2ej 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

CAMARAS DE OSCILACION MULTIPLES

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de :

INGENIERO CIVIL

p r e s e n t a :

LAZARO AGUILAR MORENO

México, D. F. 1981

Pág

1. INTRODUCCION 1

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES 8

2.1 *Ambas Cámaras de Oscilación están situadas Aguas Arriba de la Turbina* 8

2.1.1 Ecuación dinámica 8

2.1.2 Ecuación de continuidad 16

2.2 *Una Cámara de Oscilación Aguas Arriba de la Turbina y la otra Aguas Abajo* 16

2.2.1 Ecuación dinámica 16

2.2.2 Ecuación de continuidad 20

2.3 *Condiciones de Frontera* 20

2.3.1 Rechazo total instantáneo 21

2.3.2 Gasto constante 21

2.3.3 Cierre gradual lineal 22

2.3.4 Potencia constante 22

3. ALGUNOS ASPECTOS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE CAMARAS DE OSCILACION 26

3.1 *Ambas Cámaras de Oscilación se encuentran ubicadas Aguas Arriba de la Turbina* 30

3.1.1 Ecuaciones generales 30

3.1.2 Condiciones de estabilidad 37

3.1.3 Discusión de las condiciones de estabilidad 43

Pág

3.2 *Una cámara de Oscilación Aguas Arriba y otra Aguas Abajo de la Turbina* 48

4. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES Y APLICACIONES 57

4.1 *Breve Introducción a la Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* 58

4.2 *Método de Runge-Kutta* 62

4.2.1 Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias 65

4.3 *Ejemplo 1* 71

4.4 *Método de Hamming* 77

4.5 *Ejemplo 2* 82

4.6 *Aplicación* 84

5. CONCLUSIONES 97

ANEXO I 102

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS 105

1. INTRODUCCION

Dentro de las condiciones de funcionamiento en un sistema hidroeléctrico siempre habrá necesidad, voluntaria o accidental, de disminuir o aumentar el abastecimiento de energía eléctrica hacia la red de distribución; esto se conseguirá mediante la regulación de la descarga de agua hacia las turbinas. La realización de tal maniobra provocará una alteración en las condiciones hidráulicas originales estables del flujo.

Para explicar con más detalle en qué forma es alterado el flujo, imaginemos que entre el túnel de conducción y la tubería de presión es colocada una cámara de oscilación, la cual puede considerarse en forma aproximada como un pozo piezométrico. Al efectuar, por ejemplo, una maniobra de cierre rápido parcial, la masa de agua moviéndose en la tubería de presión es súbitamente desacelerada lo cual origina una sobrepresión que es propagada como una onda (de presión) viajando a lo largo de la tubería de presión hacia -- aguas arriba de las turbinas; mientras ello ocurre el flujo en el túnel de conducción aun no ha sido perturbado. Sin - embargo, cuando la onda de presión llega a la cámara de oscilación (la desaceleración de la masa de agua en la tube-- ría de presión se ha completado) el flujo en el túnel de -- conducción comienza a perturbarse debido a que el agua, incapaz de fluir hacia la tubería de presión, es forzada a -- fluir hacia la cámara de oscilación y empieza el ascenso de la superficie libre del agua en la cámara de oscilación. - Al mismo tiempo, la onda de presión es reflejada desde la - superficie libre del agua en la cámara de oscilación hacia- la tubería de presión.

El ascenso del nivel de agua en la cámara de oscilación provocará una disminución de la carga, con respecto a la que - se tenía antes de efectuar la maniobra, entre el nivel estático en el vaso y el nivel de agua en la cámara de oscila-- ción. Inclusive puede suceder que el nivel de agua en la - cámara de oscilación pase por encima del nivel estático en- el vaso.

Lo anterior origina una sobrepresión que provoca la desaceleración del flujo en el túnel de conducción a tal grado -- que el abastecimiento de agua llega a ser menor que el demandado por la turbina; consecuentemente, el nivel de agua en la cámara de oscilación empezará a descender y caerá por abajo del nivel correspondiente al flujo establecido, esto es, al flujo no perturbado. En un intento por volver a la condición de flujo establecido, el nivel de agua empezará otra vez a ascender desde el nivel más bajo alcanzado previamente; pero, debido a la inercia del agua, quedará por encima del nivel asociado al flujo establecido.

El anterior fenómeno de oscilación del nivel de agua se repite cíclicamente, con amplitudes cada vez menores debido a que la energía del movimiento oscilatorio es disminuída por efecto de la fricción.

Similares oscilaciones también son originadas por el incremento súbito en la descarga de agua hacia la turbina, solo que en este caso la primera oscilación es hacia abajo.

Cabe mencionar, que la sobrepresión causada por la desaceleración de la masa de agua en movimiento dentro de la tubería de presión y que da origen al fenómeno de oscilación, es el inicio del fenómeno llamado golpe de ariete.

Las funciones principales que desempeña una cámara de oscilación ubicada aguas arriba de la turbina son:

1) Interceptar la onda de presión debida al golpe de ariete para con ello eliminar al túnel de conducción de presiones excesivas; esto evitaría un revestimiento del túnel más costoso. No obstante, debe mencionarse que la cámara de oscilación no reduce totalmente la sobrepresión en el túnel de conducción, lo cual depende principalmente del tamaño del área de la sección transversal que comunica el túnel de conducción con la cámara de oscilación.

2) Proporcionar protección a la tubería de presión contra los efectos perjudiciales del golpe de ariete, en caso de no instalar una válvula reguladora de presión o si ésta no funciona correctamente.

3) Proporcionar abastecimiento de agua continuo hacía las turbinas cuando éstas comienzan a funcionar o cuando la demanda se incrementa súbitamente, ya que, debido a su inercia, la aceleración de la masa de agua en el túnel de conducción es significativamente menor a la aceleración que adquiere la masa de agua en la tubería de presión. Esto provocaría, en caso de que no hubiera cámara de oscilación, que el flujo alrededor del punto

de unión túnel de conducción-tubería de presión fuera discontinuo, esto es, el abastecimiento hacia las turbinas llegaría a interrumpirse. Además, tal discontinuidad en el flujo es causante de la formación de una depresión o vacío y de impactos de la columna de agua dentro del conducto cerrado, lo cual es de graves consecuencias para el funcionamiento adecuado del sistema. Esta es una de las funciones más importantes de una cámara de oscilación localizada aguas arriba de las turbinas.

Asimismo, una cámara de oscilación ubicada aguas abajo de las turbinas contribuye, por una parte, a proteger el túnel de desfogue contra las sobrepresiones debidas al golpe de ariete y, por otra, a evitar la formación de una depresión o vacío en el túnel de desfogue y a proveer agua hacia este último.

De lo anterior es notorio que las funciones realizadas por una cámara de oscilación (aguas arriba, aguas abajo o en ambos lados de la turbina) dentro de un sistema hidroeléctrico, son sumamente importantes para lograr una operación adecuada de tan complejo sistema. Por tanto, las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de oscilación, las técnicas para resolver dichas ecuaciones, y los requisitos mínimos indispensables que debe satisfacer un dimensionamiento adecuado de una cámara de oscilación, forman un conjunto de conocimientos básicos que el ingeniero hidráulico dedicado a este tipo de problemas debe entenderlos de la manera más clara posible.

El presente trabajo ha sido desarrollado, con base en una investigación bibliográfica, acerca de dos sistemas particulares de cámaras de oscilación; a saber: uno formado por ambas cámaras de oscilación localizadas aguas arriba de las turbinas, el otro constituído de tal manera que las turbinas están entre ambas cámaras de oscilación. El primero puede seleccionarse, por ejemplo, cuando las dimensiones de una cámara de oscilación simple fueran demasiado grandes (como ocurrió en Doblari, Italia), o cuando puedan obtenerse ventajas de tipo constructivo (como en Innertkirchen, Suiza). El segundo sistema puede seleccionarse, por ejemplo, cuando en el sistema hidroeléctrico son instaladas turbinas tipo Francis y el túnel de desfogue es muy largo. Como ya se ha mencionado, esto evitará el fenómeno de golpe de ariete causado por la regulación del gasto hacia las turbinas.

Así, los objetivos principales de este trabajo son presentar y resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de oscilación en ambos sistemas; así como señalar algunos aspectos que deben considerarse en el dimensionamiento de las cámaras de oscilación.

Para ello, en el capítulo segundo se determinan las ecuaciones que permiten conocer el comportamiento de las oscilaciones en ambas cámaras (con secciones transversales de área constante) para los dos sistemas bajo estudio. En seguida, el tercero trata sobre aspectos de estabilidad de las oscilaciones para ambos sistemas, lo cual será útil para seleccionar las áreas de las secciones transversales de las cámaras de oscilación. En el capítulo cuarto se presentan y aplican dos procedimientos numéricos que, con la ayuda de una computadora digital, hacen posible la solución de las ecuaciones derivadas en el capítulo segundo. Finalmente, el último capítulo está dedicado a resumir y comentar las averiguaciones más importantes del trabajo desarrollado.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

2.1 *Ambas Cámaras de Oscilación están situadas Aguas Arriba de la Turbina.*

Para caracterizar el fenómeno adecuadamente deben establecerse dos ecuaciones fundamentales para cada una de las cámaras del sistema mostrado en la fig 2.1, siendo una de ellas la ecuación dinámica y la otra la de continuidad.

2.1.1 Ecuación dinámica

Considérese un elemento de longitud dL_1 del túnel de presión (fig 2.2), las fuerzas actuantes en la dirección del flujo sobre este elemento son:

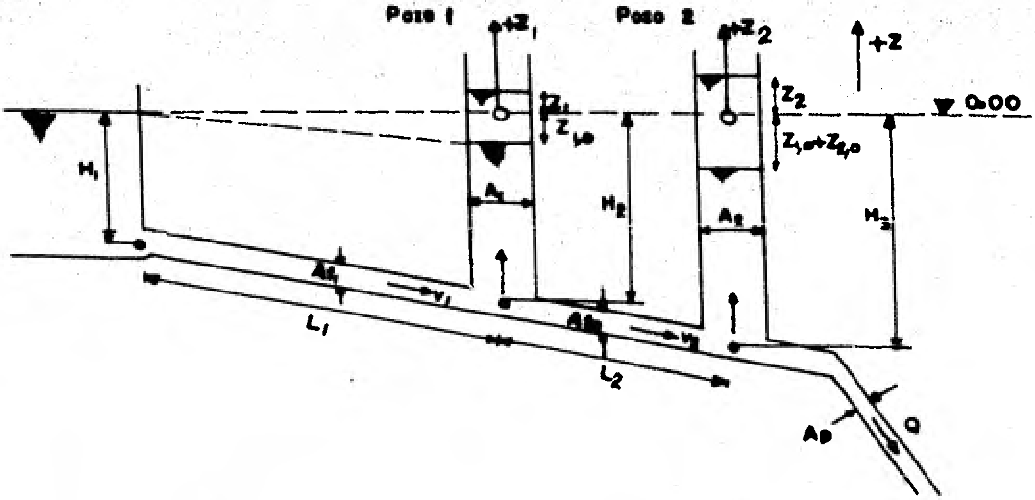


Fig. 2.1 Cámaras de oscilación aguas arriba de la turbina.

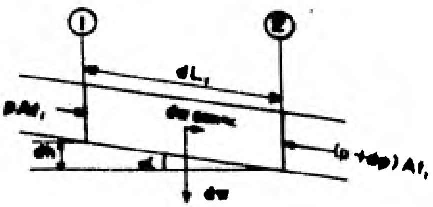


Fig. 2.2 Elemento diferencial del túnel 1.

- El componente del peso del agua en la dirección del flujo

$$P = dW \, sen \, \alpha \tag{2.1}$$

Ahora, se sabe que el peso específico del líquido se define como

$$\gamma = \frac{Peso}{Volumen}$$

que expresado para el elemento diferencial dL_1 da

$$\gamma = \frac{dW}{dV} = \frac{dW}{At_1 \cdot dL_1}$$

de donde al despejar dW, se obtiene

$$dW = \gamma \, At_1 \, dL_1 \tag{2.2}$$

Sustituyendo la ec 2.2 en la 2.1, resulta

$$P = \gamma \, At_1 \, dL_1 \, sen \, \alpha$$

y puesto que de la fig 2.2 $dh = dL_1 \, sen \, \alpha$, la ecuación anterior puede expresarse

$$P = \gamma \, At_1 \, dh$$

- Las fuerzas debidas a la presión en las secciones 1 y 2, expresadas por

$$F_1 = P \, At_1 \qquad y \qquad F_2 = (P + dp) \, At_1$$

- La que se opone al movimiento o de fricción, obtenida como

$$F_f = \tau_o \, P_m \, dL_1 \tag{2.3}$$

donde

τ_o esfuerzo cortante que se genera entre la frontera del fluido y el fluido mismo

P_m perímetro mojado

El esfuerzo cortante τ_o puede expresarse de la siguiente forma

$$\tau_o = \gamma \, R \, i$$

donde R es el radio hidráulico del túnel, o también como

$$\tau_o = \gamma \, \frac{At_1}{P_m} \, i$$

por tanto, al tener en cuenta la última ecuación en la ec 2.3 puede escribirse

$$F_6 = \gamma\ At_1\ i\ dL_1$$

donde i es el gradiente de energía.

Por otra parte, la masa del elemento de agua en el túnel es $(\gamma/g)\ At_1\ dL_1$; así, al aplicar la segunda ley de Newton al elemento sustituyendo los valores respectivos de P, F_1, F_2, y F_6 se obtiene

$$\frac{\gamma}{g}\ At_1\ dL_1\ \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}\right) = \gamma\ At_1\ dh + P\ At_1 - (P + dp)\ At_1 -$$

$$- \gamma\ At_1\ i\ dL_1$$

o bien

$$\frac{dL_1}{g}\ \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}\right) = dh - dp/\gamma\ - i\ dL_1$$

Para que sea posible la integración de la ecuación anterior y las que después se deducirán, se hacen las siguientes hipótesis:

i) Tanto las fronteras del flujo como el fluido mismo son incompresibles, es decir, las presiones se propagan a lo largo del túnel que conecta el vaso y el pozo de oscilación con velocidad infinita; por lo que el prisma de agua en el túnel se mueve como un sólido incompresible o sea la velocidad en el túnel es constante a lo largo de L_1 $(\partial V_1/\partial x = 0)$. Por tanto, recordando la definición de derivada total se tiene $\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial t}$.

ii) La longitud del túnel es mucho mayor que la oscilación Z_1, esto es, el efecto de inercia en las oscilaciones se debe exclusivamente a la masa de agua en el túnel, despreciándose la masa de agua en el pozo.

iii) La pérdida de energía por fricción se calcula en cada instante t empleando las fórmulas de flujo uniforme aún cuando el fenómeno de oscilación es flujo no establecido; por tanto, la pérdida de carga iL_1 es proporcional a V_1^2 o sea $iL_1 = F_1 V_1^2$.

La constante de proporcionalidad F_1 se obtiene de

$$F_1 = \frac{L_1}{(k_1)^2 R_1^{4/3}}$$

donde

L_1 longitud del túnel 1

R_1 radio hidráulico del túnel 1

k_1 coeficiente de fricción de la fórmula de Strickler que equivale al recíproco del coeficiente de fricción de la fórmula de Manning $(1/n)$

iv) Se desprecia la carga de velocidad $V_1^2/2g$ por ser pequeña comparada con la oscilación Z_1.

Además, a régimen establecido existe una pérdida de energía por fricción entre el vaso y el pozo 1 que se manifiesta -- por la distancia $Z_{1,o}$ del nivel en el vaso al espejo de -- agua en el pozo (fig 2.1); este nivel representa el punto - de partida de las oscilaciones Z_1 que se medirán respecto - al nivel en el vaso el cual será nuestro eje de oscilación.

Por tanto, al tomar límites en la última ecuación de acuerdo a la nomenclatura de la fig 2.1, resulta

$$\frac{1}{g}\frac{dV_1}{dt}\int_0^{L_1} dL_1 = \int_{H_1}^{H_2} dh - \int_{H_1}^{H_2+Z_1} dp/\gamma - \varepsilon\int_0^{L_1} dL_1$$

o bien

$$\frac{L_1}{g}\ \frac{dV_1}{dt} = H_2 - H_1 - \left[(H_2 + Z_1) - H_1\right] - i\ L_1$$

Como $iL_1 = F_1 V_1\ |V_1|$ debido a que el flujo puede ser del vaso al pozo en cuyo caso la velocidad en el túnel V_1 es positiva, o del pozo al vaso lo cual determinará que V_1 sea negativa, finalmente obtenemos

$$\frac{L_1}{g}\ \frac{dV_1}{dt} + Z_1 + F_1\ V_1\ |V_1| = 0 \qquad (2.4)$$

Que es la ecuación dinámica para el túnel 1.

De manera similar se obtiene la ecuación dinámica del túnel 2 al considerar un elemento de longitud dL_2 del túnel de presión entre el pozo 1 y el pozo 2, e incluir las fuerzas que actúan sobre dicho elemento en la dirección del movimiento. Así, la segunda ley de Newton aplicada al elemento de longitud dL_2 nos lleva a la siguiente ecuación

$$\frac{\gamma}{g}\ At_2\ dL_2\ \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}\right) = \gamma\ At_2\ dh - At_2\ dp - \gamma\ At_2\ i\ dL_2$$

la cual se reduce a

$$\frac{dL_2}{g} \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}\right) = dh - dp/\gamma \quad - i \; dL_2$$

Por tanto, refiriéndonos a la fig 2.1 para tomar límites y-recordando las hipótesis establecidas, tenemos

$$\frac{1}{g} \; \frac{dV_2}{dt} \int_0^{L_2} dL_2 = \int_{H_2}^{H_3} dh - \int_{H_2+Z_1}^{H_3+Z_2} dp/\gamma \quad - i \int_0^{L_2} dL_2$$

que al integrar da

$$\frac{L_2}{g} \; \frac{dV_2}{dt} = H_3 - H_2 - \left[(H_3 + Z_2) - (H_2 + Z_1) \right] - i \; L_2$$

simplificando, ordenando y puesto que $iL_2 = F_2 V_2 \; |V_2|$ se ob tiene

$$\frac{L_2}{g} \; \frac{dV_2}{dt} + Z_2 - Z_1 + F_2 \; V_2 \; |V_2| = 0 \qquad (2.5)$$

Que es la ecuación dinámica para el túnel 2 y en la que V_2 es positiva cuando la dirección del flujo es del pozo 1 hacia el pozo 2, siendo negativa para el caso contrario.

2.1.2 Ecuación de continuidad

La relación de continuidad para el sistema mostrado en la - fig 2.1 se establece por inspección de cada uno de los puntos de unión del túnel de presión con los pozos respectivos. Así, la ecuación de continuidad para el pozo 1 es

$$At_1 \; V_1 = A_1 \; \frac{dZ_1}{dt} + At_2 \; V_2 \qquad (2.6)$$

donde dZ_1/dt es la velocidad de elevación $(+\; Z_1)$ o descenso $(-\; Z_1)$ del nivel de agua en el pozo 1.

Para el pozo 2 puede escribirse

$$At_2 \; V_2 = A_2 \; \frac{dZ_2}{dt} + Q \qquad (2.7)$$

donde dZ_2/dt tiene una interpretación similar a la de dZ_1 / dt.

2.2 *Una Cámara de Oscilación Aguas Arriba de la Turbina y la otra Aguas Abajo.*

2.2.1 Ecuación dinámica

En este sistema de cámaras de oscilación (fig 2.3) la ecuación dinámica para el túnel situado aguas arriba de la tur-

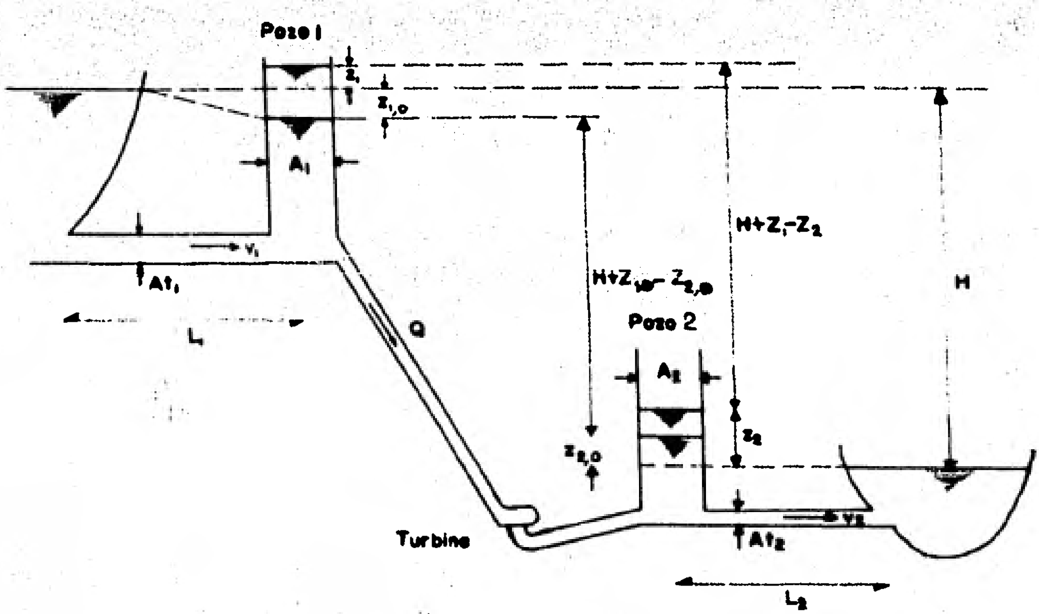


Fig. 2.3 La turbina se encuentra ubicada entre ambas cámaras de oscilación.

