final de y_m.

BIBLIOGRAFIA

1. Milne, William Edmund., "Numerical Solution of Differential Equations"., Dover Publications, Inc. New York, 1970.

2. Kreyszig , Erwin., "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería". Volumen 2, Editorial Limusa., México, 1978.

3. McCracken, Daniel D. y Dorn, William S., "Métodos Numéricos y Programación Fortran"., Editorial Limusa, México, 1979.

4. Hornbeck, Robert W., "Numerical Methods", Quantum Publishers, Inc. New York, 1975.

5. Scheid, Francis., "Análisis Numérico". McGraw-Hill de México, 1972.

6. James, Merlin L.; Smith, Gerald M.; Wolford, James C., "Métodos Numéricos Aplicados a la Computación Digital con FORTRAN"., Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A., México, 1973.

CAPITULO 2

ECUACION DIFERENCIAL DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

2.1 INTRODUCCION

El flujo gradualmente variado que será discutido en este capítulo es aquel flujo permanente cuyo tirante varía gradualmente a lo largo del canal. Esta definición implica dos condiciones: (1) que el flujo es permanente, esto es, que las características hidráulicas del flujo permanecen constantes dentro del intervalo de tiempo en consideración y (2) que las líneas de corriente tienen curvatura despreciable, esto es, que la distribución hidrostática de la presión prevalece en cada sección del canal (ref 11).

Una sección de control es aquella en la que es posible establecer una relación definida entre el nivel de la superficie libre del agua y el gasto correspondiente.

Como es sabido, el flujo uniforme no está asociado a zonas particulares de un canal, sino que es el estado en el que el flujo permanece con el tirante normal a lo largo del canal y es, por ello, una forma de control. Si hay alguna otra sección de control en un flujo uniforme, ésta tenderá a separarlo de tal estado y habrá una transición, que puede ser gradual o rápida, entre los dos estados de flujo.

2.2 *SUPOSICIONES BASICAS*

El desarrollo de la teoría del flujo gradualmente variado data del siglo XVIII, y muchos investigadores hidráulicos han contribuído a este desarrollo. Prácticamente todas las teorías desarrolladas dependen de las siguientes suposiciones básicas:

1. La principal pérdida en el flujo gradualmente variado al igual que en el flujo uniforme, es la debida a la fricción. De acuerdo con esta suposición, las fórmulas para flujo uniforme pueden ser usadas para calcular el gradiente hidráulico (pendiente S_{δ} de la línea de energía) en un flujo gradualmente variado y el coeficiente de rugosidad empleado en el flujo uniforme, es también empleado en este caso.

2. La pendiente del canal es pequeña, así quela profundidad del flujo es la misma, ya sea que se mida vertical o normal al fondo del canal; el factor de corrección de la presión ($\cos\theta$) es igual a la unidad y no ocurre arrastre de aire al

interior del flujo.

3. El canal es prismático, es decir, el canal es rectilíneo y tiene sección y pendiente constantes.

4. La distribución de velocidad es la misma en cada sección del canal y por lo tanto, el coeficiente de velocidad es constante.

5. El coeficiente de rugosidad es independiente del tirante y constante a lo largo del canal.

2.3 OBTENCION DE LA ECUACION DINAMICA DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

Considerando el perfil del flujo gradualmente variado en una longitud dx de un canal como el mostrado en la fig 2.1, la carga total sobre el plano horizontal de comparación en la sección 1 es

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{2.1}$$

donde H es la carga total en m; z es la distancia vertical del fondo del canal al plano horizontal de comparación en m; y es el tirante del flujo en m ($y = d$ ya que $\cos\theta = 1$); α es el coeficiente de velocidad y V es la velocidad media del flujo a través de la sección en m/seg.

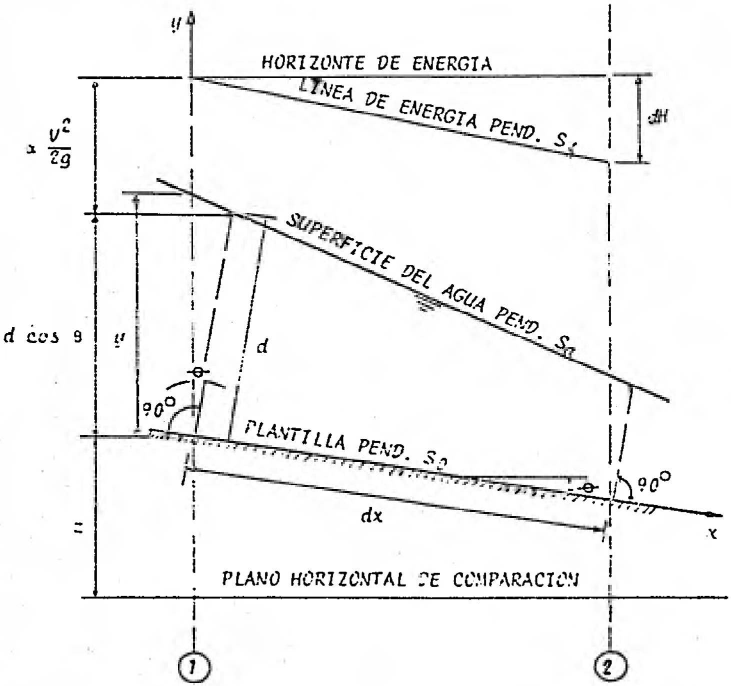


TABLA 2.1 Derivación de la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado

Si se supone α constante a lo largo del canal en el tramo considerado, tomando el fondo del canal como eje x y diferenciando la ecuación 2.1 respecto a x, se obtiene

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx}\left(y + \alpha \frac{V^2}{2g}\right) \tag{2.2}$$

Debe notarse que la pendiente S_0 de la plantilla queda definida como el seno de su ángulo de inclinación respecto a la horizontal y que se supone positiva si desciende en dirección del flujo y negativa si asciende. Por tanto

$$S_0 = \operatorname{sen}\theta = -\frac{dz}{dx} \tag{2.3}$$

y de la figura 2.1, la pendiente de la línea de energía es

$$S_f = \frac{dH}{dx} \tag{2.4}$$

Además, recordando el concepto de energía específica

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{2.5}$$

sustituyendo las ecuaciones 2.3, 2.4 y 2.5 en la 2.2 y ordenando convenientemente se obtiene

$$\frac{dE}{dx} = S_0 - S_f \tag{2.6}$$

Por otra parte se puede demostrar (ref 12) que, para cualquier forma de sección

(2.7) $$\frac{dE}{dy} = 1 - F_r^2$$

Por otra parte

(2.8) $$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

Combinando las ecuaciones 2.7 y 2.8 se tiene

$$\frac{dE}{dx} = (1 - F_r^2)\,\frac{dy}{dx}$$

Llevando este último resultado a la ecuación 2.6 y despejando dy/dx

(2.9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F_r^2}$$

Esta última es la ecuación del flujo gradualmente variado, que a partir de ahora será llamada ecuación dinámica del flujo gradualmente variado o simplemente ecuación dinámica. Ella representa la pendiente de la superficie del agua con respecto al fondo del canal.

En la ecuación 2.9

(2.10) $$S_f = \left[\frac{Qn}{A\ R^{2/3}}\right]^2 = \left[\frac{Vn}{R^{2/3}}\right]^2$$

cuando se usa la fórmula de Manning o

(2.11) $$S_f = \frac{Q^2\ P}{C^2 A^3} = \frac{V^2}{C^2\ R}$$

cuando se usa la fórmula de Chezy y, para cualquier forma de sección

(2.12) $$F_r^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3}$$

2.4 DISCUSION DE LA ECUACION DINAMICA

La ecuación dinámica del flujo gradualmente variado desarrollada en la sección anterior, representa la pendiente de la superficie del flujo con respecto al fondo del canal. Puede por tanto ser usada para describir las características de varios perfiles de flujo en un canal. La ecuación 2.9 será usada para la discusión; pero antes conviene hacer algunas observaciones.

La pendiente S_0 de la plantilla será positiva si el fondo desciende en dirección del flujo, negativa si asciende y cero si es horizontal.

El flujo será subcrítico si $y > y_c$, crítico si $y = y_c$ y supercrítico si $y < y_c$.

La pendiente de la plantilla, cuando ésta es positiva, es subcrítica cuando $y_n > y_c$, crítica cuando $y_n = y_c$ y supercrítica cuando $y_n < y_c$. La clasificación de la pendiente en uno de estos tipos dependerá de la rugosidad, de la magnitud misma de la pendiente y en menor grado del gasto.

Para su gasto dado y para la mayoría de las secciones, S_f y F_r^2 decrecen en forma continua a medida que el tirante crece.

Las relaciones entre S_f con S_0, y F_r^2 con 1 dependiendo del valor de y, se pueden resumir como sigue

$$S_f \gtrless S_0 \quad \text{si} \quad y \lessgtr y_n$$

$$F_r^2 \gtrless 1 \quad \text{si} \quad y \lessgtr y_c$$

Y finalmente, si dy/dx es positivo, el tirante crece en dirección del flujo; si es cero, el tirante es constante (flujo uniforme) y si es negativa, el tirante decrece en dirección del flujo.

Para que dy/dx sea positiva existen dos posibles alternativas.

1. $S_f < S_0$ y $F_r^2 < 1$

2. $S_f > S_0$ y $F_r^2 > 1$

Como dy/dx es positiva (+/+ ó -/-), el tirante crece en dirección del flujo. En el primer caso $S_f < S_0$ implica que $y > y_n$ y $F_r^2 < 1$ implica que $y > y_c$, por lo tanto el flujo debe ser subcrítico. Si $y > y_n > y_c$, el flujo subcrítico debe ocurrir en un canal con pendiente subcrítica. Al contrario, si $y > y_c > y_n$, el flujo subcrítico debe ocurrir en un canal con pendiente supercrítica. Similarmente, en el segundo caso, $S_f > S_0$ implica que $y < y_n$ y $F_r^2 > 1$ implica que $y < y_c$ por lo tanto el flujo debe ser supercrítico. Dicho flujo ocurrirá en un canal con pendiente subcrítica si $y_n \; y_c > y$ y en un canal con pendiente supercrítica si $y_c > y_n > y$.

Para que dy/dx sea negativa existen dos posibles alternativas

1. $S_f < S_0$ y $F_r^2 > 1$

2. $S_f > S_0$ y $F_r^2 < 1$

Como dy/dx es negativa (+/- ó -/+), el tirante decrece en dirección del flujo. El primer caso implica que $y_c > y > y_n$, por tanto, se tiene un flujo supercrítico en un canal con pendiente supercrítica. Similarmente, el segundo caso implica que $y_n > y > y_c$, o sea que el flujo es subcrítico en un canal con pendiente subcrítica.

Para que $dy/dx = 0$ se requiere que $S_f = S_0$ lo cual es la condición de flujo uniforme.

En un canal con pendiente horizontal, $S_0 = 0$ y la ecuación 2.9 dá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-S_f}{1-F_h^2}$$

Considerando que $y \to \infty$, esta ecuación implica dos posibles alternativas.

1. $y_n > y > y_c$
2. $y_n > y_c > y$

En el primer caso $F_h^2 < 1$ y dy/dx resulta negativa (-/+), por lo tanto el tirante disminuye en dirección del flujo. Ya que $y > y_c$, el flujo es subcrítico. En el segundo caso $F_h^2 > 1$ y dy/dx resulta positiva (-/-), por lo que el tirante aumenta en dirección del flujo. Como $y < y_c$, el flujo es supercrítico.

En un canal con pendiente adversa, $S_0 < 0$, el lograr un valor positivo finito de y_n es imposible, consecuentemente, la ecuación 2.9 dá dos posibles opciones.

1. $y > y_c$

2. $y < y_c$

En el primer caso dy/dx es negativa, ya que $F_r^2 < 1$ y el tirante decrece en un flujo subcrítico. En el segundo caso dy/dx es positiva, ya que $F_r^2 > 1$ y el tirante crece en un flujo supercrítico.

Las discusiones anteriores se encuentran resumidas en la tabla 2.1 y en las figuras 2.2 y 2.3.

Algunos detalles especiales de los perfiles de flujo teóricos son los siguientes:

1. Discontinuidad en el perfil de flujo. Cuando $y = y_c$, la ecuación 2.9 indica que $dy/dx \to \infty$, esto es, que el perfil del flujo será vertical al cruzar la línea del tirante crítico. Si el tirante del flujo cambia repentinamente de menor a mayor cruzando la línea del tirante crítico, ocurrirá un salto hidráulico, representando ésto una discontinuidad en el perfil del flujo. Si el cambio de tirante se hace de mayor a menor, también cruzando la línea del tirante crítico, entonces ocurre una caída hidráulica. Debe notarse que, en o cerca de la línea del tirante crítico, el perfil del flujo desciende con tan grande curvatura que la suposición de curvatura despreciable de las líneas de corriente, hecha en la definición del flujo gradualmente variado, puede producir grandes errores. En efecto, el flujo puede llegar a ser demasiado curvi-

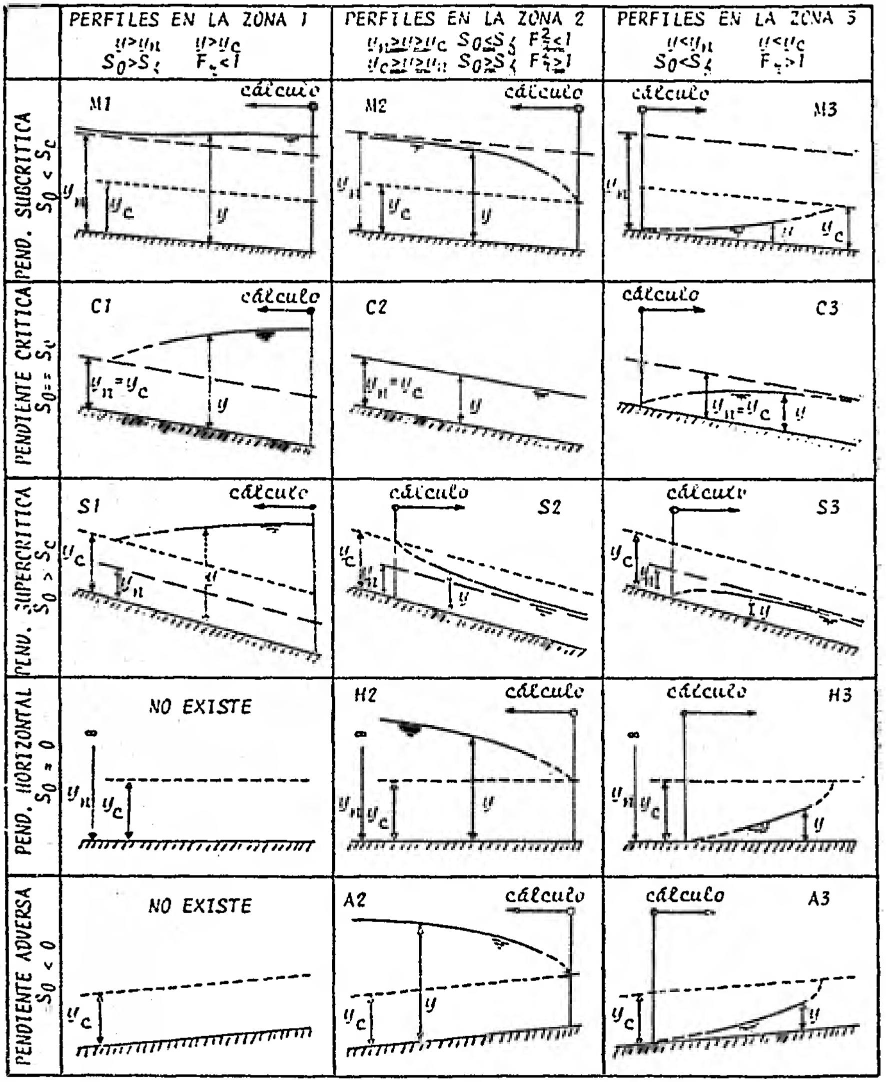


Fig 2.2 Clasificación de los perfiles de flujo gradualmente variado

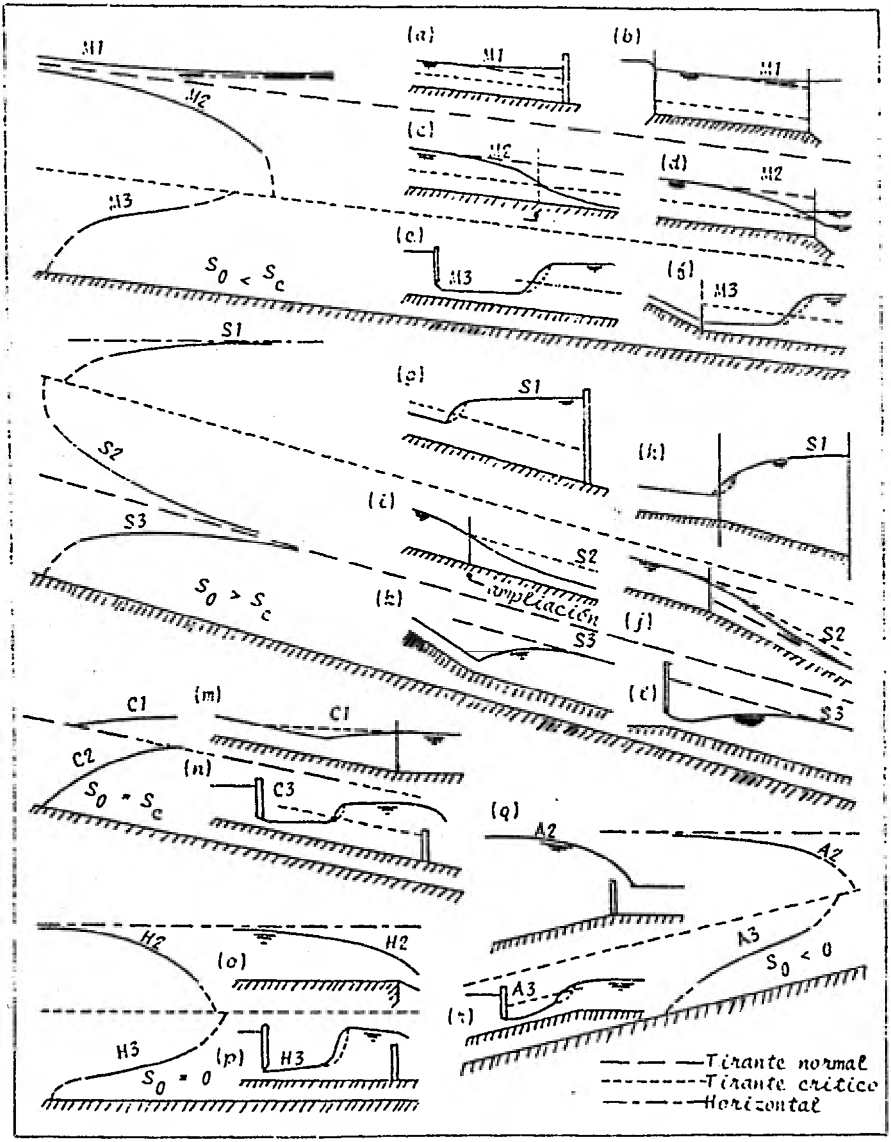


Fig 2.3 Ejemplos prácticos de perfiles de flujo

líneo o rápidamente variado, de tal manera que la teoría y ecuaciones desarrolladas en la sección anterior pueden llegar a ser inaplicables. Por tanto, la ecuación 2.9 no puede ser usada para describir o calcular con exactitud el perfil del flujo cerca del tirante crítico. Ejemplos de estos casos pueden ser vistos en la figura 2.4.

