

2ej' 60

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

FACULTAD DE INGENIERIA



"ANALISIS SISMICO DINAMICO PARA  
UN EDIFICIO URBANO"

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

*Alfonso García Garibay*

MEXICO D. F.

1981



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE INGENIERIA  
EXAMENES PROFESIONALES  
60-1-158

UNIVERSIDAD NACIONAL

AVILA

Al Pasante señor ALFONSO GARCIA GARIBAY,  
P r e s e n t e .

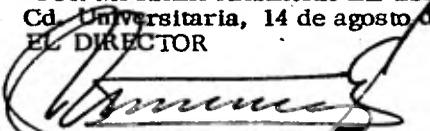
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Jorge Ceceña Sida, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANALISIS SISMICO DINAMICO PARA UN EDIFICIO URBANO"

- I. Introducción
- II. Principios básicos de dinámica de vibraciones
- III. Métodos numéricos para el cálculo de los modos de vibración
- IV. Descripción del método de Jacobi y su aplicación teórica mediante el uso de un programa de computadora
- V. Determinación de los modos de vibración de la estructura mediante la aplicación del método anterior.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, 14 de agosto de 1979  
EL DIRECTOR



ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OLH/ser

## PREFACIO.

El objetivo de este trabajo consiste fundamentalmente en mostrar la aplicación que tienen los métodos de cálculo para la obtención de los valores característicos o Eigen-Valores de sistemas vibratorios.

Mediante la aplicación de dichos métodos obtendremos los modos naturales de vibrar de sistemas constituidos por estructuras sometidas a fuerzas de sismo (principalmente).

Con esta finalidad se hace una descripción somera de los principios fundamentales de vibraciones mecánicas.

Se describen y aplican los métodos de Holzer, de Newmark y de Stodolla y Vianello. La aplicación de los citados métodos se lleva a cabo en sistemas relativamente sencillos.

El trabajo se complementa con un análisis dinámico de un edificio de 9 niveles; el cálculo de los modos de vibrar se lleva a cabo mediante el método de Jacobi, y debido principalmente al número de grados de libertad de la estructura ( 9 grados de libertad ) es más conveniente analizarlo con el uso de la computadora.

Finalmente espero con sinceridad que este trabajo tenga alguna utilidad, principalmente para los compañeros que están realizando estudios de Ingeniería Civil.

Alfonso García Garibay.

## I N D I C E

	Página
CAPITULO I	1
Introducción	
CAPITULO II	15
Principios básicos de dinámica de vibraciones	
CAPITULO III	31
Métodos numéricos para el cálculo de los modos de vibración	
CAPITULO IV	48
Descripción del método de Jacobi y su aplicación teórica mediante el- uso de un programa de computadora	
CAPITULO V	59
Determinación de los modos de vibra- ción de la estructura mediante la - aplicación del método anterior	
CONCLUSION	110
BIBLIOGRAFIA	111

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

Las grandes pérdidas de vidas humanas y materiales que han causado los movimientos sísmicos a través de la historia, ha sido motivo de gran preocupación del ser humano en general y del ingeniero civil en particular, manifestado en el interés por conocer con más profundidad los fenómenos sísmicos y como consecuencia crear estructuras que los resistan y proporcionen una mayor seguridad.

La preocupación del ingeniero civil por los movimientos sísmicos se refleja en los reglamentos de construcción, los cuales establecen criterios de análisis y diseño por sismo.

La finalidad principal de dichos reglamentos en lo referente al diseño por sismo es la tendencia a impedir el colapso de la estructura durante la acción de un movimiento sísmico intenso.

El comportamiento de una estructura durante un sismo se puede considerar como vibratorio; es decir, se trata principalmente de un problema de vibraciones. Los desplazamientos y las fuerzas cortantes que se presentan en las estructuras, debidas a dichas vibraciones se pueden calcular mediante los métodos que posteriormente se describirán en este trabajo.

Los sismos son movimientos ondulatorios del terreno debidos a rupturas de rocas sujetas a esfuerzos, así como a deslizamientos a lo largo de una o varias fallas, ocurren en cualquier parte del mundo pero hay lugares de mayor frecuencia de ocurrencia.

Se pueden considerar tres regiones sísmicas más importantes:

- a) La del Himalaya, al norte de la India
- b) La Mediterránea del cercano Oriente
- c) La del Anillo Circumpacífico.- Dentro de esta zona se encuentra la parte occidental de los Estados Unidos, por lo cual ha experimentado sismos de gran intensidad.

En un movimiento sísmico se denomina "hipocentro" al punto central del área de deslizamiento de una falla; al punto que le corresponde sobre la superficie del terreno se le denomina "epicentro". Es imposible localizar el epicentro con exactitud, a excepción de sismos muy intensos. Con una buena aproximación se puede tomar el punto llamado epicentro instrumental, el cual se localiza mediante los registros iniciales del sismógrafo, correspondiendo al punto donde se inicia el deslizamiento y no al centro del área de deslizamiento. Las medidas sísmicas tomadas indican que los sismos se pueden originar a profundidades hasta de 600 km., bajo la superficie; sin embargo, los movimientos del terreno que tienen significado para el ingeniero civil son los producidos para focos de profundidad menores a los 75 km. Debido a que no se poseen instrumentos adecuados que midan con precisión la intensidad de los movimientos sísmicos se hace uso de la escala modificada de Mercalli, para estimarla. Esta escala estima la intensidad de los sismos basándose en la reacción humana y en los daños observados, sin embargo no es muy adecuada para dar información ingenieril para las fuerzas a usarse en los diseños antisísmicos. A continuación enumeraremos en forma condensada las categorías de dicha escala:

- I. No se percibe
- II. Se siente dentro de las habitaciones por pocos, especialmente en pisos altos
- III. Se percibe dentro de las habitaciones por varios
- IV. Se siente dentro de las habitaciones por muchos, afuera por pocos
- V. Percibido en las habitaciones por casi todos, afuera por muchos
- VI. Sentido por todos, daños ligeros en edificios pobremente construidos
- VII. Daño insignificante en edificios bien diseñados y construidos; ligero a moderado en edificios ordinarios bien construidos; - considerable en edificios pobremente construidos o mal diseñados
- VIII. Daño ligero en estructuras construidas especialmente para soportar sismos; considerable en edificios ordinarios.
- IX. Daño considerable en estructuras especialmente construidas para resistir sismos.
- X. Destruídas muchas estructuras especialmente diseñadas
- XI. Pocas o ninguna estructura permanece en pie
- XII. Destrucción completa

La información ingenieril necesaria para usarse en el diseño anti - sísmica de las estructuras, la proporcionan los registros de aceleraciones del terreno, tomados por los sismógrafos durante los movimientos sísmicos; la gráfica que registra el aparato se le denomina "acelerograma".

Los acelerogramas sirven para formar los espectros de respuesta, - los cuales pueden ser de desplazamientos, de velocidades y de aceleraciones.

A continuación explicaremos someramente como se construyen los espectros de respuesta, mediante un sistema sencillo.

### Espectros de respuesta.

Sea el sistema siguiente:

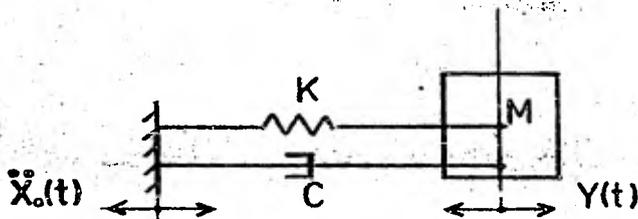
El cual representa un movimiento vibratorio amortiguado con un grado de libertad.

En donde:

M : Masa                      K : Rigidez                      C : Coeficiente de amortiguamiento

$\ddot{X}_0(t)$  : Aceleración del Terreno

Y (t) : Desplazamiento absoluto del sistema



Si partimos de la hipótesis de que el sistema tiene un comportamiento lineal e invariante con respecto al tiempo; entonces  $C$ ,  $K$  y  $M$  permanecen constantes. Así la ecuación diferencial de movimiento es:

$$M \ddot{y}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = 0 \dots(I).$$

Donde:

$$x(t) = Y(t) - X_0(t) \dots(a). \text{ Desplazamiento relativo}$$

y

$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{y}}(t) - \dot{\bar{x}}_0(t) \dots (b)$ . Velocidad relativa respecto a la base.

Derivando la ecuación (b) respecto al tiempo (t) y despejando:

$\dot{\bar{y}}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{x}}_0(t) \dots (c)$ . Sustituyendo (c) en (I) :

$M(\dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{x}}_0(t)) + C\dot{\bar{x}}(t) + Kx(t) = 0$  o bien:

$M\dot{\bar{x}}(t) + C\dot{\bar{x}}(t) + Kx(t) = -M\dot{\bar{x}}_0(t) \dots (2)$ .

Cuya solución es:

$$x(t) = -I / w' \int_{-\infty}^t \ddot{\bar{x}}(t-T) e^{-Bx(t-T)} \sin w'(t-T) dT \dots (3)$$

En esta ecuación:

$B = C / \sqrt{KM}$  : Relación de amortiguamiento.

$w' = w \sqrt{1-B^2}$  : Frecuencia angular amortiguada.

$w$  : Frecuencia angular no amortiguada.

La ecuación (3) depende de t, w, y B; por lo tanto, para valores distintos de B y w se podrá hacer una gráfica de desplazamientos en función de la variable "t", dicha gráfica constituye una historia de los desplazamientos. Por supuesto que para otro par de valores diferentes de B y w, corresponderá otra historia distinta de desplazamientos;

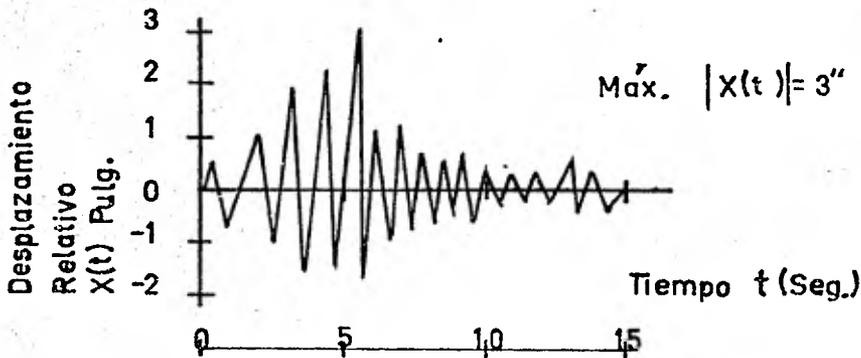


Figura (1). Respuesta de un sistema simple amortiguado. Para  $T = 1.0$  seg. y  $B = 0.10$  (valores hipotéticos).

Si tomamos el máximo valor absoluto de los desplazamientos y graficamos desplazamientos máximos en función de sus períodos T.

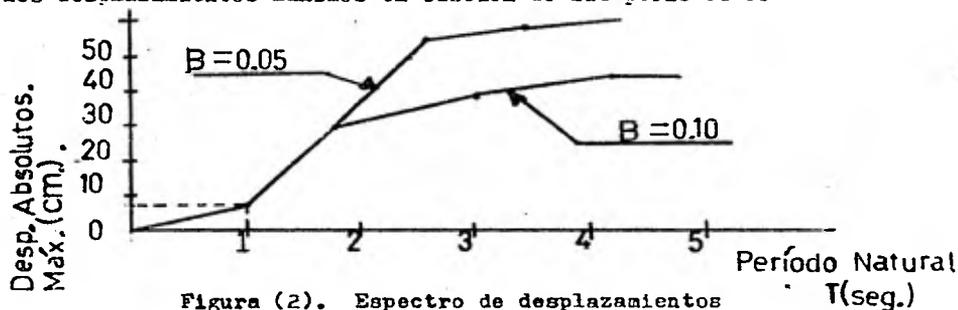


Figura (2). Espectro de desplazamientos

Como se puede apreciar, en vez de la frecuencia angular  $\omega$  se usó el período  $T = 2\pi / \omega$ ; además para períodos T diferentes, se obtienen diversas historias de desplazamientos. Por otro lado, para distintos valores de B, se obtienen también diferentes espectros de desplazamiento. Fig. (2).

Para obtener los espectros de respuesta de velocidad relativa, es necesario derivar con respecto a t, calcular el valor de  $\dot{x}(t)$  en la ecuación (3) para cada pareja de valores de  $\omega$  y B; posteriormente graficar sus valores máximos en función de sus períodos Fig. (3)\*.

Para obtener el espectro de respuesta de aceleraciones absolutas, es necesario derivar dos veces la ecuación (3) y calcular el valor de  $\ddot{x}(t)$  para cada pareja fija de valores  $\omega$  y B, con lo cual se obtendría la aceleración relativa  $\ddot{x}(t)$  y posteriormente sumarle la aceleración del terreno  $\ddot{x}(t)$ , en cada instante (t) y finalmente graficar aceleraciones y períodos. Fig. (4)\*.

Con la finalidad de evitarse cálculos engorrosos, se usan los espec

\* (Las figuras 3y4 se muestran en el final del capítulo).

tros de pseudo-velocidades relativas y pseudo-aceleraciones absolutas, que se definen respectivamente como:

$V = w D$  y  $A = w D$ , las cuales son prácticamente iguales a los valores que se obtienen de los espectros reales, además, presentan la ventaja de representarse gráficamente en una hoja tetralogarítmica, en la cual los ejes de desplazamiento y aceleraciones se orientan a  $45^\circ$  con respecto al eje de frecuencias (o períodos) que es el de las abscisas; las velocidades se representan en un eje vertical que es el de las ordenadas. Figs. 5 y 6

Debido a las variaciones bruscas que presentan los acelerogramas, - hace que sean poco prácticos para usarse en el diseño, además de que se debe tomar en cuenta un margen de seguridad para sismos futuros; por esta razón, el Reglamento de Construcciones del D.F. considera una envolvente afectada por un factor de seguridad. En su artículo 236 especifica la forma como se definen los espectros de aceleraciones para tres tipos principales de zonas.

#### Tipos de Zonas:

- I.- Terreno Firme.
- II.- Terreno de Transición.
- III.- Terreno Compresible.

De acuerdo con las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 + (c - a_0)T/T_1 && ; \text{ si } T < T_1 \\
 a &= c && ; \text{ si } T_1 \leq T \leq T_2 && \dots(4). \\
 a &= c (T_2/T)^{\gamma} && ; \text{ si } T > T_2
 \end{aligned}$$

\* (Las figuras 5 y 6 se muestran en el final del capítulo).

en donde:

T: periodo de interés; T, T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> expresados en segundos.

Valores de a<sub>0</sub>, T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> y r

Zona	a <sub>0</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	r
I	0.03	0.3	0.8	1 / 2
II	0.045	0.5	2.0	2 / 3
III	0.060	0.8	3.3	1

El coeficiente "c" se denomina coeficiente sísmico. El Reglamento lo define en su artículo 234 como el cociente de la fuerza horizontal V en la base de la construcción, sin reducirla por ductilidad, al peso W de la misma, sobre dicho nivel:  $c = V / W$ .

Los valores de estos coeficientes que intervienen en las fórmulas anteriores son los correspondientes a los de las estructuras del grupo "B" o sea:

Zona I ; c = 0.16

Zona II ; c = 0.20

Zona III ; c = 0.24

A continuación, graficaremos las fórmulas (4) para los espectros de diseño de los tres tipos de zonas.

### Espectros de Aceleraciones

Para  $T < T_1$  ( $T < 0.3$ ).

$$a = 0.03 + (0.16 - 0.03) T / 0.3 ; a = 0.03 + 0.13 T / 0.3$$

Si  $T = 0$  ;  $a = 0.03$

Si  $a = c = 0.16$  ;  $T = 0.3$

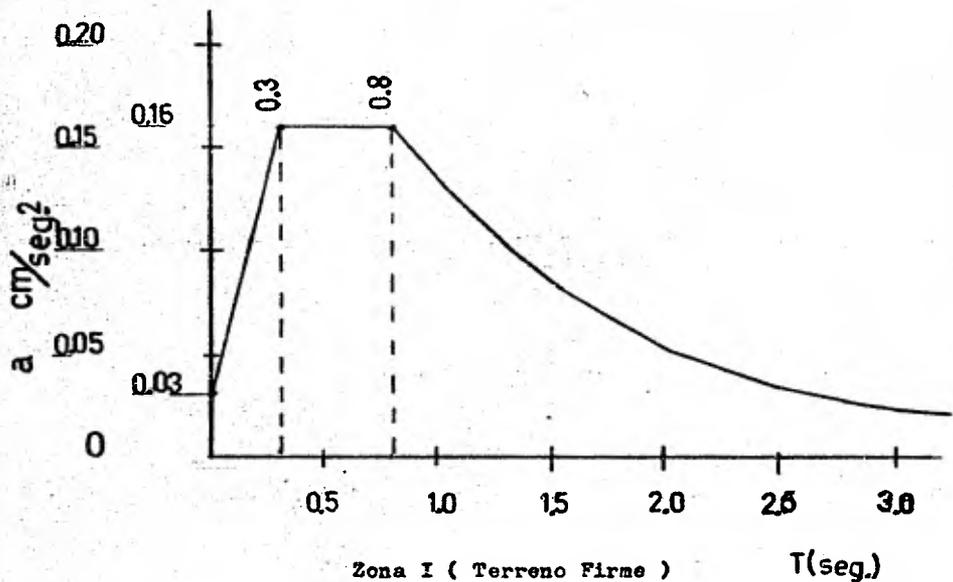
Para  $T_1 \leq T \leq T_2$  ( $0.3 \leq T \leq 0.8$ )

$$a = c = 0.16$$

Para  $T > T_2$  ( $T > 0.8$ )

Si  $T = 0.8$  ;  $a = 0.16$  Si  $T \rightarrow \infty$  ;  $a \rightarrow 0$

Graficando estos valores:



Para  $T < 0.5$

$$a = 0.045 + (0.20 - 0.045) T / 0.5$$

Si  $T = 0$  ;  $a = 0.045$

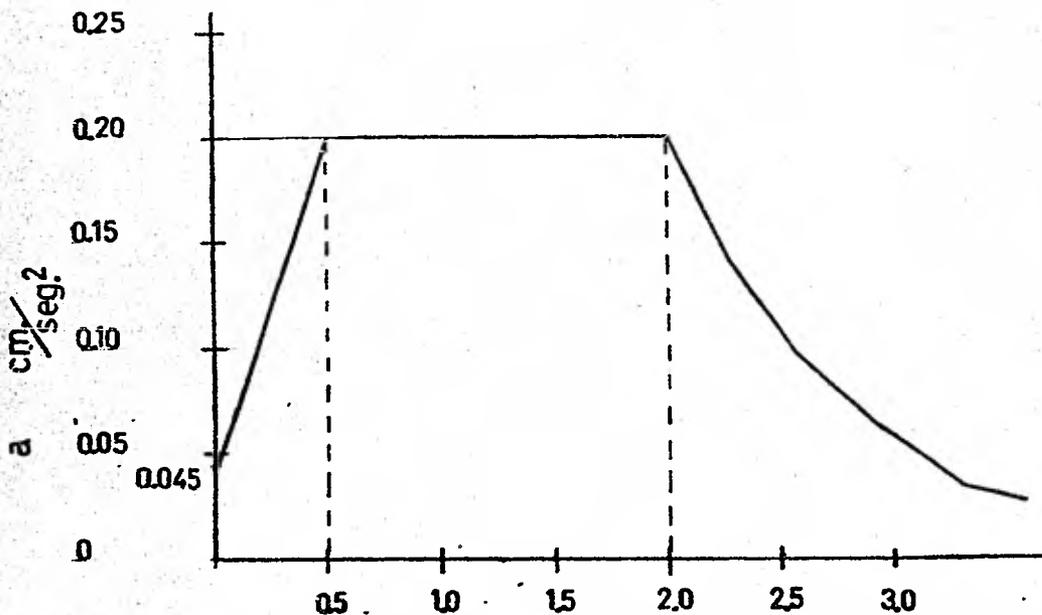
Si  $a = 0.20$  ;  $T = 0.5$

Para  $0.5 \leq T \leq 2.0$

$$a = 0.20$$

Si  $T \Rightarrow \infty$  ;  $a \Rightarrow 0$

Graficando estos valores:



Zona II (Terreno de Transición) T(seg.)

