

2-ej.
38



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**UN TEOREMA SOBRE CICLOS IMPARES
INDUCIDOS EN GRAFICAS UNIVOCAMENTE
3 COLOREABLES**

TESIS PROFESIONAL
Que para obtener el título de
M A T E M A T I C O
p r e s e n t a

ADOLFO SANCHEZ FLORES

México, D. F.

1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

CAPITULO	I	Conceptos Generales	3
CAPITULO	II	Gráficas Univocamente 3-coloreables.	21
CAPITULO	III	Un Teorema Sobre Gráficas Univocamente 3-coloreables.	37
REFERENCIAS			72

P R O L O G O

Si se entiende por obtener una n -coloración de una gráfica al hecho de generar una partición de sus vértices, tal que esté formada exactamente por n clases no vacías y vértices adyacentes en la gráfica estén en distintas clases, entonces cada gráfica tiene una n -coloración para n igual al número de vértices de la gráfica. Sin embargo, las n -coloraciones de una gráfica dada G que van a interesar, van a ser aquéllas en las que n es lo más chico posible, es decir n igual al número cromático $\chi(G)$ de la gráfica; más precisamente, en este trabajo nos ocuparemos de las gráficas G tales que sólo tienen una $\chi(G)$ -coloración, y que llamaremos unívocamente $\chi(G)$ -coloreables.

Para una gráfica G se tiene: G es unívocamente $\chi(G)$ -coloreable con $\chi(G)=1$ si y sólo si G no tiene aristas; y G es unívocamente $\chi(G)$ -coloreable con $\chi(G)=2$ si y sólo si G tiene aristas y todo ciclo en G tiene longitud par [7]. De aquí que la estructura de una gráfica G unívocamente $\chi(G)$ -coloreable es muy simple si $\chi(G)=1$ ó 2 ; pero para $\chi(G)\geq 3$, la estructura de G resulta ser mucho más complicada, incluso en el caso $\chi(G)=3$, sin embargo se tienen varios resultados sobre estas gráficas.

El objetivo principal de este trabajo es presentar un

nuevo resultado sobre gráficas unívocamente 3-coloreables, y para esto se ha ordenado el trabajo en la siguiente forma:

En el primer capítulo se dan los conceptos que se van a manejar en el trabajo. En el segundo capítulo se da un panorama de los resultados que se tienen sobre gráficas unívocamente 3-coloreables, y en general sobre gráficas unívocamente n -coloreables. Y en el tercer capítulo se demuestra un teorema sobre ciclos impares inducidos en gráficas unívocamente 3-coloreables.

Quiero agradecer a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez la ayuda prestada en la elaboración y revisión de este trabajo, así como al Dr. Víctor Neumann sus sugerencias.

Finalmente, dedico este trabajo a todas las personas que de una u otra forma me ayudaron en mis estudios.

AGOSTO DE 1986

C A P I T U L O I

CONCEPTOS GENERALES

Empezaremos este trabajo dando las definiciones y la terminología de los conceptos que serán utilizados a lo largo del mismo. También veremos en este capítulo algunos teoremas básicos que serán utilizados en los próximos capítulos.

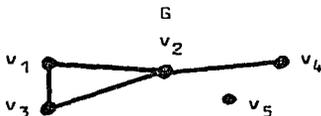
Principiemos dando la definición de gráfica.

Una gráfica G está formada por un conjunto $V(G)$ no vacío de puntos, llamados vértices, y otro conjunto $A(G)$ de parejas no ordenadas de distintos vértices, llamadas aristas.

Por lo general utilizaremos las últimas letras del alfabeto, en minúscula, para denotar vértices, agregándoles subíndices cuando sea necesario. Y las primeras letras del alfabeto, también en minúscula, las dejaremos para representar aristas. Las letras mayúsculas las utilizaremos para denotar gráficas y conjuntos de vértices o aristas. La cardinalidad de un conjunto B la denotaremos por $|B|$.

Si G es una gráfica y v y v' son vértices de G tales que la pareja no ordenada que forman está en $A(G)$, entonces denotaremos a tal pareja por vv' o $v'v$, y se dirá que v y v' son adyacentes o vecinos en G y que la arista vv' (o $v'v$) incide en v y en v' . El grado de un vértice w de G es el número de aristas que inciden en él y se denota por $gr_G(w)$. También denotaremos por $\delta(G)$ al grado del vértice de G de menor grado. Finalmente, al conjunto de vértices adyacentes en G a un vértice x lo representaremos por $N_G(x)$ o, si no hay confusión, por $N(x)$.

En la siguiente gráfica se ilustren todos los conceptos anteriormente mencionados. En esta gráfica, como en todas las de este trabajo, los vértices son los puntos resaltados, y las aristas son las curvas que los unen.



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$|V(G)| = 5$$

$$A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4\}$$

$$|A(G)| = 4$$

$$gr_G(v_1) = 2, gr_G(v_2) = 3, gr_G(v_3) = 2, gr_G(v_4) = 1, gr_G(v_5) = 0 \text{ y } \delta(G) = 0$$

$$N(v_1) = \{v_2, v_3\}, N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}, N(v_3) = \{v_1, v_2\}, N(v_4) = \{v_2\}$$

$$\text{y } N(v_5) = \emptyset$$

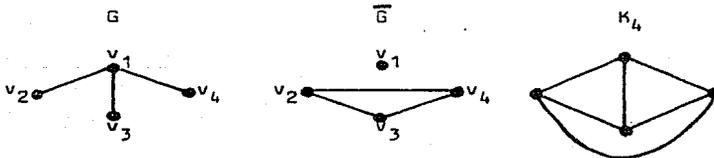
Puesto que cada arista de una gráfica incide en dos vértices, entonces la suma de los grados de los vértices de la gráfica debe ser dos veces el número de aristas. Por lo tanto

se tiene el siguiente teorema, debido a Euler, que fue el primer teorema de Teoría de Gráficas.

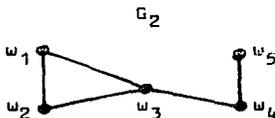
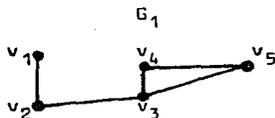
Teorema 1.1. [7] La suma de los grados de los vértices de una gráfica es igual a dos veces el número de aristas.

Corolario 1.1.1. [7] En cualquier gráfica, el número de vértices de grado impar es par.

Para una gráfica G definiremos su gráfica complementaria \bar{G} , como aquella en la que $V(\bar{G})=V(G)$ y $b \in A(\bar{G})$ si y sólo si $b \notin A(G)$. También definiremos a la gráfica completa con n vértices, como aquella en la que cada vértice es adyacente a todos los demás vértices y tiene exactamente $n-1$ vértices; a tal gráfica la denotaremos por K_n . En los siguientes ejemplos se muestra a una gráfica, a su gráfica complementaria y a K_4 .

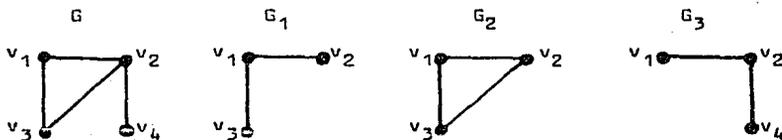


Diremos que dos gráficas G_1 y G_2 son isomorfas, si existe una función biyectiva $f:V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $vv' \in A(G_1)$ si y sólo si $f(v)f(v') \in A(G_2)$. Por ejemplo, las siguientes gráficas son isomorfas.



$f(v_1)=w_5$, $f(v_2)=w_4$, $f(v_3)=w_3$, $f(v_4)=w_2$ y $f(v_5)=w_1$

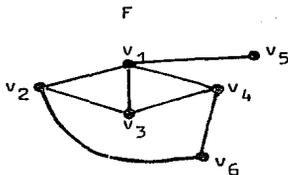
Una subgráfica G' de una gráfica G es una gráfica tal que $V(G') \subseteq V(G)$ y $A(G') \subseteq A(G)$; cuando una de estas contenciones es propia, se dice que G' es una subgráfica propia de G . Si toda arista de G que sólo incide en vértices de G' también está en $A(G')$, entonces diremos que G' es una subgráfica inducida de G . Claramente para cada $B \subseteq V(G)$, $B \neq \emptyset$, existe una única subgráfica inducida G_1 de G tal que $V(G_1)=B$; a tal subgráfica la denotaremos por $G(B)$.



En los ejemplos anteriores, G_1 es una subgráfica de G , pero no es inducida; G_2 y G_3 sí son subgráficas inducidas de G . Obsérvese que G_1 es isomorfa a G_3 .

Una subgráfica F' de una gráfica F es un clan de F si, F' es completa y no es subgráfica propia de ninguna otra subgráfica completa de F ; denotaremos por $\omega(F)$ al número de vértices en uno de los clanes de F con más vértices. Se dirá que un con-

junto de clanes cubre a F , si cada vértice de F está en uno de estos clanes; y el número de partición $\Theta(F)$ de F será la cardinalidad de uno de estos conjuntos que cubren a F con menos elementos. El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos.



En este ejemplo, los clanes de F son: $F(\{v_1, v_2, v_3\})$, $F(\{v_1, v_3, v_4\})$, $F(\{v_1, v_5\})$, $F(\{v_2, v_6\})$ y $F(\{v_4, v_6\})$; por lo tanto $\Omega(F)=3$. Claramente el conjunto formado por todos los clanes anteriores cubre a F , y es fácil ver que el conjunto formado por los clanes $F(\{v_1, v_2, v_3\})$, $F(\{v_1, v_5\})$ y $F(\{v_4, v_6\})$ también cubre a F y que $\Theta(F)=3$.

Si B es un subconjunto de vértices de una gráfica G , entonces denotaremos a la subgráfica inducida de G por el conjunto $V(G)-B$ como $G-B$; y si B está formado por un sólo vértice v , se denotará por $G-v$. Similarmente, si E es un subconjunto de aristas de G y G' es la subgráfica de G tal que $V(G')=V(G)$ y $A(G')=A(G)-E$, entonces denotaremos a G' por $G-E$; y en caso de que E esté formado por una sola arista b entonces, se denotará a G' por $G-b$.

CONEXIDAD

Diremos que T es un vv' -camino, o un camino, de longitud n , en una gráfica G , si T es una sucesión de vértices ($v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v'$) tal que $v_{i-1}v_i \in A(G)$ para $i=1, 2, \dots, n$. Y denotaremos por $V(T)$ y $A(T)$ a los conjuntos de vértices y aristas que forman T . Puesto que en este trabajo no se prestará a confusiones, también denotaremos por T a la sucesión anterior pero en sentido opuesto, es decir ($v' = v_n, v_{n-1}, \dots, v_0 = v$); por lo tanto T también puede ser considerada como un $v'v$ -camino.

Si en las sucesiones anteriores se tiene que $T \not\subseteq (v_0, v_1, v_0)$ y $v_i \neq v_j$, para $0 \leq i < j \leq n$ y $(i, j) \neq (0, n)$, entonces diremos que T es una vv' -trayectoria (o una $v'v$ -trayectoria) o, simplemente, una trayectoria. Obsérvese que se está permitiendo que $v_0 = v_n$ y también que $|V(T)| = 1$. Una arista puede ser considerada como una trayectoria cuyos vértices son en los que incide la arista.

Teorema 1.2. [7] Sean G una gráfica, $v, v' \in V(G)$ y P un vv' -camino, entonces existe una vv' -trayectoria T tal que $A(T) \subseteq A(P)$ y, por lo tanto, $V(T) \subseteq V(P)$.

Cuando en una gráfica G se tiene una vv' -trayectoria T y otra $v'v''$ -trayectoria T' , entonces si a la trayectoria T le agregamos la trayectoria T' , se obtiene un vv'' -camino que denotaremos por $T \cup T'$.

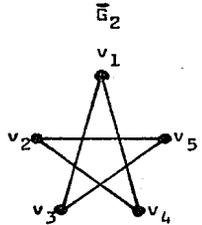
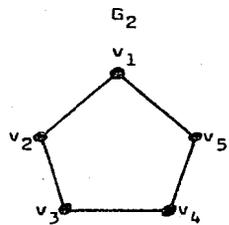
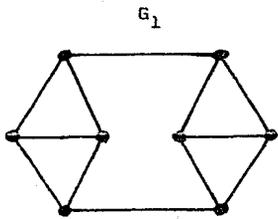
Diremos que dos trayectorias tienen la misma paridad, si, las dos son pares, es decir tienen longitud par, o las dos

son impares, es decir tienen longitud impar.