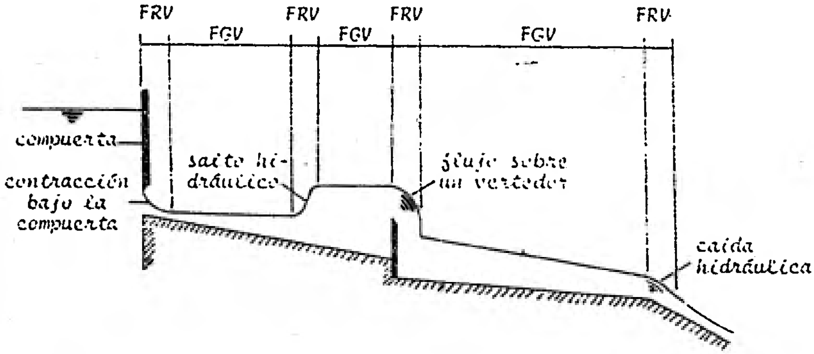


TABLA 2.4 Ejemplos de flujo rápidamente variado en los que no es aplicable la teoría del flujo gradualmente variado

2. Comportamiento del perfil de flujo en tirantes especiales. Para la siguiente discusión, es importante comprender el comportamiento teórico del perfil de flujo con varios tirantes específicos. Cuando $y \to \infty$, la ecuación 2.9 muestra que $dy/dx = S_0$, esto es, que la superficie del flujo es horizontal. Cuando $y = y_n$, la ecuación 2.9 muestra que $dy/dx = 0$, esto es, que la superficie del flujo es paralela al fondo del canal; lo cual significa flujo uniforme. Cuando $y = y_c$, un salto o caída hidráulicos pueden ocurrir como se anotó ante -

riormente. Cuando $y = y_n = y_c$, el flujo es uniforme y crítico.

2.5 CLASIFICACION DE LOS PERFILES DE FLUJO

Para un gasto y condiciones del canal dados, las líneas del tirante normal y del tirante crítico dividen el espacio del canal en tres zonas:

Zona 1. El espacio arriba de la línea superior

Zona 2. El espacio entre las dos líneas

Zona 3. El espacio debajo de la línea inferior

Por tanto, el perfil flujo puede ser clasificado en trece diferentes tipos, de acuerdo a la naturaleza de la pendiente del canal y a la zona en la que la superficie del agua se ubique. Estos tipos de flujo son designados como M1, M2, M3, C1, C2, C3, S1, S2, S3, H2, H3 y A2, A3; donde la letra es descriptiva de la pendiente del canal: M para subcrítica (mild = suave, en inglés), C para crítico, S para supercrítico (steep= pronunciada, en inglés), H para horizontal y A para adversa; y donde el número representa la zona correspondiente.

Las características generales de estos perfiles están dadas en la tabla 2.1 y sus formas están mostradas en las figuras 2.2 y 2.3. Ya que los perfiles cerca del tirante crítico y del fondo del canal no pueden ser definidos con exactitud por la teoría del flujo gradualmente variado, son mostrados con línea discontínua.

PENDIENTE DEL CANAL	DESIGNACION ZONA 1	ZONA 2	ZONA 3	RELACION ENTRE y, y_n Y y_c ZONA 1		ZONA 2		ZONA 3	TIPO DE FLUJO
Subcrítica $S_0 < S_c$	M1			y	>	y_n	>	y_c	Subcrítico
		M2		y_n	>	y	>	y_c	Subcrítico
			M3	y_n	>	y_c	>	y	Supercrítico
Crítica $S_0 = S_c$	C1			y	>	y_c	=	y_n	Subcrítico
		C2		y_c	=	y	=	y_n	Uniforme y crítico
			C3	y_c	=	y_n	>	y	Supercrítico
Supercrítica $S_0 > S_c$	S1			y	>	y_c	>	y_n	Subcrítico
		S2		y_c	>	y	>	y_n	Supercrítico
			S3	y_c	>	y_n	>	y	Supercrítico
Horizontal $S_0 = 0$	--			y	>	y_n	>	y_c	---
		H2		y_n	>	y	>	y_c	Subcrítico
			H3	y_n	>	y_c	>	y	Supercrítico
Adversa $S_0 < 0$	--			y	>	y_n^*	>	y_c	---
		A2		y_n^*	>	y	>	y_c	Subcrítico
			A3	y_n^*	>	y_c	>	y	Supercrítico

* y_n es supuesto un valor positivo

TABLA 2.1 Tipos de perfiles de flujo en canales prismáticos

Varios perfiles de flujo serán discutidos a continuación.

1. Perfiles M. $S_0 < S_c$ y $y_n > y_c$

El perfil M1 representa el mejor conocido como curva de remanso; es el más importante de todos los perfiles de flujo desde el punto de vista práctico. Este perfil ocurre cuando el extremo de aguas abajo de un canal largo con pendiente suave es sumergido en un depósito de mayor profundidad que el tirante normal del flujo en el canal. El extremo del perfil, aguas arriba es tangente a la línea del tirante normal, así que $dy/dx = 0$ mientras que $y = y_n$; y su extremo de aguas abajo, es tangente a la superficie horizontal del depósito, ya que $dy/dx = S_0$ mientras que $y \to \infty$. Ejemplos típicos del perfil M1 son como el que ocurre detrás de una presa en un río (figura 2.3a) y como el de un canal uniendo dos depósitos (figura 2.3b).

Un perfil M2 ocurre cuando el fondo del canal en el extremo de aguas abajo es sumergido en un depósito con una profundidad menor que el tirante normal en el canal. El extremo de aguas arriba del perfil es tangente a la línea del tirante normal, ya que $dy/dx = 0$ mientras que $y = y_n$. Si el valor de la sumerción en el extremo de aguas abajo es menor que el tirante crítico, el perfil terminará abruptamente con su final tangente a una línea vertical a una profundidad igual al tirante crítico ya que $dy/dx \to \infty$, mientras que $y = y_c$. Esto signifi ca la creación de una caída hidráulica. Si el valor de la sumerción aguas abajo es mayor que el tirante crítico, cuando mucho, el perfil se ubicará arriba de la superficie del agua en el depósito. Ejemplo de ésto son: el perfil en el lado de aguas arriba de una ampliación repentina de sección (figura 2.3c) y el perfil en un canal conduciendo a un depósito, cuando el nivel del agua en él, se encuentra arriba o abajo de la línea del tirante crítico (figura 2.3d).

El perfil M3 principia teóricamente desde el fondo del canal en su extremo de aguas arriba, en ángulo recto o agudo, dependiendo del tipo de fórmula de fricción usada (ref 13), y termina con un salto hidráulico en su extremo de aguas abajo. Este tipo de perfil ocurre usualmente cuando un flujo supercrítico entra en un canal con pendiente subcrítica. El comienzo del perfil, aunque no puede ser definido precisamente por la teoría, depende de la velocidad inicial del flujo. Al aumentar la velocidad, el perfil comenzará cada vez más adelante hacia aguas abajo. Aguas arriba, el extremo teórico del perfil intersectará el fondo del canal. En este extremo $y = 0$ y la velocidad llegaría a ser infinita. Por tanto, el extremo teórico de aguas arriba de un perfil M3 no puede existir físicamente. Ejemplos del perfil M3 son: el perfil después de una compuerta (figura 2.3e) y el perfil después de un cambio de pendiente, de supercrítica a subcrítica (figura 2.3f).

2. Perfiles S. $S_0 > S_c$ y $y_n < y_n$

El perfil S1 comienza con un salto hidráulico en su extremo de aguas arriba y llega a ser tangente a la horizontal en su extremo de aguas abajo. Ejemplos de él son: el perfil atrás de una presa en un canal con pendiente supercrítica (figura 2.3g) y el que ocurre en un canal con pendiente supercrítica entrando en un depósito de gran elevación (figura 2.3h).

El perfil S2 es muy común en las rápidas de vertedores y en cambios de pendiente y es muy parecido a una transición entre una caída hidráulica y un flujo uniforme, ya que comienza, aguas arriba, con una pendiente vertical en el tirante crítico y es tangente a la línea del tirante normal en su extremo de aguas abajo. Ejemplos de tal perfil son: el formado en el lado de aguas abajo de una ampliación brusca de sección (figura 2.3i) y el formado en el lado de pendiente supercrítica en un canal con cambio de pendiente, de una pendiente supercrítica a otra aún mayor (figura 2.3j).

El perfil S3 es también del tipo transición formado entre un flujo supercrítico incidente como el que se presenta bajo una compuerta, y la línea del tirante normal, a los cuales es tangente. Ejemplos de este tipo son: el perfil en el lado de pendiente supercrítica de un canal con cambio de pendiente, de una pendiente supercrítica a otra más suave pero aún supercrítica (figura 2.3k) y el perfil formado después de una compuerta cuando el flujo entra en un canal con pendiente super - crítica con un tirante menor que el normal (figura 2.31).

3. Perfiles C. $S_0 = S_c$ y $y_n = y_c$

Estos perfiles representan las condiciones de transición en - tre los perfiles M y S. Suponiendo un canal rectangular an - cho, la ecuación de Bresse

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_n/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3}$$

cuando se usa la fórmula de Manning, muestra que los perfiles C1 y C3 son curvos y que el perfil C1 es asintótico a la ho - rizontal (figuras 2.3m y n), cuando se usa la fórmula de Che- zy, la ecuación de Bresse

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_n/y)^3}{1 - (y_c/y)^3}$$

muestra que los perfiles son líneas horizontales. El perfil C2 representa el caso de flujo crítico-uniforme.

4. Perfiles H. $S_0 = 0$ y $y_n \to \infty$

Estos son los casos límite de los perfiles M cuando el fondo del canal llega a ser horizontal. Los perfiles H2 y H3 co -

rresponden a los perfiles M2 y M3, pero el H1 no puede ser establecido ya que y_n tiende a infinito (figuras 2.3o y p).

5. Perfiles A. $S_0 < 0$

El perfil A1 es imposible, ya que el valor de y_n no es real. Los perfiles A2 y A3 son similares a los perfiles H2 y H3, respectivamente. En general, los perfiles A no ocurren frecuentemente (figuras 2.3q y r).

Para mayor información acerca del análisis de los perfiles de flujo, es recomendable leer la sección 9.5 del "Open-Channel Hydraulics" de Chow.

2.6 CARACTERISTICAS ANALITICAS DE LA ECUACION DINAMICA PARA CADA TIPO DE PERFIL

Como se hizo en la sección 1.7 del capítulo 1 de este trabajo, en la presente sección se hará una tabla similar a la 1.10 para los diferentes perfiles de flujo estudiados en la sección anterior.

Para conseguir lo anterior, resulta conveniente establecer una analogía entre la forma de los perfiles de la figura 2.2 y las gráficas de las soluciones a los ejemplos de la sección 1.6, figura 1.8. Por ejemplo, para el perfil M1 de la figura 2.2, tomando en cuenta el sentido de cálculo mostrado, se encuen -

tra, en la figura 1.8, que la gráfica con forma análoga es la marcada con el número 3, ya que ésta, al igual que el perfil M1, decrecen cada vez más lentamente. Por lo tanto, de la tabla 1.10 se obtiene que $\zeta = dy/dx < 0$, $\partial\zeta/\partial x$ decrece y $\partial\zeta/\partial y < 0$ conforme aumenta x.

De manera similar se han tratado todos los perfiles de la figura 2.2, excepto el C2 ya que éste es uniforme, para llegar a los resultados que se encuentran resumidos en la tabla 2.2.

PERFIL	$\zeta = dy/dx$	$\partial\zeta/\partial x$	$\partial\zeta/\partial y$	GRUPO
M1	< 0	DECRECE	< 0	3
M2	> 0	DECRECE	< 0	2
M3	> 0	CRECE	> 0	1
C1	< 0	CRECE	> 0	4
C3	> 0	DECRECE	< 0	2
S1	< 0	CRECE	> 0	4
S2	< 0	DECRECE	< 0	3
S3	> 0	DECRECE	< 0	2
H2	> 0	DECRECE	< 0	2
H3	> 0	CRECE	> 0	1
A2	> 0	DECRECE	< 0	2
A3	> 0	CRECE	> 0	1

TABLA 2.2 Características analíticas de los diferentes perfiles de flujo

Es conveniente hacer notar que en los casos en los que el canal es prismático (sección constante), $\partial\zeta/\partial x = 0$, es decir, no crece. Sin embargo, el efecto que tal situación produce en la presición y en la estabilidad de los métodos de integra ción es el mismo que si creciera. Por ello, en la tabla 2.2, se ha optado por decir que $\partial\delta/\partial x$ crece.

2.7 METODOS DE INTEGRACION RECOMENDADOS PARA CADA TIPO DE PERFIL

Con la información resumida en la tabla 2.2, y con la ayuda de las conclusiones obtenidas en la sección 1.7 del capítulo 1; se han obtenido las conclusiones resumidas en la tabla 2.3. En esta tabla se proponen los métodos recomendados, para cuatro diferentes grupos, llamados 1, 2, 3 y 4; cada uno de los cuales está definido por características analíticas determinadas. Tales grupos son los mismos que aparecen en la tabla 2.2. Así por ejemplo, para saber que métodos son recomendados para un perfil M3, se busca éste en la tabla 2.2 y se observa que pertenece al grupo 1. Acto seguido, se busca en la tabla 2.3 qué métodos son los recomendados para este grupo, pudiéndose observar que son el de Runge-Kutta o el de Milne. El mismo procedimiento se usará para los demás perfiles.

Antes de terminar esta sección, cabe hacer algunas aclaraciones acerca de la tabla 2.3.

En todos los grupos se ha preferido el método de Runge-Kutta al de Ralston ya que con él se obtiene, en general, una mayor aproximación lo cual resulta de mucha utilidad en los grupos 1 y 4, ya que en ellos el método es inestable y se puede espe rar un menor error.

GRUPO	METODO RECOMENDADO
1	Runge-Kutta[1] o Milne[1] si se va a analizar el error por truncamiento y/o se desea modificar h para ahorrar tiempo de proceso
2	Runge-Kutta o Adams si se va a analizar el error por truncamiento y/o se desea modificar h para ahorrar tiempo de proceso
3	Runge-Kutta o Adams[2] si se va a analizar el error por truncamiento y/o se desea modificar h para ahorrar tiempo de proceso
4	Runge-Kutta[1] o Milne[1] si se va a analizar el error por truncamiento y/o se desea modificar h para ahorrar tiempo de proceso

[1] El método es inestable
[2] El método es relativamente estable

TABLA 2.3 Método recomendado para cada grupo de perfiles de flujo

En los grupos 1 y 4 se ha preferido el método de Milne al de Adams, ya que con él se obtiene una mayor aproximación, aunque los dos son inestables.

En el grupo 2 se ha preferido el método de Adams ya que el de Milne solamente es relativamente estable.

En el grupo 3 se ha preferido el método de Adams, pues aunque tiene solo estabilidad absoluta, el de Milne es inestable.

En todos los casos se han recomendado métodos de cuarto orden debido a que los intervalos de integración serán, en todos los casos, muy grandes. Por lo tanto deberán escogerse valores grandes del incremento h, con el consecuente aumento del error por truncamiento.

Otra posibilidad que se tiene al usar un método predictor-co - rrector (Milne o Adams), es la de poder hacer extrapolaciones al límite, con cierta facilidad, a fin de aumentar la aproxima ción de la solución. Ver para ello la sección 1.3 del capítulo 1.

BIBLIOGRAFIA

1. Chow, Van Te., "Open-Channel Hydraulics", Mc Graw-Hill Kogakusha, Tokio, 1959.

2. Henderson, F. M., "Open Channel Flow", Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1966.

3. Sotelo, Avila Gilberto., "Apuntes de Hidráulica II", Facultad de Ingeniería, UNAM, México 1980.

PARTE II

APLICACIONES

En esta parte, que comprende los capítulos 3, 4 y 5, se muestra la aplicación de los métodos de integración numérica a la solución de la ecuación dinámica, es decir, al cálculo de perfiles de flujo.

Para efectos de comparación, se ha adoptado el método de integración directa (ref 14) para calcular los perfiles tipo M y S, así como sus longitudes, aceptando dichos cálculos como "exactos". También se ha incluído el método del incremento finito (ref 15), por ser el más comúnmente usado, con el fin de compararlo contra los métodos de integración numérica.

En todos los casos las comparaciones se harán para un mismo espaciamiento Δx entre secciones, y para una diferencia de 0.001 m entre dos aproximaciones de un mismo tirante. Cada perfil será calculado con el método de integración directa una sola vez y con un espaciamiento Δx peuqeño usándose tales resultados en el cálculo de los errores absolutos. Lo anterior es posible en virtud de que el método de integración directa no acumula errores al aumentar x.

Para el caso de los perfiles tipo H, el método de integración directa no es aplicable por lo que se usarán, con fines de comparación, los resultados obtenidos con el método del incremento finito, usando un valor de Δx muy pequeño. El cálculo de la longitud de estos perfiles se efectuará de la misma manera.

Habiéndose ya mostrado la secuela de cálculo para los diferentes métodos de integración, solamente serán presentados los resultados en forma tabular en los tres capítulos siguientes. Sin embargo, en el capítulo 6 se darán algunas recomendaciones acerca de cómo programar los métodos usados para resolver la ecuación dinámica.

CAPITULO 3

APLICACIONES A PERFILES TIPO M

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo son tratados los perfiles de flujo tipo M mismos que se presentan en canales en los que se cumple que

$$S_0 < S_c$$

donde S_0 es la pendiente de la plantilla del canal y S_c es la pendiente crítica para un gasto y geometría de la sección transversal dados.

Resulta conveniente, con el fin de disminuir el volumen de cálculo, usar un canal con pendiente S_0 constante que contenga los tres tipos de perfil M, es decir, M1, M2 y M3. Para dichos perfiles, los valores del tirante normal y_n, del tirante crítico y_c y de la pendiente crítica S_c, serán los mismos.

3.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El canal trapecial mostrado en la figura 3.1 conduce un gasto de *200* m^3/seg con una pendiente de plantilla de *0.001*, un coeficiente de rugosidad de Manning de *0.018*, un ancho de plantilla de *20 m* y un talud de *2*; el tirante *H* antes del vertedor es de *4.5 m* y el tirante al pie del mismo es de *0.9 m*. Calcular los perfiles de flujo M1, M2 y M3 ubicados en él, sin calcular el salto hidráulico.

En esta sección se efectuará el cálculo de la pendiente crítica y de los tirantes normal y crítico ya que éstos serán los mismos para los tres perfiles tipo M.

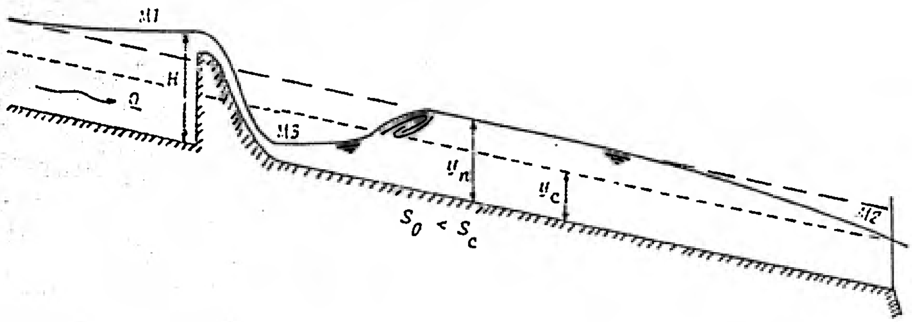


Fig 3.1 Figura aclaratoria del ejemplo de perfiles tipo M

Cálculo del tirante normal. Para el flujo uniforme se debe cumplir que

$$\frac{Q_n}{S_0^{1/2}} = A_n R_n^{2/3}$$

que para una sección trapecial es

$$\frac{Q_n}{S_0^{1/2}} = (b y_n + k y_n^2)\left[\frac{b y_n + k y_n^2}{b + 2 y_n \sqrt{1+k^2}}\right]^{2/3}$$

Sustituyendo ahora los datos del problema se tiene la ecuación

$$(20 y_n + 2 y_n^2)\left[\frac{20 y_n + 2 y_n^2}{20 + 2\sqrt{5}\, y_n}\right]^{2/3} = \frac{(200)(0.018)}{(0.001)^{1/2}} = 113.842$$

que resuelta por tanteos dá

$$y_n = 2.700 \text{ m} .$$

Cálculo del tirante crítico. Para una sección cualquiera en régimen crítico se debe cumplir que

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{B}$$

la que, para una sección trapecial puede escribirse como

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(by_c + ky_c^2)^3}{b+2ky_c}$$

y sustituyendo los datos del problema se tiene

$$\frac{(20y_c + 2y_c^2)^3}{20+4y} = \frac{(200)^2}{9.81} = 4077.472$$

que resuelta por tanteos dá

$$y_c = 2.020 \text{ m}$$

Cálculo de la pendiente crítica. Despejando de la ecuación de Manning la pendiente S_0 y calculando para el tirante crítico se tiene

$$S_c = \left(\frac{Qn}{A_c R_c^{2/3}}\right)^2$$

siendo

$$A_c = 20(2.02) + 2(2.02)^2 = 48.561 \text{ m}^2$$

$$P_c = 20 + 2\sqrt{5}\,(2.02) = 29.034 \text{ m}$$

$$R_c = A_c/P_c = 48.561/29.034 = 1.673 \text{ m}$$

rán estos los únicos usados en esta sección junto con el del incremento finito.