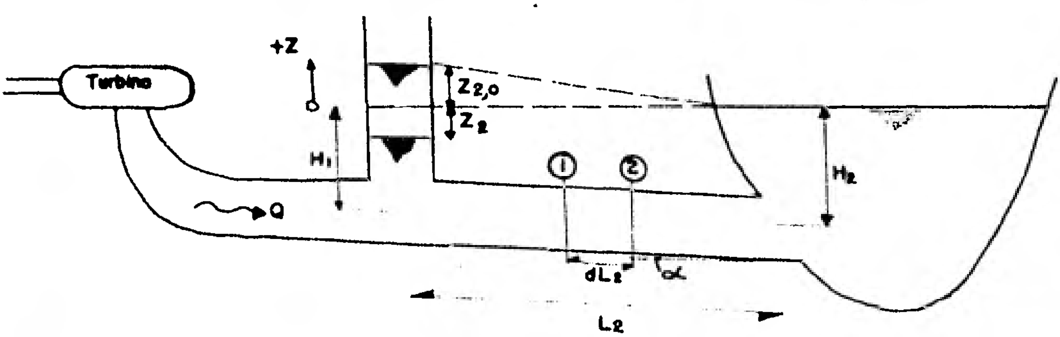


Fig. 2.4 Aislamiento de la cámara de oscilación aguas abajo de la turbina, para analizar el elemento diferencial del túnel de desfoque.

bina es idéntica a la obtenida para el túnel 1 del sistema mostrado en la fig 2.1, a saber

$$\frac{L_1}{g} \frac{dV_1}{dt} + Z_1 + F_1 V_1 \left| V_1 \right| = 0 \qquad (2.4a)$$

Para la deducción de la ecuación dinámica del túnel ubicado aguas abajo de la turbina, aislaremos una parte del sistema tal como se muestra en la fig 2.4. Entonces si elegimos un elemento diferencial dL_2 del túnel de desfoque, las fuerzas que actúan sobre él en la dirección del flujo son:

- Las debidas a la presión en las secciones 1 y 2 dadas por

$$F_1 = P \, At_2 \quad \text{y} \quad F_2 = (P + dp) \, At_2$$

- El componente del peso del agua en la dirección del movimiento

$$P = dW \operatorname{sen} \alpha$$

que también puede expresarse como

$$P = \gamma \, At_2 \, dh$$

- La que se opone al movimiento o de fricción

$$F_f = \tau_o \, P_m \, dL_2 \tag{2.8}$$

Al expresar el esfuerzo cortante τ_o por $\tau_o = \gamma R i$, donde R es el radio hidráulico del túnel de desfogue, la ec 2.8 llega a escribirse

$$F_f = \gamma \, At_2 \, i \, dL_2$$

donde, como ya se ha mencionado, i es el gradiente de energía.

Ahora, como la masa del elemento de agua en la distancia dL_2 es $(\gamma/g)\, At_2 \, dL_2$ al aplicar la segunda ley de Newton al elemento diferencial, resulta

$$\frac{\gamma}{g} At_2 \, dL_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}\right) = F_1 - F_2 + P - F_f$$

Sustituyendo los valores respectivos de F_1, F_2, P, F_f y recordando que $\frac{dV_2}{dt} = \frac{\partial V_2}{\partial t}$, se obtiene

$$\frac{1}{g} \frac{dV_2}{dt} dL_2 = dh - dp/\gamma - i \, dL_2$$

Al tomar límites de acuerdo a la notación de la fig 2.4, la ecuación anterior se escribe

$$\frac{1}{g}\frac{dV_2}{dt}\int_0^{L_2} dL_2 = \int_{H_1}^{H_2} dh - \int_{H_1+Z_2}^{H_2} dp/\gamma - i\int_0^{L_2} dL_2$$

integrando obtenemos

$$\frac{L_2}{g}\frac{dV_2}{dt} = H_2 - H_1 - \left[H_2 - (H_1 + Z_2)\right] - i\,L_2$$

Recordando que $iL_2 = F_2V_2\left|V_2\right|$ y después de simplificar, se llega a

$$\frac{L_2}{g}\frac{dV_2}{dt} - Z_2 + F_2\,V_2\left|V_2\right| = 0 \qquad (2.9)$$

La ec 2.9 es la ecuación dinámica para el túnel situado --- aguas abajo de la turbina.

La convención acerca del signo de V_2 indica que es positiva cuando el flujo se produzca del pozo hacia el cauce del río, y negativa en caso contrario.

2.2.2 Ecuación de continuidad

Al igual que para el sistema de la fig 2.1, la relación de continuidad puede establecerse por inspección de cada uno de los puntos de unión donde se conectan, por un lado, el pozo y el túnel de presión y, por el otro, el pozo y el túnel de desfogue.

Por tanto, la ecuación de continuidad para el pozo ubicado aguas arriba de la turbina, se escribe

$$At_1 \, V_1 = A_1 \frac{dZ_1}{dt} + Q \qquad (2.10)$$

mientras que para el pozo situado aguas abajo de ella, se obtiene

$$Q = A_2 \frac{dZ_2}{dt} + At_2 \, V_2 \qquad (2.11)$$

En las dos ecuaciones anteriores dZ_1/dt y dZ_2/dt representan la variación del nivel de agua respecto al tiempo en cada uno de los pozos.

2.3 Condiciones de Frontera

En las ecs 2.7, 2.10 y 2.11 aparece la variable Q que es el gasto instantáneo requerido por la turbina cuyo valor depende del tipo de maniobra realizada. Algunas maniobras típicas se presentan en seguida.

2.3.1 Rechazo total instantáneo

Consiste en el rechazo total de la energía causado por un cierre súbito de la válvula de la turbina, lo cual implica que

$$\text{para} \quad t = 0 \quad , \quad Q = Q_0$$

$$t \neq 0 \quad , \quad Q = 0$$

Este tipo de maniobra no está demasiado alejada de la realidad ya que el período de oscilación generalmente es mayor que el tiempo transcurrido en hacer la maniobra de cierre; además, este es uno de los casos más desfavorables para el funcionamiento del pozo que siempre debe tenerse en cuenta.

2.3.2 Gasto constante

El gasto hacia la turbina es cambiado de un valor Q_1 en régimen establecido a otro valor Q_2 también en régimen establecido, esto se expresa de la siguiente manera

$$\text{para} \quad t = 0 \quad , \quad Q = Q_1$$
$$t \neq 0 \quad , \quad Q = Q_2$$

Debido a que el gasto hacia la turbina varía con el cambio- del nivel de agua en el pozo, la maniobra a gasto constante es sólo posible en instalaciones con carga muy alta donde - las oscilaciones en el pozo son pequeñas comparadas con la- carga estática.

2.3.3 Cierre gradual lineal

El gasto que alimenta a la turbina varía del valor Q_1 al Q_3 ambos en régimen establecido, se considera que la variación es lineal durante el tiempo t_c en que se hace la maniobra.- Por tanto, las condiciones son

$$\text{para} \quad t = 0 \quad , \quad Q = Q_1$$
$$0 < t \leq t_c \quad , \quad Q = Q_1 - \frac{t}{t_c}(Q_1 - Q_3)$$
$$t > t_c \quad , \quad Q = Q_3$$

2.3.4 Potencia constante

El valor de Q se obtiene de la ecuación para la potencia de la turbina en condiciones de flujo establecido, esto es, antes de hacer cualquier maniobra para regular el gasto hacia la turbina y de la ecuación para la potencia un instante -- después de que se ha alterado dicha condición. Adicional-- mente, debe tenerse presente la consideración respecto a - que el gobernador de la turbina asegura que ésta trabaje a- una potencia constante durante todo el tiempo de operación.

Por tanto, para el sistema mostrado en la fig 2.1 y en condiciones de flujo establecido se tiene

$$P = \gamma \eta_o Q_o H_o$$

donde H_o es la carga neta sobre la turbina (despreciando -- las pérdidas de energía en la tubería de presión). Para un instante después de la regulación del gasto, la potencia es

$$P = \gamma \eta Q (H + Z_2)$$

donde H es la carga bruta, esto es, la carga estática.

Entonces, puesto que P = $ctte$, al igualar las dos ecuacio-- nes anteriores y despejar Q, resulta

$$Q = \frac{\eta_o}{\eta} \frac{Q_o H_o}{H + Z_2} \tag{2.12}$$

El valor de Q dado por la ec (2.12) es el que se sustituye-en la ec (2.7).

De manera semejante se procede para obtener el valor de Q que aparece en las ecs (2.10) y (2.11) donde ahora la expresión para la potencia un instante después de la regulación del gasto, resulta ser

$$P = \gamma\, \eta\, Q\, (H + Z_1 - Z_2)$$

mientras que en condiciones de flujo establecido se tiene

$$P = \gamma\, \eta_0\, Q_0\, (H + Z_{1,o} - Z_{2,o})$$

o bien

$$P = \gamma\, \eta_0\, Q_0\, H_0$$

donde

$$Z_{1,o} = - F_1\, V^2_{1,o} \quad \text{y} \quad Z_{2,o} = + F_2\, V^2_{2,o}$$

Al igualar las dos expresiones anteriores para la potencia P y despejar Q, resulta

$$Q = \frac{C}{H + Z_1 - Z_2} \tag{2.13}$$

siendo

$$C = \frac{n_o}{n} Q_o \, (H + Z_{1,o} - Z_{2,o})$$

3. ALGUNOS ASPECTOS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE CAMARAS DE OSCILACION

En el capítulo anterior se mencionó que el gobernador de -- una turbina garantiza que ésta proporcione una potencia --- constante durante el tiempo que permanece en operación; esto no representa problema alguno cuando las condiciones de- operación son las de flujo establecido, puesto que bajo estas condiciones la carga neta H_0 y la descarga Q_0 no variarán en el tiempo con lo que, considerando que η_0 es constante, se cumple

$$P = \eta_0 \gamma Q_0 H_0 = constante$$

El problema empieza cuando se introduce una alteración en - la descarga Q_0, ya que ello provocará que la carga neta H_0 varíe en dirección opuesta a la variación de Q_0 para lograr mantener la condición preestablecida de P = *constante*.

Para aclarar la idea respecto a la variación de Q_0 y H_0, refiriéndonos a la fig 3.1, supóngase que en el instante $t = -\varepsilon$ el flujo por la tubería de presión es igual a la cantidad uniforme $Q_{-\varepsilon}$; después en un corto intervalo de tiempo ε, el flujo $Q_{-\varepsilon}$ hacia la turbina es incrementado por ΔQ a $Q_0 = Q_{-\varepsilon} + \Delta Q$. Así, es posible calcular la oscilación que resultaría si el gobernador asegurara una descarga constante Q_0, siendo la oscilación resultante Z_1 (fig 3.1).

En realidad, como ya se dijo, el gobernador asegura una potencia constante que expresada para un instante cualquiera durante el curso de las oscilaciones es igual a

$$P = \eta \gamma Q (H + Z) = constante$$

suponiendo que η es constante.

Entonces si $H + Z$ varía con Z, Q también variará pero en dirección opuesta. Como se muestra en la fig 3.1, la variación de Q contra t no es una línea recta horizontal, sino una curva que oscila aproximadamente en simetría (alrededor del eje horizontal) con la gráfica de Z_1 contra t.

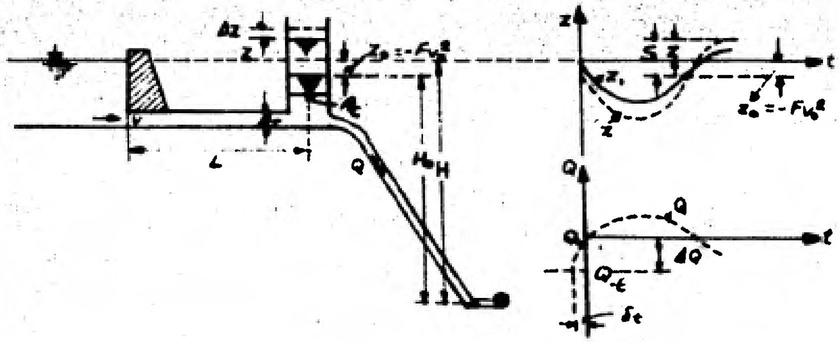


Fig. 3.1 Condiciones de estabilidad para una cámara de oscilación simple cuando la turbina es gobernada a potencia constante.

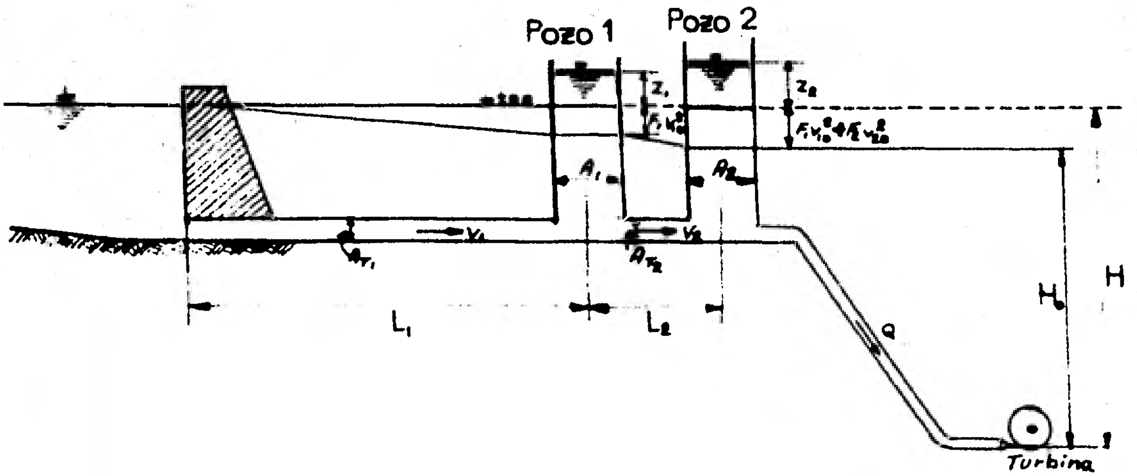


Fig. 3.2 Condiciones de estabilidad para dos cámaras de oscilación localizadas aguas arriba de la turbina.

Estas variaciones en la descarga Q originan un incremento en la amplitud de la oscilación Z_1, que se calculó considerando una descarga constante Q_0. Un cálculo más preciso de estas oscilaciones da una nueva curva para Z, que se desviará más de la curva para Z_1 desde la línea recta $Z_0 * - FV_0^2$ que representa el nivel de equilibrio hidrodinámico. Lo anterior nos lleva a pensar que oscilaciones de este tipo pueden, bajo ciertas circunstancias, llegar a ser inestables, esto es, la amplitud de las oscilaciones podría aumentar en el tiempo (no se amortiguan) lo cual resulta peligroso para toda la instalación.

Para evitar la inestabilidad de las oscilaciones, desde el punto de vista del tratamiento matemático del problema, el área horizontal de la sección transversal de la cámara de oscilación A_c debe exceder un cierto valor mínimo.

D. Thoma llegó a establecer que el valor mínimo de la sección transversal del pozo de oscilación, para el caso de oscilaciones con amplitud pequeña*, está dado por

---

* Considerando que la solución de Thoma es válida para oscilaciones grandes con un error del 10 por ciento respecto a la solución verdadera, entonces para que las oscilaciones sean pequeñas el cociente Z_*/H_0 debe ser menor de 0.22. Esto implica que se despreciaron los términos al cuadrado de dS/dt / S en el desarrollo matemático que condujo a la obtención de la ec 3.1a (ref 9 pp 234--240).

$$A_{c,min} \geq \frac{V_o^2}{2g} \frac{L A_t}{FV_o^2 (H - FV_o^2)} = A_{th} \qquad (3.1a)$$

o bien considerando que $H_o = H - FV_o^2$ y eliminando V_o^2 en la ecuación anterior, se obtiene

$$A_{th} = \frac{L A_t}{2g F H_o} \qquad (3.1b)$$

Si el túnel de presión es circular, la ec 3.1b puede expresarse de otra forma sabiendo que

$$A_t = \frac{\pi D^2}{4} \qquad y \qquad F = \frac{L}{k^2 \cdot R^{4/3}}$$

donde R es el radio hidráulico del túnel y equivale a ---- $R = \frac{D}{4}$; por tanto, sustituyendo los valores A_t, F, R en la ec 3.1b y simplificando se llega a

$$A_{th} = C \frac{k^2 D^{10/3}}{H_o} \qquad (3.1c)$$

donde $$C = \frac{\pi}{2g \cdot 4^{7/3}} = 0.0063$$

el área obtenida mediante la ec 3.1 se conoce con el nombre de área de Thoma.

Una vez explicado brevemente para una cámara de oscilación simple en qué consiste el fenómeno de estabilidad, se proce derá en el presente capítulo a exponer algunos aspectos --- acerca del mismo pero ahora para los dos sistemas de oscila ción que se mencionaron en el capítulo anterior.

3.1 *Ambas Cámaras de Oscilación se encuentran ubicadas --- Aguas Arriba de la Turbina.*

A continuación se presenta el desarrollo, debido a Jaeger,- para obtener las condiciones de estabilidad en las oscila-- ciones del sistema mostrado en la fig 3.2; asimismo, se dis cuten de una manera general tales condiciones para tres ca- sos particulares.

El significado de los símbolos de la fig 3.2 nos son ya fa- miliares, pero vale la pena hacer hincapié en que $F_1V_{10}^2$ y - $F_2V_{20}^2$ representan las pérdidas de energía por fricción en- los túneles 1 y 2 asociadas a la descarga en flujo estable- cido Q_0.

3.1.1 Ecuaciones generales

Como se vió en el capítulo anterior, las ecuaciones de con- tinuidad para el sistema de la figura antes mencionada son

$$At_1 \; V_1 = A_1 \frac{dz_1}{dt} + At_2 \; V_2 \qquad (3.2)$$

$$At_2 V_2 = A_2 \frac{dZ_2}{dt} + Q \tag{3.3}$$

Asimismo, las ecuaciones dinámicas son

$$\frac{L_1}{g} \cdot \frac{dV_1}{dt} + Z_1 + F_1 V_1 |V_1| = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{L_2}{g} \frac{dV_2}{dt} + Z_2 - Z_1 + F_2 V_2 |V_2| = 0 \tag{3.5}$$

además, la carga neta sobre la turbina en condiciones de -- flujo establecido es

$$H_0 = H - F_1 V_{10}^2 - F_2 V_{20}^2$$

Por otra parte, en el capítulo anterior se dijo que el eje- de referencia respecto al cual se miden las oscilaciones en el pozo es el dado por el nivel del vaso;ahora únicamente - al estudiar el problema de estabilidad es conveniente des-- plazar tal eje una distancia $F_1 V_{10}^2$ para el pozo 1 y otra - $F_1 V_{10}^2 + F_2 V_{20}^2$ para el pozo 2, ya que después de un cambio súbito en la carga las oscilaciones en los pozos respecti-- vos tenderán a los nuevos niveles asociados al flujo esta-- blecido.