Un ciclo D es una trayectoria de longitud mayor que cero, en la que los vértices extremos coinciden; de aquí que por brevedad, cuando no haya confusión, al representar a D como una sucesión de vértices omitiremos al último, sin embargo la longitud de D se calculará con base en la sucesión original. A los ciclos de longitud tres los llamaremos triángulos y a los de longitud cuatro los llamaremos cuadrados; y diremos que dos triángulos distintos T y T' son adyacentes si $A(T) \cap A(T') \neq \emptyset$.

Teorema 1.3. [7] Sea G una gráfica en la que todo vértice tiene grado mayor que uno, entonces G contiene un ciclo.

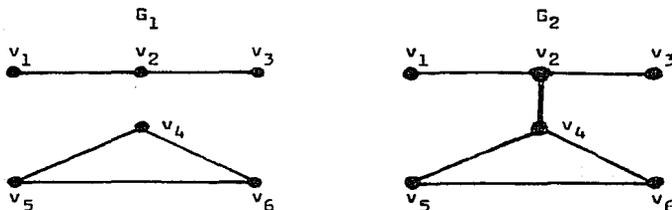
Sea G una gráfica y D un ciclo contenido en G ; si $b \in A(G)$ es tal que $V(b) \subseteq V(D)$ pero $b \notin A(D)$, entonces b es una diagonal de D en G . Un hoyo de G es un ciclo impar, distinto del triángulo, sin diagonales, y un antihoyo de G es una subgráfica inducida de G tal que su complementaria es un hoyo de \bar{G} .



Es fácil ver que la gráfica G_1 no tiene hoyos. La gráfica G_2 claramente tiene un hoyo que también es antihoyo, pues G_2 es isomorfa a \bar{G}_2 .

Una gráfica G es conexa si entre dos vértices cualesquiera existe una trayectoria que los une; en caso contrario es disconexa. Una componente conexa de G es una subgráfica conexa de G , tal que no es subgráfica propia de ninguna otra subgráfica conexa de G .

Sean G una gráfica y $E \subseteq V(G)$; el conjunto E es un corte puntual de G si $G-E$ es disconexa; y se dirá que G es n -conexa si, G es isomorfa a K_{n+1} o, G tiene cortes puntuales y cada uno de ellos al menos tiene n vértices. También diremos que $b \in A(G)$ es de corte si, G es conexa y $G-b$ es disconexa. Los siguientes ejemplos ilustran estos conceptos.



La gráfica G_1 es disconexa y está formada por dos componentes conexas, que son las subgráficas inducidas por los conjuntos $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{v_4, v_5, v_6\}$. La gráfica G_2 es conexa, es decir está formada por una sola componente conexa, y tiene varios cortes puntuales como $\{v_4\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_2, v_3\}$, etc. Es fá-

es fácil ver que los cortes puntuales de G_2 con menor número de vértices tienen un sólo vértice, por lo tanto G_2 es 1-conexa. G_2 tiene tres aristas de corte que son v_1v_2 , v_2v_3 y v_2v_4 .

Teorema 1.4. [7] Sea G una gráfica en la que todo vértice tiene grado par, entonces G no tiene aristas de corte, es decir cada arista está en un ciclo.

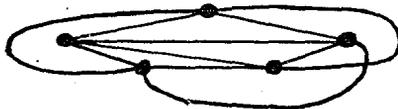
GRAFICAS APLANABLES

Diremos que una gráfica es aplanable si se puede dibujar en el plano, de tal forma que cada vértice sea un punto del plano, cada arista sea una curva simple que una a los puntos correspondientes y que estas curvas no se intersecten excepto, a lo más, en sus puntos extremos. Cuando se diga que una gráfica G es plana, en realidad se estará refiriendo a una representación (arbitraria pero fija) del tipo anterior, de la gráfica aplanable G .

De las siguientes gráficas, la del lado izquierdo es aplanable, pues si se dibuja como en el lado derecho, entonces sus aristas no se cortan.



Sin embargo, no es difícil ver que K_5 no es aplanable.



Si G es una gráfica plana, entonces divide al resto del plano en regiones, que llamaremos regiones de G . Diremos que una región es un triángulo si su frontera es un triángulo de G , y un cuadrado si su frontera es un cuadrado.

Teorema 1.5. [7] Sea G una gráfica plana y 2-conexa, entonces cada arista de G está exactamente en la frontera de dos regiones de G .

Demostración.

Sea $ww' \in A(G)$ y demosetremos que ww' está en la frontera de exactamente dos regiones de G . Claramente ww' está a lo más en la frontera de dos regiones de G , y también es fácil ver que si existe un ciclo D tal que $ww' \in A(D)$, entonces ww' está en la frontera de dos regiones de G ; por lo tanto necesitamos demostrar que existe tal ciclo.

Si w' sólo fuera adyacente a w en G , entonces $\{w\}$ sería un corte puntual de G o $|V(G)|=2$, lo cual no es posible pues G es 2-conexa.

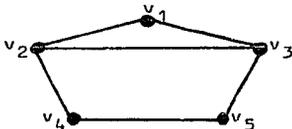
Por lo tanto existe $w'' \in V(G)$ tal que $w'' \neq w$ y $w'w'' \in A(G)$. Como $\{w'\}$ no es un corte puntual de G , existe una ww'' -trayectoria T tal que $w' \notin V(T)$, y ésto significa que $D = T \cup ww'' \cup w''w'$ es

un ciclo en G tal que $ww' \in A(D)$.

COLORACION

Sea G una gráfica y sea $f:V(G) \rightarrow E \in \mathbb{N}$ una función tal que $\forall vv' \in A(G) f(v) \neq f(v')$, entonces diremos que f es una coloración de G . También se dirá que G es n -coloreable si existe una coloración $f':V(G) \rightarrow \{1,2,\dots,n\}$ de G , tal que para cada $i \in \{1,2,\dots,n\}$, existe $v \in V(G)$ con $f'(v)=i$; en tal caso a f' se le llama una n -coloración de G . Puesto que cada n -coloración de G determina una n partición de $V(G)$, diremos que dos n -coloraciones f y f' de G son equivalentes ($f \approx f'$) si determinan la misma n partición de $V(G)$; en caso contrario diremos que no son equivalentes entre sí ($f \not\approx f'$). G es unívocamente n -coloreable (u-nc) si, G es n -coloreable y todas sus n -coloraciones son equivalentes entre ellas. El número cromático $\chi(G)$ de G es el mínimo número n tal que G es n -coloreable.

Es fácil ver que la siguiente gráfica es 3-coloreable, 4-coloreable y u-5c, sin embargo no es 2-coloreable, lo cual significa que $\chi(G)=3$.

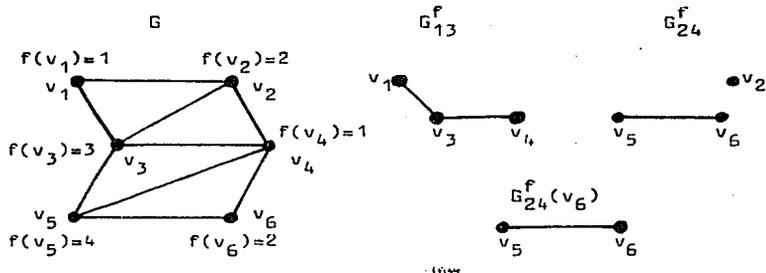


Nuevamente, si f es una n -coloración de G entonces, a los conjuntos que forman la n -partición de $V(G)$ inducida por f ,

los llamaremos clases cromáticas de f . Si $g: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ es una función biyectiva entonces, es claro que $g(f)$ sigue siendo una n -coloración de G y $g(f) \approx f$; de esto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.6. [7] Sean G una gráfica n -coloreable, f una n -coloración de G y $E \subseteq V(G)$ tal que si $v, v' \in E$ con $v \neq v'$ entonces $f(v) \neq f(v')$. Si se ordena, arbitrariamente, a los elementos de E entonces, existe una n -coloración f' de G tal que $f' \approx f$ y f' conserva el orden dado en E es decir, f' del primer elemento es uno, f' del segundo es dos, y así sucesivamente.

Para cada n -coloración f de una gráfica G y para cada pareja $h, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $h \neq k$, definiremos a G_{hk}^f como la subgráfica inducida de G por el conjunto $\{v \in V(G) : f(v) = h \text{ ó } f(v) = k\}$. También diremos que $b \in A(G)$ es una arista de corte $f(h, k)$ si, b es una arista de corte de G_{hk}^f . Finalmente, si $v \in V(G_{hk}^f)$ entonces $G_{hk}^f(v)$ denotará a la componente conexa de G_{hk}^f que contiene a v , y entenderemos por permutar los colores en $G_{hk}^f(v)$, al hecho de generar una función $f': V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tal que, $f'(w) = f(w)$ si $w \notin V(G_{hk}^f(v))$, y $f'(w) = k$ (h) si, $w \in V(G_{hk}^f(v))$ y $f(w) = h$ (k).



En las figuras anteriores se muestra una gráfica G , junto con una 4-coloración f con clases cromáticas $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3\}$ y $\{v_5\}$, así como las subgráficas G_{13}^f , G_{24}^f y $G_{24}^f(v_6)$. Es fácil ver que las aristas v_1v_3 y v_3v_4 son de corte $f(1,3)$. Obsérvese también que permutando los colores en $G_{24}^f(v_6)$, se obtiene una 4-coloración f' de G tal que $f' \neq f$, con clases cromáticas $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3\}$ y $\{v_6\}$; sin embargo, si se permutan los colores en $G_{13}^f(v_1)$ se obtiene una 4-coloración equivalente a f .

Teorema 1.7. [7] Sean G una gráfica n -coloreable, f una n -coloración de G , $h, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $h \neq k$ y $v \in V(G)$ tal que $f(v)=h$, entonces permutando los colores en $G_{hk}^f(v)$ se obtiene una coloración de G , que es n -coloración si $G_{hk}^f(v)$ tiene más de un vértice.

Demostración.

Sea f' la función generada al permutar los colores en $G_{hk}^f(v)$. Empecemos por ver que f' es una coloración de G ; para es

to, es suficiente con demostrar que si $ww' \in A(G)$ entonces $f'(w) \neq f'(w')$. Entonces supongamos que $f(w)=i$ y $f(w')=j$ (por lo tanto $i \neq j$).

Si $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \emptyset$, significa que $w, w' \notin V(G_{hk}^f(v))$ y, en consecuencia, $f'(w)=f(w)$ y $f'(w')=f(w')$, es decir $f'(w) \neq f'(w')$.

Si $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \{h\}$ (ó $\{k\}$), entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i=h$, es decir $f(w)=h$. Puesto que $\{j\} \cap \{h, k\} = \emptyset$, se tiene que $w' \notin V(G_{hk}^f(v))$, lo cual significa que $f'(w')=f(w')=j$. Sin embargo, si $w \in V(G_{hk}^f(v))$ entonces $f'(w)=k$, y si $w \in V(G_{hk}^f(v))$ entonces $f'(w)=h$; en cualquier caso se tiene que $f'(w) \neq f'(w')$.

Si $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \{h, k\}$, entonces se tiene, como $ww' \in A(G)$, que $w, w' \in V(G_{hk}^f(v))$ ó $w, w' \notin V(G_{hk}^f(v))$. Para el primer caso, $f'(w)=f(w')$ y $f'(w')=f(w)$, es decir $f'(w) \neq f'(w')$. Y para el segundo caso, $f'(w)=f(w) \neq f(w')=f'(w')$.

Por lo tanto f' es una coloración de G .

Ahora veremos que f' es una n -coloración de G si, $G_{hk}^f(v)$ tiene más de un vértice. Sea $r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

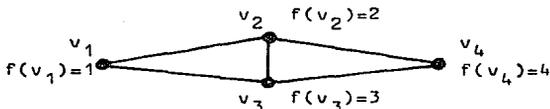
Si $r \in \{1, 2, \dots, n\} - \{h, k\}$, entonces se sabe que existe $w \in V(G)$ tal que $f(w)=r$. Como $w \notin V(G_{hk}^f(v))$, se tiene que $f'(w)=r$, es decir para cada $r \in \{1, 2, \dots, n\} - \{h, k\}$ existe $w \in V(G)$ tal que $f'(w)=r$.

Si $r=k$, como $f(v)=h$ se tiene que $f'(v)=k$.

Y si $r=h$, puesto que $G_{hk}^f(v)$ tiene más de un vértice y es conexa, entonces existe $v' \in V(G_{hk}^f(v))$ tal que $vv' \in A(G)$, lo

cual significa que $f(v')=k$, es decir $f'(v')=h$.

