/ej.
32

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS SISMICO DE LA LINEA ELEVADA DEL METROPOLITANO DE LA CIUDAD DE MEXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A N

FAUSTO RAMON CARCAMO VELAZQUEZ

RICARDO PEREZ RUIZ

MEXICO, D. F. 1981

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-1-254

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA

A los Pasantes señores FAUSTO RAMON CARCAMO VELAZQUEZ y
RICARDO PEREZ RUIZ,
P r e s e n t e s .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a ustedes a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor M. en C. Enrique del Valle Calderón, para que lo desarrollen como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANALISIS SISMICO DE LA LINEA ELEVADA DEL METROPOLITANO DE LA CIUDAD DE MEXICO"

1. Introducción.
2. Descripción de la línea elevada.
3. Análisis de cargas y propiedades elasto-geométricas.
4. Métodos de análisis.
5. Modelos matemáticos propuestos y análisis de los mismos.
6. Comparación de resultados y conclusiones.

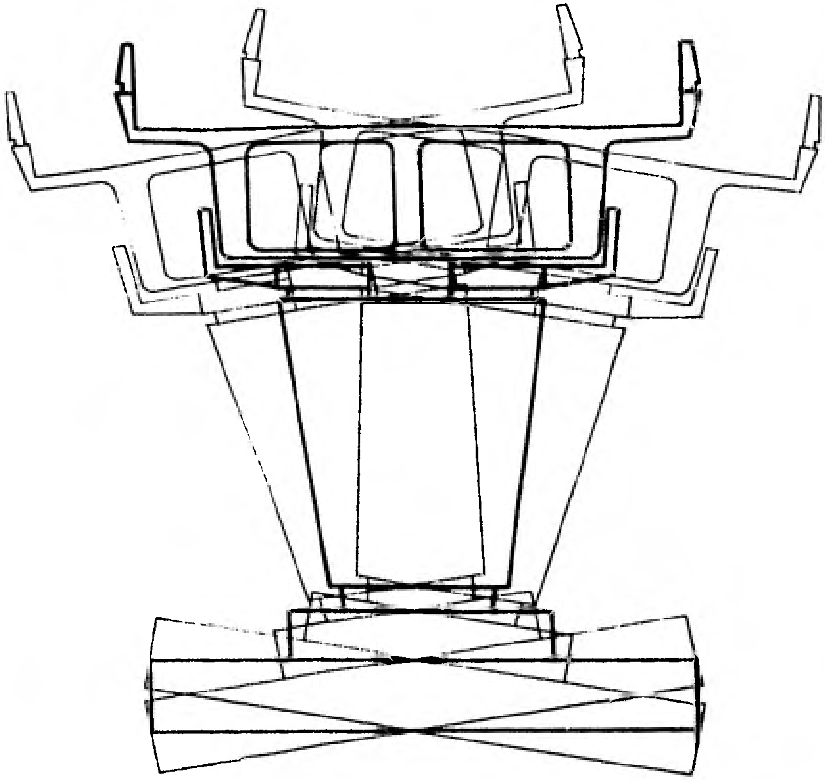
Bibliografía.

Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 23 de julio de 1980
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBLH/ser



ANALISIS SISMICO DE LA LINEA ELEVADA DEL METROPOLITANO DE LA CIUDAD DE MEXICO.

C A P I T U L O 1

INTRODUCCION

La ciudad de México, con aproximadamente 9 millones de habitantes y cinco más en los municipios aledaños del Estado de México, es una de las ciudades de mayor concentración poblacional del mundo y centraliza las actividades más importantes del país. Su crecimiento, del 5.6% anual, del cual corresponde un 2% a la inmigración, es también de los mayores creando por consiguiente graves problemas de invasiones y asentamientos humanos irregulares.

Por otra parte, el deficiente e insuficiente sistema de transporte público, ha propiciado la explosión automovilistica trayendo como consecuencia alta contaminación del medio ambiente, congestionamientos de tránsito, velocidades de traslado en ciertas áreas y en horas críticas inferiores al paso normal del peatón, niveles de ruido muy altos, pérdidas de horas - hombre, en fín, un sin número de problemas que afectan directamente a la población.

Hace poco más de 12 años se inició la construcción del Sistema de Transporte Colectivo "METRO". En una primera etapa se construyeron cerca de 42 Km. en tres líneas, de las cuales 32 Km. son subterráneos y 10 Km. superficiales.

La primera línea empezó a operar a mediados de 1969, las otras dos en 1970.

Al ir incrementándose la demanda, fue perdiendo algunas de sus cualidades hasta llegar a la saturación del sistema. Como una solución provisional se incrementó el número de carros, sin embargo, resulta evidente la necesidad de realizar ampliaciones al sistema que permitan cubrir una -- demanda siempre en aumento.

El Departamento del Distrito Federal, tratando de - resolver este problema, elaboró un "Plan de Vialidad y -- Transporte" cuyo objetivo principal es el de mejorar los -- servicios que presta el Sistema de Transporte Colectivo.

Como es bien sabido, el METRO debe tender a ser la columna vertebral de un sistema de transporte urbano y como tal, su ampliación debe de realizarse en una forma sistemática y contínua, de esta manera podrá cumplir gradualmente su función articuladora con los otros medios, ya que la solución integral del problema de transporte no puede obtenerse a través de un solo medio así sea éste el más eficiente.

Actualmente está en construcción una segunda etapa que duplicará la longitud inicial ampliando una de las líneas anteriores y adicionando tres más. Esta segunda etapa tendrá 20.8 Km. de línea subterránea, 12.42 Km. de línea -- superficial y 10.37 Km. de línea elevada, lo que aumentará la longitud total de construcción de la red a 85.59 Km.

El número de estaciones aumentará de 48 existentes a 86, siete de las cuales serán de correspondencia entre líneas.

Como se indicó anteriormente, las ampliaciones serán de tres tipos: Subterráneas, Superficiales y Elevadas, y para la selección de cada uno de estos tipos, se tomaron en cuenta los siguientes factores:

a) Costo de obra civil por kilómetro.
b) Tiempo de ejecución de obra civil.
c) Obstrucción de la vía pública en la ejecución.
d) Interferencias municipales.
e) Conservación de obras y equipo.
f) Mantenimiento de vía.
g) Paisaje urbano: aspecto estético y barrera física.
h) Disponibilidad vial superficial futura.
i) Libramientos viales perpendiculares inducidos.

El diseño y construcción de la solución subterránea se lleva a cabo tomando en cuenta las experiencias adquiridas en la etapa anterior. Los cajones serán de dos tipos: en la zona de terreno altamente compresible donde se requiere compensación importante de cargas, se usará muro Milán y muro de acompañamiento, con losas de piso y techo de espesores del orden de 1.0 m, mientras que en aquellas zonas en que el terreno es más resistente y no se requiere- de grandes compensaciones de peso, se usará el cajón ligero, con muro Milán estructural y pisos y techos dimensionados - en función de las cargas que deben soportar.

El problema principal que ocasiona la solución superficial es la barrera contínua que presenta al tránsito transversal, obligando a hacer pasos a desnivel a distancias - - aproximadas de 1 Km. En algunos casos, estos pasos son por debajo de la línea, como ocurre en la mayoría de los cruces de la parte superficial de la primera etapa; en otros casos, el paso transversal se hace por arriba de la línea, ya sea- elevando el paso ó enterrando la línea en tajo abierto ó -- cajón. En la ampliación y para subsanar algunos problemas- de mantenimiento de la vía observados en la solución superficial de la primera etapa por efecto de movimientos del -- terreno, se construirá la línea sobre una losa contínua de- cimentación, que ayude a repartir las cargas que el tren -- transmite al terreno.

En relación con la solución elevada, el problema -- fundamental es su buen comportamiento ante fuerzas sísmicas debido a que el tipo de estructura propuesta es altamente - susceptible a dichos efectos y por lo tanto requiere el estudio de varias alternativas de análisis con el objeto de - determinar una que resulte además de confiable, económica -

ya que no se cuenta con experiencia en estructuras similares en nuestro país.

En este trabajo se presentan comentarios sobre diferentes alternativas de estructuración tomando en cuenta las necesidades de vialidad, de construcción, de mecánica de suelos, de comportamiento de la estructura, etc., y se hace la comparación de cuatro análisis sísmicos basados fundamentalmente en las normas del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y en modelos matemáticos propuestos por el Dr. Octavio Rascón Chávez.

C A P I T U L O 2

DESCRIPCION DE LA LINEA ELEVADA.

2.1 ALTERNATIVAS DE SOLUCION ESTRUCTURAL.

La necesidad de conservar el mayor número posible de carriles de circulación en las calles donde se empleará esta solución, llevó a la decisión de utilizar una sola hilera de columnas de apoyo, en forma similar a lo observado en algunos otros metros elevados del mundo que fueron objeto de estudio previo, como los de Rotterdam, Marsella y San Francisco.

Una vez definido el apoyo en una sola hilera de columnas, se procedió a analizar las distintas alternativas posibles para las trabes, tanto desde el punto de vista del material a emplear: acero, concreto pretensado, concreto postensado, ó acero pretensado, como desde el punto de vista de la sección transversal: viga I, T, o cajón, y de los claros que podrían salvarse. Se analizó también la posibilidad de usar estructuras contínuas, estructuras isostáticas simplemente apoyadas ó estructuras tipo Gerber.

Las alternativas estudiadas fueron las siguientes:

1.- Estructura Isostática: Vigas libremente apoyadas sobre columnas, con las siguientes variantes en claros y sección:

a). Precolada pretensada a base de cuatro cajones-de sección reducida, uno bajo cada eje de rodamiento, con claros de 20, 25 y 30 m. unidos por una losa colada sobre ellos con ancho total de 8 m.

b). Precolada pretensada a base de 2 cajones de mayor dimensión cuyas almas coincidían con los ejes de rodamiento, con claros de 20 y 25 m. unidos por una losa colada sobre ellos.

c). Cuatro vigas I de acero, con una losa de concreto colada sobre ellas con claros de 20, 25, 30, 35 y 40 m.

d). Cuatro vigas I de acero pretensado, con losa colada sobre ellas con claros de 30, 35 y 40 m.

e). Cajón postensado colado en sitio, con cuatro nervaduras coincidentes con los ejes de rodamiento, en claros de 25, 30, 35 y 40 m.

f). Cuatro vigas T precoladas, pretensadas, con claros de 20, 25 y 30 m. unidas por tramos de losa colada en sitio.

2.- Estructura Isostática tipo Rotterdam, consistente en tramos simplemente apoyados en los extremos de un cabezal colado sobre columnas. El voladizo de los cabezales a cada lado de la columna se hizo variar entre 2 y 5 m. Las secciones de los tramos de trabe eran similares a las de la alternativa 1.

3.- Estructura Isostática de claros desiguales: 35 - 15 - 35, 40 - 15 - 40 m., con voladizos de 7.5 m. de cada lado.
Esta alternativa se estudió únicamente para sección de cajón postensado, colado en sitio, de cuatro nervaduras. Las dos columnas podrían ser sustituídas por apoyos en forma de V.

4.- Solución tipo Gerber, constituída por tramos de viga apoyados sobre columnas con voladizo a cada lado, que reciben tramos simplemente apoyados en sus extremos. Esta solución fué estudiada únicamente para sección de cajón colado en sitio, postensado, de cuatro nervaduras.

5.- Solución similar a la anterior pero haciendo las vigas contínuas con las columnas y articulando éstas en su base.

6.- Estructura con columnas articuladas en su base y claros desiguales, con sección de cajón postensado colado en sitio, contínuo con las columnas.

7.- Estructuras de viga contínua, sección de cajón postensado.

Se hizo una comparación económica de las distintas-alternativas estudiadas, tomando en cuenta las cantidades - de materiales necesarios por Km. de línea en cimentación - - (zapata, dado y pilotes) y superestructura (columnas, cabezales en su caso, trabes y losas) tanto de concreto colado - en sitio como precolado o acero estructural, para los distintos claros estudiados y para soluciones a base de concreto - ligero hecho con agregados de arcillas expandidas o concreto de peso volumétrico normal y tomando en cuenta la posibilidad de que se suprimiera o nó el balasto para la colocación de la vía.

Se tomaron también en cuenta las dificultades de tipo constructivo, los equipos de construcción que sería necesario utilizar en cada solución,grúas, juegos de cimbra, etc.

2.2 CONSIDERACIONES SOBRE LAS ALTERNATIVAS ESTUDIADAS.

Las estructuras contínuas altamente hiperestáticas-presentan ventajas de redistribución de elementos mecánicos al ser sometidas a sobrecargas excepcionales,por ejemplo , las causadas durante un sismo; sin embargo, para su correcto funcionamiento requieren que los apoyos no permitan desplazamientos verticales diferenciales que ocasionarían esfuerzos adicionales de importancia. Para lograr ésto, sería necesario utilizar cimentaciones con pilotes apoyados en la capa dura del subsuelo de la Ciudad de México, con profundidad variable que llega en algunas zonas a más de 35 m., lo que motivaría por otro lado, el que se afectara la zona adyacente a la cimentación, pues impediría el hundimiento general de la ciudad que en promedio es del orden de 10 cm. por año, formándose desniveles importantes alrededor de las zapatas de cimentación, que perturbarían seriamente la vialidad y sobrecargarían fuertemente los pilotes debido a la fricción negativa que se generaría.

Por otro lado, las ventajas de la continuidad solo serían en dirección de la línea, pues en dirección perpendicular, dado que se apoyaría en una sola columna, la estructura sería isostática. Además , la solución contínua es más vulnerable a los cambios de temperatura.

Debido a estas razones, se optó por utilizar la solución isostática que tolera fácilmente hundimientos diferenciales y permite la solución de cimentación con pilotes de fricción. Desde el punto de vista sísmico, en dirección de la línea se puede hacer suficientemente resistente sin incrementos importantes de costo; el análisis sísmico perpendicular a la línea, es igual para las soluciones contínua o isostática.

Las soluciones con base articulada, presentan el in conveniente de que en dirección perpendicular a la línea,- la base no puede ser articulada por trabajar la estructura en voladizo, incrementándose fuertemente el costo de las - articulaciones y complicándose su diseño.

La solución isostática tipo Rotterdam, permite claros mayores y tendría ventajas de construcción en sitio -- combinada con prefabricación, sin embargo, las discontinuidades angulares en la vía y los elementos mecánicos en caso de un sismo, serían inaceptables, por lo que se optó por la solución sin cabezal en que dichas discontinuidades son mucho menores y pueden absorberse con mayor facilidad. Razones similares en relación con el problema de vía llevaron a descartar la solución tipo Gerber y la solución de claros desiguales.

Por lo que respecta a la sección transversal de la - trabe, se decidió emplear el cajón colado en sitio postensado, puesto que las soluciones a base de tramos precolados - pretensados presentaban una serie de dificultades desde el punto de vista de transporte y montaje, que incrementaban - el costo excesivamente. En esta selección influyó también la gran rigidez torsional de la sección en cajón, comparada con las soluciones de vigas o cajones aislados.

Para cumplir con requisitos de deformación compatibles con la operación de los carros, resultó necesario incrementar el espesor de la losa superior para aumentar el - momento de inercia, lo que permitió eliminar una de las - - nervaduras, quedando la solución definitiva con tres nervaduras, losa superior con doble voladizo y losa inferior formando el cajón con las nervaduras. Con el objeto de darle - rigidez a la trabe, se colocaron dos diafragmas intermedios de 30 cm. de espesor y dos diafragmas extremos de 80 cm. de espesor cada uno.

Las trabes se apoyaron sobre placas de neopreno,- una de ellas rígida horizontalmente para restringir los desplazamientos y la otra flexible, equivalente a un apoyo móvil. Para restringir los movimientos de la trabe en direc-- ción perpendicular a la línea, se usó un saliente que encaja en un hueco, dejado previamente en la columna. Se tomaron - precauciones especiales para evitar la caída de una trabe - durante movimientos sísmicos intensos.

Las dimensiones de la columna en el extremo superior están regidas por los espacios entre trabes para poder postensarlas y por la separación entre apoyos perpendicularmente a la línea para tomar eficientemente el momento de -- cabeceo y de sismo; la sección requerida por requisitos - - estructurales era de menores dimensiones, por lo que se podía optar por hacer una columna de sección constante con -- ménsulas en el extremo superior para satisfacer los requisitos constructivos, o bien, hacerla de sección variable redu ciéndola del extremo superior hacia la base. Por razones -- arquitectónicas se optó por esta última solución.

Para el diseño de la trabe postensada, columna y-cimentación, se estudiaron distintas condiciones de carga,- incluyendo diferentes posiciones de tren tipo y tren de mantenimiento para obtener los efectos más desfavorables (mayor flexión, mayor compresión, etc.).

2.3 MECANICA DE SUELOS.

La línea en estudio se clasificó en su totalidad- dentro de la zona III, según el R.C.D.F. (ref. 1) siendo- ésta terreno compresible.

Considerando la importancia que reviste el hundimiento regional en el valle de la Ciudad de México, fue necesario adoptar una solución tal que "siguiera" dicho hundimiento y se estudiaron varias alternativas, desde el uso de cajones compensados, hasta el de zapatas semicompensadas con pilotes de fricción, que fue la solución finalmente adoptada.

Se realizaron estudios de mecánica de suelos en - cada uno de los apoyos, consistentes en pruebas de penetración estandar para verificar estratigrafía y tipo de materiales, haciendo también pruebas completas de consolidación del material obtenido en sondeos de tipo inalterado en algunos-apoyos, para definir las propiedades mecánicas del subsuelo tales como compresibilidad, resistencia al corte, etc.

Para determinar las dimensiones de las zapatas -- así como el número de pilotes por apoyo, se tomaron en cuenta los siguientes valores totales admisibles desde el punto de vista de mecánica de suelos.

a). Capacidad de carga con factores de seguridad igual a 1.20 bajo solicitaciones estáticas- y dinámicas.

b). Hundimiento total en un apoyo no mayor de - 15 cm.

c). Hundimiento diferencial máximo entre apoyos contiguos no mayor de 4 cm.

d). Esfuerzos finales inducidos por la solución de cimentación en los estratos compresibles no mayores de la carga de preconsolidación- del suelo en la profundidad de análisis.

e). Presión máxima admisible al nivel de desplante de la losa de cimentación de 8 a 8.5 ton/m^2 en tramo y de 9 a 9.5 ton/m^2 en estaciones.

También se revisó la capacidad de carga de los pilotes trabajando a tensión por efecto de momentos flexionantes y a cortante generados éstos por las cargas estáticas y dinámicas de la estructura.

Para claros de 35.0 m. las zapatas resultaron del orden de 13 x 13 metros, espesor de 1.15 m. promedio y un dado de repartición de carga de 3.80 x 4.0 m. y de 80 cm. de peralte colocado en la base de la columna. El número de pilotes para estos apoyos varía de 21 a 25 aproximadamente, con una longitud promedio de 27 metros, en dos tramos precolados.

En las esquinas de las zapatas se dejaron preparaciones para colocar pilotes de control a futuro, cuya función será la de enderezar la estructura en caso de que fuera necesario.

2.4 IDEALIZACION DE LA ESTRUCTURA.

Para analizar los efectos sísmicos, la estructura se consideró como un péndulo invertido según el Reglamento de Construcciones para el D.F. ya que más del 50% de su masa está concentrada en la parte superior y basta la formación de una sola articulación plástica en la columna para producir el colapso, lo que hace que sea una estructura vulnerable a los efectos sísmicos y obliga a diseñarla tomando en cuenta todos los efectos que puedan obrar en ella.

En lo que respecta a la trabe, ésta se consideró con un apoyo articulado en el extremo norte según la dirección de la línea y un apoyo simple en el extremo sur. Esta idealización se hizo con el propósito de permitir que la -- trabe tuviera libertad de movimientos producidos por efectos internos y externos, tales como contracciones volumétricas, deformaciones por postensado, aceleración y frenaje de trenes, sismo, etc.

CAPITULO 3

ANALISIS DE CARGAS Y PROPIEDADES ELASTO-GEOMETRICAS.

En el análisis de un péndulo invertido, es necesario tomar en cuenta la masa y la inercia rotacional que ésta genera, las cuales tienden a producir un desplazamiento y un giro respectivamente en el extremo superior de la columna. - Estos efectos de masa e inercia rotacional serán los causados por las cargas muertas y vivas en ambas direcciones.

3.1 MASA E INERCIA ROTACIONAL.

La inercia rotacional Jz_0 de la masa m de un cuerpo respecto a su centroide, se define como el momento polar de inercia de su sección transversal, multiplicado por su longitud L y su peso volumétrico γ, dividido entre la aceleración de la gravedad g.

De acuerdo con lo mostrado en la figura 3.1 tenemos :

$$Jz_0 = Iz_0 \frac{L\gamma}{g} = (Ix_0 + Iy_0)\frac{L\gamma}{g} \quad \text{------------------} (3.1)$$

Por lo tanto, la inercia rotacional respecto a un eje paralelo será igual al momento de inercia rotacional centroidal sumado al producto de la masa por el cuadrado de su distancia al eje (Teorema de Steiner o de los ejes paralelos , ref. 2), de tal modo que :

$$Jz = Jz_0 + md^2 \quad \text{-----------------------------------} (3.2)$$

Sustituyendo (3.1) en (3.2) y considerando que :
$m = \frac{AL\gamma}{g}$ y $d^2 = x^2 + y^2$ obtenemos :

$$Jz = (Ix_0 + Iy_0)\frac{L\gamma}{g} + (x^2 + y^2)\frac{AL\gamma}{g}$$

$$Jz = \frac{L\gamma}{g}\left[Ix_0 + Iy_0 + A(x^2 + y^2) \right] \quad \text{--------------} (3.3)$$

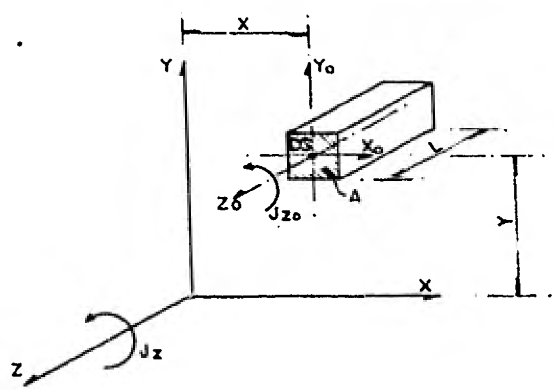


FIG. 3.1

3.2 CALCULO DE LA MASA E INERCIA ROTACIONAL PARA CARGAS MUERTAS.

3.2 a) DIRECCION TRANSVERSAL.

En el caso de la estructura elevada del metro, todas - las cargas muertas son simétricas respecto al eje de trazo. Si ubicamos los ejes globales X,Y,Z en la base de la trabe como se indica en la figura 3.2, el centroide estará sobre - el eje global Y, a una distancia y_c del eje global X; por lo tanto la expresión (3.3) se verá modificada a :

$$Jz = \frac{LY}{g}\left[Ix_0 + Iy + Ay_c^2\right] \qquad \text{------------------}(3.4)$$

Donde :

L = Longitud tributaria de la trabe.

A = Area total de la sección.

Ix_0 = Momento de inercia de la sección respecto al eje X_0.

Iy = Momento de inercia de la sección respecto al eje Y.

Para el cálculo de los valores A, Ix_0 e Iy de la sección total de la trabe, así como para el resto de las cargas muertas, éstas se tendrán que descomponer en pequeñas secciones- definidas por rectángulos, triángulos y segmentos de círculo cuyos momentos de inercia centroidales están bien definidos- y sumarlos por el Teorema de los ejes paralelos para obtener los valores totales. Si tomamos una sección parcial de la -- sección total con un área de valor A_i localizada a una distancia y_i del eje global X, con momento de inercia centroidal

Ix_i (figura 3.2), el momento de inercia Ix_{0i} respecto al eje X_0, valdrá :

$$Ix_{0i} = Ix_i + A_i(y_i - y_c)^2$$

$$Ix_{0i} = Ix_i + A_i y_i^2 - 2A_i y_i y_c + A_i y_c^2$$

Sumando para todas las secciones parciales y tomando en cuenta que por momentos estáticos:

$$y_c = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i}$$

$$Ix_0 = \Sigma Ix_i + \Sigma A_i y_i^2 - \frac{2\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i}\Sigma A_i y_i + \left(\frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i}\right)^2 \Sigma A_i$$

Desarrollando se tiene :

$$Ix_0 = \Sigma Ix_i + \Sigma A_i y_i^2 - y_c^2 \Sigma A_i \quad \text{-----------------(3.5)}$$

Análogamente para Iy :

$$I_y = \Sigma Iy_i + \Sigma A_i x_i^2 - x_c^2 \Sigma A_i$$

pero como $x_c = 0$

$$Iy = \Sigma Iy_i + \Sigma A_i x_i^2 \quad \text{-------------------------(3.6)}$$

A continuación, los cálculos de A, y_c, Ix_0 e Iy para cada elemento de carga muerta son desarrollados en las tablas-

1 a 8 y resumidos finalmente en la tabla 9, que representa - el cálculo de la expresión (3.4).

La masa de cargas muertas en la dirección transversal m_x será valuada en la tabla 9 como la masa correspondiente a la longitud tributaria de la trabe y demás cargas sobre ella, sumada a la parte tributaria de la columna, que incluye: pesos de media columna, medio recubrimiento y faldones.

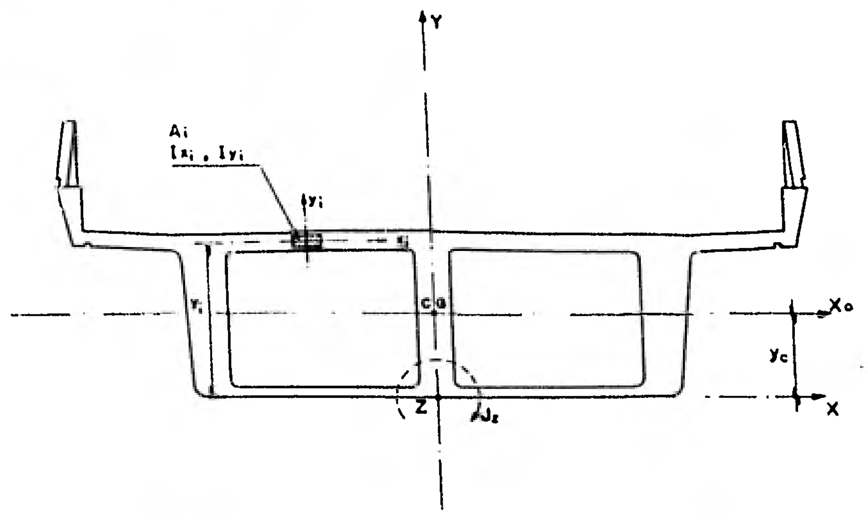


FIG. 3.2

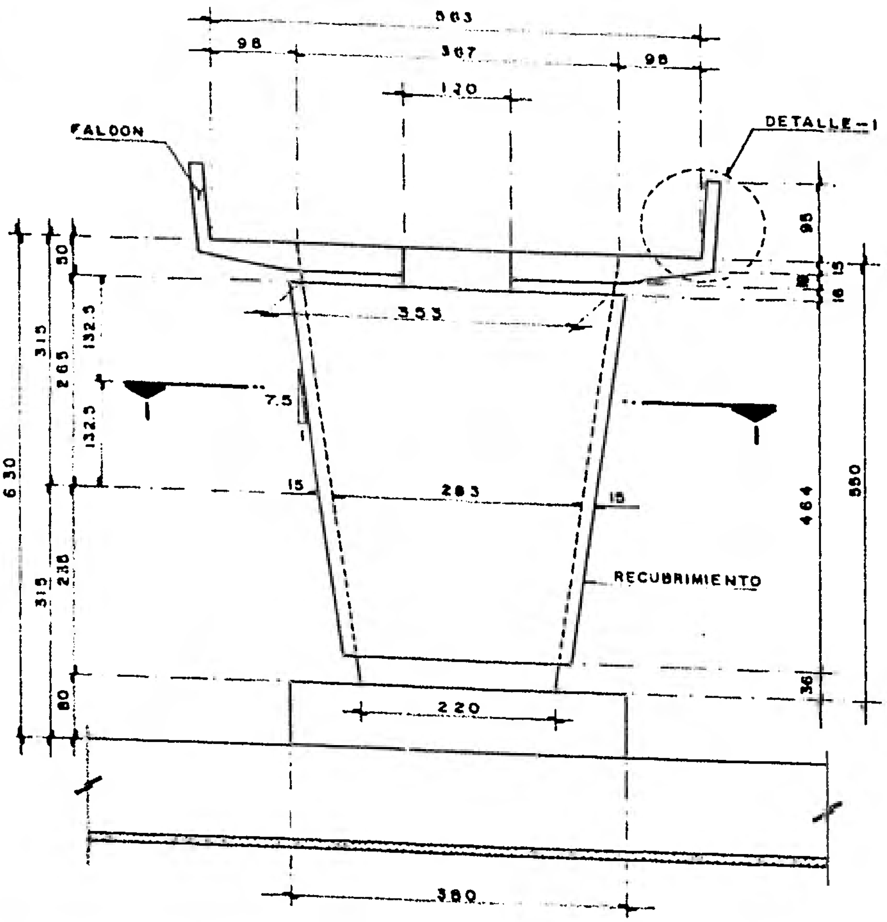

563
98
367
98
120
FALDON
DETALLE-1
95
15
15
16
30
315
265
132.5
132.5
353
7.5
15
283
15
630
464
550
RECUBRIMIENTO
315
236
60
36
220
380

FIG. 3.3

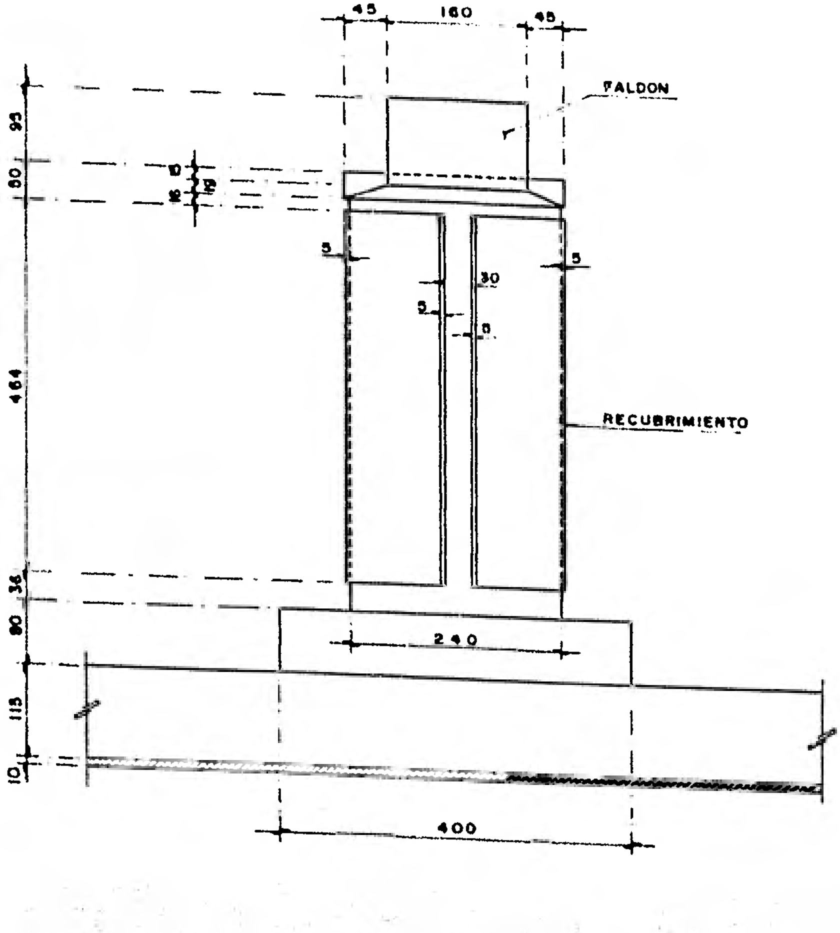

45
160
45
FALDON
93
60
10
16
5
5
30
5
8
464
RECUBRIMIENTO
36
90
240
115
10
400

FIG. 3.4

CALCULO DE LOS PESOS TRIBUTARIOS DE COLUMNA, RECUBRIMIENTO Y FALDONES.