Así, con base en la fig 3.2 se obtiene

$$X_1 = Z_1 + F_1 V_{10}^2$$

$$X_2 = Z_2 + F_1 V_{10}^2 + F_2 V_{20}^2$$

$$X_2 - X_1 = Z_2 - Z_1 + F_2 V_{20}^2$$

además, aceptando que la potencia hidráulica y eficiencia de la turbina son constantes durante el curso de las oscilaciones y en la condición de flujo establecido, se cumple

$$Q_o H_o = Q (H + Z_2) = Q (H_o + X_2)$$

despejando Q de la ecuación anterior y considerando que la amplitud de las oscilaciones es pequeña, resulta

$$Q = \frac{Q_o H_o}{H_o + X_2} \doteq Q_o \left(1 - \frac{X_2}{H_o}\right)$$

De las ecs 3.2 y 3.3, observando que

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{dX_1}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{dZ_2}{dt} = \frac{dX_2}{dt}$$

obtenemos

$$V_1 = \frac{A_1}{At_1}\frac{dX_1}{dt} + \frac{A_2}{At_1}\frac{dX_2}{dt} + \frac{Q_o}{At_1}\left(1 - \frac{X_2}{H_o}\right) \tag{3.6}$$

y

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{A_1}{At_1}\frac{d^2X_1}{dt^2} + \frac{A_2}{At_1}\frac{d^2X_2}{dt^2} - \frac{Q_o}{At_1H_o}\frac{dX_2}{dt} \tag{3.7}$$

La pérdida de energía por fricción en el túnel se calcula,- teniendo en cuenta la ec 3.6, como

$$F_1\,V_1\,|V_1| = F_1\,V_1^2 = F_1\left[\frac{A_1}{At_1}\frac{dX_1}{dt} + \frac{A_2}{At_1}\frac{dX_2}{dt} + \frac{Q_o}{At_1}\left(1 - \frac{X_2}{H_o}\right)\right]^2$$

que también es igual a

$$F_1\,V_1^2 = F_1\,\frac{Q_o^2}{At_1^2}\left[1 - \frac{X_2}{H_o} + \frac{A_1}{Q_o}\frac{dX_1}{dt} + \frac{A_2}{Q_o}\frac{dX_2}{dt}\right]^2 \tag{3.8}$$

Haciendo

$$\frac{F_1\,Q_o^2}{At_1^2} = F_1\,V_{10}^2 = F_{1_o}$$

y al desarrollar el cuadrado de la expresión entre corche-- tes de la ec 3.8, considerando además oscilaciones con am--

plitud pequeña, se llega a

$$F_1 \, V_1^2 \doteq F_{1_0}\left[1 - \frac{2X_2}{H_o} + \frac{2A_1}{Q_o}\,\frac{dX_1}{dt} + \frac{2A_2}{Q_o}\,\frac{dX_2}{dt}\right] \qquad (3.9)$$

Introduciendo $Z_1 = X_1 - F_1\,V_{10}^2$ y las ecs 3.7 y 3.9 en la ec 3.4, y agrupando convenientemente resulta

$$\frac{L_1\,A_1}{g\,At_1}\,\frac{d^2X_1}{dt^2} + \frac{2F_{10}\,A_1}{Q_o}\,\frac{dX_1}{dt} + X_1 = -\frac{L_1\,A_2}{g\,At_1}\,\frac{d^2X_2}{dt^2} -$$

$$-\left(\frac{2F_{10}\,A_2}{Q_o} - \frac{L_1\,Q_o}{g\,At_1H_o}\right)\frac{dX_2}{dt} + \frac{2F_{10}}{H_o}\,X_2 \qquad (3.10)$$

De manera análoga, de la ec 3.3 se tiene

$$V_2 = \frac{A_2}{At_2}\,\frac{dX_2}{dt} + \frac{Q_o}{At_2}\left(1 - \frac{X_2}{H_o}\right).$$

al derivar V_2 respecto al tiempo t, obtenemos

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{A_2}{At_2}\,\frac{d^2X_2}{dt^2} - \frac{Q_o}{At_2H_o}\,\frac{dX_2}{dt}$$

además, si las oscilaciones son de amplitud pequeña y llamando $F_2\,V_{20}^2 = F_{2_0}$ puede escribirse

$$F_2\, V_2\, |V_2| = F_2\, V_2^2 \doteq F_{2_0}\left[1 - \frac{2X_2}{H_o} + \frac{2A_2}{Q_o}\ \frac{dX_2}{dt}\right]$$

Por tanto, al sustituir las expresiones $Z_2 - Z_1 = X_2 - X_1 - F_2\, V_{20}^2$, $\dfrac{dV_2}{dt}$ y $F_2\, V_2^2$ en la ec 3.5, ésta se transforma en

$$\frac{L_2\, A_2}{g\ At_2}\ \frac{d^2X_2}{dt^2} + \left(\frac{2F_{2_0}\, A_2}{Q_o} - \frac{L_2\, Q_o}{g\ At_2 H_o}\right)\ \frac{dX_2}{dt} +$$

$$+ \left(1 - \frac{2F_{2_0}}{H_o}\right)\ X_2 = X_1 \qquad (3.11)$$

Para facilitar el estudio del sistema formado por las ecs - 3.10 y 3.11 es conveniente introducir los parámetros sugeri dos por Calame y Gaden, a saber: x_1, x_2, h_{1_0}, h_{2_0}, Fr_1 y - Fr_2 definidos como sigue

$$Z_{*1} = Q_o\left(\frac{L_1}{g\ At_1 A_1}\right)^{1/2} \quad ; \quad Z_{*2} = Q_o\left(\frac{L_2}{g\ At_2 A_2}\right)^{1/2}$$

$$T_1 = 2\ \pi\left(\frac{L_1\ A_1}{g\ At_1}\right)^{1/2} = \frac{2\ \pi\ Z_{*1} A_1}{Q_o}$$

$$T_2 = 2\ \pi\left(\frac{L_2\ A_2}{g\ At_2}\right)^{1/2} = \frac{2\ \pi\ Z_{*2} A_2}{Q_o}$$

donde

Z_{*1} amplitud máxima de la oscilación en el pozo 1 correspondiente a una maniobra de cierre instantáneo total y despreciando la pérdida por fricción en el túnel 1

T_1 período de la oscilación Z_{*1}

Z_{*2} y T_2 se definen de igual manera sólo que asociados al pozo 2.

Así, los parámetros se expresan por

$$X_1 = x_1\, Z_{*1}\ , \quad X_2 = x_2\, Z_{*2}\ , \quad h_{1_0} = \frac{H_o}{Z_{*1}}\ , \quad h_{2_0} = \frac{H_o}{Z_{*2}}\ ,$$

$$Fr_1 = \frac{F_{1_0}}{Z_{*1}} \quad \text{y} \quad Fr_2 = \frac{F_{2_0}}{Z_{*2}}$$

Al tener en cuenta los parámetros antes definidos, la ec 3.10 llega a escribirse como

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{2\pi}{T_1}\, 2Fr_1 \frac{dx_1}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_1^2}\, x_1 = -\, m^* \frac{d^2x_2}{dt^2} -$$

$$-\, \frac{2\pi}{T_1}\left(2Fr_1\, m^* - \frac{1}{h_{2_0}}\right) \frac{dx_2}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_1^2}\, \frac{2Fr_1}{h_{2_0}}\, x_2 \qquad (3.12)$$

donde

$$m^{*} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{L_2\ A_2\ At_1}{L_1\ A_1\ At_2}\right)^{1/2}$$

es la relación de los períodos de las dos cámaras de oscilación.

Asimismo, después de transformar la ec 3.11 se obtiene

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{2\pi}{T_2}\left(2Fr_2 - \frac{1}{h_{2_0}}\right)\frac{dx_2}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_2^2}\left(1 - \frac{2Fr_2}{h_{2_0}}\right)x_2 =$$

$$= \frac{4\pi^2}{T_2^2}\ \frac{Z_{*1}}{Z_{*2}}\ x_1 = \frac{4\pi^2}{T_2^2}\ \frac{1}{m}\ x_1 \qquad (3.13)$$

donde

$$m = \frac{Z_{*2}}{Z_{*1}} = \left(\frac{L_2\ A_1\ At_1}{L_1\ A_2\ At_2}\right)^{1/2}$$

3.1.2 Condiciones de estabilidad

Las ecs 3.12 y 3.13 tienen la forma

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1\frac{dx_1}{dt} + b_1x_1 = B_1\frac{d^2x_2}{dt^2} + C_1\frac{dx_2}{dt} + D_1 x_2$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_2 \frac{dx_2}{dt} + b_2\, x_2 = C_2\, x_1$$

Las dos ecuaciones anteriores representan el movimiento de - un sistema dinámico ejecutando sus oscilaciones naturales -- con dos grados de libertad (pozos 1 y 2), puede demostrarse que la determinación de la estabilidad de las oscilaciones - de tal sistema se reduce a la solución del determinante asociado a las ecuaciones características de las ecs 3.12 y --- 3.13, a saber

$$\begin{vmatrix} p^2 + a_1\, p + b_1 & -\,(B_1\, p^2 + C_1\, p + D_1) \\ -\,D_2 & p^2 + a_2\, p + b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante anterior, resulta

$$(p^2 + a_1\, p + b_1)\,(p^2 + a_2\, p + b_2) \quad (-D_2)\,(-B_1 p^2 -$$

$$- C_1\, p - D_1) = 0$$

que también puede ponerse en la forma

$$p^4 + \alpha_1\, p^3 + \alpha_2\, p^2 + \alpha_3\, p + \alpha_4 = 0 \qquad (3.14)$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 + a_2 \\
\alpha_2 &= b_1 + a_1\, a_2 + b_2 - B_1\, D_2 \\
\alpha_3 &= a_1\, b_2 + a_2\, b_1 - C_1\, D_2 \\
\alpha_4 &= b_1\, b_2 - D_1\, D_2
\end{aligned} \qquad (3.15)$$

Para que las oscilaciones del sistema sean estables, es necesario que las raíces reales y las partes reales de las raíces imaginarias asociadas a la ec 3.14 sean todas negativas, lo cual se cumple si

$$\alpha_1 > 0 \quad , \quad \alpha_2 > 0 \quad , \quad \alpha_3 > 0 \quad , \quad \alpha_4 > 0$$

y

$$\Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1\, (\alpha_2\, \alpha_3 - \alpha_1\, \alpha_4) < 0 \qquad (3.16)$$

Las condiciones de estabilidad anteriores representan el teorema de Routh - Hurwitz.

Por otra parte, las ecs 3.12 y 3.13 contienen ocho parámetros que son: F_{r1}, F_{r2}, h_{10}, h_{20}, T_1, T_2, m^* y m. Todos ellos dependen implícitamente de Z_{*1}, Z_{*2}, A_1, A_2 y Q_0. Luego, para una mejor discusión de las condiciones de estabilidad es necesario introducir nuevos parámetros, a saber

$$A_{th_1} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_0}{At_1}\right)^2 \frac{L_1\ At_1}{F_{1_0}\ H_o} \quad \text{y} \quad A_{th_2} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_0}{At_2}\right)^2 \frac{L_2\ At_2}{F_{2_0}\ H_o}$$

que son las áreas de Thoma para las cámaras de oscilación suponiendo que trabajan independientemente una de la otra.

En la ec 3.1a ya se había escrito la expresión para el área de Thoma, solo que en tal expresión aparece un signo de desigualdad; por tanto, para convertirla en igualdad es necesario multiplicarla por un factor $n \geq 1$. Entonces las áreas reales de las cámaras de oscilación son

$$A_1 = n_1\ A_{th_1} \quad \text{y} \quad A_2 = n_2\ A_{th2}$$

donde n_1 y n_2 serán las variables principales que se utilicen en la discusión de las condiciones de estabilidad.

Si definimos nuevamente los parámetros en función de

$$Z'_{*1} = Q_0\left(\frac{L_1}{g\ A_{th_1}\ At_1}\right)^{1/2} = n_1^{1/2}\ Z_{*1}$$

y

$$Z'_{*2} = Q_0\left(\frac{L_2}{g\ A_{th_2}\ At_2}\right)^{1/2} = n_2^{1/2}\ Z_{*2}$$

obtenemos las siguientes relaciones

$$h'_{1_0} = \frac{H_0}{Z'_{*1}} \quad \text{y} \quad h_{1_0} = n_1^{1/2} \; h'_{1_0}$$

$$h'_{2_0} = \frac{H_0}{Z'_{*2}} \quad \text{y} \quad h_{2_0} = n_2^{1/2} \; h'_{2_0}$$

$$F'r_1 = \frac{F_{10}}{Z'_{*1}} \quad \text{y} \quad Fr_1 = n_1^{1/2} \; F'r_1$$

$$F'r_2 = \frac{F_{20}}{Z'_{*2}} \quad \text{y} \quad Fr_2 = n_2^{1/2} \; F'r_2$$

Además, a causa de la definición de las áreas de Thoma A_{th_1} y A_{th_2} se obtienen las igualdades

$$\frac{1}{h'_{1_0}} = 2\, F'r_1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{h'_{2_0}} = 2F'r_2$$

que son importantes porque traen simplificaciones sustanciales en las expresiones finales para obtener α_1, α_2, α_3, α_4.

Por último, sean

$$T'_1 = 2\pi \left(\frac{L_1 \; A_{th1}}{g \; At_1}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad T'_2 = 2\pi \left(\frac{L_2 \; A_{th2}}{g \; At_2}\right)^{1/2}$$

los períodos de las dos cámaras de oscilación asociados a -- las áreas de Thoma, y las relaciones

$$\bar{m}^* = \frac{T'_2}{T'_1} = \left(\frac{L_2\, A_{th_2}\, A_{t_1}}{L_1\, A_{th_1}\, A_{t_2}}\right)^{1/2} = m^* \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2}$$

$$m = \frac{Z_{*2}}{Z_{*1}} = \bar{m}^* \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2} \frac{1}{\lambda'} = m^* \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{\lambda'}$$

donde

$$\lambda' = \frac{A_{th_2}}{A_{th_1}}$$

Así, con estos parámetros nuevos los valores de α_1, α_2, α_3, - α_4 de la ec 3.15 quedan expresados finalmente por

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{T_2}\left[n_2^{1/2} \left(2F r'_1 \bar{m}^* + 2F r'_2\right) - \frac{2F r'_2}{n_2^{1/2}} \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2}\left[1 + \frac{n_2}{n_1}\left(\bar{m}^{*2} + \lambda'\right) - \left(2F r'_2\right)^2 - \bar{m}^* \left(2F r'_1\right)\left(2F r'_2\right)\left(1 - n_2\right) \right]$$

$$\alpha_3 = \frac{8\pi^3}{T_2^3}\left[\bar{m}^{*2} \frac{n_2}{n_1}\left(n_2^{1/2} - \frac{1}{n_2^{1/2}}\right) 2F r'_2 + \bar{m}^* n_2^{1/2}\, 2F r'_1 \left(1 - \left[2F r'_2\right]^2\right) \right.$$

$$\left. + \frac{n_2}{n_1} \lambda' \left(2F r'_1 \bar{m}^* n_2^{1/2} - \frac{2F r'_2}{n_2^{1/2}}\right) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{16\pi^4}{T_2^4}\frac{n_2}{n_1}\left[\overline{m}^{*2}\left\{1-(2Fr_2')^2\right\}-\overline{m}^*(2Fr_1')(2Fr_2')\lambda'\right]$$

3.1.3 Discusión de las condiciones de estabilidad

Se analizará la condición límite de estabilidad de la ec --- 3.16, esto es, la condición $\Gamma = 0$; por tanto, para $\Gamma = 0$ los coeficientes α_1, α_2, α_3, α_4 contienen el factor $64\pi^6/T_2^6$ que es positivo siempre y por ende puede omitirse. Con ello, la función Γ y los coeficientes α_1, α_2, α_3, α_4 dependen ahora únicamente de los parámetros $\overline{m}^*$, Fr_1', Fr_2', λ', n_1, n_2.

Recuérdese que las variables n_1 y n_2 representan el cociente del área real del pozo y el área de Thoma respectivamente para los pozos 1 y 2, tales variables serán elegidas como independientes para la discusión; además, nótese que los parámetros $\overline{m}^*$, Fr_1', Fr_2', λ' dependen de A_{th1} y A_{th2}, y no de A_1 o A_2 con lo que pueden calcularse previamente para hacer posible una discusión general.

Iniciemos el análisis con el parámetro $\lambda' = A_{th2}/A_{th1}$, y para ello es conveniente reescribir la ec 3.1c

$$A_{th} = C\,\frac{k^2\,D^{10/3}}{H_0} \qquad (3.1c)$$

De la ecuación anterior es notorio que el área de Thoma depende sólo de k, D, H_0 y no de L o Q_0. Por tanto, si suponemos, como es lo más común, que los dos túneles tienen el mismo diámetro D y factor de fricción k, entonces $\lambda' \doteq 1$ lo cual implica que $A_{th_1} \doteq A_{th_2} \doteq A_{th}$.

Por consiguiente, todos los cálculos numéricos que requiere la discusión han sido efectuados considerando $\lambda' = 1$, a fin de que el número de parámetros se reduzca a cinco.

A manera de ejemplo, considérense los tres conjuntos de valores siguientes para los parámetros $\bar{m}^*$, Fr'_1, Fr'_2 dados por

(1) $\bar{m}^* = 0.3$, $Fr'_1 = 0.3$, $Fr'_2 = 0.1$

(2) $\bar{m}^* = 1$, $Fr'_1 = Fr'_2 = 0.2$

(3) $\bar{m}^* = 3$, $Fr'_1 = 0.03$, $Fr'_2 = 0.3$

donde el primer caso corresponde a un sistema en que $L_1/L_2 \doteq 11$ ubicándose, en tal caso, los dos pozos cerca del extremo del túnel de longitud L_1. El segundo caso está asociado a $L_1 \doteq L_2$, esto es, la primer cámara (pozo 1 de la fig 3.2) se encuentra localizada aproximadamente a la mitad del túnel de presión. Por último, el tercer caso es para un sistema donde $L_1/L_2 \doteq 0.09$ lo cual implica que la primer cámara se ubique cerca del vaso.

Puede observarse que al asignar valores a los parámetros $\overline{m}^*$, $F\dot{r}_1$, $F\dot{r}_2$; los valores de α_1, α_2, α_3, α_4 y Γ dependerán sólo- de n_1 y n_2.

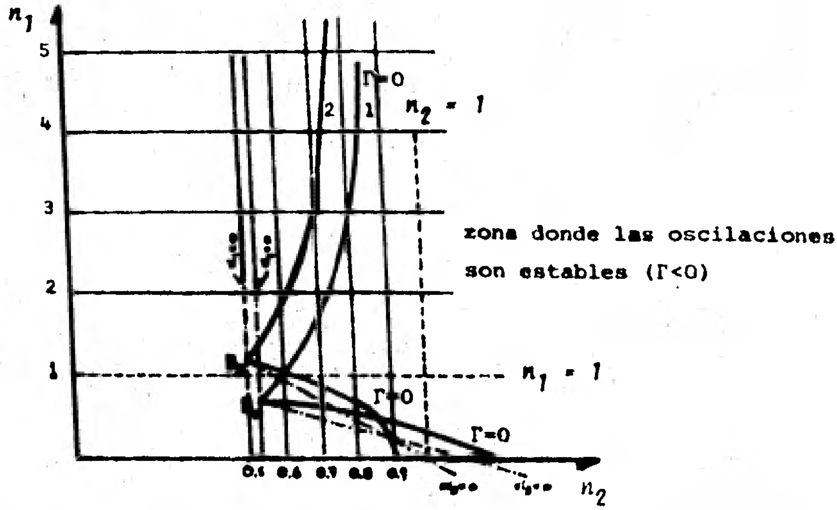
Las curvas de interés para la discusión son $\Gamma = 0$, $\alpha_1 = 0$, - $\alpha_3 = 0$ las cuales se han representado en la fig 3.3 para los casos 1 y 2.

Como se observa, para valores dados de $n_2 < 1$, a la variable n_1 le corresponden dos valores que son precisamente las dos- raíces de la ecuación $\Gamma = 0$; además, para la misma condición de n_2, la suma $n_1 + n_2 > 1$ indica que nada se gana reducien do el área del pozo 2 abajo del valor de Thoma.

También es importante notar la posición de los puntos B_1 y - B_2 ya que éstos corresponden a las condiciones simultáneas - $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$ y $\Gamma = \alpha_3^2 = 0$; las abscisas (n_2) de tales puntos se determinan de la condición $\alpha_1 = 0$ y las ordenadas -- (n_1) se obtienen de $\alpha_3 = 0$, sustituyendo los correspondientes valores de n_2 determinados previamente.

La forma de las curvas $\alpha_3 = 0$ y $\Gamma = 0$ depende de la posición del punto B, y para ilustrarlo mejor en la fig 3.4 se han -- ubicado los puntos correspondientes a los siguientes casos:

(1) $\overline{m}^* = 0.3$, $F\dot{r}_1 = 0.3$, $F\dot{r}_2 = 0.1$; $n_2 = 0.526$, $n_1 = 0.66$



curva 1 para $\bar{m}^* = 0.3$, $F\lambda'_1 = 0.3$, $F\lambda'_2 = 0.1$

curva 2 para $\bar{m}^* = 1$, $F\lambda'_1 = F\lambda'_2 = 0.2$

Fig. 3.3 Diagrama que muestra los límites para oscilaciones estables (tomada de Jaeger).

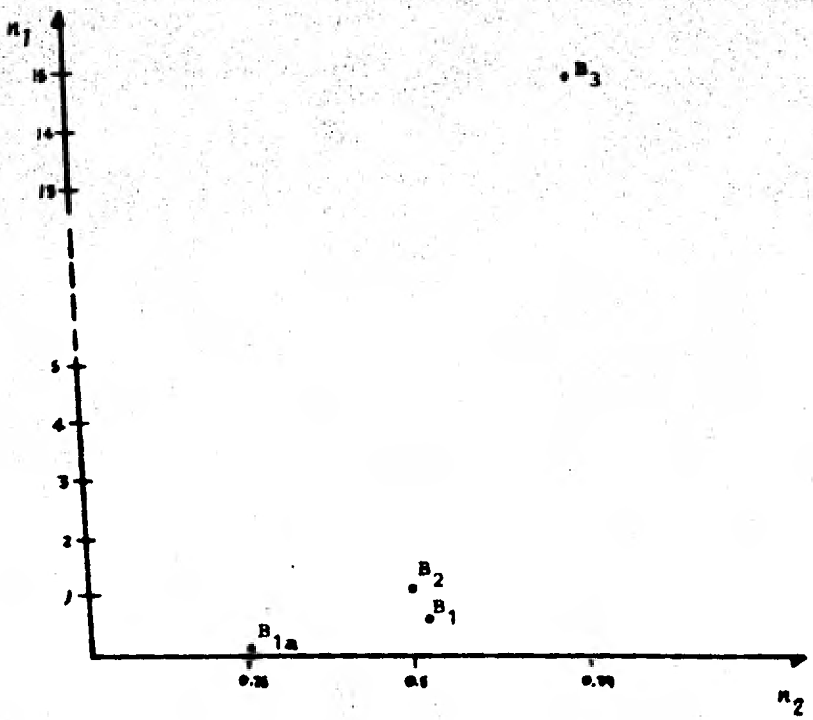


Fig. 3.4 Posición del punto B para valores variables de $\bar{m}^*$, Fr_1' y Fr_2'.