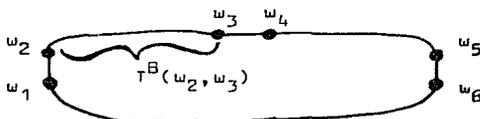
En el siguiente ejemplo se da una 4-coloración f de la gráfica, sin embargo al permutar los colores en $G_{14}^f(v_4)$ se obtiene una 3-coloración, con clases cromáticas $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2\}$ y $\{v_3\}$.



ARCOS EN UN CICLO

Sean B una gráfica, D un ciclo sin diagonales y $B \subseteq A(D)$ con $|B| > 1$. Si vv' y ww' son dos aristas distintas de B , entonces existen dos $v'w$ -trayectorias contenidas en D , y una de ellas contiene a la arista vv' . Si la otra trayectoria no contiene aristas de B , diremos que las aristas vv' y ww' son consecutivas en B con respecto a los vértices v' y w , o más brevemente $vv'-ww'$ en B ; y denotaremos a tal trayectoria por $T^B(v', w)$ o $T^B(w, v')$. Obsérvese que en estas definiciones y notaciones no se menciona el ciclo D , lo que puede ocasionar confusiones; sin embargo, siempre que se utilicen estas definiciones y notaciones, el contexto permitirá saber sobre qué ciclo se está trabajando. Nótese también que si $vv'-ww'$ en B entonces, $w'w-v'v$ en B , pero no ocurre necesariamente que $v'v-w'w$ en B y nunca ocurre que $v'v-ww'$ o $vv'-w'w$ en B .

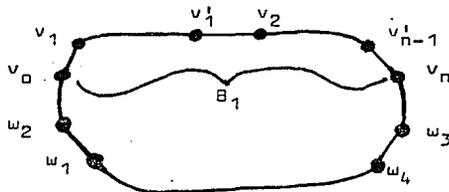
Para el siguiente ejemplo $B = \{w_1w_2, w_3w_4, w_5w_6\}$.



Como se puede ver en este ejemplo, $w_1w_2-w_3w_4-w_5w_6$ en B , sin embargo no ocurre que $w_1w_2-w_5w_6$ en B , ni que $w_1w_2-w_6w_5$ en B , ni tampoco que $w_1w_2-w_4w_3$ en B .

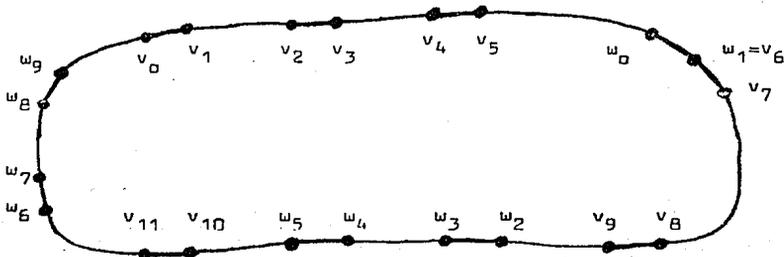
Es claro que para cada arista $vv' \in B$ y para cada vértice v' en que incide tal arista, existe una única arista $ww' \in B$ tal que $vv'-ww'$ en B . Por lo tanto, existe una única forma de acomodar las aristas de B en el siguiente sentido: $v_0v_1-v_1v_2-v_2v_3-v_3v_4-\dots-v_{n-1}v_n-v_nv_1$ en B .

Sea H otro subconjunto de $A(\Gamma)$ tal que $|H| > 1$ y $B \cap H = \emptyset$, y sean w_1w_2 y w_3w_4 dos aristas de H tales que $w_1w_2-w_3w_4$ en H . Si $B_1 = \{b \in B : b \in A(\Gamma^H(w_2, w_3))\}$ es distinto del vacío, entonces diremos que B_1 es un arco de B con respecto a H (cuando no haya confusión, no mencionaremos con respecto a qué conjunto se está tomando el arco). Supongamos que $B_1 \neq \emptyset$, $B_1 = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$ y, sin pérdida de generalidad, que $v_0v_1-v_1v_2-\dots-v_{n-1}v_n$ en B . Como $v_0v_1 \cup T^B(v_1, v_1) \cup v_1v_2 \cup T^B(v_2, v_2) \cup \dots \cup v_{n-2}v_{n-1} \cup T^B(v_{n-1}, v_{n-1}) \cup v_{n-1}v_n$ es una trayectoria que está contenida en $T^H(w_2, w_3)$ y como $w_1w_2-w_3w_4$ en H , entonces podemos suponer, nuevamente sin perder generalidad, que $w_1w_2-v_0v_1-v_1v_2-\dots-v_{n-1}v_n-w_3w_4$ en $B \cup H$.



En tal caso diremos que las aristas extremas del arco B_1 son v_0v_1 y $v_{n-1}^iv_n$, y los vértices extremos del mismo arco son v_0 y v_n . También diremos que las aristas (de H) que acotan al arco B_1 son w_1w_2 y w_3w_4 , y los vértices que acotan a B_1 son w_2 y w_3 . Por último, como cada arista de H forma parte de exactamente un arco de H con respecto a B , a los arcos de H con respecto a B en los que se encuentran las aristas w_1w_2 y w_3w_4 (que tal vez es el mismo arco), nos referiremos como los arcos que acotan al arco B_1 .

Sean $B = \{v_{i-1}v_i\}$ $i=1,3,5,7,9,11$, y $H = \{w_{j-1}w_j\}$ $j=1,3,5,7,9$, y supongamos que están como se muestra en la siguiente figura.



B está formado por tres arcos, que son $B_1 = \{v_0v_1, v_2v_3, v_4v_5\}$, $B_2 = \{v_6v_7, v_8v_9\}$ y $B_3 = \{v_{10}v_{11}\}$. H también está formado por tres arcos, que son $H_1 = \{w_0w_1\}$, $H_2 = \{w_2w_3, w_4w_5\}$ y $H_3 = \{w_6w_7, w_8w_9\}$. Las aristas y los vértices extremos del arco B_2 son v_6v_7 y v_8v_9 , y v_6 y v_9 , respectivamente; mientras que las aristas, vértices y arcos de H que lo acotan son w_0w_1 y w_2w_3 , w_4 y w_5 , y H_1 y H_2 , también respectivamente. Obsérvese que el arco B_3 sólo tiene una arista y, por lo tanto, sólo tiene una arista extrema, sin embargo sus vértices extremos son v_{10} y v_{11} .

C A P I T U L O I I

GRAFICAS UNIVOCAMENTE 3-COLOREABLES

Sobre gráficas $u-3c$ se tiene poca información. Una gran parte de esta información se obtiene de resultados válidos para gráficas $u-nc$. Veamos, brevemente, algunos de los resultados más importantes que hay sobre gráficas $u-nc$.

Cuando se está trabajando con una gráfica $u-nc$, una pregunta natural es saber si tal gráfica es también $u-mc$, para una m distinta de n . El siguiente teorema contesta esta pregunta.

Teorema 2.1. [4] Si G es una gráfica $u-nc$ con $n \leq |V(G)|$ entonces $\chi(G) = n$.

Demostración.

Supongamos que G es una gráfica $u-nc$ tal que $n \leq |V(G)|$ y $\chi(G) \neq n$, es decir $\chi(G) < n$. Entonces existe una k -coloración de G con clases cromáticas C_1, C_2, \dots, C_k ($k < n$).

Si $k = n - 1$ entonces, como $k < n \leq |V(G)|$, es decir $k + 2 \leq |V(G)|$, pueden ocurrir dos cosas:

i) Existen dos clases cromáticas C_s y C_t , cada una con más de un vértice.

Si v' y v'' son elementos fijos de C_s y C_t , respectivamente, entonces sean f' y f'' dos n -coloraciones de G cuyas clases cromáticas son, respectivamente: $C_b^i = C_b$ si $b \neq s$, $C_s^i = C_s - \{v'\}$ y $C_n^i = \{v'\}$, y $C_b^j = C_b$ si $b \neq t$, $C_t^j = C_t - \{v''\}$ y $C_n^j = \{v''\}$.

Claramente $f' \not\sim f''$, lo cual no es posible pues G es u-nc.

ii) Existe una clase cromática C_s con más de dos vértices.

Si v' y v'' son elementos fijos de C_s , entonces sean f' y f'' dos n -coloraciones de G cuyas clases cromáticas son, respectivamente: $C_b^i = C_b$ si $b \neq s$, $C_s^i = C_s - \{v'\}$ y $C_n^i = \{v'\}$, y $C_b^j = C_b$ si $b \neq s$, $C_s^j = C_s - \{v''\}$ y $C_n^j = \{v''\}$.

Puesto que C_s tiene más de dos elementos entonces $f' \not\sim f''$, lo cual no es posible.

Si $k \neq n-1$, es decir $k < n-1$, entonces en forma semejante a como se hizo en i) o ii) se genera una $(k+1)$ -coloración de G , y repitiendo este procedimiento se llega a una $(n-1)$ -coloración de G , que es el caso anterior.

Este teorema nos está diciendo que si G es una gráfica u-nc y u-mc, para $n \neq m$, entonces una de las coloraciones correspondientes es trivial, usa tantos colores como vértices tiene la gráfica, y la otra usa exactamente $\chi(G)$ colores. Obsérvese que toda gráfica con n -vértices es u-nc.

El siguiente ejemplo muestra una gráfica u-3c y u-4c.



En lo que resta de este trabajo, cuando nos refiramos a una gráfica u -nc supondremos que $n = \chi(G)$.

Pasemos ahora a ver una relación entre el color de un vértice dado, es decir el número asignado por la coloración dada, y los colores de sus vértices vecinos, en una gráfica u -nc.

Teorema 2.2. [5] Si G es una gráfica u -nc, f una n -coloración de G y $v \in V(G)$, entonces para cada color $r \in \{1, 2, \dots, n\} - f(v)$ existe un vértice w adyacente a v tal que $f(w) = r$.

Demostración.

Supongamos que existe un vértice v y un color r , distinto de $f(v)$, tal que ningún vértice adyacente a v lo tiene asignado.

Si asignemos a v el color r y en los restantes vértices no cambiamos el color, entonces se genera otra coloración de G , y es una n -coloración puesto que $n = \chi(G)$. Para ver que esta nueva n -coloración no es equivalente a la n -coloración original f , obsérvese que existe un vértice v' tal que $f(v') = r$; entonces en la primera n -coloración (f) v y v' reciben colores distintos, mientras que en la nueva reciben el mismo color. Sin embargo, esto no es posible puesto que G es u -nc.

De lo anterior se sigue el siguiente corolario.

Corolario 2.2.1. [5] Si G es una gráfica u - nc , entonces $\mathcal{C}(G) \geq n-1$.

En particular, K_n es una gráfica u - nc en la que todo vértice tiene grado $n-1$.

Veamos ahora una condición necesaria para que una gráfica sea u - nc .

Teorema 2.3. [4] Para cualquier n -coloración de una gráfica G u - nc , la subgráfica inducida por la unión de dos clases cromáticas es conexa.

Demostración.

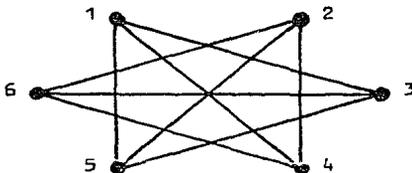
Supongamos que existe una n -coloración f de G y dos de sus clases cromáticas C_i y C_j tales que la subgráfica inducida por su unión es disconexa.

Sean v y v' dos elementos de $C_i \cup C_j$ contenidos en distintas componentes conexas de $G(C_i \cup C_j)$, es decir $v' \notin V(G_{ij}^f(v))$. Permutando los colores en $G_{ij}^f(v)$ se obtiene, por el teorema 1.7, otra n -coloración de G (recuérdese que $n = \chi(G)$). Y es fácil ver que esta nueva coloración no es equivalente a la anterior, ya que en una de ellas v y v' tienen asignado el mismo color y en la otra tienen asignados colores distintos. Lo cual no es posible pues G es u - nc .

Corolario 2.3.1. [4] Si G es una gráfica u - nc con $n \geq 2$, entonces G es conexa.

Una pregunta interesante es si el inverso del teorema 2.3 se cumple es decir, si G es una gráfica tal que para cada $\chi(G)$ -coloración f la subgráfica inducida por la unión de dos clases cromáticas cualesquiera es conexa entonces, ¿es G unívocamente $\chi(G)$ -coloreable ?