Del enunciado del problema, tomando como origen la sección antes del vertedor (figura 3.1) se obtiene

$$x_0 = 0.0\ m \qquad ; \qquad y_0 = 4.5\ m$$

La longitud del perfil se calcula con el método de integración directa entre la sección inicial y otra en la que el tirante es $1.01\ y_n$, es decir, $y = 2.727\ m$; ya que por convención se acepta que en ese punto se termina el perfil. Tal longitud es

$$L = -3352.524\ m$$

Ahora, usando el mismo método se calcula el perfil para un Δx de $-100\ m$ que se considera es un valor suficientemente pequeño dada la longitud total del perfil. Los resultados de este cálculo son mostrados en la tabla 3.1.

En la tabla 3.2 se encuentra el perfil M1 calculado con los métodos de Runge-Kutta, Adams e incremento finito, para una separación entre secciones de $100\ m$ y los correspondientes errores absolutos calculados como la diferencia del valor dado por el método de integración directa menos el dado por el método empleado.

En la figura 3.2 se pueden observar graficados los errores absolutos de la tabla 3.2.

Puede observarse en la figura 3.2 que los errores introducidos por los métodos empleados son prácticamente iguales, razón por la cual se usarán ahora incrementos de *300* y *500 m*, para analizar el comportamiento de dichos errores.

Los resultados obtenidos con el incremento de *300 m* se encuentran en la tabla 3.3, y en la figura 3.3 se han graficado los errores absolutos correspondientes.

Los resultados correspondientes al cálculo del perfil con el incremento de *500 m* se encuentran resumidos en la tabla 3.4, y los errores absolutos correspondientes se han graficado en la figura 3.4.

En las figuras 3.2, 3.3 y 3.4, RK indica el método de Runge-Kutta, A el de Adams e IF el del incremento finito.

De la observación de las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 puede concluirse que mientras los errores introducidos por los métodos de Runge-Kutta y Adams permanecen prácticamente constantes al aumentar el intervalo Δx, los introducidos por el método del incremento finito, aunque decrecen al principio, llegan a ser mayores que los producidos por los métodos numéricos. De cualquier manera, el error máximo cometido es de apenas *1 cm*.

x	y
0	4.5
-100	4.41056722
-200	4.32206765
-300	4.23452944
-400	4.14806871
-500	4.06279228
-600	3.97881802
-700	3.89627483
-800	3.81530434
-900	3.73606098
-1000	3.65871233
-1100	3.583429
-1200	3.51043392
-1300	3.43990092
-1400	3.37205232
-1500	3.30710527
-1600	3.24527676
-1700	3.18677705
-1800	3.13180164
-1900	3.08852195
-2000	3.03307519
-2100	2.98955142
-2200	2.94999965
-2300	2.91439146
-2400	2.88264886
-2500	2.85462659
-2600	2.83012897
-2700	2.80891088
-2800	2.79069734
-2900	2.77519352
-3000	2.76208818
-3100	2.75111817
-3200	2.74197451
-3300	2.73433282

TABLA 3.1 Perfil M1 calculado con el método de ingegración directa

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	4.5	0	4.5	0	4.5	0
-100	4.40989064	6.96584582E-04	4.40989064	6.96584582E-04	4.4098998	6.87418506E-04
-200	4.3206545	1.41334347E-03	4.3206545	1.41334347E-03	4.32067355	1.3942942E-03
-300	4.23236181	2.14762986E-03	4.23236181	2.14762986E-03	4.23241151	2.11793557E-03
-400	4.1451727	2.89601274E-03	4.1451727	2.89601274E-03	4.14521379	2.85491534E-03
-500	4.05913821	3.65417451E-03	4.0591382	3.65417823E-03	4.05919143	3.60094756E-03
-600	3.97440124	4.41678241E-03	3.97440123	4.41678986E-03	3.97446728	4.35074233E-03
-700	3.89109746	5.17736934E-03	3.89109745	5.17738238E-03	3.89117689	5.09794336E-03
-800	3.80937613	5.92820812E-03	3.80937611	5.92822861E-03	3.8094694	5.83494518E-03
-900	3.72940071	6.6602733E-03	3.72940068	6.66030496E-03	3.72950303	6.55294862E-03
-1000	3.65134915	7.36318436E-03	3.6513491	7.36322999E-03	3.65147040	7.24185165E-03
-1100	3.57541377	8.02522991E-03	3.57541371	8.0252951E-03	3.57554868	7.89031945E-03
-1200	3.50180043	8.63348879E-03	3.50180034	8.63357913E-03	3.50194799	8.48593377E-03
-1300	3.43072682	9.17410385E-03	3.4307267	9.17422492E-03	3.4308855	9.0154158E-03
-1400	3.3624196	9.63271875E-03	3.36241945	9.63287521E-03	3.36258721	9.4651077E-03
-1500	3.29711023	9.99504048E-03	3.29711003	9.99523793E-03	3.29728379	9.82147921E-03
-1600	3.23502905	.0102477055	3.23502881	.0102479467	3.23520479	.0100719668
-1700	3.1763978	.0103792492	3.17639752	.0103795333	3.17657119	.0102058593
-1800	3.12142037	.0103812674	3.12142005	0103815906	3.12158626	.010215383
-1900	3.07027236	.0102495858	3.07027201	0102499279	3.07042521	.0100967446
-2000	3.02308997	9.98521689E-03	3.02308961	9.98558384E-03	3.02322422	9.85096861E-03
-2100	2.97995931	9.59510822E-03	2.97995895	9.59547609E-03	2.9800693	9.4846189E-03
-2200	2.94090746	9.09219217E-03	2.9409071	9.09255259E-03	2.94098995	9.00970679E-03
-2300	2.90589654	8.49492103E-03	2.90589619	8.495274E-03	2.9059461	8.44335742E-03
-2400	2.87482206	7.82600511E-03	2.8748217	7.82636416E-03	2.87484144	7.80662522E-03
-2500	2.84751602	7.11056776E-03	2.84751563	7.11095799E-03	2.84750376	7.12283328E-03
-2600	2.82375482	6.3741561E-03	2.82375436	6.37460873E-03	2.82371314	6.41583279E-03
-2700	2.80327085	5.64002805E-03	2.80327031	5.6405738E-03	2.80320342	5.70745859E-03
-2800	2.78576659	4.93074954E-03	2.78576593	4.93140705E-03	2.78567807	5.01927454E-03
-2900	2.77092918	4.26434446E-03	2.77092841	4.2651156E-03	2.77082473	4.36879229E-03
-3000	2.75844411	3.64406966E-03	2.75844324	3.64493858E-03	2.75832695	3.7592267E-03
-3100	2.74800676	3.11141182E-03	2.74800582	3.11234607E-03	2.74788578	3.23239134E-03
-3200	2.73933107	2.64343899E-03	2.73933011	2.64440304E-03	2.73920854	2.7659703E-03
-3300	2.73215536	2.17746291E-03	2.7321544	2.17842031E-03	2.7320348	2.29801703E-03

TABLA 3.2 Perfil M1 calculado con los métodos recomendados usando Δx=-100 m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	4.5	0	4.5	0	4.5	0
-300	4.23228207	2.14737281E-03	4.23238207	2.14737281E-03	4.23264836	1.88108347E-03
-600	3.97440195	4.41606715E-03	3.97440195	4.41606715E-03	3.97499378	3.82424146E-03
-900	3.72940228	6.65869564E-03	3.72940228	6.65869564E-03	3.73036388	5.69709763E-03
-1200	3.50180372	8.63019843E-03	3.50179744	8.63648113E-03	3.50312545	7.30846636E-03
-1500	3.29711709	9.98818129E-03	3.2970969	.0100083723	3.29867237	8.43290333E-03
-1800	3.12143472	.0103669185	3.1213945	.0104071423	3.12292274	8.87890439E-03
-2100	2.97998811	9.56631545E-03	2.97993965	9.61477217E-03	2.98097613	8.57829023E-03
-2400	2.87487305	7.77500961E-03	2.87465027	7.99778601E-03	2.87502342	7.62464106E-03
-2700	2.80334466	5.56622073E-03	2.8032428	5.56808617E-03	2.80267887	6.23200927E-03
-3000	2.75852921	3.55896447E-03	2.75817175	3.61642987E-03	2.75740578	4.68240399E-03
-3300	2.73223574	2.09707866E-03	2.73209727	2.23555323E-03	2.73106083	3.27199604E-03

TABLA 3.3 Perfil M1 calculado con los métodos recomendados usando Δx=-300 m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	4.5	0	4.5	0	4.5	0
-500	4.05914236	3.65001895E-03	4.05914236	3.65001895E-03	4.06045556	2.33682059E-03
-1000	3.65136495	7.34738074E-03	3.65136495	7.34738074E-03	3.65435243	4.35989909E-03
-1500	3.29716413	9.94114205E-03	3.29716413	9.94114205E-03	3.30144021	5.66506286E-03
-2000	3.02327747	9.79772303E-03	3.02292312	.0101520726	3.02657994	6.49525318E-03
-2500	2.8460457	6.58069202E-03	2.84736148	7.26511329E-03	2.84739522	7.23126903E-03
-3000	2.75928954	2.79863738E-03	2.7569535	3.13468557E-03	2.75551532	6.57286495E-03

TABLA 3.4 Perfil M1 calculado con los métodos recomendados usando Δx=-500 m

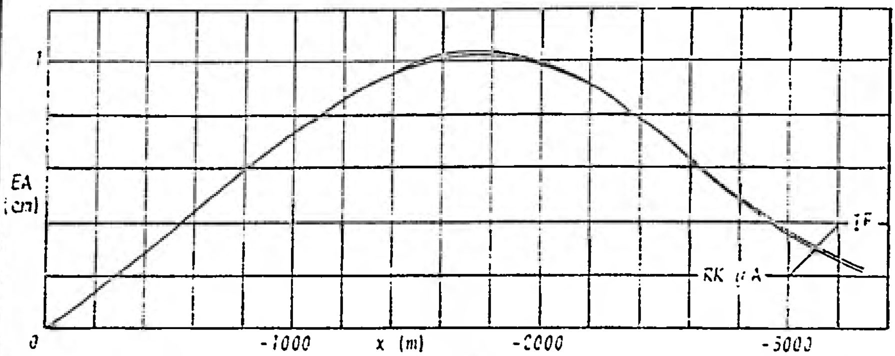


Fig 3.2 Errores absolutos usando Δx = - 100 m. Perfil M1

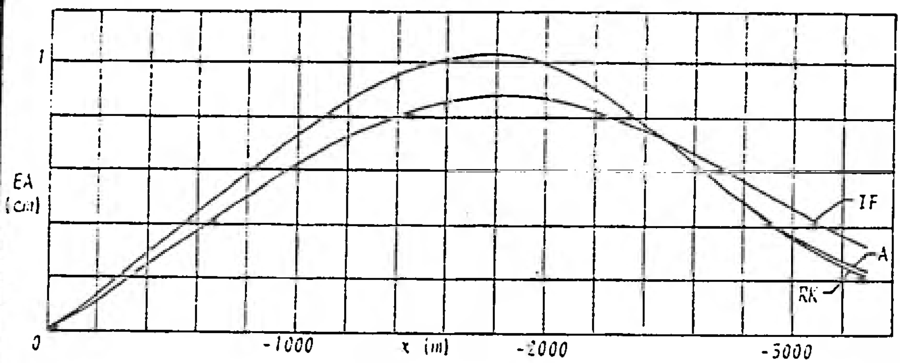


Fig 3.3 Errores absolutos usando Δx = - 300 m. Pefil M1

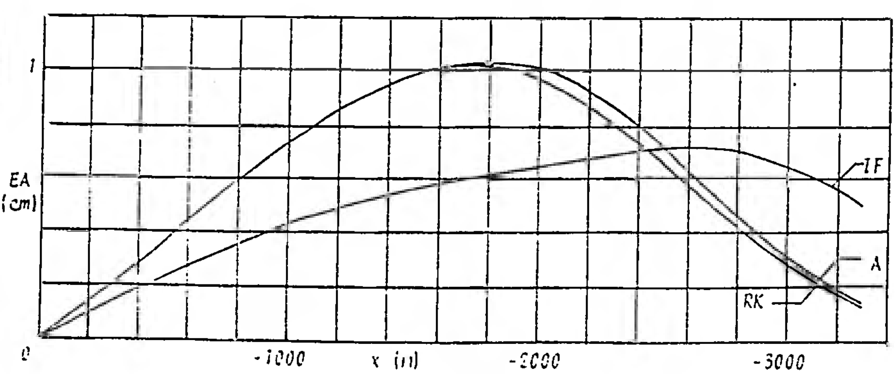


Fig 3.4 Errores absolutos usando Δx = - 500 m. Perfil M1

3.4 CALCULO DEL PERFIL M2

Los métodos de integración numérica recomendados para el cálculo de este tipo de perfil son el de Runge-Kutta y el de Adams (tablas 2.2 y 2.3). Estos métodos y el del incremento finito serán los que se usen en esta sección.

Ahora, tomando como origen el extremo de aguas abajo del canal (figura 3.1), y que es una sección crítica, se tiene que la condición inicial en este caso es

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 2.020 \ m$$

La longitud del perfil se calcula con el método de integración directa entre la sección inicial y otra en la que el tirante es de $0.99 \ y_n$, esto es, $y = 2.673 \ m$; ya que como se indicó en la sección anterior, se acepta, por convención, que en dicho punto termina el perfil. Tal longitud resulta ser

$$L = -1044.933 \ m$$

Ahora, usando el mismo método se calcula el perfil para un Δx de $-50 \ m$ que se considera es un valor suficientemente pequeño dada la longitud total del perfil. Los resultados de este cálculo se muestran en la tabla 3.5.

Antes de iniciar el cálculo del perfil M2 con los métodos numé ricos recomendados, es necesario destacar que la integración numérica de este tipo de perfiles usando valores de Δx razonables, y a partir de su tirante crítico como condición inicial, produce errores de tal magnitud que pueden llegar a ser inadmisibles. En la sección 3.6 se describe una forma práctica de salvar estos obstáculos.

Siguiendo las indicaciones de la sección 3.6, se integró un tramo de 50 m con incrementos de 5 m usando el método de Runge-Kutta y con la condición inicial

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 1.02 y_c = 1.02(2.02) = 2.060 \ m$$

con lo cual se obtuvo el perfil mostrado en la tabla 3.6.

Tomando ahora como condición inicial

$$x_0 = -50 \ m \quad ; \quad y_0 = 2.29947603 \ m$$

pueden aplicarse los métodos de integración numérica recomendados para este caso.

Usando $\Delta x = -50$ m se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 3.7. Los correspondientes errores absolutos se encuentran dibujados en la figura 3.5.

Con el fin de analizar el comportamiento que presentan los errores al aumentar Δx, se usarán valores de -100 y -200 m.

Los resultados obtenidos con $\Delta x = -100$ m se encuentran en la tabla 3.8 y en la figura 3.6 se han graficado los errores correspondientes.

Los resultados obtenidos del cálculo del perfil con $\Delta x = -200$ m se encuentran resumidos en la tabla 3.9 y los errores están dibujados en la figura 3.7.

Si se observan las figuras 3.5, 3.6 y 3.7, se podrá apreciar que los errores introducidos por los métodos numéricos, son siempre menores que los producidos por el método del incremento finito para todos los valores de Δx usados y que el error máximo cometido es del orden de un centímetro.

3.5 CALCULO DEL PERFIL M3

Con base en las tablas 2.2 y 2.3 se puede determinar que los métodos numéricos adecuados para integrar este tipo de perfil son el de Runge-Kutta y el de Milne, por lo tanto, estos métodos y el del incremento finito serán usados para resolver este caso.

Tomando como origen del perfil a la sección al pie del vertedor (figura 3.1), se puede establecer la condición inicial

x	y
0	2.02
-50	2.29441513
-100	2.38030034
-150	2.43649176
-200	2.4778733
-250	2.51012963
-300	2.53613801
-350	2.55758595
-400	2.57555928
-450	2.5908011
-500	2.60384851
-550	2.6150984
-600	2.6248561
-650	2.63336286
-700	2.64080558
-750	2.6473378
-800	2.65309769
-850	2.65918546
-900	2.66267914
-950	2.66665845
-1000	2.6701814

TABLA 3.5 Perfil M2 calculado con el método de integeación directa

x	y
0	2.06
-5	2.12915696
-10	2.16393342
-15	2.19027433
-20	2.21198702
-25	2.23066842
-30	2.24716916
-35	2.2620059
-40	2.27552019
-45	2.28795165
-50	2.29947603

TABLA 3.6 Cálculo del tramo de flujo rápidamente variado del perfil M2, $\Delta x = -5$ m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO		
	y	EA	y	EA	x	y	EA
					0	2. 06	-. 04
-50	2. 29947603	-5. 0609E-03	2. 29947603	-5. 0609E-03	-50	2. 31016619	-. 0237510577
-100	2. 38435067	-4. 04982641E-03	2. 38435067	-4. 04982641E-03	-100	2. 39670787	-. 0164070269
-150	2. 4399687	-3. 47693544E-03	2. 4399687	-3. 47693544E-03	-150	2. 44918256	-. 0126907984
-200	2. 48094896	-3. 07566393E-03	2. 48094896	-3. 07566393E-03	-200	2. 48820840	-. 0103351646
-250	2. 5126934	-2. 7637668E-03	2. 51260631	-2. 47668009E-03	-250	2. 51680117	-8. 67153611E-03
-300	2. 53864573	-2. 507722E-03	2. 53836027	-2. 24225689E-03	-300	2. 54355758	-7. 41956569E-03
-350	2. 55987664	-2. 29068846E-03	2. 55963424	-2. 0482922E-03	-350	2. 56402306	-6. 4371042E-03
-400	2. 57766199	-2. 10310705E-03	2. 57745525	-1. 89636461E-03	-400	2. 58120221	-5. 643324E-03
-450	2. 59274	-1. 93889905E-03	2. 59256149	-1. 76039524E-03	-450	2. 59578922	-4. 98011528E-03
-500	2. 60564136	-1. 79265556E-03	2. 60548719	-1. 63868256E-03	-500	2. 60828594	-4. 43742983E-03
-550	2. 6167614	-1. 66299939E-03	2. 61662756	-1. 52915809E-03	-550	2. 6190679	-3. 96949891E-03
-600	2. 62640296	-1. 54685415E-03	2. 62628633	-1. 43022928E-03	-600	2. 62842386	-3. 56776081E-03
-650	2. 63480335	-1. 44048594E-03	2. 63470135	-1. 33846935E-03	-650	2. 63656079	-3. 21792996E-03
-700	2. 64215201	-1. 34643167E-03	2. 64206253	-1. 25694268E-03	-700	2. 64372035	-2. 91476864E-03
-750	2. 64859253	-1. 26472767E-03	2. 6485230	-1. 18599366E-03	-750	2. 64999013	-2. 6523238E-03
-800	2. 65428103	-1. 18333567E-03	2. 65421159	-1. 1138944E-03	-800	2. 65551156	-2. 41386984E-03
-850	2. 65929223	-1. 10877212E-03	2. 65923086	-1. 0473961E-03	-850	2. 66030566	-2. 20220164E-03
-900	2. 66372395	-1. 0448033E-03	2. 6636696	-9. 9045597E-04	-900	2. 66469722	-2. 01808009E-03
-950	2. 66765036	-9. 91911628E-04	2. 66760216	-9. 43709165E-04	-950	2. 66851798	-1. 85953174E-03
-1000	2. 67113463	-9. 53231938E-04	2. 67109182	-9. 10418106E-04	-1000	2. 67190907	-1. 72767043E-03