Para  $T < 0.8$

$$a = 0.06 + (0.24 - 0.06) T / 0.8$$

Si  $T = 0$  ;  $a = 0.06$

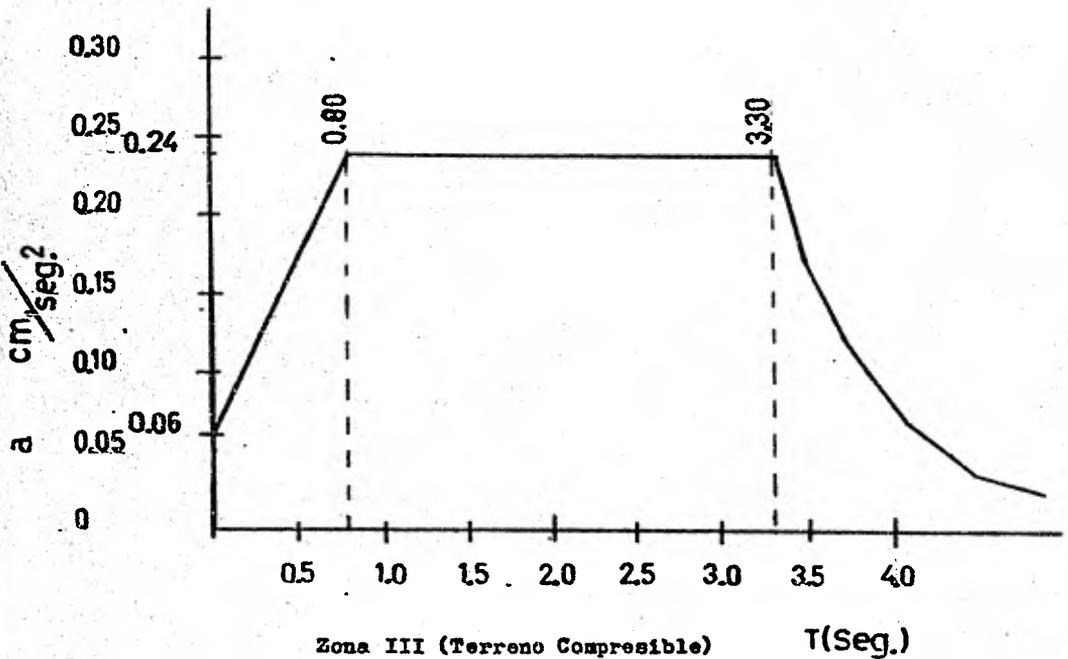
Si  $a = 0.24$  ;  $T = 0.8$

Para  $0.8 \leq T \leq 3.3$

$a = 0.24$

Si  $T \rightarrow \infty$  ;  $a \rightarrow 0$

Graficando estos valores:



Las ordenadas de estos espectros deberán reducirse por ductilidad, de acuerdo con los factores  $Q'$  correspondientes.

$$Q' = Q \text{ para } T > T_1$$

$$Q' = I + (Q - I) T/T_1 \text{ para } T < T_1$$

Los valores del factor  $Q'$  se definen en el artículo 235 del Reglamento.

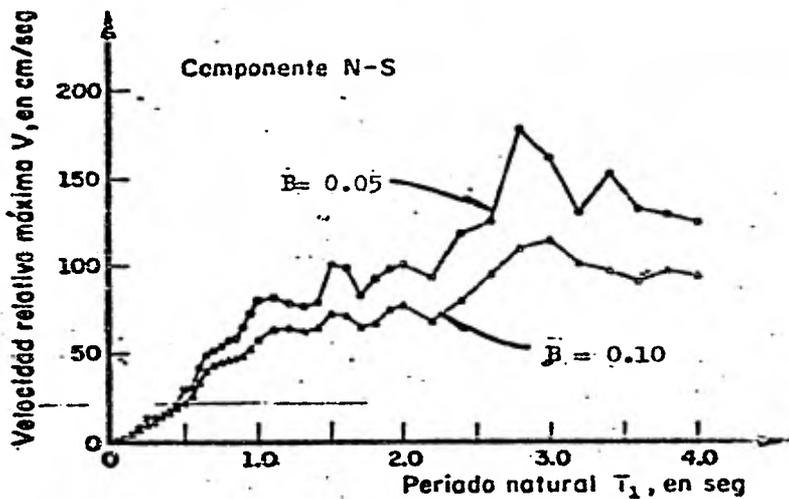


Fig. (3)

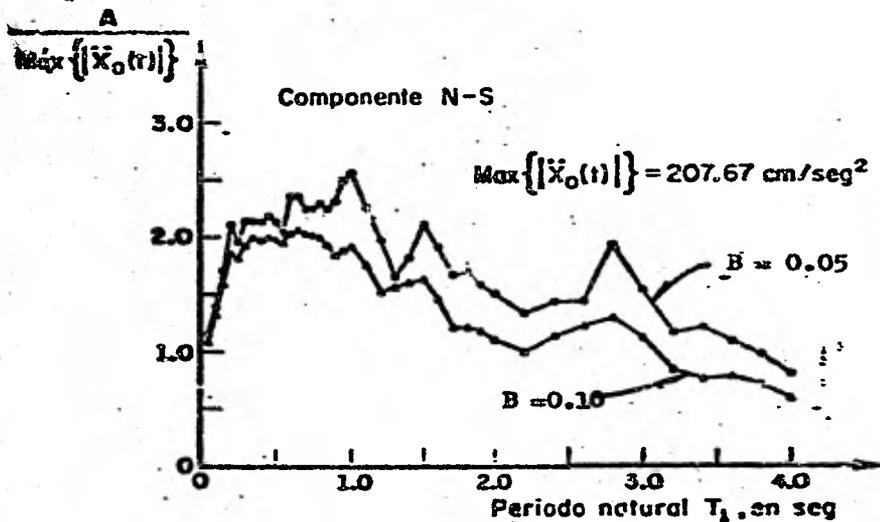
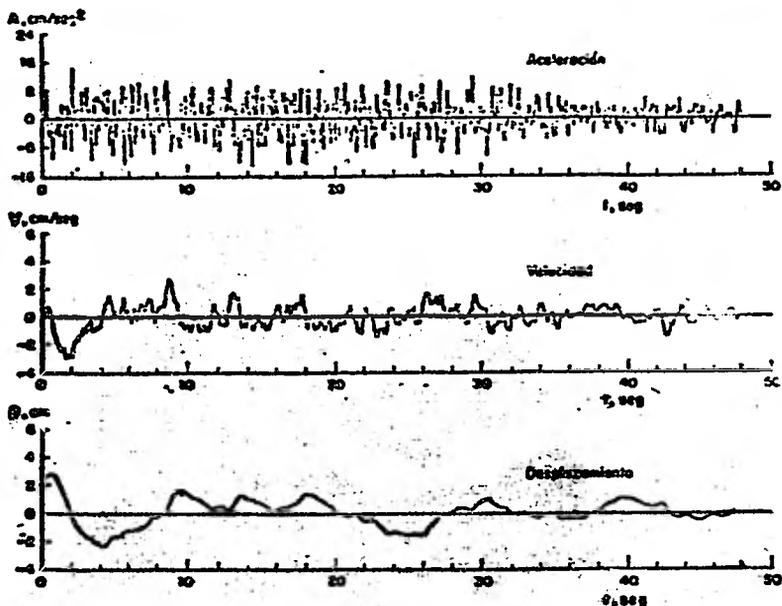
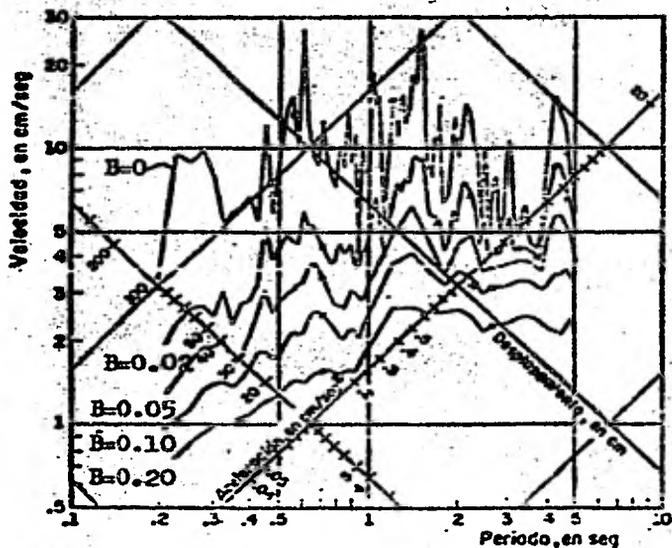


Fig. (4) Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo.



Espectros del sismo registrado en C.U., Componente E-W. Sismo del 6 de julio de 1964. Según M. Cárter, O. Rasón y I. Alvaró.

Fig. (5)



Espectros del sismo registrado en C.U., componentes E-W. Sismo del 6 de julio de 1964

Fig. (6)

## CAPITULO II

### PRINCIPIOS BASICOS DE DINAMICA DE VIBRACIONES

#### Definiciones:

#### 1).- Grado de libertad

Al número de coordenadas independientes, necesarias para definir la posición de un cuerpo en vibración en un momento dado, se le denomina grado de libertad.

#### 2).- Sistema vibratorio

Se denomina sistema vibratorio al cuerpo o conjunto de cuerpos elásticos que presenten un movimiento de tipo oscilatorio o vibratorio.

#### 2a).-Sistema vibratorio discreto

Cuando la masa y las propiedades elásticas de un cuerpo pueden considerarse concentradas en ciertos puntos del mismo, se dice que el sistema es un sistema vibratorio discreto. Ver Fig. 1a y 1b.

Un sistema discreto puede ser de uno o de varios grados de libertad.

#### 2b).-Sistema vibratorio continuo

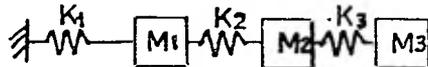
Cuando la masa y las propiedades elásticas de un cuerpo se encuentran distribuidos en alguna forma dentro del mismo, se dice que el sistema es un sistema continuo. Un sistema continuo tiene un infinito número de grados de libertad; pues para definir la posición del cuerpo en cualquier instante se requieren-

tambi3n un n3mero infinito de coordenadas independientes. Ver

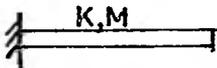
Fig. 1c.



a) SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD (SISTEMA SIMPLE)



b) SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD (SISTEMA MULTIPLE)



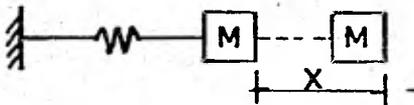
c) SISTEMA CONTINUO

FIG. 1.0 SISTEMAS VIBRATORIOS

SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

1).- Vibraci3n libre no amortiguada

Supongamos el sistema simple mostrado en la Fig. 2, el cual se encuentra en reposo y que al desplazar su masa y posteriormente soltarla se genera una fuerza de inercia, que de acuerdo con la 2a. Ley de Newton es:  $F_i = -M\ddot{x}$ ; a su vez para deformar al resorte una distancia  $x$  a partir del punto de reposo se requiere de una fuerza  $P = Kx$ .



D3agrama De Cuerpo Libre

FIG. 2.0

Estableciendo el equilibrio del cuerpo:

$$F_i + P = 0$$

$$M\ddot{x} + Kx = 0 ; \text{ Dividiendo entre } M:$$

$$\ddot{x} + (k/M)x = 0$$

Si definimos a la relación:  $k/M = \omega^2$  (en donde  $\omega$  es la frecuencia - circular; cuyas unidades son: radianes por seg.) tenemos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \dots (1)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$x = A \text{ sen. } \omega t + B \text{ cos. } \omega t \dots (2)$$

Se trata de un movimiento de tipo vibratorio, puesto que  $\text{sen. } \omega t$  y  $\text{cos. } \omega t$ , son funciones periódicas y A, B, constantes arbitrarias - dependientes de las condiciones iniciales del sistema.

Si para  $t = 0$ ,  $x = x_0$  y  $\dot{x} = v_0$ . De ecuación (2):

$$x = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t$$

$$\text{Así: } \omega A = v_0 \quad A = v_0 / \omega$$

$$B = x_0$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2):

$$x = (v_0 / \omega) \text{sen. } \omega t + x_0 \text{ cos. } \omega t \dots (3)$$

De la ecuación (1):

$$\omega^2 = k/M; \quad \omega = \sqrt{k/M} \quad \text{Además } \omega = 2\pi / T$$

$$2\pi / T = \sqrt{k/M}; \quad T = 1/T = 1 / (2\pi \sqrt{k/M}) \quad \text{Y } T = 2\pi \sqrt{M/k}$$

## 2).- Vibración libre amortiguada

Un sistema vibratorio sufre amortiguación; es decir su energía va decreciendo paulatinamente, esto debido a fricciones externas o a fricciones moleculares internas de su material elástico.

2.1).- Se consideran tres tipos principales de amortiguamiento:

a). Amortiguación viscosa

b).- Amortiguación por fricción

c).- Amortiguación estructural

Debido al grado de dificultad que representa el valuar el amortiguamiento en un sistema vibratorio, generalmente dicho amortiguamiento es considerado con bastante aproximación como viscoso; es decir se considera proporcional a la velocidad.

De la figura (3) se obtiene lo siguiente:

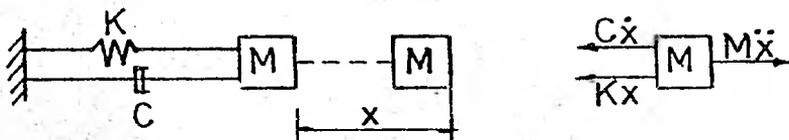


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

FIG. (3)

Estableciendo el equilibrio

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \dots (1)$$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$x = e^{rt} \dots (2)$$

En donde "e" es la base de los logaritmos naturales y "r" una constante.

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$e^{rt} (Mr^2 + Cr + K) = 0, \text{ lo cual se cumple para:}$$

$$Mr^2 + Cr + K = 0, \text{ dividiendo entre M:}$$

$$r^2 + (C/M)r + K/M = 0 \dots (3)$$

La solución de esta ecuación de segundo grado está representada por las raíces siguientes:

$$r_{1,2} = \frac{c}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}} \dots (4)$$

Por lo que la solución de la ecuación (1) es del tipo de la ecuación (4), y tiene dos partes representadas por la existencia de las dos raíces.

$$X = A_0 e^{r_1 t} + B_0 e^{r_2 t} \dots (5)$$

Donde  $A_0$  y  $B_0$  son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales del sistema  $X_0, V_0$ .

Si las raíces  $r_1$  y  $r_2$  son iguales entonces en la ecuación (4) el radical debe ser = 0:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}} = 0 ; c = 2M\sqrt{\frac{k}{M}} \therefore C_c = 2Mw \dots (6)$$

En donde:

$w$ .- Frecuencia angular del sistema no amortiguado

$C_c$ .- Coeficiente de amortiguación crítica

Si definimos la relación de amortiguamiento como:  $B = \frac{c}{C_c}$

En donde:

$C$  = Coeficiente de amortiguamiento

$C_c$  = Coeficiente de amortiguamiento crítico

Si sustituimos en la ecuación (6):

$$\frac{c}{B} = 2Mw \text{ Sustituyendo en la ecuación (4):}$$

$$r_{1,2} = -Bw \pm \sqrt{(Bw)^2 - w^2} = w(-B \pm \sqrt{B^2 - 1}) \text{ Así } r_{1,2} = w(-B \pm \sqrt{B^2 - 1}) \dots (7)$$

Si  $B=1$  el radical es nulo y la amortiguación es crítica, con  $r_1 = r_2 = -w$  por lo que ya no es solución válida para la ecuación original (ecuación 5), pues se reduce a un sólo término con variable " $t^2$ ", que no satisface simultáneamente las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.

Por lo que debemos proponer otra solución:

$$\text{Sea } x = A_0 e^{r_1 t} + B_0 e^{r_2 t} \dots (8)$$

Sustituyendo  $r_1 = r_2 = -w$  tenemos:

$$x = A_0 e^{-wt} + B_0 e^{-wt} \dots (9)$$

Esta función no es oscilatoria y el sistema regresa a su posición de equilibrio en un tiempo corto, esta cualidad se utiliza en diseño de maquinaria de cañones, instalaciones eléctricas, etc.

Si en la ecuación (7)  $\theta < 1$  el radical se vuelve una cantidad imaginaria y se dice que la amortiguación es subcrítica por lo tanto la ecuación (7) se transforma en:

$$\gamma_{1,2} = w (-B \pm i\sqrt{1-B^2}) \dots (10)$$

Sustituyendo en la ecuación (8) y haciendo algunas consideraciones y simplificaciones:

$$x = \frac{e^{-Bwt}}{w} (A_0 \cos w't + B_0 \sin w't) \dots (11) ; w' = w\sqrt{1-B^2}$$

Dicha ecuación representa un movimiento sinusoidal con frecuencia angular amortiguada  $w'$ . La amplitud máxima de esta ecuación ocurre cuando  $w't = 0; \pi; 2\pi, \dots$  etc. Por lo tanto:

$$x_{\text{máx.}} = x = A_0 e^{-wt}$$

La representación gráfica de la ecuación (II) es la indicada en la figura (4).

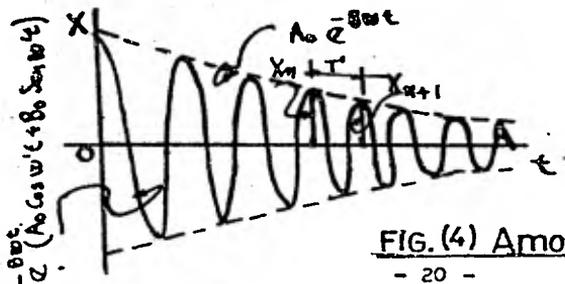


FIG. (4) Amortiguación Subcrítica.

Se observa como la amplitud tiende a cero al tender a infinito el valor de  $t$ . De las condiciones iniciales  $X_0$ ,  $V_0$  obtenemos los valores  $A_0$  y  $B_0$ .

$$A_0 = X_0 \text{ y } B_0 = \frac{V_0 + B_w X_0}{w'}$$

Finalmente si en la ecuación (7)  $B > 1$  las dos raíces  $r_1$  y  $r_2$  son reales y se dice que la amortiguación es hiper crítica. Aquí también el sistema regresa a su posición de equilibrio pero en un tiempo mayor que para el caso de amortiguación crítica; esta cualidad se aprovecha en el diseño de retardadores como los usados en las puertas y en los brazos de tocadiscos. Este movimiento está representado por la ecuación siguiente:

$$X = A_0 e^{(-B + \sqrt{B^2 - 1})wt} + B_0 e^{(-B - \sqrt{B^2 - 1})wt} \dots \dots (12)$$

Dentro del campo estructural es mas adecuado considerar oscilaciones con amortiguamiento subcrítico, pero debido a que los coeficientes de amortiguamiento son muy pequeños se pueden despreciar, por lo que  $w' = w$  y la ecuación (II) resulta de la forma:

$$X = e^{-Bwt} (A_0 \cos wt + B_0 \sin wt) \dots \dots (13)$$

La cual representa un movimiento sinusoidal con frecuencia circular sin amortiguamiento.

### 3).- Vibración forzada

La pérdida de energía de un sistema debido al amortiguamiento se puede compensar, mediante la aplicación de fuerzas externas.