Desafortunadamente la respuesta es no; veamos un ejemplo. La siguiente gráfica tiene dos 3-coloraciones; $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, y $\{5,6\}$, y $\{1,6\}$, $\{2,3\}$ y $\{4,5\}$. Sin embargo tiene la propiedad de que la subgráfica inducida por la unión de dos clases cromáticas cualesquiera (en cualquiera de las dos 3-coloraciones) es conexa.



El siguiente teorema es uno de los más importantes que hay sobre gráficas u - nc .

Teorema 2.4. [7] Si G es una gráfica u - nc y C es una de las clases cromáticas de G , entonces $G-C$ es u - $(n-1)c$.

Demostración.

Si G es u - nc entonces $G-C$ es $(n-1)$ -coloreable, ya que hereda una $(n-1)$ -coloración de G . Si $G-C$ no fuera u - $(n-1)c$, existiría otra $(n-1)$ -coloración de $G-C$, no equivalente a la anterior; pero al agregar C a $G-C$ y asignándole el restante color a los vértices de C , se generaría dos n -coloraciones de G no equivalentes entre sí. Que es una contradicción.

Corolario 2.4.1. [7] Si G es una gráfica u - nc , entonces la subgráfica inducida por la unión de k clases cromáticas cualesquiera es u - kc ($1 \leq k \leq n$).

Demostración.

Sea C una clase cromática diferente de las K que estamos uniendo entonces, por el teorema anterior, $G-C$ es u - $(n-1)c$. Repitiendo este procedimiento se elimina a todas las clases cromáticas diferentes de las k que estamos uniendo; por lo tanto la gráfica final, que es la inducida por las k clases cromáticas, es u - kc .

Del corolario 2.3.1 se sabe que si G es u - nc , entonces G es conexa. El siguiente teorema nos dá más información en este sentido.

Teorema 2.5. [5] Si G es una gráfica u - nc , entonces G es $(n-1)$ -conexa.

Demostración.

Supongamos que G no es $(n-1)$ -conexa, es decir existe un corte puntual P de G con $|P| \leq n-2$, y sea f una n -coloración de G . Entonces existen dos colores i y j tales que ningún vértice en P tiene asignado alguno de estos colores. Puesto que $G-P$ es disconexa, sean A_1 y A_2 dos de sus componentes conexas. Del teorema 2.2 se sigue que existen v_1 y v_2 vértices de G contenidos en A_1 y A_2 , respectivamente, tales que $f(v_1)=f(v_2)=i$. Por el teorema 2.3, $G_{i,j}^f$ es conexa, es decir existe una v_1v_2 -trayectoria contenida en $G_{i,j}^f$; lo cual no es posible, puesto que en ese caso tal trayectoria debería pasar por algún vértice de P .

Ahora veremos dos resultados importantes sobre gráficas k -críticas, es decir gráficas $u-kc$ en las que toda subgráfica inducida propia no es $u-kc$. El primero de ellos mejora la cota inferior de $\mathcal{F}(G)$ dada en el corolario 2.2.1.

Teorema 2.6. [9] Sea G una gráfica n -crítica entonces, $\mathcal{F}(G) \geq n$ ó G es isomorfa a K_n .

Demostración.

Supongamos que G es n -crítica, no es isomorfa a K_n y contiene un vértice v de grado menor que n .

Del corolario 2.2.1 se sabe que el grado de v es $n-1$. Sea f una n -coloración de G y sean C_1, C_2, \dots, C_n sus clases cromáticas. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v \in C_n$. Pues-

to que G es n -crítica, entonces se tienen dos posibilidades:

i) $\chi(G-v) = n-1$

Sea f_1 una $(n-1)$ -coloración de $G-v$ y sean $C_1^i, C_2^i, \dots, C_{n-1}^i$ sus clases cromáticas. Asignando a v el color n entonces se obtiene una n -coloración para G , y como G es u -nc se debe tener $C_i = C_i^i$ para $i=1,2,\dots,n-1$, y $C_n = \{v\}$. Si existiera un vértice v' no adyacente a v en G , entonces se podría extender f_1 a una n -coloración de G con clases cromáticas $M_i = C_i^i - \{v'\}$ para $i=1,2,\dots,n-1$, y $M_n = \{v, v'\}$ (recuérdese que $n = \chi(G)$); lo cual no es posible pues G es u -nc. Por lo tanto v es adyacente a todos los vértices de G , salvo a sí mismo, y como el grado de v es $n-1$ entonces $|V(G)| = n$. De aquí es obvio que G es isomorfa a K_n , que supusimos no ocurría.

ii) $\chi(G-v) = n$.

Puesto que $G-v$ no es u -nc, por ser G n -crítica, entonces $G-v$ tiene dos n -coloraciones no equivalentes entre sí, y cada una de ellas puede ser extendida a una n -coloración de G , asignando a v el color que no ha sido asignado a ninguno de sus vértices vecinos (recuérdese que el grado de v es $n-1$). Con lo que se generarían dos n -coloraciones de G no equivalentes entre sí, que no es posible.

Teorema 2.7. [9] Todo corte puntual de una gráfica n -crítica contiene dos vértices no adyacentes.

Demostración.

Sea G una gráfica n -crítica y A un corte puntual de G . Supongamos que $G(A)$ es completa.

Puesto que G es $(n-1)$ -conexa (por el teorema 2.5) y n -crítica, entonces $G(A)$ es isomorfa a K_{n-1} . Sea B el conjunto de vértices de una componente conexa, fija, de $G-A$, y sean $G_1 = G(B \cup A)$ y $G_2 = G-B$. Puesto que G es n -crítica entonces pueden suceder dos cosas:

i) G_1 y G_2 son $(n-1)$ -coloreables.

Sean f_1 y f_2 dos $(n-1)$ -coloraciones de G_1 y G_2 , respectivamente. Por el teorema 1.6, podemos suponer que f_1 y f_2 coinciden en A , es decir $f_1(v) = f_2(v)$ para $v \in A$. Y como A es un corte puntual, podemos unir las coloraciones f_1 y f_2 y generar una $(n-1)$ -coloración de G . Que no es posible pues $n = \chi(G)$.

ii) G_1 y o G_2 tienen dos n -coloraciones no equivalentes entre sí.

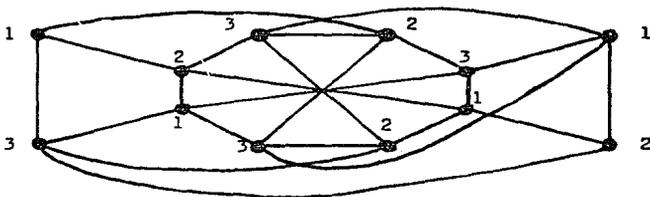
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G_1 tiene dos n -coloraciones f_1 y f_1' no equivalentes entre sí. Sea f_2 una $\chi(G_2)$ -coloración de G_2 , que debe ser n ó $(n-1)$ -coloración. Nuevamente por el teorema 1.6, se puede suponer que f_1 , f_1' y f_2 coinciden en A , y como A es un corte puntual entonces, uniendo las coloraciones f_1 y f_2 se obtiene una n -coloración de G , y uniendo f_1' y f_2 se obtiene otra n -coloración de G no equivalente a la anterior. Que es una contradicción, pues G es u -nc.

En seguida nos permitiremos mencionar sin demostrar, otros resultados que se han obtenido sobre gráficas u -nc.

El cuello de una gráfica se define como la longitud del ciclo más chico contenido en la gráfica. Es de esperarse que si una gráfica es u -nc entonces debe tener cuello chico, sin embargo el siguiente teorema demuestra lo contrario.

Teorema 2.8. [3] Para $n \geq 2$ y $g \geq 3$, existe una gráfica u -nc con cuello mayor o igual a g .

La siguiente gráfica es un ejemplo para $n=3$ y $g=4$.



Por último, dentro de este grupo de resultados, mencionaremos dos de los resultados más recientes que hay sobre gráficas u -nc.

Teorema 2.9. [2] Sea G una gráfica n -coloreable tal que

$$f(G) > ((3n-5)/(3n-2)) |V(G)|$$

entonces G es u -nc.

Teorema 2.10. [2] Sea G una gráfica n -coloreable y f

una n -coloración de G tal que la subgráfica inducida por la unión de dos clases cromáticas cualesquiera es conexa. Si

$$\chi(G) > (1 - (1/(n-1))) (|V(G)| + n)$$

entonces G es u -nc.

Como se puede ver, en estos dos últimos resultados, aun que las cotas son óptimas [2], las condiciones que se pide son bastante fuertes, lo que restringe a los conjuntos de gráficas en que se pueden aplicar.

Pasemos ahora a ver algunos resultados importantes que se han obtenido sobre gráficas u -3c. En realidad son pocos los resultados que hay sobre gráficas u -3c.

El primero que mencionaremos es sobre gráficas 3-críticas.

Teorema 2.11. [9] Si G es una gráfica 3-crítica con más de tres vértices, entonces G es 3-conexa.

Demostración.

Supongamos que G es 3-crítica pero no es 3-conexa, y sea f una 3-coloración de G . Por el teorema 2.5, se sabe que G es 2-conexa, entonces sea $A = \{v, v'\}$ un corte puntual de G y B el conjunto de vértices de una componente, fija, de $G - A$. También sean $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G - B$ y f_1 y f_2 las coloraciones de G_1 y G_2 , respectivamente, inducidas de la coloración f de G .

Del teorema 2.2, se deduce que para cada color $r \in \{1, 2,$

3}, existe un vértice v en $V(G_1)$ tal que $f(v)=r$, es decir f_1 es una 3-coloración. Por las mismas razones se tiene que f_2 también es una 3-coloración. Como G es 3-crítica, existen otras coloraciones f_1^i y f_2^i (que son 2 ó 3-coloraciones), de G_1 y G_2 , respectivamente, no equivalentes a f_1 y f_2 . Por el teorema 1.6, es fácil ver que se puede suponer, sin perder generalidad, que $f_1(v)=f_1^i(v)=f_2(v)=f_2^i(v)=1$.

Si $f_1(v^*)=f_1^i(v')$ entonces, como f_1 y f_2 coinciden en A , juntando f_2 y f_1^i se genera una nueva 3-coloración de G no equivalente a la original, lo cual no es posible. Por lo tanto se debe tener $f_1(v') \neq f_1^i(v')$, y del teorema 1.6 se deduce que se puede suponer, nuevamente sin pérdida de generalidad, que $\{f_1(v')=1$ y $f_1^i(v')=2\}$ o $\{f_1(v')=2$ y $f_1^i(v')=1\}$. En forma análoga se tiene que $\{f_2(v')=1$ y $f_2^i(v')=2\}$ o $\{f_2(v')=2$ y $f_2^i(v')=1\}$.

Si $\{f_1(v')=1$ y $f_1^i(v')=2\}$ y $\{f_2(v')=1$ y $f_2^i(v')=2\}$, entonces juntando las coloraciones f_1^i y f_2^i se genera una nueva 3-coloración de G no equivalente a la original (recuérdese que $\chi(G)=3$), lo cual no es posible.

El otro caso es análogo (sólo hay uno más, puesto que f_1 y f_2 deben coincidir en A).

El siguiente resultado está enunciado originalmente sobre gráficas planas, sin embargo es válido en general.

Teorema 2.12. [5] Sea G una gráfica tal que $\chi(G)=3$; si G contiene un triángulo T_0 tal que para todo vértice v de G

existe una sucesión de triángulos $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$, con $v \in V(T_n)$ y el triángulo T_i es adyacente al triángulo T_{i-1} , para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces G es $u-3c$.

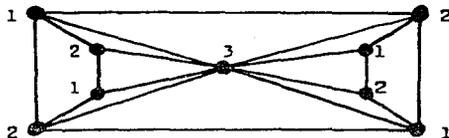
Demostración.

Supongamos que G satisface las hipótesis del teorema. Demos una 3-coloración a el triángulo T_0 (que es $u-3c$). Puesto que $\chi(G)=3$ y T_1 es adyacente a T_0 , entonces el restante vértice de T_1 (al que no ha sido asignado color), tiene su color determinado por los colores de los otros vértices de T_1 . Así sucesivamente, quedan determinados los colores de los vértices de T_2, T_3, \dots, T_n , es decir el color de v queda determinado por la coloración del triángulo T_0 . Entonces hay una sólo forma de 3-colorear los vértices de G (salvo intercambio de colores), por lo tanto G es $u-3c$.

De este teorema y del teorema 1.5, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.12.1. [5] Si G es una gráfica plana, 2-conexa, con $\chi(G)=3$ y a lo más contiene una región distinta del triángulo, entonces G es $u-3c$.