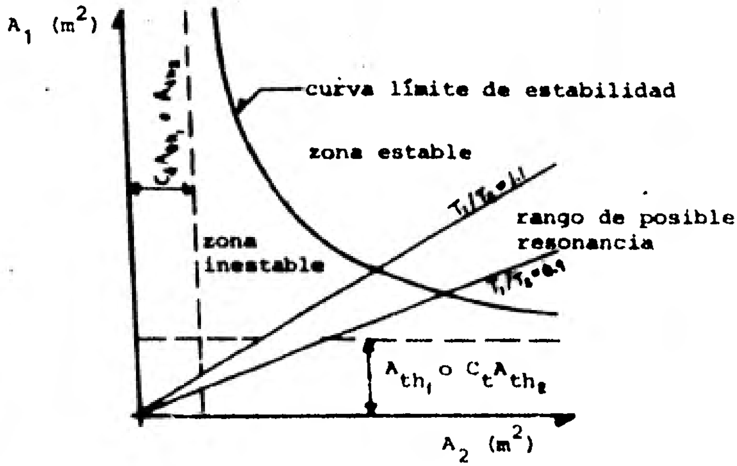


Fig. 3.5 Curva crítica de estabilidad para un sistema donde la turbina se ubica entre ambas cámaras de oscilación.

(1a) $\overline{m}^* = 0.3$, $Fr'_1 = 0.3$, $Fr'_2 = 0.03$; $n_2 = 0.25$, $n_1 = 0.106$

(2) $\overline{m}^* = 1$, $Fr'_1 = 0.2$, $Fr'_2 = 0.2$; $n_2 = 0.5$, $n_1 = 1.19$

(3) $\overline{m}^* = 3$, $Fr'_1 = 0.03$, $Fr'_2 = 0.3$; $n_2 = 0.77$, $n_1 = 14.9$

De tal figura se observa que una variación de la pérdida por fricción, expresada en valor relativo, Fr'_2 de 0.1 a 0.03 provoca que el punto B se mueva de B_1 a B_{1a}.

Asimismo, nótese que el punto B_3 no podía ubicarse en la fig 3.3 sino únicamente en la fig 3.4. Cálculos numéricos adicionales muestran que para $n_2 = 1$, n_1 debe ser mayor de 12 lo cual da idea de cuán grande deben ser las dimensiones de la cámara más aguas arriba; por tanto, cuando $\overline{m}^*$ es > 1 o 2 el valor numérico de Γ depende principalmente de α_4, esto es, en tal caso debe darse mayor importancia a la relación n_2/n_1.

De este breve análisis resultan las siguientes observaciones:

1) Con frecuencia poco o nada se gana al elegir una segunda cámara (la más cerca a la tubería de presión) de área reducida, esto es, cuando $n_2 < 1$. Además, a pesar que para un amplio rango de valores de $n_2 < 1$ puede lograrse la estabilidad, siempre que se demuestre que n_1 tiene el valor mínimo requerido para que Γ sea-

negativa ($\Gamma < 0$), en muchos casos esto requiere un volumen mayor para la primer cámara aguas arriba que --ocasiona un desequilibrio económico entre ambas cámaras. El caso (1a) es una posible excepción a esta observación.

2) Para valores grandes de $\overline{m}^*$ las condiciones de estabilidad, el análisis de la función $\Gamma = 0$, cambian considerablemente.

3) El problema de estabilidad depende principalmente de la relación de los períodos de las cámaras, esto es, de m^* o $\overline{m}^*$.

4) Las pérdidas por fricción, expresadas en valores relativos por $F\acute{r}_1$ y $F\acute{r}_2$, causan que la curva $\Gamma = 0$ varíe considerablemente sobre el plano $n_2 n_1$.

Finalmente, no debe olvidarse que los valores n_1 y n_2 dados por la fig 3.3 corresponden a la condición límite de estabilidad ($\Gamma = 0$); por tanto, para que las oscilaciones sean ---amortiguadas ($\Gamma < 0$) deben seleccionarse valores mayores que los correspondientes a $\Gamma = 0$, esto es, valores en la región donde las oscilaciones son estables.

3.2 *Una Cámara de Oscilación Aguas Arriba y otra Aguas Abajo de la Turbina.*

Las condiciones de estabilidad para un sistema de este tipo serán investigadas mediante un criterio aproximado debido a Jaeger, aunque cabe mencionar que para este caso existe un procedimiento similar al desarrollado para el sistema de oscilación anterior.

Jaeger determinó que las áreas necesarias para las cámaras de oscilación aguas arriba y aguas abajo de la turbina deben ser respectivamente

$$A_1 \geq \left[1 + C_t \frac{A_1}{A_2} \right] \frac{L_1 \; A t_1}{2gF_1H_o} \tag{3.17}$$

y

$$A_2 \geq \left[1 + C_t \frac{A_2}{A_1} \right] \frac{L_2 \; A t_2}{2gF_2H_o} \tag{3.18}$$

donde C_t es función de los períodos de oscilación en las dos cámaras y puede variar desde 0.2 hasta 1; su valor debe determinarse con base en la experiencia y datos publicados que se tengan de este tipo de sistema. Durante un diseño preliminar puede suponerse un valor conservador de $C_t = 1$; por supuesto, al elegir tal valor el grado de aproximación alcanzado será muy grueso.

Como puede notarse, la fracción siguiente a los corchetes en las ecs 3.17 y 3.18 es el área mínima de la sección transversal de acuerdo a Thoma para la respectiva cámara como si fuera un sistema de oscilación independiente, esto es, un sistema con una cámara simple. Por tanto, las ecs 3.17 y 3.18 -- pueden escribirse en forma breve como

$$A_{1_{min}} = \left[1 + C_t \frac{A_{1_{min}}}{A_{2_{min}}} \right] A_{th_1} \tag{3.19}$$

y

$$A_{2_{min}} = \left[1 + C_t \frac{A_{2_{min}}}{A_{1_{min}}} \right] A_{th_2} \tag{3.20}$$

donde

$$\left. \begin{aligned} A_{th_1} &= \frac{L_1 \, At_1}{2gF_1 \, H_o} \\ \text{y} \qquad & \\ A_{th_2} &= \frac{L_2 \, At_2}{2gF_2 \, H_o} \end{aligned} \right\} \tag{3.21}$$

El criterio expresado por las ecs 3.19 y 3.20 puede satisfacerse para un gran número de parejas de valores ($A_{1_{min}}$, --- $A_{2_{min}}$). Para poder seleccionar las parejas que representen- diseños razonables y económicos, y dibujar la relación entre ambas áreas; reescribamos las ecs 3.19 y 3.20 introduciendo- para ello, debida a E. Bálint, la relación

$$r = \frac{A_{1_{min}}}{A_{2_{min}}} \qquad (3.22)$$

de manera que

$$A_{1_{min}} = (1 + C_t\, r)\, A_{th_1} \qquad (3.23)$$

y

$$A_{2_{min}} = (1 + \frac{C_t}{r})\, A_{th_2} \qquad (3.24)$$

A continuación consideraremos la forma en que los dos criterios para el límite de estabilidad están interrelacionados.- Para ello, sustituyamos la ec 3.22 en la ec 3.24, con lo que un segundo criterio es obtenido para $A_{1_{min}}$

$$A_{1_{min}} = \left[1 + \frac{C_t}{r} \right] A_{th_2}\, r$$

o bien

$$A_{1_{min}} = (r + C_t)\, A_{th_2} \qquad (3.25)$$

Puesto que, generalmente, valores distintos de $A_{1_{min}}$ son determinados con las ecs 3.23 y 3.25 para el límite de estabilidad, <u>el mayor de los dos valores</u> debe aceptarse como $A_{1_{min}}$, y así la correspondiente área mínima de la sección transversal para la cámara aguas abajo será

$$A_{2_{min}} = \frac{A_{1_{min}}}{r} \qquad (3.26)$$

En forma matemática, el problema es determinar cuál de las - dos hipérbolas expresadas por las ecs 3.19 y 3.20 tiene las-correspondientes parejas de valores superiores, esto es, --- cuál de ellas se ubica a una mayor distancia del origen en - el plano A_2A_1.

Así, la curva límite de estabilidad puede obtenerse en el -- plano A_2A_1 mediante los siguientes pasos (fig 3.5):

1. Calcular las áreas críticas definidas por Thoma con ba se en la ec 3.21.

2. Suponer de acuerdo a la experiencia y datos publicados el factor C_t, cuando no se cuente con ninguna información útil puede usarse $C_t = 1$.

3. Sustituir relaciones diferentes r en las ecs 3.23 y -- 3.25, y aceptar el valor mayor de $A_{1_{min}}$.

4. Con el valor obtenido de $A_{1_{min}}$ determinar $A_{2_{min}}$ con ba se en la ec 3.26.

5. Ubicar en el plano A_2A_1 las parejas de valores $(A_{2_{min}}$,

$A_{1_{min}}$) para obtener la curva límite de estabilidad -- que separa las regiones estable e inestable.

6. Puede verificarse que las asíntotas de la curva están- caracterizadas por las rectas

$$A_1 = A_{th_1} \quad \text{o} \quad A_1 = C_t\, A_{th_2}$$

$$\text{y} \quad A_2 = C_t\, A_{th_1} \quad \text{o} \quad A_2 = A_{th_2}$$

dependiendo de cuál de las relaciones fue determinante para encontrar el valor de $A_{1_{min}}$; además, si $C_t = 1$ -- las asíntotas están a igual distancia de los ejes coordenados.

Una vez que la curva límite de estabilidad ha sido obtenida- por este y otros métodos (por ejemplo aproximación aritmética y modelo hidráulico), deben determinarse las secciones -- transversales A_1 y A_2. Para lo cual se elige un punto de diseño dentro de la región estable del plano A_2A_1 tomando en - cuenta los siguientes aspectos:

i) Las condiciones topográficas y geológicas de los si--- tios contemplados para la construcción de las cámaras- de oscilación.

ii) **El costo total de construcción para las dos cámaras debe ser mínimo. Unicamente cuando las condiciones sean tales que el menor costo coincide en que también el -- área transversal total $A_1 + A_2$ es mínima, entonces el- punto de la curva límite para el cual se cumple que r es óptimo puede determinarse como sigue.**

Si se encuentra que la ec 3.23 es decisiva para el valor de $A_{1_{min}}$, entonces

$$A_{1_{min}} + A_{2_{min}} = \left[1 + C_t\, r + \frac{1}{r} + C_t \right] A_{th_1}$$

y si lo es la ec 3.25, resulta

$$A_{1_{min}} + A_{2_{min}} = \left[r + C_t + 1 + \frac{C_t}{r} \right] A_{th_2}$$

Calculando el valor mínimo de acuerdo a

$$\frac{d\,(A_{1_{min}} + A_{2_{min}})}{dr} = 0$$

se concluye que en el primer caso obtenemos

$$r_{opt} = \frac{1}{\sqrt{C_t}} \qquad (3.27)$$

mientras que el segundo da

$$r_{opt} = \sqrt{C_t} \qquad (3.28)$$

iii) El punto de diseño más alejado de la curva límite de estabilidad dentro de la región estable dará un mayor grado de seguridad, esto es, aumenta el grado de amortiguamiento de las oscilaciones. Sin embargo, debe tenerse cuidado para evitar un diseño sobreconservador, ya que esto involucraría altos costos de construcción.

iv) Debido a lo aproximado de los métodos, ya que usualmente ninguno considera los efectos de la pérdida de energía por fricción en la tubería de presión, cambios en la eficiencia de la turbina, características de cooperación con otras estaciones en el sistema de abastecimiento de energía eléctrica, etc; puede darse el caso que alguno de estos factores o todos sean adversos para la estabilidad de las oscilaciones. Por tanto, es recomendable aumentar en un 20 o 30 por ciento las secciones transversales $A_{1_{min}}$ y $A_{2_{min}}$ para obtener una seguridad adecuada bajo todas las circunstancias.

v) Un último aspecto sumamente importante es evitar una situación donde $T_1 = T_2$ o sean aproximadamente iguales, para con ello eliminar el peligro de resonancia entre las oscilaciones en las dos cámaras.

Como se sabe, la relación T_1/T_2 de los períodos de oscilación de las dos cámaras está dada por

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1\ A_{t2}}{L_2\ A_{t1}}}\ \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \qquad (3.29)$$

Las dos cámaras deben estar fuera de la zona de resonancia una con respecto a la otra, esto es, la relación T_1/T_2 debe estar fuera del rango 0.8 o 0.9 a 1.1 o 1.2.

Para poder representar tal limitación en el plano A_2A_1, reescribamos la ec 3.29 en la forma

$$A_1 = \frac{L_2\ A_{t1}}{L_1\ A_{t2}} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 A_2 \qquad (3.30)$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas, variando sólo su pendiente en función de los distintos valores que se den a la relación T_1/T_2. Así, por ejemplo, adoptando los valores 0.9 y 1.1 para la relación T_1/T_2 puede limitarse (fig 3.5) la zona que es crítica desde el punto de vista de resonancia.

Finalmente, debe recordarse que el procedimiento antes des-- crito para determinar las condiciones de estabilidad es únicamente de caracter aproximado; un procedimiento más riguroso puede consultarse en la referencia (10).

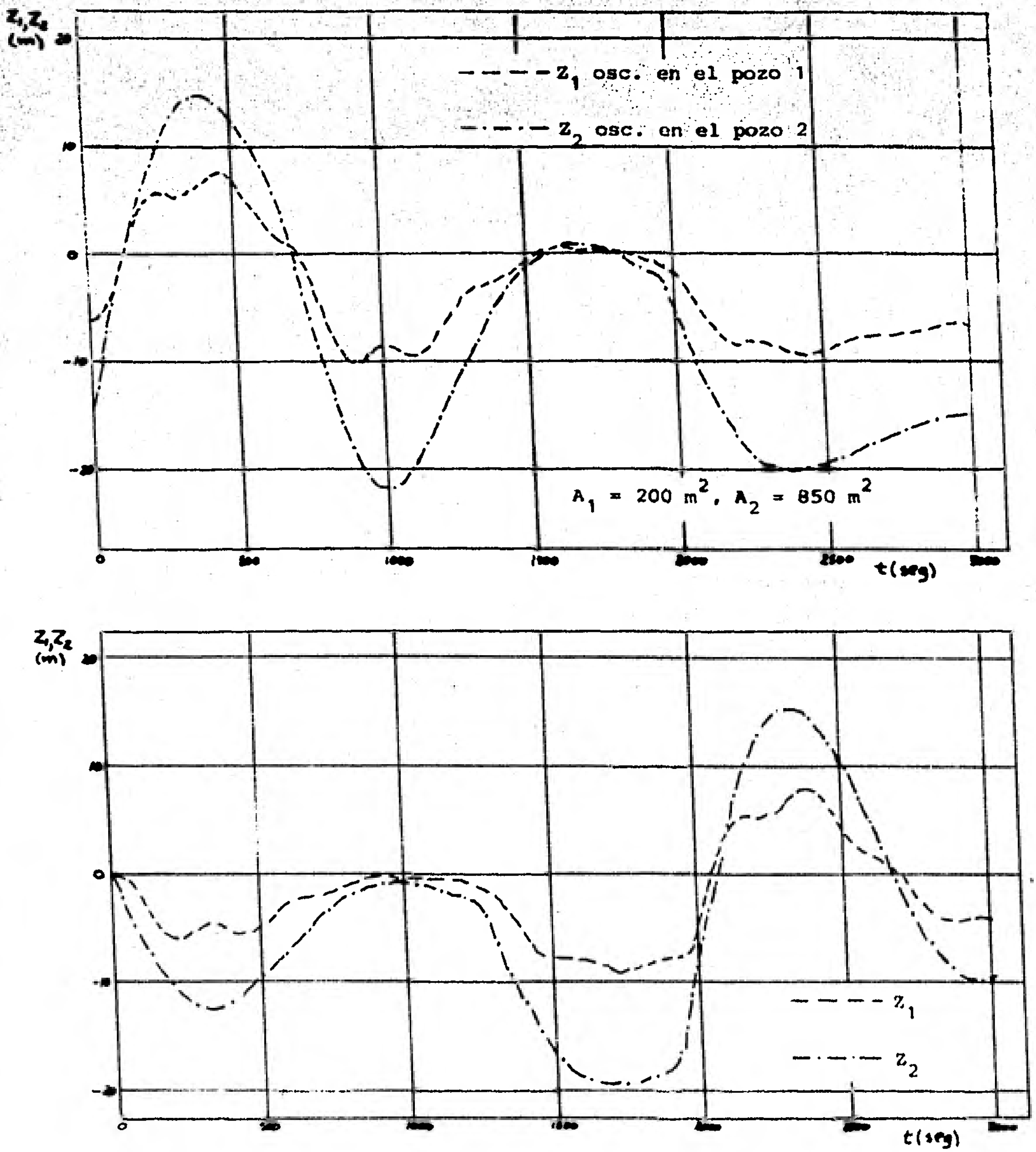


Fig. 4.8 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambos pozos de oscilación.

4. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES Y APLICACIONES

Debido a que la solución analítica de las ecuaciones diferenciales dinámica y de continuidad puede obtenerse sólo para casos simplificados (ref 9) y por tanto poco prácticos, fue necesario desarrollar procedimientos semigráficos y aritméticos que permitieran obtener soluciones aproximadas para casos más acordes a las condiciones reales de operación en un sistema hidroeléctrico.

Si se pretende conocer el comportamiento de las oscilaciones para los sistemas vistos en el cap 2 es obvio que una solución analítica no existe, mientras que una mediante un procedimiento semigráfico o aritmético (como el de Pressel, Schoklitsch, etc.) sería bastante laboriosa.

Por tal motivo, en este capítulo se presentan dos procedimientos numéricos que, con la ayuda de una computadora digital, permiten obtener soluciones aproximadas (de una manera más expedita) de ecuaciones diferenciales ordinarias y, en particular, las deducidas para los sistemas de oscilación del cap 2.

Los métodos numéricos que se presentan son el de Runge-Kutta y el de Hamming, ambos de cuarto orden*.

Antes de pasar a la explicación de los dos métodos previamente mencionados, resulta conveniente dar una idea de lo que implica resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria.

4.1 *Breve Introducción a la Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*

La explicación se desarrolla para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ya que la solución numérica de-

---

* Se refiere al orden de exactitud inherente al método numérico. Generalmente mientras mayor sea el orden; mayor será la exactitud entre la solución aproximada o numérica y la solución analítica considerando que esta última fuera conocida.

Una explicación más detallada está fuera del propósito de este trabajo, pero el lector interesado puede dirigirse a cualquiera de los libros (acerca del tema) mencionados en la bibliografía.

una ecuación diferencial de orden n se reduce a la solución de un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden definiendo $n - 1$ variables nuevas.

Sea

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{4.1}$$

una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con la condición inicial conocida $Y(t_0) = Y_0$ y cuya solución analítica se denote por $Y(t)$.

El problema consiste en determinar una aproximación Y_{n+1} a $Y(t_{n+1})$ para la ec 4.1 sabiendo que $Y(t_n)$ es conocida. -- Por tanto, separando variables en la ec 4.1, resulta

$$dy = f(t, y)\, dt$$

Al tomar límites para integrar la ecuación anterior dentro del intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, se obtiene

$$\int_{Y(t_n)}^{Y(t_{n+1})} dy = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f(t, y)\, dt$$

Integrando, tenemos

$$y\ (t_{n+1}) - y\ (t_n) = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f\ (t,\ y)\ dt$$

o también

$$y\ (t_{n+1}) = y\ (t_n) + \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f\ (t,\ y)\ dt \qquad (4.2)$$

Así, los métodos aproximados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias tratan de valuar con mayor o menor --- aproximación la integral que aparece en la ec 4.2.

En cierta forma la mayor o menor aproximación para valuar - la integral de la ec 4.2, depende de cuántos términos son - los que se retienen al desarrollar en serie de Taylor la -- función $y\ (t)$ alrededor de t_n para obtener $y\ (t_n + \Delta t)$ o -- $y\ (t_{n+1})$.

En la fig 4.1 el área achurada bajo la curva $f\ (t,\ y)$ y entre el intervalo limitado por t_n y t_{n+1} es precisamente el valor de la integral de la ec 4.2.