TABLA 3.7 Perfil M2 calculado con los métodos recomendados usando $\Delta x = -50$ m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO		
	y	EA	y	EA	x	y	EA
-50	2.29947603	-5.0609E-03	2.29947603	-5.0609E-03	0	2.06	-.04
-150	2.44069406	-4.20230348E-03	2.44069406	-4.20230348E-03	-100	2.42810375	-.0478029065
-250	2.51333905	-3.20941955E-03	2.51333905	-3.20941955E-03	-200	2.50718297	-.0293096704
-350	2.56017766	-2.59170495E-03	2.56017766	-2.59170495E-03	-300	2.55656388	-.0204258701
-450	2.59295499	-2.15388834E-03	2.59158668	-7.85781071E-04	-400	2.59064732	-.0150884436
-550	2.61692025	-1.82185415E-03	2.61586607	-7.67674297E-04	-500	2.61537597	-.011527461
-650	2.63492337	-1.56050827E-03	2.63401564	-6.52777965E-04	-600	2.63306014	-9.00404062E-03
-750	2.64869462	-1.35681778E-03	2.648009	-6.71193935E-04	-700	2.6479495	-7.14392215E-03
-850	2.65936368	-1.10021667E-03	2.65881963	-6.36216253E-04	-800	2.65883533	-5.73814381E-03
-950	2.66770625	-1.04779471E-03	2.66727947	-6.21020794E-04	-900	2.66733014	-4.65099793E-03
					-1000	2.67400632	-3.82492133E-03

TABLA 3.8 Perfil M2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = -100 m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO		
	y	EA	y	EA	x	y	EA
-50	2.29947603	-5.0609E-03	2.29947603	-5.0609E-03	0	2.06	-.04
-250	2.52265827	-.0125286365	2.52265827	-.0125286365	-200	2.57715656	-.0992832556
-450	2.59750783	-6.70673046E-03	2.59750703	-6.70673046E-03	-400	2.62731225	-.0517533701
-650	2.63747659	-4.1157268E-03	2.63747659	-4.1157268E-03	-600	2.6553347	-.0304786013
-650	2.66086923	-2.70576589E-03	2.65566936	2.51410156E-03	-800	2.67204087	-.0169511748
					-1000	2.68235111	-.0121697065

TABLA 3.9 Perfil M2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = -200 m

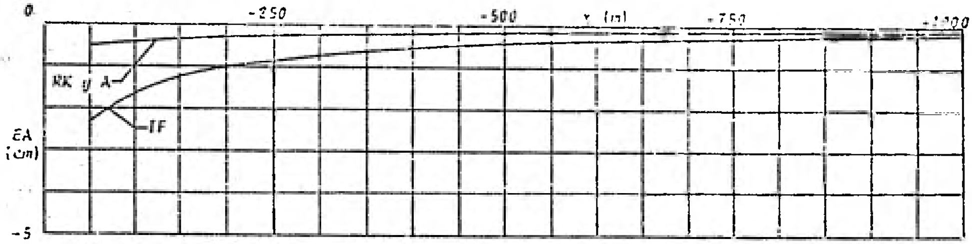


Fig 3.5 Errores absolutos usando Δx = - 50 m. Perfil M2

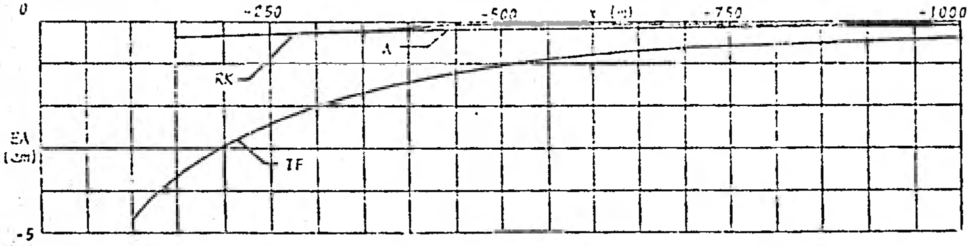


Fig 3.6 Errores absolutos usando Δx = -100 m. Perfil M2

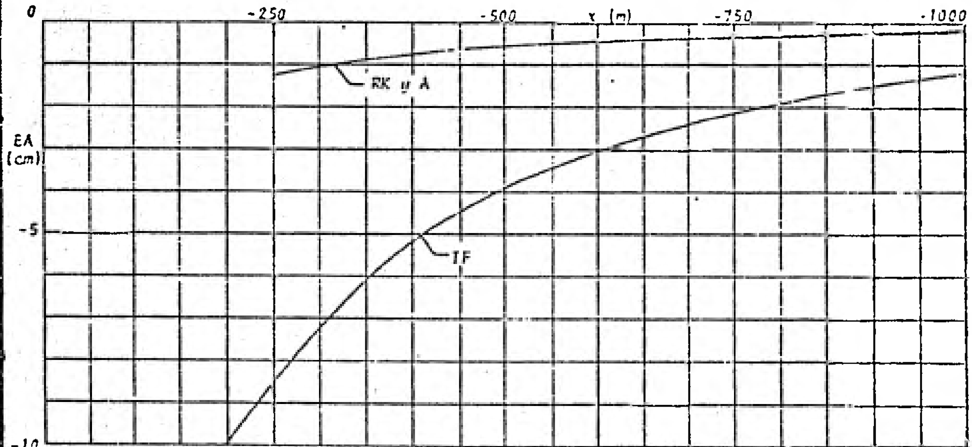


Fig 3.7 Errores absolutos usando Δx = - 200 m. Perfil M2

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0.9 \ m$$

La longitud del perfil calculada con el método de integración directa entre el tirante inicial y el crítico es

$$L = 242.945 \ m$$

Usando ahora el método de integración directa para calcular el perfil con un valor de Δx de $10 \ m$ se obtienen los resultados que se observan en la tabla 3.10.

En las tablas 3.11, 3.12 y 3.13 se encuentra el perfil M3 calculado con los métodos de Runge-Kutta, Milne e incremento finito, para $\Delta x = 10, 20$ y $30 \ m$, respectivamente y en las figuras 3.8, 3.9 y 3.10 se han graficado los correspondientes errores absolutos producidos por los métodos usados. En dichas figuras, Rk, M e IF, indican los métodos de Runge-Kutta, Milne e incremento finito, respectivamente.

Como en los casos anteriores los errores absolutos de las tablas 3.11, 3.12 y 3.13 fueron calculados como la diferencia de los valores dados por el método de integración directa, menos los datos por el método empleado.

Observando las figuras 3.8, 3.9 y 3.10, puede verse que, en general, los errores producidos por los métodos numéricos son siempre menores que los producidos por el método del incremento finito. Sin embargo, en las cercanías del tirante crítico, los errores de los tres métodos empleados, sufren fuertes incrementos que pueden ser positivos o negativos.

3.6 COMENTARIOS ACERCA DEL CALCULO DE PERFILES TIPO M

En los casos de perfiles de flujo tipo M, prácticamente no existe ninguna dificultad para aplicar las métodos numéricos propuestos ya que estos son fácilmente programables en una pequeña calculadora y bastará con determinar las condiciones iniciales, según el caso, para obtener el perfil buscado sin necesidad de hacer tanteos.

En el caso de perfiles de flujo tipo M2, se presentan algunos problemas al tratar de integrar numéricamente la ecuación dinámica. Dichos problemas provienen del hecho de tomar como condición inicial una sección crítica en la que la pendiente teórica de la superficie libre del agua dy/dx es infinita, esto es, vertical, lo cual produce grandes errores.

Si se analiza la ecuación dinámica en las cercanías del extremo de aguas abajo de un perfil M2 (sección crítica), puede verse que la pendiente de la superficie del agua adopta valores muy grandes mismos que corresponden a un caso de flujo rápidamente variado para el cual, como se mencionó en la sección 2.4, no es aplicable la teoría del flujo gradualmente variado.

X	Y
0	.9
10	.93490033
20	.96972162
30	1.00450731
40	1.03930135
50	1.07414861
60	1.10909599
70	1.14419321
80	1.17949384
90	1.21505667
100	1.25094723
110	1.28723992
120	1.32402075
130	1.36139099
140	1.39947249
150	1.4384151
160	1.47840802
170	1.51969736
180	1.56261516
190	1.60762031
200	1.65544591
210	1.70720841
220	1.76504194
230	1.83363168
240	1.9345488

TABLA 3.10 Perfil M3 calculado con el método de integración directa

x	RUNGE-KUTTA		MILNE		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	.9	0	.9	0	.9	0
10	.936642589	-1.7422582E-03	.936642589	-1.7422582E-03	.936718012	-1.81768159E-03
20	.973175216	-3.4535958E-03	.973175216	-3.4535958E-03	.973319463	-3.59784346E-03
30	1.00964499	-5.13767824E-03	1.00964499	-5.13767824E-03	1.00985263	-5.34532173E-03
40	1.04609966	-6.79831067E-03	1.04609966	-6.79831114E-03	1.04636626	-7.06490595E-03
50	1.08258349	-8.439878E-03	1.08258849	-8.43987893E-03	1.08291044	-8.76182783E-03
60	1.11916316	-.0100671719	1.11916316	-.0100671737	1.11953761	-.0104116241
70	1.15587888	-.0116856699	1.15587888	-.0116856731	1.15630366	-.0121104456
80	1.19279563	-.0133017865	1.19279563	-.0133017916	1.19326917	-.0137753347
90	1.22997975	-.0149230771	1.22997976	-.014923085	1.23050113	-.0154444552
100	1.26750596	-.0165587305	1.26750597	-.0165587431	1.26807484	-.0171276107
110	1.30545999	-.0182200698	1.30546001	-.0182200884	1.30607669	-.0188367725
120	1.34394213	-.019921375	1.34394215	-.0199214038	1.34460769	-.0205869405
130	1.38307217	-.0216811812	1.38307222	-.0216812254	1.38370840	-.0223974893
140	1.42299655	-.0235240636	1.42299662	-.0235241344	1.42376651	-.0242910225
150	1.46389888	-.0254837773	1.46389899	-.0254838932	1.46472672	-.0263116178
160	1.50601632	-.0276083029	1.50601653	-.0276085045	1.50690807	-.0285000498
170	1.54966635	-.0299689886	1.54966672	-.0299693616	1.55063059	-.0309332283
180	1.59529304	-.0326778842	1.5952938	-.0326786281	1.59634225	-.0337270871
190	1.64355434	-.0359240277	1.64355605	-.0359257418	1.64470729	-.0370769775
200	1.69550517	-.0400592592	1.6955098	-.0400638874	1.69679186	-.0413159484
210	1.75304949	-.0458410806	1.7530658	-.0458573871	1.75452224	-.0473138331
220	1.82039606	-.0553541165	1.82018860	-.0551467379	1.82215777	-.0571158277
230	1.91256352	-.0786818354	1.91491596	-.0810342785	1.91472944	-.0808477574
240	1.86794145	.06660735	1.96768926	-.0331404591		

TABLA 3.11 Perfil M3 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 10 m

x	RUNGE-KUTTA		MILNE		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	.9	0	.9	0	.9	0
20	.973175218	-3.45359813E-03	.973175218	-3.45359813E-03	.973758791	-4.03717114E-03
40	1.04609967	-6.79831579E-03	1.04609967	-6.79831579E-03	1.04717693	-7.8755830E-03
60	1.11916317	-.0100671803	1.11916317	-.0100671803	1.12067493	-.0115709261
80	1.19279564	-.0133018009	1.19279577	-.0133019285	1.1947062	-.0152122626
100	1.26750599	-.0165587571	1.26750626	-.0165590327	1.26980007	-.0169528283
120	1.34394218	-.0199214267	1.3439429	-.0199221503	1.3466253	-.0226045463
140	1.42299666	-.0235241745	1.42299836	-.0235258713	1.42610016	-.0266276668
160	1.50601659	-.0276085739	1.50602125	-.0276132287	1.50951113	-.0312031112
180	1.59529387	-.0326787103	1.59530928	-.0326941241	1.59952451	-.0369093516
200	1.69550891	-.0400630017	1.69558161	-.0401386959	1.70070147	-.0452555614
220	1.82043835	-.0553964139	1.82133708	-.0562951346	1.82757546	-.062533516
240	1.97278704	-.0382382413	2.03244005	-.0978912478		

TABLA 3.12 Pefil M3 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 20 m

x	RUNGE-KUTTA		MILNE		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	.9	0	.9	0	.9	0
30	1.00964501	-5.13769686E-03	1.00964501	-5.13769686E-03	1.01156787	-7.06055853E-03
60	1.1191632	-.0100672147	1.1191632	-.0100672147	1.12261735	-.0135213626
90	1.22997985	-.0149231749	1.22997985	-.0149231749	1.23477735	-.0197206768
120	1.34394238	-.0199216316	1.34394644	-.0199256847	1.35005775	-.0260369973
150	1.46389971	-.0254846062	1.46391415	-.0254990482	1.47150264	-.0330875348
180	1.5952969	-.0326817357	1.59537319	-.0327580287	1.60194474	-.0423295805
210	1.75309078	-.0458823652	1.75390688	-.0467004664	1.76671655	-.059510143
240	1.74676077	.187788029	1.97000458	-.0354557745		

TABLA 3.13 Perfil M3 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 30 m

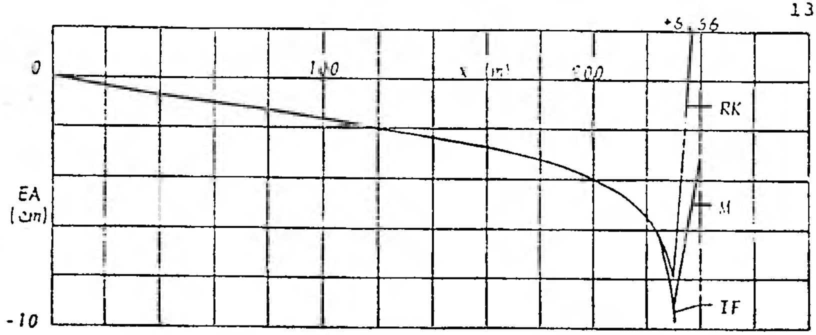


Fig 3.8 Errores absolutos usando Δx = 10 m. Perfil M3

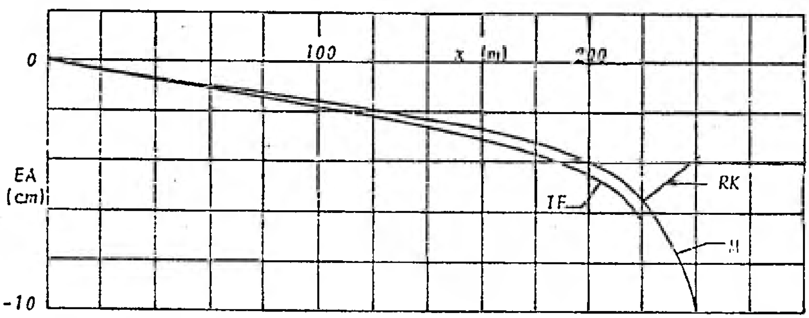


Fig 3.9 Errores absolutos usando Δx = 20 m. Perfil M3

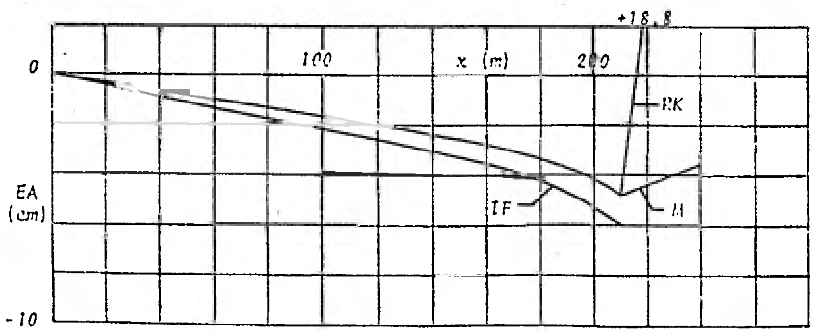


Fig 3.10 Errores absolutos usando Δx = 30 m. Perfil M3

Para resolver este problema en forma práctica se obtuvo una gráfica que relaciona la longitud X del tramo de flujo rápidamente variado con la relación de pendientes S_0/S_c. Dicha longitud es medida desde la sección crítica hasta una sección en la que la variación de la pendiente de la superficie del agua es menor o igual a una milésima.

Usando el método de Runge-Kutta con un incremento Δx de $5\ m$ y tomando como condición inicial un tirante igual a $1.02\ y_c$ se integraron cincuenta perfiles tipo M2 cubriendo un amplio rango de gastos, pendientes, rugosidades y geometrías con el fin de determinar el comportamiento de la longitud X mencionada con respecto a la relación de pendientes S_0/S_c. Una vez obtenidos ciencuenta puntos $(S_0/S_c, X)$, se procedió a ajustarlos con la curva mostrada en la figura 3.11. En esta figura puede verse que en el caso extremo, la longitud X es de aproximadamente $63\ m$. Sin embargo, se ha verificado que el tomar un valor de X de $50\ m$ en todos los casos, conduce a resultados satisfactorios como puede verse en las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 en las que el error máximo en los métodos numéricos es del orden de un centímetro.

Nótese que, aunque se usó la teoría del flujo gradualmente variado, el hecho de haber tomado incrementos pequeños y de haber iniciado la integración con un tirante 2% mayor que el crítico, se obtuvo una presición bastante buena.

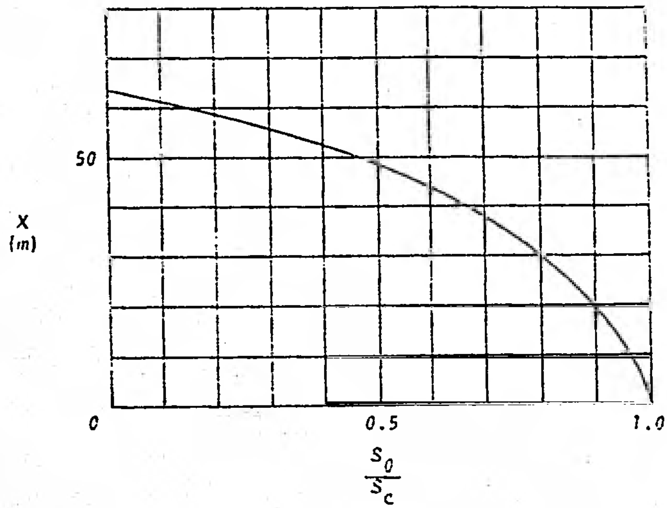


Fig 3.11 Variación de la longitud X del tramo de flujo rápidamente variado con la relación S_0/S_c.

En resumen, para calcular un perfil M2 con algunos de los métodos recomendados, bastará integrar un tramo de *50 m* con un intervalo de *5 m* tomando como condición inicial un tirante de *1.02* y_c y posteriormente, tomar como condición inicial el tirante obtenido para tal distancia y reiniciar la integración.

Por otra parte, cabe mencionar que en los métodos de Milne y Adams se uso la extrapolación al límite (sección 1.3) dada por las ecuaciones 1.26b y 1.27b respectivamente, ya que con ello se obtuvo una mejor aproximación.

CAPITULO 4

APLICACIONES A PERFILES TIPO S

4.1 INTRODUCCION

En el presente capítulo son tratados los perfiles de flujo tipo S los cuales se presentan en canales donde

$$S_0 > S_c$$

siendo S_0 la pendiente de la plantilla del canal y S_c la pendiente crítica para un gasto y geometría de la sección transversal dados.

Con el fin de disminuir el volumen de cálculos, se ha seleccionado a manera de ejemplo un canal con pendiente S_0 constante que contenga los tres tipos de perfil S, es decir, S1, S2 y S3. Para dichos perfiles, el tirante normal y_n, el tirante crítico y_c y la pendiente crítica, serán los mismos.

4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Calcular los perfiles de flujo S1, S2 y S3 que se presentan en el canal de la figura 4.1 el cual conduce un gasto de $60\ m^3/seg$ con una pendiente de plantilla de 0.008, un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.012, un ancho de plantilla de $7\ m$ y un talud de 2. En este canal, la carga H antes de la compuerta es de $4.92\ m$ y el tirante contracto y_{con} después de la misma es de $0.58\ m$. El tirante conjugado mayor del salto es de $2.47\ m$.