#### 3.1).- Vibración forzada sin amortiguamiento

Se supone el mismo sistema mostrado en la figura (2), pero in

cluyendo la fuerza excitadora:  $P = P_i \text{ sen } \omega''t$ , así:

$M\ddot{x} + Kx = P_i \text{ sen } \omega''t$ . Dividiendo entre  $M$ :

$\ddot{x} + (K/M)x = P_i \text{ sen } \omega''t$ . Como  $K/M = \omega^2$  entonces:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (P_i/M) \text{ sen } \omega''t \dots (14)$$

El primer término de esta ecuación representa un movimiento vibratorio libre sin amortiguamiento, por lo que la solución está dada por la ecuación (2). Tomando en cuenta la solución particular nos conduce a la solución general de la ecuación (14).

$$x = A_0 \text{ sen } \omega t + B_0 \text{ cos } \omega t + \left[ \frac{P_i}{(\omega^2 - \omega''^2) M} \right] \text{ sen } \omega''t \dots (15)$$

Las dos primeras partes del segundo término representan la parte libre de la solución, con un período natural  $T$  y una frecuencia circular  $\omega$ ; la tercera parte se denomina parte forzada de la solución, ya que representa una vibración que tiene la misma frecuencia  $\omega''$  y un período que la carga sinusoidal  $P$ .

Para determinar los valores de las constantes  $A_0$  y  $B_0$  suponemos que para  $t = 0$ ;  $x_0 = 0$  y  $\dot{x} = 0$  por lo tanto:

$$\dot{x} = \omega A_0 \text{ cos } \omega t - \omega B_0 \text{ sen } \omega t + \omega'' \left[ \frac{P_i}{M (\omega^2 - \omega''^2)} \right] \text{ cos } \omega t$$

$$\dot{x} = 0 = \omega A_0 - 0 + \omega'' \frac{P_i}{M (\omega^2 - \omega''^2)}. \text{ Por lo tanto } A_0 = \omega'' \left( \frac{P_i}{\omega M (\omega^2 - \omega''^2)} \right)$$

$$x_0 = 0 = 0 + B_0 + 0. \text{ Por lo tanto: } B_0 = 0$$

Sustituyendo en la ecuación (15):

$$x = - \frac{\omega''^4 P_i}{\omega M (\omega^2 - \omega''^2)} \text{ Sen } \omega t + \frac{P_i}{M (\omega^2 - \omega''^2)} \text{ Sen } \omega'' t ; \quad x = \frac{P_i}{M (\omega^2 - \omega''^2)} \left( \text{Sen } \omega'' t - \frac{\omega''}{\omega} \text{ Sen } \omega t \right)$$

$$x = \frac{P_i / M \omega^2}{1 - \left( \frac{\omega''}{\omega} \right)^2} \left( \text{Sen } \omega'' t - \frac{\omega''}{\omega} \text{ Sen } \omega t \right) \dots (16)$$

$$\frac{P_i}{M\omega^2} = \frac{P_i}{M} \frac{M}{k} = \frac{P_i}{k} = X_{EST.}$$

Deflexión estática producida por la  $P_i$  (máximo valor de la carga sinusoidal  $P$ ). Aplicada como carga estática.

$$X = X_{EST.} \frac{\sin \omega t - \left(\frac{\omega''}{\omega}\right) \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2}; \text{ Si F.A.D.} = \frac{\sin \omega'' t - \left(\frac{\omega''}{\omega}\right) \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2} \therefore X = X_{EST.} \times \text{F.A.D.} \dots (17)$$

$X$ .- Representa el desplazamiento dinámico para un tiempo " $t$ " cualquiera.

F.A.D.- Representa el factor de amplificación dinámica.

### 3.2).- Vibración forzada con amortiguamiento

De una manera similar a la deducción de la ecuación de vibración forzada sin amortiguamiento, pero tomando en cuenta éste último, tenemos:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = P_i \sin \omega t; \text{ dividiendo entre } M:$$

$$\ddot{x} + (C/M) \dot{x} + K/M = P_i \sin \omega'' t/M$$

Recordando que:  $\omega^2 = K/M$  y  $B=C/2m\omega$  por lo tanto:

$$\ddot{x} + 2B\dot{x} + \omega^2 x = P_i \sin \omega'' t/M \dots (18)$$

La superposición de las soluciones homogénea y particular nos conduce a la solución general de la ecuación (18).

$$X = X_{EST.} \times \frac{\left[ \left(1 - \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2\right) \cos \omega'' t - 2 \frac{B}{\omega} \frac{\omega''}{\omega} \cos \omega'' t \right] + \frac{P_i}{\omega} \left[ 2 \frac{B}{\omega} \frac{\omega''}{\omega} \cos \left( \sqrt{\omega^2 - B^2} + \frac{\omega''}{\omega} \right) + \left( \frac{B^2}{\omega^2} + \frac{\omega''^2}{\omega^2} - 1 \right) \sin \left( \sqrt{\omega^2 - B^2} \right) \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{B}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2}$$

La expresión F.A.D. es muy similar a la obtenida anteriormente para el caso de vibración forzada sin amortiguamiento; pero aquí se observa una parte llamada parte libre, representada por el segundo paréntesis del numerador y una parte forzada representada por el primer paréntesis.

La solución homogénea de la ecuación (18) se presenta cuando  $P_i \sin \omega'' t/M = 0$ . que es la misma solución dada para la ecuación de vibración libre con amortiguamiento.

Debe observarse que el efecto del amortiguamiento sobre el F.A.D. es el de hacerlo disminuir para todo valor de  $w''/w$ .

También cuando  $B/w$  crece, F.A.D. decrece; cuando  $w''/w = 1$ , se reduce a un valor finito pero muy grande.

La parte libre es transitoria y desaparece gradualmente mientras la parte forzada permanece constante.

Si en la expresión  $F.A.D. = \frac{S_{av} w'' t - (\frac{w''}{w}) S_{av} w t}{1 - (\frac{w''}{w})^2}$ , que es la del factor de amplificación dinámica para un sistema de un grado de libertad - sin amortiguamiento, calculamos los puntos máximos o mínimos para - los tiempos siguientes:

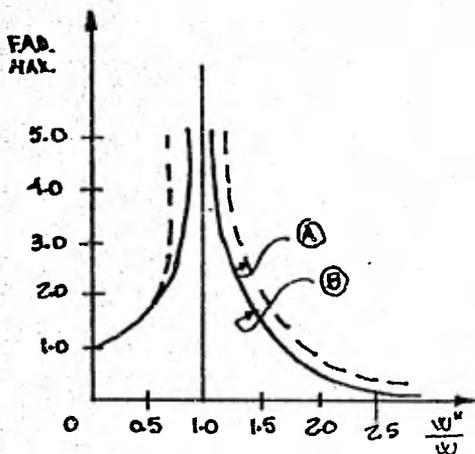
$$t = \frac{2\pi n}{w' \pm w}$$

; donde  $n =$  entero  $1, 2, 3, \dots$

El valor de "n" que dá los valores -- máximos o mínimos se obtiene por tanteos.

Así:

Graficando los valores  $w''/w$  V.S. F.A.D. máx. tenemos:



Curva "A".- Se considera simultánea - mente parte libre y parte forzada.

Curva "B".- Se desprecia parte libre.

En ambas curvas se observa que para - el valor  $w''/w = 1$ . El valor del F.A.D. tiende al infinito. A este fenómeno se le denomina "RESONANCIA" y es de - vital importancia en el diseño de las

estructuras. Es decir cuando  $\omega = \omega_n$  la estructura entra en "RESONAN-  
CIA" y el F.A.D., crece infinitamente llevando como consecuencia -  
desplazamientos dinámicos muy grandes que logra el colapso de la -  
misma.

## SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

1.- Cuando en una estructura los únicos desplazamientos de consideración son los debidos a esfuerzos cortantes, se dice que ésta constituye un sistema estrechamente acoplado. Sin embargo, - prácticamente sólo se presenta en marcos rígidos en los cuales la rigidez de las trabes es muy grande comparada con la de las columnas.

Un sistema remotamente acoplado es el constituido por una estructura cuyas deformaciones son debidas básicamente a flexión del conjunto; es decir, que cada nivel de dicha estructura sufre si multáneamente un giro y un desplazamiento. En estos sistemas - si debe tomarse en cuenta la influencia de una masa alejada a - diferencia de los sistemas estrechamente acoplados, en los cuales sólo afectan las masas adyacentes.

Una estructura en la cual la rigidez lateral la constituyen muros en voladizo, o constituida por trabes de rigidez muy baja - comparada con la de las columnas; constituye un sistema remotamente acoplado. Existe una gran dificultad para el análisis de un sistema de este tipo.

### VIBRACION LIBRE NO AMORTIGUADA

Como anteriormente se anotó, en la práctica los coeficientes de amortiguación son muy pequeños por lo que se puede considerar que  $w=w''$ . Por lo tanto trataremos el caso de un sistema de vibración libre sin amortiguamiento. Considerando el siguiente sistema de tres grados de libertad.



Estableciendo el equilibrio:

$$M \ddot{x}_1 + 3K x_1 - 2K x_2 + 2K x_1 = 0$$

$$2M \ddot{x}_2 + 2K x_2 - 2K x_1 - K x_3 + K x_2 = 0$$

$$3M \ddot{x}_3 + 0 - K x_2 = 0$$

$$M \ddot{x}_1 + 5K x_1 - 2K x_2 = 0$$

$$2M \ddot{x}_2 - 2K x_1 + 3K x_2 - K x_3 = 0$$

$$3M \ddot{x}_3 + 0 - K x_2 + K x_3 = 0$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 3M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K & -2K & 0 \\ -2K & 3K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

En donde:

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 3M \end{bmatrix}$$

Matriz de masas (diagonal)

$$\begin{bmatrix} 5K & -2K & 0 \\ -2K & 3K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix}$$

Matriz de rigideces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}$$

Vector de desplazamientos, y vector de aceleraciones, respectivamente

Por lo tanto la ecuación matricial de movimiento de un sistema vibratorio libre sin amortiguamiento es de la forma:

$$M \ddot{x} + K x = 0 \dots\dots(1)$$

Como se vió anteriormente la solución de la ecuación de movimiento-libre sin amortiguamiento es la siguiente:

$X = (V_0/W) \text{Sen } \omega t + X_0 \text{Cos } \omega t \dots\dots(a)$ . Otra forma de representar esta solución es la dada por la expresión siguiente:

$$X = V \text{Sen } (\omega t + A) \dots\dots(b)$$

La cual debe satisfacer a la ecuación (1) por lo tanto:

$\ddot{x} = -\omega^2 V \text{Sen } (\omega t + A)$  sustituyendo esta expresión y la (b) en la ecuación (1):

$$-M \omega^2 V \text{Sen } (\omega t + A) + K V \text{Sen } (\omega t + A) = 0 \text{ ó bien } -\omega^2 M V + K V = 0$$

$$\text{Así: } K V = \omega^2 M V \quad \text{Si denominamos } \lambda = \omega^2$$

Que es la ecuación de valores característicos.

Para que la solución sea diferente de la trivial su determinante debe ser igual a cero.

$$[K - \lambda M] V = 0 ; |K - \lambda M| = 0$$

La cual representa una ecuación polinómica de grado "N" en " $\lambda$ ", cuyas raíces son a la vez una solución de la ecuación de valores característicos.

A cada valor característico " $\lambda$ " le corresponde un vector característico  $V_i$  denominado modo natural de vibración o vector modal, cuyas componentes son las amplitudes de los desplazamientos reales de cada masa. Así que para "N" modos de vibración le corresponden "N" -

vectores modales que constituyen la matriz modal :

$$V = [V_{JR}] = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \dots V_{1N} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \dots V_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{N1} & V_{N2} & V_{N3} \dots V_{NN} \end{bmatrix} \dots (2)$$

La primer columna representa el primer modo de vibración, la segunda representa el segundo modo y así sucesivamente hasta "N". Al primer modo se le denomina fundamental y al resto se les denomina modos superiores.

Los "N" valores característicos constituyen una matriz diagonal denominada "matriz espectral".

$$\lambda = \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & w_2^2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & w_3^2 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots w_N^2 \end{bmatrix} \dots (3)$$

Desarrollando la ecuación (b):

$$X = V(\text{Sen } wt \text{ Cos } A + \text{Cos } wt \text{ Sen } A) = V \text{ Sen } wt \text{ Cos } A + V \text{ Cos } wt \text{ Sen } A$$

$$X = V \text{ Sen } wt \text{ Cos } A + V \text{ Cos } wt \text{ Sen } A \dots (c)$$

Por similitud con la ecuación (a) tenemos :

$$X = (V_0 / w) \text{ Sen } wt + X_0 \text{ Cos } wt \dots (a)$$

$$V \text{ Cos } A = V_0 / w \therefore V = (V_0 / w) / \text{Cos } A$$



### CAPITULO III

#### MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL CÁLCULO DE LOS MODOS DE VIBRACION

Se describirán solamente aquellos métodos mas usuales para el cálculo de modos de vibración, sin embargo debe mencionarse que son varios los métodos numéricos encaminados a este fin.

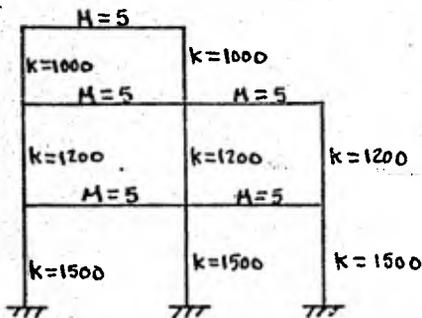
Dichos métodos están basados en iteraciones, partiendo de valores supuestos y mejorándolos sucesivamente hasta lograr finalmente los modos y frecuencias de vibración.

En un ejemplo común aplicaremos los métodos de Newmark, de Holzer y el Stodola y Vianello.

Con la finalidad de no complicar mucho los cálculos y de facilitar la aplicación y entendimiento de estos métodos usaremos un ejemplo relativamente sencillo.

Ejemplo:

En el siguiente marco calcular los modos de vibración, las frecuencias circulares y los periodos. Considérense los valores de masas y rigideces indicados en la figura.



UNIDADES:

M: MASA. -  $\frac{\text{Kg} \cdot \text{Seg}^2}{\text{cm}}$

K: RIGIDEZ. -  $\frac{\text{Kg}}{\text{cm}}$

Solución por el método de Stodola y Vianello

Partiendo de la ecuación:  $KV = w^2MV$

Premultiplicando ambos miembros por  $M^{-1}$  tenemos:

$$M^{-1}KV = w^2M^{-1}MV; M^{-1}KV = w^2V; \text{ SI } H = M^{-1}K, \text{ así: } HV = w^2V \dots (1)$$

Esta ecuación es la base para las iteraciones. Se parte de un vector  $V^{(1)}$  y se calcula el vector  $HV^{(1)}$ , que debe ser proporcional a  $V^{(1)}$ . Después de algunas iteraciones se logra este fin. (este método converge a la frecuencia más alta).

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 8100 & -3600 & 0 \\ -3600 & 5600 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz M es:

$$M^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando  $H = M^{-1}K$ :

$$H = \frac{100}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -40 & 40 \end{bmatrix}$$

Se calcula  $HV^{(1)}$ :

$$\text{Suponiendo } V^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$HV^{(1)} = 10 \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -40 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 81 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \times 81 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.444 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ No es proporcio} \\ \text{nal a } V^{(1)}$$

2a. iteración:

$$HV^{(2)} = 10 \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -40 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.444 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 96.9724 \\ -60.364 \\ 17.76 \end{bmatrix} = 10 \times 96.9724 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.628 \\ 0.183 \end{bmatrix}$$

Después de varias iteraciones tenemos finalmente:

$$HV^{(10)} = 10 \begin{bmatrix} 110.736 \\ -91.556 \\ 51.64 \end{bmatrix} = 10 \times 110.736 \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.827 \\ 0.466 \end{bmatrix}$$

11a.

$$HV^{(11)} = 10 \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -40 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.827 \\ 0.466 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.772 \\ -91.632 \\ 51.72 \end{bmatrix} = 10 \times 110.772 \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.827 \\ 0.467 \end{bmatrix}$$

Aquí prácticamente el vector  $HV^{(11)}$  es proporcional al vector  $V^{(11)}$

$$\omega_3^2 = 10 \times 110.772 = 1107.72$$

$$\omega_3 = 33.38 \text{ Rad./seg.}$$

$$\tau_3 = \frac{2\pi}{35.38} = 0.19 \text{ seg.}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.827 \\ 0.467 \end{bmatrix}$$

Mediante la aplicación de la propiedad de ortogonalidad de los modos obtendremos el primer y segundo modos:

$$\begin{bmatrix} 1.000 & -0.827 & 0.467 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1S} \\ V_{2S} \\ V_{3S} \end{bmatrix} = 0$$

Efectuando operaciones:

$$10V_{1S} - 8.27 V_{2S} + 2.335 V_{3S} = 0 \dots\dots(a)$$

Ahora por otro lado tenemos que:

$$HV = \omega^2 V$$

Así:

$$10 \begin{bmatrix} 81 & -36 & 0 \\ -36 & 56 & -20 \\ 0 & -40 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{33} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{33} \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones:

$$\left. \begin{aligned} 810 V_{12} - 360 V_{22} &= \omega^2 V_{12} \\ -360 V_{12} + 560 V_{22} - 200 V_{33} &= \omega^2 V_{22} \\ -400 V_{22} + 400 V_{33} &= \omega^2 V_{32} \end{aligned} \right\} \dots\dots(b)$$

Si en (a) hacemos  $\omega = 2$  y despejamos a  $V_{12}$ :

$$10 V_{12} - 8.27 V_{22} + 2.335 V_{32} = 0 ; V_{12} = \frac{1}{10} (8.27 V_{22} - 2.335 V_{32})$$

Sustituyendo en (b):

$$\frac{810}{10} (8.27 V_{22} - 2.335 V_{32}) - 360 V_{22} = \omega^2 V_{12}; 309.87 V_{22} - 189.135 V_{32} = \omega^2 V_{12}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{360}{10} (8.27V_{22} - 2.335 V_{32}) + 560V_{22} - 200V_{32} = w^2 V_{22}; 262.28V_{22} - 115.94V_{32} = w^2 V_{22} \\
 & -4127V_{22} + 400V_{32} = w^2 V_{32}; -400V_{22} + 400V_{32} = w^2 V_{32}
 \end{aligned}$$

Se toman las dos últimas ecuaciones que constituyen el sistema reducido en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 262.28 & -115.94 \\ -400.00 & 400.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{22} \\ V_{32} \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} V_{22} \\ V_{32} \end{bmatrix}$$

En forma similar a la obtención del tercer modo tenemos:

$$H^*v(1) = w^2 v$$

1a. iteración:

$$\text{Suponiendo } v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; H^*v^{(1)} = \begin{bmatrix} 262.28 & -115.94 \\ -400.00 & 400.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262.28 \\ -400.00 \end{bmatrix} = 262.28 \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

2a. iteración:

$$H^*v^{(2)} = \begin{bmatrix} 262.28 + 115.94(1.5) \\ -400.0 + 400.0(-1.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 436.19 \\ -1000.00 \end{bmatrix} = 436.19 \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.29 \end{bmatrix}$$

3a. iteración:

$$H^*v^{(3)} = \begin{bmatrix} 527.78 \\ -1316.00 \end{bmatrix} = 527.78 \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.49 \end{bmatrix}$$

4a. iteración:

$$H^*v^{(4)} = \begin{bmatrix} 550.97 \\ -1396.00 \end{bmatrix} = 550.97 \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.534 \end{bmatrix}$$

5a. iteración:

$$H \cdot v^{(5)} = \begin{bmatrix} 556.07 \\ -1413.60 \end{bmatrix} = 556.07 \begin{bmatrix} 1.00 \\ 2.84 \end{bmatrix}$$

6a. iteración:

$$H \cdot v^{(6)} = \begin{bmatrix} 556.77 \\ -1416.00 \end{bmatrix} = 556.77 \begin{bmatrix} 1.00 \\ -2.54 \end{bmatrix}$$

Como  $Hv^{(6)} = v^{(6)}$

$$v_{22} = 1.0$$

$$v_{32} = -2.54$$

$v_{12}$  se calcula con ecuación (a):

$$w_2^2 = 556.77 \quad v_{12} = \frac{1}{10} (8.27 \times 1.0 + 2.335 \times 2.54) = \frac{1}{10} (14.20) = 1.42$$

Así finalmente tenemos el vector  $v_2$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.00 \\ -2.54 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo del modo fundamental debemos cumplir simultáneamente con la propiedad de ortogonalidad y con la ecuación matricial.