Peso tributario de columna : W_{TC}

$$W_{TC} = (0.5)(3.67+2.33)(2.4)(3.15)(2.4) = 58.968 \text{ Ton.}$$

Peso tributario de recubrimiento : W_{TR}

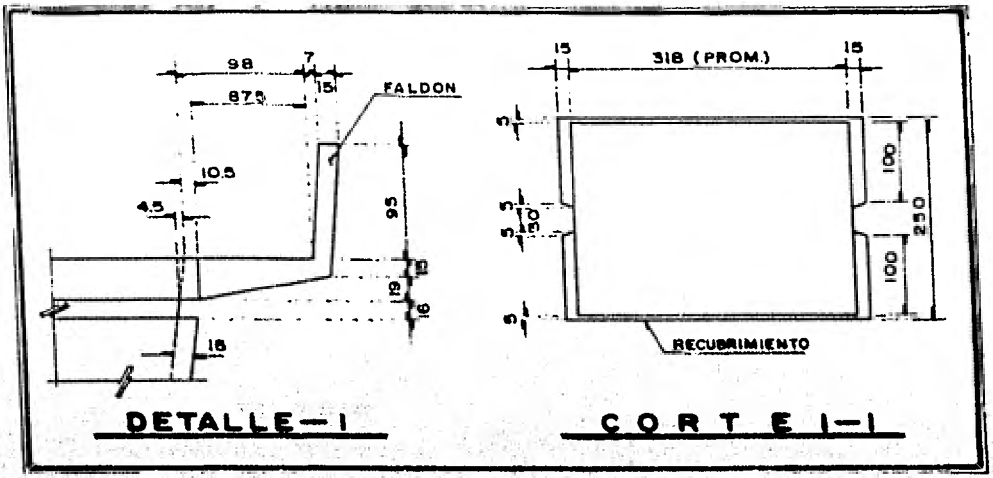
$$W_{TR} = \left[(3.18)(0.05)(2)+(1.05)(0.15)(4)+(0.05)(0.15)(0.5)(4)\right]\times$$
$$\times(2.65)(2.4) = 6.124 \text{ Ton.}$$

Peso tributario de faldones : W_{TF}

$$W_{TF} = \left[(0.15+0.105)(0.5)(0.34)(2.5)+(0.34+0.15)(0.5)(1.025)\times\right.$$
$$\left.\times(2.5+1.6)(0.5)+(0.15)(0.95)(1.6)\right](2)(2.4) = 3.863 \text{ Ton.}$$

Peso tributario total : W_{TT}

$$W_{TT} = W_{TC} + W_{TR} + W_{TF} = 68.955 \text{ Ton.}$$



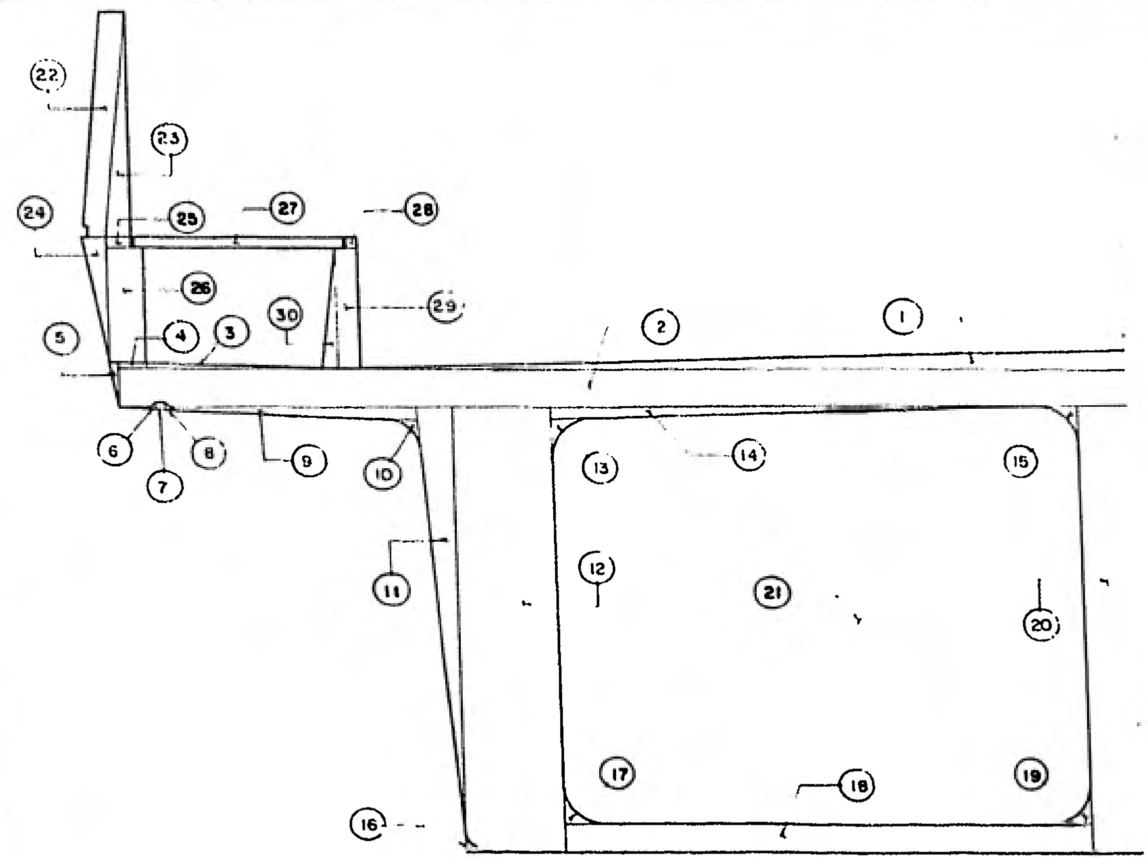


FIG. 3.5 SECCION DE TRABE, DIAFRAGMAS Y PARAPETO

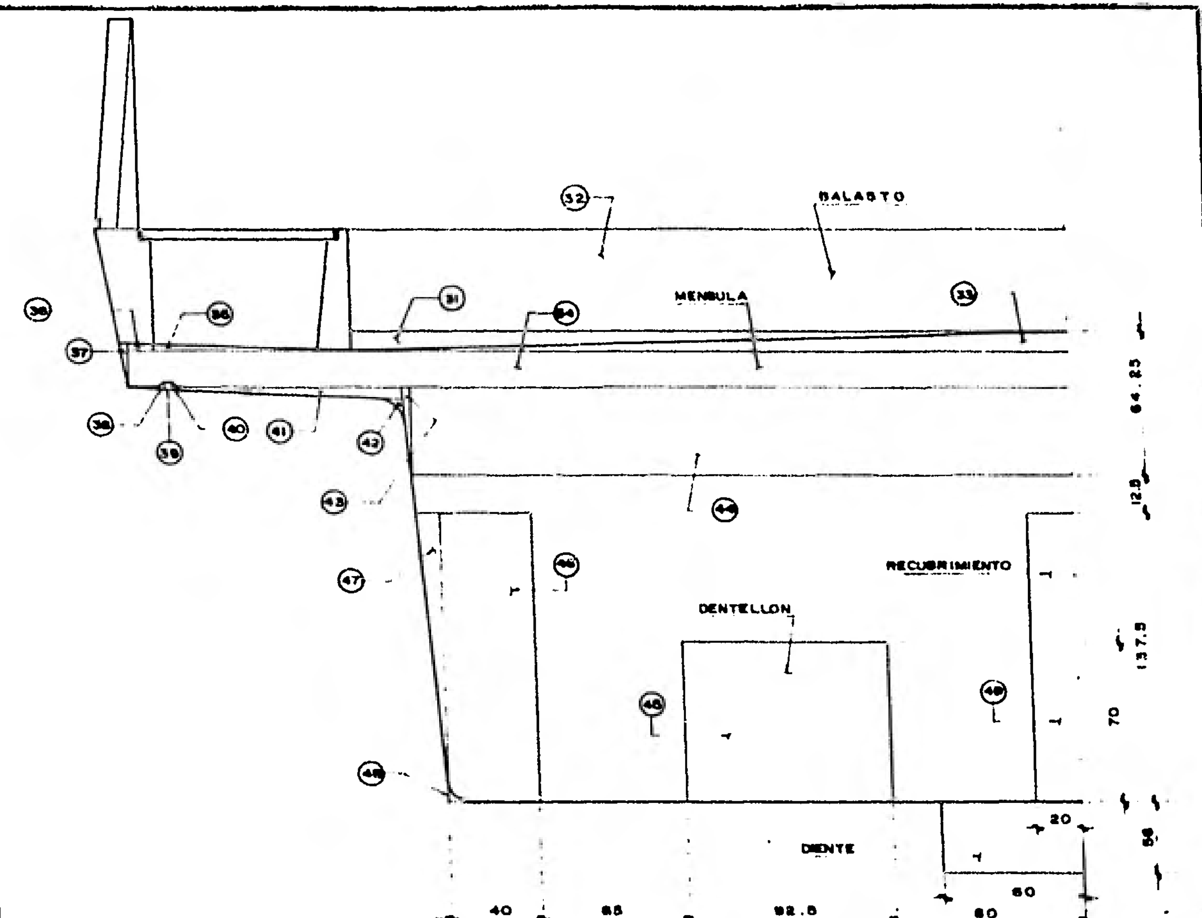


FIG. 3.6 SECCION DE BALASTO, MENSULA, DENTELLONES Y RECUBRIMIENTO.

TABLA 1 - PROPIEDADES DE LA TRABE (FIG. 3.5)

D	A	T	O	S		INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELEMENTO	FIGURA	b cm.	h cm.	N veces	Ai cm²	Yi cm.	Ai Yi cm³	Ai Yi² cm⁴	Ixi cm⁴	Xi cm.	Ai Xi² cm⁴	Iyi cm⁴
1		312.5	8.0	2	2 500	214.7	536 750	115240226	8889	104.2	27 144 100	13 563 368
2		412.0	17.0	2	14 008	203.5	2 850 628	580102798	337 359	206.0	594 443 488	198 147 829
3		87.5	2.0	2	175	212.7	37 222	7917226	39	370.8	24 061 212	74 456
4		12.0	2.0	2	48	213.0	10 224	2177712	16	406.0	7 912 128	576
5		3.3	19.0	2	63	207.7	13 023	2704833	1 287	413.1	10 699 656	38
6		3.0	3.0	2	− 9	198.0	− 1 764	− 345744	− 4	398.0	− 1 425 636	− 4
7		4.0	3.0	2	− 24	196.5	− 4 716	− 926694	− 18	395.0	− 3 744 600	− 32
8		3.0	3.0	2	− 9	196.0	− 1 764	− 345744	− 4	392.0	− 1 382 976	− 4
9		120.5	5.0	2	602	193.3	116 463	22512346	837	331.7	66 289 996	486 025
10		17.0	17.0	2	124	186.2	23 089	4299135	1260	295.3	10 813 059	1 260
11		14.0	195.0	2	2 730	130.0	354 900	46137000	5 767 128	282.2	217 408 573	29 727
12		40.0	195.0	2	15 600	97.5	1 521 000	148297500	49 432 500	257.5	1 034 377 500	2 080 000
13		17.0	17 0	2	124	186.2	23 089	4299135	1260	233.7	6 772 346	1 260
14		217.5	5.0	2	1 088	193.3	210 214	40634318	1810	165.0	29 607 168	2 858 086
15		17.0	17.0	2	124	191.2	23 709	4533125	1260	23.8	70 239	1 260
16		4.0	4.0	2	− 7	0.9	− 6	− 6	− 4	276.6	− 527 902	− 4
17		17.0	17.0	2	124	15.8	1 959	30955	1260	233.7	6 772 346	1 260
18		217.5	12.0	2	5 220	6.0	31 320	187920	62 640	128.8	86 596 877	20 578 219
19		17.0	17.0	2	124	15.8	1 959	30955	1260	23.8	70 239	1 260
20		20.0	195.0	2	7 800	97.5	760 500	74148750	24 716 250	10.0	780 000	260 000
S U M A					50 405		6 507 799	1051635743	60 334 692		2 118 758 033	236 084 560

$$Y_c = \frac{\Sigma A_i Y_i}{\Sigma A_i} = 129.1 \text{ cm.} = 1.291 \text{ m.}$$

$$I_{x_0} = \Sigma I_{x_i} + \Sigma A_i Y_i^2 - Y_c^2 \, \Sigma A_i = 291\ 743\ 952 \text{ cm}^4 = 2.917 \text{ m}^4$$

$$I_y = \Sigma I_{y_i} + \Sigma A_i X_i^2 = 2\ 354\ 822\ 593 \text{ cm}^4 = 23.548 \text{ m}^4$$

$$w = 5.0405 \times 2.4 = 12.097 \text{ Ton/m.}$$

$$L = 35.0 - 1.30 = 33.70 \text{ m.}$$

TABLA 2 : DIAFRAGMAS (FIG. 3.5)

DATOS						INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELEMENTO	FIGURA	b cm	h cm.	N veces	Ai cm^2	Yi cm.	Ai Yi cm^3	Ai Yi^2 cm^4	Σxi cm^4	Xi cm.	Ai Xi^2 cm^4	Σyi cm^4
13	◤	17	17	2	− 124	186.2	− 23 089	− 4 299 135	− 1 260	233.7	− 6 772 346	− 1 260
14	◁	217.5	5	2	− 1 087	193.3	− 210 214	−40 634 316	− 1 510	165.0	− 29 607 168	− 2 858 086
15	◥	17	17	2	− 124	191.2	− 23 709	− 4 533 123	− 1 260	23.8	− 70 239	− 1 260
17	◣	17	17	2	− 124	15.8	− 1 959	− 30 955	− 1 260	233.7	− 6 772 346	− 1 260
19	◢	17	17	2	− 124	15.8	− 1 959	− 30 955	− 1 260	23.8	− 70 239	− 1 260
21	▭	217.5	183	2	79 606	103.5	8 239 118	852 748 601	222 187 654	128.8	1 320 602 371	313 817 836
SUMA					78 021		7 978 188	803 220 178	222 181 104		1 277 310 013	310 954 710

$$Y_c = \frac{\Sigma A_i Y_i}{\Sigma A_i} = 102.3\,cm. = 1.023\ m.$$

$$I_{xo} = \Sigma I_{xi} + \Sigma A_i Y_i^2 - Y_c^2 \Sigma A_i = 209\ 551\ 489\,cm^4 = 2.096\ m^4$$

$$I_y = \Sigma I_{yi} + \Sigma A_i X_i^2 = 1\ 588\ 264\ 723\ cm^4 = 15.883\,m^4$$

$$w = 7.8021 \times 2.4 = 18.725\ Ton/m.$$

$$L = 2.20\ m.$$

TABLA 3 — PARAPETO, TAPA Y PRETIL. (FIG. 3.5)

D A T O S						INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELEMENTO	FIGURA	b cm.	h cm.	N veces	Ai cm^2	Yi cm	Ai Yi cm^3	Ai Yi^2 cm^4	I Xi cm^4	Xi cm.	Ai Xi^2 $cm.^4$	I Yi $cm.^4$
22		10	85	2	1 700	312.5	531 250	166 015 625	511 771	410.0	285 770 000	7 083
23		10	85	2	850	298.3	253 581	75 630 671	170 590	403.3	138 273 826	2 361
24		10	56	2	560	251.3	140 745	35 373 391	48 782	413.3	95 671 346	1 566
25		10	5	2	100	267.5	26 750	7 155 625	104	405.0	16 402 500	417
26		15	51	2	1 530	239.5	366 435	87 761 183	165 814	402.5	247 869 563	14 344
27		85	5	2	850	267.5	227 375	60 822 812	885	356.3	107 876 953	255 885
28		5	5	2	50	267.5	13 375	3 577 813	52	310.0	4 805 000	52
29		10	51	2	1 020	239.5	244 290	58 507 455	110 543	312.5	99 609 375	4 250
30		5	51	2	510	232.7	118 657	27 606 645	18 424	319.2	51 950 184	177
S U M A					7 170		1 922 457	522 471 219	1 026 965		1 048 228 746	286 125

$$Y_c = \frac{\Sigma A_i Y_i}{\Sigma A_i} = 268.1 \text{ cm.} = 2.681 \text{ m.}$$

$$I_{xo} = \Sigma I_{xi} + \Sigma A_i Y_i^2 - Y_c^2 \Sigma A_i = 8\,058\,826 \text{ cm}^4 = 0.081 \text{ m}^4$$

$$I_y = \Sigma I_{yi} + \Sigma A_i X_i^2 = 1\,048\,514\,871 \text{ cm}^4 = 10.485 \text{ m}^4$$

$$w = 0.7170 \times 2.4 = 1.721 \text{ Ton/m.}$$

$$L = 34.96 \text{ m.}$$

TABLA 4 - BALASTO (FIG. 3.6)

DATOS						INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELEMENTO	FIGURA	b cm	h cm.	N veces	Ai cm^2	Yi cm.	Ai Yi cm^3	$A_i Y_i^2$ cm^4	I_{xi} cm^4	Xi cm.	$A_i X_i^2$ cm^4	I_{yi} cm^4
31	◸	312.5	8	2	2 500	217.3	543 250	118 048 225	8 889	208.3	108 503 472	13 563 368
32	▭	312.5	45	2	28 125	242.5	6 820 313	1 653 925 781	4 746 094	156.3	686 645 508	228 881 836
S U M A					30 625		7 363 563	1 771 974 006	4 754 983		795 148 980	242 445 204

$$Y_c = \frac{\Sigma A_i Y_i}{\Sigma A_i} = 240.4 \text{ cm} = 2.404 \text{ m}$$

$$I_{x_0} = \Sigma I_{xi} + \Sigma A_i Y_i^2 - Y_c^2 \, \Sigma A_i = 6\ 212\ 983 \text{ cm}^4 = 0.062 \text{ m}^4$$

$$I_y = \Sigma I_{yi} + \Sigma A_i X_i^2 = 1\ 037\ 594\ 184 \text{ cm}^4 = 10.376 \text{ m}^4$$

$$\omega = 3.0625 \times 1.6 = 4.900 \text{ Ton/m.}$$

$$L = 35.00 \text{ m.}$$

TABLA 5 - MENSULA. (FIG. 3.6)

DATOS						INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELE-MEN-TO	FIGURA	b cm.	h cm	N veces	Ai cm^2	Yi cm	Ai Yi cm^3	Ai Yi^2 cm^4	I Xi cm^4	Xi cm.	Ai Xi^2 cm^4	I Yi cm^4
33		312.5	8	2	2 600	208.9	522 280	109 098 025	6 889	104.2	27 144 100	13 868 868
34		412.0	17	2	14 008	197.8	2 770 782	548 060 769	337 359	206.0	594 443 488	198 147 829
35		87.5	2	2	175	206.9	36 208	7 491 332	39	370.8	24 061 212	74 436
36		12.0	2	2	48	207.3	9 951	2 062 718	16	406.0	7 912 128	576
37		3.3	19	2	62	201.9	12 659	2 555 878	1 257	413.1	10 699 858	38
38		3.0	3	2	− 9	190.2	− 1 712	− 325 584	− 4	398.0	− 1 425 636	− 4
39		4.0	3	2	− 24	190.7	− 4 577	− 872 796	− 16	395.0	− 3 744 600	− 32
40		3.0	3	2	− 9	190.2	− 1 712	− 325 684	− 4	392.0	− 1 382 976	− 4
41		120.5	5	2	602	187.8	113 029	21 204 240	837	331.7	66 289 998	486 025
42		17.0	17	2	124	180.5	22 382	4 039 951	1 260	295.3	10 813 089	1 260
43		2.9	39	2	114	176.2	20 087	3 539 294	9 779	289.7	9 567 574	53
44		288.7	39	2	22 692	169.7	3 850 798	653 480 499	2 920 607	144.4	473 154 891	187 609 232
S U M A					40 284		7 350 146	1 350008731	3 280 017		1 217 533 093	369 882 776

$$Y_o = \frac{\Sigma Ai\, Yi}{\Sigma Ai} = 182.5 \text{ cm.} = 1.825 \text{ m.}$$

$$I_{x_0} = \Sigma I x_i + \Sigma Ai\, Yi^2 - Yc^2\, \Sigma Ai = 12\ 194\ 727 \text{ cm}^4 = 0.122 \text{ m}^4$$

$$Iy = \Sigma I y_i + \Sigma Ai\, Xi^2 = 1\ 587\ 415\ 869 \text{ cm}^4 = 15.874 \text{ m}^4$$

$$\omega = 4.0284 \times 2.4 = 9.668 \text{ Ton/m.}$$

$$L = 1.220 \text{ m.}$$

TABLA 6 - DENTELLONES (FIG. 3.6)

DATOS						INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELEMENTO	FIGURA	b cm.	h cm.	N veces	A_i cm^2	Y_i cm.	$A_i Y_i$ cm^3	$A_i Y_i^2$ cm^4	I_{xi} cm^4	X_i cm.	$A_i X_i^2$ cm^4	I_{yi} cm^4
45		92.5	70	2	12 950	35	453 250	15 863 750	5 287 917	126.3	206 410 859	9 233 620

$Y_c = \frac{\Sigma A_i Y_i}{\Sigma A_i} = 35$ cm. $= 0.350$ m.

$I_{x_0} = \Sigma I_{xi} + \Sigma A_i Y_i^2 - Y_c^2 \Sigma A_i = 5\,287\,917$ cm^4 $= 0.053$ m^4

$I_y = \Sigma I_{yi} + \Sigma A_i X_i^2 = 215\,644\,479$ cm^4 $= 2.156$ m^4

$\omega = 1.295 \times 2.4 = 3.108$ Ton/m.

$L = 0.800$ m.

TABLA 7 - RECUBRIMIENTO (FIG. 3.6)

DATOS						INERCIA RESPECTO AL EJE X				INERCIA RESPECTO AL EJE Y		
ELEMENTO	FIGURA	b cm.	h cm.	N veces	A_i cm^2	Y_i cm.	$A_i Y_i$ cm^3	$A_i Y_i^2$ cm^4	I_{xi} cm^4	X_i cm.	$A_i X_i^2$ cm^4	I_{yi} cm^4
46		40.0	137.5	2	11 000	68.8	756 250	51 992 188	17 330 729	257.5	729 368 750	1 466 667
47		9.9	137.5	2	1 361	91.7	124 790	11 439 533	1 429 768	280.8	107 336 654	7 412
48		4.0	4.0	2	− 7	0.9	− 6	− 5	− 4	276.6	− 527 902	− 4
49		20.0	137.5	2	5 550	68.8	378 125	25 996 094	8 665 365	10.0	550 000	183 333
SUMA					17 854		1 259 159	89 427 809	27 425 875		836 727 602	1 657 408

$Y_c = \frac{\Sigma A_i Y_i}{\Sigma A_i} = 70.5$ cm. $= 0.705$ m.

$I_{x_0} = \Sigma I_{xi} + \Sigma A_i Y_i^2 - Y_c^2 \Sigma A_i = 28\,052\,838$ cm^4 $= 0.281$ m^4

$I_y = \Sigma I_{yi} + \Sigma A_i X_i^2 = 838\,384\,910$ cm^4 $= 8.384$ m^4

$\omega = 1.7854 \times 2.4 = 4.285$ Ton./m.

$L = 0.20$ m.

TABLA 8 .- ELEMENTOS ADICIONALES

ELEMENTO	A m^2	γ ton/m^3	$w = A\gamma$ ton/m	Y_c cm	I_{xo} cm^4	I_y cm^4
CHAROLAS	0.010	7.85	0.080	317.0	81 520	15 984 544
CABLES	0.056	8.90	0.500	317.0	449 440	88 127 000
ARENA	0.457	1.60	0.731	228.6	386 879	602 626 115
DIENTE	0.192	2.40	0.461	-8.0	40 960	2 304 000
RIEL, BARRA GUIA Y PISTA DE RODAMIENTO	0.081	8.88	0.720	273.5	143	28 421 868

TABLA 9 — MASA E INERCIA ROTACIONAL PRODUCIDA POR CARGAS MUERTAS EN DIRECCION TRANSVERSAL.

CONCEPTO DE CARGA	A m^2	$Y_c + \Delta Y_c$ (*) m.	I_{xo} m^4	I_y m^4	γ' Ton/m^3	w Ton/m.	L m.	W Ton.	J_z Ton·m·seg^2
TRABE	5.0405	1.451	2.917	23.548	2.40	12.097	33.70	407.669	505.707
DIAFRAGMAS	7.8021	1.183	2.096	15.883	2.40	18.725	2.20	41.195	15.549
PARAPETO	0.7170	2.841	0.081	10.485	2.40	1.721	34.95	60.159	139.864
BALASTO	3.0625	2.564	0.062	10.376	1.60	4.900	35.00	171.500	174.515
MENSULA	4.0284	1.985	0.122	15.674	2.40	9.668	1.22	11.795	9.510
DENTELLONES	1.2950	0.510	0.053	2.156	2.40	3.108	0.80	2.486	0.499
RECUBRIMIENTO	1.7854	0.865	0.281	5.384	2.40	4.285	0.20	0.857	0.489
CHAROLAS	0.0100	3.330	0.001	0.160	7.85	0.080	35.00	2.800	7.664
CABLES	0.0560	3.330	0.004	0.661	8.90	0.500	35.00	17.500	47.907
ARENA	0.4570	2.445	0.004	6.026	1.60	0.731	35.00	25.585	50.015
DIENTE	0.1920	0.080	0.000	0.023	2.40	0.461	1.00	0.461	0.006
RIEL, BARRA GUIA Y PISTA	0.0810	2.895	0.000	0.284	8.88	0.720	35.00	25.200	30.533
S U M A								767.207	782.259

$$m_x = \frac{767.207 + 68.955}{9.81} = 85.236 \ \frac{\text{Ton} \cdot \text{seg}^2}{\text{m.}}$$

$$J_z = \frac{L\gamma'}{g}\left[I x_o + I y + A\,(Y_c + \Delta Y_c)^2\right] = 782.259 \ \text{Ton} \cdot \text{m} \cdot \text{seg}^2$$

(*) LOS VALORES DE Y_c SE INCREMENTARON UN VALOR $\Delta Y_c = 0.16$ m. (ESPESOR DE LOS APOYOS DE NEOPRENO) PARA OBTENER UN VALOR J_z RESPECTO A UN EJE QUE PASE POR EL EXTREMO SUPERIOR DE LA COLUMNA.

3.2 b) DIRECCION LONGITUDINAL .

En la dirección longitudinal, las trabes estarán soportadas por apoyos articulado y simple según se indica en la figura 3.7 .

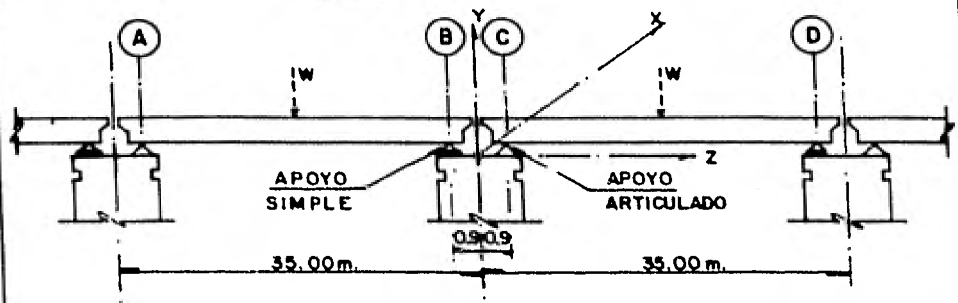


FIG. 3.7

En este caso, el valor de la masa total será el correspondiente al peso de la parte tributaria de la columna sumado al de la trabe (y cargas adicionales) ubicada entre los ejes C y D de la figura 3.7 debido a que ésta produciría empuje horizontal a la columna bajo la acción de un sismo y no así la trabe ubicada entre los ejes A y B, puesto que el apoyo simple no transmite tal fuerza horizontal, (ver figura 3.8).