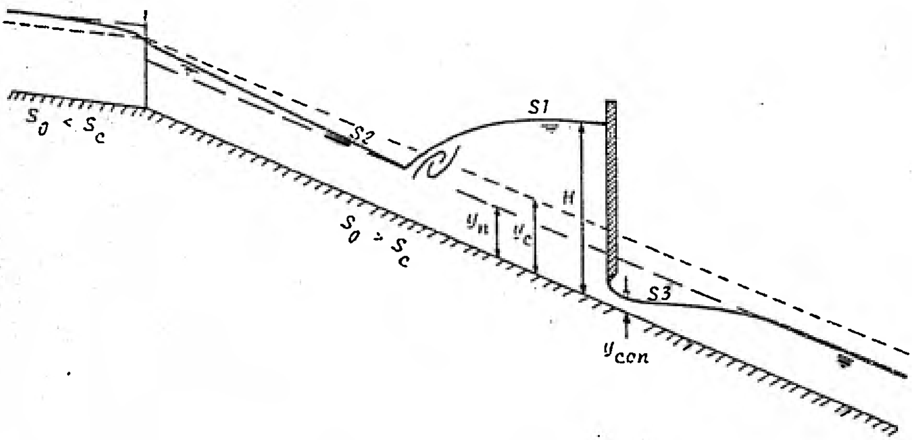


Fig 4.1 Figura aclaratoria del ejemplo de perfiles tipo S

En esta sección se efectuará el cálculo de la pendiente crítica y de los tirantes normal y crítico en virtud de que estos serán constantes para los tres perfiles.

Cálculo del tirante normal. Para el flujo uniforme se debe cumplir que

$$\frac{Q_n}{S_0^{1/2}} = (by_n + ky_n^2)\left[\frac{by_n + ky_n^2}{b + 2y_n\sqrt{1+k^2}}\right]^{2/3}$$

Sustituyendo los datos del problema se tiene la ecuación

$$(7y_n + 2y_n^2)\left[\frac{7y_n + 2y_n^2}{7 + 2\sqrt{5}\ y_n}\right]^{2/3} = \frac{(60)(0.012)}{(0.008)^{1/2}} = 8.050$$

que resuelta por tanteos dá

$$y_n = 1.029\ m$$

Cálculo del tirante crítico. En una sección crítica se debe cumplir que

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(by_c + ky_c^2)^3}{b + 2ky_c}$$

Sustituyendo los datos del problema se obtiene la ecuación

$$\frac{(7y_c + 2y_c^2)^3}{7 + 4y_c} = \frac{(60)^2}{9.81} = 366.972$$

que resuelta por tanteos dá

$$y_c = 1.658 \text{ m}$$

Cálculo de la pendiente crítica. La pendiente crítica está dada por la expresión

$$S_c = \left[\frac{Qn}{A_c R_c^{2/3}}\right]^2$$

siendo

$$A_c = 7(1.658)+2(1.658)^2 = 17.104 \text{ m}^2$$

$$P_c = 7+2\sqrt{5}\,(1.658) = 14.415 \text{ m}$$

$$R_c = A_c/P_c = 17.104/14.415 = 1.187 \text{ m}$$

por lo tanto

$$S_c = \left[\frac{60(0.012)}{17.104(1.187)^{2/3}}\right]^2$$

$$S_c = 0.0014$$

con lo cual se puede comprobar que $S_0 > S_c$.

4.3 CALCULO DEL PERFIL S1

En las tablas 2.2 y 2.3 se puede ver que los métodos de integración numérica recomendados para el cálculo de perfiles S1 son el de Runge-Kutta y el de Milne. Por lo tanto, estos métodos y el del incremento finito serán usados en esta sección.

Dado que este tipo de perfil se calcula hacia aguas arriba por tratarse de un flujo en régimen subcrítico, la condición inicial será

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 4.92 \text{ m}$$

La longitud del perfil calculada con el método de integración directa entre la sección inicial y aquella en la que se presenta el conjugado mayor del salto hidráulico es

$$L = -283.317 \text{ m}$$

Usando el mismo método para calcular el perfil con un Δx de -10 m se obtienen los resultados que se presentan en la tabla 4.1.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo anterior, se integrará la ecuación dinámica usando valores de Δx de -10, -20 y -40 m para analizar el comportamiento de los errores absolutos al aumentar la separación entre secciones.

Los resultados obtenidos con los métodos de Runge-Kutta, Milne e incremento finito para una separación entre secciones de $10 m$ y los errores absolutos correspondientes a cada método se pueden ver en la tabla 4.2. Estos errores se han graficado en la figura 4.2.

Para el caso en el que $\Delta x = -20\ m$, los resultados a que se llegó se han resumido en la tabla 4.3 junto con los errores respectivos, mismos que se han graficado en la figura 4.3.

Asimismo, usando un Δx de $-40\ m$ en los métodos indicados se obtuvieron los perfiles y errores absolutos respectivos que se encuentran resumidos en la tabla 4.4. Los errores absolutos calculados como se indicó en el capítulo anterior, se encuentran dibujados en la figura 4.4.

Si se observan las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 puede observarse que los errores producidos por los tres métodos empleados son prácticamente iguales y que en el caso en que $\Delta x = -40\ m$, existe una muy pequeña diferencia entre los mismos. Asimismo, se puede ver que el método del incremento finito produce errores menores que los del método de Runge-Kutta, los que a su vez son menores que los del método de Milne. Es también importante anotar que los errores absolutos de los métodos usados permanecen prácticamente constantes al aumentar Δx.

x	y
0	4.92
-10	4.83920946
-20	4.75835322
-30	4.6774253
-40	4.59641902
-50	4.51532698
-60	4.43414103
-70	4.35285205
-80	4.27144984
-90	4.18992313
-100	4.10825923
-110	4.02644393
-120	3.94446112
-130	3.86229284
-140	3.77991965
-150	3.69731524
-160	3.61445632
-170	3.5313118
-180	3.44784677
-190	3.36402085
-200	3.279788
-210	3.19509378
-220	3.10987403
-230	3.0281485
-240	2.94221546
-250	2.85559013
-260	2.76816514
-270	2.67981363
-280	2.59037827

TABLA 4.1 Perfil S1 calculado con el método de integración directa

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	MILNE y	MILNE EA	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
0	4.92	0	4.92	0	4.92	0
-10	4.83874667	4.62792814E-04	4.83874667	4.62792814E-04	4.83874676	4.62695956E-04
-20	4.75740525	9.47967172E-04	4.75740525	9.47967172E-04	4.75740546	9.47762281E-04
-30	4.67596789	1.45740995E-03	4.67596789	1.45740995E-03	4.67596822	1.45708211E-03
-40	4.59442583	1.9931905E-03	4.59442583	1.9931905E-03	4.5944263	1.99272484E-03
-50	4.51276931	2.55766697E-03	4.51276931	2.55766697E-03	4.51276993	2.55704857E-03
-60	4.43098745	3.15358117E-03	4.43098745	3.15358117E-03	4.43098824	3.15279141E-03
-70	4.34906803	3.78402509E-03	4.34906803	3.78402509E-03	4.34906981	3.78303975E-03
-80	4.26699733	4.45250794E-03	4.26699733	4.45250794E-03	4.26699854	4.45129722E-03
-90	4.18475991	5.16322069E-03	4.18475991	5.16322069E-03	4.18476137	5.16176224E-03
-100	4.10233828	5.92095033E-03	4.10233828	5.92095033E-03	4.10234002	5.91920875E-03
-110	4.0197126	6.73132762E-03	4.0197126	6.73132762E-03	4.01971467	6.72926568E-03
-120	3.93686028	7.60084018E-03	3.93686028	7.60034111E-03	3.93686272	7.5984057E-03
-130	3.85375545	8.53739306E-03	3.85375545	8.53739306E-03	3.85375831	8.5345339E-03
-140	3.77036838	9.55027249E-03	3.77036838	9.55027435E-03	3.77037172	9.54692997E-03
-150	3.68666472	.0106505211	3.68666472	.010650523	3.68666863	.0106466096
-160	3.60260456	.0118517568	3.60260456	.0118517606	3.60260914	.0118471775
-170	3.51814125	.0131705552	3.51814124	.0131705599	3.51814661	.0131651917
-180	3.43321983	.0146269379	3.43321982	.0146269463	3.43322612	.0146206524
-190	3.34777514	.0162457135	3.34777513	.0162457246	3.34778252	.0162383299
-200	3.26172914	.0180568579	3.26172913	.0180558746	3.26173784	.0180501621
-210	3.17498752	.0201062579	3.1749875	.0201062821	3.17499782	.020095964
-220	3.08743491	.022439125	3.08743487	.0224391613	3.08744718	.0224268503
-230	2.9989283	.0292202067	2.99892824	.0292202616	2.99894299	.0292055085
-240	2.90928763	.0329278335	2.90928754	.032927921	2.90930544	.0329100192
-250	2.81828188	.0373082543	2.81828174	.0373083949	2.81830366	.0372864734
-260	2.7256078	.0425573392	2.72560756	.0425575795	2.72563475	.0425303853
-270	2.63085601	.0489576208	2.63085558	.0489560501	2.63086995	.0489236815
-280	2.5334537	.0569245676	2.53345287	.0569254039	2.53349743	.0568808429

TABLA 4.2 Perfil S1 calculado con los métodos recomendados usando $\Delta x = -10$ m

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	MILNE y	MILNE EA	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
0	4.92	0	4.92	0	4.92	0
-20	4.75740525	9.47969034E-04	4.75740525	9.47969034E-04	4.7574061	9.47127119E-04
-40	4.59442583	1.99319422E-03	4.59442583	1.99319422E-03	4.59442771	1.99131109E-03
-60	4.43098744	3.15358676E-03	4.43098744	3.15358676E-03	4.43099063	3.15040164E-03
-80	4.26699733	4.45251539E-03	4.26699731	4.45253216E-03	4.2670022	4.4476483E-03
-100	4.10233827	5.92095964E-03	4.10233824	5.92098571E-03	4.1023453	5.91393374E-03
-120	3.93686027	7.60085322E-03	3.93686021	7.60091003E-03	3.9368701	7.5910259E-03
-140	3.77036836	9.55029264E-03	3.77036827	9.55038145E-03	3.77038188	9.53677203E-03
-160	3.60260453	.0118517066	3.60260437	.0118519515	3.60262303	.0118332896
-180	3.43321979	.0146269854	3.4332195	.0146272695	3.43324512	.0146016451
-200	3.26172907	.0180589343	3.26172853	.0180594726	3.26176413	.0180238755
-220	3.08743478	.0224392554	3.08743371	.0224403152	3.08748412	.0223899083
-240	2.90928739	.0329280747	2.90928506	.0329301984	2.90935879	.0328566711
-260	2.7256073	.042557843	2.72560148	.0425636582	2.72571521	.0424499335
-280	2.53345242	.0569258472	2.53343446	.0569438115	2.53362759	.0567506757

TABLA 4.3 Perfil S1 calculado con los métodos recomendados usando $\Delta x = -20$ m

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	MILNE y	MILNE EA	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
0	4.92	0	4.92	0	4.92	0
-40	4.59442579	1.99322775E-03	4.59442579	1.99322775E-03	4.59443341	1.98561326E-03
-80	4.26699723	4.45261039E-03	4.26699723	4.45261039E-03	4.26701668	4.43295762E-03
-120	3.93686005	7.60107022E-03	3.93686005	7.60107022E-03	3.93689955	7.56156817E-03
-160	3.60260405	.0118522728	3.60260043	.0118556966	3.60267832	.0117780026
-200	3.26172768	.0180601235	3.26171708	.018070925	3.26186857	.0179194333
-240	2.9092838	.0329216547	2.90923856	.0329769021	2.90957019	.0326452693
-280	2.5334354	.0569428746	2.53316698	.0572112935	2.53413852	.0562397493

TABLA 4.4 Perfil S1 calculado con los métodos recomendados usando $\Delta x = -40$ m

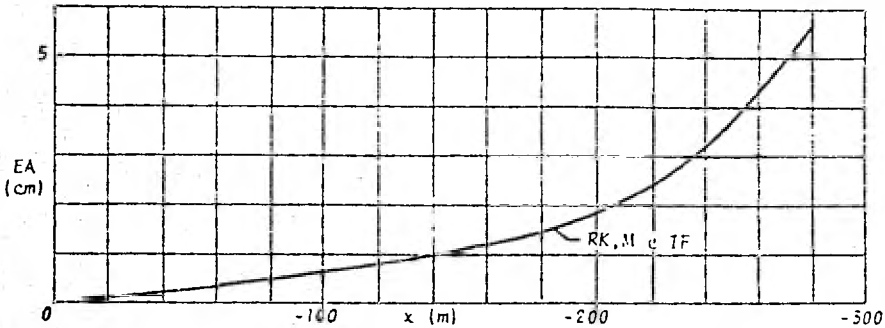


Fig 4.2 Errores absolutos usando $\Delta x = -10$ m. Perfil S1

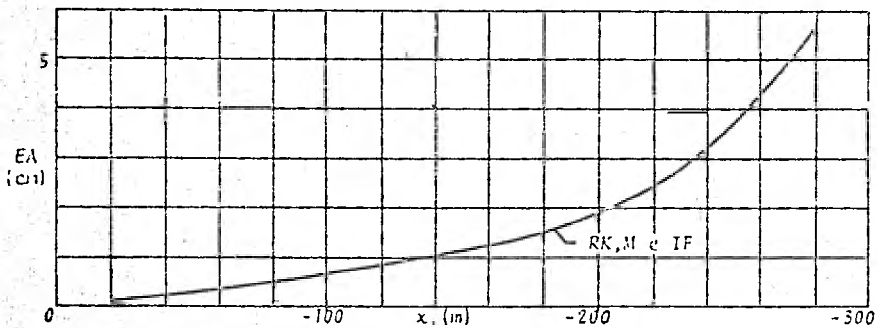


Fig 4.3 Errores absolutos usando $\Delta x = -20$ m. Perfil S1

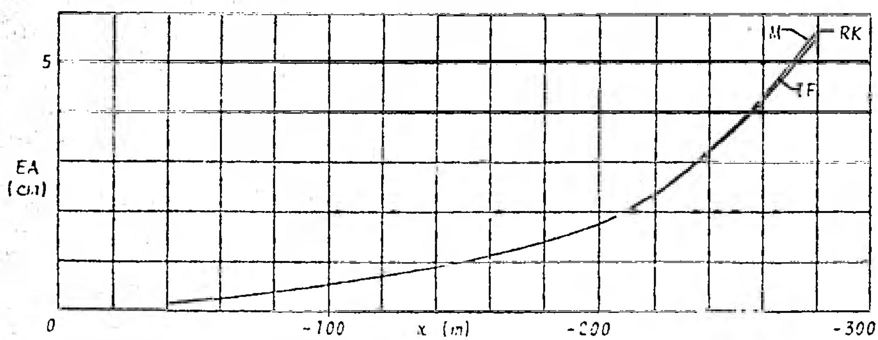


Fig 4.4 Errores absolutos usando $\Delta x = -40$ m. Perfil S1

4.4 CALCULO DEL PERFIL S2

Haciendo uso de las tablas 2.2 y 2.3 se tiene que los métodos de integración numérica recomendados para el cálculo de este tipo de perfil son el de Runge-Kutta y el de Adams. Estos métodos y el del incremento finito serán los que se usen en esta sección.

Ahora, tomando como origen el extremo de aguas arriba del canal de pendiente supercrítica (figura 4.1), y que es una sección crítica, se tiene que la condición inicial en este caso es

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 1.658 \text{ m}$$

La longitud del perfil se calcula con el método de integración directa entre la sección inicial y otra en la que el tirante es de $1.01\ y_n$, esto es, $y = 1.039$ m. Tal longitud resulta ser

$$L = 450.832 \text{ m}$$

Usando el mismo método se calcula el perfil para un Δx de 20 m que se considera es un valor suficientemente pequeño dada la longitud total del perfil. Los resultados de este cálculo se muestran en la tabla 4.5.

Cabe mencionar aquí que los perfiles tipo S2 presentan problemas similares a los de los perfiles M2, descritos en el capítulo anterior (secciones 3.4 y 3.6), por este motivo, se efectuó un análisis, similar al descrito en la sección 3.6. Este análisis se comenta en forma breve en la sección 4.6.

Siguiendo las indicaciones que se dan en la sección 4.6 para este tipo de perfiles, se integró un tramo de $50\ m$ con incrementos Δx de $2\ m$ usando el método de Runge-Kutta y tomando como condición inicial

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0.98 y_c = 0.98(1.658) = 1.625\ m$$

obteniéndose el perfil mostrado en la tabla 4.6.

Tomando ahora como condición inicial

$$x_0 = 40\ m \qquad ; \qquad y_0 = 1.28588151\ m$$

pueden aplicarse los métodos de integración numérica recomendados para este caso.

Usando $\Delta x = 20\ m$ se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 4.7. Los correspondientes errores absolutos se encuentran dibujados en la figura 4.5.

Con el fin de analizar el comportamiento que presentan los errores al aumentar Δx, se usarán valores de 40 y $60\ m$.

Los resultados obtenidos con $\Delta x = 40\ m$ se encuentran en la tabla 4.8 y en la figura 4.6 se han graficado los errores correspondientes.

Los resultados obtenidos del cálculo del perfil con $\Delta x = 60\ m$ se encuentran resumidos en la tabla 4.9 y los errores están graficados en la figura 4.7.

Si se observan las figuras 4.5, 4.6 y 4.7, se podrá observar que los errores introducidos por los métodos numéricos usados permanecen sensiblemente constantes al aumentar Δx mientras que los introducidos por el método del incremento finito crecen ligeramente. Podrá también verse que para valores de Δx del orden de $20\ m$ o menores, los errores producidos por los tres métodos son prácticamente iguales y que para valores mayores de $20\ m$ los errores producidos por el método de Adams son menores que los producidos por el método de Runge-Kutta y que estos a su vez son menores que los introducidos por el método del incremento finito.