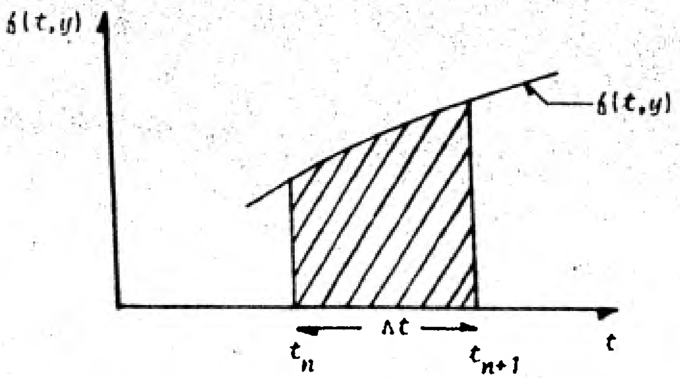


Fig. 4.1

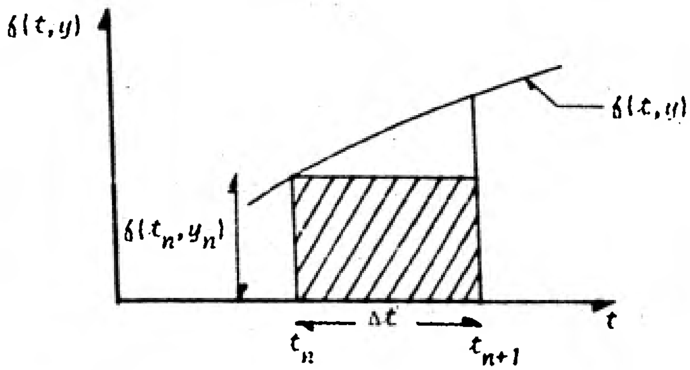


Fig. 4.2

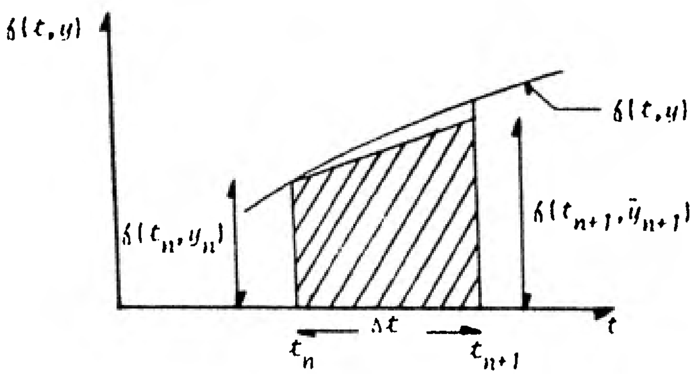


Fig. 4.3

Si se considera que en t_n la derivada $f(t_n, y_n)$ es conocida, entonces con base en la fig 4.2 puede escribirse

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f(t, y)\, dt \doteq f(t_n, y_n)\, \Delta t \qquad (4.3)$$

Sustituyendo la ec 4.3 en la 4.2 y dado que y_{n+1} es una --- aproximación a $y(t_{n+1})$, obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \;\; f(t_n, y_n) \;; \quad n = 0, 1, 2, \ldots m \qquad (4.4)$$

La expresión de la ec 4.4 se conoce como fórmula del método de Euler y es la más sencilla para resolver numéricamente - una ecuación diferencial ordinaria.

Su aplicación, seleccionado un Δt pequeño y conocidos y_0 y $f(t_0, y_0)$, consiste en determinar paso a paso y_1, y_2, ..., y_{m+1}. El método de Euler es un método de primer orden.

Una mejor aproximación de la integral de la ec 4.2 se consigue que si se emplea la ec 4.4 para obtener un valor de y_{n+1} -- denotado por $\bar{y}_{n+1}$, y luego se procede a valuar la derivada- en $f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$ de tal manera que el área achurada (fig - 4.3) ahora está dada por

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} f\,(t,\ y)\ dt \doteq \frac{f\,(t_n,\ y_n) + f\,(t_{n+1},\ \bar{y}_{n+1})}{2}\ \Delta t \quad (4.5)$$

Si se sustituye la ec 4.5 en la 4.2, resulta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\left[f\,(t_n,\ y_n) + f\,(t_{n+1},\ \bar{y}_{n+1}) \right] \quad (4.6)$$

que es la fórmula del método modificado de Euler o método - de Heun y es un método de segundo orden.

La ec 4.6 puede emplearse iterativamente para obtener una - secuencia de valores y_{n+1} corregidos, $\bar{y}^{(2)}_{n+1}$, $\bar{y}^{(3)}_{n+1}$, ..., $\bar{y}^{(m)}_{n+1}$ hasta que el valor absoluto de la diferencia entre -- $\bar{y}^{(m-1)}_{n+1}$ y $\bar{y}^{(m)}_{n+1}$ cumpla una cierta tolerancia de error preestablecido.

Cuando la ec 4.4 se utiliza como una ecuación de predicción para $\bar{y}^{(1)}_{n+1}$ y la ec 4.6 se emplea para generar valores de -- y_{n+1} corregidos, entonces tal pareja de ecuaciones forman- el más simple de los métodos predictor-corrector.

4.2 *Método de Runge-Kutta*

Las fórmulas de cuarto orden propuestas por Runge-Kutta para resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, tienen la forma

$$y_{i+1} = y_i + h\,(a\,k_1 + b\,k_2 + c\,k_3 + d\,k_4) \qquad (4.7)$$

donde k_1, k_2, k_3, y k_4 son valores aproximados de la derivada calculados en el intervalo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, esto es, en un método de Runge-Kutta de cuarto orden la función $f\,(t,\ y)$ debe valuarse cuatro veces por cada paso h o Δt.

Comparando las ecs 4.2 y 4.7, y considerando como subíndice de y a i en vez de n, resulta

$$\int_{t_i}^{t_i + \Delta t} f\,(t,\ y)\,dt \doteq h\,(a\,k_1 + b\,k_2 + c\,k_3 + d\,k_4) \qquad (4.8)$$

El desarrollo matemático (ref 19),que por sencillez no será presentado aquí, para obtener los valores de las constantes a, b, c, d y las expresiones para k_1, k_2, k_3, y k_4 que conduce a una mejor aproximación entre ambos miembros de la ec 4.8, nos lleva a lo siguiente

$$h\,(a\,k_1 + b\,k_2 + c\,k_3 + d\,k_4) = h\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)/6 \qquad (4.9a)$$

donde

$$k_1 = f\,(t_i,\ y_i)$$

$$k_2 = f\,(t_i + h/2,\ y_i + h\,k_1/2)$$

$$k_3 = f\,(t_i + h/2,\ y_i + h\,k_2/2) \qquad (4.9b)$$

$$k_4 = f\,(t_i + h,\ y_i + h\,k_3)$$

Sustituyendo la ec 4.9a en la 4.7 se obtiene la fórmula de- cuarto orden más conocida de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + h\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)/6 \qquad (4.10)$$

donde k_1, k_2, k_3, y k_4 deben valuarse de acuerdo con la ec- 4.9b.

Debe mencionarse que el método expresado por la ec 4.10 es- un método de los conocidos con el nombre de un-paso, entendiéndose con ello un método donde y_i es el único dato conocido necesario para el paso en que y_{i+1} va a ser calculado.

4.2.1 Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Considérese que se desea obtener la solución del siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con las variables dependientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$
\begin{aligned}
dy_1/dt &= f_1\,(t,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \\
dy_2/dt &= f_2\,(t,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \\
&\ \ \vdots \\
dy_n/dt &= f_n\,(t,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

sujeto a las condiciones iniciales conocidas en un punto común y expresadas por

$$
\begin{aligned}
y_1\,(t_o) &= y_{1,o} \\
y_2\,(t_o) &= y_{2,o} \\
&\ \ \vdots \\
y_n\,(t_o) &= y_{n,o}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

La solución de tal sistema puede determinarse mediante la aplicación de la fórmula de Runge-Kutta (ec 4.10) simultáneamente para cada una de las n ecuaciones en cada paso.

Por tanto, si denotamos por y_{ji} a la solución aproximada de la ecuación j-*ésima* en la ec 4.11 en t_i; la integración sobre el intervalo i-*ésimo* se realiza con base en la fórmula de Runge-Kutta expresada, para un sistema de n ecuaciones, por

$$y_{j,i+1} = y_{ji} + h \, PH_j = y_{ji} + h \, (k_{j1} + 2 \, k_{j2} + 2 \, k_{j3} + k_{j4})/6 \qquad (4.13a)$$

donde

$$k_{j1} = f_j \, (t_i, \, y_{1i}, \, y_{2i}, \, \ldots, \, y_{ni}) \qquad (4.13b)$$

$$y^*_{ji} = y_{ji} + h \, k_{j1}/2 \qquad (4.13c)$$

$$k_{j2} = f_j \, (t_i + h/2, \, y^*_{1i}, \, y^*_{2i}, \, \ldots, \, y^*_{ni}) \qquad (4.13d)$$

$$y_{ji} = y_{ji} + h \, k_{j2}/2 \qquad (4.13e)$$

$$k_{j3} = f_j \, (t_i + h/2, \, y_{1i}, \, y_{2i}, \, \ldots, \, y_{ni}) \qquad (4.13f)$$

$$\bar{Y}^*_{ji} = Y_{ji} + h\, k_{j3} \qquad (4.13g)$$

$$k_{j4} = f_j\,(t_i + h,\ \bar{Y}^*_{1i},\ \bar{Y}^*_{2i},\ \ldots,\ \bar{Y}^*_{ni}) \qquad (4.13h)$$

Nótese que los únicos valores conocidos exactamente en la ec 4.13a son las condiciones iniciales para t_0, es decir, los valores dados por la ec 4.12.

A continuación se presenta la secuencia para la aplicación de las ecs 4.13 de tal suerte que al programarlas se ocupen las memorias estrictamente necesarias; además, presenta la ventaja (respecto al número de líneas de programa que involucra la solución de una sola ecuación diferencial) de resolver un sistema con cualquier número de ecuaciones diferenciales de primer orden, con solo unas líneas más de programa.

1. Asignar valores iniciales a: la variable independiente t_i, el tamaño del paso h para la integración a través del intervalo *i-ésimo* dado por $h = t_{i+1} - t_i$, el número de ecuaciones diferenciales de primer orden n, y los valores de la solución Y_{ji} para las n ecuaciones en t_i que se denotarán por un vector Y_j. Obsérvese que el vector Y_j y los que más adelante se definirán deben dimensionarse para n ecuaciones.

2. En una subrutina, donde se encuentra el sistema de n - ecuaciones diferenciales por resolver, se calculan los valores de k_{j1} y se asignan al vector F_j

$$F_j \longleftarrow k_{j1}$$

3. Conservar los valores actuales de Y_j en otro vector -- SY_j

$$SY_j \longleftarrow Y_j = Y_{ji}$$

4. Empezar la acumulación de los valores del vector PH_j,- con los valores F_j calculados en la subrutina

$$PH_j \longleftarrow F_j = k_{j1}$$

5. Calcular los valores Y^*_{ji} y asignarlos al vector Y_j

$$Y_j \longleftarrow SY_j + 0.5\ h\ F_j = Y_{ji} + 0.5\ h\ k_{j1}$$

6. Incrementar t a la mitad del intervalo

$$t \longleftarrow t + 0.5\ h = t_i + 0.5\ h$$

7. En la subrutina se calculan los valores de F_j, em----

pleando los valores actuales de t y Y_j ,y se asignan - al vector F_j

8. Sumar k_{j2} al vector PH_j

$$PH_j \longleftarrow PH_j + 2\ F_j = k_{j1} + 2\ k_{j2}$$

9. Calcular los valores $\overline{Y}_{ji}$ y asignarlos al vector Y_j

$$Y_j \longleftarrow SY_j + 0.5\ h\ F_j = Y_{ji} + 0.5\ h\ k_{j2}$$

10. En la subrutina se calculan los valores de k_{j3}, em---- pleando los valores actuales de t y Y_j, asignándolos - al vector F_j

11. Sumar k_{j3} al vector PH_j

$$PH_j \longleftarrow PH_j + 2\ F_j = k_{j1} + 2\ k_{j2} + 2\ k_{j3}$$

12. Calcular los valores $\overline{Y}^{*}_{ji}$ y asignarlos al vector Y_j

$$Y_j \longleftarrow SY_j + h\ F_j = Y_{ji} + h\ k_{j3}$$

13. Incrementar t al final del intervalo

$$t \longleftarrow t + 0.5\, h = t_i + h = t_{i+1}$$

14. En la subrutina se calculan los valores de k_{j4}, utilizando los valores actuales de t y Y_j, asignándolos al vector F_j .

15. Calcular los valores $Y_{j,i+1}$ al final del intervalo y asignarlos al vector Y_j

$$Y_j \longleftarrow SY_j + (PH_j + F_j)\, h/6 = Y_{ji} + (k_{j1} + 2\, k_{j2} +$$

$$+ 2\, k_{j3} + k_{j4})\, h/6$$

El procedimiento anterior se repite para el siguiente intervalor de integración, observándose que las nuevas condiciones iniciales están asignadas en t (paso 13) y Y_j (paso 15).

4.3 *Ejemplo 1*

Considérese que en un sistema como el de la fig 2.3 se hace una maniobra de toma de carga (apertura) a potencia constante de $Q = 0$ a $Q = Q_0$, siendo Q_0 el gasto correspondiente a la condición de flujo establecido que deberá alcanzarse después de la maniobra. Los datos asociados al sistema (ref 12) son: $L_1 = 6330\ m$, $L_2 = 111\ m$, $At_1 = 7.07\ m^2$, $At_2 = 9.52\ m^2$, $A_1 = 19.64\ m^2$, $A_2 = 35.25\ m^2$, $H = 273.25\ m$ y $Q_0 = 16.75\ m^3/s$.

El problema es determinar las oscilaciones del nivel de agua en los pozos del sistema causadas al efectuar la maniobra mencionada.

SOLUCION

Reescribiendo las ecuaciones diferenciales deducidas para este tipo de sistema, resulta

$$\frac{L_1}{g}\ \frac{dV_1}{dt} + Z_1 + F_1\ V_1\ |V_1| = 0$$

$$\frac{L_2}{g}\ \frac{dV_2}{dt} - Z_2 + F_2\ V_2\ |V_2| = 0$$

$$At_1 \ V_1 = A_1 \ \frac{dZ_1}{dt} + Q \qquad (4.14)$$

$$Q = A_2 \ \frac{dZ_2}{dt} + At_2 \ V_2$$

Además, por el tipo de sistema, maniobra y considerando que $\eta_o = \eta$, la expresión para Q es

$$Q = \frac{Q_o \ (H + Z_{1,o} - Z_{2,o})}{H + Z_1 - Z_2} \qquad (4.15)$$

donde

$$Z_{1,o} = - F_1 \ V_{1,o}^2 \quad \text{y} \quad Z_{2,o} = + F_2 \ V_{2,o}^2$$

Despejando de cada una de las ecs 4.14 el término que con-- tiene la derivada respecto al tiempo t, podemos escribir

$$\frac{dV_1}{dt} = - \frac{g}{L_1} \ (Z_1 + F_1 \ V_1 \ |V_1|)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = - \frac{g}{L_2} \ (- Z_2 + F_2 \ V_2 \ |V_2|) \qquad (4.16)$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{1}{A_1} \ (At_1 \ V_1 - Q)$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = \frac{1}{A_2} (Q - At_2 V_2)$$

En el anterior sistema de ecuaciones diferenciales además - de las variables V_1, V_2, Z_1 y Z_2 se desconocen los valores de F_1, F_2, $Z_{1,o}$ y $Z_{2,o}$, los cuales se determinan en función de los datos como se indica a continuación.

Recordando la expresión para obtener F, tenemos

$$F = \frac{L}{k^2 \; R^{4/3}}$$

Como se mencionó k es un coeficiente de fricción y depende- del tipo de material que se utilice para revestir el tú--- nel. Entonces si suponemos que ambos túneles están revesti dos de concreto, el rango sugerido (ref 9 pág 197) para el valor de k es 70 a 75. Por tanto, considerando un valor -- promedio de k y dado que R es el radio hidráulico del tú--- nel, el valor de F_1 es

$$F_1 = \frac{6330}{(72.5)^2 \cdot (3/4)^{4/3}} = 1.77 \; s^2/m$$

mientras que el de F_2 da

$$F_2 = \frac{111}{(72.5)^2 \cdot (3.5/4)^{4/3}} = 0.025 \; s^2/m$$

La velocidad en ambos túneles asociada al flujo establecido se determina de

$$V_{1,o} = \frac{Q_o}{At_1} = \frac{16.75}{7.07} = 2.37 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_{2,o} = \frac{Q_o}{At_2} = \frac{16.75}{9.52} =$$

$$= 1.76 \text{ m/s}$$

Entonces los valores de $Z_{1,o}$ y $Z_{2,o}$ son

$$Z_{1,o} = -F_1 V_{1,o}^2 = -(1.77)(2.37)^2 = -9.95 \text{ m}$$

$$Z_{2,o} = +F_2 V_{2,o}^2 = +(0.025)(1.76)^2 = +0.078 \text{ m}$$

Hagamos el cambio de variables

$$Y(1) = V_1 \; ; \quad Y(2) = V_2 \; ; \quad Y(3) = Z_1 \; ; \quad Y(4) = Z_2$$

al sustituir y efectuar las operaciones indicadas en la ec-4.16 teniendo en cuenta la expresión para Q dada por la ec-4.15, la ec 4.16 se transforma en

$$\frac{dY(1)}{dt} = -0.00155\,(Y(3) + 1.77\,Y(1)\,|Y(1)|)$$

$$\frac{dY(2)}{dt} = -\ 0.08838\ (-\ Y(4) + 0.025\ Y(2)\ |Y(2)|\ )$$

$$\frac{dY(3)}{dt} = 0.05092\ (7.07\ Y(1) - 4408.97/\ (273.25\ +$$

$$+\ Y(3) - Y(4)))\qquad\qquad (4.17)$$

$$\frac{dY(4)}{dt} = 0.02837\ (4408.97/(273.25 + Y(3)\ -$$

$$-\ Y(4)) - 9.52\ Y(2))$$

Las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales expresado por la ec 4.17 son

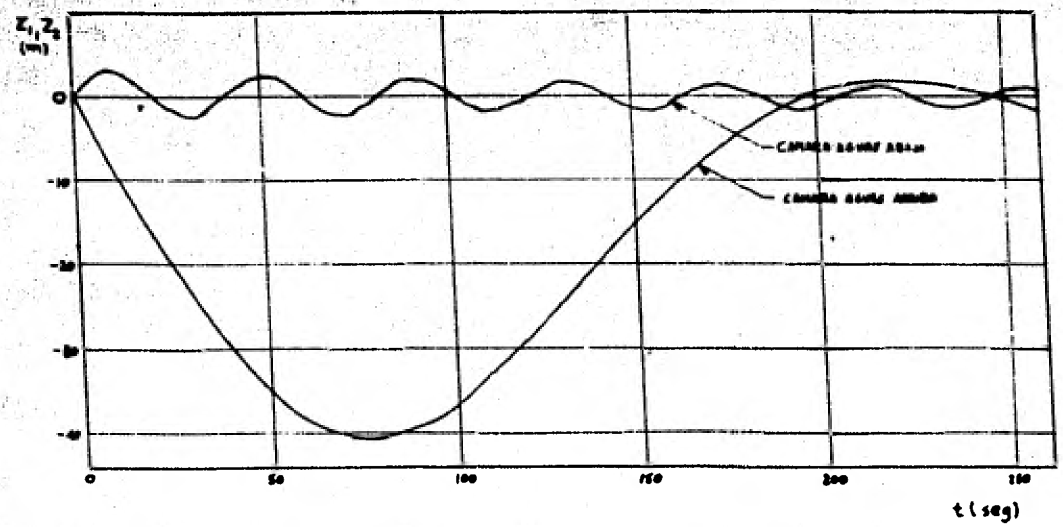
$$\text{para}\quad t = 0\ ,\quad Y(1) = Y(2) = Y(3) = Y(4) = 0$$

El anterior sistema de ecuaciones diferenciales se resolvió mediante el procedimiento explicado para el método de Run--ge-Kutta, seleccionando para ello un tamaño de paso h ó Δt igual a 5 segundos que es aproximadamente un décimo del período teórico de oscilación correspondiente a la cámara --- aguas abajo de la turbina, obtenido de

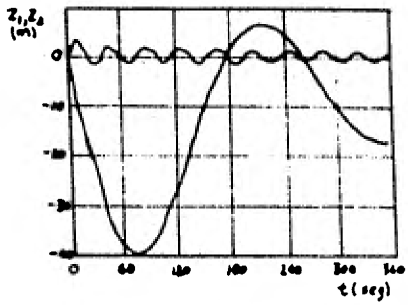
$$T_2 = 2\pi\left[\frac{L_2\ A_2}{g\ At_2}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{111\ \times\ 35.25}{9.81\ \times\ 9.52}\right]^{1/2} = \text{[illegible]}$$

La selección del tamaño de paso debe hacerse de tal manera que la curvatura de la función solución sea definida adecuadamente, por lo que para funciones periódicas se recomienda tener como mínimo de 10 a 15 puntos por período para definir la función solución.

La variación en el tiempo de las oscilaciones del nivel de agua en los pozos se muestra en la fig 4.4 a. Al comparar la solución obtenida por Jaeger para los mismos datos de este ejemplo (fig 4.4b), quien empleó un procedimiento semigráfico, con la obtenida aquí puede observarse que la principal diferencia está en el valor para la máxima oscilación positiva en la cámara de aguas arriba. Esto quizá se deba al valor seleccionado para el coeficiente de fricción k; ya que al no tener información de cuál fue el valor seleccionado por Jaeger, en la solución aquí presentada se ha seleccionado un valor medio.



a) Solución obtenida con la fórmula de Runge-Kutta



b) Solución de Jaeger

Fig. 4.4 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambas cámaras de oscilación.