Recordando la ecuación (3.2) aplicada en torno al eje X ($J_X = J_{X_0} + md^2$), el término J_{X_0} expresa la inercia rotacional respecto al centroide de cada concepto de carga y el término md^2 se debe al Teorema de Steiner.

En este caso, el término J_{X_0} se anula ya que las trabes pueden girar libremente sobre los apoyos sin producir en la columna momentos flexionantes por efectos sísmicos ; por otro lado, el término md^2 se aplicará tomando como masa la correspondiente a la descarga vertical transmitida por las trabes a la columna mediante los apoyos de neopreno, y la expresión (3.2) se ve reducida a :

$$J_x = md^2$$

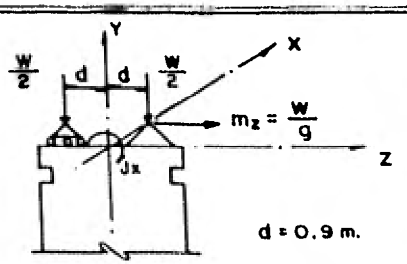


FIG. 3.8

De acuerdo con la figura (3.8) :

$$m_z = \frac{W}{g} = \frac{W\ col. + W\ trabe}{g} = \frac{68.955 + 767.207}{9.81}$$

$$m_z = 85.236\ \text{Ton-seg}^2/\text{m.}$$

$$J_x = 2\ \frac{W}{2g}\ d^2 = 2\left[\frac{(767.207)(0.9)^2}{(2)(9.81)}\right] = 63.347\ \text{Ton-m-seg}^2$$

3.3 CARGAS VIVAS .

Las cargas vivas que se tomaron en cuenta para el análisis son las producidas por los trenes de carga: tipo y de mantenimiento. Para determinar las combinaciones de los trenes que producen efectos más desfavorables para la columna y cimentación, se estudiaron diferentes posiciones de ellos y se seleccionaron las que producen mayor descarga vertical y mayor flexión en ambas direcciones de análisis (ver figuras 3.11, 3.12 y 3.13). En la figura 3.14 se muestran las combinaciones más desfavorables de los trenes de carga.

Para cada una de las posiciones críticas se obtuvieron las reacciones de los apoyos de neopreno R_B y R_C , así como los valores de la masa e inercia rotacional en las dos direcciones de análisis de la siguiente manera :

3.3a) DIRECCION TRANSVERSAL.

La masa en dirección transversal m_x, será la suma de las descargas transmitidas a la columna $R_B + R_C = R_T$ divididas entre la gravedad:

$$m_x = \frac{R_T}{g}$$

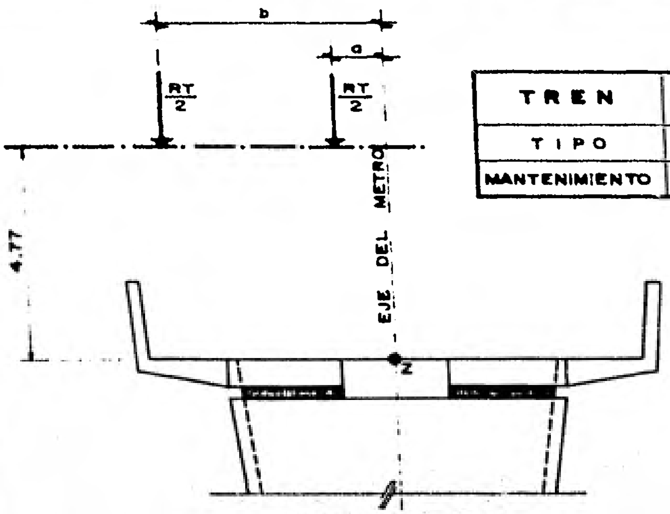
Para efectos de la inercia rotacional: $J_z = \Sigma m_i d_i^2$, se consideró que las cargas están actuando a la altura del centro de gravedad de los trenes localizado a 1.83 m. sobre la-pista de rodamiento y a 4.77 m sobre la corona de la columna (tomando en cuenta los espesores de pista, balasto, trabe y neopreno). En dirección horizontal estas cargas están ubicadas en la proyección de cada riel o pista de rodamiento -- según sea el caso (ver fig. 3.9).

Por lo tanto, la inercia rotacional J_z valdrá :

$$J_z = \Sigma m_i d_i^2 = \frac{R_T}{2g}\left[a^2+(4.77)^2\right]+\frac{R_T}{2g}\left[b^2+(4.77)^2\right]$$

reduciendo :

$$J_z = \frac{R_T}{2g}\left[a^2+b^2+(2)(4.77)^2\right]$$



TREN	a(m)	b(m)
TIPO	0.575	2.575
MANTENIMIENTO	0.822	2.328

FIG. 3.9

3.3b) DIRECCION LONGITUDINAL.

La masa en dirección longitudinal m_z será la correspondiente al peso de los trenes sobre la trabe C - D (ver figs. 3.11, 3.12 y 3.13), por la misma razón que se expuso en el inciso 3.2b para cargas muertas.

$$m_z = \frac{\Sigma P_i}{g}$$

Donde P_i es el peso de cada eje ubicado entre los ejes C y D.

Las cargas para esta dirección estarán aplicadas en los centros de los apoyos de neopreno a 0.9 m. del eje de simetría de la columna y sobre el nivel superior de ésta, por lo tanto el valor de y_i en la expresión de la inercia rotacional vale cero como se muestra en la figura 3.10 .

$$J_x = \frac{R_B}{g}(0.9)^2 + \frac{R_C}{g}(0.9)^2 = \frac{R_T}{g}(0.9)^2$$

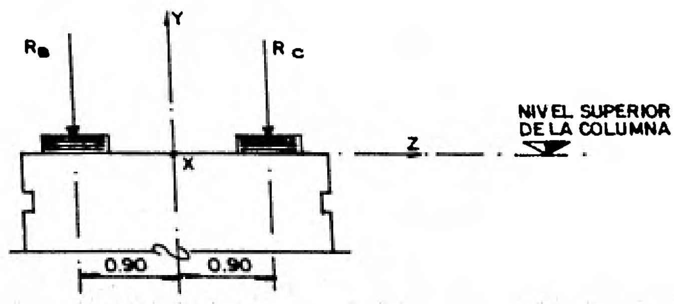


FIG. 3.10

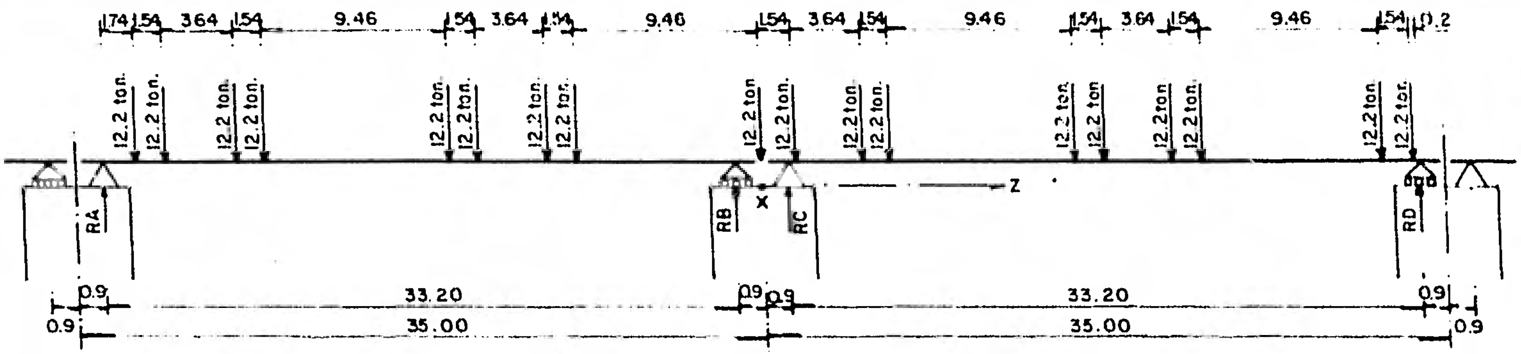


FIG. 3.11 POSICION CRITICA DE TREN TIPO (MAXIMA COMPRESION) = TT

$\Sigma M_A = 0 \;:\; R_B = 38.775$ Ton.

$\Sigma M_D = 0 \;:\; R_C = 67.298$ Ton.

$R_T = R_B + R_C = 106.073$ Ton.

$a = 0.575$ m.

$b = 2.575$ m.

$m_X = \dfrac{R_T}{g} = 10.812$ Ton. seg^2/m.

$J_Z = \dfrac{R_T}{2g}\left[a^2 + b^2 + 2(4.77)^2\right] = 279.550$ Ton·m·seg^2

$m_Z = \dfrac{\Sigma P_{icp}}{g} = 12.436$ Ton·seg^2/m

$J_X = \dfrac{R_T}{g}(0.9)^2 = 8.758$ Ton·m·seg^2

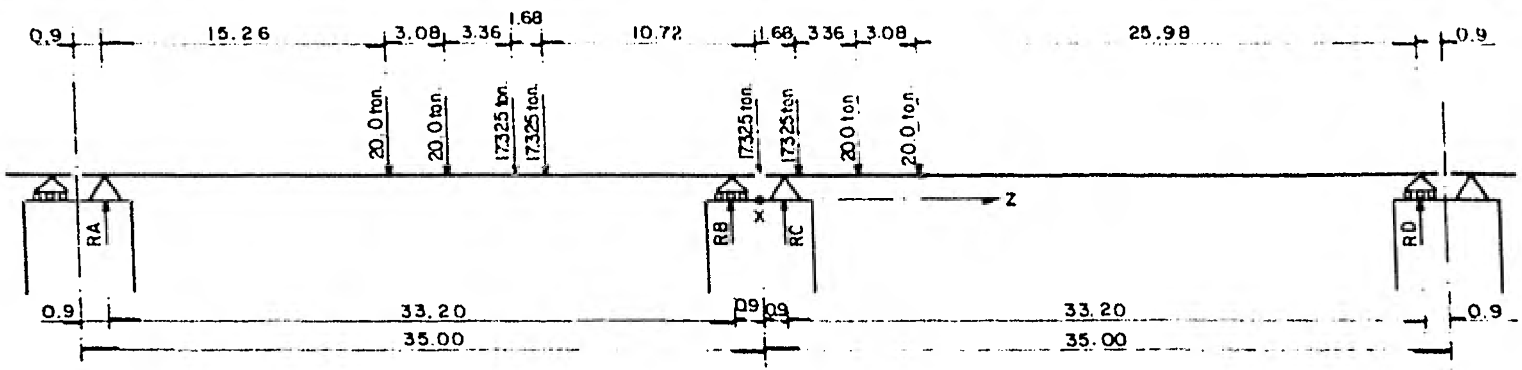


FIG. 3.12 POSICION CRITICA DE TREN DE MANTENIMIENTO (MAXIMA COMPRESION) = TMA

$\Sigma M_A = 0$: $R_B = 43.765$ Ton.

$\Sigma M_D = 0$: $R_C = 67.869$ Ton.

$R_T = R_B + R_C = 111.634$ Ton.

$a = 0.822$ m.

$b = 2.328$ m.

$$m_x = \frac{R_T}{g} = 11.380 \text{ Ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m}.$$

$$J_z = \frac{R_T}{2g}\left[a^2 + b^2 + 2(4.77)^2\right] = 289.275 \text{ Ton}\cdot\text{m}\cdot\text{seg}^2$$

$$m_z = \frac{\Sigma P_i c_D}{g} = 7.610 \text{ Ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m}.$$

$$J_x = \frac{R_T}{g}(0.9)^2 = 9.218 \text{ Ton}\cdot\text{m}\cdot\text{seg}^2$$

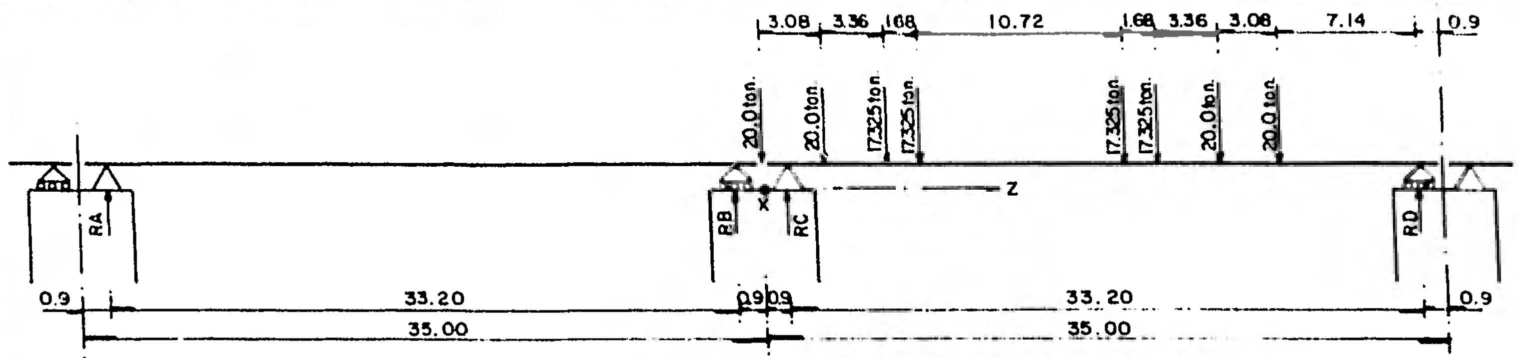


FIG. 3.13 — POSICION CRITICA DE TREN DE MANTENIMIENTO (MAXIMA FLEXION) = TMB

$\Sigma M_A = 0 \;:\; R_B = 0.0$ Ton.

$\Sigma M_D = 0 \;:\; R_C = 92.728$ Ton.

$R_T = R_B + R_C = 92.728$ Ton.

$a = 0.822$ m

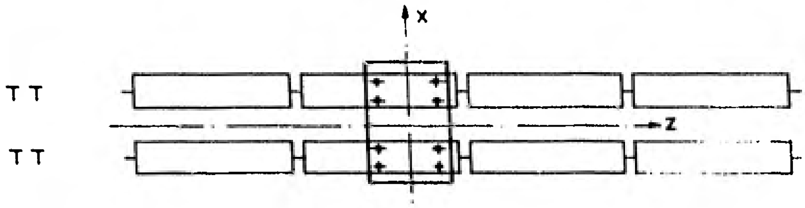
$b = 2.328$ m.

$$m_x = \frac{R_T}{g} = 9.452 \text{ Ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m.}$$

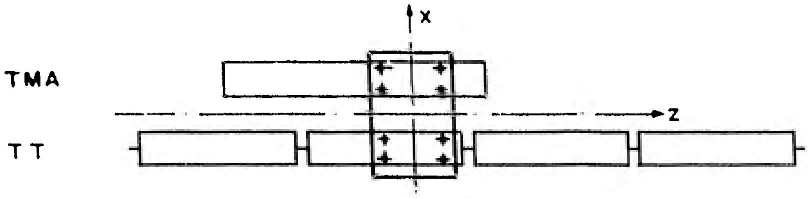
$$J_z = \frac{R_T}{2g}\left[a^2 + b^2 + 2(4.77)^2\right] = 240.285 \text{ Ton}\cdot\text{m}\cdot\text{seg}^2$$

$$m_z = \frac{\Sigma P_i\, c_D}{g} = 15.219 \text{ Ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m.}$$

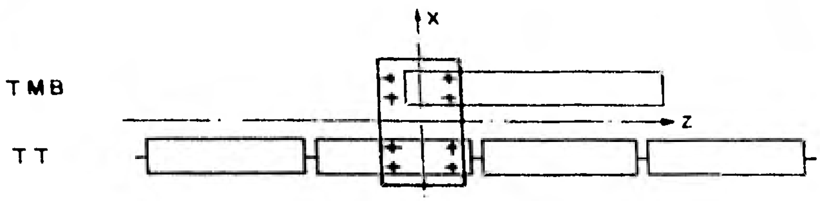
$$J_x = \frac{R_T}{g}(0.9)^2 = 7.656 \text{ Ton}\cdot\text{m}\cdot\text{seg}^2$$



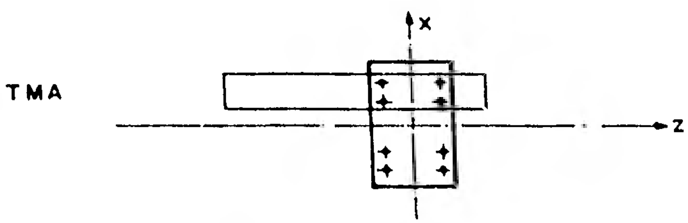
I) COMBINACION QUE OCURRIRA CON MAYOR FRECUENCIA.



II) COMBINACION QUE PRODUCE MAYOR COMPRESION EN LA COLUMNA.



III) COMBINACION QUE PRODUCE MAYOR FLEXION EN TORNO AL EJE X.



IV) COMBINACION QUE PRODUCE MAYOR FLEXION EN TORNO AL EJE Z.

FIG. 3.14 COMBINACIONES DE LOS TRENES DE CARGA

TABLA 10 — RESUMEN DE MASA E INERCIA ROTACIONAL.

TIPO DE CARGA		DIRECCION TRANSVERSAL		DIRECCION LONGITUDINAL	
		m_x Ton·seg²/m	J_z Ton·m·seg²	m_z Ton·seg²/m	J_x Ton·m·seg²
CARGA MUERTA (C.M.)		85.236	782.259	85.236	63.347
POSICION DE TRENES	TREN TIPO (T.T.)	10.812	279.550	12.436	8.758
	TREN MANT. A (T.M.A)	11.380	289.275	7.610	9.218
	TREN MANT. B (T.M.B)	9.452	240.285	15.219	7.656
COMBINACIONES DE CARGA VIVA	I) T.T. + T.T.	21.625	559.100	24.872	17.517
	II) T.T. + T.M.A.	22.192	568.825	20.046	17.976
	III) T.T. + T.M.B.	20.265	519.835	27.655	16.415
	IV) T.M.A.	11.380	289.275	7.610	9.218
CARGA MUERTA + CARGA VIVA	C.M. + I	106.861	1 341.359	110.872	80.864
	C.M. + II	107.428	1 351.084	105.282	81.323
	C.M. + III	105.501	1 302.094	112.891	79.762
	C.M. + IV	96.616	1 071.534	92.846	72.565

3.4 PROPIEDADES DE LA COLUMNA .

Se supone que la columna trabaja como voladizo y se calculan los desplazamientos y giros en el extremo libre producidos por una fuerza P y un momento flexionante M unitarios por medio de métodos energéticos. Para la obtención de dichos giros y desplazamientos, nos basaremos en los Teoremas de Castigliano.(ref. 3).

Primer Teorema.- La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a una fuerza que obra en un cuerpo, es igual al desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y en la dirección de ésta.

$$\delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \quad \text{------------------------} \quad (3.7)$$

Segundo Teorema .- La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a un momento que obra en un cuerpo, es igual al giro del punto de aplicación del momento.

$$\theta_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad \text{------------------------} \quad (3.8)$$

Se puede demostrar que la ecuación del trabajo de deformación total para flexión, es la siguiente :

$$W_T = \int_0^L \frac{M_T^2}{2EI}\, ds \quad \text{--------------------} \quad (3.9)$$

Utilizando el primer Teorema de Castigliano, obtenemos los desplazamientos del centro de rotación producidos por el momento M y la fuerza P, sustituyendo (3.9) en (3.7):

$$\delta_T = \frac{\partial W_T}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M_T^2}{2EI}\,ds$$

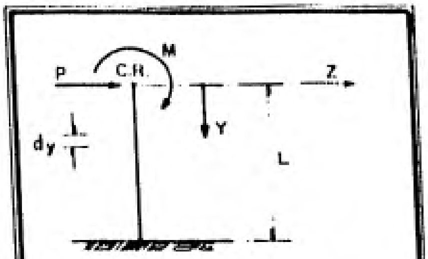


FIG. 3.15

pero $M_T = M + P\cdot y$

entonces :

$$\delta_T = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{(M + P\cdot y)^2\,dy}{2EI}$$

$$\delta_T = \int_0^L \frac{2(M + P\cdot y)y\,dy}{2EI} = \int_0^L \frac{(M + P\cdot y)y\,dy}{EI}$$

pero :

$$\delta_T = \delta_M + \delta_P = \int_0^L \frac{M\cdot y\,dy}{EI} + \int_0^L \frac{P\cdot y^2\,dy}{EI}$$

de donde, por igualación :

$$\delta_M = \int_0^L \frac{M\cdot y\,dy}{EI} \quad \text{---------------- (3.10)}$$

$$\delta_P = \int_0^L \frac{P\cdot y^2\,dy}{EI} \quad \text{---------------- (3.11)}$$

δ_M es el desplazamiento del C.R. producido por un momento M.

δ_P es el desplazamiento del C.R. producido por una fuerza P.

Del segundo Teorema de Castigliano, obtenemos los giros del centro de rotación producidos por el momento M y la fuerza P.

$$\theta_T = \frac{\partial W_T}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M}\int_0^L \frac{(M + P\cdot y)^2 dy}{2EI} =$$

$$\theta_T = \int_0^L \frac{2(M + P\cdot y)\ dy}{2EI} = \int_0^L \frac{(M + P\cdot y)\ dy}{EI}$$

$$\theta_T = \theta_M + \theta_P = \int_0^L \frac{M\ dy}{EI} + \int_0^L \frac{P\cdot y\ dy}{EI}$$

separando ecuaciones :

$$\theta_M = \int_0^L \frac{M\ dy}{EI} \quad \text{-------------------}(3.12)$$

$$\theta_P = \int_0^L \frac{P\cdot y\ dy}{EI} \quad \text{-------------------}(3.13)$$

θ_M es el giro del C.R. producido por un momento M.

θ_P es el giro del C.R. producido por una fuerza P.

Haciendo P y M unitarios en las ecuaciones (3.10) a (3.13), se tiene :

$$\delta_M = \int_0^L \frac{y\ dy}{EI} \quad \text{-------------------}(3.14)$$

$$\delta_P = \int_0^L \frac{y^2\ dy}{EI} \quad \text{-------------------}(3.15)$$

$$\theta_M = \int_0^L \frac{dy}{EI} \quad \text{-------------------}(3.16)$$

$$\theta_p = \int_0^L \frac{y\ dy}{E\ I} \quad \text{--------------------} (3.17)$$

Nótese que al hacer P y M unitarios, las ecuaciones (3.14) y (3.17) son iguales .

OBTENCION DE GIROS Y DESPLAZAMIENTOS DE LA COLUMNA DEL METRO

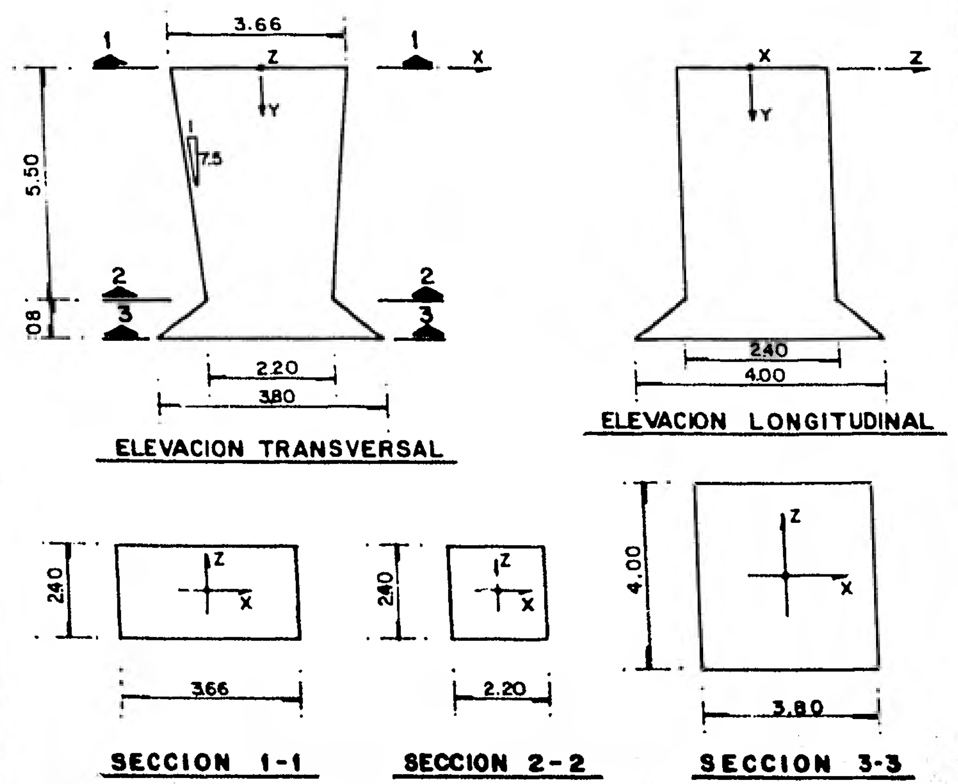


FIG. 3.16 SECCIONES DE LA COLUMNA

MOMENTOS DE INERCIA .

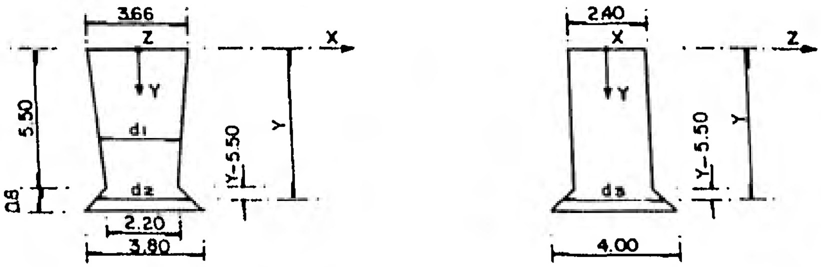


FIG. 3.17

$$d_1 = 3.66 - \frac{(3.66-2.20)y}{5.50} = 3.66 - 0.2654y$$

$$d_2 = 2.20 + (y - 5.50)\ \frac{3.80 - 2.20}{0.80} = 2.20 + (y - 5.50)2$$

$$d_2 = 2y - 8.80$$

$$d_3 = 2.40 + (y - 5.50)\ \frac{4.00 - 2.40}{0.80} = 2.40 + (y - 5.50)2$$

$$d_1 = 2y - 8.60$$

donde y está en metros.

Momentos de inercia en la dirección transversal:

De sección 1 a sección 2 .

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2.4\ d_1^3}{12} = \frac{1}{5}\ (3.66 - 0.2654y)^3$$

De sección 2 a sección 3 .

$$I_{z_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{d_3 \cdot d_2^3}{12} = \frac{(2y - 8.60)(2y - 8.80)^3}{12}$$

Momentos de inercia en la dirección longitudinal :

De sección 1 a sección 2.

$$Ix_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{d_1(2.40)^3}{12} = 1.152(3.66 - 0.2654y)$$

De sección 2 a sección 3.

$$Ix_2 = \frac{d_2 \cdot d_3^3}{12} = \frac{1}{12}(2y - 8.80)(2y - 8.60)^3$$

3.4a) DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN DIRECCION TRANSVERSAL.

Desplazamiento producido por una fuerza P unitaria :

$$\delta_p = \int_0^L \frac{y^2 dy}{E\ Iz} = \int_0^{5.5} \frac{y^2 dy}{E\ Iz_1} + \int_{5.5}^{6.3} \frac{y^2 dy}{E\ Iz_2}$$

sustituyendo los valores de Iz_1 e Iz_2 .

$$\delta_p = \frac{1}{E}\int_0^{5.5} \frac{5y^2\ dy}{(3.66-0.2654y)^3} + \frac{1}{E}\int_{5.5}^{6.3} \frac{12y^2\ dy}{(2y-8.6)(2y-8.8)^3}$$

Integrando y tomando límites, se obtiene :

$$\delta_p = \frac{17.523 + 4.684}{E} = \frac{22.207}{E}$$

si $E = 10\ 000\sqrt{f'_c}$ y $f'_c = 250$ Kg/cm².

$E = 1\ 581\ 139$ Ton/m².

$\delta_p = 1.4045 \times 10^{-5}$ m/Ton.

Desplazamiento producido por un momento unitario M_z, que es igual al giro producido por una fuerza unitaria P :

$$\delta_M = \theta_P = \int_0^L \frac{y\ dy}{E\ Iz} = \int_0^{5.5} \frac{y\ dy}{E\ Iz_1} + \int_{5.5}^{6.3} \frac{y\ dy}{E\ Iz_2}$$

sustituyendo valores :

$$\delta_M = \theta_P = \frac{1}{E}\int_0^{5.5} \frac{5y\ \ dy}{(3.66-0.2654y)^3} + \frac{1}{E}\int_{5.5}^{6.3} \frac{12y\ \ dy}{(2y-8.6)(2y-8.8)^3}$$

$$\delta_M = \theta_P = \frac{4.268 + 0.812}{E}$$

$$\delta_M = 3.2125 \times 10^{-6} \quad \text{m/Ton-m.}$$

$$\theta_P = 3.2125 \times 10^{-6} \quad \text{rad/Ton.}$$

Giro producido por un momento unitario M_z:

$$\theta_M = \int_0^L \frac{dy}{EIz} = \int_0^{5.5} \frac{dy}{EIz_1} + \int_{5.5}^{6.3} \frac{dy}{EIz_2}$$

$$\theta_M = \frac{1}{E}\int_0^{5.5} \frac{5\ \ dy}{(3.66-0.2654y)^3} + \frac{1}{E}\int_{5.5}^{6.3} \frac{12\ \ dy}{(2y-8.6)(2y-8.8)^3}$$

$$\theta_M = \frac{1.243 + 0.141}{E} = 8.749 \times 10^{-7} \quad \text{rad/Ton-m.}$$

3.4b) DESPLAZAMIENTOS Y GIROS EN DIRECCION LONGITUDINAL.