4.5 CALCULO DEL PERFIL S3

Con base en las tablas 2.2 y 2.3 se puede determinar que los métodos numéricos más adecuados para integrar este tipo de perfil son, el de Runge-Kutta y el de Adams, por lo tanto, estos métodos y el del incremento finito serán usados para resolver este caso.

x	y
0	1.658
20	1.37662982
40	1.29011007
60	1.23720974
80	1.19987947
100	1.1718914
120	1.14892833
140	1.1307447
160	1.1157301
180	1.10332326
200	1.09283322
220	1.08397622
240	1.07644472
260	1.07005349
280	1.0645441
300	1.05966202
320	1.055606
340	1.05200565
360	1.04897348
380	1.04627041
400	1.04399906
420	1.04193071
440	1.04016596

TABLA 4.5 Perfil S2 calculado con el método de integración directa

x	y
0	1.625
2	1.54022806
4	1.50489648
6	1.47813144
8	1.45612225
10	1.43726401
12	1.42066433
14	1.40579535
16	1.39230273
18	1.37993725
20	1.36851578
22	1.35789913
24	1.34797664
26	1.33866757
28	1.32989539
30	1.32160383
32	1.31374416
34	1.30627508
36	1.29916127
38	1.29237226
40	1.28588151
42	1.2796658
44	1.27370462
46	1.26797978
48	1.26247507
50	1.25717595

TABLA 4.6 Cálculo del tramo del flujo rápidamente variado del perfil S2, $\Delta x = 2$ m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO		
	y	EA	y	EA	x	y	EA
					0	1.658	0
40	1.28568151	4.22655979E-03	1.28568151	4.22655979E-03	20	1.36789305	8.73676826E-03
60	1.23334502	3.86471627E-03	1.23334502	3.86471627E-03	40	1.28530783	4.80223913E-03
80	1.19570028	4.17918805E-03	1.19570028	4.17918805E-03	60	1.23285696	4.35277494E-03
100	1.16711405	4.77735046E-03	1.16711405	4.77735046E-03	80	1.19527897	4.60058441E-03
120	1.14464254	4.26579422E-03	1.14469535	4.23297796E-03	100	1.16674567	5.14572719E-03
140	1.12656754	4.17716475E-03	1.12662189	4.12281416E-03	120	1.14431729	4.61104232E-03
160	1.11179026	3.92984281E-03	1.11184143	3.88674808E-03	140	1.12627742	4.46728384E-03
180	1.09956231	3.76094736E-03	1.0996067	3.71656194E-03	160	1.11153862	4.19947645E-03
200	1.08934932	3.48329544E-03	1.08938822	3.44199992E-03	180	1.09932927	3.99396664E-03
220	1.08075879	3.21742392E-03	1.08079162	3.18460306E-03	200	1.08914027	3.69294919E-03
240	1.07346954	2.95518292E-03	1.07351768	2.92703975E-03	220	1.08056987	3.40624724E-03
260	1.06730981	2.74368282E-03	1.06733395	2.71953968E-03	240	1.0733191	3.12561681E-03
280	1.06203602	2.5080815E-03	1.06205676	2.48734094E-03	260	1.06715594	2.89754896E-03
300	1.05752098	2.14104401E-03	1.05753882	2.1231994E-03	280	1.06189765	2.64705819E-03
320	1.05364521	1.96079072E-03	1.05366059	1.94541458E-03	300	1.05739545	2.26657512E-03
340	1.05031075	1.69509929E-03	1.05032402	1.68183213E-03	320	1.05353182	2.07417598E-03
360	1.04743658	1.53690483E-03	1.04744804	1.52544305E-03	340	1.05020836	1.79749308E-03
380	1.04495517	1.31524121E-03	1.04496508	1.30532822E-03	360	1.04734414	1.62934093E-03
400	1.04260993	1.1891265E-03	1.04281651	1.10054682E-03	380	1.04487176	1.39865372E-03
420	1.04095316	9.7755529E-04	1.04096059	9.70119145E-04	400	1.0427347	1.26436166E-03
440	1.03934444	8.21515452E-04	1.03935089	8.1506744E-04	420	1.04088534	1.0453742E-03
					440	1.03928334	8.82615801E-04

TABLA 4.7 Perfil S2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 20 m

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	ADAMS y	ADAMS EA	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
					1. 658	0
40	1. 28588151	4. 22855979E-03	1. 28588151	4. 22855979E-03	1. 28080826	9. 30181425E-03
80	1. 19565895	4. 22052367E-03	1. 19565895	4. 22052367E-03	1. 19258816	7. 29130907E-03
120	1. 14462252	4. 30560927E-03	1. 14462252	4. 20560927E-03	1. 14246069	6. 46764413E-03
160	1. 11178041	3. 94969418E-03	1. 11178041	3. 94969418E-03	1. 11016797	5. 56212803E-03
200	1. 08934507	3. 48814717E-03	1. 08971909	3. 11412709E-03	1. 08810561	4. 72761225E-03
240	1. 07348729	2. 95742881E-03	1. 07380103	2. 64366579E-03	1. 07251759	3. 92713258E-03
280	1. 06203517	2. 5089276E-03	1. 06220547	2. 23862845E-03	1. 06126918	3. 27492459E-03
320	1. 05364512	1. 96088185E-03	1. 05384536	1. 76064391E-03	1. 0530366	2. 56939651E-03
360	1. 04743687	1. 53660635E-03	1. 04759063	1. 38284871E-03	1. 04695197	2. 02151434E-03
400	1. 04281042	1. 18864467E-03	1. 04292603	1. 07298E-03	1. 04242345	1. 57560827E-03
440	1. 039345	8. 20964109E-04	1. 03943283	7. 33127352E-04	1. 03903608	1. 12987729E-03

TABLA 4.8 Perfil S2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 40 m

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	ADAMS y	ADAMS EA	INCREMENTO FINITO x	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
					0	1. 658	0
40	1. 28588151	4. 22855979E-03	1. 28588151	4. 22855979E-03	60	1 2248076	0124021382
100	1. 1668699	5. 0215032E-03	1. 1668699	5 0215032E-03	120	1. 13980989	9. 11844242E-03
160	1. 11169189	4. 03820584E-03	1. 11169189	4. 02820584E-03	180	1 09641733	6. 90592779E-03
220	1. 08071556	3. 26066185E-03	1. 08071556	3. 26066185E-03	240	1 07132064	5. 11403411E-03
280	1. 06201663	2. 52747489E-03	1. 06301022	1. 53388502E-03	300	1 05600355	3. 6584721E-03
340	1. 05030247	1. 70337781E-03	1. 05098393	1. 02192117E-03	360	1. 04635962	2. 61386205E-03
400	1. 04260696	1 19209802E-03	1. 04378253	6. 1652856E-04	420	1 04018627	1 7443375E-03

TABLA 4.9 Perfil S2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 60 m

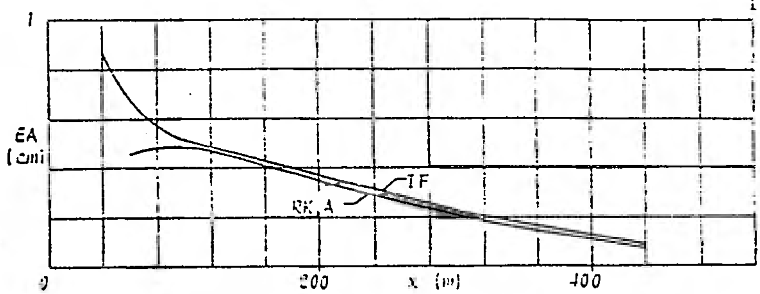


Fig 4.5 Errores absolutos usando Δx = 20 m. Perfil S2

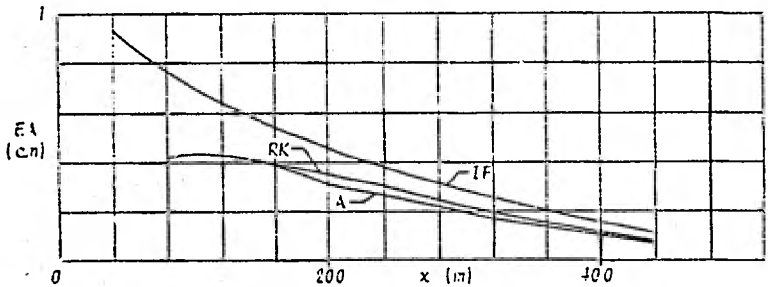


Fig 4.6 Errores absolutos usando Δx = 40 m. Perfil S2

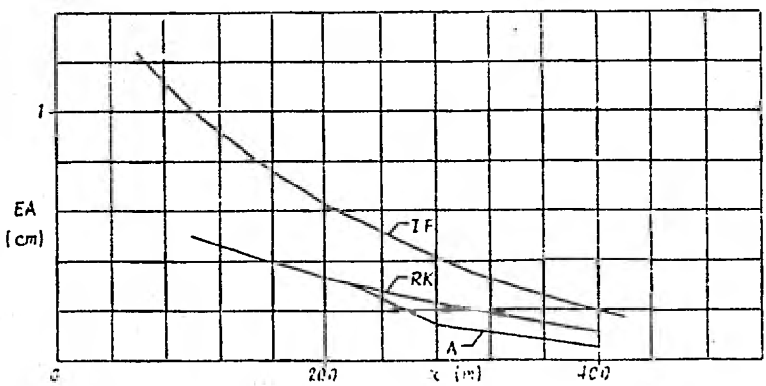


Fig 4.7 Errores absolutos usando Δx = 60 m. Perfil S2

Tomando como origen del perfil a la sección contracta aguas abajo de la compuerta (figura 4.1), se puede establecer la condición inicial

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0.38\ m$$

La longitud del perfil calculada con el método de integración directa entre la sección contracta y otra en la que se tenga un tirante de $0.99\ y_n$ es

$$L = 818.376\ m$$

Usando ahora el método de integración directa para calcular el perfil con un valor de Δx de $40\ m$ se obtienen los resultados que se observan en la tabla 4.10.

En las tablas 4.11, 4.12 y 4.13 se encuentra el perfil M3 calculado con los métodos de Runge-Kutta, Adams e incremento finito para $\Delta x = 40,\ 80\ y\ 120\ m$, respectivamente y en las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 se han graficado los correspondientes errores absolutos producidos por los métodos usados. En dichas figuras RK, A e IF, indican los métodos de Runge-Kutta, Adams e incremento finito respectivamente.

Como en los casos anteriores, los errores absolutos contenidos en las tablas 4.11, 4.12 y 4.13 fueron calculados como la diferencia de los valores dados por el método de integración directa menos los dados por el método empleado.

Observando las figuras 4.8, 4.9 y 4.10, puede verse que, en general, los errores producidos por los métodos numéricos usados permanecen constantes al aumentar Δx mientras que los producidos por el método del incremento finito crecen fuertemente. Puede también verse que, para valores de Δx del orden de $40\ m$ o menores, los errores introducidos por el método del incremento finito resultan ser menores que los producidos por los métodos numéricos y que para valores mayores sucede lo contrario.

4.6 COMENTARIOS ACERCA DEL CALCULO DE PERFILES TIPO S

Por lo que respecta a los casos de perfiles tipo S, prácticamente no se tiene ninguna dificultad al aplicar los métodos numéricos propuestos en virtud de que estos pueden ser fácilmente programados en una pequeña calculadora bastando únicamente proporcionarle los datos y la condición inicial, según el caso, para obtener el perfil buscado sin necesidad de hacer tanteos.

En el caso de los perfiles de flujo tipo S2 se presentan algunos problemas al tratar de integrar numéricamente la ecuación dinámica. Estos problemas provienen del hecho de tomar como condición inicial una sección crítica en la que la pendiente teórica de la superficie libre del agua dy/dx es infinita, esto es, vertical, lo cual produce grandes errores.

Si se analiza la ecuación dinámica en las cercanías del extremo de aguas arriba de un perfil S2 (sección crítica), puede

x	y
0	.38
40	.46182855
80	.5261417
120	.60391705
160	.65560499
200	.7214041
240	.77140639
280	.81568751
320	.8543675
360	83764912
400	.91593566
440	.93932842
480	.95860699
520	.97419827
560	.98664174
600	.99645782
640	1.00412423
680	1.01006254
720	1.01462917
760	1.01812467
800	1.02077487

Tabla 4.10 Perfil S3 calculado con el método de integración directa.

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	ADAMS y	ADAMS EA	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
0	.38	0	.38	0	.38	0
40	.457790521	4.038029E-03	.457790521	4.038029E-03	.461861745	-3.31948977E-05
80	.530035696	6.10600412E-03	.530035696	6.10600412E-03	.536167944	-2.62444373E-05
120	.597015756	6.90130377E-03	.597015756	6.90130377E-03	.604208748	-2.91687669E-04
160	.658714894	6.890098E-03	.658712731	6.89225923E-03	.666362777	-7.57787144E-04
200	.714991137	6.41296338E-03	.714988359	6.41574105E-03	.722682415	-1.27831451E-03
240	.765684554	5.72153577E-03	.765681941	5.72449411E-03	.773124158	-1.71776768E-03
280	.810695979	4.99154115E-03	.810693141	4.99437866E-03	.817671184	-1.98366123E-03
320	.850037096	4.33040164E-03	.850034439	4.3330607E-03	.856404501	-2.03700157E-03
360	.883862031	3.78708391E-03	.883859677	3.78944213E-03	.889537707	-1.88658784E-03
400	.912469066	3.3665942E-03	.912467137	3.36847291E-03	.917420875	-1.53521486E-03
440	.936231222	3.04719782E-03	.93628	3.04841925E-03	.940519473	-1.19105284E-03
480	.955810209	2.79678032E-03	.955809768	2.79722153E-03	.959375921	-7.68931117E-04
520	.971613269	2.56500082E-03	.971613614	2.58465577E-03	97456996	-3.71689908E-04
560	.984251899	2.38984078E-03	.984252911	2.3888289E-03	.986673408	-3.16682272E-05
600	.994258801	2.19901907E-03	.994260275	2.19754432E-03	996221464	2.363557E-04
640	1.00211583	2.00340456E-03	1.00211754	2.00669467E-03	1.00269291	4.31290362E-04
680	1.00824261	1.81993004E-03	1.00824135	1.81818474E-03	1.00950102	5.61523251E-04
720	1.01299377	1.63540198E-03	1.0129954	1.63376564E-03	1.01399215	6.37020916E-04
760	1.01666193	1.4627357E-03	1.01666328	1.46120215E-03	1.01745037	6.74255239E-04
800	1.01948413	1.29074371E-03	1.01948534	1.2895274E-03	1.02010416	6.7040557E-04

Tabla 4.11 Perfil S3 calculado con los métodos recomendados usando

$\Delta x = 40\ m$

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	.38	0	.38	0	.38	0
80	.530037238	6.10446185E-03	.530037238	6.10446185E-03	.56161032	-.02546862
160	.658713831	6.89115958E-03	.658713031	6.89115958E-03	.694890714	-.0292857238
240	.765678439	5.72795165E-03	.765678439	5.72795165E-03	.799158382	-.0279519916
320	.850022599	4.34490107E-03	.849976974	4.3905261E-03	.877964713	-.0235972132
400	.912445212	3.3904477E-03	.912392183	3.44347674E-03	.933636674	-.0178010138
480	.955778955	2.8280348E-03	.955741382	2.8656076E-03	.970730918	-.0121239281
560	.984217924	2.42381589E-03	.984224393	2.4173467E-03	.994204958	-7.56321801E-03
640	1.00208395	2.04027724E-03	1.00212398	2.00024946E-03	1.00850071	-4.37647989E-03
720	1.01296698	1.66218495E-03	1.01301565	1.61352055E-03	1.01698421	-2.35504284E-03
800	1.01946334	1.3115257E-03	1.01950181	1.27306115E-03	1.0219362	-1.16132619E-03

Tabla 4.12 Perfil S3 calculado con los métodos recomendados usando

Δx = 80 m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	.38	0	.38	0	.38	0
120	.597016129	6.90093124E-03	.597016129	6.90093124E-03	.722698623	-.118981560
240	.765646189	5.76020102E-03	.765646189	5.76020102E-03	.867183453	-.0957770625
360	.883748252	3.90086719E-03	.883748252	3.90086719E-03	.950800651	-.0631575314
480	.955618182	2.98850797E-03	.955484322	3.12266801E-03	.993623186	-.0350161961
600	.994047373	2.41014629E-03	.994196566	2.25925399E-03	1.01349366	-.0170418366
720	1.0128211	1.80806499E-03	1.01324602	1.38315326E-03	1.0222194	-7.59029528E-03

Tabla 4.13 Perfil S3 calculado con los métodos recomendados usando

Δx = 120 m

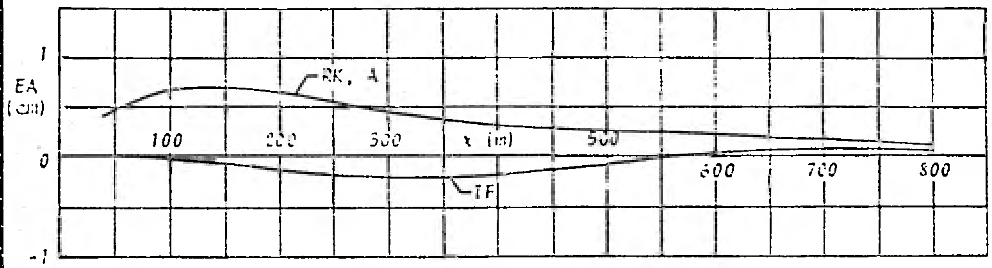


Fig 4.8 Errores absolutos usando $\Delta x = 40$ m. Perfil S3.

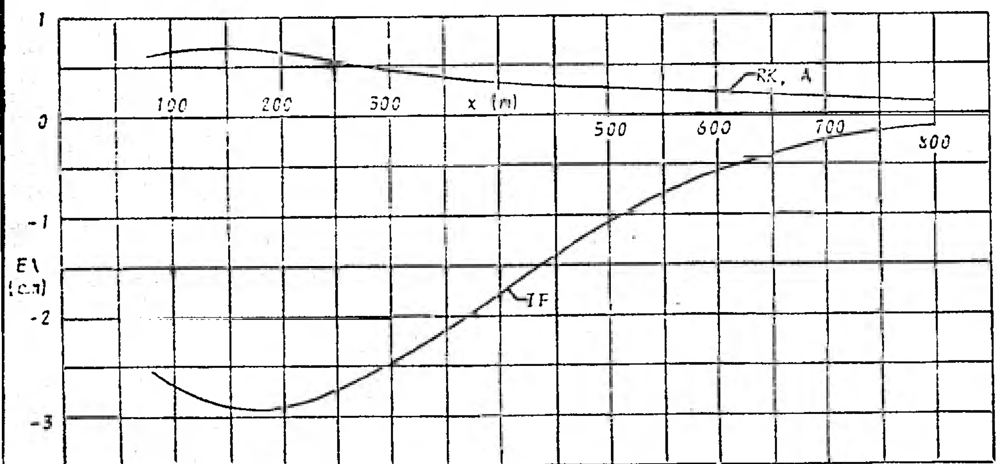


Fig 4.9 Errores absolutos usando $\Delta x = 80$ m. Perfil S3.

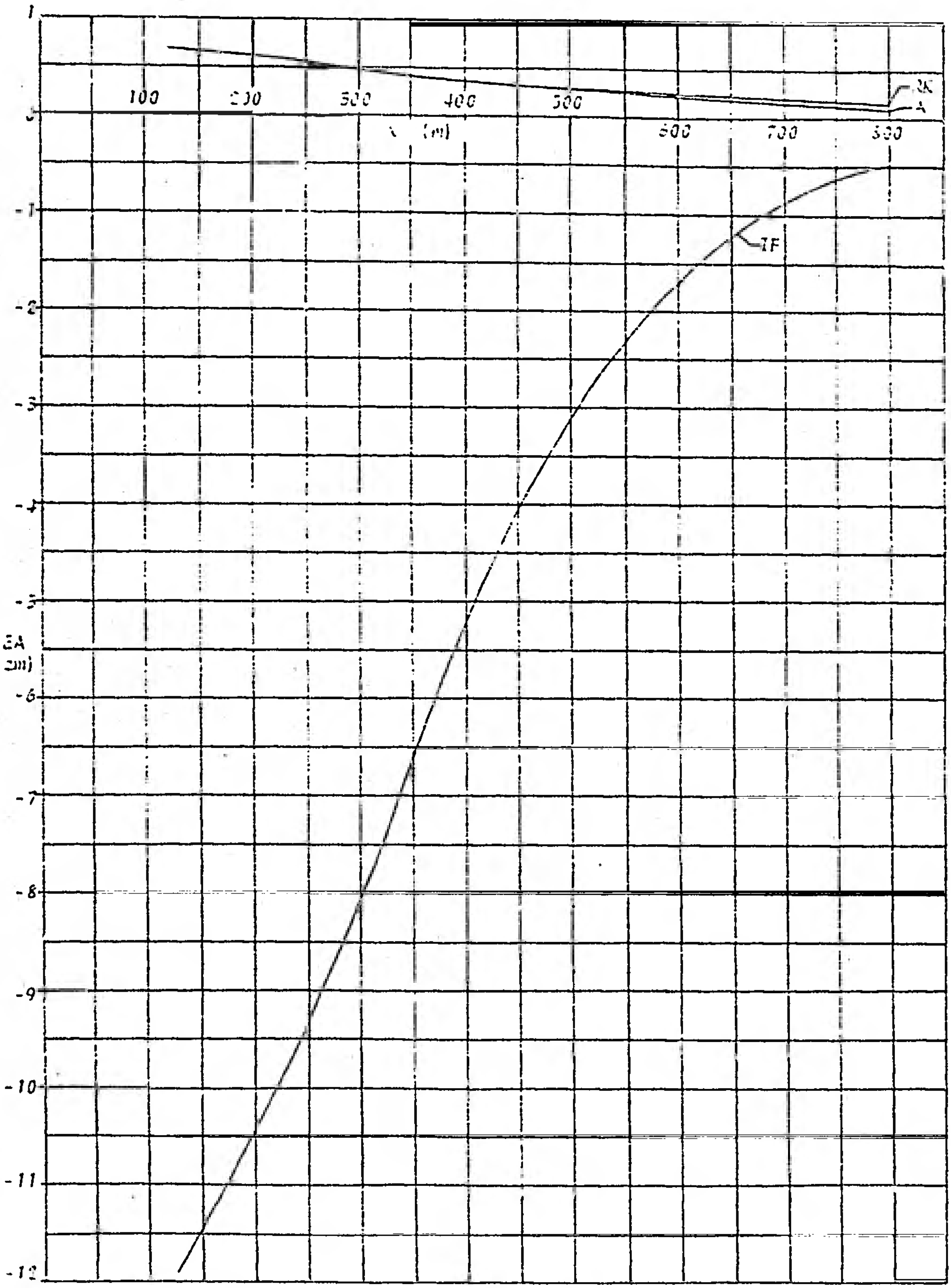


Fig 4.10 Errores absolutos usando Δx = 120 m. Perfil S3.

verse que la pendiente de la superficie del agua adopta valores muy grandes mismos que corresponden a un caso de flujo rápidamente variado para el cual, como se mencionó en la sección 2.4, no es aplicable la teoría del flujo gradualmente variado.