4.4 *Método de Hamming*

Es un método de los llamados predictor-corrector cuyo objetivo es aproximar la función $f(t, y)$, que aparece en la ec 4.2, mediante un polinomio de interpolación $p(t)$ para obtener una solución aproximada y_{i+1} de la ecuación diferencial dy/dt.

El método de Hamming emplea la ecuación del predictor del método de Milne de cuarto orden, expresada por

$$y_{i+1,o} = y_{i-3} + 4h\,(2\,f_i - f_{i-1} + 2\,f_{i-2})/3\ ;$$

$$i = 3, 4, \ldots\ldots \qquad (4.18)$$

mientras que la ecuación de corrección, obtenida por él, es

$$y_{i+1} = 9y_i/8 - y_{i-2}/8 + 3h\,(f_{i+1} + 2\,f_i - f_{i-1})/8\ ;$$

$$i = 3, 4, \ldots\ldots \qquad (4.19)$$

En la ecuación anterior f_{i+1} representa el valor de la derivada dy/dt para $t = t_{i+1}$ y $y = y_{i+1,o}$, esto es, $f_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1,o})$. Los demás subíndices de f tienen significados análogos.

Un aspecto importante que debe notarse en el método de Hamming es que con éste no se puede comenzar la integración para $i = 3$, ya que los valores y_1, y_2, y_3, f_1, f_2, f_3 son desconocidos (y_0 se conoce de la condición inicial). Por tanto, es necesario determinar y_1, y_2 y y_3 mediante otro método de exactitud comparable al de Hamming y para ello generalmente se emplea el método de Runge-Kutta; los valores de f_0, f_1, f_2 y f_3 se calculan de la ecuación diferencial --- $dy/dt = f\,(t,\ y)$..

Anteriormente se había mencionado que en un método predictor-corrector la fórmula de corrección se aplicaba iterativamente hasta satisfacer cierta tolerancia de error entre - dos valores sucesivos de y_{i+1}. Es de esperar que el mayor o menor número de iteraciones depende de qué tan bueno es - el valor predicho $y_{i+1,0}$, además en cada iteración se tiene que valuar la derivada $dy/dt = f\,(t,\ y)$ por lo que si el número de iteraciones fuera igual o mayor de cuatro; entonces, por ejemplo, el método de Hamming comparado con el de Runge-Kutta sería poco práctico. Por tal motivo, en los métodos predictor-corrector han sido implementados una serie de artificios a fin de reducir a una o dos el número de iteraciones.

Así, el algoritmo completo para el método de Hamming se pre senta en seguida.

1. Tener disponibles los valores de y_0, y_1, y_2, y_3, f_0, f_1 f_2 y f_3; y_0 es conocido y y_1, y_2 y y_3 se obtienen por el método de Runge-Kutta.

2. La solución predicha se calcula con

$$y_{i+1,0} = y_{i-3} + 4h\,(2\,f_i - f_{i-1} + 2\,f_{i-2})/3 \qquad (4.20)$$

3. Modificar el valor predicho

$$y^*_{i+1,0} = y_{i+1,0} + 112\,(\overline{Y}_i - y_{i,0})/121 \qquad (4.21)$$

Aquí, $\overline{Y}_i$ es la solución de la ecuación de corrección - del paso anterior y $y_{i,0}$ es la solución predicha del - paso anterior. Cuando $i = 3$ los valores $\overline{Y}_i$ y $y_{i,0}$ no serán conocidos, por lo que el sumando que los contiene en la ec 4.21 valdrá cero.

4. Incrementar la variable independiente al final del intervalo

$$t_{i+1} = t_i + h = t_i + \Delta t \qquad (4.22)$$

5. **Aplicar la fórmula del corrector de Hamming**

$$\bar{y}_{i+1} = \left\{9y_i - y_{i-2} + 3h\left[f\,(t_{i+1},\, y^*_{i+1,o}) + + 2\, f_i - f_{i-1}\right]\right\}/8 \qquad (4.23)$$

6. **Estimar el error local de truncado, e_t, de la fórmula del corrector de Hamming con los valores $y_{i+1,o}$ del paso 2 y $\bar{y}_{i+1}$ del paso 5, mediante la expresión**

$$e_t = 9\ (\bar{y}_{i+1} - y_{i+1,o})/121 \qquad (4.24)$$

7. Obtener el valor final de la solución y_{i+1} con

$$y_{i+1} = \bar{y}_{i+1} - 9\ (\bar{y}_{i+1} - y_{i+1,o})/121 \qquad (4.25)$$

8. Calcular el valor correcto $f\ (t_{i+1},\, y_{i+1})$ y denotarlo por f_{i+1}.

Los pasos 2 a 8 son aplicados para $i = 4, 5, \ldots,$ esto es, hasta cubrir el intervalo de integración necesario.

Un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como el expresado por la ec 4.11 y sujeto a las condiciones iniciales dadas por la ec 4.12, puede resolver-se mediante el método de Hamming aplicando simultáneamente- para cada una de las n ecuaciones el procedimiento antes -- explicado. Para ello es conveniente anteponer una j como - subíndice de todos los términos Y y f a fin de identificar- las n ecuaciones.

En la fig 4.5 se presenta un diagrama de bloques simplificado para resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales - ordinarias con el método de Hamming. La subrutina que se - menciona debe contener el sistema de n ecuaciones diferen-- ciales.

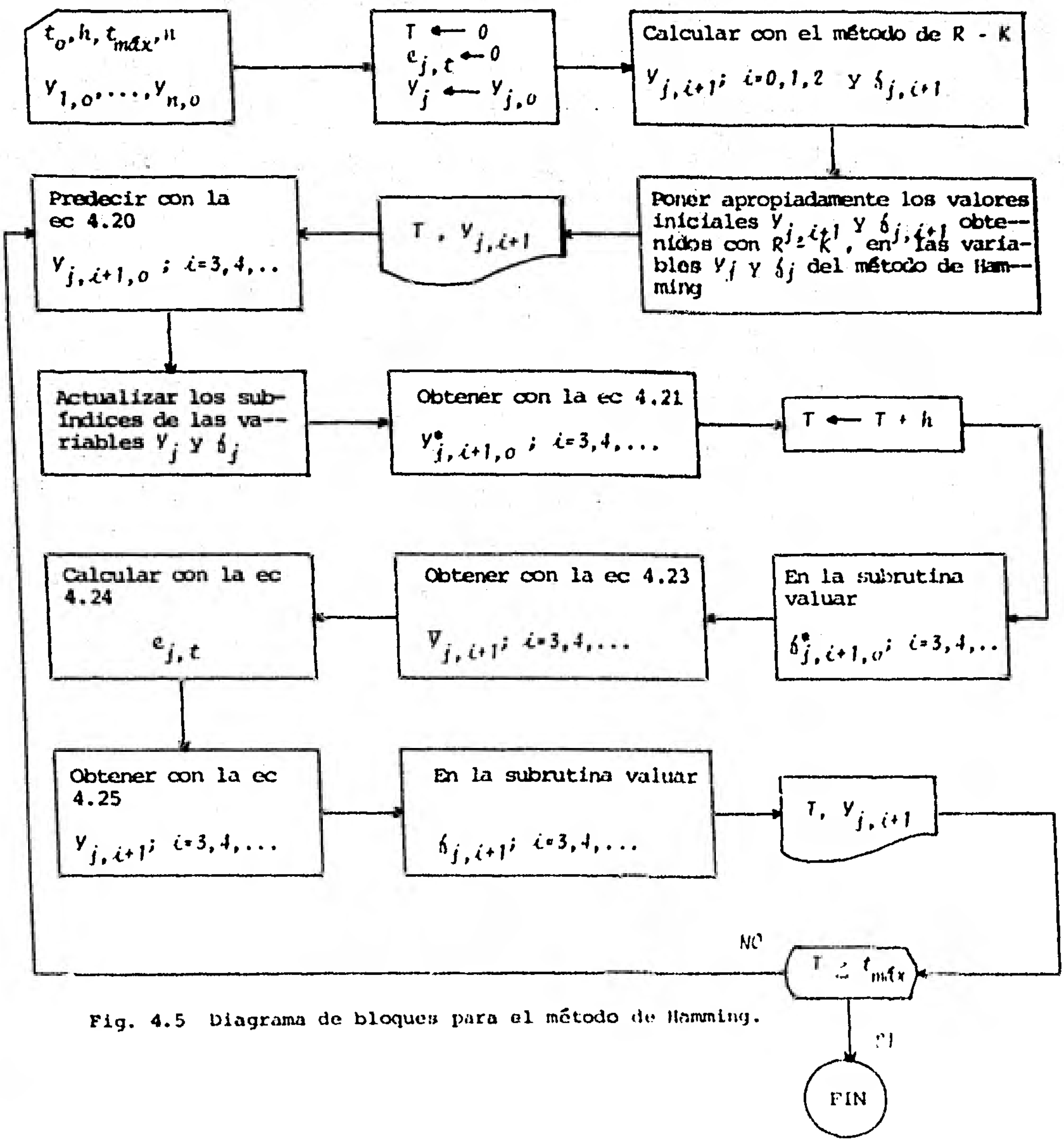


Fig. 4.5 Diagrama de bloques para el método de Hamming.

4.5 *Ejemplo 2*

Se trata de resolver el mismo problema del ejemplo 1 para efectos de comparación, solo que ahora empleando el método de Hamming.

SOLUCION

El sistema de ecuaciones diferenciales por resolver está expresado por la ec 4.17, sujeto a las mismas condiciones iniciales del ejemplo 1.

En un principio se seleccionó el mismo tamaño de paso que para el ejemplo 1, pero la solución obtenida para las oscilaciones del nivel de agua en la cámara aguas abajo de la turbina fue cada vez menos exacta, comparada con la obtenida mediante el método de Runge-Kutta, conforme se avanzaba en la integración. Al seleccionar un tamaño de paso igual a 2.5 segundos la solución obtenida mejoró, siendo prácticamente idéntica a la del método de Runge-Kutta.

La explicación de la inexactitud en la solución obtenida para un tamaño de paso igual a 5 segundos con el método de Hamming, quizá sea la insuficiencia de puntos por período para lograr una aproximación adecuada de la función solución. Debe recordarse que el método de Hamming aproxima la función solución mediante un polinomio de interpolación, lo cual requiere conocer los valores de la función solución en varios puntos anteriores al punto donde se está determinando el valor de la función solución; mientras que el método de Runge-Kutta requiere conocer el valor de la función solución en sólo un punto anterior a aquél donde se está determinando el valor de la función solución.

Por lo anterior, en problemas que involucren maniobras combinadas (que es lo más común en la práctica) será mejor seleccionar el método de Runge-Kutta; debido a que al pasar de una maniobra a otra se está cambiando la función solución, lo cual conduce a un error en el método de Hamming que obligaría a reinicializarlo.

Otro factor importante entre el método de Runge-Kutta y el de Hamming es que aun con un tamaño de paso igual a 2.5 segundos, siendo el tiempo total de integración el mismo, el tiempo de cálculo para ambos ejemplos debe de ser del mismo orden puesto que en ambos casos se están valuando cuatro veces las derivadas cada 5 segundos.

Los resultados obtenidos con el método de Hamming se presentan en la fig 4.6.

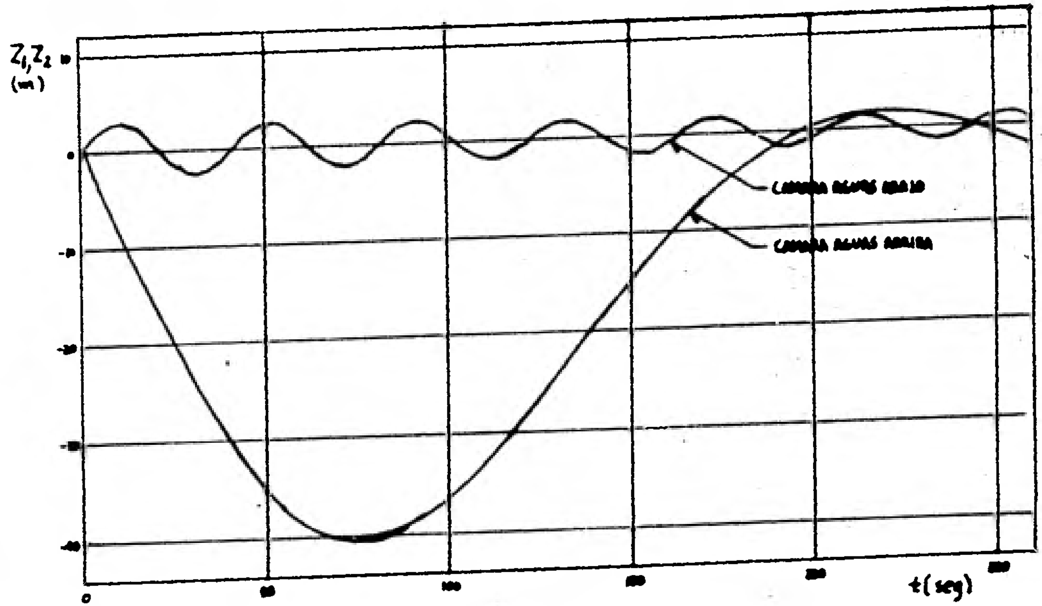


Fig. 4.6 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambas cámaras de oscilación (solución obtenida con el método de Hamming).

4.6 Aplicación

Se pretende determinar las dimensiones que deberán tener -- las secciones transversales de los pozos de oscilación para un sistema como el mostrado en la fig 2.1, suponiendo que - la localización del pozo 1 está favorecida por dos causas:- una es la construcción de una lumbrera para iniciar los --- frentes de excavación de los túneles 1 y 2; la otra es evitar los dispositivos de aireación para la bóveda del túnel- que se instalarían en ese sitio, a fin de proveer un desfogue para el aire que durante la operación seguiría acumulándose (fig 4.7). Los datos del sistema corresponden a una - de las alternativas del estudio de prefactibilidad del Proyecto Hidroeléctrico Itzantún que son: $L_1 = 5000$ m, $L_2 = 6300$ m, $At_1 = At_2 = 28.3$ m^2, $H = 320$ m y $Q_0 = 113$ m^3/s. Este último se distribuye para dos turbinas con un gasto de - 56.5 m^3/s a cada una.

Además, las condiciones topográficas en el sitio donde se-- rán ubicados los pozos obligan que la solución esté restringida a cumplir ciertos valores máximos de las oscilaciones, a saber: la máxima oscilación negativa permitida en el pozo 1 (para evitar que drene, esto es, evitar el peligro de- la entrada de aire al túnel) es de 11 m, mientras que para- el pozo 2 las máximas oscilaciones negativa y positiva no -

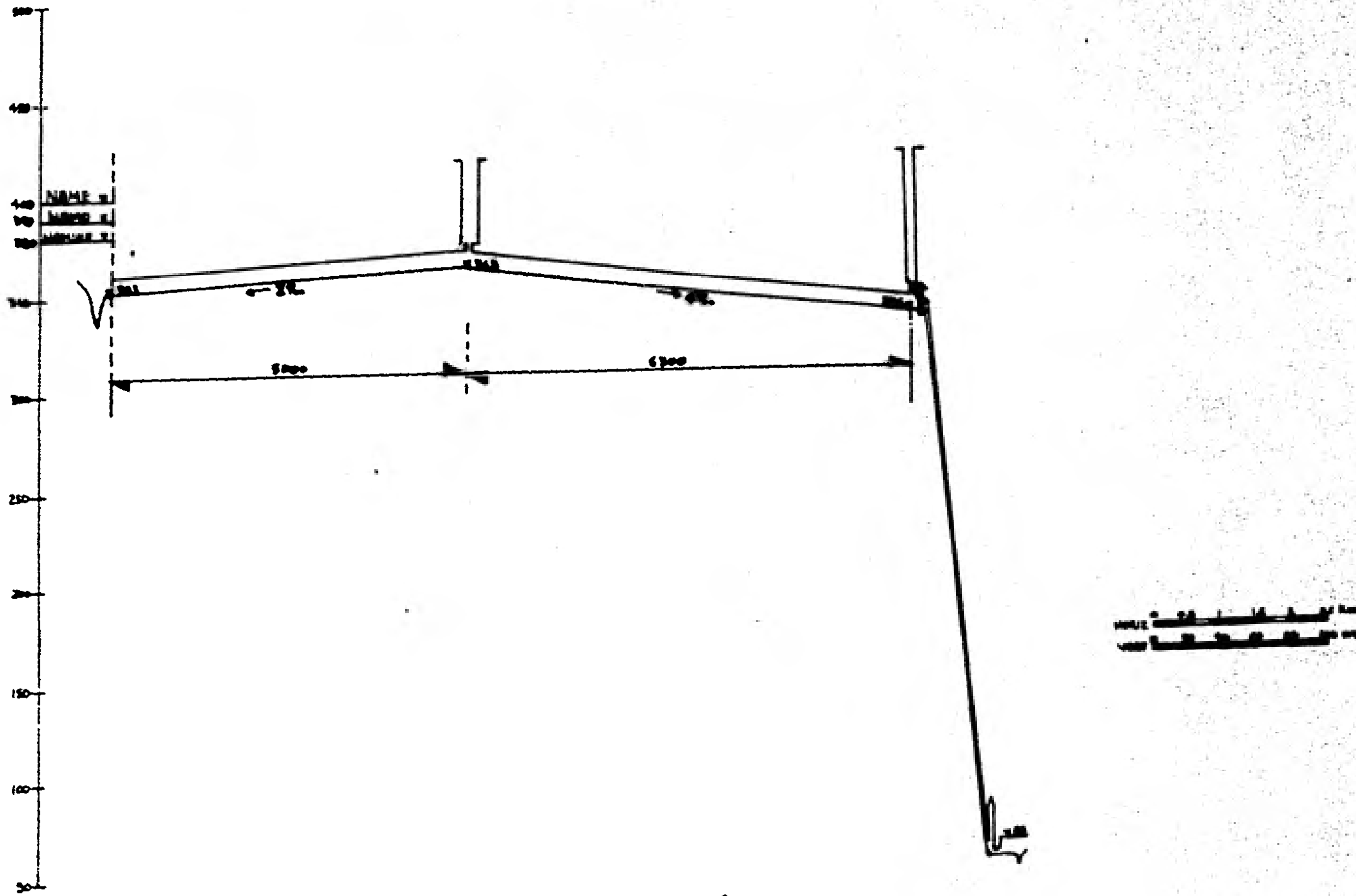


Fig. 4.7 Perfil esquemático del sistema de conducción.

deben ser mayores de 40 y 20 m respectivamente.

SOLUCION

Por simplicidad en los cálculos sólo se probarán cámaras - cuya área de la sección transversal sea constante.

Para verificar las máximas oscilaciones positiva y negativa fueron supuestas como más desfavorables las siguientes ma-- niobras a potencia constante:

Cálculo 1

Se verifican las máximas oscilaciones negativas consideran- do que las velocidades iniciales en ambos túneles (al tiem- po $t = 0$) son iguales a 4 m/s y el nivel de referencia para medir las oscilaciones es el NAMINE (fig 4.7). Las manio-- bras simuladas fueron:

- Rechazo total de carga
- Toma de carga de una turbina cuando la velocidad en el túnel 2 es mínima (máxima negativa)
- Toma de carga de la otra turbina cuando la velocidad - en el túnel 2 es mínima después de la maniobra prece-- dente.

Cálculo 2

Se verifica la máxima oscilación positiva suponiendo que el nivel de referencia corresponde al NAME (fig 4.7), con velocidades iniciales iguales a cero. Las maniobras simuladas fueron:

- Toma de carga de una turbina al tiempo $t = 0$
- Toma de carga de la otra turbina cuando la velocidad en el túnel 2 es mínima
- Rechazo de carga de las dos turbinas cuando la velocidad en el túnel 2 es máxima.

Otro aspecto considerado en la solución del problema fue, debido a que los cálculos preliminares indicaron que en ambos pozos las áreas serían mayores de 200 m^2 (lo cual satisface los valores mínimos para las áreas de Thoma que son $A_{Th_1} = 57\ m^2$ y $A_{Th_2} = 58.5\ m^2$, calculadas éstas mediante la ec 3.1), la necesidad de introducir un orificio o estrangulamiento en la base de ambos pozos para hacer posible la unión constructiva túnel de conducción - pozo de oscilación.