Desplazamiento producido por una fuerza P unitaria:

$$\delta_P = \int_0^L \frac{y^2 dy}{E\ Ix} = \int_0^{5.5} \frac{y^2 dy}{EIx_1} + \int_{5.5}^{6.3} \frac{y^2 dy}{EIx_2}$$

$$\delta_P = \frac{1}{E}\int_0^{5.5} \frac{0.868y^2\ dy}{(3.66-0.2654y)} + \frac{1}{E}\int_{5.5}^{6.3} \frac{12y^2\ dy}{(2y-8.8)(2y-8.6)^3}$$

$$\delta_P = \frac{18.966 + 4.059}{E} = 1.4562 \times 10^{-5} \quad \text{m/Ton.}$$

Desplazamiento producido por un momento unitario M_x, que es igual al giro producido por una fuerza unitaria P.

$$\delta_M = \theta_P = \int_0^L \frac{y dy}{EIx} = \int_0^{5.5} \frac{y dy}{EIx_1} + \int_{5.5}^{6.3} \frac{y dy}{EIx_2}$$

$$\delta_M = \theta_P = \frac{1}{E}\int_0^{5.5} \frac{0.868y\ dy}{(3.66-0.2654y)} + \frac{1}{E}\int_{5.5}^{6.3} \frac{12y\ dy}{(2y-8.8)(2y-8.6)^3}$$

$$\delta_M = \theta_P = \frac{4.963 + 0.704}{E}$$

$$\delta_M = 3.584 \times 10^{-6} \quad \text{m/Ton-m.}$$

$$\theta_P = 3.584 \times 10^{-6} \quad \text{rad/Ton.}$$

Giro producido por un momento unitario M_x :

$$\theta_M = \int_0^L \frac{dy}{EIx} = \int_0^{5.5} \frac{dy}{EIx_1} + \int_{5.5}^{6.3} \frac{dy}{EIx_2}$$

$$\theta_M = \frac{1}{E}\int_0^{5.5} \frac{0.868\ dy}{(3.66-0.2654y)} + \frac{1}{E}\int_{5.5}^{6.3} \frac{12\ dy}{(2y-8.8)(2y-8.6)^3}$$

$$\theta_M = \frac{1.664 + 0.122}{E} = 11.296 \times 10^{-7} \quad \text{rad/Ton-m.}$$

Agrupando las propiedades de la columna para las dos direcciones, resulta la tabla 11.

Donde :

K es la fuerza horizontal aplicada en el C.R. necesaria - para que éste se desplace la unidad, (rigidez por traslación).

$$K = \frac{P}{\delta_P} \quad \text{pero} \quad P = 1 \quad \therefore \quad K = \delta_P^{-1}$$

K_r es el par aplicado en el C.R. necesario para producir - un giro unitario a la altura del C.R., (rigidez por rotación).

$$K_r = \frac{M}{\theta_M} \quad \text{pero} \quad M = 1 \quad \therefore \quad K_r = \theta_M^{-1}$$

θ es el giro del C.R. producido por la fuerza K.

$$\theta = K\theta_P$$

δ es el desplazamiento lateral del C.R. producido por el-momento K_r.

$$\delta = K_r \delta_M$$

γ es la rotación de la columna al actuar una carga hori-zontal unitaria en el C.R. ó el desplazamiento lateral-del C.R. al actuar un momento unitario en dicho punto.

Estas definiciones de rigideces se explican en la figura 3.18 .

TABLA II .— PROPIEDADES DE LA COLUMNA.

CONCEPTO	DIRECCION TRANSVERSAL	DIRECCION LONGITUDINAL	UNIDADES
δ_p	1.4045×10^{-5}	1.4562×10^{-5}	m./ton.
θ_p	3.2125×10^{-6}	3.5840×10^{-6}	rad./ton.
δ_M	3.2125×10^{-6}	3.5840×10^{-6}	m./ton.-m.
θ_M	8.7490×10^{-7}	11.2960×10^{-7}	rad./ton.-m.
$K = \delta_p^{-1}$	71 198.70	68 673.30	ton./m.
$K_r = \theta_M^{-1}$	1 142 987.77	885 269.12	ton.-m./rad.
$\theta = K\theta_p$	0.2287	0.2461	rad./m.
$\delta = K_r\delta_M$	3.6718	3.1728	m./rad.
$\gamma \rightarrow \delta_M = \theta_p$	3.2125×10^{-6}	3.5840×10^{-6}	—

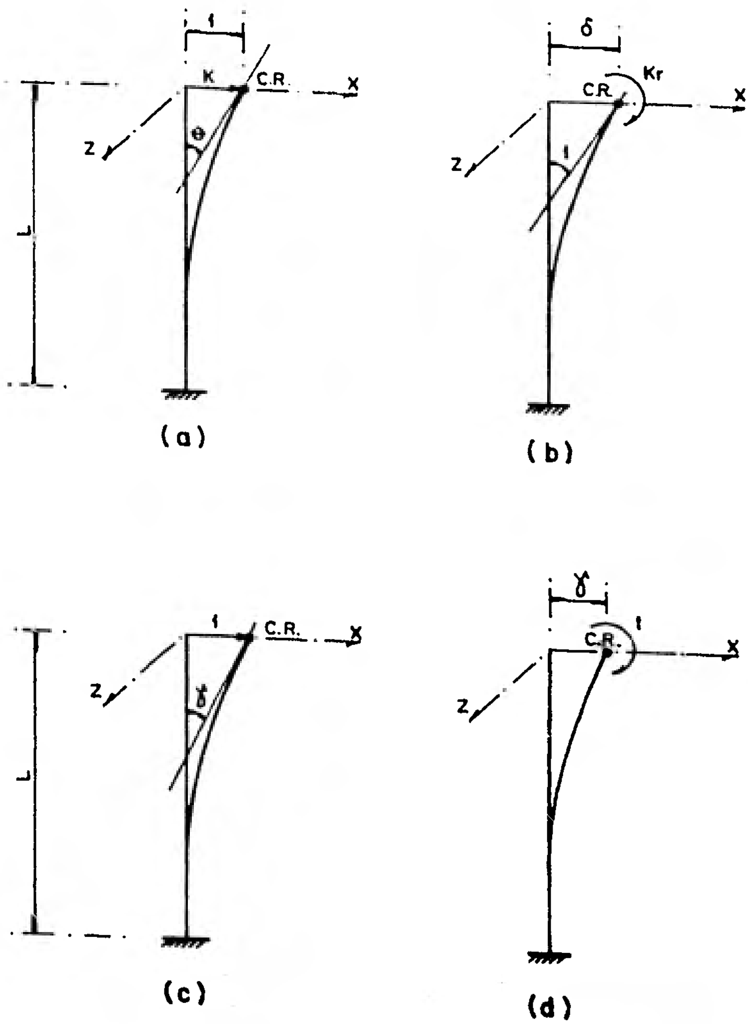
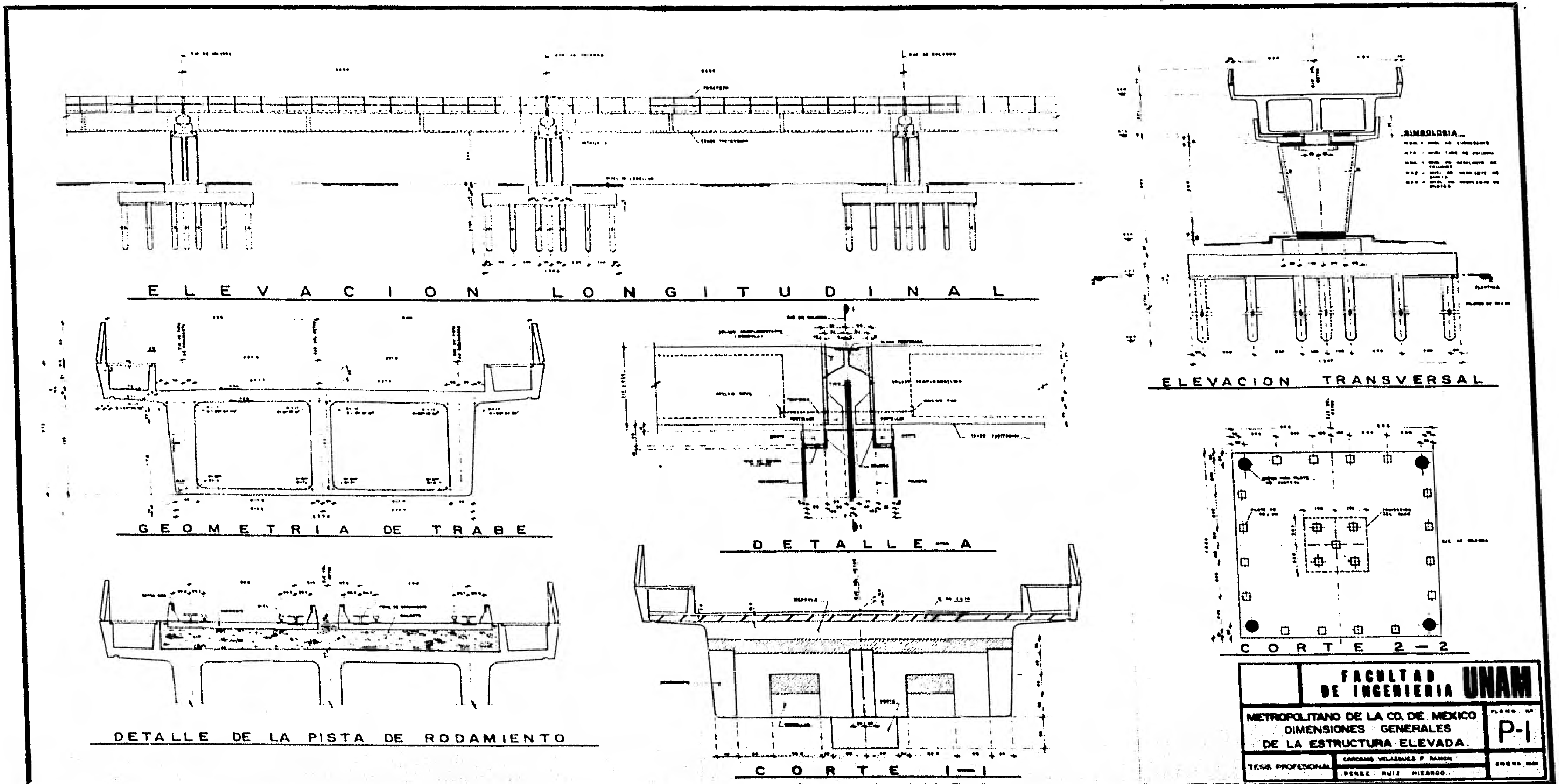


FIG. 3.18 DEFINICION DE RIGIDECES


ELEVACION LONGITUDINAL
ELEVACION TRANSVERSAL
SIMBOLOGIA
GEOMETRIA DE TRABE
DETALLE—A
CORTE 2—2
DETALLE DE LA PISTA DE RODAMIENTO
CORTE 1—1
FACULTAD DE INGENIERIA
UNAM
METROPOLITANO DE LA CD. DE MEXICO
DIMENSIONES GENERALES
DE LA ESTRUCTURA ELEVADA.
P-I
TESIS PROFESIONAL

C A P I T U L O 4

METODOS DE ANALISIS

4.1 CONSIDERACIONES PARA DISEÑO POR SISMO SEGUN EL R.C.D.F.

Según su destino, la estructura para el Metro elevado se clasifica dentro del grupo A, ya que es una construcción cuyo funcionamiento es muy importante bajo la acción de un sismo y que en caso de fallar causaría pérdidas directas o indirectas excepcionalmente altas en comparación con el costo necesario para aumentar su seguridad.

Según su estructuración corresponde al tipo 1, siendo un péndulo invertido ya que más del 50% de su masa se encuentra en el extremo superior y cuenta con un solo elemento resistente en la dirección de análisis.

De acuerdo con el artículo 234, se tomará el valor del coeficiente sísmico "c" indicado para la zona III (terreno compresible).

$$c = 0.24 \times 1.3 = 0.312$$

Con fines de diseño, las fuerzas sísmicas para análisis estático y los espectros para análisis dinámico modal se obtendrán dividiendo el coeficiente sísmico o las ordenadas de los espectros de diseño entre el factor Q' respectivamente. Q' es función del factor de ductilidad Q definido para estructuras elasto-plásticas, como la deformación máxima que puede soportar el sistema sin fallar dividida entre la deformación de fluencia. Puesto que la resistencia a fuerzas laterales es suministrada por una sola columna de concreto reforzado, se tomará un factor de ductilidad Q = 2 .

Las deformaciones se calcularán multiplicando por Q las causadas por las fuerzas sísmicas reducidas.

La estructura se analizará bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales del movimiento del terreno. Los efectos correspondientes (desplazamientos y fuerzas internas) se combinarán con los producidos por las fuerzas permanentes. Dicha combinación se hará sumando vectorialmente los efectos de las fuerzas permanentes, los que resultan al actuar el sismo en una dirección y el 50% de los de la otra dirección de análisis.

El factor de carga para diseño plástico (por resistencia última) que se debe de considerar según el artículo 237 inciso VIII, es 20% superior al especificado en el artículo 220 ya que se cuenta con un solo elemento para resistir los efectos sísmicos.

F.C. = 1.1 x 1.2 = 1.32

4.2 ANALISIS DINAMICO MODAL.

Para la aplicación de este método, se requiere el conocimiento de todos los modos naturales de vibración con período mayor o igual que 0.4 seg. o un mínimo de tres modos.

Para calcular la participación de cada modo natural en las fuerzas laterales actuando sobre la estructura, se supondrán las aceleraciones espectrales de diseño considerando las siguientes hipótesis :

1.- La estructura se comporta elásticamente.

2.- La ordenada del espectro de aceleraciones para diseño -- sísmico "a" expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones :

$$a = a_0 + (c - a_0)\frac{T}{T_1} \qquad \text{si} \qquad T < T_1 \text{----} (4.1)$$

$$a = c \qquad \text{si} \qquad T_1 < T < T_2 \text{----} (4.2)$$

$$a = c\left(\frac{T_2}{T}\right)^r \qquad \text{si} \qquad T > T_2 \text{----} (4.3)$$

Donde :

c es el coeficiente sísmico, adimensional.

T es el período natural de interés, en segundos.

T_1 y T_2 son los períodos característicos del espectro de diseño, en segundos.

a_0 es la ordenada del espectro de diseño para $T = 0$ (aceleración del terreno), y es adimensional.

Los valores correspondientes a la zona III para estructuras del grupo A son :

$c = 0.312$ $\qquad$ $T_1 = 0.80$ seg.

$r = 1$ $\qquad$ $T_2 = 3.30$ seg.

$a_0 = 0.06 \times 1.3 = 0.078$

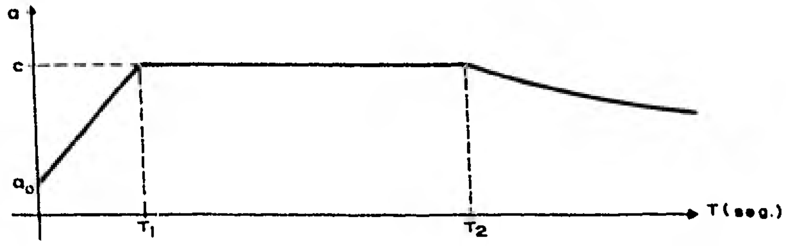


FIG. 4.1 ESPECTRO DE DISEÑO

Para evaluar las fuerzas sísmicas, estas ordenadas se dividirán entre el factor Q' cuyo valor está en función del período.

$$Q' = Q = 2 \qquad \text{si} \qquad T \geq T_1 \quad \text{--------(4.4)}$$

$$Q' = 1 + (Q-1)\frac{T}{T_1} \qquad \text{si} \qquad T < T_1 \quad \text{--------(4.5)}$$

3.- Las ordenadas espectrales especificadas toman en cuenta los efectos de amortiguamiento, por lo que excepto la reducción por ductilidad, no deben sufrir reducciones adicionales a menos que éstas se concluyan de estudios específicos. Sin embargo, estas reducciones no serán aplicables al cálculo de las deformaciones.

Las respuestas modales R_i (donde R_i puede ser fuerza cortante, deformación, momento de volteo, etc.) se combinarán de acuerdo con la expresión :

$$R = \left(\Sigma R_i^2\right)^{1/2} \quad \text{--------------------------(4.6)}$$

4.3 ANALISIS ESTATICO .

De acuerdo con el artículo 240 del R.C.D.F., para calcular la fuerza cortante, se supondrá una fuerza horizontal actuando sobre el punto donde se considera concentrada la masa (extremo superior de la columna ó centro de rotación de la masa C.R.). Dicha fuerza se tomará de tal manera que la relación $V_{\hat{0}}/W$ en la base, sea igual a c/Q pero no menor que a_0, es decir :

$$\frac{V_{\hat{0}}}{W} = \frac{c}{Q} \quad ; \quad V_{\hat{0}} = \frac{cW}{Q} = \frac{cmg}{Q} \qquad \text{pero} \qquad \frac{c}{Q} > a_0$$

En el análisis de péndulos invertidos, además de la fuerza lateral, se tendrán en cuenta las aceleraciones verticales de la masa superior asociadas al giro de dicha masa con respecto a un eje horizontal normal a la dirección de análisis y que pase por el punto de unión entre la masa y el elemento resistente. El efecto de dichas aceleraciones se tomará equivalente a un par aplicado en el extremo superior del elemento resistente cuyo valor es :

$$M_3 = \frac{1.5\, V_{\hat{0}}\, r_0^2\, \theta_0}{\delta_0}$$

donde r_0 es el radio de giro de la masa y es igual a $\sqrt{J/m}$

θ_0 es el giro del extremo superior de la columna bajo la acción de la fuerza lateral $V_{\hat{0}}$.

$$\theta_0 = V_{\hat{0}}\, \gamma$$

δ_0 es el desplazamiento lateral de dicho extremo bajo la -

acción de $V\hat{o}$.

$$\delta_0 = \frac{V\hat{o}}{K}$$

Si se toma en cuenta la influencia del período fundamental de vibración de la estructura, los elementos $V\hat{o}$ y $M\hat{o}$ podrán ser reducidos a V y M respectivamente, de la siguiente manera :

a) El período fundamental T se tomará igual a :

$$T = 6.3\sqrt{\frac{mg\delta_1^2 + Jg\theta_1^2}{g(V\hat{o}\,\delta_1 + M\hat{o}\,\theta_1)}} = 6.3\sqrt{\frac{m\delta_1^2 + J\theta_1^2}{V\hat{o}\,\delta_1 + M\hat{o}\,\theta_1}} \quad \text{-------}(4.7)$$

siendo δ_1 y θ_1 los desplazamientos totales al actuar $V\hat{o}$ y $M\hat{o}$ simultáneamente.

$$\delta_1 = \frac{V\hat{o}}{K} + M\hat{o}\,Y$$

$$\theta_1 = V\hat{o}\,Y + \frac{M\hat{o}}{K_r}$$

b) Si $T_1 < T < T_2$ no se permite la reducción por influencia de T.

c) Si $T > T_2$:

$$V = \frac{cW}{Q}\,(K_1 L + K_2 L^2)$$

Donde para el caso particular de una sola masa concentrada en el extremo superior, los valores de K_1 y K_2 valen :

$$K_1 = \frac{q\left[1-r(1-q)\right]}{L}$$

$$K_2 = \frac{1.5rq(1-q)}{L^2}$$

$$q = \left(\frac{T_2}{T}\right)^r$$

L = altura de la columna.

d) Si $T < T_1$:

$$V = \frac{aW}{Q'} = \frac{amg}{Q'}$$

$$a = a_0 + \frac{(c-a_0)T}{T_1}$$

$$Q' = 1 + \frac{(Q-1)T}{T_1}$$

En cualquiera de los casos b), c) ó d), el momento flexionante M valdrá :

$$M = \frac{1.5\ Vr_0^2\theta}{\delta}$$

donde :

$$\theta = VY$$

$$\delta = \frac{V}{K}$$

Las deformaciones finales se calcularán multiplicando por el factor de ductilidad Q, las causadas por las fuerzas sísmicas reducidas, es decir :

$$\Delta = \left(\frac{V}{K} + M\,Y \right) Q$$

Los valores K, K_r y Y son las rigideces de la columna definidas en el capítulo 3, (ver tabla 11).

C A P I T U L O 5

MODELOS MATEMATICOS PROPUESTOS Y ANALISIS DE LOS MISMOS .

Los modelos matemáticos que se describen a continuación, fueron propuestos en 1965 por el Ing. Octavio Rascón Ch. del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M. (ref. 4)y consisten en realizar un análisis modal tomando en cuenta el efecto que la inercia rotacional de la masa induce en el movimiento total de la estructura, así como la importancia que presenta la interacción dinámica suelo-estructura en la evaluación de los períodos naturales de vibración. Se analiza también el caso en que no se toman en cuenta dichos efectos.

El centro de rotación de la masa se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna y dada la simetría de la estructura, el movimiento de la misma podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. Según los efectos que se consideren, el problema podrá discretizarse como de uno o más modos de vibración acoplados en cada dirección. Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal.

Consideraremos los siguientes tres casos :

5.1 VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

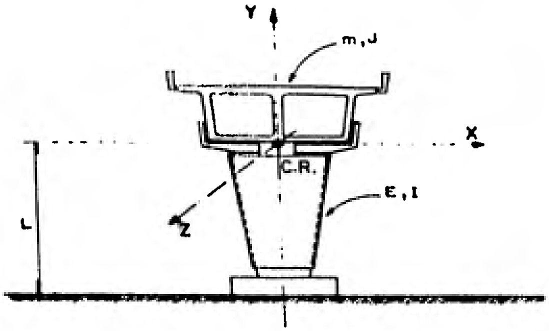


FIGURA 5.1

Idealizando a la estructura como se indica en la -- figura 5.1 tenemos :

m = masa de la trabe y cargas adicionales mas la parte tri-- butaria de la columna.

J - momento de inercia de la masa ó inercia rotacional de la masa respecto al eje Z.

E = módulo de elasticidad del material de la columna.

I = momento de inercia de la sección transversal de la colum na con respecto al eje Z.

C.R. = punto de unión entre la masa y el elemento resistente (extremo superior de la columna).

L = distancia del C.R. al suelo.

Para la columna mostrada en la figura 5.2 a) y b), se tiene :

K = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en el C.R. necesaria para que éste se desplace la unidad).

K_r= rigidez por rotación (par aplicado en el C.R. necesario- para producir un giro unitario a la altura del C.R.).

θ = rotación en C.R. debida a la fuerza K.

δ = desplazamiento lateral del C.R. debido al momento K_r.

Los valores de éstos parámetros fueron numéricamente obtenidos en el capítulo 3.

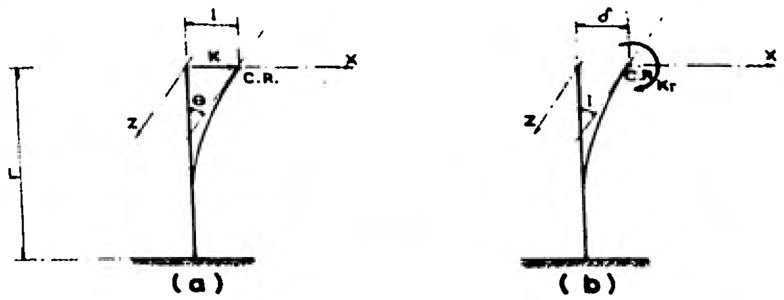


FIG. 5.2 RIGIDECES.

5.1a) FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACION .

Para una fuerza de magnitud αK, el desplazamiento - será α y el giro $\alpha\theta$. Para un par de magnitud βK_r, el giro será β y el desplazamiento $\beta\delta$. Al aplicarse ambos simultánea-- mente sobre la estructura, el desplazamiento total del C.R.- será x_1 y el giro total será ε_1 mostrados en la figura 5.3

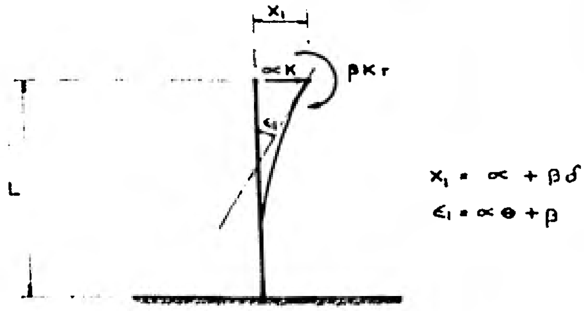


FIG. 5.3 DESPLAZAMIENTOS Y GIROS TOTALES.

Por lo tanto los valores x_1 y ε_1 quedan dados por :

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad \text{------------------------} (5.1)$$

$$\varepsilon_1 = \alpha\theta + \beta \quad \text{------------------------} (5.2)$$

Resolviendo éste sistema de ecuaciones para α y β se obtiene:

$$x_1 = \alpha + (\varepsilon_1 - \alpha\theta)\delta = \alpha + \varepsilon_1\delta - \alpha\theta\delta = \alpha(1-\theta\delta) + \varepsilon_1\delta$$

$$\alpha = \frac{x_1 - \varepsilon_1\delta}{1-\theta\delta} \quad \text{------------------------} (5.3)$$

$$\varepsilon_1 = (x_1 - \beta\delta)\theta + \beta = x_1\theta - \beta\delta\theta + \beta = \beta(1-\theta\delta) + x_1\theta$$

$$\beta = \frac{\varepsilon_1 - x_1\theta}{1-\theta\delta} \quad \text{------------------------} (5.4)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la figura 5.1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la figura 5.4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando -- los efectos gravitacionales, serán :

$$m\ddot{x}_1 + K\alpha = 0 \qquad \text{-----------------------}(5.5)$$

$$J\ddot{\varepsilon}_1 + K_r\beta = 0 \qquad \text{-----------------------}(5.6)$$

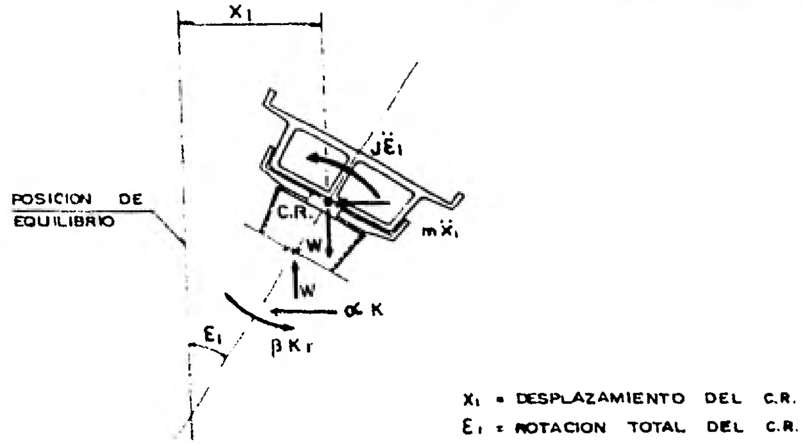


FIG. 5.4 – DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Sustituyendo los valores de α y β (ecs. 5.3 y 5.4) en las ecuaciones de movimiento (ecs. 5.5 y 5.6) tenemos:

$$m\ddot{x}_1 + K\left(\frac{x_1 - \varepsilon_1\delta}{1 - \theta\delta}\right) = 0$$

$$J\ddot{\varepsilon}_1 + K_r\left(\frac{\varepsilon_1 - x_1\theta}{1 - \theta\delta}\right) = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + \frac{K}{1 - \theta\delta}(x_1 - \varepsilon_1\delta) = 0 \qquad \text{---------------}(5.7)$$

$$J\ddot{\varepsilon}_1 + \frac{K_r}{1-\theta\delta}(\varepsilon_1 - x_1\theta) = 0 \quad \text{-------------}(5.8)$$

Estas últimas ecuaciones se pueden expresar matricialmente en la forma :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\theta\delta} \begin{bmatrix} K & -K\delta \\ -K_r\theta & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{-----}(5.9)$$

Puesto que el movimiento es armónico se puede demostrar que :

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{---------------------------}(5.10)$$

$$\ddot{\varepsilon}_1 = -\omega^2 \varepsilon_1 \quad \text{---------------------------}(5.11)$$

en donde ω es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecuaciones (5.10) y (5.11) en (5.9) se obtiene :

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\theta\delta} \begin{bmatrix} K & -K\delta \\ -K_r\theta & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = 0$$

factorizando :

$$\left\{ \frac{1}{1-\theta\delta} \begin{bmatrix} K & -K\delta \\ -K_r\theta & K_r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{------}(5.12)$$

Las ecuaciones (5.12) representan un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo, por lo tanto :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{K}{1-\theta\delta} - m\omega^2 & -\dfrac{K\delta}{1-\theta\delta} \\ -\dfrac{K_r\theta}{1-\theta\delta} & \dfrac{K_r}{1-\theta\delta} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante :

$$\left(\frac{K}{1-\theta\delta} - m\omega^2\right)\left(\frac{K_r}{1-\theta\delta} - J\omega^2\right) - \left(\frac{K_r\theta}{1-\theta\delta}\right)\left(\frac{K\delta}{1-\theta\delta}\right) = 0$$

$$\frac{KK_r}{(1-\theta\delta)^2} - \frac{KJ\omega^2}{1-\theta\delta} - \frac{K_r m\omega^2}{1-\theta\delta} + mJ\omega^4 - \frac{KK_r\theta\delta}{(1-\theta\delta)^2} = 0$$

asociando términos respecto a ω :

$$(mJ)\omega^4 - \left(\frac{KJ}{1-\theta\delta} + \frac{K_r m}{1-\theta\delta}\right)\omega^2 + \frac{KK_r}{(1-\theta\delta)^2}(1-\theta\delta) = 0 \quad \text{----(5.13)}$$

dividiendo entre mJ y simplificando se obtiene :

$$\omega^4 - \left[\frac{K}{m(1-\theta\delta)} + \frac{K_r}{J(1-\theta\delta)}\right]\omega^2 + \frac{KK_r}{mJ(1-\theta\delta)} = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2 cuya solución es:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{K}{m(1-\theta\delta)} + \frac{K_r}{J(1-\theta\delta)}\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{K}{m(1-\theta\delta)} + \frac{K_r}{J(1-\theta\delta)}\right]^2 - \frac{4KK_r}{mJ(1-\theta\delta)}}$$

------------(5.14)

Llamando a :

$\frac{K}{m} = p^2$ cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación.