Para resolver este problema en forma práctica se procedió de manera análoga a la expuesta en la sección 3.6 para el caso de perfiles tipo M2, llegándose a conclusiones semejantes que en aquél caso. Por lo tanto, para calcular un perfil S2 con alguno de los métodos numéricos recomendados, bastará con integrar un tramo de $50\ m$ con un intervalo de $2\ m$ tomando como condición inicial un tirante de $0.98\ y_c$ y posteriormente, tomar como condición inicial el tirante obtenido para tal distancia y reiniciar la integración. Nótese que en el caso del perfil S2 del ejemplo, no se inició con el tirante obtenido para una distancia de $50\ m$ sino el obtenido para $40\ m$ lo cual no produjo errores considerables.

Por otra parte, cabe mencionar que en los métodos de Milne y Adams se usó la extrapolación al límite (sección 1.3) dada por las ecuaciones 1.26b y 1.27b respectivamente, ya que con ello se obtuvo una mejor aproximación.

CAPITULO 5

APLICACIONES A PERFILES TIPO H

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo se tratan los perfiles de flujo tipo H los cuales se presentan en canales donde

$$S_0 = 0$$

siendo S_0 la pendiente de la plantilla del canal.

Como se mencionó en su oportunidad, en canales con pendiente de plantilla nula, solamente pueden presentarse los perfiles de flujo tipo H2 y H3 ya que la zona 1 no existe en virtud de que el tirante normal en este tipo de canales es infinito.

Al igual que en los dos capítulos anteriores, se ha selecciona do un canal en el cual se presentan los dos posibles tipos de perfil H, es decir, H2 y H3, con lo cual se consigue que el ti te crítico sea el mismo para ambos casos.

5.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Calcular los perfiles de flujo H2 y H3 que se presentan en el canal de la figura 5.1 el cual conduce un gasto de $250\ m^3/seg$ con pendiente de plantilla nula, un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.016, un ancho de plantilla de $9\ m$ y un talud de 1. En este canal el tirante contracto y_{con} después de la compuerta es de $2.15\ m$ y la longitud del canal es de $480\ m$.

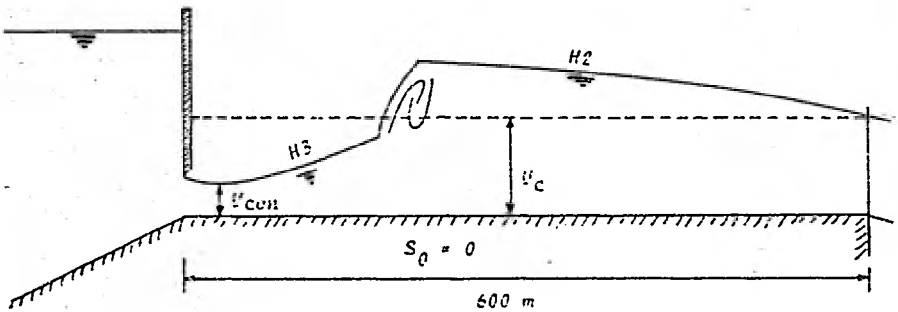


Fig 5.1 Figura aclaratoria del ejemplo de perfiles tipo H

En esta sección se hará el cálculo del tirante crítico ya que éste es común a ambos tipos de perfil.

Cálculo del tirante crítico. En una sección crítica se debe cumplir que

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(by_c + ky_c^2)^3}{b+2ky_c}$$

sustituyendo los datos del problema se obtiene la ecuación

$$\frac{(9y_c + y_c^2)^3}{9+2y_c} = \frac{(250)^2}{9.81} = 6\ 371.050$$

que resuelta por tanteos dá

$$y_c = 3.708 \ m$$

4.3 CALCULO DEL PERFIL H2

En las tablas 2.2 y 2.3 se puede ver que los métodos de integración numérica recomendados para el cálculo de perfiles H2 son el de Runge-Kutta y el de Adams. Por lo tanto, estos métodos y el del incremento finito serán usados en esta sección.

Como se trata de un perfil en régimen subcrítico, el control está aguas abajo y corresponde a una sección crítica, por tanto, la condición inicial será

$$x_0 = 0 \qquad ; \qquad y_0 = 3.708 \ m$$

Como en este caso la longitud del perfil queda definida por la posición del salto hidráulico y no es el objetivo de este trabajo el localizarlo, el cálculo del perfil se llevará a todo lo largo del canal. Por tanto, se adoptará que

$$L = -180 \ m$$

Dado que en los perfiles tipo H el método de integración directa no es aplicable, para fines de comparación se usará un perfil calculado con el método del incremento finito con un Δx de -5 m. Este perfil se encuentra resumido en la tabla 4.1.

Como ha sucedido con los perfiles M2 y S2, con los perfiles H2 se tienen dificultades al integrar numéricamente la ecuación dinámica. Es por esto que se han adoptado las indicaciones hechas en la sección 3.6 para el caso de los perfiles M2, ya que los perfiles H2 son el caso extremo de los M2 cuando la pendiente de la plantilla del canal es horizontal.

Siguiendo tales indicaciones se ha integrado un tramo de $50 \ m$ con incrementos Δx de $-5m$ usando el método de Runge-Kutta y tomando como condición inicial

$$x_0 = 0 \quad ; \ y_0 = 1.02 y_c = 1.02(3.708) = 3.782 \ m$$

obteniéndose el perfil mostrado en la tabla 5.2.

Tomando ahora como condición inicial

$$x_0 = -40\ m \quad ; \quad y_0 = 4.12983473\ m$$

pueden aplicarse los métodos de integración numérica recomendados para este caso.

Usando $\Delta x = -20\ m$ se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 5.3. Los correspondientes errores absolutos se encuentran dibujados en la figura 5.2.

Con el fin de analizar el comportamiento que presentan los errores al aumentar Δx, se usarán valores de -40 y $-60\ m$.

Los resultados obtenidos con $\Delta x = -40\ m$ se encuentran en la tabla 5.4 y en la figura 5.3 se han graficado los errores correspondientes.

Si se observan las figuras 5.2, 5.3 y 5.4, se podrá observar que los errores introducidos por los métodos numéricos usados permanecen prácticamente constantes al aumentar Δx mientras que los introducidos por el método del incremento finito crecen.

Puede también observarse que para valores grandes de Δx, los errores producidos por el método de Adams son menores que los producidos por el método de Runge-Kutta.

x	y
0	3.708
-20	4.00722062
-40	4.12427135
-60	4.21192169
-80	4.28440272
-100	4.3472271
-120	4.40321873
-140	4.45405274
-160	4.50081875
-180	4.54427233
-200	4.58496266
-220	4.62330359
-240	4.65961607
-260	4.69415468
-280	4.72712623
-300	4.75869978
-320	4.78901708
-340	4.81819763
-360	4.84634343
-380	4.87354234
-400	4.89987067
-420	4.92539518
-440	4.95017467
-460	4.97426125
-480	4.99770134

TABLA 5.1 Perfil H2 calculado con el método del incremento finito usando $\Delta x = -5$ m

X	Y
0	3.782
-5	3.87786801
-10	3.93403888
-15	3.97804288
-20	4.01528784
-25	4.0480733
-30	4.07763303
-35	4.1047201
-40	4.12983413
-45	4.15332669
-50	4.17545625

TABLA 5.2 Cálculo del tramo de flujo rápidamente variado del perfil H2, $\Delta x = -5$ m

x	RUNGE-KUTTA y	RUNGE-KUTTA EA	ADAMS y	ADAMS EA	INCREMENTO FINITO x	INCREMENTO FINITO y	INCREMENTO FINITO EA
					0	3.700	0
					-20	4.01471971	-7.49908201E-03
-40	4.12983413	-5.56277856E-03	4.12983413	-5.56277856E-03	-40	4.12984182	-5.57046942E-03
-60	4.21637344	-4.45175171E-03	4.21637344	-4.45175171E-03	-60	4.21652924	-4.60755266E-03
-80	4.28819166	-3.78893875E-03	4.28819166	-3.78893875E-03	-80	4.28810404	-4.00131941E-03
-100	4.3505648	-3.33769619E-03	4.3505648	-3.33769619E-03	-100	4.35080105	-3.57394665E-03
-120	4.40622446	-3.00572999E-03	4.40618473	-2.96600162E-03	-120	4.40617038	-3.25164571E-03
-140	4.45880138	-2.74864212E-03	4.45675465	-2.70210[illegible]E-03	-140	4.45765006	-2.99731838E-03
-160	4.50316093	-2.54217349E-03	4.50321343	-2.49467[illegible]E-03	-160	4.50360904	-2.790289E-03
-180	4.54664411	-2.3717843E-03	4.54659811	-2.32578069E-03	-180	4.54658963	-2.61729769E-03
-200	4.58719082	-2.22815759E-03	4.58714674	-2.18407622E-03	-200	4.58743259	-2.46992694E-03
-220	4.62540261	-2.10502171E-03	4.62530651	-2.06232018E-03	-220	4.62564604	-2.34244764E-03
-240	4.66161406	-1.99798867E-03	4.66157383	-1.95775926E-03	-240	4.6618469	-2.23083235E-03
-260	4.69605875	-1.90367294E-03	4.69602026	-1.86537574E-03	-260	4.69628692	-2.13204324E-03
-280	4.72894654	-1.82030909E-03	4.72890962	-1.78339705E-03	-280	4.72917003	-2.04380041E-03
-300	4.76044527	-1.74548849E-03	4.7604098	-1.71002559E-03	-300	4.76066418	-1.96439587E-03
-320	4.79069508	-1.67799555E-03	4.79066094	-1.64305512E-03	-320	4.79090951	-1.89242512E-03
-340	4.81981438	-1.61674619E-03	4.81978145	-1.58381835E-03	-340	4.82092449	-1.82666001E-03
-360	4.84790477	-1.56084448E-03	4.84767246	-1.5290105E-03	-360	4.8481102	-1.76676735E-03
-380	4.87505191	-1.50956772E-03	4.87502112	-1.47872006E-03	-380	4.8752528	-1.71146169E-03
-400	4.90133299	-1.46231987E-03	4.90130315	-1.43248029E-03	-400	4.90153102	-1.66034855E-03
-420	4.92681379	-1.41860917E-03	4.92678483	-1.38964877E-03	-420	4.92700808	-1.61269981E-03
-440	4.9515527	-1.37802586E-03	4.95152456	-1.34988502E-03	-440	4.95174341	-1.56873278E-03
-460	4.97560147	-1.34022161E-03	4.9755741	-1.31284446E-03	-460	4.97578074	-1.52748827E-03
-480	4.99900624	-1.304904E-03	4.99897958	-1.2782421E-03	-480	4.99919021	-1.48887187E-03

TABLA 5.3 Perfil H2 calculado con los métodos recomendados usando $\Delta x = -20$ m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO		
	y	EA	y	EA	x	y	EA
					0	3.708	0
-40	4.12983413	-5.56277856E-03	4.12983413	-5 56277856E-03	-40	4.14133069	-.0170593392
-80	4.28825518	-3.85245495E-03	4.28825518	-3.85245495E-03	-80	4.29690237	-.0124996509
-120	4.4062803	-3.06156278E-03	4.4062803	-3.06156278E-03	-120	4.41346697	-.0102482345
-160	4.50340931	-2.59055942E-03	4.50340931	-2.59055942E-03	-160	4.50965803	-8.83927755E-03
-200	4.58723261	-2.27095E-03	4.58686994	-1 92727707E-03	-200	4.59281363	-7.85096548E-03
-240	4.66165259	-2.03652307E-03	4.66129698	-1 68096872E-03	-240	4.66672479	-7.10871443E-03
-280	4.72898173	-1.85549632E-03	4.7286363	-1 51006691E-03	-280	4.73365143	-6.52519986E-03
-320	4.79072756	-1.71047822E-03	4.79040435	-1.3872683E-03	-320	4.79506847	-6.05139323E-03
-360	4.84793452	-1.59108825E-03	4.8476312	-1.28777511E-03	-360	4.85200014	-5.65671176E-03
-400	4.90136135	-1.49067491E-03	4.90107592	-1.20524876E-03	-400	4.90519223	-5.32156415E-03
-440	4.95157943	-1.40476041E-03	4.95130975	-1.13507546E-03	-440	4.95520718	-5.0325077E-03
-480	4 99903157	-1.33023039E-03	4.99877578	-1.07444078E-03	-480	5.00248134	-4.78000038E-03

TABLA 5.4 Perfil H2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = -40 m

x	RUNGE-KUTTA		ADAMS		INCREMENTO FINITO		
	y	EA	y	EA	x	y	EA
					0	3.708	0
-40	4.12983413	-5.56277856E-03	4.12983413	-5.56277856E-03	-60	4.2387146	-.0267929025
-100	4.35087955	-3.65244225E-03	4 35087955	-3.65244225E-03	-120	4.42268404	-.0194653086
-160	4.50361516	-2.79640965E-03	4.50361516	-2.79640965E-03	-180	4.56014041	-.0158680771
-220	4.62562171	-2.31812149E-03	4.62562171	-2.31812149E-03	-240	4.67324205	-.0136259794
-280	4.72913161	-2.00538151E-03	4 72815436	-1.02812797E-03	-300	4.77075821	-.0120584331
-340	4.81997909	-1.78146176E-03	4.819025	-8.27372074E-04	-360	4.85722797	-.0108845346
-400	4.90148215	-1.61147676E-03	4.90057198	-7.01313838E-04	-420	4.93535922	-9.96404326E-03
-460	4.97573828	-1.47702916E-03	4.97489837	-6.37115911E-04	-480	5.00691945	-9.21810605E-03

TABLA 5.5 Perfil H2 calculado con los métodos recomendados usando Δx = -60 m

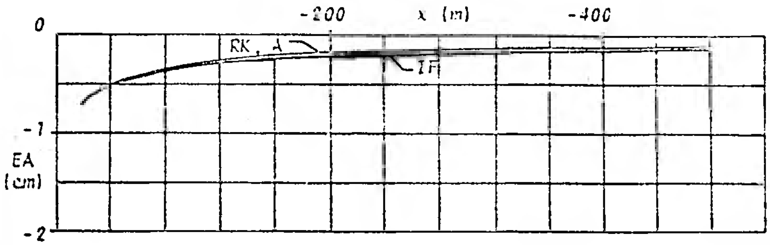


Fig 5.2 Errores absolutos usando Δx = -20 m. Perfil H2

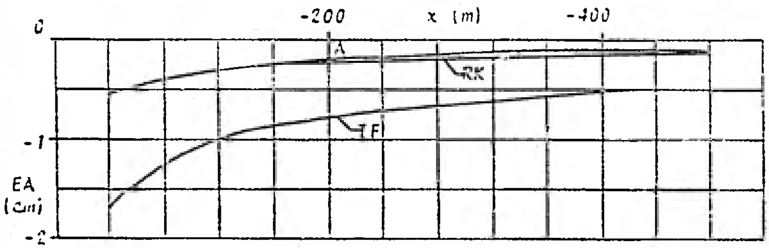


Fig 5.3 Errores absolutos usando Δx = -40 m. Perfil H2

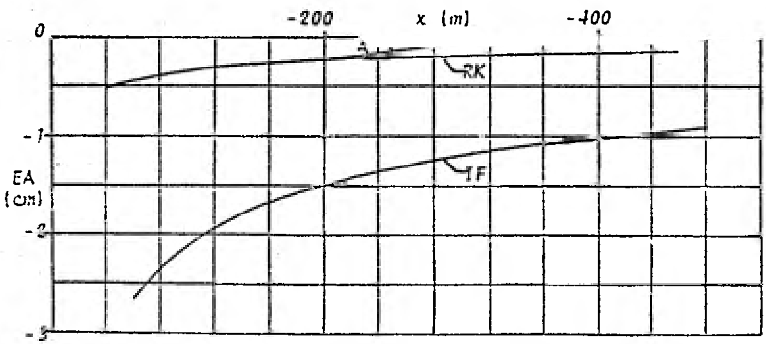


Fig 5.4 Errores absolutos usando Δx = - 60 m. Perfil H2

5.4 CALCULO DEL PERFIL H3

Con base en las tablas 2.2 y 2.3 se puede determinar que los métodos numéricos más adecuados para integrar este tipo de perfil son, el de Runge-Kutta y el de Milne, por tanto, estos métodos y el del incremento finito serán usados en esta sección.

Tomando como origen del perfil la sección contracta aguas abajo de la compuerta (figura 5.1), se puede establecer la condición inicial

$$x_0 = 0 \qquad ; \qquad y_0 = 2.15 \text{ m}$$

En vista de que el método de integración directa no puede ser aplicado cuando la pendiente del canal es nula, se ha usado el método del incremento finito con un Δx pequeño para obtener un perfil contra el cual comparar los resultados obtenidos, tanto con los métodos numéricos, como con el del incremento finito mismo, pero usando valores de Δx más grandes. De los cálculos así realizados se obtuvo que

$$L \doteq 325 \text{ m}$$

El perfil correspondiente a estos cálculos se encuentra resumido en la tabla 5.6.

En las tablas 5.7, 5.8 y 5.9 se encuentra el perfil H3 calcula do con los métodos de Runge-Kutta, Milne e incremento finito para Δx = *20, 40 y 60 m*, respectivamente y en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 se han graficado los correspondientes errores absolutos producidos por los métodos usados.

Como en los casos anteriores, los errores absolutos contenidos en las tablas 5.7, 5.8 y 5.9 fueron calculados como la diferencia de los valores dados por el método del incremento finito con Δx pequeño, menos los dados por el método empleado.

Observando las figuras 5.5, 5.6 y 5.7, puede verse que los errores introducidos por los métodos numéricos son prácticamente nulos para todos los valores de Δx usados excepto en las cercanías del tirante crítico. Sin embargo, tales errores resultan ser muy pequeños ya que, como puede observarse, el error máximo es de apenas *1 cm*. Por otro lado, los errores producidos por el método del incremento finito son siempre mayores que los introducidos por los métodos numéricos y crecen al aumentar el valor de Δx.