El inverso del corolario anterior no se cumple, es decir existen gráficas planas, $u-3c$ y que tienen más de una región que no es un triángulo. La siguiente gráfica es un ejemplo.



En el teorema 2.8 se demuestra, en particular, que existen gráficas u - $3c$ que no contienen triángulos; en el siguiente teorema se demuestra que estas gráficas no son planas.

Teorema 2.13. [5] Si G es una gráfica plana u - $3c$ con más de tres vértices, entonces G contiene, al menos, dos triángulos.

Demostración.

Supongamos que G satisface las hipótesis del teorema pa ro a lo más contiene un triángulo. Como G es 2 -conexa (por el teorema 2.5), es fácil ver que G contiene una región cuya frontera es un ciclo C distinto del triángulo. Existen dos posibilidades:

1) El ciclo C es un cuadrado y tres colores son usados en su coloración.

Sea $C=(v_1, v_2, v_3, v_4)$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que v_2 y v_4 tienen asignado el mismo color. Agreguemos un vértice v en la región acotada por C , y las aristas v_1v , v_2v y v_3v . La gráfica resultante G' claramente es plana. Un triángulo en G' que no esté en G necesariamente contiene al vértice

v . Dos de estos triángulos son (v, v_1, v_2) y (v, v_2, v_3) . Si existiera otro triángulo en G' que no estuviera contenido en G , entonces debería contener a las aristas vv_1 y vv_3 , por lo tanto v_1v_3 sería una arista de G y, por lo cual, G contendría a los triángulos (v_1, v_3, v_4) y (v_1, v_2, v_3) , que por hipótesis no es posible. De aquí que G' contiene a lo más tres triángulos.

Por un resultado de Grönbaum [6], toda gráfica plana con a lo más tres triángulos es 1, 2 ó 3-coloreable. Y como $\chi(G) = 3$, entonces se sigue que $\chi(G') = 3$. En cualquier 3-coloración de G' , v_1 y v_3 pertenecen a la misma clase cromática, ya que los triángulos (v_1, v_2, v) y (v_3, v_2, v) son adyacentes. Pero cualquier 3-coloración de G' induce una 3-coloración de G en la que v_1 y v_3 tienen asignado el mismo color. Por lo tanto, cualquiera de estas coloraciones inducidas de G no es equivalente a la original, ya que en la original v_1 y v_3 tienen asignados colores distintos. Lo cual no es posible pues G es α -3c.

ii) El ciclo C contiene cuatro vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 tales que v_1 y v_3 tienen asignado el mismo color al igual que v_2 y v_4 , y v_1v_2 y v_3v_4 son aristas contenidas en C .

Agreguemos dos nuevos vértices v y v' en la región acotada por C , y las aristas v_1v, v_2v, v_3v', v_4v' y vv' , siendo G' la gráfica resultante.



La gráfica G' tiene dos triángulos más que G entonces, por el resultado de Grönbaum, $\chi(G')=3$ (recuérdese que $\chi(G)=3$). En cualquier 3-coloración de G' , los vértices v y v' reciben colores distintos; lo cual significa que v_1 y v_3 pertenecen a clases cromáticas distintas o, v_2 y v_4 pertenecen a distintas clases cromáticas. Puesto que cualquier coloración de G' induce una en G , entonces se obtiene una 3-coloración de G no equivalente a la original, que es una contradicción.

Existen otros resultados sobre gráficas planas n -3c, sin embargo se refieren a gráficas muy particulares.

C A P I T U L O I I I

UN TEOREMA SOBRE GRAFICAS U-3C

En este capítulo demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sea G una gráfica $u-3c$, sin triángulos adyacentes y con más de tres vértices, entonces G contiene un hoyo.

Antes de demostrarlo, veamos dos aplicaciones del mismo.

En [14] Wen-Lien Hsu propone la siguiente conjetura.

Conjetura 1. Sea G una gráfica plena $u-3c$, sin triángulos adyacentes y con más de tres vértices, entonces G contiene un hoyo.

Claramente el teorema 3.1 demuestra esta conjetura, pues ésta es un caso particular del teorema.

Para la otra aplicación necesitamos antes unos conceptos.

El número de independencia $\alpha(G)$ de una gráfica G es la cardinalidad de uno de los conjuntos de vértices de G con más vértices, tal que cada arista de G incide a lo más en uno de los vértices del conjunto.

Una gráfica G se dice que es perfecta si $\alpha(H) = \omega(H)$ para toda subgráfica inducida H de G . Lovász [6] demostró que para una gráfica G las siguientes condiciones son equivalentes.

Para toda subgráfica inducida H de G

- i) $\chi(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$
- ii) $\chi(H) = \omega(H)$
- iii) $\alpha(H) = \omega(H)$.

La conjetura fuerte de Berge [1] para gráficas perfectas afirma que G es perfecta si y sólo si G no tiene hoyos ni antihoyos.

Es fácil ver que si una gráfica es perfecta, entonces no tiene hoyos ni antihoyos. Sin embargo, el inverso de esta conjetura de Berge ha resultado ser un problema muy complicado. Pero se ha podido demostrar para varias clases de gráficas, como en gráficas planas [13], en gráficas que no tienen subgráficas isomorfas a K_4 [12] y en gráficas que no tienen subgráficas inducidas isomorfas a la siguiente gráfica [10].



Fig. 1

En [11] fue probado que la conjetura fuerte de Berge es válida para gráficas que no tienen subgráficas inducidas isomor-

fas a K_4 -e, es decir a K_4 menos una arista. Aquí se verá una demostración de este resultado, obteniéndolo como consecuencia de el teorema 3.1. En realidad demostraremos un poco más.

Se dice que una gráfica G es n casi perfecta (n -cp) si, no es perfecta, K_n es isomorfa al clan de G con mayor número de vértices (por lo tanto $n = \omega(G)$) y toda subgráfica inducida propia de G es perfecta. Tucker [12] ha demostrado que si G es n -cp y $v \in V(G)$, entonces $G-v$ es n -nc y cada clase cromática tiene más de un vértice.

Teorema 3.2. Sean G una gráfica n -cp ($n \geq 3$), x un vértice de G y f una n -coloración de $G-x$, entonces la gráfica inducida de G por la unión de tres clases cromáticas cualesquiera de f tiene una subgráfica isomorfa a K_4 -e, es decir tiene triángulos adyacentes.

Demostración.

Por lo que se dijo anteriormente, $G-x$ es n -nc y cada clase cromática de f tiene más de un vértice. Entonces, por el corolario 2.4.1, la gráfica inducida por la unión de tres clases cromáticas cualesquiera de f es n -3c y tiene más de tres vértices. Si tal gráfica no tiene subgráficas isomorfas a K_4 -e, es decir no tiene triángulos adyacentes, entonces, por el teorema 3.1, debe tener un hoyo, y éste es claramente una subgráfica inducida propia de G que no es perfecta. Lo que es una contradicción.

Teorema 3.3. [11] Sea G una gráfica sin hoyos tal que no tiene subgráficas inducidas isomorfas a K_4 -e, entonces G es perfecta.

Demostración.

Sea K_n isomorfa al clan de G con mayor número de vértices, es decir $n=U(G)$. Puesto que G no tiene subgráficas inducidas isomorfas a K_4 -e, es fácil ver que G no tiene antihoyos. Y como la conjetura fuerte de Berge ha sido demostrada en gráficas que no tienen subgráficas isomorfas a K_4 [12], podemos suponer que $n \geq 4$. Hagamos inducción sobre $|V(G)|$.

Si $|V(G)| = n$, entonces G es isomorfa a K_n y, por lo tanto, G es perfecta.

Supongamos que el teorema es válido para todas las gráficas con menor número de vértices que G . En particular, es válido para todas las subgráficas inducidas propias de G , y como son inducidas entonces son perfectas. Si el teorema no fuera válido para G , se tendría que G sería n -cp, y como $n \geq 4$ entonces, por el teorema 3.2, se llegaría a una contradicción.

Corolario 3.3.1. [11] La conjetura fuerte de Berge se cumple en gráficas que no tienen subgráficas inducidas isomorfas a K_4 -e.

Volvamos al teorema 3.1, y veamos que las tres hipótesis son necesarias.

Si eliminamos la hipótesis de que la gráfica sea $u-3c$, entonces la siguiente gráfica es un contraejemplo.



fig. 2

Claramente la gráfica debe tener más de tres vértices, puesto que entonces un triángulo no cumpliría el teorema.

Por último, la gráfica no debe tener triángulos adyacentes. Las siguientes gráficas son $u-3c$, con más de tres vértices y no tienen hoyos.



fig. 3

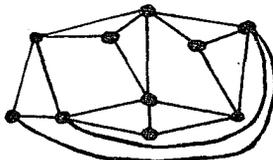


fig. 4

En la demostración del teorema 3.1 utilizaremos los siguientes resultados.

Teorema 3.4. Sea G una gráfica sin hoyos; si D es un ciclo impar, diferente del triángulo, en G y a_1 es una diagonal de D que no está contenida en ningún triángulo, entonces D tiene otra diagonal.

Demostración.

Sea $a_1 = vv'$, entonces el ciclo D contiene dos vv' -trayectorias y una de ellas es par, ya que D es impar. Sea T esta trayectoria y sea D' el ciclo $T \cup v'v$. Claramente D' es impar y no es un triángulo, pues a_1 está en $A(D')$. Puesto que G no tiene hoyos, entonces D' tiene una diagonal, que por definición es una arista distinta de a_1 , y ésta también es una diagonal de D .

Teorema 3.5. Sea G una gráfica sin hoyos; si D es un ciclo impar en G , entonces $G(V(D))$ contiene un triángulo.

Demostración.

Hagamos inducción sobre $|V(D)|$.

Si $|V(D)| = 3$, el resultado es obvio.

Supongamos que $|V(D)| = n$ y que el resultado es válido para los ciclos impares con menos de n vértices ($n \geq 5$).

Puesto que G no tiene hoyos, existe una diagonal $b = vv'$ de D . Sea T la vv' -trayectoria de longitud par contenida en D , entonces $D' = T \cup v'v$ es un ciclo impar contenido en G , con menor número de vértices que D . Por hipótesis de inducción, existe un triángulo contenido en $G(V(D'))$, y por lo tanto en $G(V(D))$.

Teorema 3.6. Sean G una gráfica sin hoyos, D un ciclo en G y b una arista de D , entonces existe un ciclo D' sin diagonales tal que $b \in A(D')$ y $V(D') \subseteq V(D)$.

Demostración.

Hagamos inducción sobre $|V(D)|$.

Si $|V(D)| = 3$, la conclusión es obvia.

Supongamos que el teorema es válido para todos los ciclos con menor número de vértices que D ($|V(D)| \geq 4$).

Si D no tiene diagonales, el resultado es directo. Por lo tanto, supongamos que D tiene una diagonal hh' .

Sea T la hh' -trayectoria contenida en D tal que $b \in A(T)$. Si $D' = T \cup h'h$ entonces, como $|V(D')| < |V(D)|$, por hipótesis de inducción existe un ciclo D'' sin diagonales tal que $b \in A(D'')$ y $V(D'') \subseteq V(D')$. Y puesto que $V(D') \subseteq V(D)$, se tiene el resultado.

Volvamos a enunciar el teorema 3.1.

Teorema. Sea G una gráfica $u-3c$, sin triángulos adyacentes y con más de tres vértices, entonces G tiene un hoyo.

Demostración.

Supongamos que el teorema es falso y consideremos las gráficas que no lo cumplen y tienen el menor número de vértices. Sea G una de éstas en la que el número de aristas es mínimo.

Las siguientes observaciones son claras.

Obs. 1. G es $u-3c$, sin triángulos adyacentes, tiene más de tres vértices y no tiene hoyos.

Obs. 2. Cualquier subgráfica de G es 1,2 ó 3-coloreable, sin triángulos adyacentes y si es inducida entonces no tie-

ne hoyos.

Obs. 3. De la definición de G y de la obs. 2 se deduce que si G' es una subgráfica inducida de G con más de tres vértices, entonces G' no es u -3c.

Sea f una 3-coloración de G y sean C_1 , C_2 y C_3 sus clases cromáticas.

Se demostrará en cuatro pasos que G no puede existir.

Paso 1. i) Cada arista de G está exactamente en un triángulo.

ii) Todo vértice de G tiene grado par mayor o igual a cuatro.