$\frac{K_r}{J} = \Omega^2$ cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación.

$1-\theta\delta = \kappa$ valor constante.

sustituyendo éstos valores en (5.14) resulta :

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2\kappa}(\rho^2+\Omega^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\rho^2}{\kappa}+\frac{\Omega^2}{\kappa}\right)^2 - \frac{4}{\kappa}(\rho^2\Omega^2)}$$

por lo tanto :

$$\omega_n^2 = \frac{\rho^2+\Omega^2}{2\kappa} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\rho^2+\Omega^2}{\kappa}\right)^2 - \frac{4\rho^2\Omega^2}{\kappa}} \quad \text{----------(5.15)}$$

A partir de los valores de la frecuencia circular - natural de vibración ω_n calculados con la ecuación (5.15), - se pueden obtener los períodos naturales de cada modo de vibración t_n.

$$t_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Las configuraciones modales se determinan de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la -- ecuación matricial (5.12). Desarrollando éstas se tiene :

$$\left(\frac{K}{1-\theta\delta} - m\omega_n^2\right) x_{1n} - \frac{K\delta}{1-\theta\delta}\,\varepsilon_{1n} = 0 \quad \text{--------------(5.16)}$$

$$-\frac{K_r\theta}{1-\theta\delta}\,x_{1n} + \left(\frac{K_r}{1-\theta\delta} - J\omega_n^2\right)\varepsilon_{1n} = 0 \quad \text{-------------(5.17)}$$

donde el índice "n" indica el número del modo de vibración.

Las relaciones modales se obtienen de la ecuación- (5.16).

$$\frac{x_{in}}{\varepsilon_{in}} = \frac{K\delta}{1-\theta\delta\left(\frac{K}{1-\theta\delta} - m\,\omega_n^2\right)}$$

y sustituyendo $\kappa = 1-\theta\delta$ resulta :

$$\frac{x_{in}}{\varepsilon_{in}} = \frac{K\delta}{\kappa\left(\frac{K}{\kappa} - m\omega_n^2\right)} \qquad \text{-----------------------------(5.18)}$$

5.1b) RESPUESTA SISMICA.

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad, es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar (ref. 5) que para este caso, es aplicable la -- siguiente ecuación :

$$C_n = \frac{\bar{X}_n^T \ \bar{M} \ \bar{i}}{\bar{X}_n^T \ \bar{M} \ \bar{X}_n} \qquad \text{------------------------(5.19)}$$

en la cual :

C_n es el coeficiente de participación para el enésimo modo "n".

$\bar{i} = \begin{bmatrix} x_{est.} \\ \varepsilon_{est.} \end{bmatrix}$ Es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura ,inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

$\bar{X}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ Es el vector modal para el enésimo modo "n".

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$ Es la matriz de inercia.

$$\bar{X}_n^T = \begin{bmatrix} x_n & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$ Es el vector traspuesto de $\bar{X}_n$.

Para nuestro caso se tendrá que el vector $\bar{i}$ es igual a :

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} x_{est.} \\ \varepsilon_{est.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que como se indica en la figura 5.5, un desplazamiento estático unitario de la base genera el mismo desplazamiento en el extremo superior de la columna sin producir por ésta causa, un giro en dicho punto.

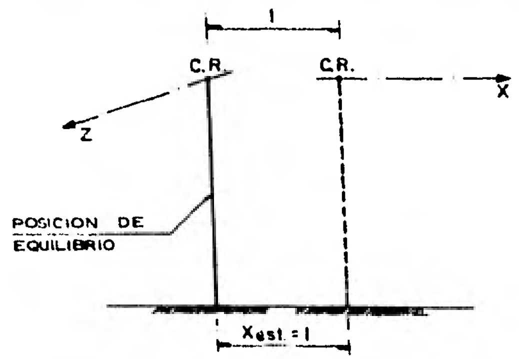


FIG. 5.5 — DESPLAZAMIENTO ESTATICO UNITARIO.

Sustituyendo valores en la ecuación (5.19), la expresión para calcular el coeficiente de participación será :

$$C_n = \frac{\begin{bmatrix} x_n & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{est.} \\ \varepsilon_{est.} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x_n & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}$$

$$C_n = \frac{x_n \; m \; x_{est.} + \varepsilon_n \; J \; \varepsilon_{est.}}{x_n^2 \; m + \varepsilon_n^2 \; J}$$

pero :

$$x_{est.} = 1$$

$$\varepsilon_{est.} = 0$$

por lo tanto :

$$C_n = \frac{x_n \; m}{x_n^2 \; m + \varepsilon_n^2 \; J} \quad \text{--------------------(5.20)}$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada -- uno de los modos será el propuesto por los mismos autores, - en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} V_n \\ M_n \end{bmatrix} = |C_n| \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} S_{an}$$

desarrollando :

$$V_n = |C_n| S_{an} \; m \; x_n \quad \text{-------------------(5.21)}$$

$$M_n = |C_n| S_{an} \; J \; \varepsilon_n \quad \text{-------------------(5.22)}$$

donde :

S_{an} Es la ordenada del espectro de aceleraciones reducida por ductilidad, que de acuerdo con el R.C.D.F. vale :

$$S_{an} = \frac{a_n g}{Q'_n}$$

V_n y M_n Son la fuerza cortante y el momento flexionante - aplicados en el extremo superior de la columna para el modo de vibración "n".

Para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos de los dos modos), se utilizará el criterio - propuesto por el R.C.D.F. y descrito en el capítulo 4 de éste trabajo (ec. 4.6).

$$R = (\Sigma R_i^2)^{1/2}$$

por lo tanto :

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \qquad \text{------------------}(5.23)$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \qquad \text{------------------}(5.24)$$

en donde V y M representan respectivamente la fuerza cortante y el momento flexionante totales, aplicados en el extremo superior de la columna combinando los dos modos de vibración.

5.1c) DEFORMACIONES DE LA ESTRUCTURA.

Las deformaciones se obtendrán multiplicando por - el factor de ductilidad Q, las obtenidas con fuerzas reducidas, esto es :

$$\Delta = \left(\frac{V}{K} + M\,\Upsilon \right) Q \qquad \text{------------------}(5.25)$$

A continuación se presenta el cálculo de los efectos sísmicos para la combinación de carga I en la dirección transversal (eje X).

Datos obtenidos en el capítulo 3:

m_x = 106.861 Ton-seg²/m.

Jz = 1 341.359 Ton-m-seg².

K = 71 198.70 Ton/m.

K_r = 1 142 987.77 Ton-m/rad.

θ = 0.2287 rad/m.

δ = 3.6718 m/rad.

γ = 3.2125×10^{-6} rad/Ton. ó m/Ton-m.

κ = $1-\theta\delta$ = 0.16015

a) Frecuencias y modos de vibración.

Cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación.

$$p^2 = \frac{K}{m} = \frac{71\ 198.70}{106.861} = 666.274 \quad 1/seg^2.$$

Cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación.

$$\Omega^2 = \frac{K_r}{J} = \frac{1\ 142\ 987.77}{1\ 341.359} = 852.112 \quad 1/seg^2.rad.$$

sustituyendo en la ec. (5.15), el cuadrado de la frecuencia circular natural de vibración será :

$$\omega^2_{1,2} = \frac{p^2+\Omega^2}{2\kappa} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p^2+\Omega^2}{\kappa}\right)^2 - \frac{4p^2\Omega^2}{\kappa}}$$

$$\omega^2_{1,2} = \frac{666.274 + 852.112}{2 \times 0.16015} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{666.274+852.112}{0.16015}\right)^2 - \frac{4 \times 666.274 \times 852.112}{0.16015}}$$

resolviendo :

$$\omega_1^2 = 389.949 \text{ seg}^{-2} \qquad \omega_1 = 19.747 \text{ seg}^{-1}$$

$$\omega_2^2 = 9\,090.867 \text{ seg}^{-2} \qquad \omega_2 = 95.346 \text{ seg}^{-1}$$

Períodos naturales para cada modo de vibración :

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{19.747} = 0.318 \text{ seg.} \qquad < \quad T_1 = 0.8 \text{ seg.}$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{95.346} = 0.066 \text{ seg.} \qquad < \quad T_1 = 0.8 \text{ seg.}$$

Configuraciones modales, ecuación (5.18) .

$$\frac{x_{1n}}{\varepsilon_{1n}} = \frac{K\delta}{\kappa\left(\frac{K}{\kappa} - m\omega_n^2\right)}$$

Para el primer modo :

$$\frac{x_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{(71\ 198.70)(3.6718)}{(0.16015)\left(\frac{71\ 198.70}{0.16015} - (106.861)(389.949)\right)} = 4.052 \text{ m/rad.}$$

$x_{11} = 4.052$

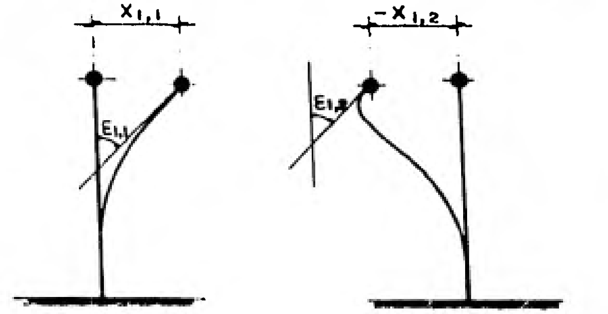
$\varepsilon_{11} = 1$

Para el segundo modo :

$$\frac{x_{12}}{\varepsilon_{12}} = \frac{(71\ 198.70)(3.6718)}{(0.16015)\left(\frac{71\ 198.70}{0.16015} - (106.861)(9\ 090.867)\right)} = -3.098 \text{ m/rad.}$$

$x_{12} = -3.098$

$\varepsilon_{12} = 1$



a).- PRIMER MODO

b).- SEGUNDO MODO

FIG. 5.6 — CONFIGURACIONES MODALES

b) Respuesta Sísmica .

Coeficientes de participación para los modos 1 y 2, ec.(5.20)

$$C_n = \frac{x_n m}{x_n^2 m + \varepsilon_n^2 J}$$

$$C_1 = \frac{(4.052)\ (106.861)}{(4.052)^2 (106.861) + (1)^2 (1\ 341.359)} = + \ 0.140$$

$$C_2 = \frac{(-3.098)\ (106.861)}{(-3.098)^2 (106.861) + (1)^2 (1\ 341.359)} = - \ 0.140$$

Ordenada del espectro de aceleraciones : $S_{an} = \frac{a_n g}{Q'_n}$

Dado que $t_n < T_1$:

$$a_1 = a_0 + (c - a_0)\frac{t_1}{T_1} = 0.078 + (0.312 - 0.078)\frac{0.318}{0.8} = 0.171$$

$$Q'_1 = 1 + (Q - 1)\frac{t_1}{T_1} = 1 + (2 - 1)\frac{0.318}{0.8} = 1.398$$

$$S_{a_1} = \frac{a_1 g}{Q'_1} = \frac{(0.171)(9.81)}{1.398} = 1.201 \text{ m/seg}^2$$

Análogamente para el segundo modo :

$$a_2 = 0.078 + (0.312 - 0.078)\,\frac{0.066}{0.8} = 0.097$$

$$Q_2' = 1 + (2 - 1)\,\frac{0.066}{0.8} = 1.082$$

$$S_{a_2} = \frac{(0.097)(9.81)}{1.082} = 0.882 \text{ m/seg}^2$$

Valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los -- modos, ecuaciones (5.21) y (5.22) :

$$V_n = |C_n|\,S_{an}\ m\ x_n$$

$$M_n = |C_n|\,S_{an}\ J\ \varepsilon_n$$

En el primer modo :

$$V_1 = |C_1|\,S_{a_1} m\ x_{11} = (0.140)(1.201)(106.861)(4.052) = 72.706 \text{ Ton.}$$

$$M_1 = |C_1|\,S_{a_1} J\ \varepsilon_{11} = (0.140)(1.201)(1\ 341.359)(1) = 225.251 \text{ Ton-m.}$$

En el segundo modo :

$$V_2 = |C_2|\,S_{a_2} m\ x_{12} = (0.140)(0.882)(106.861)(-3.098) = -40.826 \text{ Ton.}$$

$$M_2 = |C_2|\,S_{a_2} J\ \varepsilon_{12} = (0.140)(0.882)(1\ 341.359)(1) = 165.413 \text{ Ton-m.}$$

Respuesta total, ecuaciones (5.23) y (5.24) :

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{(72.706)^2 + (40.826)^2} = 83.384 \text{ Ton.}$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{(225.251)^2 + (165.413)^2} = 279.460 \text{ Ton-m.}$$

c) Deformaciones de la estructura .

$$\Delta = \left(\frac{V}{K} + M\ Y \right) Q = \left[\frac{83.384}{71\ 198.70} + (279.463)(3.2125)(10)^{-6} \right] 2 =$$

$$\Delta = 0.00414 \text{ m.}$$

En la tabla 12 se muestran los resultados obtenidos para las demás condiciones de carga tanto para sismo en dirección X, como para sismo en dirección Z(paralelo a la línea).

TABLA 12.– ANALISIS DINAMICO MODAL.
VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

CONCEPTO	COMBINACIONES DE CARGA I		II		III		IV		UNIDADES
	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	
m	106.861	110.872	107.428	105.282	105.501	112.891	96.616	92.646	Ton.– seg^2/m.
J	1341.359	80.864	1351.084	81.323	1302.094	79.762	1071.634	72.565	Ton–m–seg^2
ω_1	19.747	24.349	19.687	24.958	19.947	24.147	21.311	26.567	seg^{-1}
T_1	0.318	0.258	0.319	0.252	0.315	0.260	0.296	0.237	seg.
X_1/ϕ_1	4.052	4.015	4.051	4.012	4.055	4.016	4.074	4.011	m/rad.
C_1	0.140	0.238	0.140	0.238	0.141	0.239	0.147	0.238	Adim.
a_1	0.171	0.153	0.171	0.152	0.170	0.154	0.164	0.147	Adim.
a'_1	1.398	1.323	1.399	1.315	1.394	1.325	1.369	1.296	Adim.
Sa_1	1.201	1.138	1.202	1.132	1.198	1.141	1.177	1.114	m/seg^2
V_1	72.707	120.765	73.084	113.674	72.165	123.379	68.184	98.672	Ton
M_1	225.253	21.937	226.880	21.885	219.663	21.705	185.619	19.225	Ton.– m
ω_2	95.346	226.478	95.042	228.123	96.421	229.895	103.960	241.563	seg^{-1}
T_2	0.066	0.028	0.066	0.028	0.065	0.027	0.060	0.026	seg
X_2/ϕ_2	– 3.098	– 0.182	– 3.104	– 0.193	– 3.044	– 0.178	– 2.722	– 0.195	m/rad
C_2	– 0.140	– 0.238	– 0.140	– 0.238	– 0.141	– 0.239	– 0.147	– 0.238	Adim.
a_2	0.097	0.086	0.097	0.086	0.097	0.086	0.096	0.088	Adim.
a'_2	1.082	1.034	1.083	1.034	1.081	1.034	1.076	1.033	Adim.
Sa_2	0.882	0.818	0.882	0.818	0.880	0.816	0.873	0.813	m/seg^2
V_2	– 40.828	– 3.917	– 41.106	– 3.934	– 39.831	– 3.868	– 33.773	– 3.498	Ton.
M_2	165.406	15.728	166.632	15.785	161.501	15.621	137.590	14.032	Ton.– m.
V	83.364	120.818	83.851	113.742	82.427	123.440	76.090	98.734	Ton.
M	279.460	28.991	281.438	28.984	272.643	28.683	231.063	23.801	Ton.– m.
Δ	4.14	3.71	4.16	3.81	4.07	3.79	3.62	3.05	mm.

5.2 VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL E INTERACCION SUELO - ESTRUCTURA.

El fenómeno de la interacción dinámica ocurre de la siguiente manera :

Al llegar un tren de ondas sísmicas a la base de la cimentación de la estructura, ésta empieza a vibrar, pero debido a que el suelo que la rodea es deformable, una parte de la energía transmitida a la estructura es devuelta al suelo por medio de la misma cimentación de tal manera que ocurre una interferencia con las ondas que siguen llegando.

La respuesta del sistema cimentación - estructura depende básicamente de las propiedades de la cimentación, del medio que la soporta, de las propiedades de la superestructura y de las características de la excitación. Este efecto en las estructuras es sumamente complejo y únicamente se han resuelto algunos problemas específicos, sin embargo puede decirse que la interacción es importante en el caso de estructuras rígidas cimentadas sobre suelos blandos.

La referencia (6) propone el empleo de un coeficiente para determinar la importancia de los efectos de la interacción dinámica en el análisis de la estructura. Este coeficiente llamado parámetro de onda σ, adimensional, puede definirse como una medida que relaciona las rigideces relativas de la cimentación y de la estructura, y vale :

$$\sigma = \frac{C_s}{fh} < 20 \quad \text{-----------------------} \quad (5.26)$$

Donde :

C_s = velocidad de propagación de las ondas de cortante, en m/seg.

f = frecuencia natural del sistema cimentado sobre suelo-rígido, en seg^{-1}

h = distancia de la base de la estructura al centro de rotación, en m.

Nótese que en la ecuación (5.26), σ debe ser menor que 20 ya que para valores superiores, la frecuencia es similar a la obtenida para una estructura cimentada sobre suelo rígido.

Para determinar el parámetro σ en el caso que nos-ocupa, tomaremos los siguientes valores :

150	<	C_s	<	250	m/seg.	(ref. 7)
0.237	<	t	<	0.319	seg.	(ver tabla 12)
3.135	<	f	<	4.219	seg^{-1}.	(f = 1/t)
		h	=	7.45	m.	

Sustituyendo valores :

$$\sigma_{max} = \frac{250}{(3.135)(7.45)} = 10.70 < 20$$

$$\sigma_{min} = \frac{150}{(4.219)(7.45)} = 4.77 < 20$$

Como puede verse, el valor máximo de σ resulta menor que 20 ; por lo tanto, de acuerdo con la referencia (6) es necesario tomar en cuenta el efecto de la interacción dinámica suelo-estructura en el cálculo de frecuencias y modos de vibración.

A continuación se describe el siguiente modelo matemático : Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal, uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación.

La estructura del Metro elevado se idealiza en la figura 5.7 en donde aparecen los siguientes parámetros :

K_c es la rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base.

R_c es la rigidez del resorte correspondiente a la rotación de la base.

x es el desplazamiento lineal total en el C.R.

ε es el desplazamiento angular total en el C.R.

L' es la altura del C.R. sobre el nivel de desplante.

x_0 es la traslación de la base.

ε_0 es la rotación de la base.

x_2 es el desplazamiento lineal del C.R. producido por la rotación de la base.

$J, L, \delta, \theta, K, K_r, x_1, \varepsilon_1$, y W están definidos anteriormente.

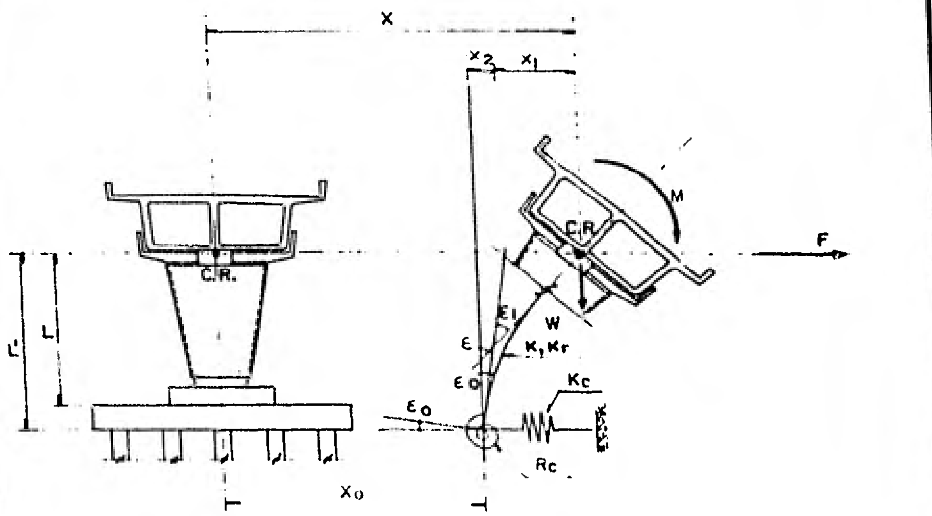


FIG. 5.7

MODELO DE INTERACCION DINAMICA SUELO-ESTRUCTURA

5.2a) FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACION.

Los valores de la fuerza cortante y momento flexionante iniciales que actúan en el C.R. de la estructura están dados por :

$$F = m\ddot{x} = m\omega^2 x \quad \text{------------------------------------} (5.27)$$

$$M = J\ddot{\varepsilon} = J\omega^2 \varepsilon \quad \text{------------------------------------} (5.28)$$

y en la base de la cimentación son :

$$F_0 = F \qquad y \qquad M_0 = M + FL'$$

Los desplazamientos lineales y angulares que aparecen en la figura 5.7 valen:

$$x_0 = \frac{F_0}{K_c}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{R_c}$$

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \qquad \text{donde : } \alpha = \frac{F}{K} \qquad y \qquad \beta = \frac{M}{K_r}$$

$$\varepsilon_1 = \beta + \alpha\theta$$

$$x_2 = \varepsilon_0 L'$$

$$x = x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{------------------------------------} (5.29)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \quad \text{------------------------------------} (5.30)$$

que son los desplazamientos totales.

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (5.28) y despejando ω^2, obtenemos :

$$\omega^2 = \frac{F}{mx}$$

$$\omega^2 = \frac{F}{m\ (x_0 + x_1 + x_2)}$$

$$\omega^2 = \frac{F}{m\left(\frac{F}{K_c} + \frac{F}{K} + \frac{M\delta}{K_r} + \frac{(M + FL')L'}{R_c}\right)}$$

$$\omega^2 = \frac{F}{mF\left[\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{M}{F}\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right) + \frac{L'^2}{R_c}\right]}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m\left(\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c}\right) + \frac{M}{F}\, m\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)} \quad \text{------------(5.31)}$$

De la ecuación (5.28) :

$$M = J\omega^2\varepsilon$$

$$M = J\omega^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$$

$$M = J\omega^2\left(\frac{M + FL'}{R_c} + \frac{M}{K_r} + \frac{F\theta}{K}\right)$$

$$\frac{M}{F} = J\omega^2\left(\frac{M}{F}\frac{1}{R_c} + \frac{L'}{R_c} + \frac{M}{F}\frac{1}{K_r} + \frac{\theta}{K}\right)$$

$$\frac{M}{F} = \frac{M}{F}\left(\frac{J\omega^2}{R_c} + \frac{J\omega^2}{K_r}\right) + J\omega^2\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{\theta}{K}\right)$$

$$\frac{M}{F} - \frac{M}{F}\left(\frac{J\omega^2}{R_c} + \frac{J\omega^2}{K_r}\right) = J\omega^2\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{\theta}{K}\right)$$

$$\frac{M}{F}\left[1 - J\omega^2\left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{K_r}\right)\right] = J\omega^2\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{\theta}{K}\right)$$

$$\frac{M}{F} = \frac{J\omega^2\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{\theta}{K}\right)}{1 - J\omega^2\left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{K_r}\right)}$$

$$\frac{M}{F} = \frac{\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{\theta}{K}\right)}{\frac{1}{J\omega^2} - \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{K_r}\right)} \quad \text{----------------------------(5.32)}$$

Sustituyendo (5.32) en (5.31) :

$$\omega^2 = \cfrac{1}{m\left(\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c}\right) + \cfrac{m\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{0}{K}\right)}{\frac{1}{J\omega^2} - \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{K_r}\right)}}$$

Si llamamos :

$$A = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{K_r}$$

$$B = \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c}$$

$$C = \left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{0}{K}\right)$$

entonces :

$$\omega^2 = \cfrac{1}{mB + \cfrac{mC}{\frac{1}{J\omega^2} - A}} = \cfrac{\frac{1}{J\omega^2} - A}{\left(\frac{1}{J\omega^2} - A\right) mB + mC}$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{J} - \omega^2 A}{\frac{m}{J} B - \omega^2 mAB + \omega^2 mC} = \frac{\frac{1}{J} - \omega^2 A}{\frac{m}{J} B + \omega^2 m(C-AB)}$$

$$\omega^2 \frac{m}{J} B + \omega^4 m\,(C-AB) + \omega^2 A - \frac{1}{J} = 0$$

$$\omega^4 m\,(C-AB) + \omega^2\left(\frac{m}{J} B + A\right) - \frac{1}{J} = 0$$

$$\omega^4 + \omega^2\left[\frac{\frac{mB}{J} + A}{m(C-AB)}\right] - \frac{1}{mJ(C-AB)} = 0$$

$$\omega^4 + \omega^2\left[\frac{mB + JA}{mJ(C-AB)}\right] - \frac{1}{mJ(C-AB)} = 0 \qquad \text{--------------- (5.33)}$$

La ecuación (5.33) representa una ecuación bicuadrática en ω, cuya solución para ω^2 es :

$$\omega_n^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{mB + JA}{mJ(C-AB)}\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{mB + JA}{mJ(C-AB)}\right]^2 + \frac{4}{mJ(C-AB)}}$$

si $D = mJ(C-AB)$

$$E = \frac{mB + JA}{mJ(C-AB)} = \frac{mB + JA}{D}$$

$$\omega_n^2 = -0.5\,E \pm 0.5\sqrt{E^2 + \frac{4}{D}} \qquad \text{----------------(5.34)}$$

y una vez conocida la frecuencia circular natural de vibración, se obtienen los períodos naturales correspondientes a cada modo de vibración t_n.

$$t_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Las configuraciones modales se obtienen a partir de la ecuación de desplazamiento lineal total de la estructura, ecuación (5.29).

$$x = x_0 + x_1 + x_2$$

sustituyendo los valores correspondientes:

$$x = \frac{m\omega^2 x}{K_c} + \frac{m\omega^2 x}{K} + \frac{J\omega^2\varepsilon\delta}{K_r} + \frac{(J\omega^2\varepsilon + m\omega^2 xL')\,L'}{R_c}$$

$$x = x\left(\frac{m\omega^2}{K_c} + \frac{m\omega^2}{K} + \frac{m\omega^2 L'^2}{R_c}\right) + \frac{J\omega^2\varepsilon\delta}{K_r} + \frac{J\omega^2\varepsilon L'}{R_c}$$

$$x - x\left(\frac{m\omega^2}{K_c} + \frac{m\omega^2}{K} + \frac{m\omega^2 L'^2}{R_c}\right) = J\omega^2\varepsilon\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)$$

$$x\left[1 - m\omega^2\left(\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c}\right)\right] = J\omega^2\varepsilon\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)$$

$$\frac{x}{\varepsilon} = \frac{J\omega^2\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)}{1 - m\omega^2\left(\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c}\right)} = \frac{J\omega^2\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)}{1 - m\omega^2 B}$$

Para el enésimo modo tendremos :

$$\frac{x_n}{\varepsilon_n} = \frac{J\omega_n^2\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)}{1 - m\omega_n^2 B} \text{ ------------------------------ } (5.35)$$

5.2b) RESPUESTA SISMICA Y DEFORMACIONES.

La respuesta sísmica de la estructura se obtendrá de la misma manera que para el caso 5.1 (voladizo con inercia rotacional y suelo infinitamente rígido).

En lo que respecta a las deformaciones, éstas se calcularán sustituyendo valores en la ecuación de desplazamiento lineal total (ecuación 5.29) y multiplicando por Q, es decir :

$$\Delta = xQ = (x_0 + x_1 + x_2)\,Q$$

$$\Delta = \left[\frac{V}{K_c} + \frac{V}{K} + \frac{M\delta}{K_r} + \frac{(M + VL')L'}{R_c}\right] Q \text{ -------------- } (5.36)$$

5.2c) PROPIEDADES ELASTICAS DE LA CIMENTACION.

Existen varios métodos propuestos para determinar - la rigidez al desplazamiento horizontal (K_c) y al giro (R_c) en la base de la zapata, entre los cuales el método basado - en la teoría de barras de longitud infinita en un medio elás tico contínuo es el más riguroso. (ref. 8)

Este método supone que :

a) La zapata es perfectamente rígida.

b) Los pilotes son elásticos bajo la acción de cargas axia les.

c) El suelo que confina al pilote es elástico y ejerce una resistencia elástica contra la rotación y traslación -- del pilote, (Teoría de Hrennikoff, 1950).