5.5 *COMENTARIOS ACERCA DEL CALCULO DE PERFILES TIPO H*

Como ha sucedido en los casos de perfiles M y S, en el caso de perfiles H tampoco se tienen serias dificultades al tratar de integrar la ecuación dinámica ya que solamente bastará con definir la condición inicial y los datos del problema, para poder usar cualquiera de los métodos numéricos recomendados en

x	y
0	2.15
20	2.20865135
40	2.26812783
60	2.32856249
80	2.39011093
100	2.45295783
120	2.51722608
140	2.58348967
160	2.6517928
180	2.72267909
200	2.79673838
220	2.87478605
240	2.9580077
260	3.0482505
280	3.14869561
300	3.26580775
320	3.41782197

TABLA 5.6 Perfil H3 calculado con el método del incremento finito usando $\Delta x = -5$ m

x	RUNGE-KUTTA		MILNE		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	2.15	0	2.15	0	2.15	0
20	2.20864843	2.92342156E-06	2.20864843	2.92342156E-06	2.20869631	-4.4955872E-05
40	2.26812204	5.78723848E-06	2.26812204	5.78723848E-06	2.26821719	-8.93557444E-05
60	2.32655386	8.63242894E-06	2.32655386	8.63242894E-06	2.32669506	-1.33572146E-04
80	2.39009945	1.14841387E-05	2.39009947	1.14645809E-05	2.39028893	-1.78029761E-04
100	2.45294348	1.43554062E-05	2.4529135	1.43256038E-05	2.45318105	-2.23215669E-04
120	2.51730879	1.72927976E-05	2.51710885	1.7227605E-05	2.51759575	-2.69673765E-04
140	2.58346934	2.03261152E-05	2.58346945	2.02227384E-05	2.58380775	-3.18084844E-04
160	2.65176931	2.34879553E-05	2.6517695	2.32970342E-05	2.65216211	-3.69309448E-04
180	2.72265227	2.68155709E-05	2.7226526	2.64877454E-05	2.72310356	-4.24475409E-04
200	2.796708	3.03788111E-05	2.79670862	2.97594816E-05	2.79722347	-4.85038676E-04
220	2.87475181	3.42456624E-05	2.87475302	3.30102864E-05	2.87533934	-5.53289129E-04
240	2.95796929	3.84151936E-05	2.95797196	3.57395038E-05	2.95863999	-6.32290728E-04
260	3.0482077	4.28025855E-05	3.04821445	3.60459059E-05	3.04897744	-7.26935454E-04
280	3.14865021	4.6402216E-05	3.14867159	2.50463706E-05	3.14954142	-8.41811089E-04
300	3.265759	4.87538055E-05	3.26585762	-4.98667359E-05	3.2667959	-9.88144428E-04
320	3.4178236	-1.63167715E-06	3.41903449	-1.21251401E-03	3.41888204	-1.0600[illegible]E-03

TABLA 5.7 Perfil H3 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 20 m

x	RUNGE-KUTTA		MILNE		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	2.15	0	2.15	0	2.15	0
40	2.26812206	5.77047467E-06	2.26812206	5.77047467E-06	2.26850439	-3.76562568E-04
80	2.3900995	1.14338472E-05	2.3900995	1.14328472E-05	2.39066069	-7.49957748E-04
120	2.51730891	1.71717256E-05	2.51730891	1.71717256E-05	2.51846163	-1.13555323E-03
160	2.65176961	2.31916574E-05	2.6517736	1.92010775E-05	2.65334727	-1.55447144E-03
200	2.79670879	2.95862556E-05	2.79672084	1.75358726E-05	2.79877903	-2.04064418E-03
240	2.95797198	3.57236713E-05	2.95802257	-1.48665649E-05	2.96036541	-2.65770778E-03
280	3.14866507	3.15411016E-05	3.14897154	-2.74932012E-04	3.15224346	-3.54684331E-03
320	3.41810766	-2.85628788E-04	3.42769487	-9.87289567E-03	3.42249103	-4.66959914E-03

TABLA 5.8 Perfil H3 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 40 m

x	RUNGE-KUTTA		MILNE		INCREMENTO FINITO	
	y	EA	y	EA	y	EA
0	2.15	0	2.15	0	2.15	0
60	2.328554	8.48527998E-06	2.328554	8.48527998E-06	2.32984939	-1.28689874E-03
120	2.51730938	1.67023391E-05	2.51730938	1.67023391E-05	2.51992125	-2.59516947E-03
180	2.72265455	2.45450065E-05	2.72265455	2.45450065E-05	2.72676098	-4.08188999E-03
240	2.95798145	2.62521207E-05	2.95820669	-1.98934519E-04	2.96406539	-6.07768253E-03
300	3.2659361	-1.28351152E-04	3.27031474	-4.50698938E-03	3.27541839	-9.61064175E-03

TABLA 5.9 Perfil H3 calculado con los métodos recomendados usando Δx = 60 m

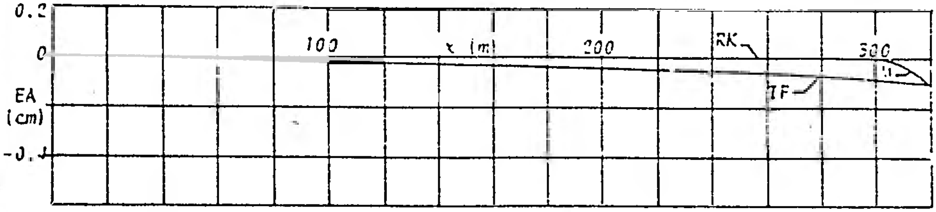


Fig 5.5 Errores absolutos usando Δx = 20 m. Perfil H3

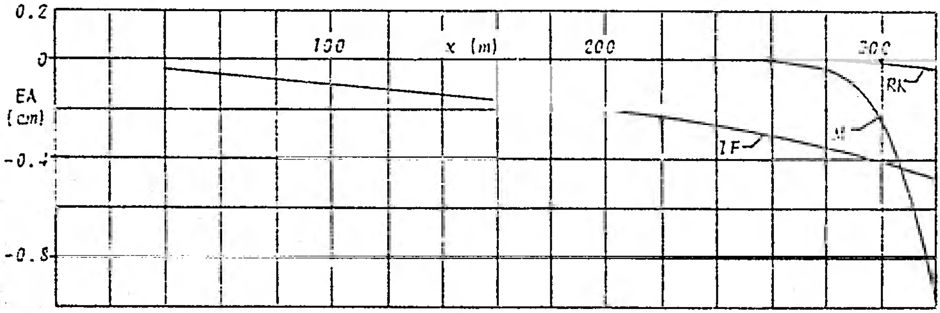


Fig 5.6 Errores absolutos usando Δx = 40 m. Perfil H3

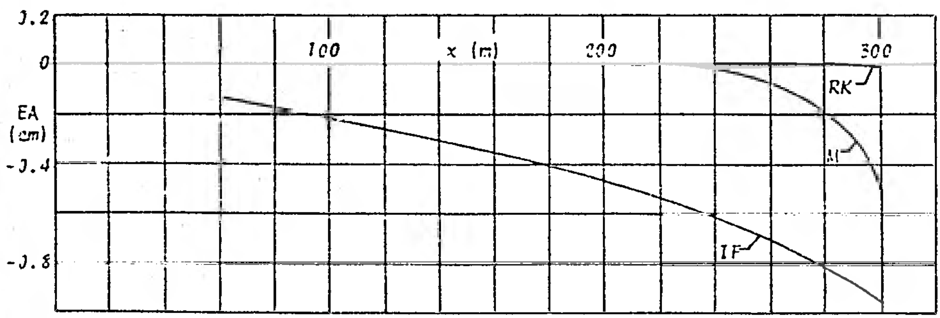


Fig 5.7 Errores absolutos usando Δx = 60 m. Perfil H3

la sección 2.7.

En el caso de los perfiles H2, los métodos numéricos no deben aplicarse en la forma usual debido a que dicho tipo de perfi - les inicia en una sección crítica donde la pendiente teórica de la superficie libre del agua dy/dx es infinita. En tales casos deberán aplicarse las indicaciones hechas en la sección 3.6 para perfiles tipo M2 ya que los perfiles H2 son un caso extremo de estos en los que la pendiente de la plantilla del canal llega a ser nula.

Finalmente, cabe mencionar que en los métodos de Milne y Adams se usó la extrapolación al límite (sección 1.3) dada por las ecuaciones 1.26b y 1.27b respectivamente, ya que con ello se obtuvo una mejor aproximacion.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

6.1 INTRODUCCION

En la introducción del presente trabajo se expusieron los objetivos del mismo como sigue: proponer algunos métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias que puedan ser aplicados al cálculo de perfiles de flujo en forma fácil y accesible, proporcionar criterios de selección de un método apropiado para cada tipo de perfil y demostrar la aplicabilidad de estos métodos en comparación con el tradicional método de incrementos finitos. Ahora bien, para cumplir con los dos primeros objetivos se desarrollaron los capítulos 1 y 2. En el primero se propusieron siete métodos (eliminando el de serie de Taylor), que pueden aplicarse al problema en forma sencilla y accesible. En el segundo, se proporcionaron criterios para la selección de un método apropiado para cada tipo de perfil. Hay que destacar que en el caso particular de perfiles de flujo gradualmente variado, resulta muy conveniente el uso de métodos numéricos de orden elevado para evitar problemas de inestabilidad que se presentan en algunos casos, y al mismo tiempo, poder hacer uso de incrementos Δx de tamaño aceptable.

Para cumplir con el tercer objetivo, se desarrollaron los capítulos 3, 4 y 5 cuyo análisis y discusión son los temas del presente capítulo.

6.2 RESUMEN ANALITICO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ERRORES EN CADA TIPO DE PERFIL

La información obtenida en los capítulos 3, 4 y 5 referente al comportamiento de los errores se ha resumido en las tablas 6.1 y 6.2. En la tabla 6.1 se analiza el comportamiento de los errores a lo largo del intervalo de integración (longitud del perfil) y en la tabla 6.2 se analiza dicho comportamiento respecto al aumento del incremento Δx.

En la tabla 6.1 se puede apreciar que solamente se tienen problemas de inestabilidad en los perfiles M3, S1 y H3, es decir, que en ellos los errores aumentan a lo largo del cálculo. Además, en los perfiles M3 y H3, se presenta un comportamiento impredecible de los errores en virtud de que el tirante se acerca al tirante crítico para el cual, la pendiente teórica de la superficie del agua es infinita.

TIPO DE PERFIL	METODO	COMPORTAMIENTO DEL ERROR			
		CRECE	DECRECE	CRECE Y DECRECE	ES INESTABLE
M1	RK			*	
	A			*	
	IF			*	
M2	RK		*		
	A		*		
	IF		*		
M3	RK				*
	M				*
	IF	*			
S1	RK	*			
	M	*			
	IF	*			
S2	RK			*	
	A			*	
	IF		*		
S3	RK			*	
	A			*	
	IF			*	
H2	RK		*		
	A		*		
	IF		*		
H3	RK				*
	M				*
	IF	*			

RK=Runge-Kutta, A=Adams, M=Milne e IF=Incremento finito

TABLA 6.1 Tabla indicativa del comportamiento de los errores a lo largo del intervalo de integración

TIPO DE PERFIL	METODO	COMPORTAMIENTO DEL ERROR			ERROR MINIMO	
		CRECE	DECRECE	ES CONSTANTE	EN TIRANTE	EN LONGITUD
M1	RK		*			*
	A			*		
	IF	*			*	
M2	RK	*				
	A	*			*	*
	IF	*				
M3	RK			*	*	
	M			*		
	IF	*				*
S1	RK			*		
	M			*		
	IF			*	*	*
S2	RK			*		
	A		*		*	*
	IF	*				
S3	RK			*		
	A			*	*	*
	IF	*				
H2	RK			*		
	A		*		*	*
	IF	*				
H3	RK			*	*	*
	M			*		
	IF	*				
RK=Runge-Kutta, A=Adams, M=Milne e IF=Incremento finito						

TABLA 6.2 Tabla indicativa del comportamiento de los errores al aumentar el incremento Δx

En la tabla 6.2 se puede observar que los errores introducidos por los métodos numéricos crecen únicamente en los casos de perfiles tipo M2 y que para los demás, decrecen o permanecen constantes. Por otra parte, los errores introducidos por el método del incremento finito crecen en todos los casos excepto en el de los perfiles S1, en los cuales permanece constante. Analizando las dos últimas columnas de esta tabla, se podrán notar algunas peculiaridades como son: en el perfil M1 es más preciso el método del incremento finito que los numéricos en cuanto a tirante, pero lo contrario ocurre en cuanto a longitud; en el perfil M3 sucede lo contrario que en el anterior; en el perfil S1 es más preciso el método del incremento finito que los numéricos en cuanto a tirante y a longitud. En tanto que para otros tipos de perfil, se observa ventaja de los métodos numéricos sobre el del incremento finito.

6.3 IMPORTANCIA DE LOS ERRORES INTRODUCIDOS POR LOS METODOS NUMERICOS SELECCIONADOS

En la tabla 6.1 puede verse que los casos más desfavorables en cuanto a magnitud de los errores se refiere, son los correspondientes a los perfiles tipo M3, S1 y H3 ya que en ellos, el error aumenta a lo largo del intervalo de integración y en la tabla 6.2, se puede ver que el único caso desfavorable es el correspondiente a los perfiles tipo M2 en el que el error aumenta conforme aumenta en incremento Δx.

A continuación se hace una breve discusión de los casos mencionados en el párrafo anterior.

Perfil M3. En este caso el error aumenta suavemente hasta que, al acercarse al valor del tirante crítico, adopta un comportamiento impredecible, es decir, aumenta o disminuye fuertemente. Sin embargo, esto no representa un grave problema ya que, antes de que el tirante se acerque al valor del tirante crítico, se presenta un salto hidráulico.

Perfil S1. En este caso el error aumenta siempre en forma suave a pesar de que el tirante tiende, como en el caso anterior, al valor del tirante crítico. Esto, como puede entenderse, no tiene gran importancia dado que el tirante mínimo al que se llegará será siempre mayor que el crítico.

Perfil H3. En este caso sucede exactamente lo mismo que en el caso del perfil M3.

Perfil M2. Este es el único caso en el que los errores crecen al crecer el incremento Δx, sin embargo, el aumento que estos sufren es mucho menor que el que se observa en el método del incremento finito.

Cabe también aclarar que los llamados "errores" son tan solo la diferencia entre un valor del tirante calculado con alguno de los métodos numéricos seleccionados y otro (el de integración directa, también aproximado), que es tomado como eje de referencia para llevar a cabo una comparación.

6.4 APLICABILIDAD DE LOS METODOS NUMERICOS SELECCIONADOS

Este es quizás el punto más importante de este trabajo ya que la aplicabilidad de un método cualquiera es lo que a fin de cuentas determina su bondad.

Se puede decir que la aplicabilidad de los métodos de integración numérica seleccionados es mucho mayor que la correspondiente al método del incremento finito.

En defensa de la aseveración anterior puede decirse que el simple hecho de poder prescindir de las iteraciones es ya una gran ventaja, siendo que la precisión obtenida con los métodos numéricos es, en la mayoría de los casos, mayor que la obtenida con el método del incremento finito.

Sin embargo, los métodos numéricos presentan tres pequeñas dificultades. La primera de ellas es la que se presenta en los perfiles que parten de un tirante crítico como es el caso de los perfiles M2, S2 y H2 la cual puede resolverse como se indicó en su oportunidad en las secciones 3.4, 4.4 y 5.3, respectivamente. La segunda se refiere al caso en el que no se cuente con una calculadora programable ya que dada esta circunstancia, es más recomendable usar el método iterativo del incremento finito. Finalmente, la tercera se refiere a que el ingeniero no "siente" la solución representada por las ecuaciones respectivas de cada método numérico.

6.5 ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA PROGRAMACION DE LOS METODOS

Otra gran ventaja de los métodos numéricos es, sin duda alguna, la facilidad con la que pueden ser programados, aún en una calculadora de escritorio ya que, con el actual desarrollo de las mismas, su disponibilidad ha aumentado.

Una característica adicional de los métodos numéricos es la de lograr efectuar el calculo de un perfil hacia aguas arriba con el simple hecho de cambiar el signo al incremento Δx (de positivo a negativo).

Debido a la sencillez de la programación de los metodos de integración numérica seleccionados, solamente se presentara a manera de ilustración, el programa de Runge-Kutta usado en este trabajo. Dicho programa aparece en la figura 6.1 y está escrito en lenguaje BASIC pero puede ser traducido con gran facilidad a lenguaje FORTRAN e incluso ser escrito en una calculadora programable de mediana capacidad.

Los datos requeridos por el programa (en las unidades usuales) son:

```
 10 REM PROGRAMA PARA CALCULAR PERFILES DE FLUJO
 20 REM GRADUALMENTE VARIADO USANDO RUNGE-KUTTA
 30 REM
 40 DIM XR(100),YR(100)
 50 DEF FN A(Y)=(B+K*Y)*Y
 60 DEF FN P(Y)=B+2*Y*(1+K*K) 0.5
 70 DEF FN T(Y)=B+2*K*Y
 80 DEF FN S(Y)=(Q*N*FN P(Y) (2/3)/FN A(Y) (5/3)) 2
 90 DEF FN F(Y)=Q*Q*FN T(Y)/(9.81*FN A(Y) 3)
100 DEF FN E(Y)=(S0-FN S(Y))/(1-FN F(Y))
110 READ Q,B,K,S0,N
120 DATA
130 READ X0,Y0,H,NP
140 DATA
150 X=X0 : XR(1)=X0
160 Y=Y0 : YR(1)=Y0
170 FOR I=1 TO (NP+1)
180 K1=H*FN E(Y)
190 K2=H*FN E(Y+K1/2)
200 K3=H*FN E(Y+K2/2)
210 K4=H*FN E(Y+K3)
220 X=X+H
230 Y=Y+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
240 XR(I)=X
250 YR(I)=Y
260 NEXT I
270 PR#1
280 PRINT "9ON";
290 PRINT "METODO DE RUNGE-KUTTA"
300 PRINT " "
310 PRINT "     X                 Y"
320 PRINT " "
330 FOR I=1 TO (NP+1)
340 PRINT "    "XR(I),YR(I)
350 NEXT I
360 END
```

Fig 6.1 Programa para calcular perfiles de flujo gradualmente variado usando el método de Runge-Kutta

Q Gasto que conduce el canal.

B Ancho de la plantilla del canal. Para canales triangulares B=0.

K Inclinación del talud. Para canales rectangula_ res K=0.

SO Pendiente de la plantilla del canal. Para canales horizontales SO=0.

N Coeficiente de rugosidad de Manning.

XO Posición de la sección inicial (sección de control).

YO Tirante en la sección inicial (sección de control).

H Distancia entre secciones (incremento Δx).

NP Número de puntos requerido para completar la longitud del perfil.

REFERENCIAS

1. "Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds" Antony Ralston, Mathematics of Computation, 16, 431-437, 1962.
2. "Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations", L. Fox, Pergamon, secc 16, cap 2, New York, 1962.
3. "The Deferred Approach to the Limit", L. F. Richardson y J. A. Gaunt, Trans. Roy. London. 22A, 300, 1927.
4. "Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations", L. Fox, Pergamon, secc 7, cap 4, New York, 1962.
5. "Métodos Numéricos y Programación FORTRAN", Daniel D. McCracken y William S. Dorn, Limusa, 10, 346, 1979.
6. "Efficiency of Predictor-Corrector Procedures", J. Acm, 10, 291-301, 1963.
7. "Numerical Solution of Differential Equations", William E. Milne, Dover, 5, 73-74, 1970.
8. "Numerical Solution of Differential Equations", Willian E. Milne, Dover, apéndice D, 257, 1970.
9. "Métodos Numéricos Aplicados a la Computación Digital con FORTRAN", Merlin L. James, Gerald M. Smith y James C. Wolford, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 6, 385-386, 1973.

10. "Applied Numerical Methods", Brice Carnahan, H. A. Luther, James O. Wilkes, John Wiley and Sons Inc., 6, 363, 1969.

11. "Open-channel Hydraulics", Ven Te Chow, McGraw-Hill Kogakusha, 9, 217, 1959.

12. "Open Channel Flow", F. M. Henderson, Macmillan Pu plishing Co. Inc., 2, 50-51, 1966.

13. "Open-channel Hydraulics", Ven Te Chow, McGraw-Hill Kogakusha, 9, 222-227, 1959.

14. "Open-channel Hydraulics", Ven Te Chow, McGraw-Hill Kogakusha, 10, 252-256, 1959.

15. "Open-channel Hydraulics", Ven Te Chow, McGraw-Hill Kogakusha, 10, 265-267, 1959.

RECONOCIMIENTOS

Al M. en I. Moisés Berezowski Verduzco por su atención y tiempo dedicado a este trabajo.

Al Instituto de Ingeniería UNAM, por el apoyo y facilidades proporcionadas para la realizacion de este trabajo.

A José Luis Muñoz Villagómez por su buena disposición para la realización de las figuras y gráficas.

A Irene Hernández por la paciencia demostrada al mecanografiar el trabajo.

A todas aquellas personas que me estimularon y ayudaron para concluir esta etapa de mi vida.