De ecuación (a):

$$10v_{11} - 8.27v_{21} + 2.335v_{31} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1.42 & 1.00 & -2.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{bmatrix} = 0 \text{ (ortogonalidad)}$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para  $V_{11}$  y  $V_{21}$  en términos de  $V_{31}$ :

$$10V_{11} - 8.27 V_{21} + 2.335 V_{31} = 0 ; V_{11} = \frac{8.27 V_{21} - 2.335 V_{31}}{10}$$

$$14.2V_{11} + 10V_{21} - 12.70V_{31} = 0 ; V_{11} = \frac{-10V_{21} + 12.7V_{31}}{14.2}$$

$$\frac{8.27V_{21} - 2.335V_{31}}{10} = \frac{-10V_{21} + 12.7V_{31}}{14.2} ; 14.2(8.27V_{21}) + 100V_{21} = 14.2(2.335)V_{31} + 12.7V_{31}$$

$$V_{21} = \frac{160.157}{217.434} V_{31} ; V_{21} = 0.737 V_{31}$$

$$V_{11} = \frac{-10 \times 0.737 V_{31} + 12.7V_{31}}{14.2} ; V_{11} = 0.375 V_{31}$$

Finalmente obtenemos el primer modo:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.737 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Comprobación

Mediante la propiedad de ortogonalidad, tenemos:

1er. y 3er. Modos

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -0.827 & 0.467 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.737 \\ 1.000 \end{bmatrix} = 0$$

Efectuando operaciones:

$$1 \times 10 \times 0.375 - 0.827 \times 10 \times 0.737 + 0.467 \times 5 \times 1.0 = 0$$

Primero y segundo modos.

$$\begin{bmatrix} 0.375 & 0.737 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.420 \\ 1.000 \\ -2.540 \end{bmatrix} = 0$$

Efectuando operaciones:

$$0.375 \times 10 \times 1.42 + 0.737 \times 10 \times 1.0 - 1.0 \times 5 \times 2.54 = 0$$

Cálculo de las frecuencias  $w_2$  y  $w_1$  :

De acuerdo con la ecuación matricial  $HV = w^2V$ , tenemos:

Frecuencia  $w_1$  :

$$\begin{bmatrix} 810 & -360 & 0 \\ -360 & 560 & -200 \\ 0 & -400 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.737 \\ 1.000 \end{bmatrix} = w_1^2 \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.737 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones:

$$810 \times 0.375 - 360 \times 0.737 = w_1^2 \times 0.375 ; w_1^2 = 102.48$$

$$-360 \times 0.375 + 560 \times 0.737 - 200 = w_1^2 \times 0.737 ; w_1^2 = 105.45$$

$$-400 \times 0.737 + 400 = w_1^2 \times 1.00 ; w_1^2 = 105.20$$

Frecuencia  $w_2$ :

$$\begin{bmatrix} 810 & -360 & 0 \\ -360 & 560 & -200 \\ 0 & -400 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.00 \\ -2.54 \end{bmatrix} = w_2 \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.00 \\ -2.54 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones:

$$810 \times 1.42 - 360 \cdot 0 = 1.42 w_2^2; w_2^2 = 556.49$$

$$-360 \times 1.42 \times 560 + 200 \times 2.54 = w_2^2; w_2^2 = 556.80 \quad w_2^2 = 556.80 \text{ Rad}^2/\text{Seg}^2$$

$$-400 - 400 \times 2.54 = -2.54 w_2^2; w_2^2 = 557.48 \quad w_2 = 23.6 \text{ Rad/Seg.}$$

$$T_2 = 0.27 \text{ Seg.}$$

Resumiendo.

Primer modo:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.737 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

$$w_1^2 = 105.45$$

$$w_1 = 10.27 \text{ Rad./Seg.}$$

$$T_1 = 0.61 \text{ Seg.}$$

Segundo modo:

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.704 \\ -1.789 \end{bmatrix}$$

$$w_2^2 = 556.80$$

$$w_2 = 23.60 \text{ Rad./Seg.}$$

$$T_2 = 0.27 \text{ Seg.}$$

Tercer modo:

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.827 \\ 0.467 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = 1107.7 \text{ Rad}^2/\text{Seg}^2$$

$$w_3 = 33.28 \text{ Rad/Seg.}$$

$$T_3 = 0.19 \text{ Seg.}$$

### Solución por el método de Newmark

Debido a que este método converge a la frecuencia más baja y que ya anteriormente se calcularon todos los modos por el método de Stodola y Vianello, únicamente calcularemos el primer modo o fundamental. Este método iterativo se basa en el equilibrio dinámico que debe existir en el movimiento libre estacionario de un sistema; es decir que debe haber un equilibrio entre las fuerzas de inercia y las acciones en los resortes del sistema.

$$F_i = Q = kx_i$$

$$K = \omega^2 M$$

$$\text{Así } F_i = \omega^2 M x_i$$

$F_i$  = Fuerza de inercia

$Q$  = Fuerza en los resortes

$X_i$  = Desplazamientos de las masas

$K$  = Rigidez

#### Procedimiento:

- 1.- Se suponen los desplazamientos iniciales de cada masa del sistema.
- 2.- Se calculan las fuerzas de inercia  $F_i$  en cada masa de acuerdo con la fórmula  $F_i = \omega^2 M X_i$ ; siendo  $\omega^2$  la incógnita.
- 3.- Se acumulan de derecha a izquierda los valores  $F_i$  para obtenerse los respectivos valores de  $Q_i$ .
- 4.- Se calculan los desplazamientos relativos entre niveles, por efecto de las fuerzas  $Q_i$  en los resortes:

$$\Delta x = \frac{Q_i}{K}$$

- 5.- Sumando acumulativamente de izquierda a derecha se obtienen los valores finales de los desplazamientos, tomándose en cuenta las

condiciones de frontera.

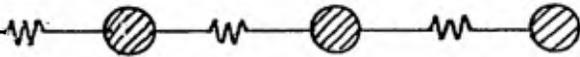
Cuando el método converge dichos desplazamientos deben ser proporcionales a los supuestos, siendo la constante de proporcionalidad igual a  $w^2$ .

6.- Se efectúa el cociente  $X_i/X_f = w^2$

Cuando dicho cociente es el mismo para todas las masas se considera que el sistema está resuelto.

#### Solución del ejemplo

Para las iteraciones posteriores a la primera se toman como nuevos desplazamientos los de las  $X_f$  anteriores pero divididos entre la primer cantidad, así sucesivamente hasta la convergencia.



UNIDADES:

Kgr/cm.  
Kgr.-Seg.<sup>2</sup>  
cm.  
cm.

K	4500	3600	2000	
M	10	10	5	
X <sub>1</sub>	0.00	1.00	2.00	3.00
F <sub>1</sub>	0.00	10.00	20.00	15.00
Q	45.00	35.00	15.00	
Ax	0.0100	0.0097	0.0075	
Xf	0.0100	0.0197	0.0272	
X1/XF	100.00	101.52	110.29	
X2	1.00	1.97	2.72	
F2	10.0	19.7	13.60	
Q	4330	33.30	13.60	
Ax	0.00962	0.00925	0.00680	
Xf	0.00962	0.01887	0.02567	
X2/XF	104.0	104.40	106.00	
X3	1.00	1.962	2.668	
F3	10.00	19.62	13.34	
Q3	42.96	32.96	13.34	
Ax	0.009547	0.009156	0.006670	
XF	0.009547	0.01870	0.02537	
X3/XF	104.7	104.9	105.20	
X4	1.00	1.959	2.657	
F4	10.00	19.59	13.285	
Q	42.875	32.875	13.285	
Ax	0.00953	0.00913	0.006643	
Xf	0.00953	0.01866	0.02530	
X4/XF	104.93	104.98	105.60	

Finalmente  $w_1^2 = 105.02$  y  $v_1 =$

1.000
1.960
2.655

 $= \frac{1}{2.655}$ 

2.377
0.738
1.000

Valores que concuerdan con los obtenidos con el método de Stodola y Vianello.

#### Método de Holzer

Este procedimiento tiene una base similar al procedimiento de New - mark, la diferencia principal radica en que los valores supuestos para iniciar la iteración son los valores de las frecuencias  $w^2$ .

#### Procedimiento

Convencionalmente trabajaremos de izquierda a derecha.

- 1.- Se supone una frecuencia  $w_0^2$
- 2.- Se supone un desplazamiento de la primera masa  $M_1$ , que puede ser  $x = 1$ .
- 3.- Se obtiene la fuerza en el primer resorte del sistema, mediante:  
 $F_1 = X_1 K = K$  (tensión).
- 4.- Se calcula la fuerza de inercia en la primera masa:  
 $F = -M_1 w_0^2 X_1 = -M_1 w_0^2$
- 5.- Se suman algebraicamente  $f_1$  y  $F_1$ , encontrándose la fuerza en el segundo resorte del sistema, la cual puede ser de compresión o de tensión.
- 6.- El desplazamiento relativo del segundo nivel respecto al primero se calcula una vez conociendo  $f_2$  y  $K_2$ , mediante:

$$\Delta X_2 = X_2 - X_1 = f_2 / K_2 ; X_2 = X_1 + f_2 / K_2$$

7.- Se calcula la fuerza de inercia  $F_2$  en la segunda masa:

$$F_2 = M_2 w_0^2 x_2$$

8.- Así sucesivamente se calculan desplazamientos y fuerzas en las masas y resortes del sistema.

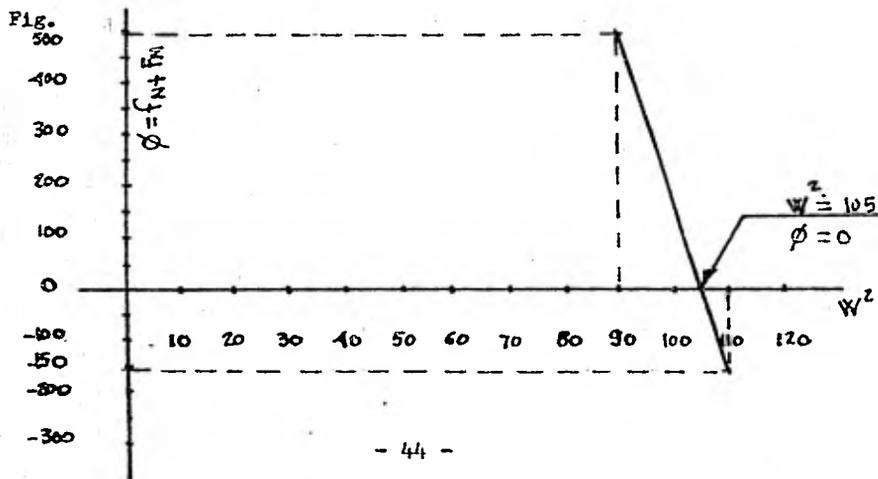
Cuando se cumpla que  $f_N + F_N = 0$ ; es decir cuando haya equilibrio entre las fuerzas de inercia y las fuerzas en los resortes del sistema.

Se considera que el problema está resuelto.

Para ayudar a una convergencia más rápida se puede graficar - los valores supuestos de  $w^2$  v.s.  $\phi = f_N^1 + F_N^1 \neq 0$  (diferencia - de fuerzas para un valor supuesto de  $w^2$ ).

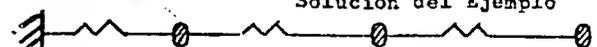
En dicha gráfica los diferentes valores de  $w^2$  se representan en el eje de las abscisas y las correspondientes diferencias de fuerzas, - se representan en el eje de las ordenadas.

Cuando  $\phi = 0$ ; es decir cuando  $f_N^1 = F_N^1$  se tendrá la  $w^2$  deseada. Ver



Es conveniente aclarar que una vez obtenida una frecuencia podemos determinar a que modo corresponde. Ya que el orden que le corresponde a cada modo es igual al número de puntos de inflexión que debe tener la configuración del mismo.

Solución del Ejemplo



K	4500	3600	2000	
M	10	10	5	
F1	-900.0	-1800.0	-1305.0	
fi	4500	3600	1800	D = 495.00
x	1.00	1.00	0.900	
xi	1.00	2.00		
F1	-1900.00	-1972.22	-1368.04	
fi	4500	3500	1527.78	D = 159.74
x	1.0	0.9722	0.7639	
xi	1.00	1.9722	2.7361	
F1	-1100.00	-2138.89	-1416.23	
fi	4500	3400	1261.11	D = -155.12
x	1.00	0.9444	0.6306	
xi	1.00	1.9444	2.5750	

Kgr/Cm. (dato)

Kgr.Seg./Cm (dato)

D = 495.00

D = 159.74

D = -155.12

Graficando para estos tres valores de  $w^2$  tenemos que el valor aproximado de  $w^2$  que dá la solución es  $w^2 = 105$ . Ver gráfica  $w^2$  V.S.  $D$ .

Como comprobación haremos una iteración con este valor:

F1	-1050.00	-2056.25	-1393.96	
r1	4500	3450	1393.75	D= -0.2169
x	1.00	0.9583	0.6969	
xi	1.00	1.9583	2.6552	

Se observa que la diferencia entre fuerzas es muy pequeña por lo cual se considera aceptable el valor de  $w^2$ .

De esta manera tenemos que:

$$w^2 = 105 \quad V = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.9583 \\ 2.6552 \end{bmatrix} = \frac{1}{2.6552} \begin{bmatrix} 0.3766 \\ 0.7375 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Si dibujamos la forma del modo observamos que tiene un punto de inflexión por lo tanto corresponde al modo fundamental o primer modo, lo cual está de acuerdo con el obtenido por el método de Stodola.



A continuación usaremos el método de Holzer únicamente para comprobar los modos segundo y tercero ya obtenidos con anterioridad.

Segundo Modo

$w_2 = 556.80$

K	4500	3600	2000
M	10	10	5
F1	-5568.0	-3916.16	+4979.96
f1	4500	-1068.00	-4984.16
x	1.00	-0.2367	-2.4921
xi	1.00	0.7033	-1.7888

Kgr./Cm. (dato)

Kgr.Seg./Cm. (dato)

D = -4.2

Tercer Modo

$w_3 = 1107.7$

K	4500	3600	2000
M	10	10	5
F1	-11077.0	+9160.68	-2574.51
f1	4500	-6577	+2583.68
x	1.00	-1.827	+1.292
xi	1.00	-0.827	+0.465

Kgr./Cm.

Kgr.Seg./Cm.

D = 9.17

CAPITULO IV  
METODO DE JACOBI

Es uno de los métodos iterativos utilizados para la solución de ----  
EIGENPROBLEMAS, dicho método surgió hace más de 100 años y tiene apli-  
cación actual en el problema general representado por la ecuación: -  
 $K \delta = \lambda M \delta ; M \neq 1$

Se opera directamente sobre las matrices "K" y "M", las cuales repre-  
sentan las matrices de rigideces y de masas respectivamente. Básica-  
mente dicho método consiste en realizar una serie de transformaciones  
("rotaciones") a la matriz  $H = M^{-1}K$  hasta diagonalizarla; es decir -  
hasta lograr que los elementos fuera de la diagonal principal tengan  
un valor próximo a cero.

Previamente al desarrollo de este método se requiere definir algunos-  
conceptos y hacer ciertas consideraciones.

DEFINICIONES

a) Matriz ortogonal

Si para la matriz P se cumple que:

$P^{-1} = P^T$  o  $P^T P = 1$ , entonces a la matriz se le denomina matriz ortogonal

En donde:

$P^T$ .- Matriz transpuesta

$P^{-1}$ .- Matriz inversa

b) Ortogonormalidad

La propiedad de ortogonormalidad de los vectores está definida por me-  
dio de la Delta de Kroenecker:

$$\delta_i^T M \delta_j = \delta_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{ si } i = j \\ = 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$$

$$\delta_i^T K \delta_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{ si } i = j \\ = 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$$

### CONSIDERACIONES

a).- La matriz ortogonal utilizada para realizar las transformaciones a la matriz H es la siguiente:

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{"i \acute{e}sima"} \\ \text{columna} \\ \downarrow \\ \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \phantom{0} \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{c} \text{"j \acute{e}sima"} \\ \text{columna} \\ \downarrow \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \phantom{0} \end{array} \right] \end{array} \\ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \text{COS} \varnothing \\ \text{SEN} \varnothing \\ \phantom{0} \end{array} & \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \text{SEN} \varnothing \\ \text{COS} \varnothing \\ \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} & \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ 1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{"i \acute{e}simo"} \text{ rengl\on} \\ \leftarrow \text{"j \acute{e}simo"} \text{ rengl\on} \end{array}$$

De donde, para que se cumpla que los elementos fuera de la diagonal principal sean cero; se debe cumplir tambi\en con expresi\on siguiente:

$$\text{TAN } 2 \varnothing = \frac{2K_{ij}(k)}{K_{ii}(k) - K_{jj}(k)} \quad \text{Para } K_{jj} \neq K_{ii}$$

b).- Haremos uso de la siguiente igualdad, la cual representa la transformaci\on de la matriz A, mediante la matriz P:

$$\bar{A} = P^{-1} A P \dots\dots(1)$$

Si en esta ecuaci\on sustituimos  $P^{-1} = P^T$  tenemos:

$\bar{A} = P^T A P \dots (2)$ . Relación que sirve de base para las iteraciones del método de Jacobi.

#### DESARROLLO

El Eigenproblema es el siguiente:

$$K V = \lambda M V \dots (3)$$
 En donde:

$K$ .- Matriz de rigideces, simétricas de orden  $n \times n$ .

$M$ .- Matriz de masas, diagonal de orden  $n \times n$ .

$\lambda$ .- Matriz de valores característicos ( $\omega^2$ ) o "Espectral", diagonal de orden  $n \times n$ .

$V$ .- Matriz de eigenvectores o "Modal", ortogonal de orden  $n \times n$

En la ecuación (3) premultiplicando por  $M^{-1}$  y haciendo  $H = M^{-1}K$  -

$$H V = \lambda V; \text{ premultiplicando por } V^{-1}:$$

$$V^{-1} H V = \lambda V^{-1} V; V^T H V = \lambda \dots (4)$$

Aplicando la ecuación (2) mediante la matriz de transformación "P" - sobre la matriz "H" hasta lograr su diagonalización. Suponiendo que la matriz llegó a su diagonalización con la "enésima" iteración. De esta manera tenemos:

$$B = P_m^T \dots P_3^T P_2^T P_1^T H P_1 P_2 P_3 \dots P_m \dots (5)$$

Donde la matriz "B" representa la matriz diagonal de los valores característicos  $\omega^2$ .

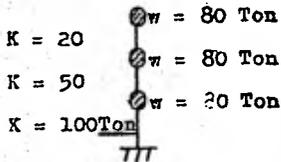
Por similitud con la ecuación (4):  $\lambda = B$

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_m = V. \text{ Matriz de eigenvectores.}$$

Mediante la solución de un ejemplo sencillo trataremos de aclarar un poco el desarrollo del mencionado método.

Ejemplo.