Para este método se requiere del conocimiento del - coeficiente de reacción de subgrado horizontal, también cono cido como el módulo de cimentación o módulo subgrado, que se define como la relación entre la presión lateral ejercida so bre los pilotes y el desplazamiento que éstos presentan. En- otras palabras, es la presion lateral unitaria requerida pa- ra producir un desplazamiento horizontal unitario.

En arcillas blandas, el coeficiente de reacción de- subgrado horizontal S, puede valuarse con la expresión si- - guiente (Terzaghi, 1955) :

$$S = \frac{S_1}{1.5B} \quad \text{------------------------------} (5.37)$$

donde :

S_1 es el coeficiente de reacción de subgrado horizontal para un pilote de un pie de ancho en un pie de profundidad.

B es el ancho total del pilote, en pies.

Para arcillas blandas se recomienda el valor de -- S_1 = 50 Lb/(in³ x pie)

El procedimiento de análisis se describe de la siguiente manera :

1).- Determinación de las constantes elásticas para un pilote aislado :

a) Al inducir un desplazamiento longitudinal unitario -- ($\delta_\ell = 1$), se produce una carga axial "n" en la cabeza del pilote (fig. 5.8). Este valor deberá ser determinado con base en resultados de pruebas de campo.

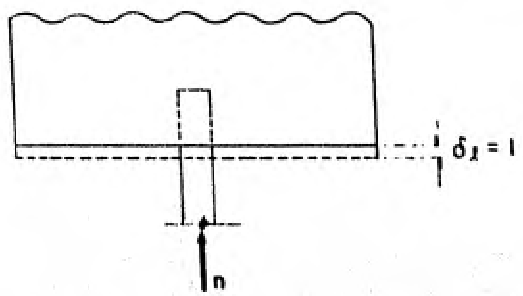


FIG. 5.8

b) Induciendo una deformación unitaria horizontal ($\delta_T = 1$) en la cabeza del pilote sin permitir el giro en ese punto se produce una fuerza resistente horizontal (t_δ) y un momento en el empotramiento (m_δ), fig. 5.9 .

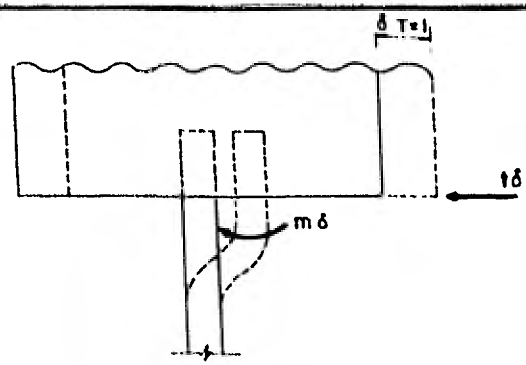


FIG. 5.9

De la Teoría de la elasticidad se tiene :

$$t_\delta = \frac{S}{\beta}$$

$$m_\delta = \frac{S}{2\beta^2}$$

donde S es el coeficiente de reacción de subgrado horizontal

y $\beta = \sqrt[4]{\frac{S}{4EI}}$

E es el módulo de elasticidad del material del pilote.

I es el momento de inercia de la sección transversal del pilote.

c) Induciendo una deformación angular unitaria ($\alpha = 1$ rad.) a la cabeza del pilote sin admitir desplazamiento horizontal en ese punto, se produce una fuerza resistente horizontal -(t_α) y un momento (m_α), fig. 5.10 .

De la teoría de la elasticidad:

$$m_\alpha = \frac{S}{2\beta^3}$$

$$t_\alpha = m_\delta = \frac{S}{2\beta^2}$$

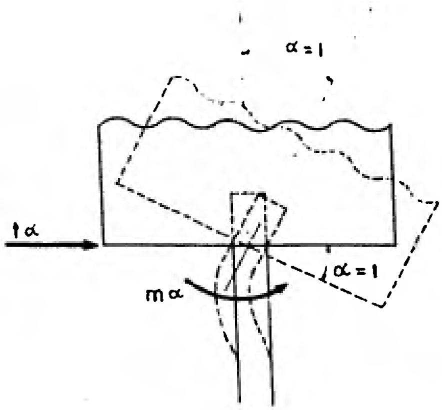


FIG. 5.10

2).- Determinación de las constantes elásticas de la cimentación como un conjunto (suponiendo que la zapata es infinitamente rígida).

Un desplazamiento unitario de la zapata ya sea desplazamiento horizontal ($\Delta x=1$), desplazamiento vertical ($\Delta y=1$) o giro ($\alpha=1$) produce :

Una fuerza resistente horizontal	X
Una fuerza resistente vertical	Y
y un momento resistente	M

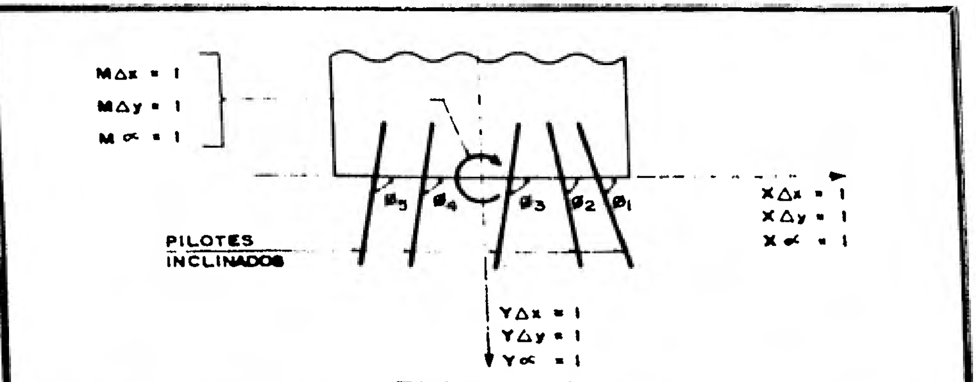


FIG. 5.11

De la teoría de las estructuras :

$$Y_{\Delta x=1} = X_{\Delta y=1}$$

$$M_{\Delta x=1} = X_{\alpha=1}$$

$$M_{\Delta y=1} = Y_{\alpha=1}$$

Mediante simple geometría y estática, todas las fuerzas ilustradas en la figura 5.11 pueden ser expresadas en términos de las constantes elásticas para un pilote aislado determinadas anteriormente: n, t_δ, m_δ, t_α, y m_α; de tal modo que :

$$X_{\Delta x=1} = -\Sigma\ (n \cos^2\phi + t_\delta \operatorname{sen}^2\phi\ )$$

$$Y_{\Delta x=1} = -\frac{1}{2}\ (n - t_\delta\ )\Sigma\ (\operatorname{sen} 2\phi\ )$$

$$M_{\Delta x=1} = -\frac{1}{2}\ (n - t_\delta\ )\Sigma\ (x \operatorname{sen} 2\phi\ ) + m_\delta\Sigma\,(\operatorname{sen} \phi)$$

$$X_{\Delta y=1} = Y_{\Delta x=1}$$

$$Y_{\Delta y=1} = - \Sigma(n \ sen^2\phi + t_\delta cos^2\phi)$$

$$M_{\Delta y=1} = - \Sigma(n \ sen^2\phi + t_\delta cos^2\phi)x - m_\delta \ \Sigma(\cos\phi)$$

$$X_{\alpha=1} = M_{\Delta x=1}$$

$$Y_{\alpha=1} = M_{\Delta y=1}$$

$$M_{\alpha=1} = - \Sigma\left[(n \ sen^2\phi + t_\delta cos^2\phi)x^2\right] - 2m_\delta\Sigma(x \cos\phi) - Nm_\alpha$$

Donde x es la coordenada de la cabeza del pilote respecto al centro de gravedad del grupo de pilotes. Las cabezas de los-pilotes situadas a la izquierda de dicho centro tendrán coordenadas negativas, y N es el número total de pilotes en la - cimentación.

3).-Determinación de los desplazamientos de la cimentación.

Del sistema de ecuaciones siguiente , se pueden despejar los valores ΔX, ΔY y α :

$$X_{\Delta x=1} \Delta X + X_{\Delta y=1} \Delta Y + X_{\alpha=1}\alpha + V = 0 \quad \text{---------(5.38)}$$

$$X_{\Delta y=1} \Delta X + Y_{\Delta y=1} \Delta Y + Y_{\alpha=1}\alpha + P = 0 \quad \text{---------(5.39)}$$

$$X_{\alpha=1} \Delta X + Y_{\alpha=1} \Delta Y + M_{\alpha=1}\alpha + M = 0 \quad \text{---------(5.40)}$$

donde ΔX , ΔY y α son los desplazamientos de la cimenta -- ción bajo la acción de una fuerza V a lo largo del eje X, --

P a lo largo del eje Y y un momento M respecto al centroide del grupo de pilotes respectivamente, aplicados todos en la unión de la zapata con los pilotes (base de la zapata).

Para el caso particular de una cimentación con pilotes verticales donde $\phi = 90°$, cuya distribución sea simétrica de tal manera que la suma algebraica de las coordenadas de las cabezas de los pilotes respecto al centroide de éstos sea nula ($\Sigma x=0$), se tiene lo siguiente :

$$Y_{\Delta x=1} = X_{\Delta y=1} = -\frac{1}{2}(n-t_\delta)\,\Sigma(\text{sen } 2\phi) = 0 \qquad \text{y}$$

$$M_{\Delta y=1} = Y_{\alpha=1} = -\Sigma(n\,\text{sen}^2\phi + t_\delta\cos^2\phi)x - m_\delta\Sigma(\cos\phi) = 0$$

sustituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones, se obtiene :

$$X_{\Delta x=1}\,\Delta X + X_{\alpha=1}\,\alpha + V = 0 \qquad \text{---------------(5.41)}$$

$$Y_{\Delta y=1}\,\Delta Y + P = 0 \qquad \text{---------------(5.42)}$$

$$X_{\alpha=1}\,\Delta X + M_{\alpha=1}\,\alpha + M = 0 \qquad \text{---------------(5.43)}$$

Resolviendo este sistema :

$$\Delta X = \frac{X_{\alpha=1}\,M - M_{\alpha=1}\,V}{X_{\Delta x=1}\,M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2} \qquad \text{---------------(5.44)}$$

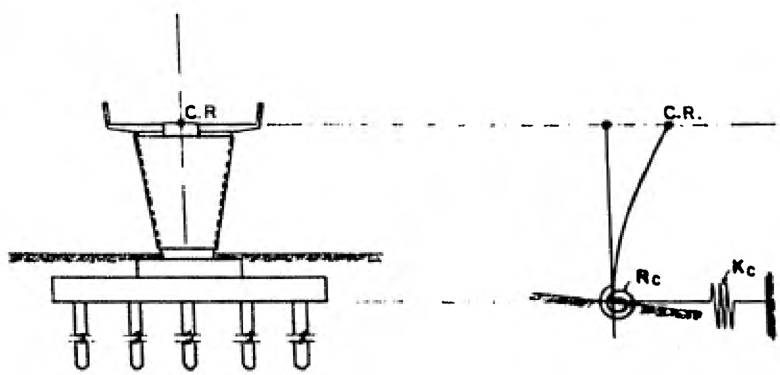
$$\Delta Y = - \frac{P}{Y_{\Delta y=1}} \quad \text{-----------------(5.45)}$$

$$\alpha = \frac{X_{\alpha=1} V - M X_{\Delta x=1}}{X_{\Delta x=1} M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2} \quad \text{-----------------(5.46)}$$

4).- Una vez conocidos los valores de los desplazamientos -- ΔX , ΔY , y α se valuarán las rigideces de la cimentación de la siguiente manera :

$$K_c = \frac{V}{\Delta X} \qquad \text{y} \qquad R_c = \frac{M}{\alpha}$$

donde K_c y R_c son respectivamente las rigideces correspondientes a la traslación y rotación de la base de la cimentación, (ver fig. 5.12).



F I G. 5.12

Despejando $\frac{V}{\Delta X} = K_c$ de la ec. (5.44) :

$$\left[X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2\right] \Delta X + M_{\alpha=1}\ V - X_{\alpha=1}\ M = 0$$

dividiendo entre V, resulta :

$$\left[X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2\right] \frac{\Delta X}{V} + M_{\alpha=1} - X_{\alpha=1}\ \frac{M}{V} = 0$$

$$\frac{\Delta X}{V} = \frac{\frac{M}{V}\ (X_{\alpha=1}) - M_{\alpha=1}}{X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2} = \frac{1}{K_c}$$ por lo tanto :

$$K_c = \frac{X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2}{\frac{M}{V}\ (X_{\alpha=1}) - M_{\alpha=1}} \text{ ------------------- (5.47)}$$

Despejando $\frac{M}{\alpha} = R_c$ de la ec. (5.46):

$$\left[X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2\right]\alpha + MX_{\Delta x=1} - X_{\alpha=1}\ V = 0$$

dividiendo entre M :

$$\left[X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2\right] \frac{\alpha}{M} + X_{\Delta x=1} - X_{\alpha=1}\ \frac{V}{M} = 0$$

$$\frac{\alpha}{M} = \frac{\frac{V}{M}\ (X_{\alpha=1}) - X_{\Delta x=1}}{X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2} = \frac{1}{R_c}$$ por lo tanto :

$$R_c = \frac{X_{\Delta x=1}\ M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2}{\frac{V}{M}\ (X_{\alpha=1}) - X_{\Delta x=1}} \text{ --------------------- (5.48)}$$

Obsérvese que los valores K_c y R_c dados por las -- ecuaciones (5.47) y (5.48), están en función de la relación- M/V cuyos valores son los que se pretenden conocer, por lo tanto supondremos esta relación para valuar K_c y R_c y verificaremos que el valor M/V calculado sea aproximadamente - igual al supuesto.

OBTENCION DE LAS RIGIDECES DE LA CIMENTACION DEL METRO.

1).- Determinación de las constantes elásticas para un pilote aislado de 50 x 50 cm. de concreto con resistencia a la compresión de $f'_c = 200$ Kg/cm^2

Con base en pruebas de carga de mecánica de suelos, se determinó que para una descarga de 30 Ton. se produce un hundimiento vertical inmediato de 0.4 cm., por lo tanto :

$$n = \frac{30}{0.004} = 7500 \text{ Ton/m.}$$

Coeficiente de reacción de subgrado horizontal.

$$S_1 = 50 \text{ Lb/(in}^3 \text{x pie)}$$

$$B = 50 \text{ cm.} = \frac{50}{30.45} = 1.64 \text{ pies}$$

$$S = \frac{S_1}{1.5B} = \frac{50}{1.5(1.64)} = 20.32 \text{ Lb/in}^3 = \frac{20.32 \times 0.4536}{(2.54)^3} =$$

$$S = 0.562 \text{ Kg./cm}^3$$

Para un ancho de 50 cm.,

$S = 0.562 \times 50 = 28.1 \ Kg/cm^2$

$E = 10\,000 \sqrt{200} = 141\,421.0 \ Kg/cm^2$

$I = \frac{(50)^4}{12} = 520\,833 \ cm^4$

$\beta = \sqrt[4]{\frac{S}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{28.1}{(4)(141\,421)(520\,833)}} = 0.003125 \ cm^{-1}$

$t_\delta = \frac{S}{\beta} = \frac{28.1}{0.003125} = 8992 \ Kg/cm = 899.2 \ Ton/m.$

$m_\delta = \frac{S}{2\beta^2} = \frac{28.1}{2(0.003125)^2} = 1\,438\,720.0 \ (Kg\text{-}cm)/cm.$

$t_\alpha = m_\delta = 1\,438.7 \ (Ton\text{-}m)/m.$

$m_\alpha = \frac{S}{2\beta^3} = \frac{28.1}{2(0.003125)^3} = 460\,390\,400.0 \ (Kg\text{-}cm)/rad.$

$m_\alpha = 4603.9 \ (Ton\text{-}m)/rad.$

2).- Determinación de las constantes elásticas de la cimentación como un conjunto.

si $\phi = 90°$: $\Sigma(\text{sen } 2\phi) = 0$

$\text{sen } \phi = \text{sen}^2\phi = 1$

$\cos \phi = \cos^2\phi = 0$

$\Sigma \text{sen } \phi = \Sigma \text{sen}^2\phi = N$

Por simetría, la suma algebraica de las coordenadas de los pilotes respecto a su centroide para las dos direcciones de análisis vale cero . ($\Sigma x = \Sigma z = 0$).

$\Sigma x^2 = \Sigma z^2 = \left[(4)(6)^2 + (2)(3.6)^2 + (4)(1.2)^2\right] 2 = 351.36 \text{ m}^2$

Número de pilotes $N = 21$

$$X_{\Delta x=1} = Z_{\Delta z=1} = -\Sigma(n \cos^2\phi + t_\delta \operatorname{sen}^2\phi) = -N\, t_\delta$$

$$= -(21)(899.2) = -18\ 883.2 \text{ Ton/m.}$$

$$Y_{\Delta x=1} = Y_{\Delta z=1} = -\frac{1}{2}(n - t_\delta)\ \Sigma(\operatorname{sen} 2\phi) = 0$$

$$M_{\Delta x=1} = M_{\Delta z=1} = -\frac{1}{2}(n - t_\delta)\ \Sigma(x \operatorname{sen} 2\phi) + m_\delta \Sigma(\operatorname{sen}\phi) = N\, m_\delta$$

$$= (21)(1438.7) = 30\ 212.7 \text{ Ton-m./m.}$$

$$X_{\Delta y=1} = Z_{\Delta y=1} = Y_{\Delta x=1} = 0$$

$$Y_{\Delta y=1} = -\Sigma(n \operatorname{sen}^2\phi + t_\delta \cos^2\phi) = -Nn = -(21)(7\ 500) = -157\ 500 \text{ Ton-m./m.}$$

$$M_{\Delta y=1} = -\Sigma(n \operatorname{sen}^2\phi + t_\delta \cos^2\phi)x - m_\delta\ \Sigma(\cos\phi) = 0$$

$$X_{\alpha=1} = Z_{\theta=1} = M_{\Delta x=1} = 30\ 212.7 \text{ Ton-m./m.}$$

$$Y_{\alpha=1} = Y_{\theta=1} = M_{\Delta y=1} = 0$$

$$M_{\alpha=1} = M_{\theta=1} = -\Sigma\left[(n \operatorname{sen}^2\phi + t_\delta \cos^2\phi)x^2\right] - 2m_\delta\ \Sigma(x \cos\phi) - Nm_\alpha$$

$$= -n\Sigma x^2 - Nm_\alpha = -(7\ 500)(351.36) - (21)(4\ 603.9) =$$

$$= -2\ 731\ 882.0 \text{ Ton-m./rad.}$$

3).- **Obtención de las rigideces K_c y R_c de la cimentación**

Para la dirección X, supondremos un valor de - - - M/V = 8.60 por lo tanto, de las ecuaciones (5.47) y (5.48) obtenemos :

$$K_{cx} = \frac{X_{\Delta x=1}\, M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2}{\frac{M}{V}\,(X_{\alpha=1}) - M_{\alpha=1}} = \frac{(-18\ 883.2)(-2\ 731\ 882)-(30\ 212.7)^2}{(8.6)(30\ 212.7)-(-2\ 731\ 882)}$$

K_{cx} = 16 938.1 Ton/m.

$$R_{cx} = \frac{X_{\Delta x=1}\, M_{\alpha=1} - (X_{\alpha=1})^2}{\frac{V}{M}\,(X_{\alpha=1}) - X_{\Delta x=1}} = \frac{(-18\ 883.2)(-2\ 731\ 882)-(30\ 212.7)^2}{\frac{1}{8.6}\,(30\ 212.7)-(-18\ 883.2)}$$

R_{cx} = 2 262 599.5 Ton-m/rad.

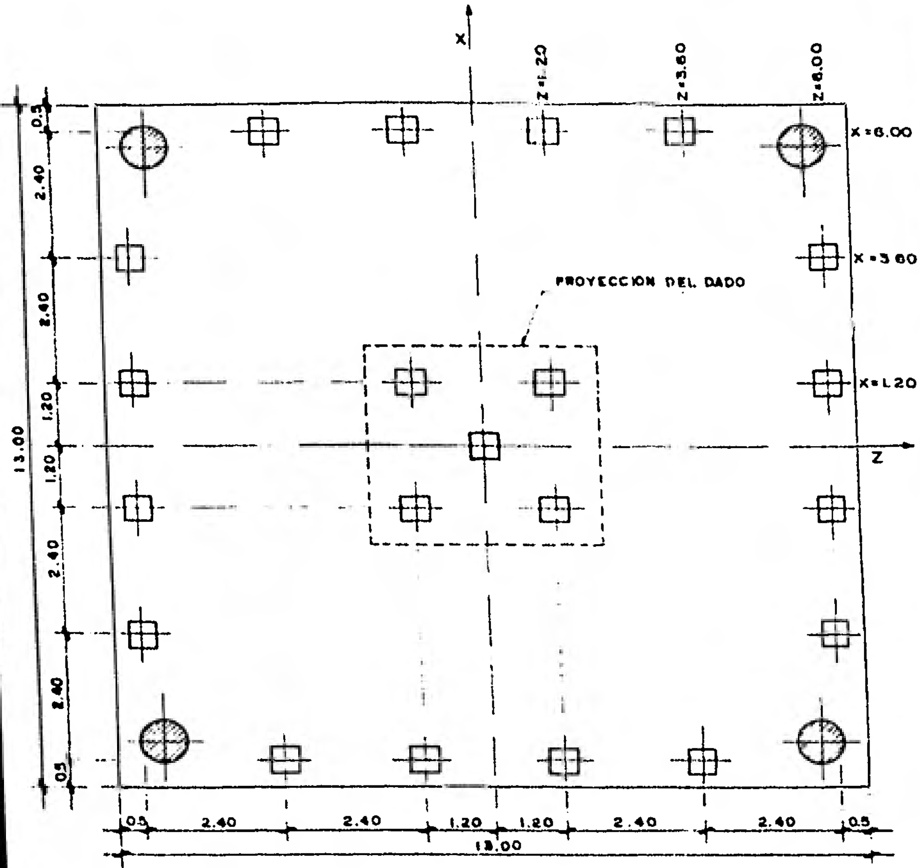
Análogamente, para la dirección Z el valor supuesto de la relación M/V será de 7.5 :

$$K_{cz} = \frac{Z_{\Delta z=1}\, M_{\theta=1} - (Z_{\theta=1})^2}{\frac{M}{V}\,(Z_{\theta=1}) - M_{\theta=1}} = \frac{(-18\ 883.2)(-2\ 731\ 882)-(30\ 212.7)^2}{(7.5)(30\ 212.7)-(-2\ 731\ 882)}$$

K_{cz} = 17 128.4 Ton/m.

$$R_{cz} = \frac{Z_{\Delta z=1}\, M_{\theta=1} - (Z_{\theta=1})^2}{\frac{V}{M}\,(Z_{\theta=1}) - Z_{\Delta z=1}} = \frac{(-18\ 883.2)(-2\ 731\ 882)-(30\ 212.7)^2}{\frac{1}{7.5}\,(30\ 212.7)-(-18\ 883.2)}$$

R_{cz} = 2 211 716.1 Ton-m/rad.



N = 21 PILOTES VERTICALES

PERALTE DE ZAPATA = 1.15 m.

FIG. 5.13 .— DIMENSIONES DE LA ZAPATA.

Cálculo de los efectos sísmicos para la combinación de carga I , en la dirección transversal (X):

DATOS.

m_x	=	106.861	$\text{Ton-seg}^2/\text{m}.$
J_z	=	1 341.359	$\text{Ton-m-seg}^2.$
K	=	71 198.7	Ton/m.
K_r	=	1 142 987.77	Ton-m/rad.
θ	=	0.2287	rad/m.
δ	=	3.6718	m/rad.
K_{cx}	=	16 938.1	Ton/m.
R_{cx}	=	2 262 599.5	Ton-m/rad.
L'	=	7.45	m.

a) Frecuencias y modos de vibración:

$$A = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{K_r} = \frac{1}{2\ 262\ 599.5} + \frac{1}{1\ 142\ 987.77} = 1.3169 \times 10^{-6}$$

$$B = \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c} = \frac{1}{16\ 938.1} + \frac{1}{71\ 198.7} + \frac{(7.45)^2}{2\ 262\ 599.5} = 9.76\text{x}10^{-5}$$

$$C = \left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)\left(\frac{L'}{R_c} + \frac{\theta}{K}\right) = \left(\frac{3.6718}{1\ 142\ 987.77} + \frac{7.45}{2\ 262\ 599.5}\right) \text{x}$$

$$\text{x} \left(\frac{7.45}{2\ 262\ 599.5} + \frac{0.2287}{71\ 198.7}\right)$$

$$C = 4.2318 \times 10^{-11}$$

$$D = mJ\ (C-AB) = -1.2358 \times 10^{-5}$$

$$E = \frac{mB + JA}{D} = -986.94$$

La frecuencia vale : $\omega_n^2 = -0.5E \pm 0.5\sqrt{E^2 + \frac{4}{D}}$

$\omega_1^2 = 90.234 \text{ seg}^{-2}$ $\omega_1 = 9.50 \text{ seg}^{-1}$

$\omega_2^2 = 896.637 \text{ seg}^{-2}$ $\omega_2 = 29.94 \text{ seg}^{-1}$

y los períodos para cada modo de vibración :

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.661 \text{ seg.} \quad < \quad T_1 - 0.8 \text{ seg.}$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.210 \text{ seg.} \quad < \quad T_1 = 0.8 \text{ seg.}$$

Configuraciones modales, ecuación (5.35) :

$$\frac{x_n}{\varepsilon_n} = \frac{J\omega_n^2\left(\frac{\delta}{K_r} + \frac{L'}{R_c}\right)}{1 - m\omega_n^2 B} = \frac{0.00873\ \omega_n^2}{1-0.01043\omega_n^2}$$

para el primer modo :

$$\frac{x_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{(0.00873)(90.234)}{1-(0.01043)(90.234)} = 13.401 \text{ m/rad.}$$

$x_{11} = 13.401$ m.

$\varepsilon_{11} = 1$ rad.

para el segundo modo :

$$\frac{x_{12}}{\varepsilon_{12}} = \frac{(0.00873)(896.637)}{1-(0.01043)(896.637)} = -0.937 \text{ m/rad.}$$

$x_{12} = -0.937$ m.

$\varepsilon_{12} = 1$ rad.

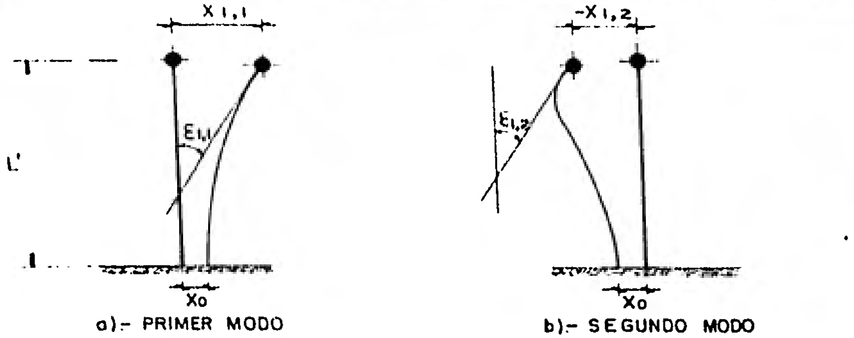


FIG. 5.14 — CONFIGURACIONES MODALES

b) Respuesta sísmica :

De la ecuación (5.20) se obtiene el coeficiente de participación.

$$C_n = \frac{x_n\ m}{x_n^2 m + \varepsilon_n^2 J}$$

$$C_1 = \frac{(13.401)(106.861)}{(13.401)^2(106.861) + (1)^2(1341.359)} = 0.070$$

$$C_2 = \frac{(-0.937)(106.861)}{(-0.937)^2(106.861) + (1)^2(1341.359)} = -0.070$$

Ordenada del espectro de aceleraciones : $S_{an} = \frac{a_n g}{Q'_n}$

como $t_n < T_1$, para el primer modo :

$$a_1 = a_0 + (c - a_0)\frac{t_1}{T_1} = 0.078 + (0.312 - 0.078)\frac{0.661}{0.8} = 0.271$$

$$Q_1' = 1 + (Q-1)\frac{t_1}{T_1} = 1 + (2-1)\frac{0.661}{0.8} = 1.827$$

$$S_{a_1} = \frac{a_1 g}{Q_1'} = 1.458 \text{ m/seg}^2$$

y para el segundo modo :

$$a_2 = 0.078 + (0.312 - 0.078)\frac{0.210}{0.8} = 0.139$$

$$Q_2' = 1 + (2-1)\frac{0.210}{0.8} = 1.262$$

$$S_{a_2} = \frac{a_2 g}{Q_2'} = 1.083 \text{ m/seg}^2$$

Valor absoluto de las respuestas máximas, ecuaciones (5.21) y (5.22) :

$$V_n = |C_n|\, S_{an}\, m\, x_n$$

$$M_n = |C_n|\, S_{an}\, J\varepsilon_n$$

En el primer modo :

$$V_1 = (0.070)(1.458)(106.861)(13.401) = 145.62 \text{ Ton.}$$

$$M_1 = (0.070)(1.458)(1341.359)(1) = 136.40 \text{ Ton-m.}$$

En el segundo modo :

$$V_2 = (0.070)(1.083)(106.861)(-0.937) = -7.56 \text{ Ton.}$$

$$M_2 = (0.070)(1.083)(1341.359)(1) = 101.35 \text{ Ton-m.}$$

Respuesta total, ecuaciones (5.23) y (5.24):

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{(145.62)^2 + (7.56)^2} = 145.80 \text{ Ton.}$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{(136.40)^2 + (101.35)^2} = 169.93 \text{ Ton-m.}$$

c) Deformaciones :

$$\Delta = \left[\frac{V}{K_c} + \frac{V}{K} + \frac{M\delta}{K_r} + \frac{(M + VL')L'}{R_c} \right] Q$$

$$\Delta = \left[\frac{145.80}{16\ 938.10} + \frac{145.80}{71\ 198.70} + \frac{(169.93)(3.6718)}{1\ 142\ 987.77} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[(169.93) + (145.80)(7.45)\right]\ 7.45}{2\ 262\ 599.5} \right] 2 = 3.067 \text{ cm.}$$

Finalmente, la relación M/V en la base de la cimentación vale: $\frac{M + VL'}{V} = \frac{(169.93) + (145.80)(7.45)}{145.8} = 8.61$ que es aproximadamente igual al valor supuesto de 8.60 con el que se calcularon las rigideces K_c y R_c de la cimentación en la dirección X.