Paso 2. Si v es un vértice de grado cuatro en G y (v, v_1, v_2) es un triángulo de G entonces podemos suponer, por el teorema 1.6, que $f(v_1)=1$, $f(v_2)=2$ y $f(v)=3$.

i) La arista v_1v es de corte $f(1,3)$ o la arista v_2v es de corte $f(2,3)$.

ii) La arista v_1v_2 no es de corte $f(1,2)$.

iii) Si $gr_G(v_1)=4$ ($gr_G(v_2)=4$) entonces la arista v_1v (v_2v) es de corte $f(1,3)$ ($f(2,3)$).

Paso 3. Sea D un ciclo contenido en G_{12}^f sin diagonales, entonces existe $ww' \in A(D)$ tal que $\{w, w'\}$ es un corte puntual de G_{12}^f .

Paso 4. G no puede existir.

Paso 1. 1) Empecemos por ver que cada arista de G está exactamente en un triángulo.

Supongamos que existe una arista a_1 de G tal que no está en ningún triángulo.

Sea $G_1 = G - a_1$. Por la obs. 2, G_1 no tiene triángulos adyacentes, y como f también es una 3-coloración de G_1 , se tiene que G_1 es 3-coloreable. Del teorema 3.4 se deduce que G_1 no tiene hoyos, y como $|A(G_1)| < |A(G)|$ y $|V(G_1)| = |V(G)|$ entonces, por la forma en que se escogió a G , G_1 no es u-3c. Por lo tanto, como G_1 es 3-coloreable pero no es u-3c, se tiene que existe una 3-coloración f_1 de G_1 tal que $f_1 \neq f$. Si $a_1 = vv'$, por el teorema 1.6 podemos suponer $f_1(v) = 1$. Es claro que G no sería u-3c si $f_1(v') = 2$ ó $f_1(v') = 3$, por lo tanto se debe tener $f_1(v') = 1$.

Si $v \in V(G_{12}^{f_1}(v'))$, sea T una vv' -trayectoria contenida en $G_{12}^{f_1}$ de longitud mínima. Entonces $T \cup a_1$ es un ciclo impar distinto del triángulo, pues $f_1(v) = f_1(v')$ y a_1 está en el ciclo. En consecuencia existe $a_2 \in A(G)$ tal que a_2 es una diagonal de tal ciclo; y como $a_2 \neq a_1$, entonces $a_2 \in A(G_1)$; que no es posible pues se tendría una vv' -trayectoria en $G_{12}^{f_1}$ de menor longitud que T .

De lo anterior se tiene que $v \notin V(G_{12}^{f_1}(v'))$; por lo tanto permutando los colores en $G_{12}^{f_1}(v')$ y por el teorema 1.7, obtenemos una 3-coloración f_2 de G_1 y de G , puesto que $f_2(v) = 1$ y $f_2(v') = 2$.

Por razones análogas, si se permutan los colores en $G_{13}^{f_1}(v')$, se obtiene otra 3-coloración f_3 de G tal que $f_3(v) = 1$ y $f_3(v') = 3$.

Del corolario 2.2.1, se sabe que $gr_G(v) > 1$, por lo tanto existe un vértice v'' adyacente a v en G_1 , es decir $vv'' \in A(G_1)$. Entonces, por la forma en que se generaron las 3-coloraciones f_2 y f_3 , si $f_1(v'')=2$ se tiene que $f_2(v')=f_2(v'')$ y $f_3(v') \neq f_3(v'')$, y si $f_1(v'')=3$ se tiene que $f_2(v') \neq f_2(v'')$ y $f_3(v')=f_3(v'')$ (recuerde se que $f_1(v'') \neq f_1(v)=1$); en cualquier caso se tiene que $f_2 \neq f_3$, lo que es una contradicción.

De lo anterior se tiene que cada arista de G debe estar en un triángulo, y como G no tiene triángulos adyacentes entonces cada arista de G está exactamente en un triángulo.

ii) Del párrafo anterior es claro que todo vértice de G tiene grado par, y que existe una partición de $A(G)$ en ciclos (triángulos). También es fácil ver que $|V(G)| \geq 5$.

Si existiera un vértice w de G con grado dos, entonces claramente $G-w$ sería $u-3c$ (ya que w estaría exactamente en un triángulo), que no es posible, por la obs. 3.

Por lo tanto todo vértice de G tiene grado par mayor o igual a cuatro.

Paso 2. Sea v un vértice de grado cuatro. Por el paso 1 y el teorema 1.6, podemos suponer que v , sus vértices adyacentes y f tienen la estructura de la fig. 5.

1) Primero vamos a demostrar que v_1v es una arista de corte $f(1,3)$ o v_2v es una arista de corte $f(2,3)$.

Sea $G_1=G-v$. Del paso 1 es fácil deducir que la coloración

ción f' que G_1 hereda de la 3-coloración f de G , es una 3-coloración. Por la obs. 3 se tiene que G_1 no es u -3c; entonces existe una 3-coloración h de G_1 tal que $h \neq f'$. Por el teorema 1.6, podemos suponer $h(v_1)=1$ y $h(v_2)=2$. Si $h(v_3) \neq 3$ y $h(v_4) \neq 3$, definiendo $h(v)=3$ obtenemos una 3-coloración de G no equivalente a f , que no es posible. Por lo tanto se debe tener $h(v_3)=3$ ó $h(v_4)=3$. Supongamos que $h(v_3)=3$ y $h(v_4)=1$ (fig. 6); los otros casos son análogos.

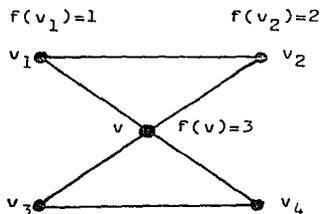


fig. 5

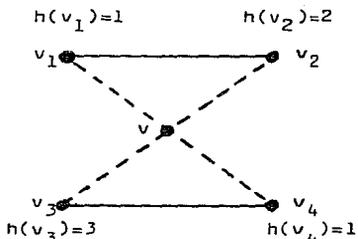


fig. 6

Si $v_2 \in V(G_1^{h_{23}}(v_3))$, entonces sea T una v_3v_2 -trayectoria contenida en $G_1^{h_{23}}(v_3)$ de longitud mínima. Si a esta trayectoria se le agrega el vértice v y las aristas v_2v y vv_3 , se obtiene un ciclo D impar (ya que T tiene longitud impar pues $h(v_2)=2$ y $h(v_3) \neq 3$), y no es un triángulo, puesto que en tal caso sería adyacente al triángulo (v_1, v_2, v) . Entonces D debe tener una diagonal en G . Tal diagonal no puede incidir en v , ya que en tal caso también debería incidir en v_1 o v_4 , que no es posible pues v_1 ni v_4 están en $V(D)$. Por lo tanto, tal diagonal debe estar en $A(G_1)$, lo cual significa que existe una v_3v_2 -trayectoria contenida en

$G_{23}^h(v_3)$ de longitud menor que T , que es una contradicción.

De lo anterior se tiene que $v_2 \notin V(G_{23}^h(v_3))$. Si se permutan los colores en $G_{23}^h(v_3)$ y se asigna a v el color 3 se obtiene, por el teorema 1.7, una 3-coloración de G . Pero G es u -3c, es decir esta 3-coloración de G es equivalente a la original.

Así que (v_3, v, v_2) es la única $v_3 v_2$ -trayectoria en G_{23}^f , lo que implica que vv_2 y vv_3 son aristas de corte $f(2,3)$ (por el teorema 2.3, G_{23}^f es conexa).

ii) Ahora vamos a demostrar que la arista $v_1 v_2$ no puede ser de corte $f(1,2)$ (fig. 5).

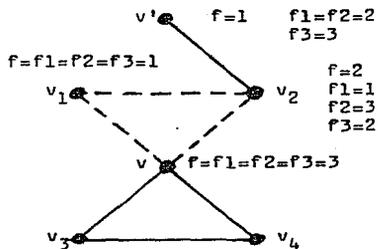
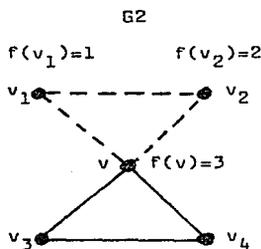
Supongamos que $v_1 v_2$ es de corte $f(1,2)$ y sea $G_2 = G - \{vv_1, vv_2, v_1 v_2\}$ (fig. 7). Entonces permutando los colores en $G_2^{f_1}(v_2)$ y por el teorema 1.7, obtenemos una 3-coloración f_1 de G_2 tal que $f_1(v_1) = f_1(v_2) = 1$ y $f_1(v) = 3$ (fig. 8).

Si $v_1 \in V(G_2^{f_1}(v_2))$, entonces existe una $v_1 v_2$ -trayectoria T contenida en $G_2^{f_1}$ de longitud mínima. Puesto que $f_1(v_1) = f_1(v_2) = 1$, se deduce que T tiene longitud par. T no pasa por el vértice v , ya que si lo hiciera entonces tendría que pasar por los vértices v_3 y v_4 , y en tal caso se tendría que $f_1(v_3) = f_1(v_4)$, lo cual no es posible pues $v_3 v_4 \in A(G_2)$. Si agregamos a T la arista $v_1 v_2$ entonces se forma un ciclo impar distinto del triángulo, ya que si fuera un triángulo entonces sería adyacente al triángulo (v_1, v_2, v) ; Tal ciclo debe tener una diagonal, y como v no está en el ciclo, tal diagonal debe estar en $A(G_2)$. Esto último significa que existe una $v_1 v_2$ -trayectoria contenida en $G_2^{f_1}$ de

longitud menor que Γ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $v_1 \notin V(G_2^{f_1}_{13}(v_2))$. Entonces tenemos que $v \notin V(G_2^{f_1}_{13}(v_1))$ ó $v \notin V(G_2^{f_1}_{13}(v_2))$; supondremos que $v \notin V(G_2^{f_1}_{13}(v_2))$, en forma similar se analiza el otro caso.

Permutando los colores en $G_2^{f_1}_{13}(v_2)$ y por el teorema 1.7, obtenemos otra 3-coloración f_2 de G_2 , tal que $f_2(v_1)=1$ y $f_2(v_2)=f_2(v)=3$ (fig. 8).



Procediendo en forma similar a como se ha estado haciendo, se deduce que $v \notin V(G_2^{f_2}_{23}(v_2))$ (solamente recuérdese que $f_2(v_1)=1$ y que G no tiene triángulos adyacentes). Entonces permutando los colores en $G_2^{f_2}_{23}(v_2)$ se obtiene otra 3-coloración f_3 de G_2 , tal que $f_3(v_1)=1$, $f_3(v_2)=2$ y $f_3(v)=3$ (fig. 8). Claramente f_3 también es una 3-coloración de G . Para ver que $f_3 \neq f$, obsérvese que por el paso 1, $gr_G(v_2) \geq 4$ y existe $v' \in V(G)$ tal que $v' \neq v_1$, $f(v')=f(v_1)=1$ y v' es adyacente a v_2 en G y en G_2 ; y es fácil ver que $f_3(v')=3$ y $f_3(v_1)=1$ (fig. 8), es decir $f_3 \neq f$. Que es una contradicción.

Por lo tanto v_1v_2 no puede ser de corte $f(1,2)$.

iii) En seguida veremos que si $gr_G(v_1)=4$ ($gr_G(v_2)=4$), entonces la arista v_1v_2 (v_2v_1) es de corte $f(1,3)$ ($f(2,3)$) (Fig. 5).

Del inciso anterior se tiene que si $gr_G(v_1)=4$, la arista v_2v_1 no puede ser de corte $f(2,3)$. Entonces, del inciso i) se deduce que la arista v_1v_2 es de corte $f(1,3)$.

Paso 3. Sea D un ciclo sin diagonales contenido en G_{12}^f y sean $x, y \in C_3$, entonces denotaremos por $Dx = \{vv' \in A(D) : v, v' \in N_G(x)\}$, $V(Dx) = \{v \in V(D) : \text{una arista de } Dx \text{ incide en } v\}$ y $Dxy = Dx \cup Dy$.

Antes de empezar la demostración, mencionaremos cuatro lemas que utilizaremos constantemente. Puesto que son muy claros, no haremos la demostración.

Lema a) Todo ciclo contenido en G_{12}^f tiene longitud par.

Lema b) Si D es un ciclo contenido en G_{12}^f y $b \in A(D)$ entonces existe una única $x \in C_3$ tal que $b \in Dx$.

Lema c) Sea T una vv' -trayectoria contenida en G_{12}^f entonces, T es par si y sólo si $f(v)=f(v')$.

Lema d) Sea T una vv' -trayectoria y sea T' una ww' -trayectoria. Si ambas están contenidas en G_{12}^f y $f(v)=f(w)$ y $f(v') \neq f(w')$, entonces tienen distinta paridad.