Sea el sistema siguiente:



$$M = \begin{bmatrix} 0.082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.082 & 0 \\ 0 & 0 & 0.082 \end{bmatrix}$$

Matriz de masas

$$M = \frac{w}{g} = \frac{20}{981} = 0.082 \frac{\text{Ton-cm}^2}{\text{Seg}}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 12.152 & 0 & 0 \\ 0 & 12.152 & 0 \\ 0 & 0 & 12.152 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

$$K = \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} ; \quad K = \begin{bmatrix} 150 & -50 & 0 \\ -50 & 70 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigideces

Así tenemos  $H = M^{-1}K$ :

$$H = \begin{bmatrix} 12.152 & 0 & 0 \\ 0 & 12.152 & 0 \\ 0 & 0 & 12.152 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 & -50 & 0 \\ -50 & 70 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1822.8 & -607.6 & 0 \\ -607.6 & 850.64 & -243.04 \\ 0 & -243.04 & 243.04 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz P

De la matriz H tomaremos el elemento fuera de la diagonal principal que tenga el mayor valor absoluto, este elemento será el que se elimine; para esto se requiere que el término  $-\sin \theta$  tome la posición de dicho elemento.

Se observa en la matriz P que el elemento  $-\sin \theta$  coincide con la posición del valor  $-607.60$  que es el término por eliminar, por lo tanto:

$$\tan 2\theta = \frac{-2 \times 607.60}{1822.8 - 850.64} = -1.25$$

$$2\theta = -51.34^\circ \quad \theta = -25.67^\circ$$

Sustituyendo en la matriz P obtenemos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos(-25.67^\circ) & -\sin(-25.67^\circ) & 0 \\ \sin(-25.67^\circ) & \cos(-25.67^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.901 & 0.433 & 0 \\ -0.433 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera podemos hacer la primera iteración:

$$H_1 = P_1^{-T} H_0 P_1 = \begin{bmatrix} 0.901 & -0.433 & 0 \\ 0.433 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1222.2 & -607.6 & 0 \\ -607.6 & 850.64 & -243.04 \\ 0 & -243.04 & 243.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2113.327 & -0.060 & 105.236 \\ -0.061 & 558.219 & -218.979 \\ 105.236 & -218.979 & 243.04 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración

Operando ahora sobre la matriz  $H_1$  se escoge el elemento  $-218.979$ , - para eliminarlo en la matriz  $P$  debemos hacer los cambios necesarios entre renglones y columnas hasta lograr que el término  $-\text{Sen } \theta$  tome - la posición de dicho elemento. Así:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{COS } \theta & -\text{SEN } \theta \\ 0 & \text{SEN } \theta & \text{COS } \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Tan } 2 \theta = \frac{-2 \times 218.979}{-0.060}$$

$$\text{Tan } 2 \theta = -1.3896$$

$$2 \theta = 54.26 \text{ y } \theta = -27.1296$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$ :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.890 & 0.456 \\ 0 & -0.456 & 0.890 \end{bmatrix}$$

Y nuevamente aplicando la transformación:

$$H_2 = P_2^T H_1 P_2$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.890 & -0.456 \\ 0 & 0.456 & 0.890 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2113.327 & -0.060 & 105.236 \\ -0.061 & 559.219 & -218.979 \\ 105.236 & -218.974 & 243.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.890 & 0.456 \\ 0 & -0.456 & 0.890 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2113.327 & -48.041 & 93.633 \\ -48.092 & 670.443 & -0.008 \\ 93.632 & -0.007 & 130.845 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración

De manera similar ahora eliminaremos el término 93.633

$$P_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \times 93.633}{2113.327 - 130.845}$$

$$\tan 2\theta = 0.0945$$

$$2\theta = 5.396^\circ; \theta = 2.698^\circ$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$  :

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.999 & 0 & -0.047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.047 & 0 & 0.999 \end{bmatrix}$$

Realizando la transformación

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0.999 & 0 & 0.047 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.047 & 0 & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2113.327 & -48.041 & 93.633 \\ -48.041 & 670.443 & -0.008 \\ 93.632 & -0.007 & 130.845 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.999 & 0 & -0.047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.047 & 0 & 0.999 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 2118.184 & -47.973 & 0.153 \\ -47.994 & 670.443 & 2.250 \\ 0.154 & 2.251 & 126.459 \end{bmatrix}$$

Cuarta iteración

Eliminaremos ahora el término -47.923

$$\tan 2\theta = \frac{-2 \times 47.923}{2118.134 - 670.403} = -0.0663$$

$$2\theta = -3.733^\circ; \theta = -1.8666^\circ$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$ :

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.979 & 0.053 & 0 \\ -0.033 & 0.999 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la transformación

$$H_4 = P_4 H P_4 = \begin{bmatrix} 2117.845 & -0.117 & 0.081 \\ -0.118 & 668.245 & 2.253 \\ 0.020 & 2.254 & 126.459 \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar a medida que el número de iteraciones crece la matriz  $H$  tiende a diagonalizarse; es decir los términos fuera de la diagonal principal tienden al valor cero.

Quinta iteración

Prosiguiendo con el desarrollo del problema eliminaremos ahora el término 2.253

$\theta = 3.223^\circ$ . Sustituyendo el valor de  $\theta$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.0042 \\ 0 & 0.0042 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } H_5 = \begin{bmatrix} 2117.845 & -0.117 & 0.081 \\ -0.118 & 668.267 & -0.023 \\ 0.021 & -0.022 & 126.452 \end{bmatrix}$$

Sexta iteración

Eliminaremos ahora el término - 0.117

$$\tan 2\theta = \frac{2 \times 0.117}{2117.845 - 668.267} = -0.0002$$

$$\tan 2\theta = -0.0002 ; 2\theta = -0.0092^\circ \theta = -0.0046^\circ$$

Así:

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0.0001 & 0 \\ -0.0001 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la transformación

$$H_6 = \begin{bmatrix} 2117.845 & 0.028 & 0.021 \\ 0.027 & 668.267 & -0.023 \\ 0.281 & -0.027 & 126.452 \end{bmatrix}$$

Podemos considerar que esta matriz es diagonal porque los valores fuera de la diagonal principal son cercanos al valor cero.

$$[B] = [\lambda] = \begin{bmatrix} 2117.845 & 0 & 0 \\ 0 & 668.267 & 0 \\ 0 & 0 & 126.452 \end{bmatrix}$$

Calculemos la matriz de Eigen-vectores

$$V = [P_1][P_2][P_3][P_4][P_5][P_6]$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.901 & 0.433 & 0 \\ -0.433 & 0.901 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.890 & 0.456 \\ 0 & -0.456 & 0.890 \end{bmatrix} [P_3][P_4][P_5][P_6]$$

Desarrollando el producto tenemos:

$$V = \begin{bmatrix} 0.395 & 0.416 & 0.152 \\ -0.439 & 0.790 & 0.428 \\ 0.057 & -0.450 & 0.891 \end{bmatrix}$$

O sea;

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.152 \\ 0.428 \\ 0.891 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0.416 \\ 0.790 \\ -0.450 \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0.395 \\ -0.439 \\ 0.057 \end{bmatrix}$$

Normalizando los vectores:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 2.82 \\ 5.86 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.90 \\ -1.08 \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 15.70 \\ -7.70 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

De la matriz  $\lambda = B$ :

$$w_1^2 = 126.452 \quad ; \quad T_1 = \frac{2}{w_1^2} = 0.56 \text{ Seg.}$$

$$w_2^2 = 668.267 \quad ; \quad T_2 = 0.24 \text{ Seg.}$$

$$w_3^2 = 2117.843 \quad ; \quad T_3 = 0.14 \text{ Seg.}$$

Obviamente que la solución del problema se complica al aumentar el número de grados de libertad del sistema, por lo que se hace necesario el uso de computadoras electrónicas.

En el siguiente capítulo se anexa el programa de computadora que se utiliza para la solución de este tipo de problemas, mediante la

aplicación del método de Jacobi. Asimismo se muestra el listado de los valores característicos y modos naturales que resultaron de aplicar dicho programa al problema "práctico" que es el objeto de este trabajo.

## CAPITULO V

La estructura propuesta para el análisis dinámico por fuerzas sísmicas es un edificio para departamentos. Dicha estructura es un proyecto hipotético basado en una estructural real, en la cual se hacen algunas modificaciones de manera hacerla más simple para el análisis propuesto, con esta finalidad hacemos las consideraciones siguientes:

1.- Estructura de concreto reforzado

a).- Módulo elástico  $E = 200000 \text{ Kgr./Cm}^2$ .

2.- La estructuración es a base de marcos rígidos y losas perimetralmente apoyadas.

3.- Las secciones propuestas de las trabes y columnas se basan en observaciones hechas a estructuras similares.

4.- Las rigideces de entrepiso se calcularon con las fórmulas de Wilbur. Debido a la aproximación de las secciones propuestas, también dichas rigideces son aproximadas y se requiere refinar los cálculos, sin embargo por no ser la finalidad de este trabajo omitiremos dicho refinamiento.

5.- Por simplificación se supone que los tres marcos longitudinales tienen igual rigidez entre sí y los seis marcos transversales también.

6.- El método de análisis dinámico utilizado es el Jacobi aplicado mediante un programa de computadora, cuyo listado se anexa en este capítulo.

CALCULO DE RIGIDECES DE ENTREPISO

Para calcular dichas rigideces usaremos las fórmulas de Wilbur.

Para el primer nivel:

$$R_1 = \frac{48 E}{h_1 \left( \frac{4h_1}{Kc_{11}} + \frac{h_1 + h_2}{Kt_{1t}} \right) \frac{Kc1}{12}} \dots\dots(a)$$

Para el segundo nivel:

$$R_2 = \frac{48 E}{h_2 \left( \frac{4h_2}{Kc_{12}} + \frac{h_1 + h_2}{Kt_{1t}} + \frac{h_2 + h_3}{Kt2} \right) \frac{Kc1}{12}} \dots\dots(b)$$

Para cualquier nivel "N" diferente del 1o. y 2o.:

$$R_n = \frac{48E}{h_n \left( \frac{4h_n}{Kc_{1n}} + \frac{h_m + h_n}{K_{tm}} + \frac{h_n + h_o}{K_{tn}} \right)} \dots\dots(c)$$

En estas ecuaciones

$R_n$  = Rigidez del entrepiso en cuestión

$K_{t,n}$  = Rigidez relativa (1/L) de las trabes en el nivel N

$K_{c,n}$  = Rigidez relativa (1/L) de las columnas del entrepiso N

M,N,O = Indices de niveles consecutivos

M = Nivel inferior a N

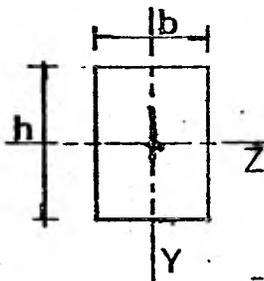
O = Nivel superior a N

$h_n$  = Altura del entrepiso N

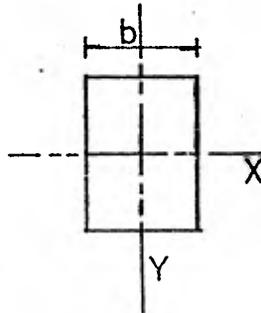
PROPIEDADES DE LAS SECCIONES.

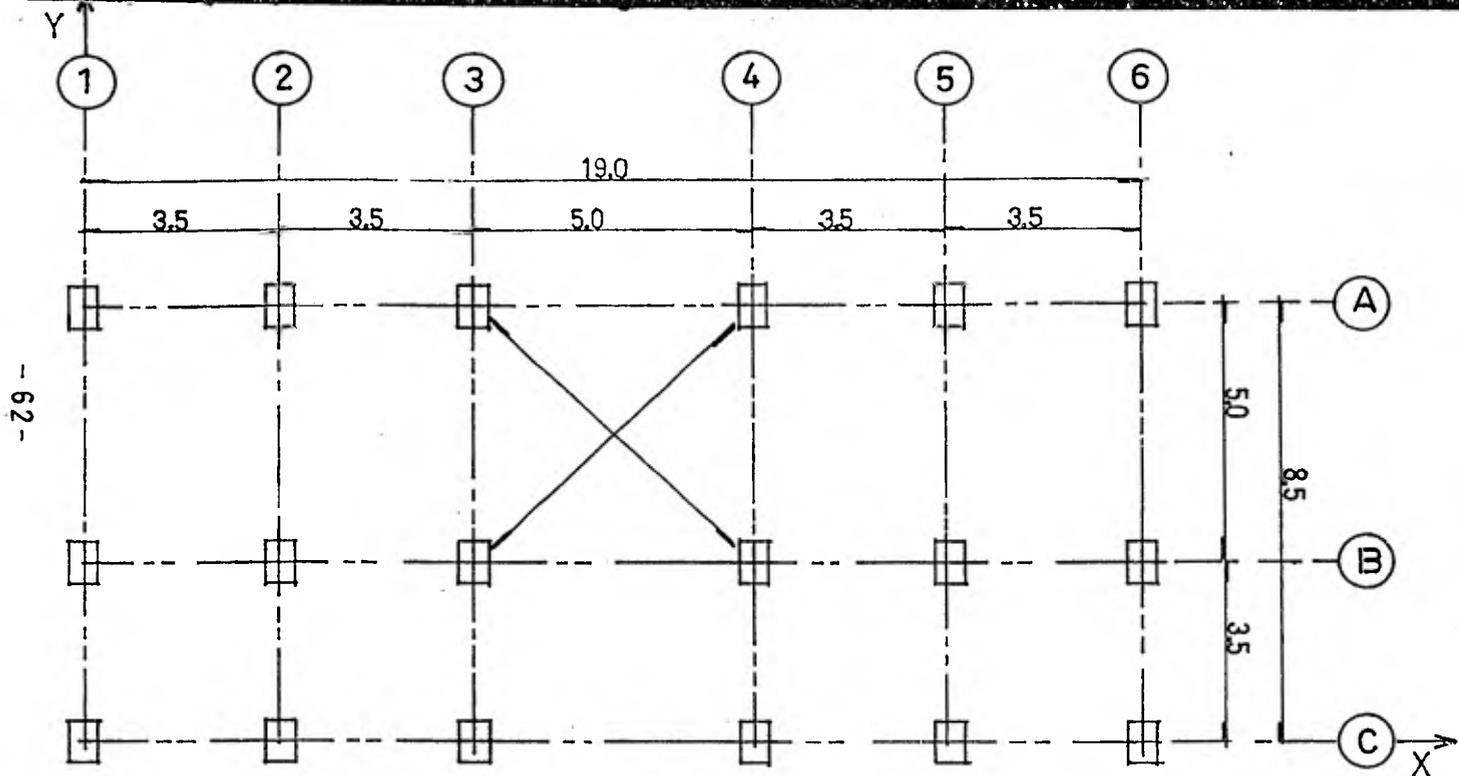
Clave de traves y columnas	Sección bxbh (cmxcm)	L(cm)	$\frac{bh^3}{12} = I_z = I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$\frac{hb^3}{12} = I_y$	$\frac{I_z/L}{I_x/H}$	$I_y/H$
		H(cm)				
T-1	25x40	500	133333	-	266.7	-
T-2	20x40	350	106667	-	304.8	-
T-3	25x35	500	89323	-	178.6	-
T-4	20x35	350	71458	-	204.2	-
T-5	25x30	500	56250	-	112.5	-
T-6	20x30	350	45000	-	128.6	-
K-1	45x60	270	810000	455625	3000.0	1687.5
K-2	40x50	255	416667	266667	1634.0	1045.8
K-3	30x40	255	160000	90000	627.5	352.9
K-4	30x35	255	107187.5	78750	420.3	308.8

Traves:



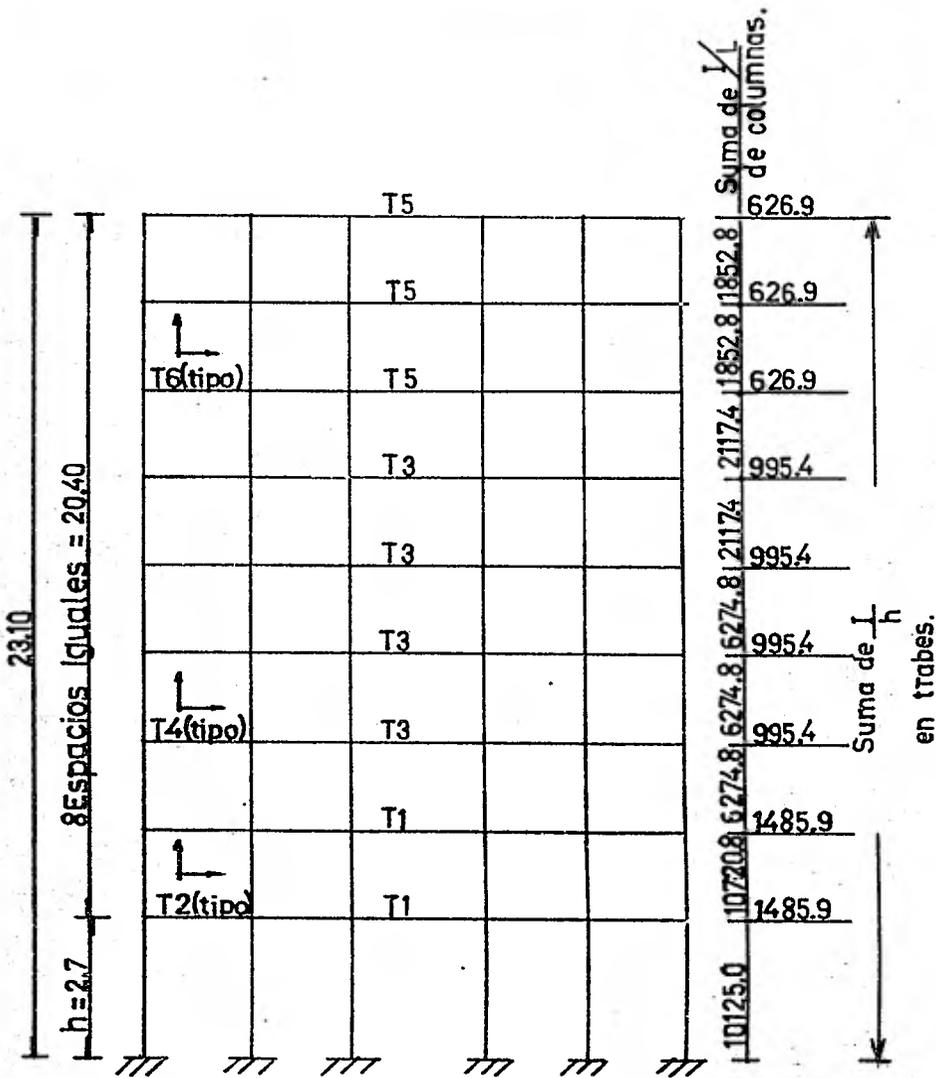
Columnas:





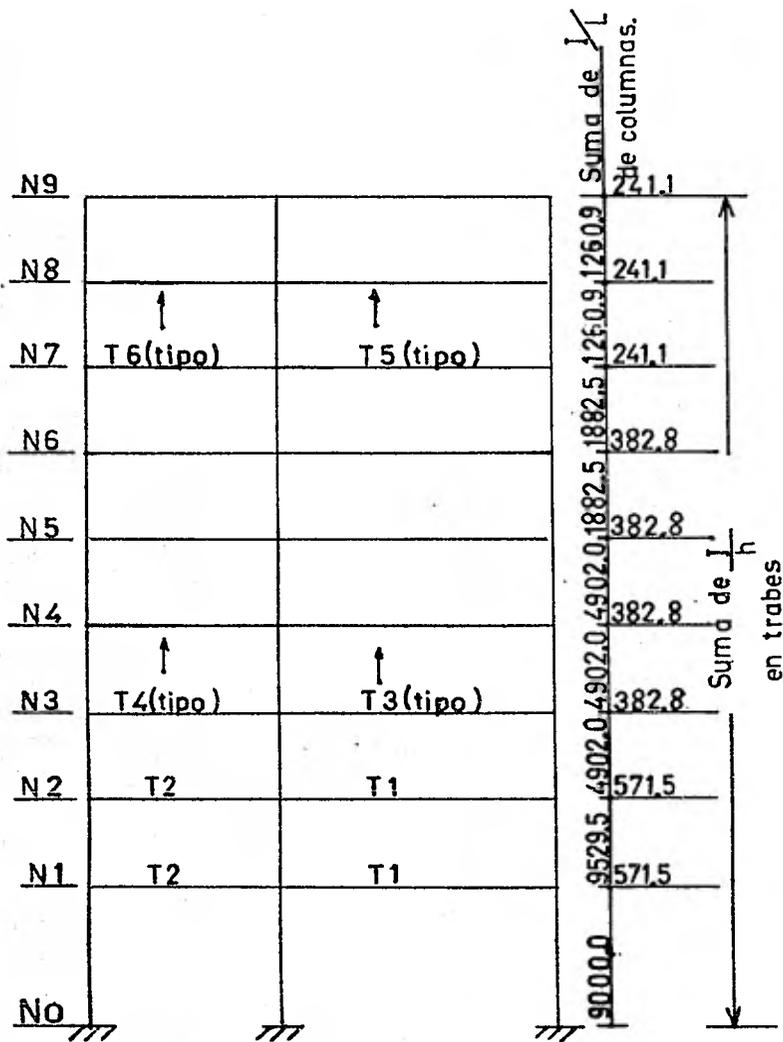
PLANTA TIPO

COTAS : MTS.