En la tabla 13 se resumen los resultados obtenidos para las otras condiciones de carga y dirección de análisis, asimismo se comprueba el valor supuesto de M/V = 7.5 en la dirección Z.

TABLA 13 :— ANALISIS DINAMICO MODAL.
VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL E INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA.

CONCEPTO	COMBINACIONES DE CARGA I		II		III		IV		UNIDADES
	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	
$\frac{M+VL'}{V}$	8.60	7.50	8.60	7.50	8.60	7.50	8.60	7.50	m.(SUPUESTO)
m	106.881	110.872	107.428	108.282	105.501	112.891	96.818	92.848	Ton-seg²/m.
J	1341.359	80.864	1351.084	81.323	1302.094	79.762	1071.534	72.568	Ton-m.-seg²
ω_1	9.499	9.574	9.473	9.624	9.568	9.488	10.028	10.481	seg⁻¹
T_1	0.661	0.656	0.663	0.640	0.657	0.662	0.627	0.601	seg.
X_1/ϵ_1	13.401	13.988	13.398	13.981	13.428	13.991	13.577	13.980	m./rad.
C_1	0.070	0.071	0.070	0.071	0.070	0.071	0.069	0.071	Adim.
a_1	0.271	0.270	0.272	0.268	0.270	0.272	0.261	0.254	Adim.
a'_1	1.827	1.820	1.829	1.799	1.821	1.828	1.788	1.751	Adim.
Sa_1	1.468	1.465	1.469	1.446	1.465	1.469	1.437	1.421	m./seg²
V_1	145.607	160.703	146.460	151.544	143.666	164.031	130.969	131.451	Ton.
M_1	136.384	6.379	137.478	6.273	132.061	6.283	106.998	7.349	Ton.-m.
ω_2	29.944	106.775	29.658	106.488	30.376	107.603	35.576	112.730	seg⁻¹
T_2	0.210	0.059	0.211	0.059	0.207	0.058	0.188	0.056	seg.
X_2/ϵ_2	-0.937	-0.052	-0.939	-0.055	-0.919	-0.050	-0.817	-0.056	m./rad.
C_2	-0.070	-0.071	-0.070	-0.071	-0.070	-0.071	-0.069	-0.071	Adim.
a_2	0.139	0.095	0.140	0.095	0.139	0.095	0.133	0.094	Adim.
a'_2	1.262	1.074	1.263	1.074	1.259	1.073	1.239	1.070	Adim.
Sa_2	1.083	0.870	1.084	0.870	1.080	0.869	1.057	0.865	m./seg²
V_2	-7.562	-0.368	-7.626	-0.361	-7.298	-0.353	-5.794	-0.320	Ton.
M_2	101.334	5.011	102.160	5.042	97.089	4.936	78.668	4.471	Ton-m.
V	145.803	160.703	146.658	151.545	143.871	164.031	131.117	131.451	Ton.
M	169.909	9.763	171.280	9.774	164.460	9.844	132.803	8.802	Ton-m.
Δ	30.68	31.65	30.66	29.85	30.23	32.30	27.33	25.89	mm.
$\frac{M+VL'}{V}$	8.62	7.51	8.62	7.51	8.59	7.61	8.46	7.52	m.(OBTENIDO)

5.3 VOLADIZO CON MASA CONCENTRADA Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

Se analiza el péndulo invertido considerando la masa concentrada en el extremo superior de la columna, es decir, que no se toman en cuenta los efectos de la inercia rotacional de la masa y además en el extremo inferior se supone empotramiento perfecto.

Al no actuar el momento flexionante en el extremo superior, se tendrá unicamente un grado de libertad y la única rigidez que interviene es la que impone la columna al desplazamiento horizontal.

La ecuación de movimiento será para este caso :

$$m\ddot{x} + K\alpha = 0$$

pero el desplazamiento total del centro de rotación es

$x_1 = \alpha$ (ver figura 5.15)

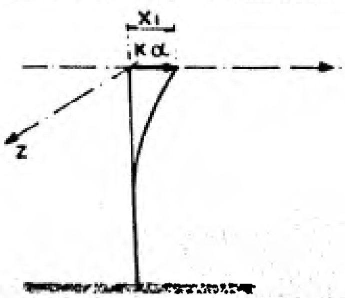


FIG. 5.15 — DESPLAZAMIENTO TOTAL.

por lo tanto :

$$m\ddot{x}_1 + Kx_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{m}x_1 = 0$$

por definición $\rho = \sqrt{\frac{K}{m}}$ es la frecuencia circular natural -- por traslación que en este caso es igual a la frecuencia circular natural de vibración (ω) por haber un solo grado de libertad . Entonces tenemos que :

$$\ddot{x}_1 = -\rho^2 x_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{--------------------} (5.49)$$

es la ecuación de movimiento armónico.

Por otro lado, si hacemos $J=0$ en la ecuación -- (5.13):

$$mJ\omega^4 - \frac{\omega^2}{K}(KJ + K_r m) + \frac{KK_r}{K} = 0$$

resulta :

$$-\frac{K_r m\omega^2}{K} + \frac{KK_r}{K} = 0$$

$$-m\omega^2 + K = 0$$

$\omega^2 = \frac{K}{m}$ y se comprueba que : $\omega = \rho$

El período valdrá : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Una vez conocido el período de vibración de la estructura, se pueden obtener las ordenadas del espectro de diseño y el factor de ductilidad reducido Q' correspondiente.

El valor de la fuerza cortante se determina partiendo de la definición de coeficiente sísmico c que presenta el artículo 234 del RCDF :

" Se entiende por coeficiente sísmico c, el cociente de la fuerza cortante horizontal en la base de la construcción, sin reducir por ductilidad y el peso W de la misma sobre dicho nivel ".

$$c = \frac{V}{W} \qquad \text{por lo tanto :} \qquad V = cW$$

Pero recordando que c y Q pueden reducirse a los valores a y Q' respectivamente por influencia del período de vibración T, obtenemos :

$$V = \frac{a}{Q'} = \frac{amg}{Q'} \quad \text{-------------------------} (5.50)$$

Las deformaciones se calculan igual que para los casos anteriores.

A continuación se presenta el desarrollo numérico de este método para la combinación de carga I y el sismo actuando en la dirección X.

DATOS : $m = 106.861$ Ton-seg^2/m.

$K = 71\ 198.70$ Ton/m.

$$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{71\ 198.70}{106.861} = 666.274 \text{ seg}^{-2}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.243$ seg. resulta $< T_1 = 0.8$ por lo tanto :

$$Q' = 1 + (Q-1)\frac{T}{T_1} = 1 + (2-1)\frac{0.243}{0.8} = 1.304$$

$$a = a_0 + (c-a_0)\frac{T}{T_1} = 0.078 + (0.312 - 0.078)\frac{0.243}{0.8} = 0.149$$

$$\frac{a}{Q'} = \frac{0.149}{1.304} = 0.114$$

La fuerza cortante para sismo vale :

$$V = \frac{a}{Q'}\, mg = (0.114)(106.861)(9.81) = 119.919 \text{ Ton.}$$

y la deformación es :

$$\Delta = \left(\frac{V}{K}\right) Q = \left(\frac{119.919}{71\ 198.70}\right) 2 = 0.00337 \text{ m.}$$

$\Delta = 0.337$ cm.

La tabla 14 nos muestra los análisis para las demás combinaciones de carga.

TABLA 14 :— ANALISIS DINAMICO MODAL.
VOLADIZO CON MASA CONCENTRADA Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

CONCEPTO	COMBINACIONES DE CARGA.								UNIDADES
	I		II		III		IV		
	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	
m	108.881	110.872	107.428	105.282	105.501	112.891	96.816	92.848	Ton-seg^2/m
ω	25.812	24.868	25.744	25.640	25.978	24.684	27.148	27.196	seg^{-1}
t	0.243	0.252	0.244	0.246	0.242	0.255	0.231	0.231	seg.
a	0.149	0.152	0.149	0.150	0.149	0.153	0.146	0.148	Adim.
a'	1.304	1.318	1.305	1.308	1.302	1.318	1.289	1.289	Adim.
V	119.919	125.538	120.833	118.464	118.208	128.109	107.107	102.882	Ton.
Δ	3.37	3.66	3.39	3.46	3.32	3.73	3.01	3.00	mm.

5.4 SOLUCION NUMERICA PARA EL ANALISIS ESTATICO .

Para el cálculo de los efectos sísmicos por el método Estático descrito en el capítulo anterior, será necesario recordar los valores de la masa e inercia rotacional para cada combinación de carga en ambas direcciones (tabla 10) y las rigideces de la columna (tabla 11) descritos en el Capítulo 3, así como los valores característicos del espectro de diseño (figura 4.1).

Combinación de carga 1, dirección transversal (X).

Fuerza cortante y momento flexionante iniciales : $V_{\hat{0}}$, $M_{\hat{0}}$

$$V_{\hat{0}} = \frac{cmg}{Q} = \frac{(0.312)(106.861)(9.81)}{2} = 163.536 \text{ Ton.}$$

$$\theta_0 = V_{\hat{0}}\, Y = (163.536)(3.2125)(10)^{-6} = 0.0005 \text{ rad.}$$

$$\delta_0 = \frac{V_{\hat{0}}}{K} = \frac{163.536}{71\ 198.7} = 0.0023 \text{ m.}$$

$$r_0^2 = \frac{J}{m}$$

$$M_{\hat{0}} = \frac{1.5\ V_{\hat{0}}\, r_0^2\, \theta_0}{\delta_0} = \frac{(1.5)(163.536)(1341.359)(0.0005)}{(106.861)(0.0023)} = 704.279 \text{ Ton-m}$$

Período fundamental de la estructura :

$$T = 6.3\sqrt{\frac{m\delta_1^2 + J\theta_1^2}{V_{\hat{0}}\,\delta_1 + M_{\hat{0}}\,\theta_1}}$$

$$\theta_1 = V\hat{0}\gamma + \frac{M\hat{0}}{K_r} = (163.536)(3.2125)(10)^{-6} + \frac{704.279}{1\ 142\ 987.77} = 0.0011 \text{ rad.}$$

$$\delta_1 = \frac{V\hat{0}}{K} + M\hat{0}\gamma = \frac{163.536}{71\ 198.7} + (704.279)(3.2125)(10)^{-6} = 0.0046 \text{ m.}$$

$$T = 6.3 \sqrt{\frac{(106.861)(0.0046)^2 + (1341.359)(0.0011)^2}{(106.861)(0.0046) + (\ 704.279)(0.0011)}} = 0.3188 \text{ seg.}$$

$T = 0.3188$ seg. $<$ $T_1 = 0.8$ seg.

Dado que el período fundamental $T < T_1$, la respuesta sísmica-será la correspondiente al caso d); por lo tanto :

$$a = a_0 + (c - a_0)\ \frac{T}{T_1} = 0.078 + (0.312 - 0.078)\ \frac{0.3188}{0.8} = 0.1713$$

$$Q' = 1 + (Q-1)\ \frac{T}{T_1} = 1 + (2-1)\ \frac{0.3188}{0.8} = 1.3985$$

La fuerza cortante aplicada en el extremo superior de la columna valdrá :

$$V = \frac{amg}{Q'} = \frac{(0.1713)(106.861)(9.81)}{1.3985} = 128.367 \text{ Ton.}$$

El giro y el desplazamiento producidos por esta fuerza cor--tante en el extremo superior de la columna valdrán respectivamente :

$$\theta = V\gamma = (128.367)(3.2125)(10)^{-6} = 0.0004 \text{ rad.}$$

$$\delta = \frac{V}{K} = \frac{128.367}{71\ 198.7} = 0.0018 \text{ m.}$$

Finalmente, el momento flexionante será :

$$M = \frac{1.5\ V\ r_0^2\theta}{\delta} = \frac{1.5\ V\theta J}{m\delta} = \frac{(1.5)(128.367)(0.0004)(1341.359)}{(106.861)(0.0018)} =$$

M = 552.824 Ton-m.

Cálculo de deformaciones :

$$\Delta = \left(\frac{V}{K} + M\gamma\right)Q = \left(\frac{128.367}{71\ 198.7} + (552.824)(3.2125)(10)^{-6}\right)2 =$$

Δ = 0.00716 m.

A continuación se presenta el resumen del cálculo, así como los valores obtenidos de manera análoga para la dirección longitudinal y para las combinaciones de carga II, III y IV.

TABLA 15.— ANALISIS ESTATICO.

CONCEPTO	COMBINACIONES DE CARGA.								UNIDADES
	I		II		III		IV		
	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	SISMO X	SISMO Z	
m.	106.861	110.872	107.428	106.282	105.501	112.891	98.616	92.848	Ton.-seg^2/m
J	1341.359	60.864	1351.084	81.323	1302.094	79.762	1071.334	72.568	Ton-m.-seg^2
V_o	163.536	169.674	164.404	161.119	161.458	172.764	147.887	142.088	Ton.
θ_o	0.0005	0.0008	0.0005	0.0008	0.0005	0.0006	0.0005	0.0005	rad.
δ_o	0.0023	0.0026	0.0023	0.0024	0.0023	0.0026	0.0021	0.0021	m.
M_o	704.279	46.687	709.386	46.947	683.663	45.066	562.608	40.998	Ton-m.
θ_1	0.0011	0.0007	0.0012	0.0006	0.0011	0.0007	0.0097	0.0006	rad.
δ_1	0.0046	0.0026	0.0046	0.0025	0.0045	0.0027	0.0039	0.0022	m.
T	0.3188	0.2587	0.3198	0.2624	0.3157	0.2609	0.2985	0.2371	seg. $< T_1$
a	0.1713	0.1637	0.1716	0.1518	0.1703	0.1643	0.1644	0.1474	Adim.
Q'	1.3985	1.3234	1.3998	1.3156	1.3946	1.3261	1.3693	1.2984	Adim.
V	128.367	126.301	129.163	119.206	126.408	128.867	113.810	103.530	Ton.
θ	0.0004	0.0006	0.0004	0.0004	0.0004	0.0006	0.0037	0.0004	rad.
δ	0.0018	0.0018	0.0018	0.0017	0.0018	0.0019	0.0016	0.0016	m.
M	552.824	34.008	557.285	33.994	536.266	33.614	483.064	29.873	Ton-m.
Δ	7.16	3.92	7.21	3.72	6.99	3.99	5.98	3.23	mm.

CAPITULO 6

COMPARACION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

6.1 COMPARACION DE RESULTADOS.

En este capítulo se comparan los resultados obtenidos de cada uno de los análisis sísmicos desarrollados, con el objeto de determinar el más conveniente para el diseño de la estructura. Esta comparación en porcentajes, tomando como base el análisis estático, se hace en tres niveles que son : corona de la columna, base de la columna y base de la zapata (tablas 16, 17 y 18 respectivamente).

Puede observarse que el valor de la fuerza horizontal V se mantiene constante en cualquier nivel, siendo el más desfavorable el correspondiente al análisis considerando la interacción suelo-estructura. Este resulta mayor que el estático en 14% y 27% según las direcciones transversal y longitudinal respectivamente.

En la corona de la columna el momento más crítico es el que corresponde al análisis estático; sin embargo, a partir de la base de la columna se observa que en dirección longitudinal, el momento mayor pertenece al análisis con interacción debido al incremento producido por la fuerza horizontal que actúa en el extremo superior. En la otra dirección, el momento que rige en todos los niveles es el está tico siendo éste un valor conservador ya que se trata de un método simplificado.

El voladizo con masa concentrada y suelo infinitamente rígido nos da resultados similares (a partir de la base de la columna) a los que se obtienen al considerar la inercia rotacional de la trabe; sin embargo, este modelo se analizó únicamente para conocer la magnitud de la fuerza cortante y los efectos de ésta, ya que el R.C.D.F. no permite analizar péndulos invertidos sin considerar el efecto de la inercia rotacional. Este tipo de modelo es el que se emplea en especificaciones japonesas y americanas (refs. 9 y 10).

La superposición de efectos para obtener los elementos mecánicos de diseño se realizará según el criterio de análisis que determina el artículo 237 del R.C.D.F. y dice textualmente :

"*Las estructuras se analizarán bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales del movimiento del terreno. Los efectos correspondientes (desplazamientos y fuerzas internas) se combinarán con los de las fuerzas gravitacionales. En péndulos invertidos, la combinación en cada sección crítica se efectuará sumando vectorialmente los efectos gravitacionales, los de un componente del movimiento del terreno y 50% de los efectos del otro. En todos los casos se supondrá la más desfavorable de dichas combinaciones, asig--*

nando a los efectos sísmicos el signo más desfavorable".

En la tabla 19 se muestra la superposición de momentos en la base de la columna. El porcentaje que aparece se obtiene con la siguiente expresión :

$$\% = \frac{\left(\frac{M_x}{2.4} + \frac{M_z}{2.2} \right) 100}{\frac{M_{xE}}{2.4} + \frac{M_{zE}}{2.2}}$$

Donde los valores 2.4 y 2.2 corresponden a la dimensión en metros, de la columna en la dirección longitudinal y transversal respectivamente.

De esta tabla podemos deducir que en la dirección longitudinal los efectos producidos al considerar la interacción, son ligeramente superiores a los estáticos y aproximadamente 29% mayores que los otros dos análisis dinámicos, por lo cual sigue siendo el más crítico. En la dirección transversal, los resultados de la interacción son de 10% a 15% menores que los estáticos.

La comparación gráfica de diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes para cualquier combinación de carga (en este caso usamos la combinación tipo II), ilustra más claramente los efectos que la interacción dinámica suelo-estructura induce en la estructura analizada (figs.6.1). Ob-

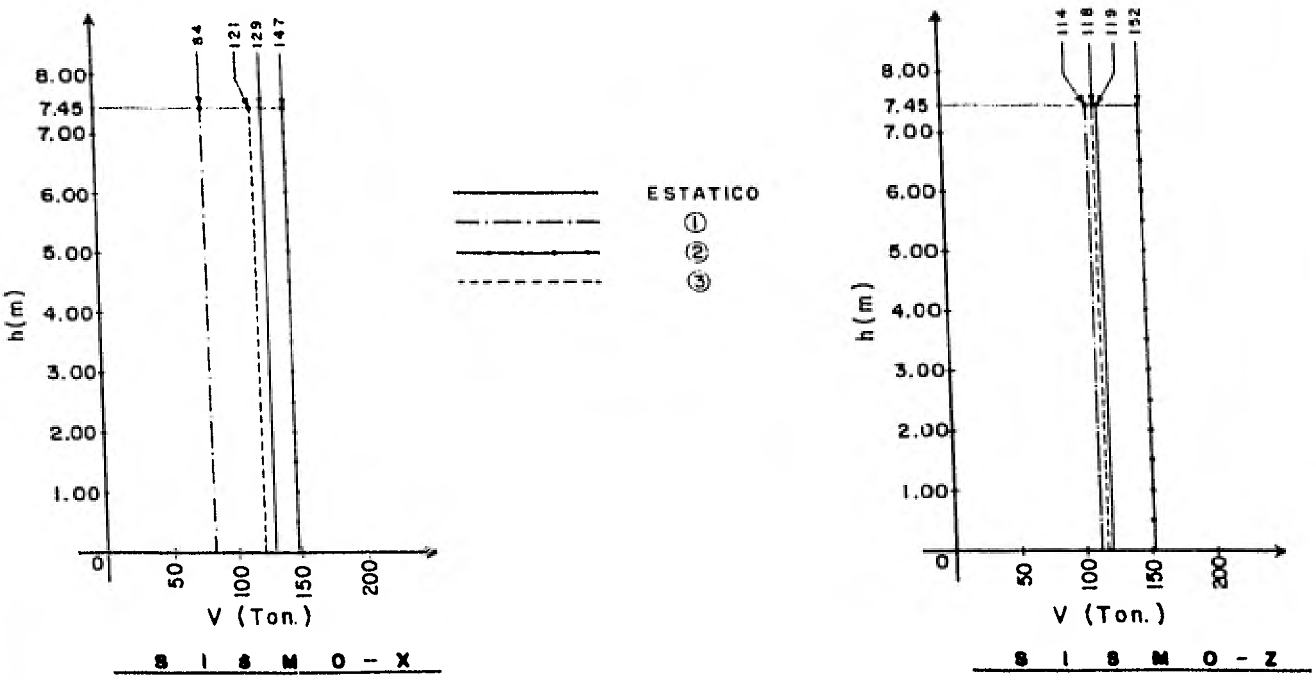


FIG. 6.1 a – DIAGRAMAS DE FUERZAS CORTANTES PARA LA CONDICION DE CARGA TIPO II

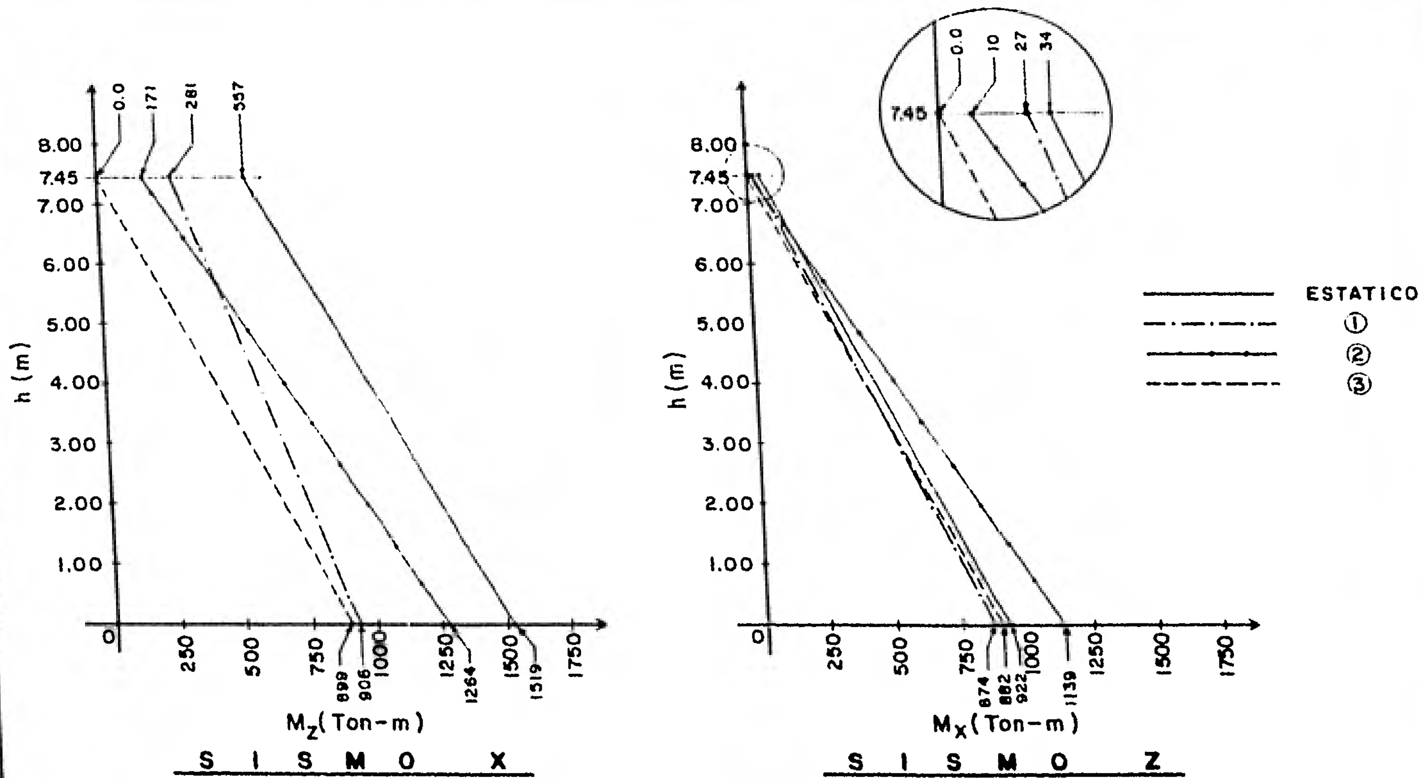


FIG. 6.1 b - DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLEXIONANTES PARA LA CONDICION DE CARGA TIPO II

sérvese que la fuerza cortante obtenida con el modelo de interacción dinámica es más grande inclusive que la calculada con el análisis estático, en las dos direcciones de análisis. En lo que respecta a los momentos flexionantes, para el sismo en la dirección transversal (Mz) los valores del modelo de interacción dinámica resultan únicamente menores que el análisis estático; pero, para la otra dirección (Mx) los valores de dicho modelo resultan más desfavorables.

Los desplazamientos finales que resultan en la corona de la columna son mucho más críticos (diez veces mayores aproximadamente) en el modelo de interacción dinámica, que en los otros dos modelos dinámicos y en el estático. Esto se debe principalmente a la consideración de giros y desplazamientos en la cimentación de la estructura (fig. 6.2).

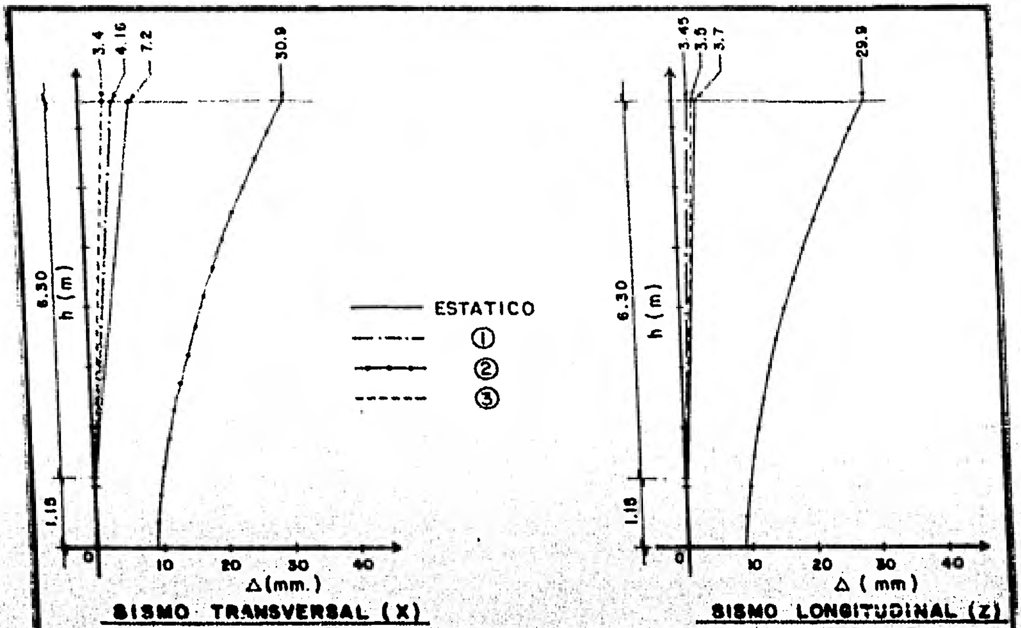


FIG. 6.2 – DESPLAZAMIENTOS FINALES.

TABLA 16.- ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CARGAS DEL SISMO SEGUN EL MODELO ANALIZADO.

COMBINACIONES DE CARGA		MODELO ANALIZADO		ELEMENTOS MECANICOS EN LA CORONA DE LA COLUMNA. V (Ton.)	%	M (Ton-m.)	%
TIPO I	SISMO-X	ESTATICO		128.367	100	552.824	100
		DINAMICO	1	83.384	65.0	279.460	50.6
			2	145.803	113.6	169.909	30.7
			3	119.919	93.4	0.00	0.0
	SISMO-Z	ESTATICO		126.301	100	34.008	100
		DINAMICO	1	120.818	95.7	26.991	79.4
			2	160.703	127.2	9.783	28.7
			3	125.538	99.4	0.00	0.0
TIPO II	SISMO-X	ESTATICO		129.153	100	557.285	100
		DINAMICO	1	83.851	64.9	281.438	50.5
			2	146.658	113.6	171.280	30.7
			3	120.533	93.4	0.00	0.0
	SISMO-Z	ESTATICO		119.206	100	33.994	100
		DINAMICO	1	113.742	95.4	26.984	79.4
			2	151.045	127.1	9.774	28.8
			3	118.454	99.4	0.00	0.0
TIPO III	SISMO-X	ESTATICO		126.408	100	535.285	100
		DINAMICO	1	82.427	65.2	272.843	50.9
			2	143.871	113.8	164.460	30.7
			3	118.208	93.5	0.00	0.0
	SISMO-Z	ESTATICO		128.867	100	33.614	100
		DINAMICO	1	123.440	95.8	26.883	79.4
			2	164.031	127.3	9.644	28.7
			3	128.109	99.4	0.00	0.0
TIPO IV	SISMO-X	ESTATICO		113.810	100	433.054	100
		DINAMICO	1	76.090	66.9	231.053	53.4
			2	131.117	115.2	132.803	30.7
			3	107.107	94.1	0.00	0.0
	SISMO-Z	ESTATICO		103.530	100	29.073	100
		DINAMICO	1	98.734	95.4	23.601	79.7
			2	131.451	127.0	8.602	28.8
			3	102.882	99.4	0.00	0.0

1 .- VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.
2 .- VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL E INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA.
3 .- VOLADIZO CON MASA CONCENTRADA Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

TABLA 17.- ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CARGAS DEL SISMO SEGUN EL MODELO ANALIZADO.