Tal modificación influye en los términos Z_1 y Z_2 que aparecen en las ecuaciones dinámicas, deducidas en el cap 2, para este tipo de sistema. Por tanto, introduciendo el térmi no que tiene en cuenta dicha modificación (véase anexo 1) - el sistema de ecuaciones para este caso se escribe

$$\frac{L_1}{g}\ \frac{dV_1}{dt} + Z_1 + CA_1^2\ \frac{dZ_1}{dt}\ \left|\frac{dZ_1}{dt}\right| + F_1\ V_1\ |V_1| = 0$$

$$\frac{L_2}{g}\ \frac{dV_2}{dt} + Z_2 - Z_1 + CA_2^2\ \frac{dZ_2}{dt}\ \left|\frac{dZ_2}{dt}\right| +$$

$$+ F_2\ V_2\ |V_2| = 0 \qquad (4.26)$$

$$At_1\ V_1 = A_1\ \frac{dZ_1}{dt} + At_2\ V_2$$

$$At_2\ V_2 = A_2\ \frac{dZ_2}{dt} + Q$$

Introduciendo el cambio de variables

$$Y(1) = V_1;\ Y(2) = V_2;\ Y(3) = Z_1;\ Y(4) = Z_2$$

y despejando los términos dV_1/dt, dV_2/dt, dZ_1/dt y dZ_2/dt - la ec 4.26 se transforma en

$$\frac{dY(1)}{dt} = -\ \frac{g}{L_1}\ (Y(3) + CA_1^2\ \frac{dY(3)}{dt}\ \left|\frac{dY(3)}{dt}\right| +$$

$$+ F_1\ Y(1)\ |Y(1)|\ )$$

$$\frac{dY(2)}{dt} = -\frac{g}{L_2}\left(Y(4) - Y(3) + CA_2^2 \frac{dY(4)}{dt}\left|\frac{dY(4)}{dt}\right| +\right.$$

$$\left. + F_2\, Y(2)\, |Y(2)|\right) \tag{4.27}$$

$$\frac{dY(3)}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(At_1\, Y(1) - At_2\, Y(2)\right)$$

$$\frac{dY(4)}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(At_2\, Y(2) - Q\right)$$

Considerando que $\eta_o = \eta$, la expresión para Q es

$$Q = \frac{Q_o\, H_o}{H + Y(4)}$$

donde $\quad H_o = H + Z_{2,o}$

El producto del numerador en la expresión de Q cuando se toma carga para una turbina se identificará por $Q_o'\, H_o'$, mientras que para la toma de carga de las dos turbinas se tendrá -- $Q_o''\, H_o''$.

A continuación se determinan los valores de F_1, F_2, C y Q - involucrados en la ec 4.27, para ello se ha considerado el- área del orificio $A_d = 25\ m^2$, el coeficiente de descarga -- del orificio $C_d = 0.7$, y el coeficiente de fricción -------

$k_1 = k_2 = 85$ (los túneles 1 y 2 tienen revestimiento de concreto).

De igual manera que en el ejemplo 1, los valores de F_1 y F_2 son

$$F_1 = \frac{L_1}{k_1^2 \; R_1^{4/3}} = \frac{5000}{(85)^2 \; (1.5)^{4/3}} = 0.403 \; s^2/m \quad ;$$

$$F_2 = \frac{6300}{(85)^2 \; (1.5)^{4/3}} = 0.507 \; s^2/m$$

El valor de C se obtiene como

$$C = \frac{1}{2g \; (C_d \cdot A_d)^2} = \frac{1}{2x9.81 \; (0.7x25)^2} =$$

$$= 0.000166 \; s^2/m^5$$

Los valores de $Z_{1,o}$ y $Z_{2,o}$ cuando están operando las dos turbinas, es decir, cuando $Q_o = Q_c''$ son

$$Z_{1,o} = - F_1 \; V_{1,o}^2 = - 0.403(4)^2 = - 6.45 \; m$$

$$Z_{2,o} = - F_1 \; V_{1,o}^2 - F_2 \; V_{2,o}^2 = - 6.45 - 0.507(4)^2 =$$

$$= - 14.56 \; m$$

por tanto

$$H''_o = H + Z_{2,o} = 320 - 14.56 = 305.44 \text{ m}$$

Asimismo, cuando está operando una turbina, esto es, cuando $Q_o = Q'_o$ resulta

$$Z_{1,o} = - F_1 V^2_{1,o} = - 0.403(2)^2 = - 1.61 \text{ m}$$

$$Z_{2,o} = Z_{1,o} - F_2 V^2_{2,o} = - 1.61 - 0.507(2)^2 = - 3.64 \text{ m}$$

entonces

$$H'_o = 320 - 3.64 = 316.36 \text{ m}$$

Luego, el valor de Q cuando operan dos turbinas es

$$Q = \frac{Q''_o H''_o}{H + Y(4)} = \frac{113 \times 305.44}{320 + Y(4)} = \frac{34515}{320 + Y(4)}$$

y cuando opera una, resulta

$$Q = \frac{Q'_o H'_o}{H + Y(4)} = \frac{56.5 \times 316.36}{320 + Y(4)} = \frac{17874}{320 + Y(4)}$$

Así, los únicos valores desconocidos en el sistema de ecuaciones diferenciales expresado por la ec 4.27, obviamente -

además de $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$ y $Y(4)$, son las áreas de las secciones transversales de ambos pozos A_1 y A_2. Para resolver el sistema de ecuaciones de la ec 4.27 conviene escribirlo en la forma

$$\frac{dY(3)}{dt} = \frac{1}{A_1}\left(At_1\, Y(1) - At_2\, Y(2)\right)$$

$$\frac{dY(1)}{dt} = -\frac{g}{L_1}\left(Y(3) + CA_1^2\, \frac{dY(3)}{dt}\left|\frac{dY(3)}{dt}\right| + \right.$$

$$\left. + F_1\, Y(1)\, |Y(1)|\right) \qquad (4.28)$$

$$\frac{dY(4)}{dt} = \frac{1}{A_2}\left(At_2\, Y(2) - Q\right)$$

$$\frac{dY(2)}{dt} = -\frac{g}{L_2}\left(Y(4) - Y(3) + CA_2^2\, \frac{dY(4)}{dt}\left|\frac{dY(4)}{dt}\right| + \right.$$

$$\left. + F_2\, Y(2)\, |Y(2)|\right)$$

Obsérvese que es importante el orden de colocación de las ecuaciones diferenciales dentro del sistema, ya que si el orden fuera el de la ec 4.27 no se podrían obtener los valores de $dY(1)/dt$ y $dY(2)/dt$ debido a que están en función de $dY(3)/dt$ y $dY(4)/dt$ respectivamente.

Las condiciones iniciales asociadas a la ec 4.28 para el -- cálculo 1 son

para $t = 0$, $Y(1) = 4\ m/s$; $Y(2) = 4\ m/s$; $Y(3) = -6.45\ m$;

$$Y(4) = -14.56\ m$$

mientras que para el cálculo 2 están dadas por

para $t = 0$, $Y(1) = Y(2) = Y(3) = Y(4) = 0$

Entonces, los valores de las áreas A_1 y A_2 se determinan como se indica a continuación:

1) Proponer una pareja de valores para A_1 y A_2.

2) Resolver el sistema de ecuaciones dado por la ec 4.28, tanto para el cálculo 1 como para el 2.

3) Verificar si se satisfacen las restricciones establecidas en ambos pozos para las máximas oscilaciones positiva y negativa permitidas.

4) Si no se satisfacen tales restricciones se proponen valores nuevos para A_1 o A_2, o ambas (según hayan sido - los valores obtenidos previamente para las máximas oscilaciones positiva y negativa) y se repite el procedi

miento hasta satisfacer dichas restricciones.

Debe hacerse énfasis en que tanto para el cálculo 1 como para el 2 la única ecuación diferencial que cambia en la ec - 4.28, es aquella donde aparece la variable Q debido a que - ésta debe sustituirse por los valores correspondientes a cada etapa de las maniobras, esto es

$Q = 0$ para rechazo total de carga

$$Q = \frac{17874}{320 + Y(4)}$$ para toma de carga de una turbina

$$Q = \frac{34515}{320 + Y(4)}$$ para toma de carga de dos turbinas

En la tabla 4.1 se presenta un resumen de los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales- dado por la ec 4.28 mediante el método de Runge-Kutta, que- cumplen las restricciones establecidas para las máximas oscilaciones permitidas. Como puede observarse se han considerado tres casos que son $A_1 < A_2$, $A_1 > A_2$ y $A_1 = A_2$ con el fin de seleccionar cuál combinación resulta mejor; de ellos el más factible podría ser el primero debido a que conduce- a un volumen de excavación menor.

TABLA 4.1

ALTERNATIVA	CALCULO	A_d (m^2)	A_1 (m^2)	A_2 (m^2)	MAX.OSC. POSITIVA (m) POZO 1	MAX.OSC. POSITIVA (m) POZO 2	MAX.OSC. NEGATIVA (m) POZO 1	MAX.OSC. NEGATIVA (m) POZO 2	VOL.EXC. APROXIMADO (m^3) POZO 1	VOL.EXC. APROXIMADO (m^3) POZO 2
I-a	1	25	200	850	7.54	14.70	10.36*	21.98*	5400	51000
	2	25	200	850	7.94*	15.34*	9.02	19.43	Σ = 56 400	
I-b	1	25	1250	700	9.27	9.85	10.60*	24.27*	33750	42000
	2	25	1250	700	9.65*	9.00*	7.45	17.31	Σ = 75 750	
I-c	1	25	1050	1050	7.11	9.30	10.40*	17.06*	28350	63000
	2	25	1050	1050	7.16*	9.55*	8.08	16.89	Σ = 91 350	
II-a	1	25	300	650	9.52	17.28	13.59*	25.02*	9600	39000
	2	25	300	650	9.48*	18.53*	10.02	21.56	Σ = 48 600	
II-b	1	25	850	350	13.91	17.57	14.06*	35.39*	27200	21000
	2	25	850	350	15.19*	17.92*	8.75	22.32	Σ = 48 200	
II-c	1	25	600	600	11.40	14.17	15.24*	22.69*	19200	36000
	2	25	600	600	11.90*	15.16*	10.80	20.28	Σ = 55 200	
III	1	25	-	700	-	17.52	-	25.54*	-	42000
	2	25	-	700	-	18.72*	-	21.62		

* valores máximos obtenidos en el cálculo correspondiente

Nótese que se han incluído dos alternativas adicionales denominadas por II y III; la primera de ellas corresponde a las mismas condiciones del planteamiento original del problema solo que ahora se está suponiendo la máxima oscilación negativa permitida en el pozo 1 igual a 16 m (lo cual obligaría a modificar las pendientes en ambos túneles), la segunda considera la existencia únicamente del pozo 2 con lo que las máximas oscilaciones positiva y negativa permitidas son 20 y 40 m respectivamente.

Con la introducción de la alternativa II puede verse (Tabla 4.1) que se obtiene una notable disminución en las dimensiones de A_1 y A_2 sobre todo en los casos II-b y II-c; además, el caso en que se obtiene un volumen de excavación menor resultó ser el II-b.

La alternativa III, que da un volumen de excavación menor a cualquier otra, pone de manifiesto que en este caso la ubicación del pozo 1 impone una condición desfavorable para el dimensionamiento de ambos pozos. Sin embargo, debe observarse que sería más factible construir los dos pozos del caso II-b que el pozo de la alternativa III, ya que en esta última la altura del pozo es aproximadamente de 60 m mientras que para el pozo 1 del caso II-b la altura es aproximadamente de 32 m. Estos resultados, aunque a gran escala --

por los volúmenes requeridos para los pozos de oscilación, muestran una ventaja (ya mencionada en la introducción de este trabajo) que se refiere a la posibilidad de seleccionar dos pozos en lugar de uno cuando las dimensiones de este último no hacen posible su construcción.

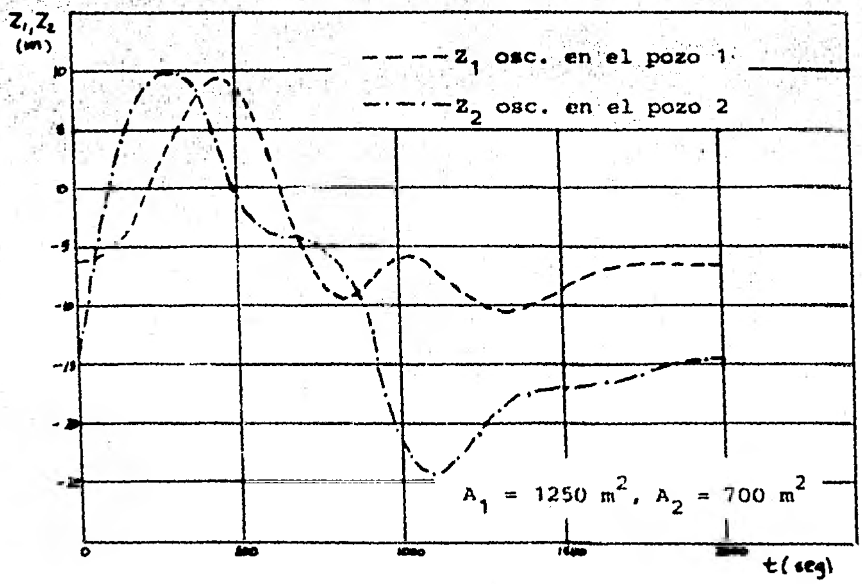
Además, a pesar de que los resultados obtenidos parecen imprácticos debido a la magnitud de las dimensiones determinadas para las secciones transversales de los pozos, este ejemplo ha sido útil para ilustrar el procedimiento a seguir en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de oscilación.

Las gráficas de la variación del nivel de agua en el tiempo para cada caso de la tabla 4.1, se muestran en las figs 4.8 a 4.14. De ellas puede observarse que las oscilaciones se amortiguan en un tiempo relativamente corto; además, cuando se determina la máxima oscilación negativa ésta corresponde, excepto en los casos de las figs 4.9, 4.10 y 4.12, al primer máximo negativo.

Cabe mencionar que dentro de los ensayos hechos para obtener los resultados presentados en la tabla 4.1 pudo observarse, por ejemplo para el cálculo 1, que sólo en el caso $A_1 < A_2$ (permaneciendo fijo el valor de A_2) el comportamien to de las oscilaciones en ambos pozos fue extraño por lo siguiente: para un valor fijo de A_2, al aumentar el valor de A_1 respecto a otro es lógico pensar que la oscilación máxima positiva en la cámara de área aumentada debería disminuir respecto a la anterior; sin embargo, el resultado fue de efecto contrario, esto es, aumentó la oscilación máxima positiva. En cambio, la oscilación máxima positiva en la cámara de área fija si disminuyó respecto al valor que tenía anteriormente. El mismo fenómeno se observó al disminuir el valor de A_1 respecto a otro, es decir, en la cámara de área disminuída la oscilación máxima positiva disminuyó mientras que la oscilación máxima positiva en la cámara de área fija aumentó.

Desde luego, las soluciones obtenidas pueden mejorarse mediante la selección de otras alternativas, a saber: introducción de una cámara de expansión inferior y/o superior en uno o ambos pozos, ubicar el pozo 1 más cerca de la tubería de presión con lo cual, generalmente, se consigue un dimensionamiento más equilibrado entre ambos pozos.

Finalmente, no debe pensarse que por haber omitido la presentación de los programas mediante los cuales se resolvieron los ejemplos, éstos son muy complicados de elaborar o que necesariamente requieren procesarse en una computadora "grande".



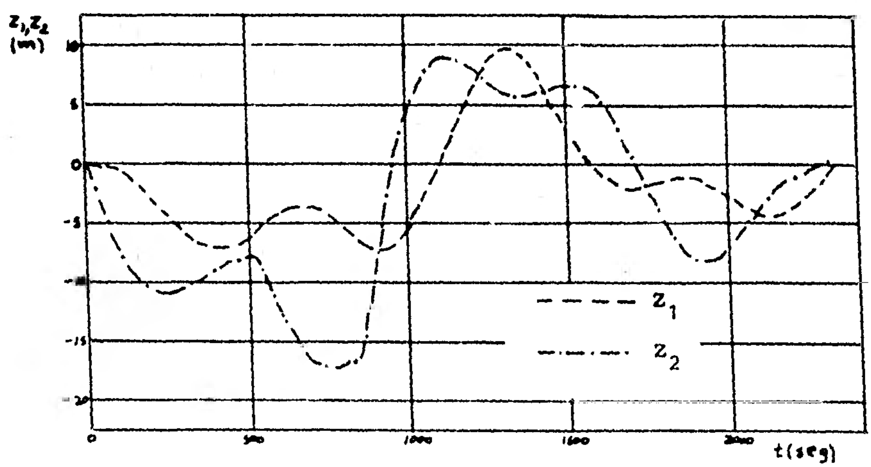
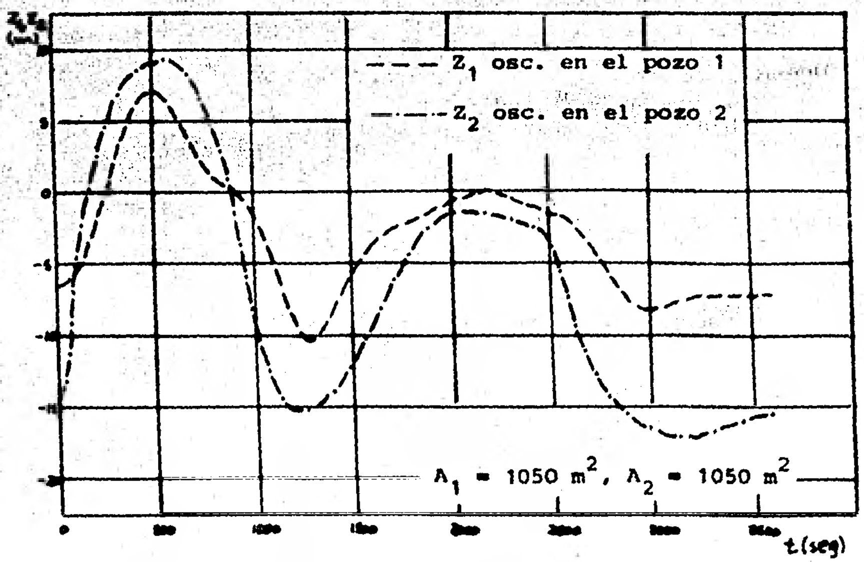


Fig. 4.9 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambos pozos de oscilación.



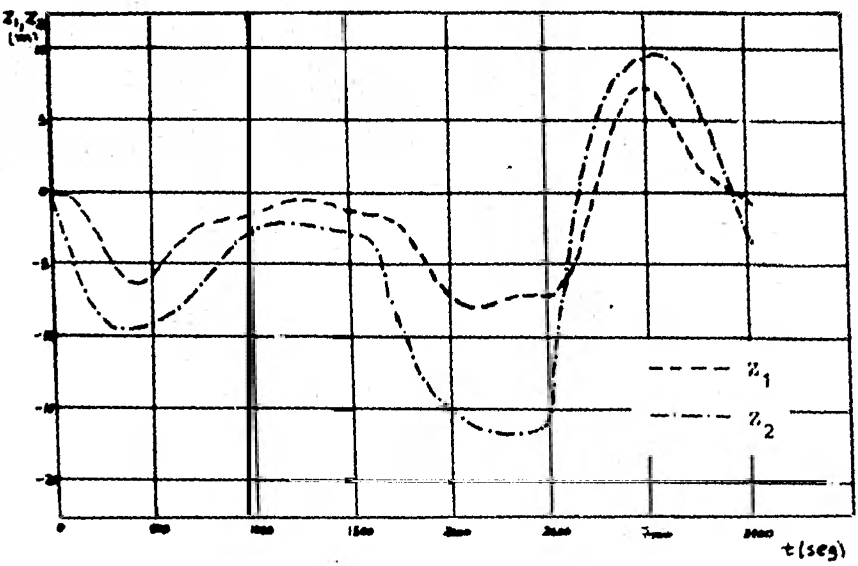


Fig. 4.10 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambos pozos de oscilación.

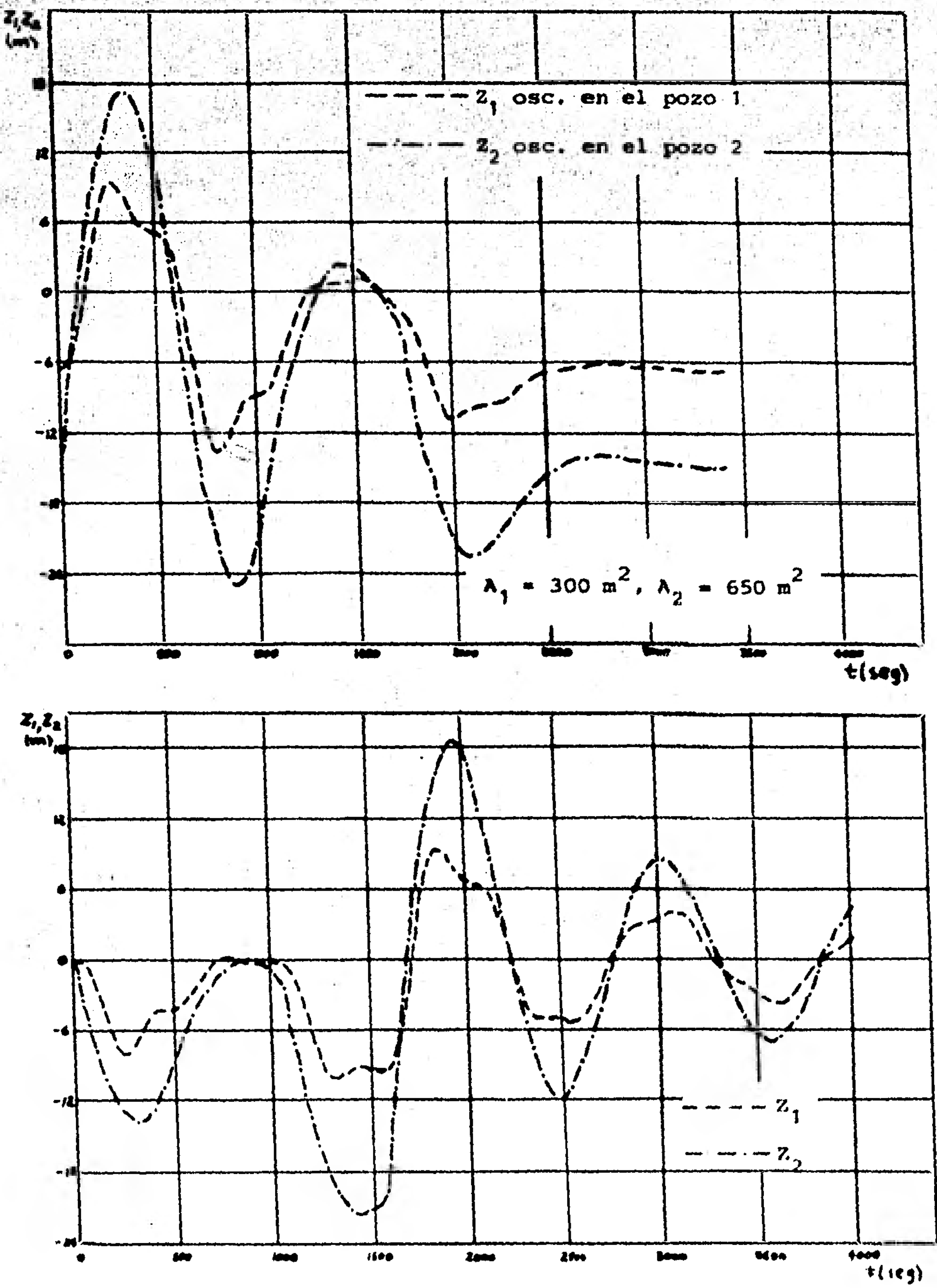


Fig. 4.11 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambos pozos de oscilación.