MARCOS A, B y C

COTAS: MTS.



MARCOS 1 a 6

RIGIDEZES DE ENTREPISO DE MARCOS A, B y C

Aplicando las ecuaciones a, b y c obtenemos los resultados siguientes:

$$R_1 = \frac{48 E}{\frac{270 (4 \times 270 + 270 + 255)}{10128} + \frac{270 + 255}{1487 + \frac{10128}{12}}} = 0.536 E$$

$$R_2 = 0.284 E$$

$$R_6 = 0.125 E$$

$$R_3 = 0.247 E$$

$$R_7 = 0.104 E$$

$$R_4 = 0.185 E$$

$$R_8 = 0.087 E$$

$$R_5 = 0.185 E$$

$$R_9 = 0.087 E$$

Sustituyendo el valor del MODULO ELASTICO 'E' y multiplicando por el número de marcos longitudinales tenemos:

$$R_1 = 0.536 \times 200 \times 3 = 321.6 = 322$$

$$R_2 = 170$$

$$R_6 = 75$$

$$R_3 = 148$$

$$R_7 = 62$$

$$R_4 = 111$$

$$R_8 = 52$$

$$R_5 = 111$$

$$R_9 = 52$$

La matriz de rigideces de entrepiso la formaremos de la siguiente manera:





### Carga Muerta

Losa	290 Kg/m <sup>2</sup>	Muros	310 Kg/ml.
Loseta Asfáltica y Mortero	40 Kg/m <sup>2</sup>	Herrería	125 Kg/ml.
Yeso	<u>30 Kg/m<sup>2</sup></u>	Muros	310 Kg/m $\frac{\times 100m}{136.5m^2} = 227 \frac{Kg}{m^2}$
	360 Kg/m <sup>2</sup>	Herrería	125 Kg/m $\frac{\times 125m}{136.5m^2} = 114 \frac{Kg}{m}$

Sumando Carga Muerta:

$$W_m = 360 + 227 + 114 = 701 \text{ Kg/m}^2.$$

Carga Viva reducida para sismo:

$$W_v = 90 \text{ Kg/m}^2.$$

Sumando Carga Muerta y Carga Viva:

$$W_t = 701 + 90 = 791 \text{ Kg/m}^2.$$

$$\text{Peso por nivel } W = 791 \frac{Kg}{m^2} \times 136.5 \text{ m}^2 = 108000 \text{ Kg.}$$

Cálculo de masas:

$$M = \frac{W}{g} \quad ; \quad M = \frac{108000 \text{ Kg.}}{981 \frac{cm}{Seg.^2}} = 110 \frac{Kg. \text{ Seg.}^2}{cm.}$$

$$M = 0.110 \frac{\text{Ton. Seg.}^2}{cm}$$

La matriz es diagonal, ya que el sistema es discreto:



BFOR, IS TFFS.UNC.,.UNC  
 FOR 4P1 E -04/15/61-16 12 44 (,L)

MAIN PROGRAM

STORAGE USED CODE(1) 001912; DATA(0) 012130; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 PRIME  
 0004 JACOEI  
 0005 EXIT  
 0006 NINTPS  
 0007 NRDU5  
 0010 N1035  
 0011 N1025  
 0012 NWDU5  
 0013 N1015  
 0014 XPRR  
 0015 NSTGPs

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0000	C11665	1F	0000	011751	10F	0000	011765	11F	0001	000075	1316	0001	000115	1406
0001	000156	1536	0001	000204	1626	0001	000223	1656	0000	011666	2F	0001	000275	2006
0001	000322	2076	0001	000346	2166	0001	000407	2326	0000	011667	3F	0000	011672	4F
0000	011702	5F	0001	000453	55L	0001	000444	56L	0000	011774	57F	0000	011704	6F
0000	011711	7F	0000	011717	8F	0000	011745	9F	0000	R 000000	A	0000	R 011660	A11
0000	R 011661	A12	0000	P 011662	A13	0000	P 011656	AX	0000	I 011647	I	0000	I 011650	IJ
0000	I 011651	1K	0000	I 011654	1L	0000	I 011653	1M	0000	I 011652	J	0000	I 011655	K
0000	I 011637	N	0000	I 011646	N4	0000	I 011657	N5	0000	I 011640	N1	0000	I 011641	N2
0000	I 011642	N3	0000	I 011643	N4	0000	I 011644	N5	0000	I 011645	N6	0000	R 011663	TEJ
0000	R 011664	TES	0000	P 011625	TIME	0000	R 011610	TITULO						

00000 \*DIAGNOSTIC\* THE VARIABLE, TIME, IS TYPED AND/OR REFERENCED IN THIS PROGRAM, BUT IS NOWHERE ASSIGNED A VALUE.

00100	1*	C PROGRAMA PARA CALCULAR LOS VECTORES Y VALORES CARACTERISTICOS DE MATRICES	000000
00100	2*	C SIMETRIAS UTILIZANDO EL METODO DE JACOBI	000000
00101	3*	DIMENSION A(SPEC)	000000
00103	4*	DIMENSION TITULO(12),TIME(10)	000061
00104	5*	REAL(5,1) TITULO	000001
00107	6*	REAL(5,2) N	000011
00112	7*	WRITE(6,3) TITULO	000017
00115	8*	WRITE(6,4) N	000032
00120	9*	N1=1	000040
00121	10*	N2=N1+N	000042
00122	11*	N3=N2+NAN	000045
00123	12*	N4=N3+N	000047
00124	13*	N5=N4+N*AN	000051
00125	14*	N6=N5+N*AN	000053
00126	15*	N7=N2-1	000055
00127	16*	REAL(5,5) (A(I),I=1,IA)	000063
00135	17*	IA=N3-1	000100
00136	18*	REAL(4,5) (A(I),I=1,IA)	000103
00144	19*	WRITE(6,6)	000120
00146	20*	CALL PRIME(4(N1),N,1)	000125



00302  
00306

81\*  
82\*

1  
END

\*TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA =\*,FIL.4.SX,\*SEG\*)

000511  
000511

END OF COMPILATION

1 DIAGNOSTICS.

#FOR, IS, TPFS, JACOB1, JACOBI  
 FOR 4R1 E -04/15/80-16 12 52 (,0)

SUBROUTINE JACOBI ENTRY POINT 000513

STORAGE USED CODE(1) 000536; DATA(6) 000077; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 SQRT  
 0004 NERR33

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	000356	10L	0001	000046	106G	0001	000366	11L	0001	000047	111G	0001	000074	123G
0001	000141	127G	0001	000412	13L	0001	000422	14L	0001	000451	16L	0001	000331	165G
0001	000342	173G	0001	000376	207G	0001	000433	223G	0001	000066	3L	0001	000161	6L
0001	000211	7L	0000	R 000016	AX	0000	R 000014	SX	0000	R 000007	C	0000	R 000013	C2
0000	I 000002	1	0000	000024	INJPS	0000	I 000003	J	0000	I 000015	J1	0000	I 000016	K
0000	I 000004	L	0000	I 000006	M	0000	P 000000	REAL	0000	R 000011	S	0000	R 000001	SA
0000	R 000005	SR	0000	R 000012	S2									

```

00101      1*      SUBROUTINE JACOBI (A,T,N)
00103      2*      DIMENSION A(N,N),T(N,N)
00104      3*      SA=0.0
00105      4*      DO 2 I=1,N
00110      5*      DO 1 J=1,N
00113      6*      SA=SA+ABS(A(I,J))
00114      7*      1 T(I,J)=0.0
00116      8*      2 T(I,J)=1.0
00120      9*      L=N-1
00121     10*      3 SR=0.0
00122     11*      GO 15 I=1,L
00125     12*      P=I+1
00126     13*      DO 16 J=M,N
00131     14*      C=A(I,J)*2.0
00132     15*      IF (C .EQ. 0) GO TO 16
00134     16*      AX=A(J,J)-A(I,I)
00135     17*      IF (AX .NE. 0.) GO TO 4
00137     18*      AX=SIGN(1.0,-C)
00140     19*      GO TO 7
00141     20*      6 S2=-C/AX
00142     21*      IF (ABS(S2) .LE. 1.0E-9) GO TO 16
00144     22*      PEAL=1.0+SIGN(SQRT(1.0+S2**2),AX)
00145     23*      IF (PEAL .EQ. 0.) GO TO 16
00147     24*      AX=S/PEAL
00150     25*      7 S2=AX**2
00151     26*      LZ=1.0/(1.0+S2)
00152     27*      C=SA*T(C)
00153     28*      S=SA*C
00154     29*      S2=S2+C2
00155     30*      AX=2.0*S*(C+A(I,J))
00156     31*      FX=A(I,J)=LZ*(AX+A(I,J)+S2

```

```

000032
000032
000032
000047
000047
000047
000051
000053
000062
000066
000066
000107
000112
000141
000144
000146
000151
000153
000157
000161
000163
000167
000203
000205
000211
000213
000217
000223
000225
000230
000234

```

```

00157 32*      A(J,J)=A(I,1)*S2-AX+A(J,J)*C1
00160 33*      SR=SR+ABS(A(I,1)-BX)
00161 34*      A(I,1)=BX
00162 35*      A(I,J)=B.G
00163 36*      J1=J-1
00164 37*      DO 8 K=M,J1
00167 38*      A(I,1)=A(I,K)
00170 39*      8 A(J,K)=A(K,J)
00172 40*      DO 11 K=1,J1
00175 41*      AX=0.
00176 42*      IF (K-I) 9,11,10
00201 43*      9 AX=A(K,I)*C+A(K,J)*S
00202 44*      10 A(K,J)=-A(K,I)*S+A(K,J)*C
00203 45*      A(K,1)=AX
00204 46*      11 CONTINUE
00206 47*      DO 14 K=M,N
00211 48*      AX=0.
00212 49*      IF (K+J) 13,14,12
00215 50*      12 AX=-A(I,K)*S+A(J,K)*C
00216 51*      13 A(I,K)=A(I,K)*C+A(J,K)*S
00217 52*      A(J,K)=AX
00220 53*      14 CONTINUE
00222 54*      DO 15 K=1,N
00225 55*      AX=C*T(K,I)+S*T(K,J)
00226 56*      T(K,J)=-S*T(K,I)+C*T(K,J)
00227 57*      T(K,I)=AX
00231 58*      16 CONTINUE
00234 59*      IF (SR/SA .GT. 1.D0-12) GO TO 3
00236 60*      RETURN
00237 61*      END

```

```

000242
000251
000255
000257
000260
000304
000331
000332
000342
000342
000343
000347
000356
000363
000376
000376
000376
000376
000377
000403
000412
000417
000433
000433
000433
000440
000446
000457
000457
000464
000535

```

END OF COMPILATION

NO DIAGNOSTICS.

QFGH,IS TPFS.PRIME  
FOR 4P1 E -04/15/80-16 12 57 (,U)

SUBROUTINE PRIME ENTRY POINT 000125

STORAGE USED CODE(1) 000142; DATA(0) 000143; BLANK COMMON(2) 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 N40US  
0004 N101S  
0005 N102S  
0006 NERR3S

STORAGE ASSIGNMENT (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	00014	1C5G	0001	000051	114G	0001	000065	121G	0001	000074	126G	0000	000005	2F
0000	000011	3F	0000	000003	I	0000	000015	INJPS	0000	000004	J	0000	000002	K
0000	000000	L	0000	000001	M									

```
00101      1*      SUBROUTINE PRIME (A, NR, NC)
00103      2*      DIMENSION A(NR, NC)
00104      3*      DO 1 L=1, NC, 6
00107      4*      M=L+7
00110      5*      IF (M.GT. NC) M=NC
00112      6*      WRITE (6, 2) (K, K=L, M)
00120      7*      DO 1 I=1, NR
00123      8*      1 WRITE (6, 3) I, (A(I, J), J=L, M)
00134      9*      PETHPN
00135     10*      2 FORMAT (1/10X, I3, 7(12X, I3)/)
00136     11*      3 FORMAT (1X, I3, 8(1PE15.7))
00137     12*      END
```

```
000014
000014
000014
000022
000025
000033
000065
000065
000106
000141
000141
000141
```

END OF COMPILATION. NO DIAGNOSTICS.

MAP ,TYPE=MEJACOBI  
MAP 29R1 3 29/15/83 16 07 04

ADDRESS LIMITS 001000 017721 5586 BLANK WORDS DECIMAL  
040003 056161 7262 BLANK WORDS DECIMAL  
STARTING ADDRESS 013210

SEGMENT SPAINS		JG1 00 017721	040003 056161		
NSWTS/FOR4P1-E	(1)	001000 001030			27 JUL 78 17 07 41
NRBLKS/FOR-72	(1)	001031 001043			29 APR 74 13 48 27
NINTRS/FOR4P1-E	(1)	001054 001110	(2)	040004 040016	27 JUL 78 17 04 50
NWFS/FOR4P1-E	(1)	001131 001336	(2)	040017 040036	03 JAN 79 14 33 58
NRWINDS/FOR-ES	(1)	001337 001422	(2)	040037 040050	23 JUN 75 10 07 02
NCLOS3/FOR4P1-E	(1)	001423 001666	(2)	040051 040076	27 JUL 78 17 00 43
SCRTS/FOR59	(1)	001667 001737	(2)	040077 040110	12 MAY 71 15 54 25
NETCHS/FOR4P1-E	(1)	001738 002215	(2)	040111 040124	27 JUL 78 17 03 29
NINPTS/FOR4P1-E	(1)	002216 003642	(2)	040125 040160	27 JUL 78 17 04 45
NININS/FOR4P1-E	(1)	003643 004110	(2)	040161 040161	27 JUL 78 17 03 59
NIBJFS/FOR-02	(1)	004111 004150	(2)	040162 040162	29 APR 74 13 47 56
EXITSF/FORFTN	(1)	004151 004151			28 JUL 78 14 36 06
NOTINS/FOR4P1-E	(1)	004152 004443	(2)	040163 040166	31 AUG 78 16 01 59
NBSLS/FOR-ES	(1)	004444 004500			16 APR 75 13 13 54
NBFJFS			(2)	040167 042414	23 JUN 75 09 58 12
NUPDAS/FOR64	(1)	004501 004534			10 JUL 72 21 41 26
NTHAS/FOR-123			(2)	042415 042453	11 MAR 75 15 35 08
NMBLKS/FOR68	(1)	004535 004646			10 JUL 72 21 41 28
NFCHKS/FOR4P1-E	(1)	004647 005736	(2)	042454 042626	10 AUG 78 13 00 55
	(3)	005736 005736	(4)	042627 042700	
FORCONH/FORFTN			(2)	042701 042706	31 AUG 78 14 44 53
NCNVT3/FOR4P1-E	(1)	005737 006160	(2)	042707 043033	27 JUL 78 17 00 55
NFTVS/FOR-E2	(1)	006161 006273			29 APR 74 13 47 54
NFMTS/FOR-ES	(1)	006274 007066	(2)	043034 043060	16 APR 75 13 20 52
NBDCV3/FOR4P1-E	(1)	007067 007221	(2)	043061 043137	27 JUL 78 17 00 26
NOUTS/FOR4P1-E	(1)	007222 010752	(2)	043138 043202	27 JUL 78 17 06 34
NIDERS/FOR4P1-E	(1)	010753 011174	(2)	043203 043351	27 JUL 78 17 05 06
NOBFS/FOR64	(1)	011175 011235			10 JUL 72 21 41 08
NERCCP4/FOR-TF3	(1)	011236 011315	(2)	043352 043365	11 MAR 75 15 33 59
ERUS/SYS74R1					20 DEC 79 17 32 56
NFRPS/FOR4P1-E	(1)	011316 011663	(2)	043366 043540	27 JUL 78 17 01 50
FORVCCP3/FOR4P1			(2)	043541 043556	28 JUL 78 14 36 41
NSTOP3/FOR4P1	(1)	011664 011737	(2)	043557 043606	28 JUL 78 14 38 58
NEXP64/FOR-ES	(1)	011738 012125	(2)	043607 043640	17 APR 75 09 51 41
NIEP3/FOR4P1-E	(1)	012126 012337	(2)	043641 043761	27 JUL 78 17 03 43
BLANKSCOMMON (COMMON LOCK)					
PRIME	(1)	012338 012401	(2)	043762 044024	15 APR 80 16 07 04
JACOBI	(1)	012402 013207	(2)	044025 044123	15 APR 80 16 07 01
UNO	(1)	013208 013701	(2)	044124 056161	15 APR 80 16 06 56
			(2)	BLANKSCOMMON	

SYSS\*PLIB1. LEVEL  
END MAP. ERRORS NONE

WGT TYPE=MEJACOBI

ANALISIS MODAL MARCO LONGITUDINAL

ORDEN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ > 9

VECTOR DE MASAS

1	1.1000000-01
2	1.1000000-01
3	1.1000000-01
4	1.1000000-01
5	1.1000000-01
6	1.1000000-01
7	1.1000000-01
8	1.1000000-01
9	1.1000000-01

MATRIZ DE RIGIDEZES

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4.9000000+02	-1.7000000+02	7.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-1.7000000+02	3.2000000+02	-1.5000000+02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	7.0000000	-1.5000000+02	2.6000000+02	-1.1000000+02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-1.1000000+02	2.2000000+02	-1.1000000+02	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.1000000+02	1.8500000+02	-7.5000000+01	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-7.5000000+01	1.4000000+02	-6.0000000+01	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-6.0000000+01	1.1500000+02	-5.0000000+01
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-5.0000000+01	1.0500000+02
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-5.0000000+01

1	0.0000000
2	0.0000000
3	0.0000000
4	0.0000000
5	0.0000000
6	0.0000000
7	0.0000000
8	-5.0000000+01
9	5.0000000+01

MOLO NO. VALORES CARACTERIST. FREQ. CIRC. RAD/SEG FREQ. CIRC. EN CPS PERIODOS EN SEG.