COMBINACIONES DE CARGA		MODELO ANALIZADO			ELEMENTOS MECANICOS EN LA BASE DE LA COLUMNA.			
					V (Ton.)	%	M (Ton.-m.)	%
TIPO I	SISMO-X	ESTATICO			128.367	100	1258.843	100
		DINAMICO	1		83.384	65.0	738.072	58.6
			2		145.803	113.6	971.826	77.2
			3		119.919	93.4	659.555	52.4
	SISMO-Z	ESTATICO			126.301	100	728.884	100
		DINAMICO	1		120.818	95.7	691.490	94.9
			2		160.703	127.2	893.630	122.6
			3		126.538	99.4	690.459	94.8
TIPO II	SISMO-X	ESTATICO			129.153	100	1267.627	100
		DINAMICO	1		83.851	64.9	742.619	58.6
			2		146.658	113.6	977.899	77.1
			3		120.633	93.4	663.482	52.3
	SISMO-Z	ESTATICO			119.206	100	689.627	100
		DINAMICO	1		113.742	95.4	652.565	94.6
			2		151.645	127.1	843.272	122.3
			3		118.464	99.4	651.497	94.5
TIPO III	SISMO-X	ESTATICO			126.408	100	1230.509	100
		DINAMICO	1		82.427	65.2	726.992	59.0
			2		143.871	113.8	955.751	77.7
			3		118.208	93.5	650.144	52.8
	SISMO-Z	ESTATICO			128.867	100	742.383	100
		DINAMICO	1		123.440	95.8	705.603	95.0
			2		164.031	127.3	911.615	122.8
			3		128.109	99.4	704.600	94.9
TIPO IV	SISMO-X	ESTATICO			113.810	100	1059.009	100
		DINAMICO	1		76.090	66.9	649.548	61.3
			2		131.117	115.2	853.947	80.6
			3		107.107	94.1	589.089	55.6
	SISMO-Z	ESTATICO			103.530	100	599.288	100
		DINAMICO	1		98.734	95.4	566.838	94.6
			2		131.451	127.0	731.583	122.1
			3		102.882	99.4	565.851	94.4

1.- VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

2.- VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL E INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA.

3.- VOLADIZO CON MASA CONCENTRADA Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

TABLA 18.– ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CARGAS DEL SISMO SEGUN EL MODELO ANALIZADO.

COMBINACIONES DE CARGA		MODELO ANALIZADO		ELEMENTOS MECANICOS EN LA BASE DE LA ZAPATA. V (Ton.)	%	M (Ton.– m.)	%
TIPO I	SISMO-X	ESTATICO		128.367	100	1509.168	100
		DINAMICO	1	83.384	65.0	900.671	59.7
			2	145.803	113.6	1256.141	83.2
			3	119.919	93.4	893.397	59.2
	SISMO-Z	ESTATICO		126.301	100	974.950	100
		DINAMICO	1	120.818	95.7	927.085	95.1
			2	160.703	127.2	1207.000	123.8
			3	125.538	99.4	935.258	95.9
TIPO II	SISMO-X	ESTATICO		129.153	100	1519.475	100
		DINAMICO	1	83.851	64.9	906.128	59.6
			2	146.658	113.6	1263.882	83.2
			3	120.633	93.4	898.718	59.1
	SISMO-Z	ESTATICO		119.206	100	922.079	100
		DINAMICO	1	113.742	95.4	874.362	94.8
			2	151.545	127.1	1138.784	123.5
			3	118.454	99.4	882.482	95.7
TIPO III	SISMO-X	ESTATICO		126.408	100	1477.006	100
		DINAMICO	1	82.427	65.2	886.724	60.0
			2	143.871	113.8	1236.299	83.7
			3	118.208	93.5	880.880	59.6
	SISMO-Z	ESTATICO		128.867	100	993.673	100
		DINAMICO	1	123.440	95.8	946.311	95.2
			2	164.031	127.3	1231.675	123.9
			3	128.109	99.4	954.412	96.0
TIPO IV	SISMO-X	ESTATICO		113.810	100	1280.939	100
		DINAMICO	1	76.090	66.9	797.924	62.3
			2	131.117	115.2	1109.628	86.6
			3	107.107	94.1	797.947	62.3
	SISMO-Z	ESTATICO		103.530	100	801.172	100
		DINAMICO	1	98.734	95.4	759.369	94.8
			2	131.481	127.0	987.912	123.3
			3	102.882	99.4	766.471	95.7

1.– VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

2.– VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL E INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA.

3.– VOLADIZO CON MASA CONCENTRADA Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

TABLA 19.– SUPERPOSICION DE EFECTOS.

MOMENTOS EN LA BASE DE LA COLUMNA									
	MODELO ANALIZADO			SISMO X + 0.5 SISMO Z			0.5 SISMO X + SISMO Z		
				M_x (Ton.–m.)	M_z (Ton.–m.)	%	M_x (Ton.–m.)	M_z (Ton.–m.)	%
COMBINACIONES DE CARGA	TIPO I	ESTATICO		364.332	1258.843	100	728.684	829.422	100
		DINAMICO	1	345.745	738.072	66.2	691.490	369.036	77.3
			2	446.815	971.826	88.7	893.630	485.913	100.6
			3	345.230	659.555	61.3	690.459	329.778	74.2
	TIPO II	ESTATICO		344.814	1267.627	100	689.627	633.814	100
		DINAMICO	1	326.283	742.619	65.8	652.565	371.310	76.6
			2	421.636	977.899	86.2	843.272	488.980	99.7
			3	325.749	663.482	60.7	651.497	331.741	73.4
	TIPO III	ESTATICO		371.192	1230.509	100	742.363	615.255	100
		DINAMICO	1	352.802	725.992	66.6	705.603	362.998	77.9
			2	455.908	955.751	87.5	911.815	477.876	101.4
			3	352.300	650.144	61.9	704.600	326.072	74.9
	TIPO IV	ESTATICO		299.644	1059.009	100	599.288	529.505	100
		DINAMICO	1	283.419	649.848	68.2	566.838	324.774	78.3
			2	365.792	853.947	89.2	731.583	426.974	101.7
			3	282.926	589.089	63.6	565.851	294.845	75.4

1.– VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

2.– VOLADIZO CON INERCIA ROTACIONAL E INTERACCION SUELO–ESTRUCTURA.

3.– VOLADIZO CON MASA CONCENTRADA Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

Como se ve en las tablas anteriores, numéricamente el análisis estático da resultados ligeramente mayores en relación a los dinámicos que consideran la inercia rotacional de la trabe.

Por otro lado, si se hace una comparación entre los valores obtenidos en las tablas 12 y 13, que representan propiamente el análisis de cada uno de los modelos dinámicos, se observa que el considerar los efectos de la interacción es sumamente importante por los siguientes aspectos:

Los valores del período fundamental para el caso de suelo infinitamente rígido, oscilan entre 0.24 y 0.32 seg. dependiendo éstos de la combinación de carga, lo que conduce a ordenadas espectrales de aceleración obtenidas del espectro de diseño, del orden de $\frac{a_1}{Q_1'} = 0.12$ g .

Al tomar en cuenta la interacción dinámica suelo-estructura, los períodos del primer modo aumentan a valores que oscilan entre 0.6 y 0.66 seg. y las ordenadas espectrales a $\frac{a_1}{Q_1'} = 0.15$ g. Esto se debe a que dadas las secciones de la estructura, ésta es bastante rígida, por lo que cae en la rama ascendente del espectro de diseño para la cual corresponden valores de aceleración mayores a medida que se incrementan los períodos, de manera que hay razones para sobrestimar las aceleraciones espectrales en el rango de períodos naturales muy cortos, por ejemplo :

En el análisis de las propiedades de la columna, el momento de inercia se calculó tomando en cuenta toda la sección ya que trabajará en flexocompresión, pero pudiera presentarse el caso en que se comportara como sección agrietada sobre todo para temblores posteriores al primero, por lo cuál se reduciría su rigidez y en consecuencia, se incrementarían sus períodos naturales.

Por otro lado, existen modelos matemáticos que representan la interacción dinámica suelo-cimentación con los cuales se determina el comportamiento dinámico del sistema constituído por un bloque rígido (cimentación) y la masa del suelo idealizando a este último como un medio elástico, homogéneo, isótropo y semi-infinito; sin embargo, en la práctica no son de fácil aplicación ya que los parámetros que intervienen en dichos modelos están basados en estudios experimentales y es difícil adaptarlos a problemas específicos (ref.11).

Con el objeto de tener un conocimiento adecuado de la respuesta dinámica de la estructura elevada del Metro, el Instituto de Ingeniería de la UNAM realizó pruebas de vibración forzada para obtener las mediciones necesarias y así determinar el período asociado al modo fundamental de vibración. Estas pruebas consistieron básicamente en aplicar una fuerza al nivel de desplante de la columna (lecho superior del dado) que se libera súbitamente provocando la vibración de la estructura y registrandose así la aceleración asociada al movimiento (ref.12). Los valores de los períodos de vibración obtenidos por el Instituto de Ingeniería, oscilan entre 0.17 y 0.21 seg. Las dimensiones generales de las estructuras estudiadas se presentan en la figura 6.3, siendo éstas columnas de estación.

Los análisis que se presentan a continuación están basados en los datos geométricos de las mencionadas columnas de estación y se realizaron con el fín de comparar los valores obtenidos por el Instituto de Ingeniería con los valores calculados empleando los modelos descritos en el capítulo 5. Se analizaron tres modelos matemáticos considerando en dos de ellos, únicamente la masa de media columna concentrada en su centro de rotación C.R. y despreciando los efectos de la inercia rotacional; el otro modelo se discretizó mediante masas que representan segmentos de columna, en toda su longitud. Los valores de las propiedades elásticas de la columna y cimentación se obtuvieron de la misma manera que en los capítulos anteriores.

A) Masa de la columna concentrada en su centro de rotación y suelo infinitamente rígido (fig.6.4).

Pesos tributarios de columna y recubrimiento.

W_{TC} = 74.07 ton.

W_{TR} = 6.41 ton.

W_{TT} = 80.48 ton.

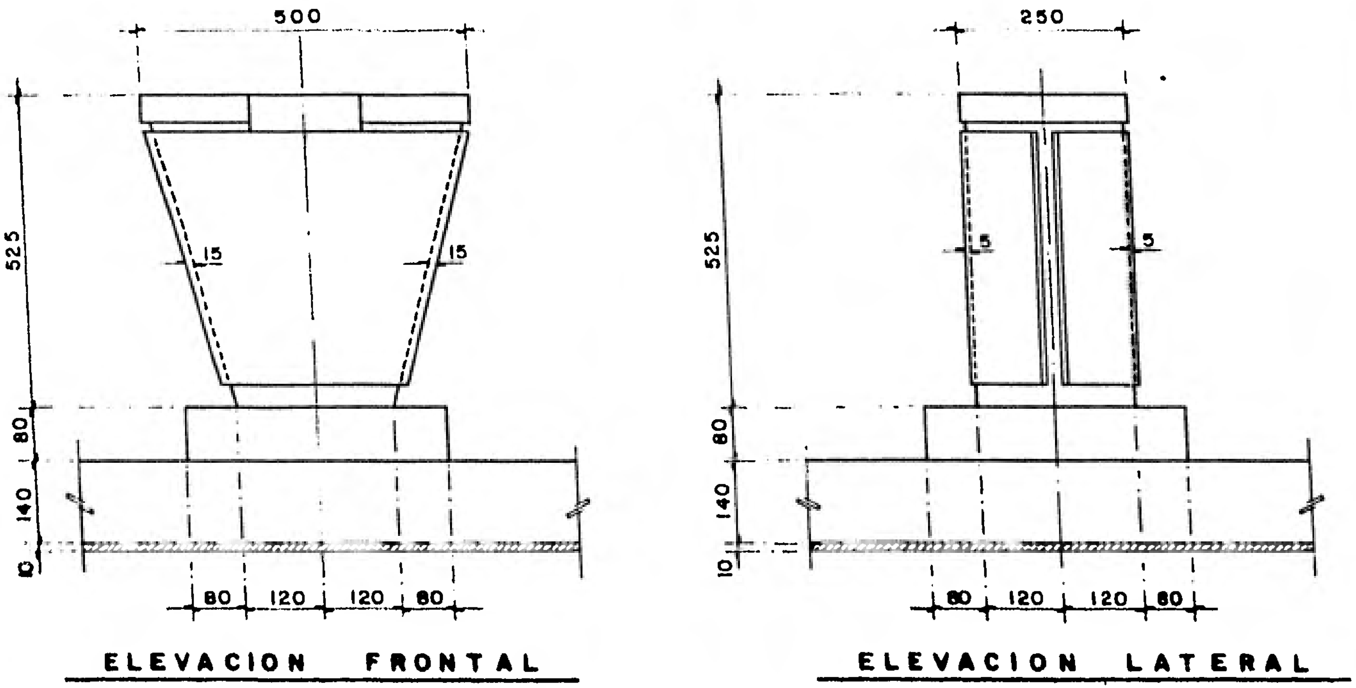
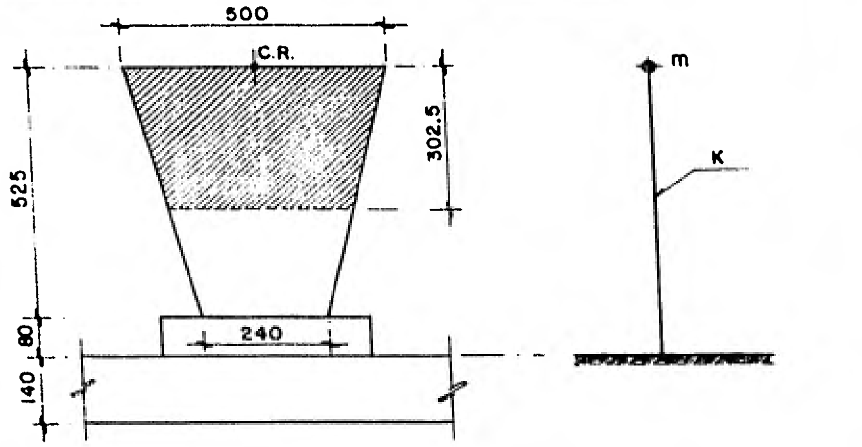


FIG. 6.3 — DIMENSIONES DE LAS COLUMNAS DE ESTACION ANALIZADAS POR EL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM.



ESTRUCTURA IDEALIZACION

FIG. 6.4

La masa y la rigidez de la columna valen:

$m = 8.204$ ton-seg²/m.

$K = (1.19605)(10)^5$ ton/m.

la frecuencia y el período son :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{(1.19605)(10)^5}{8.204} = 120.74 \text{ seg}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.052 \text{ seg.}$$

B) Columna discretizada en una serie de masas concentradas y suelo infinitamente rígido (fig.6.5).

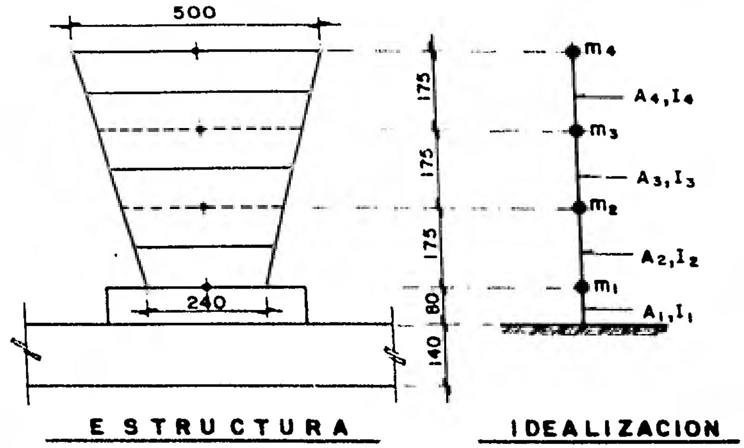


FIG. 6.5

Por tratarse de una sola columna, la estructura trabajará esencialmente a flexión y para este caso, las propiedades elastogeométricas no quedarán definidas por rigideces de entrepiso, sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente (ref.13).

Para calcular las deformaciones por flexión, es conveniente emplear los teoremas de la viga conjugada, que es para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama M/EI y en el cuál los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones -

de la viga real.

Las deformaciones por cortante se calculan con la - siguiente expresión:

$$\Delta X_{V_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G} \qquad \text{en donde :}$$

ΔX_{V_i} = Incremento de deformación por cortante entre dos niveles consecutivos.

V_i, h_i y A_i = Fuerza cortante, altura y área efectiva de cortante entre esos mismos niveles.

G = Módulo de elasticidad al cortante del material de la- estructura.

El método para calcular la frecuencia de vibración- de la estructura consiste en lo siguiente :

a).- se supone una configuración modal (Xsup.)

b).- se calculan las fuerzas de inercia: $F_i = m_i \omega^2 X_i$

c).- se obtienen las fuerzas cortantes correspondientes a -- cada nivel (V_i).

d).- se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso- ($\Delta M = Vh$).

e).- se obtienen los momentos de volteo acumulados de arriba a abajo y se dividen entre EI. Si existe cambio de sección habrá dos valores de M/EI en un mismo nivel.

f).- La integración numérica del diagrama M/EI nos permite - transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles-(Peq). Estas cargas se pueden obtener aplicando las siguientes fórmulas :

$$Pa = \frac{h}{6}\,(2a + b)$$

$$Pb = \frac{h}{6}\,(2b + a)$$

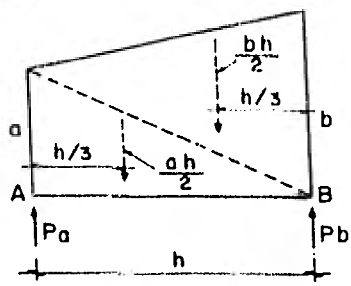


FIG. 6.6

Donde :

h = distancia entre dos puntos A y B con ordenadas M/EI iguales a a y b respectivamente (ref. 14).

g).- se calculan las fuerzas cortantes equivalentes comenzando de abajo hacia arriba ya que el empotramiento de la viga conjugada es el extremo superior (Veq).

h).- se valúan los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión ($\Delta M = Veq \cdot h = \Delta X_f$).

i).- se calculan las deformaciones por cortante (ΔX_v).

j).- se suman las deformaciones por flexión y por cortante - (ΔX_{tot}).

k).- se obtiene la nueva configuración (Xcal).

l).- la frecuencia se obtiene al igualar las dos configuraciones (Xsup y Xcal) y despejar ω^2.

$$\omega = \sqrt{\frac{Xsup}{Coef.\ de\ Xcal.}}$$

m).- si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa debe ser la misma; por lo tanto, si no son iguales dichos valores se efectuará otro ciclo tomando como configuración de partida, la encontrada en la iteración (Xcal) normalizandola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones en cada ciclo.

n).- el valor final de ω^2 se obtiene con más precisión dividiendo la suma de Xsup entre la suma de Xcal.

La secuencia de análisis se presenta en la tabla 20 en donde :

$E = 10\ 000\sqrt{f'_c} = (1.581)(10)^6$ ton/m^2

$G = 0.4E = (6.325)(10)^5$ ton/m^2

$f'_c = 250$ kg/cm^2

De acuerdo con el inciso l) y tomando valores de la tabla anterior obtenemos la frecuencia que vale :

$$\omega = \sqrt{\frac{\Sigma Xsup}{\Sigma Coef.\ de\ Xcal}} = \sqrt{\frac{0.2839}{(1.447)(10)^{-5}}} = 140.1\ seg^{-1}$$

y el período de vibración es :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.045\ seg.$$

TABLA 20 — COLUMNA DISCRETIZADA EN UNA SERIE DE MASAS CONCENTRADAS Y SUELO INFINITAMENTE RIGIDO.

NIVEL	m $\left(\frac{Ton-seg^2}{cm}\right)$	I (m^4)	EI $(Ton-m^2)$	A (m^2)	AG (Ton)	h (m)	X_{sup} (cm)	Fi $mX_{sup}\,\omega^2$	Vi (Ton)	$\Delta M = V \cdot h$ (Ton-m)	M (Ton-m)	M / EI (1/m)
									0.00			
4	0.025	25.0	39.53×10^6	12.0	7.59×10^6	1.75	13.41	$0.335\,\omega^2$			0.00	0.00
									$0.335\,\omega^2$	$0.586\omega^2$		$1.482 \times 10^{-8}\,\omega^2$
3	0.043	14.12	22.33×10^6	9.92	6.27×10^6	1.75	9.18	$0.395\,\omega^2$			$0.586\,\omega^2$	
									$0.730\,\omega^2$	$1.278\omega^2$		$2.624 \times 10^{-8}\,\omega^2$
2	0.034	6.97	11.02×10^6	7.84	4.96×10^6	1.75	4.80	$0.163\,\omega^2$			$1.864\,\omega^2$	$8.348 \times 10^{-8}\,\omega^2$
									$0.893\,\omega^2$	$1.563\,\omega^2$		$1.691 \times 10^{-7}\,\omega^2$
1	0.029	2.77	4.38×10^6	5.76	3.64×10^6	0.80	1	$0.029\,\omega^2$			$3.427\,\omega^2$	$3.110 \times 10^{-7}\,\omega^2$
									$0.922\,\omega^2$	$0.738\omega^2$		$7.824 \times 10^{-7}\,\omega^2$
0							0				$4.165\,\omega^2$	$9.509 \times 10^{-7}\,\omega^2$
Σ							28.39					

TABLA 20.— (CONTINUACION).

NIVEL	P eq. (adim.)	V eq. (adim.)	$\Delta M = V_{eq} \cdot h = \Delta X_f$ (m)	ΔX_v (m)	$\Delta X_{tot.}$ (m)	$X_{cal.}$ (m)	ω^2 (seg^{-2})	ω (seg^{-1})
4	$4.323 \times 10^{-9} \omega^2$					$6.882 \times 10^{-6} \omega^2$	19 486	139.60
3	$8.645 \times 10^{-9} \omega^2$	$1.218 \times 10^{-6} \omega^2$	$2.132 \times 10^{-6} \omega^2$	$7.721 \times 10^{-8} \omega^2$	$2.209 \times 10^{-6} \omega^2$	$4.673 \times 10^{-6} \omega^2$	19 645	140.16
2	$3.966 \times 10^{-8} \omega^2$ $5.635 \times 10^{-8} \omega^2$	$1.170 \times 10^{-6} \omega^2$	$2.048 \times 10^{-6} \omega^2$	$2.038 \times 10^{-7} \omega^2$	$2.252 \times 10^{-6} \omega^2$	$2.421 \times 10^{-6} \omega^2$	19 827	140.8
1	$1.894 \times 10^{-7} \omega^2$ $2.307 \times 10^{-7} \omega^2$	$9.240 \times 10^{-7} \omega^2$	$1.617 \times 10^{-6} \omega^2$	$3.151 \times 10^{-7} \omega^2$	$1.932 \times 10^{-6} \omega^2$	$4.89 \times 10^{-7} \omega^2$	20 450	143.0
0	$3.354 \times 10^{-7} \omega^2$ $3.579 \times 10^{-7} \omega^2$	$3.579 \times 10^{-7} \omega^2$	$2.863 \times 10^{-7} \omega^2$	$2.027 \times 10^{-7} \omega^2$	$4.890 \times 10^{-7} \omega^2$			
Σ						$1.447 \times 10^{-5} \omega^2$	19 626.69	140.10

C) Masa de la columna concentrada en su centro de rotación e interacción suelo-estructura (fig.6.7).

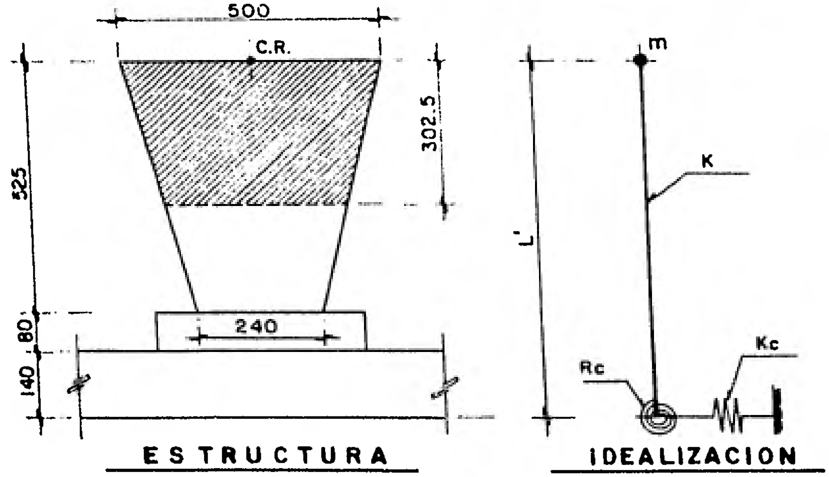


FIG. 6.7

De la ecuación (5.33) :

$$\omega^4 + \omega^2 \left[\frac{mB + JA}{mJ(C-AB)} \right] - \frac{1}{mJ(C-AB)} = 0 \text{ ----------- } (5.33)$$

se obtiene, multiplicando por J y reduciendo :

$$J\omega^4 + \frac{B\omega^2}{(C-AB)} + \frac{J\omega^2 A}{m(C-AB)} - \frac{1}{m(C-AB)} = 0$$

Al no tomar en cuenta la inercia rotacional, el valor de J - vale cero y simplificando obtenemos la frecuencia que vale :

$\omega = \sqrt{\frac{1}{mB}}$ en donde :

$$B = \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K} + \frac{L'^2}{R_c}$$

Si $m = 8.204$ ton-seg^2/m.

$K = (1.19605)(10)^5$ ton/m.

$K_c = 21\ 245.64$ ton/m.

$R_c = 3\ 331\ 692.5$ ton-m/rad.

$L' = 7.45$ m.

sustituyendo valores :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{(8.204)(7.2088)(10)^{-5}}} = 41.12 \text{ seg}^{-1}$$

y el período es :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.153 \text{ seg.}$$

Este valor es comparable con el obtenido por el -- Instituto de Ingeniería en la columna CC-34 de la estación- "Canal del Norte" (T = 0.17 seg.).

6.2 CONCLUSIONES.

1.- La estructura del Metro Elevado es vulnerable a los -- sismos por estar apoyada en una sola columna que con-- tiene más del 50% de la masa en el extremo superior y- basta la formación de una sola articulación plástica - para producir el colapso.

2.- Por sus dimensiones , es una estructura rígida y por - estar desplantada en un suelo compresible, puede pre-- sentarse interacción suelo-estructura importante.

3.- De acuerdo con la referencia (6), el parámetro de onda σ nos da valores menores que 20, por lo tanto es nece- sario tomar en cuenta el efecto de la interacción diná mica suelo-estructura.

4.- La mencionada interacción alarga los períodos natura-- les de vibración y por ser una estructura rígida des-- plantada en suelo blando, implica una mayor ordenada - de aceleraciones y en consecuencia mayores elementos - mecánicos en columna, zapata y pilotes.

5.- Las deformaciones finales obtenidas en el extremo su-- perior de la columna con el modelo de interacción di-- námica, son mayores (del orden de diez veces) que las- obtenidas con los otros modelos.

6.- Al actuar el sismo en la dirección transversal, los -- momentos flexionantes que se obtienen resultan más críticos con el análisis estático; sin embargo, por ser - un análisis simplificado resulta ser conservador. Los momentos flexionantes en la dirección longitudinal así como las fuerzas cortantes en las dos direcciones de - análisis resultan más desfavorables con el modelo de - interacción dinámica suelo-estructura.

7.- De los tres valores del período de vibración obtenidos en este capítulo para la columna de estación, el más - cercano al registrado con instrumentos de precisión -- por el Instituto de Ingeniería de la UNAM es el calculado al tomar en cuenta la interacción dinámica suelo-estructura.

8.- Dada la importancia de la estructura y tomando en cuenta los puntos anteriores, debe incluirse el efecto de la interacción dinámica suelo-estructura en el diseño de la estructura elevada del Metro.

B I B L I O G R A F I A .

1.- Manual de diseño por sismo según el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Publicación 406 - del Instituto de Ingeniería, UNAM, julio 1977.

2.- W.G. Mc. Lean. Engineering Mechanics. Mc. Graw-Hill -- Book Co. Inc. 1962.

3.- Luthe Rodolfo. Análisis Estructural. Representaciones- y Servicios de Ingeniería S.A.

4.- Rascón Chávez O. Efectos sísmicos en estructuras en -- forma de péndulo invertido. Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica A.C. 1965.

5.- Newmark N.M. and Rosenblueth E. Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Inc.

6.- Veletsos A.S. and Meek J.W. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol.3, Dynamic Behaviour of Building-Foundation Sistems, 1974.

7.- Barkan D.D. Dynamics of Bases and Foundations. Mc.Graw Hill Book Co. Inc. 1962.

8.- Teng W.C. Foundation Design. Prentice-Hall, Inc. 1962.

9.- Earthquake-Resistant Design of Bridges. Bridge and - - Structural Committee. Japan Society of Civil Engineers, 1977.

10.- Standard Specifications for Highway Bridges. American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO). Twelfth Edition, 1977.

11.- Nieto J.A., Rosenblueth E. y Rascón Ch. O. Modelo matemático para representar la interacción dinámica de suelo y cimentación. Boletín de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica A.C.

12.- Mena E. y Sandoval. Frecuencia fundamental del conjunto columna-dado-zapata-pilotes del tramo elevado del Metro. Proyecto 9145, Instituto de Ingeniería, UNAM, marzo 1980.

13.- Del Valle Calderón E. Aplicación del Método de Stodola Vianello-Newmark para estructuras de flexión. VI Curso Internacional de Ingeniería Sísmica. Centro de Educación Continua, DESFI UNAM, julio 1980.

14.- Godden W.G. Numerical Analysis of Beam and Column Structures. Prentice-Hall, Inc.