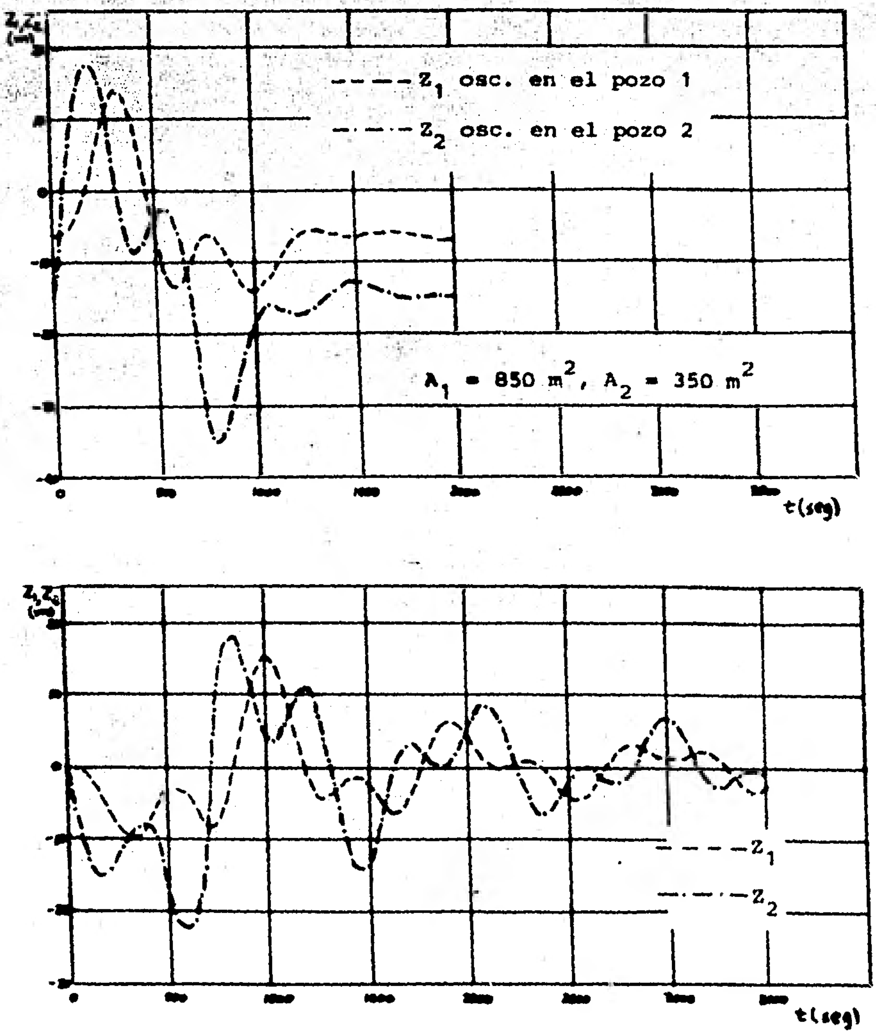


Fig. 4.12 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambos pozos de oscilación.

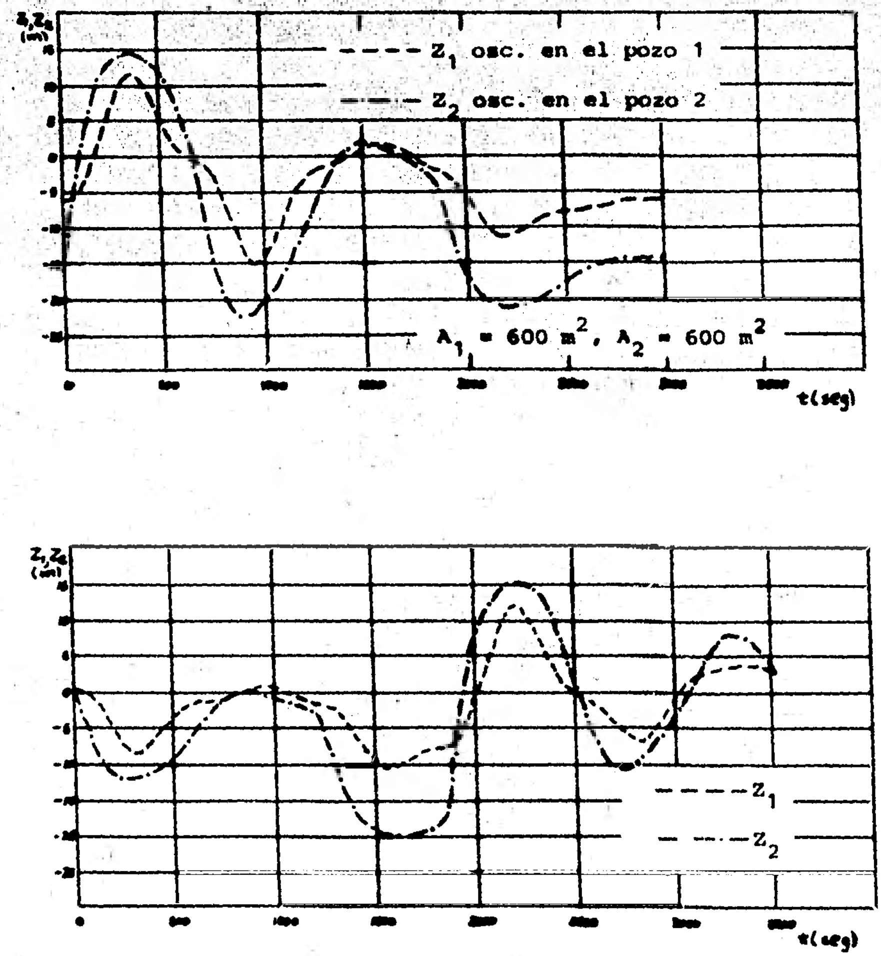


Fig. 4.13 Variación en el tiempo del nivel de agua en ambos pozos de oscilación.

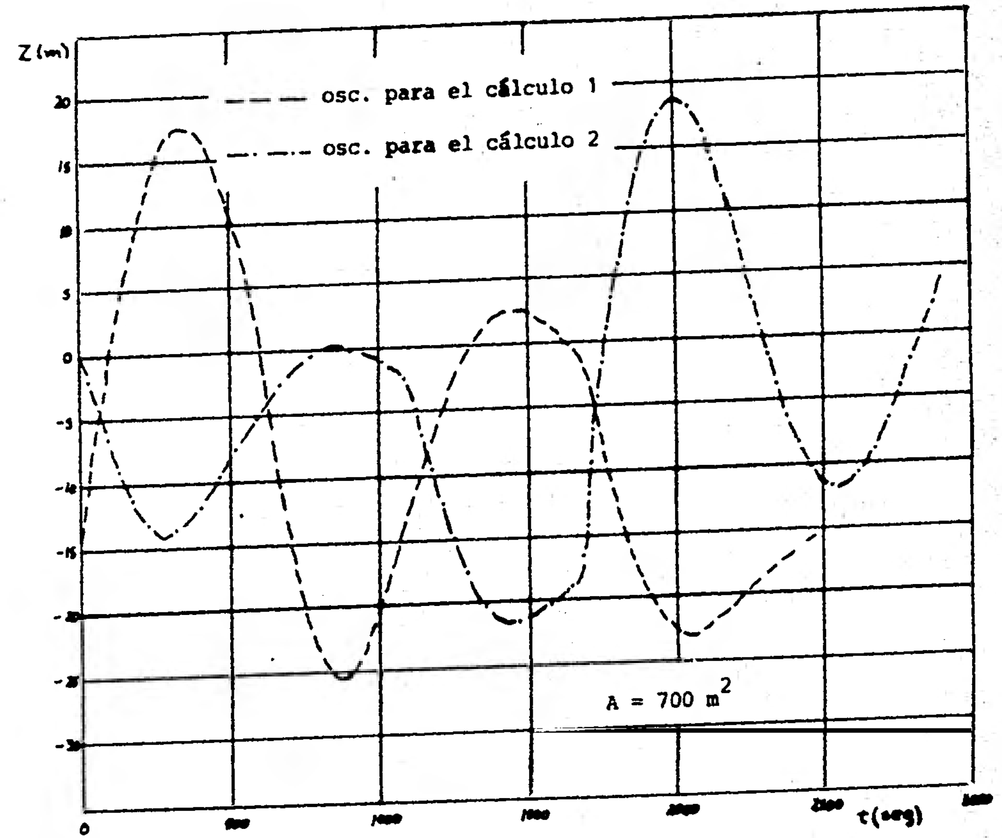


Fig. 4.14 Variación en el tiempo del nivel de agua en un pozo de oscilación simple.

5. CONCLUSIONES

El fenómeno de las oscilaciones del nivel de agua en cámaras de oscilación múltiples, está gobernado por las ecuaciones dinámica y de continuidad planteadas para el conjunto de cámaras; además, en función del tipo de maniobra, se han dado expresiones para determinar el valor de la descarga de agua Q hacia las turbinas que es necesario en la ecuación de continuidad.

También se han señalado algunos aspectos de estabilidad de las oscilaciones del nivel de agua que deben ser considerados en cualquier solución de un problema, ya que de ello dependerá lograr una operación satisfactoria de las turbinas.

Se determinó que las condiciones de estabilidad en un siste ma con ambas cámaras de oscilación localizadas aguas arriba de las turbinas, dependen del tipo de raíces obtenidas en - la solución del determinante asociado al sistema de ecuaciones diferenciales dádo por las ecs 3.12 y 3.13. La solu--- ción del determinante que conduce a la estabilidad de las - oscilaciones, permite obtener las condiciones de estabili-- dad de Routh-Hurwitz.

De la discusión de tales condiciones se determinó que el -- problema de estabilidad depende principalmente de la rela-- ción de los períodos de oscilación de ambas cámaras, y de - las pérdidas de energía por fricción inherentes al sistema; además, se vió que es posible reducir el área de la cámara- de oscilación ubicada más cerca de la tubería de presión, - sólo si se demuestra que n_1 tiene un valor tal que haga po- sible ser a la función Γ negativa y que el dimensionamiento sea equilibrado (desde el punto de vista económico) en am-- bas cámaras.

Asimismo, para un sistema donde las turbinas se ubican en-- tre ambas cámaras de oscilación se ha presentado un crite-- rio aproximado, para resolver el problema de estabilidad, - que puede emplearse en estudios preliminares. En este sis- tema de oscilación particular debe también evitarse aquella situación donde los períodos en ambas cámaras sean iguales- o aproximadamente iguales, para así eliminar el fenómeno de resonancia en el sistema.

Es importante mencionar que ambos criterios para determinar la estabilidad de las oscilaciones, están fundamentados en la teoría desarrollada por D. Thoma (en 1910) para estudiar la estabilidad de las oscilaciones en una cámara simple; por tanto, resulta necesario tener siempre en mente las hipótesis establecidas en el desarrollo de dicha teoría y que no siempre se cumplen del todo en la realidad, a saber

- La turbina está gobernada para asegurar potencia constante
- Las oscilaciones en la cámara son de amplitud pequeña
- La eficiencia de la turbina es constante
- Las pérdidas de presión en la tubería pueden despreciarse
- La carga de velocidad en el túnel puede despreciarse
- El gobernador de la turbina es altamente sensible y reacciona inmediatamente

- El sistema hidroeléctrico está aislado, esto es, no está interconectado con otro sistema.

Algunos de los factores antes mencionados contribuyen, bajo ciertas circunstancias, a mejorar las condiciones de estabilidad mientras que otros tienen un efecto contrario.

Respecto a los procedimientos numéricos presentados para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de oscilación, puede concluirse que ambos son útiles cuando se tratan de resolver problemas que involucren una maniobra sencilla si se selecciona para ello un intervalo o tamaño de paso en la integración, de tal manera que se defina adecuadamente la función solución. Esto es importante cuando la función solución es periódica y además el período de oscilación es relativamente corto; ya que, como se recomendó en el ejemplo 1, el intervalo o tamaño de paso deberá seleccionarse para tener cuando menos 10 a 15 puntos por período para definir la función solución. Lo anterior hará que en algunos casos el método de Hamming, comparado con el de Runge-Kutta, pierda una de sus principales ventajas a saber, la rapidez.

Cuando el problema involucre una maniobra combinada será mejor seleccionar el método de Runge-Kutta, ya que al pasar de una maniobra a otra se cambia la función solución lo ---

cual no influye en este método porque para obtener y_{i+1} sólo es necesario conocer y_i; en cambio, al utilizar el método de Hamming su fundamento matemático mismo (determinar -- y_{i+1} mediante un polinomio de interpolación) impide obtener y_{i+1} correctamente. Para lograrlo, se tendría que reinicializar el método y esto ciertamente no conduce a ventaja alguna en la utilización del método de Hamming.

En cuanto a la aplicabilidad en México de alguno de los sistemas de oscilación presentados en este trabajo debe decirse que en su selección, además de los factores de tipo técnico (topográficos, geológicos, constructivos, etc), influyen de una manera bien importante las decisiones a nivel directivo que son tomadas por las autoridades dentro de este-campo de la ingeniería.

Por tanto, es difícil predecir (sumado a que tales estructuras hidráulicas no se construyen con frecuencia) si alguna-vez nuestras autoridades llegarán a seleccionar uno de los-sistemas aquí presentados, pero lo que si se puede afirmar-es que en varios lugares del mundo han sido utilizados. Esto pone de manifiesto la importancia y utilidad de las cámaras de oscilación múltiples.

A N E X O "I"

DETERMINACION DEL TERMINO QUE MODIFICA A LA OSCILACION Z EN CASO DE ESTRANGULAMIENTO EN LA BASE DE LA CAMARA.

Cuando el agua fluye hacia la cámara de oscilación, la carga de presión abajo del orificio o estrangulamiento se incrementa en una cantidad $\Delta P/\gamma$ que debe sumarse a la elevación Z del nivel de agua en la cámara de oscilación (fig A-1). En cambio, cuando el agua fluye desde la cámara de oscilación el valor de la carga de presión $\Delta P/\gamma$ debe restarse a la elevación Z, debido a que la carga de presión abajo del orificio es disminuída en tal cantidad.

El gasto Q_d a través del orificio será igual, por continuidad, al producto del área de la sección transversal de la -

cámara y la variación en el tiempo del nivel de agua en ésta, esto es

$$Q_d = \pm\ C_d\ A_d\ \sqrt{2g\ (\Delta P/\gamma)} = A\ dZ/dt \qquad (1A)$$

donde C_d es el coeficiente de descarga del orificio y debe obtenerse empíricamente.

Despejando la carga de presión $\Delta P/\gamma$ de la ec 1A e introduciendo el símbolo de valor absoluto para tener en cuenta el signo de dZ/dt y con ello el de $\Delta P/\gamma$, se obtiene

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{1}{2gC_d^2} \left(\frac{A}{A_d}\right)^2 \frac{dZ}{dt} \left|\frac{dZ}{dt}\right|$$

o también

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = C\ A^2\ \frac{dZ}{dt} \left|\frac{dZ}{dt}\right| \qquad (2A)$$

donde

$$C = \frac{1}{2g\,C_d^2 A_d^2}$$

Así, el término Z que aparece en la ecuación dinámica debe reemplazarse por el término $(Z + \Delta P/\gamma)$ teniendo en cuenta el valor de $\Delta P/\gamma$ dado por la ec 2A.

Es importante mencionar que para el caso de oscilaciones -- grandes la modificación anterior al término Z, debe considerarse en la expresión para la potencia de la turbina durante el curso de las oscilaciones. Cuando las oscilaciones - sean pequeñas el efecto de estrangulamiento en la expresión para la potencia puede despreciarse.

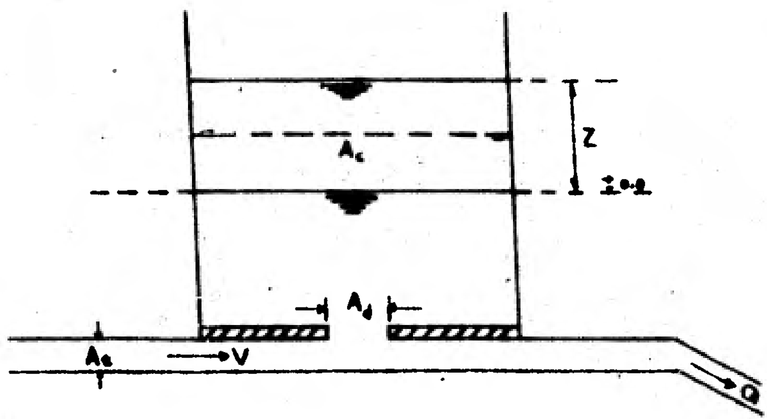


Fig. A.1 Cámara de oscilación con estrangulamiento en su base.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

1. Bickley W.G. y Talbot A., *"An Introduction to the Theory of Vibrating Systems"*, Oxford University Press, -- 1961.

2. Carnahan B., *"Applied Numerical Methods"*, John Wiley, 1969.

3. Chaudhry M. Hanif, *"Applied Hydraulic Transients"*, -- Van Nostrand, 1979.

4. Chaudhry M. Hanif y Ruus Eugen, *"Surge Tank Stability by Phase Plane Method"*, Vol. 97, No HY4, April 1971, - pp 489-503.

5. Dahlquist G. y Björck A., *"Numerical Methods"*, Prentice-Hall, 1974.

6. Elsgoltz L., *"Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional"*, Ediciones de Cultura Popular, 1975.

7. Fuentes Mariles O.A., *"Notas de la clase de Métodos Numéricos en Hidráulica"*, DEPFI, UNAM, (No publicadas),- 1980.

8. Hayashi C., *"Nonlinear Oscillations in Physical Sys---tems"*, Mc Graw Hill, 1964.

9. Jaeger C., *"Engineering Fluid Mechanics"*, Blackie, --- 1956.

10. Jaeger C., *"Fluid Transients in Hydro-Electric Engi---neering Practice"*, Blackie, 1977.

11. Jaeger C., *"A Review of Surge Tank Stability Criteria"*, Journal of Basic Engineering, ASME, Diciembre 1960, pp 765 - 783.

12. Jaeger C., *"Present Trends in Surge Tank Design"*, Proceedings, Institution of Mechanical Engineers, Vol. 168, No. 2, 1954, pp 91 - 124.

13. Kononenko V.O., *"Vibrating Systems with a Limited Po--wer Supply"*, Iliffe Books, 1969.

14. Krasovskii N.N., *"Stability of Motion"*, Stanford University Press, 1963.

15. Kreyszig Erwin, *"Matemáticas Avanzadas para Ingeniería"*, Vol. 1, Limusa, 1979.

16. Minorsky N., *"Nonlinear Oscillations"*, Van Nostrand,- 1962.

17. Mosonyi Emil, *"Water Power Development"*, Vol. II, -- Academia de Ciencias de Hungría, 1965.

18. Piskunov N., *"Cálculo Diferencial e Integral"*, Tomo - II, MIR, MOSCU, 1978.

19. Ralston A. y Wilf H.S., *"Mathematical Methods for Digital* Computers", John Wiley, 1960.

20. Rosengaus Moshinsky M.M., *"Fuerzas Sobre la Losa de -- una Cámara de Oscilación Estrangulada"*, Tesis Profesional, UNAM, 1980.

21. Routh E.J., *"Dynamics of a System of Rigid Bodies"*, - Dover, 1955.

22. *"Informe Preliminar No. 1 del Proyecto Hidroeléctrico - Itzantún"*, Comisión Federal de Electricidad, Noviembre 1977.

23. *"Informe de Avance para la Prefactibilidad del Proyecto Hidroeléctrico Itzantún"*, Comisión Federal de Electricidad, Abril 1978.