1	.55e29223+02	.74718955+01	.11891901+01	.84090844+00
2	.209e3119+03	.14478646+02	.23043503+01	.43396185+00
3	.5e33674+03	.23672082+02	.37675321+01	.26542574+00
4	.992e574+03	.319e5467+02	.50144142+01	.19942509+00
5	.14174447+04	.37648967+02	.59920242+01	.16688851+00
6	.157e5016+04	.43335919+02	.62971316+01	.14498781+00
7	.271e5966+04	.52077794+02	.82884454+01	.12064929+00
8	.37e1116+04	.608384+02	.96827495+01	.10327645+00

CONFIGURACIONES NATURALES

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	8.9193940-02	-2.4108230-01	-3.7166100-01	5.2057052-01	-4.9186464-01	5.1352622-01	-9.9895311-01	1.3150647+00
2	2.5386626-01	-6.6218295-01	-9.3700092-01	1.1661001+00	-9.6660212-01	8.5613524-01	-1.1262835+00	6.4095490-01
3	4.3010125-01	-1.0376332+00	-1.1924452+00	1.0488398+00	-4.9989546-01	6.5356999-02	9.6983997-01	-1.8627982+00
4	6.4648965-01	-1.3321979+00	-8.7257142-01	-1.5219679-01	8.4509701-01	-1.1357178+00	1.1980290+00	1.6178140+00
5	8.2662928-01	-1.3473005+00	-6.3736127-02	-1.2021570+00	9.9221167-01	-2.0391275-01	-1.8225529+00	-8.8962316-01
6	1.0232649+00	-9.5536827-01	1.1749382+00	-9.9187735-01	-8.5474869-01	1.7243932+00	9.9690752-01	2.6221456-01
7	1.2495967+00	-1.7789631-01	1.6141710+00	9.9340577-01	-1.0134860+00	-1.6586178+00	-3.5249423-01	-5.5460898-02
8	1.4926737+00	8.1932415-01	3.1266771-01	1.3058402+00	1.8551142+00	9.6866054-01	9.6171394-02	9.3955203-03
9	1.7016813+00	1.5206140+00	-1.3429944+00	-1.1028794+00	-8.7572355-01	-3.0931767-01	-1.9363569-02	-1.3153623-03
9								
1	2.3280466+00							
2	-1.7330609+00							
3	8.2232921-01							
4	-2.3960953-01							
5	6.2749415-02							
6	-1.0018221-02							
7	1.2042655-03							
8	-1.1911779-04							
9	1.0505663-05							

TIEMPO DE EJECUCION = .0000 SEG  
 TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA = .0000 SEG

EFI.

ANALISIS MODAL MARCO Transversal.

ORDEN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ > 9

VECTOR DE MASAS

1  
 1 1.1000000-P1  
 2 1.1000000-01  
 3 1.1000000-01  
 4 1.1000000-P1  
 5 1.1000000-C1  
 6 1.1000000-01  
 7 1.1000000-01  
 8 1.1000000-01  
 9 1.1000000-01

MATRIZ DE RIGIDEZES

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5.7500000+02	-1.6000000+02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-1.6000000+02	2.5500000+02	-9.1000000+01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	-9.1000000+01	1.7100000+02	-8.0000000+01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000	-8.0000000+01	1.6000000+02	-8.0000000+01	0.0000000	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-8.0000000+01	1.5000000+02	-7.0000000+01	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-7.0000000+01	1.3000000+02	-5.5000000+01	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-5.5000000+01	1.0000000+02	-4.5000000+01
8	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-4.5000000+01	9.0000000+01
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-4.5000000+01

9  
 1 0.0000000  
 2 0.0000000  
 3 0.0000000  
 4 0.0000000  
 5 0.0000000  
 6 0.0000000  
 7 0.0000000  
 8 -4.5000000+01  
 9 4.5000000+01

MODO N.O. VALORES CARACTERIST. FREQ. CIRC. RAD/SEG FREQ. CIRC. EN CPS PERIODOS EN SEG.

1	.30813958+02	.5551032+01	.88347496+00	.11318940+01
2	.18280000+02	.12522826+02	.21522267+01	.46463506+00
3	.49002515+03	.22150150+02	.35253088+01	.28366309+00
4	.26485403+02	.29408401+02	.46804963+01	.21365256+00
5	.12406341+04	.35307706+02	.56194007+01	.17795492+00
6	.10011750+04	.40375426+02	.64259541+01	.15561891+00
7	.21910565+04	.46800744+02	.74498492+01	.13423090+00
8	.27447275+04	.52390147+02	.62381579+01	.11993057+00

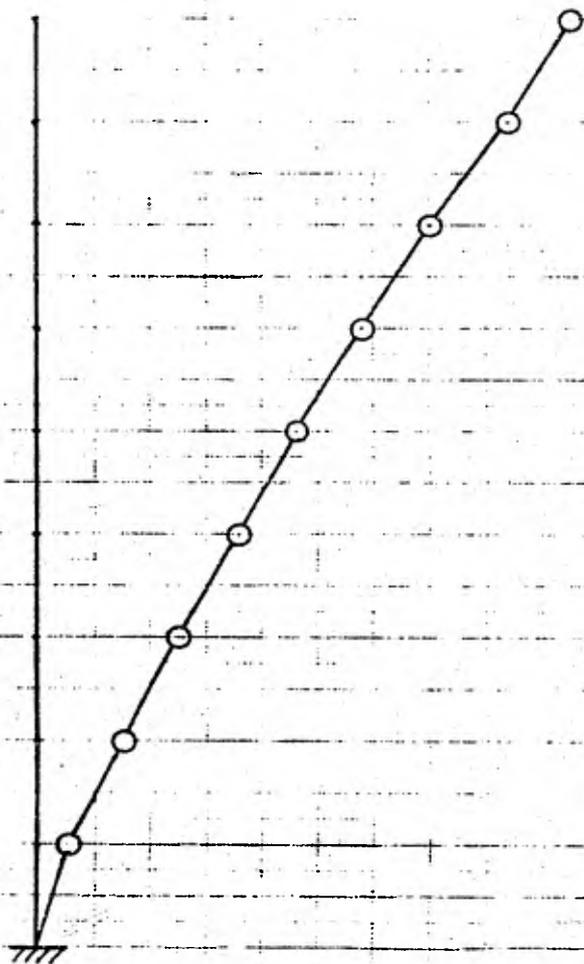
## CONFIGURACIONES NATURALES

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4.7875513-02	-1.4336913-01	2.4041832-01	3.5014790-01	-3.6462805-01	4.7687365-01	-6.6738526-01	6.6190982-01
2	1.7103814-01	-4.9720784-01	7.8290839-01	1.0501494+00	-9.9788858-01	1.1792995+00	-1.3930928+00	1.1639130+00
3	3.8e73515-01	-1.0312903+00	1.3068719+00	1.2292260+00	-6.5141536-01	1.4232115-01	9.5935184-01	-1.7991373+00
4	6.1989551-01	-1.3795006+00	1.0211679+00	-2.8e36817-02	6.5927966-01	-1.3562531+00	7.4501127-01	1.6203492+00
5	8.2479094-01	-1.3808452+00	4.6633241-02	-1.2526097+00	8.9706574-01	1.8520049-01	-1.7138279+00	-1.0753668+00
6	1.0190196+00	-9.6558003-01	-1.1030900+00	-9.4883836-01	-8.1710049-01	1.4724342+00	1.3769379+00	4.8202796-01
7	1.2960578+00	-2.1165325-01	-1.5842473+00	9.9273493-01	-1.0357968+00	-1.5560630+00	-5.9808841-01	-1.3808418-01
8	1.5370369+00	8.2866781-01	-2.7230616-01	1.2670398+00	1.8533208+00	9.4315413-01	1.9130567-01	3.0454032-02
9	1.6622419+00	1.4988786+00	1.3662144+00	-1.1372889+00	-9.0523865-01	-3.1597801-01	-8.3918521-02	-5.3340761-03
4								
1	-2.7598717+00							
2	1.1902894+00							
3	-2.3575371-01							
4	4.0043302-02							
5	-6.4043485-03							
6	9.0726023-04							
7	-9.2238799-05							
8	7.5339848-06							
9	-5.6857657-07							

TIEMPO DE EJECUCION = .0000 SEG  
 TIEMPO DE ENTRADA Y SALIDA = .0000 SEG

AFIN

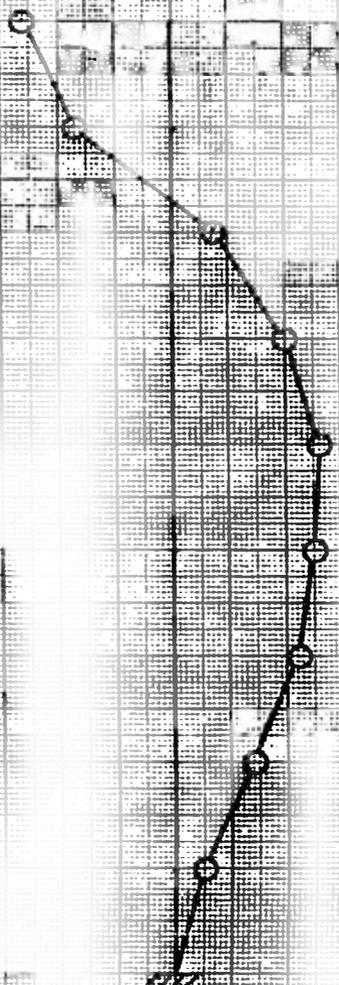
MARCOS:  $A_x$  ,  $B_x$  y  $C_x$ .



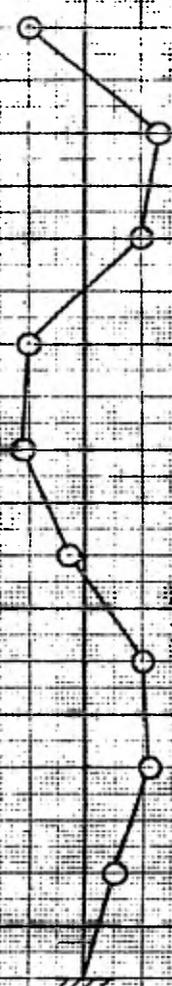
PRIMER MODO:

SLONIA W. MODC

82





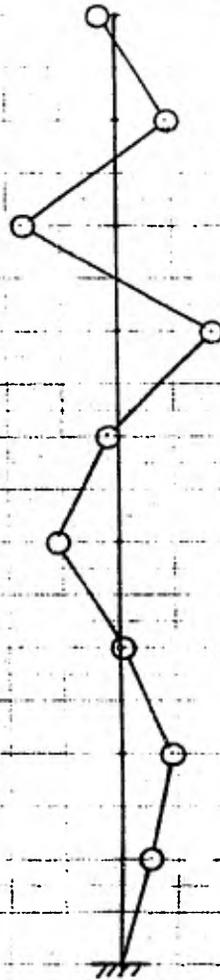


CUARTO MODO

QUINTO MODO

- 85 -

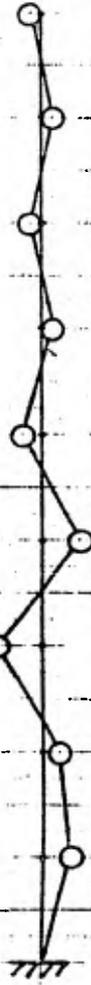




SEXTO MODO.



SEPTIMO MODO.



OCTAVO MODO.



NOVE NO MODO.

## Fuerzas Cortantes

Marcos A, B y C

Estructura tipo "B"

Zona II (terreno de transición).

Coefficiente Sísmico  $C = 0.20$  (Artículo 234 Reglamento D.D.F.)

De acuerdo con el Artículo 241 del Reglamento D.D.F., se deben tomar todos los modos naturales de vibración con períodos o mayores o iguales a 0.40 Seg., pero en ningún caso deben ser menos de tres.

Basándonos en los espectros de diseño que establece el Reglamento en su Artículo 236 tenemos:

Primer Modo

$T = 0.841$  Seg. como  $0.5 < T < 2.0 \therefore a = c$  así  $a = 0.20$

Segundo Modo

$T = 0.434$  Seg. como  $T < 0.5 \therefore a = a_0 + (c - a_0) \frac{T}{T_1}$

$$a = 0.045 + (0.20 - 0.045) \frac{0.434}{0.500} = 0.180$$

Tercer Modo

$T = 0.265$  Seg. como  $T < 0.5 \therefore$

$$a = 0.045 + (0.20 - 0.045) \frac{0.265}{0.500} = 0.127$$

Cuarto Modo

$T = 0.199$  Seg. como  $T < 0.5 \therefore$

$$a = 0.045 + (0.20 - 0.045) \frac{0.199}{0.500} = 0.107$$

Normalizando los cuatro primeros modos:

1o.	2o.	3o.	4o.
1.000	1.000	1.000	1.000
2.847	2.747	2.520	2.240
4.822	4.304	3.207	2.015
7.248	5.525	2.347	-0.292
9.268	5.589	0.171	-2.309
11.473	3.963	-3.160	-1.705
14.011	0.738	-4.341	1.908
16.736	-3.398	-0.841	2.508
19.079	-6.307	+3.611	-2.119

Para calcular los desplazamientos utilizamos la fórmula:

$$U_{in} = a \times g \times \frac{C_n}{W_n^2} \times V_{in} \dots \dots \dots (1)$$

donde:

$U_{in}$  : Desplazamiento de la masa "i" en el modo "n"

$a$  : Ordenada del espectro de aceleraciones

$g$  : Gravedad terrestre

$M_i$  : Masa "i"

$V_{in}$  : Modo "n" de la masa "i"

$C_n$  : Factor de participación de los modos

$$C_n = \frac{\sum_{i=1}^n M_i V_{in}}{\sum_{i=1}^n M_i V_i^2} \dots \dots \dots (2)$$

Aplicando la ecuación (2) en los modos normalizados:

1er. Modo:

$$C_1 = \frac{0.110(1.00+2.847+4.822+7.248+9.268+11.473+14.011+16.736+19.079)}{0.110((1.0)^2+(2.847)^2+(4.822)^2+(7.248)^2+(9.268)^2+(11.473)^2+(14.011)^2+(16.736)^2+(19.079)^2)}$$

$$C_1 = 0.076 \quad \overline{w}_1^2 = 55.83 \quad A_1 = 0.20$$

2o. Modo

$$C_2 = 0.091 \quad \overline{w}_2^2 = 209.63 \quad A_2 = 0.180$$

3er. Modo

$$C_3 = -0.041 \quad \overline{w}_3^2 = 560.37 \quad A_3 = 0.127$$

4o. Modo

$$C_4 = 0.091 \quad \overline{w}_4^2 = 992.66 \quad A_4 = 0.107$$

Sustituyendo los datos obtenidos en la ecuación (1) obtenemos los desplazamientos absolutos de cada masa para cada modo de vibración.

Primer Modo

$$U_1 = \frac{0.076 \times 981 \times 0.20 \times (1.0)}{55.83} = 0.267$$

Segundo Modo

$$U_1 = \frac{0.091 \times 981 \times 0.18 \times (1.00)}{209.63} = 0.077$$

$$U_2 = \frac{0.076 \times 981 \times 0.20 \times (2.847)}{55.83} = 0.760$$

$$U_2 = 0.211$$

$$U_3 = 1.288$$

$$U_3 = 0.330$$

$$U_4 = 1.936$$

$$U_4 = 0.424$$

$$U_5 = 2.475$$

$$U_5 = 0.428$$

$$U_6 = 3.064$$

$$U_7 = 3.742$$

$$U_8 = 4.470$$

$$U_9 = 5.096$$

$$U_6 = 7.304$$

$$U_7 = 0.057$$

$$U_8 = -0.260$$

$$U_9 = -0.433$$

Tercer Modo

$$U_1 = \frac{-0.041 \times 981 \times 0.127 \times (1.00)}{560.37} = -0.009$$

$$U_2 = \frac{-0.041 \times 981 \times 0.127 \times (2.520)}{560.37} = -0.023$$

$$U_3 = -0.029$$

$$U_4 = -0.021$$

$$U_5 = -0.002$$

$$U_6 = 0.029$$

$$U_7 = 0.040$$

$$U_8 = 0.008$$

$$U_9 = 0.055$$

Cuarto Modo

$$U_1 = \frac{0.091 \times 981 \times 0.107 \times (1.00)}{992.66} = 0.010$$

$$U_2 = \frac{0.091 \times 981 \times 0.107 \times (2.24)}{992.66} = 0.022$$

$$U_3 = 0.019$$

$$U_4 = -0.003$$

$$U_5 = -0.022$$

$$U_6 = -0.018$$

$$U_7 = 0.018$$

$$U_8 = 0.024$$

$$U_9 = -0.020$$

Ahora calcularemos los desplazamientos relativos:

Primer Modo

$$A_1 = (0.267 - 0.00) = 0.267$$

$$A_2 = (0.760 - 0.267) = 0.493$$

Segundo Modo

$$A_1 = (0.077 - 0.00) = 0.077$$

$$A_2 = (0.211 - 0.077) = 0.134$$

$$A_3 = 0.528$$

$$A_4 = 0.698$$

$$A_5 = 0.539$$

$$A_6 = 0.589$$

$$A_7 = 0.670$$

$$A_8 = 0.728$$

$$A_9 = 0.626$$

Tercer Modo

$$A_1 = (-0.009 - 0.000) = -0.009$$

$$A_2 = (-0.023 + 0.009) = -0.014$$

$$A_3 = -0.006$$

$$A_4 = 0.008$$

$$A_5 = 0.019$$

$$A_6 = 0.031$$

$$A_7 = 0.011$$

$$A_8 = -0.032$$

$$A_9 = 0.025$$

$$A_3 = 0.119$$

$$A_4 = 0.074$$

$$A_5 = 0.004$$

$$A_6 = -0.124$$

$$A_7 = -0.247$$

$$A_8 = -0.317$$

$$A_9 = -0.223$$

Cuarto Modo

$$A_1 = (0.010 - 0.000) = 0.10$$

$$A_2 = (0.022 - 0.010) = 0.012$$

$$A_3 = -0.003$$

$$A_4 = -0.022$$

$$A_5 = -0.019$$

$$A_6 = 0.004$$

$$A_7 = 0.036$$

$$A_8 = 0.006$$

$$A_9 = -0.044$$

Para el cálculo de las fuerzas cortantes aplicaremos la expresión siguiente:  $F = k A \dots \dots \dots 3$

En donde:

F: Fuerza cortante

K: Rigidez de Entrepiso (la calculada con fórmulas de Wilbur)

A: Desplazamiento relativo entre dos niveles consecutivos

Aplicando la expresión 3 para cada modo de vibración.

Primer Modo

$$F_1 = 322 \times 0.267 = 86$$

$$F_2 = 170 \times 0.493 = 84$$

$$F_3 = 148 \times 0.528 = 78$$

$$F_4 = 111 \times 0.648 = 72$$

$$F_5 = 111 \times 0.539 = 60$$

$$F_6 = 75 \times 0.589 = 44$$

$$F_7 = 62 \times 0.678 = 42$$

$$F_8 = 52 \times 0.728 = 38$$

$$F_9 = 52 \times 0.626 = 32$$

Segundo Modo

$$F_1 = 322 \times 0.077 = 25$$

$$F_2 = 170 \times 0.134 = 23$$

$$F_3 = 148 \times 0.119 = 18$$

$$F_4 = 111 \times 0.094 = 10$$

$$F_5 = 111 \times 0.004 = 0.4$$

$$F_6 = 75 \times (-0.124) = -9.3$$

$$F_7 = 62 \times (-0.247) = -15.3$$

$$F_8 = 52 \times (-0.317) = -16.5$$

$$F_9 = 52 \times (-0.223) = -11.6$$

Tercer Modo

$$F_1 = 322 \times (-0.009) = -2.90$$

$$F_2 = 170 \times (-0.014) = -2.38$$

$$F_3 = 148 \times (-0.006) = -0.89$$

Cuarto Modo

$$F_1 = 322 \times (0.010) = 3.22$$

$$F_2 = 170 \times (0.012) = 2.04$$

$$F_3 = 148 \times (-0.003) = -0.44$$

$$F_4 = 111 \times (0.008) = 0.89$$

$$F_5 = 111 \times (0.019) = 2.11$$

$$F_6 = 75 \times (0.031) = 2.33$$

$$F_7 = 62 \times (0.011) = 0.68$$

$$F_8 = 52 \times (-0.032) = -1.66$$

$$F_9 = 52 \times (0.025) = 1.30$$

$$F_4 = 111 \times (-0.022) = -2.44$$

$$F_5 = 111 \times (-0.019) = -2.11$$

$$F_6 = 75 \times (0.004) = 0.30$$

$$F_7 = 62 \times (0.036) = 2.23$$

$$F_8 = 52 \times (0.006) = 0.31$$

$$F_9 = 52 \times (-0.044) = -2.29$$

De acuerdo con el Reglamento del D.D.F. el valor de las ordenadas obtenidas de los espectros de diseño deben dividirse entre un factor de ductilidad que indica en su artículo 235.