Como se dijo anteriormente, en este paso demostraremos

que si D es un ciclo sin diagonales contenido en G_{12}^f , entonces existe $w, w' \in A(D)$ tal que $\{w, w'\}$ es un corte puntual de G_{12}^f .

Por lo tanto supongamos que D es un ciclo sin diagonales contenido en G_{12}^f .

i) Empecemos por demostrar que si existe $x \in C_3$ tal que $|Dx|=1$ entonces, si $Dx = \{v, v'\}$, $\{v, v'\}$ es un corte puntual de G_{12}^f .

Sea $x \in C_3$ tal que $Dx = \{v, v'\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $f(v)=1$ y $f(v')=2$. Por el paso 1, se sabe que $|N_G(x)| \geq 4$.

Si existe $v'' \in N_G(x) - \{v, v'\}$ tal que $v'' \in V(D)$, entonces supongamos, nuevamente sin perder generalidad, $f(v'')=1$. Sea T la $v''v$ -trayectoria contenida en D que no pasa por v , y sea $D' = TV \cup v''x \cup xv'$. Como T tiene longitud impar, por el lema c), entonces D' es un ciclo impar; por el teorema 3.5, existe un triángulo R con $V(R) \subseteq V(D')$. Puesto que $V(D') \cap C_3 = \{x\}$, es directo que $x \in V(R)$ y, como D no tiene diagonales, la arista que une a los otros vértices de R (es decir, la opuesta) debe estar en Dx . Pero $Dx = \{v, v'\}$, lo cual significa que $v \in V(D')$ y, por lo tanto, T pasa por v , que supusimos no ocurría.

De lo anterior se tiene que $N_G(x) \cap V(D) = \{v, v'\}$.

Si $\{v, v'\}$ no es un corte puntual de G_{12}^f entonces, debe existir una trayectoria P en G_{12}^f que una a un vértice $v'' \in N_G(x) - \{v, v'\}$ con un vértice $w \in V(D) - \{v, v'\}$, tal que $\{v, v'\} \cap V(P) = \emptyset$. Es fácil ver que podemos suponer $V(D) \cap V(P) = \{w\}$ y $N_G(x) \cap V(P) = \{v''\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $f(v'')=2$. Sea T la wv -trayectoria contenida en D y que no pasa por v' y sea $D' = P \cup T \cup v''x \cup$

xv^n .

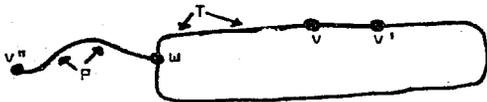


fig. 9

Puesto que PVT tiene longitud impar (por el lema c)), entonces D' es un ciclo impar; por el teorema 3.5, existe un triángulo R con $V(R) \subseteq V(D')$. Nuevamente, es fácil ver que $x \in V(R)$, y como los otros dos vértices de R están en $N_G(x) \cap V(D') = \{v, v'\}$ entonces $vv' \in A(R) \subseteq A(G)$; lo cual no es posible, ya que entonces los triángulos (x, v, v') y (x, v, v^n) serían adyacentes.

En vista de lo anterior, en lo que resta del paso 3 supondremos que $|D_x| \neq 1$ para $x \in C_3$.

ii) Ahora veremos que si $x \in C_3$ con $D_x \neq \emptyset$ y $vv', ww' \in D_x$ con $vv' - ww'$ en D_x , entonces $f(v') = f(w)$.

Puesto que G no tiene triángulos adyacentes, es directo que $v' \neq w$. Si $f(v') \neq f(w)$, $T^{D_x}(v', w)$ tiene longitud impar (por el lema c)). Sea $D' = T^{D_x}(v', w) \cup wx \cup xv'$; por lo anterior y por el teorema 3.5, existe un triángulo R tal que $V(R) \subseteq V(D')$. Como $V(T^{D_x}(v', w)) \subseteq V(D)$, es claro que $x \in V(R)$ y la arista que incide en los otros vértices de R está en $A(T^{D_x}(v', w))$ (ya que D no tiene diagonales) (fig 10); entonces tal arista debe estar en $D_x \cap A(T^{D_x}(v', w))$, que no es posible, por definición de $T^{D_x}(v', w)$. Por lo tanto $f(v') = f(w)$.

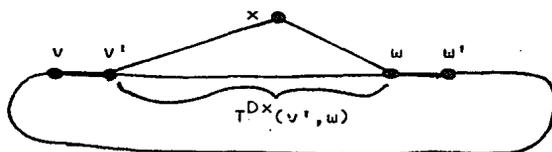


Fig. 10

iii) Sean $x \in \mathbb{C}_3$ y $v_0^i v_1$, $v_1^i v_2$, ..., $v_{n-1}^i v_n$ aristas distintas de Dx tales que $v_{i-1}^i v_i - v_i^i v_{i+1}$ en Dx , para $i=1, 2, \dots, n-1$, entonces $f(v_0^i) = f(v_n)$ si n es par, y $f(v_0^i) \neq f(v_n)$ si n es impar ($n \geq 1$).

Hagamos inducción sobre n .

Si $n=1$ entonces el resultado es obvio.

Supongamos el resultado válido para menos de n aristas ($n \geq 2$).

Si $n=1$ es par entonces, por hipótesis de inducción, $f(v_0^i) = f(v_{n-1})$. Y como $v_{n-2}^i v_{n-1} - v_{n-1}^i v_n$ en Dx , del resultado ii) se tiene que $f(v_{n-1}) = f(v_{n-1}^i)$, lo cual implica que $f(v_{n-1}) \neq f(v_n)$ (ya que obviamente $f(v_{n-1}^i) \neq f(v_n)$), es decir $f(v_0^i) \neq f(v_n)$.

Si $n=1$ es impar entonces, por hipótesis de inducción, $f(v_0^i) \neq f(v_{n-1})$, y como $v_{n-2}^i v_{n-1} - v_{n-1}^i v_n$ en Dx se tiene, por ii), $f(v_{n-1}) = f(v_{n-1}^i) \neq f(v_n)$. Lo cual significa que $f(v_0^i) = f(v_n)$, ya que $Dx \subseteq A(G_{12}^f)$.

iv) En seguida demostraremos que si $x \in \mathbb{C}_3$, entonces $|Dx|$ es par.

Supongamos que $|Dx|$ es impar (por lo tanto $|Dx| \geq 3$). Sean $v_0'v_1, v_1'v_2, \dots, v_{n-1}'v_n$ con $n=|Dx|$, las aristas de Dx . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v_{i-1}'v_i - v_i'v_{i+1}$ en Dx para $i=1, 2, \dots, n-1$, y $v_{n-1}'v_n - v_0'v_1$ en Dx . De esto último se tiene, por ii), que $f(v_n) = f(v_0')$. Pero como n es impar entonces, por iii), $f(v_n) \neq f(v_0')$. Que es una contradicción.

v) Supongamos ahora que $x, y \in C_3$, $x \neq y$, $Dx \neq \emptyset$ y $Dy \neq \emptyset$; entonces todos los arcos de Dx y de Dy con respecto a Dy y Dx , respectivamente, tienen el mismo número de elementos, módulo 2.

Para demostrar lo anterior, es suficiente con ver que si Hx es un arco de Dx con respecto a Dy , con un número par de elementos, entonces todos los arcos de Dx y de Dy (con respecto a Dy y Dx , respectivamente) tienen un número par de elementos. Y para esto último, es fácil ver que sólo se necesita demostrar que los arcos de Dy que acotan a Hx tienen un número par de elementos.

Por lo tanto, supongamos que Hx es un arco de Dx con un número par de elementos, y sean v_1v_2, v_3v_4, v_1 y v_4 las aristas y los vértices extremos del arco Hx . También sean w_1w_2, w_3w_4, w_2 y w_3 las aristas y los vértices de Dy y $V(Dy)$ que acotan al arco Hx , respectivamente. Por último, sea My el arco de Dy que contiene a la arista w_3w_4 , y como esta arista es extrema del mismo arco My , entonces sea w_5w_6 la otra arista extrema del arco My (no necesariamente distinta de w_3w_4) y sea w_6 el otro vértice extremo de My (fig. 11).

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que M_y tiene un número impar de elementos. De iv) se deduce que D_y está formado por más de un arco, lo cual significa que $\{w_1, w_2\} \cap V(M_y) = \emptyset$. Puesto que D_y tiene más de un arco, es claro que también D_x tiene más de un arco; por lo tanto, si $v_5 v_6$ y v_5 son la otra arista y el otro vértice de D_x y $V(D_x)$ que acotan a M_y (distintos de $v_3 v_4$ y v_4 , respectivamente) entonces, $\{v_5, v_6\} \cap V(H_x) = \emptyset$.

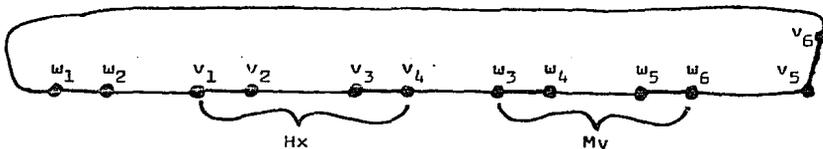


Fig. 11

Se sabe que $w_1 w_2 - v_1 v_2$ y $w_5 w_6 - v_5 v_6$ en D_{xy} , por lo tanto sea $D' = T^{D_{xy}}(w_2, v_1) \cup v_1 x \cup x v_5 \cup T^{D_{xy}}(v_5, w_6) \cup w_6 y \cup y w_2$.

Es fácil ver que D' es un ciclo. Puesto que $f(v_1) = f(v_5)$ (ya que por iii) se tiene $f(v_1) = f(v_4)$ y por ii) se tiene $f(v_4) = f(v_5)$) y $f(w_2) \neq f(w_6)$ (pues por ii) $f(w_2) = f(w_3)$ y por iii) $f(w_3) \neq f(w_6)$), entonces se deduce (por el lema d)) que D' es impar.

Del teorema 3.5 se tiene que existe un triángulo R tal que $V(R) \subseteq V(D')$. Como $V(D') \cap C_3 = \{x, y\}$, entonces $\{x, y\} \cap V(R) \neq \emptyset$.

Supongamos que $x \in V(R)$, en forma similar se llega a una contradicción si $y \in V(R)$. Como D no tiene diagonales, entonces la arista b que incide en los otros dos vértices de R debe estar en D_x . Por definición se tiene que $b \notin A(T^{D_{xy}}(w_2, v_1))$ y $b \notin A(T^{D_{xy}}(v_5, w_6))$, siendo la única posibilidad restante que b incida en un

vértice v de $V(T^{Dxy}(w_2, v_1))$ y en otro v' de $V(T^{Dxy}(v_3, w_4))$. De esto y del hecho de que $b \in A(D)$, se deduce que $v = w_2$ o $v = v_1$. Si $v = w_2$ entonces $v' = w_1$, es decir $w_1 w_2 \in D_x \cap D_y$, que por el lema b) no es posible. Y si $v = v_1$, entonces $v' = v_2$, que tampoco es posible pues $v_2 \notin V(D')$ (recuérdese que $|H_x|$ es par).

vi) A continuación veremos que si $x, y \in G_3$ con $D_x \neq \emptyset$ y $D_y \neq \emptyset$, y H_x es un arco de D_x con respecto a D_y con un número impar de elementos, entonces $|H_x| = 1$.

Supongamos que $|H_x| > 1$ y sean $v_1 v_2, v_3 v_4, v_1$ y v_4 las aristas y los vértices extremos de H_x . También sean $w_1 w_2, w_3 w_4, w_2$ y w_3 las aristas de D_y y los vértices de $V(D_y)$ que acotan a H_x . Como $|D_y| > 1$ y G no tiene triángulos adyacentes entonces $\{w_1, w_2\} \cap \{w_3, w_4\} = \emptyset$.

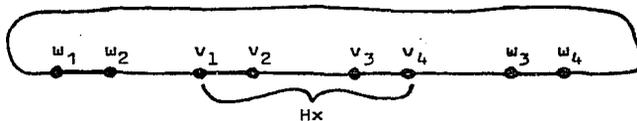


fig. 12

Puesto que $w_1 w_2 - v_1 v_2$ y $v_3 v_4 - w_3 w_4$ en D_{xy} , sea $D' = T^{Dxy}(w_2, v_1) \cup v_1 x \cup x v_4 \cup T^{Dxy}(v_4, w_3) \cup w_3 y \cup y w_2$. Claramente D' es un ciclo.