El factor de ductilidad que corresponde es  $Q'=4$ .

Las fuerzas cortantes finales se calculan mediante la expresión siguiente  $F = \left( \sum_{i=1}^n F_i^2 \right)^{1/2}$ , dividiendo entre  $Q'$ :  $R = \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n F_i^2 \right)^{1/2} \dots (4)$

Aplicando esta expresión con los resultados anteriores:

$$R_1 = \frac{1}{4} \sqrt{(86)^2 + (25)^2 + (-2.9)^2 + (3.22)^2} = 22.41 \quad R_5 = 15.02$$

$$R_2 = \frac{1}{4} \sqrt{(84)^2 + (23)^2 + (-2.38)^2 + (2.04)^2} = 21.79 \quad R_6 = 11.26$$

$$R_3 = 20.01 \quad R_7 = 11.19$$

$$R_4 = 18.18 \quad R_8 = 10.37$$

$$R_9 = 8.53$$

Similarmente para los marcos transversales.

Modos Normalizados

Primer Modo	Segundo Modo	Tercer Modo	Cuarto Modo
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.5726	3.4680	3.7564	3.000
8.1197	7.1933	5.4357	3.5106
12.9481	9.6220	4.2475	-0.0824
17.2273	9.6314	0.1940	-3.5774
21.2848	6.8744	-4.5882	-2.7098
27.0714	1.4763	-6.5895	2.8352
32.1049	-5.7814	-1.1326	3.6186
34.7201	-10.4547	5.6827	-3.2480

Aplicando la ecuación (2):

Primer Modo

$$C_1 = 0.3390$$

$$w_1^2 = 30.81$$

$$a_1 = 0.200$$

Segundo Modo

$$C_2 = 0.0521$$

$$w_2^2 = 182.87$$

$$a_2 = 0.190$$

Tercer Modo

$$C_3 = 0.0286$$

$$w_3^2 = 490.63$$

$$a_3 = 0.133$$

Cuarto Modo

$$C_4 = 0.0586$$

$$w_4^2 = 864.85$$

$$a_4 = 0.111$$

Cálculo de desplazamientos absolutos

Primer Modo

$$U_1 = \frac{0.2 \times 0.039 \times 981(1.00)}{30.81} = 0.2482$$

$$U_2 = 0.8873$$

$$U_3 = 2.0165$$

$$U_4 = 3.2157$$

$$U_5 = 4.2786$$

$$U_6 = 5.2862$$

$$U_7 = 6.7233$$

$$U_8 = 7.9734$$

$$U_9 = 8.6229$$

Tercer Modo

$$U_1 = \frac{0.133 \times 0.0286 \times 981 \times (1.00)}{490.63} = 0.0076$$

$$U_2 = 0.0248$$

$$U_3 = 0.0413$$

$$U_4 = 0.0323$$

$$U_5 = 0.0015$$

$$U_6 = -0.0349$$

$$U_7 = -0.0501$$

$$U_8 = -0.0086$$

$$U_9 = 0.0432$$

Segundo Modo

$$U_1 = \frac{0.19 \times 0.0521 \times 981(1.000)}{182.87} = 0.0531$$

$$U_2 = 0.1842$$

$$U_3 = 0.3820$$

$$U_4 = 0.5110$$

$$U_5 = 0.5115$$

$$U_6 = 0.3651$$

$$U_7 = 0.0784$$

$$U_8 = -0.3070$$

$$U_9 = -0.5552$$

Cuarto Modo

$$U_1 = \frac{0.111 \times 0.0536 \times 981 \times (1.000)}{864.85} = 0.0074$$

$$U_2 = 0.0221$$

$$U_3 = 0.0259$$

$$U_4 = -0.0006$$

$$U_5 = -0.0264$$

$$U_6 = -0.0200$$

$$U_7 = 0.0209$$

$$U_8 = 0.0267$$

$$U_9 = -0.0240$$

### Cálculo de las fuerzas cortantes

#### Primer Modo

$$F_1 = 415 \times 0.2482 = 103.00$$

$$F_2 = 160 \times 0.6391 = 102.26$$

$$F_3 = 90 \times 1.1292 = 101.63$$

$$F_4 = 80 \times 1.1292 = 95.34$$

$$F_5 = 80 \times 1.0629 = 85.03$$

$$F_6 = 75 \times 1.0076 = 75.57$$

$$F_7 = 55 \times 1.4371 = 79.04$$

$$F_8 = 45 \times 1.2501 = 56.25$$

$$F_9 = 45 \times 0.6495 = 29.23$$

#### Tercer Modo

$$F_1 = 3.15$$

$$F_2 = 2.75$$

$$F_3 = 1.48$$

$$F_4 = -0.72$$

$$F_5 = -2.46$$

$$F_6 = -2.73$$

$$F_7 = -0.84$$

$$F_8 = 1.87$$

$$F_9 = 2.33$$

#### Segundo Modo

$$F_1 = 415 \times 0.0531 = 22.04$$

$$F_2 = 160 \times 0.1311 = 20.98$$

$$F_3 = 90 \times 0.1978 = 17.80$$

$$F_4 = 80 \times 0.1290 = 10.32$$

$$F_5 = 80 \times 0.005 = 0.04$$

$$F_6 = 75 \times (-0.1464) = -10.98$$

$$F_7 = 55 \times (-0.2867) = -15.77$$

$$F_8 = 45 \times (-0.3854) = -17.34$$

$$F_9 = 45 \times (-0.2482) = -11.17$$

#### Cuarto Modo

$$F_1 = 3.07$$

$$F_2 = 2.35$$

$$F_3 = 0.34$$

$$F_4 = -2.12$$

$$F_5 = -2.06$$

$$F_6 = 0.48$$

$$F_7 = 2.25$$

$$F_8 = 0.26$$

$$F_9 = -2.28$$

Aplicando la expresión (4):

$$R_1 = \frac{1}{4} \sqrt{(103)^2 + (22.04)^2 + (3.15)^2 + (3.07)^2} = 26.36$$

$$R_2 = 26.11$$

$$R_3 = 25.80$$

$$R_4 = 24.13$$

$$R_5 = 21.27$$

$$R_6 = 20.16$$

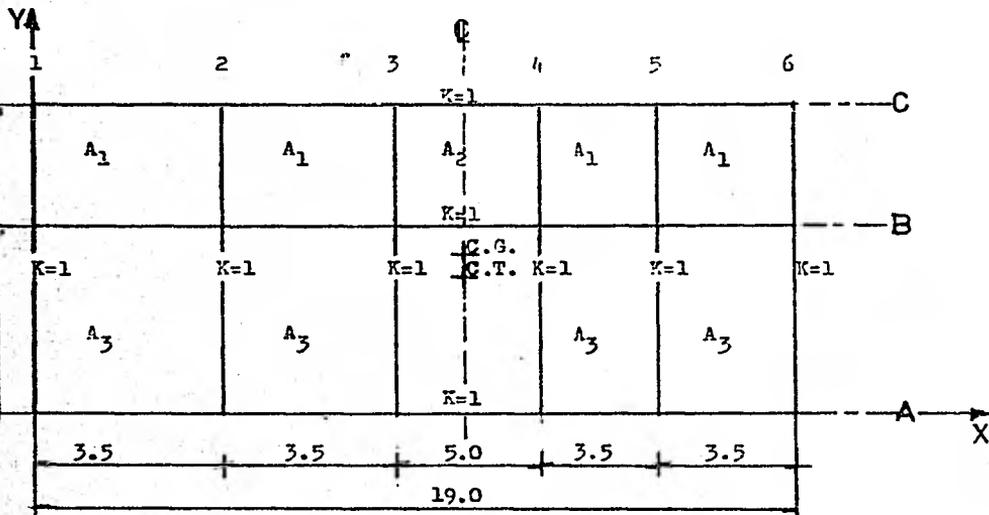
$$R_7 = 19.10$$

$$R_8 = 14.72$$

$$R_9 = 7.87$$

El artículo 241 del Reglamento del D.D.F. permite despreciar el efecto dinámico torsional, a cambio de este deberá calcularse la torsión debida a las excentricidades estáticas y a las accidentales, calculadas según se reglamenta en el artículo correspondiente al análisis - estático.

Cálculo de excentricidades torsionales



\* CENTRO DE GRAVEDAD:

CANT.	TIPO	AREA	Y	AxY
4	A <sub>1</sub>	12.25	6.75	330.75
1	A <sub>2</sub>	17.50	6.75	118.13
4	A <sub>3</sub>	17.50	2.50	175.00
SUMA	-	136.5	-	623.88

C.G. (9.5, 4.60)

CENTRO DE TORSION:

CANT.	K	Y	KxY
1	1	8.5	8.5
1	1	5.0	5.0
1	1	0.0	0.0
SUMA	3	-	13.5

C.T. (9.5, 4.50)

Se supuso que la distribución de la carga era uniforme

### Posición de las fuerzas cortantes en cada nivel

Por simplificación se considerará que todos los niveles tienen una misma geometría y distribución de cargas, por lo cual tienen igual centro de gravedad. La posición de las fuerzas cortantes es precisamente la definida por dicho punto o sea:

$$x = \frac{\sum (F_{iy} \bar{x}_i)}{V_y}$$

$$V_y = \sum F_{iy}$$

$\bar{x}, \bar{y}$  ctos. en todos los niveles

$$y = \frac{\sum (F_{ix} \bar{y}_i)}{V_x}$$

$$V_x = \sum F_{ix}$$

$$x = \frac{V_y}{V_x} \bar{x}$$

;

$$x = \bar{x}$$

$$y = \frac{V_x}{V_y} \bar{y}$$

;

$$y = \bar{y}$$

$$\text{Así } \begin{cases} x = 9.50 \text{ m.} \\ y = 4.60 \text{ m.} \end{cases}$$

Distribución de las fuerzas cortantes en cada nivel

Nivel 2:

EJE	Yix	Yit	KixYit	YixYit <sup>2</sup>	EFECTO DE Vx		
					Directo	Torsión	Total
Ax	1	-4.50	-4.50	20.25	2.84	-0.089	2.751
Bx	1	0.50	0.50	0.25	2.84	0.014	2.854
Cx	1	4.00	4.00	16.00	2.84	0.113	2.953
Suma	-	-	-	36.50			

$$(KixYit^2 + KyiXit^2) = 36.50 + 265 = 301.5$$

EJE	Kiy	Xit	KiyXit	KiyXit <sup>2</sup>	EFECTO DE Vy		
					Directo	Torsión	Total
1y	1	-9.50	-9.50	90.25	1.31	-0.470	0.840
2y	1	-6.00	-6.00	36.00	1.31	-0.300	1.010
3y	1	-2.50	-2.50	6.25	1.31	-0.124	1.186
4y	1	2.50	2.50	6.25	1.31	0.124	1.434
5y	1	6.0	6.00	36.00	1.31	0.300	1.610
6y	1	9.50	9.50	90.25	1.31	0.470	1.780
SUMA	-	-	-	265.00			

Directo:  $Vx = \frac{8.53}{3} = 2.84$

Torsión:  $Vt = \frac{Mx Kix Yit}{\sum Kix Yit^2 + \sum Kyi Xit^2}$

Directo:  $Vy = \frac{7.87}{6} = 1.31$

Torsión:  $Vt = \frac{My Kiy Xit}{\sum Kix Yit^2 + \sum Kyi Xit^2}$

$e_T = 1.5 e \pm 0.10b$  (excentricidad torsional + accidental Reglamento D.D.F. art. 240-VII)

$e_{yT1} = 1.5 (4.6 - 4.5) + 0.10 \times 8.50 = 1.00$

$e_{yT2} = 1.5 (4.6 - 4.5) - 0.10 \times 8.50 = -0.70$

$M_{xT1} = 8.53 \times 1.0 = 8.53$

$M_{xT2} = 8.53 (-0.7) = -5.97$

$e_{xT1} = 1.5 (9.5 - 9.5) + 0.10 \times 19.0 = 1.90$

$e_{xT2} = 1.5 (9.5 - 9.5) - 0.10 \times 19.0 = -1.90$

$M_{yT1} = 7.87 \times 1.9 = 14.95$

$M_{yT2} = -14.95$

En forma análoga se calcula para los otros niveles:

Marcos Longitudinales Ax, Bx y Cx:

NIVELES	N-8			N-7		
	DIRECTO	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
Ax	3.46	-0.108	3.352	3.73	-0.117	3.613
Bx	3.46	0.017	3.477	3.73	0.019	3.749
Cx	3.46	0.138	3.598	3.78	0.148	3.878

NIVELES	N-6			N-5		
	DIRECTO	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
Ax	3.75	-0.118	3.632	5.00	-0.057	4.843
Bx	3.75	0.019	3.769	5.00	0.025	5.025
Cx	3.75	0.149	3.90	5.00	0.179	5.20

NIVELES	N-4			N-3		
	CORTANTE			CORTANTE		
EJES	DIRETO	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
Ax	6.06	-0.190	5.87	6.67	-0.209	6.461
Bx	6.06	0.030	6.09	6.67	0.033	6.703
Cx	6.06	0.241	5.301	6.67	0.265	6.935

NIVELES	N-2			N-1		
	CORTANTE			CORTANTE		
EJES	DIRETO	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
Ax	7.26	-0.228	7.032	7.47	-0.234	7.236
Bx	7.26	0.036	7.296	7.47	0.037	7.507
Cx	7.26	0.289	7.549	7.47	0.297	7.767

$$M_{t1} = 18.18$$

$$M_{t1} = 20.01$$

$$M_{t1} = 21.79$$

$$M_{t1} = 22.41$$

$$M_{t2} = -13.73$$

$$M_{t2} = -14.00$$

$$M_{t2} = -15.26$$

$$M_{t2} = -15.69$$

Marcos Transversales 1y, 2y, 3y, 4y, 5y y 6y

NIVELES	N-8			N-7		
	DIR.	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
1y	2.45	-0.38	1.57	3.18	-1.14	2.04
2y	2.45	-0.56	1.89	3.18	-0.72	2.46
3y	2.45	-0.23	2.22	3.18	-0.30	2.88
4y	2.45	0.23	2.68	3.18	0.30	3.48
5y	2.45	0.56	3.01	3.18	0.72	3.90
6y	2.45	0.88	3.33	3.18	1.14	4.32

NIVELES	N-6			N-5		
	DIR.	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
1y	3.36	-1.21	2.15	3.55	-1.27	2.28
2y	3.36	-0.76	2.60	3.55	-0.80	2.75
3y	3.36	-0.32	3.04	3.55	-0.34	3.21
4y	3.36	0.32	3.68	3.55	0.34	3.89
5y	3.36	0.76	4.12	3.55	0.80	4.35
6y	3.36	1.21	4.57	3.55	1.27	4.82

NIVELES	N-4			N-3		
	DIR.	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
1y	4.02	-1.44	2.58	4.30	-1.54	2.76
2y	4.02	-0.97	3.11	4.30	-0.98	3.32
3y	4.02	-0.58	3.64	4.30	-0.41	3.89
4y	4.02	0.38	4.40	4.30	0.41	4.71
5y	4.02	0.91	4.93	4.30	0.93	5.28
6y	4.02	1.44	5.46	4.30	1.54	5.84

NIVELES	N-2			N-1		
	DIR.	TORS.	TOT.	DIR.	TORS.	TOT.
1y	4.35	-1.54	2.81	4.39	-1.54	2.81
2y	4.35	-0.98	3.37	4.39	1.00	3.39
3y	4.35	-0.41	3.94	4.39	-0.42	3.97
4y	4.35	0.41	4.76	4.39	0.42	4.81
5y	4.35	0.98	5.33	4.39	1.00	5.39
6y	4.35	1.54	5.89	4.39	1.58	5.97

Comparación entre las Fuerzas Cortantes obtenidas por los Métodos  
de Análisis Dinámico y Estático

Análisis Estático

Nivel	Entrepiso	(Ton.) W <sub>i</sub>	(m.) H <sub>i</sub>	(T-m) W <sub>i</sub> H <sub>i</sub>	(Ton.) F <sub>i</sub>	(Ton.) V <sub>i</sub>
9		108	23.10	2495	9.67	
	9					9.67
8		108	20.55	2219	8.60	
	8					18.27
7		108	18.00	1944	7.53	
	7					25.80
6		108	15.45	1669	6.47	
	6					32.27
5		108	12.90	1393	5.40	
	5					37.67
4		108	10.35	1118	4.33	
	4					42.00
3		108	7.80	842	3.26	
	3					45.26
2		108	5.25	567	2.20	
	2					47.46
1		108	2.70	292	1.13	
	1					48.59
-	SUMA	972	-	12539.0	-	-

Este análisis es válido tanto para el sentido x - x como para el  
sentido y - y

$$\left. \begin{array}{l} c=0.20 \\ Q=4 \end{array} \right\} \therefore F_i = \frac{c \cdot W_i \cdot H_i}{Q \sum W_i H_i} \times \sum W_i = \frac{0.2 \times 972}{4 \times 12539.0} \times W_i H_i$$

Fuerza Cortante	Análisis Estático	Análisis Dinámico X	Análisis Dinámico Y
R <sub>9</sub>	9.67	8.53	7.27
R <sub>8</sub>	18.27	10.37	14.72
R <sub>7</sub>	25.80	11.19	19.10
R <sub>6</sub>	32.27	11.26	20.16
R <sub>5</sub>	37.67	15.02	21.27
R <sub>4</sub>	42.00	18.18	24.13
R <sub>3</sub>	45.26	20.01	25.30
R <sub>2</sub>	47.46	21.79	26.11
R <sub>1</sub>	48.69	22.41	26.36

## CONCLUSION

Como se puede apreciar en la tabla comparativa anterior, las fuerzas cortantes obtenidas por el análisis dinámico son menores que las obtenidas por el método estático; esto representa una gran ventaja - pues permite reducir el costo de la estructura al poder reducir las secciones de la misma.

La mayor importancia del análisis dinámico radica en que los resultados obtenidos se debe básicamente a que los cortantes que resultan - de un análisis dinámico dependen de los modos y frecuencias naturales de la estructura, los cuales a su vez están en función de las masas y rigideces de la misma. Mientras que los cortantes obtenidos - por un análisis estático dependen exclusivamente de los pesos y alturas de cada nivel de la estructura.

El Reglamento de Construcciones del D.D.F. permite usar indistintamente los métodos estático o dinámico para el análisis de estructuras con alturas menores a los 60 m. Pero para estructuras mayores - de 60 m. exige que se haga un análisis dinámico, tomando en cuenta - que con este método se pueden predecir fenómenos especiales que con un análisis estático no sería posible.

Por otro lado el volumen de trabajo necesario para realizar un análisis dinámico es mínimo al utilizar programas de computadora, lo cual hace que sea mas conveniente realizar análisis de este tipo en contra de análisis estáticos.

B I B L I O G R A F I A

FUNDAMENTOS DE INGENIERIA SISMICA

N.H. Newmark y E. Rosenblueth

Edit. Diana

NUMERICAL METHODS IN FINITE ELEMENTS ANALYSIS

Klaus-Jürgen Bathe

Edward L. Wilson

Prentice Hall, Inc.

ALGEBRA LINEAL

G. Hadley

Fondo Educativo Interamericano, S.A.

ESTRUCTURAS ANTISISMICAS

G. Estrada Uribe

C.E.C.S.A.

VIBRACIONES MECANICAS

William W. Seto

Mc. Gray - Hill

ANALISIS SISMICO MODAL

Carlos Magdaleno

I.P.N.