Como $w_1 w_2 - w_3 w_4$ en D_{xy} , se deduce, por ii), que $f(w_2) = f(w_3)$. Y por iii) se tiene que $f(v_1) \neq f(v_4)$. De estos dos resultados y del lema d) se concluye que D' es impar.

Del teorema 3.5 se deduce que existe un triángulo R tal

que $V(R) \subseteq V(D')$. Nuevamente, como $V(D') \cap C_3 = \{x, y\}$, entonces $x \in V(R)$ o $y \in V(R)$.

Supongamos que $y \in V(R)$, en forma similar se llega a una contradicción si $x \in V(R)$. Sea $b = vv'$ la arista de R que incide en los otros vértices. Por definición de $T^{Dxy}(w_2, v_1)$ y $T^{Dxy}(v_4, w_3)$, y como D no tiene diagonales, entonces uno de los vértices en que incide b , digamos v , está en $V(T^{Dxy}(w_2, v_1))$, mientras que el otro, v' , está en $V(T^{Dxy}(v_4, w_3))$, y $b \in A(D)$. Esto último significa que $v = w_2$ o $v = v_1$. Si $v = w_2$ entonces $v' = w_1$, que no es posible ya que $w_1 \notin V(D')$. Y si $v = v_1$ entonces $v' = v_2$, que tampoco es posible ya que $v_2 \notin V(D')$ (pues $|Hx| > 1$).

vii) Sean $x, y \in C_3$ con $Dx \neq \emptyset$ y $Dy \neq \emptyset$. Si Hx es un arco de Dx con respecto a Dy tal que $|Hx|$ es impar entonces, Dx y Dy están formados cada uno por dos arcos y cada arco tiene exactamente un elemento.

Para ver ésto, obsérvese que por v) y vi) se tiene que todos los arcos de Dx y todos los de Dy están formados por un elemento. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Dx está formado por más de dos arcos. Por lo tanto existen tres aristas distintas v_1v_2 , v_3v_4 y v_5v_6 de Dx tales que $v_1v_2 - v_3v_4 - v_5v_6$ en Dx . Como cada arista de Dx forma un arco con respecto a Dy y cada arista de Dy también forma un arco con respecto a Dx entonces, existen aristas w_1w_2 y w_3w_4 en Dy tales que $v_1v_2 - w_1w_2 - v_3v_4 - w_3w_4 - v_5v_6$ en Dxy (fig. 13).

Sea $D' = T^{Dxy}(v_2, w_1) \cup w_1y \cup yw_4 \cup T^{Dxy}(w_4, v_5) \cup v_5x \cup xv_2$. Es

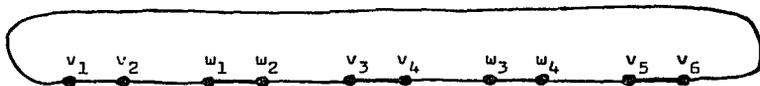


Fig. 13

fácil ver que D' es un ciclo. Como $w_1 w_2 - w_3 w_4 \in D_y$ entonces, por iii), se tiene $f(w_1) = f(w_4)$. De ii) y iii) se deduce que $f(v_1) = f(v_5)$, es decir $f(v_2) \neq f(v_6)$. Por lo tanto, de los dos resultados anteriores y del lema d), se concluye que D' es impar. Por razones similares a las dadas en los incisos anteriores se obtiene una contradicción.

viii) Ahora demostraremos que para el ciclo D existen dos vértices en C_3 que cumplen con las hipótesis y, por lo tanto, con la conclusión del inciso anterior.

Para cada $x \in C_3$ con $D_x \neq \emptyset$, es decir $|D_x| \geq 2$, y para cada pareja de aristas $v_1 v_2$ y $v_3 v_4$ de D_x con $v_1 v_2 - v_3 v_4 \in D_x$, existe $\Gamma^{D_x y}(v_2, v_3)$. Como cada pareja de aristas de D_x de este tipo genera al menos una trayectoria de la forma anterior, entonces sea r_x la longitud de una de estas trayectorias de longitud mínima (es decir, de entre todas las trayectorias generadas por parejas de aristas del tipo anterior, se está tomando una de longitud mínima). Y sea $r = \min\{r_x\}$, donde el mínimo se toma sobre aquellas $x \in C_3$ tales que $D_x \neq \emptyset$.

De lo anterior se tiene que existe $y \in C_3$ con $D_y \neq \emptyset$ y existen $w_1 w_2, w_3 w_4 \in D_y$ tales que $w_1 w_2 - w_3 w_4 \in D_y$ y $r = r_y = |\text{ACT}^{D_y}$.

(w_2, w_3)).

Si $r=0$ entonces, $w_2=w_3$ y los triángulos (y, w_1, w_2) y (y, w_3, w_4) serían adyacentes. De aquí que $r>0$.

Sea vv' una arista en $A(T^{Dy}(w_2, w_3))$. Por el paso 1, se sabe que existe $x \in C_3$ tal que $vv' \in Dx$. Si existiera otra arista de Dx en $A(T^{Dy}(w_2, w_3))$, entonces debería existir una arista $uu' \in Dx \cap A(T^{Dy}(w_2, w_3))$ tal que $vv'-uu'$ en Dx o $uu'-vv'$ en Dx ; sin pérdida de generalidad supongamos $vv'-uu'$ en Dx , entonces $T^{Dx}(v', u)$ está contenida propiamente en $T^{Dy}(w_2, w_3)$, lo cual significa que $r_x < r_y = r$, que es una contradicción. Por lo tanto la arista vv' forma un arco de Dx con respecto a Dy , que es lo que se quería demostrar.

En vista de lo anterior, en lo que resta de este paso supondremos que los vértices $x, y \in C_3$ son tales que $Dx = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, $Dy = \{w_1w_2, w_3w_4\}$, Dx está formado por dos arcos con respecto a Dy y también Dy está formado por dos arcos con respecto a Dx . Se supondrá, sin perder generalidad, que $f(v_1)=1$, $f(v_2)=2$, $v_1v_2-v_3v_4$ en Dx , $w_1w_2-w_3w_4$ en Dy y $v_1v_2-w_1w_2$ en Dxy (fig. 14).

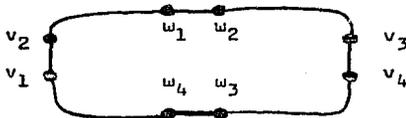


fig. 14

ix) Veamos que $|N_G(x)| > 4$ y $|N_G(y)| > 4$.

Supongamos que $|N_G(x)| = 4$, en forma análoga se prueba que $|N_G(y)| > 4$.

Del paso 2 inciso i), se sabe que v_1x es una arista de corte $f(1,3)$ o v_2x es de corte $f(2,3)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v_1x es de corte $f(1,3)$.

Sea $z \in C_3$ tal que $Dz \neq \emptyset$. Para $qq' \in Dz$, el triángulo (z, q, q') contiene una arista que incide en z y en un vértice de C_1 ; sea Bz el conjunto de todas estas aristas, claramente $Bz \subseteq A(G_{13}^f)$. Hagamos $B = \bigcup Bz$, donde la unión se toma sobre las $z \in C_3$ tales que $Dz \neq \emptyset$.

Si G' es la subgráfica de G tal que $V(G') = \{z \in C_3 : Dz \neq \emptyset\} \cup \{V(D) \cap C_1\}$ y $A(G') = B$, entonces de iv) se deduce que el grado de z es par, para $z \in V(G') \cap C_3$; y como en cada vértice $q \in V(D) \cap C_1$ inciden dos aristas del ciclo D , es fácil ver que q tiene grado dos en G' . Por lo tanto todo vértice de G' tiene grado par en G' y, por el teorema 1.4, cada arista de G' está en un ciclo de G' . Pero $A(G') \subseteq A(G_{13}^f)$, lo cual significa que ninguna arista de G' es de corte $f(1,3)$ en G . Que es una contradicción ya que v_1x es de corte $f(1,3)$ y está en $A(G')$.

x) En seguida probaremos que $N_G(x) \cap V(D) = V(Dx)$ y $N_G(y) \cap V(D) = V(Dy)$.

Si una de las igualdades anteriores no se cumple entonces, sin perder generalidad, supongamos que $N_G(x) \cap V(D) \neq V(Dx)$ es decir, existe $v_5 \in N_G(x) \cap V(D)$ tal que $v_5 \notin V(Dx)$. Como $v_1v_2 = w_1w_2$

en D_{xy} , sea $v_5 \in V(T^{D_{xy}}(v_2, w_1))$ (fig. 15); los otros casos son análogos o similares.

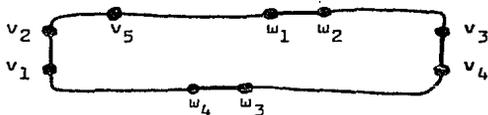


fig. 15

Se sabe que $f(v_1)=1$ y $f(v_2)=2$, y por ii) se tiene que $f(v_3)=2$, $f(v_4)=1$, $f(w_1)=f(w_4)$ y $f(w_2)=f(w_3)$.

Si $f(v_5)=1$, sea P la v_2v_5 -trayectoria contenida en $T^{D_{xy}}(v_2, w_1)$. Del lema c) se deduce que el ciclo $D' = P \cup v_5x \cup xv_2$ es impar, y por el teorema 3.5 se tiene que existe un triángulo S tal que $V(S) \subseteq V(D')$. Como $V(D') \cap C_3 = \{x\}$ entonces, $x \in V(S)$ y la arista de S que no incide en x está en D_x ; sin embargo, como D no tiene diagonales, es claro que esta arista debe estar en P , lo que es una contradicción pues, por definición, $D_x \cap A(T^{D_{xy}}(v_2, w_1)) = \emptyset$.

Por lo tanto se debe tener $f(v_5)=2$.

Sea P' la v_5w_1 -trayectoria contenida en $T^{D_{xy}}(v_2, w_1)$ y sea $D'' = P' \cup w_1y \cup yw_4 \cup T^{D_{xy}}(w_4, v_1) \cup v_1x \cup xv_5$. Es claro que D'' es un ciclo y como $f(w_1)=f(w_4)$ y $f(v_1) \neq f(v_5)$ entonces, por el lema d), se deduce que D'' es impar. Por el teorema 3.5, existe un triángulo R tal que $V(R) \subseteq V(D'')$. Puesto que $\{x, y\} = V(D'') \cap C_3$, se tiene que $x \in V(R)$ o $y \in V(R)$.

Si $x \in V(R)$ y b es la arista de R opuesta a x entonces,

como D no tiene diagonales, $b \in Dx$. Lo cual no es posible, ya que $Dx = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ y $\{v_2, v_3, v_4\} \cap V(D) = \emptyset$.

Si $y \in V(R)$ y b' es la arista de R opuesta a y y entonces, nuevamente porque D no tiene diagonales, $b' \in Dy$. Que tampoco es posible pues, $Dy = \{w_1w_2, w_3w_4\}$ y $\{w_2, w_3\} \cap V(D) = \emptyset$.

xi) Probemos ahora que no puede existir una trayectoria P que una a un vértice $v_5 \in N_G(x) - V(Dx)$ con un vértice $w_5 \in N_G(y) - V(Dy)$, tal que $V(P) \cap V(D) = \emptyset$.

Supongamos que existe tal trayectoria. Es fácil ver que podemos suponer $V(P) \cap N_G(x) = \{v_5\}$ y $V(P) \cap N_G(y) = \{w_5\}$.

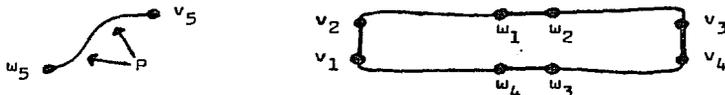


fig. 16

Sabemos que $f(v_1) = f(v_4) = 1$ y $f(v_2) = f(v_3) = 2$. Supongamos que $f(v_5) = 1$, en forma similar se analiza el caso $f(v_5) = 2$.

Si $f(w_5) = f(w_4)$, entonces sea $D' = P \cup w_5y \cup yw_3 \cup T^{Dxy}(w_3, v_4) \cup v_4x \cup xv_5$. Como $V(P) \cap V(D) = \emptyset$, se tiene que D' es un ciclo; y en vista de que $f(v_5) = f(v_4)$ y $f(w_5) = f(w_4) \neq f(w_3)$, se sigue del lema d) que D' es impar. Nuevamente, por el teorema 3.5, se sabe que existe un triángulo R tal que $V(R) \subseteq V(D')$, y como $\{x, y\} = V(D') \cap C_3$ entonces, $x \in V(R)$ o $y \in V(R)$.

Si $x \in V(R)$, como $V(P) \cap N_G(x) = \{v_5\}$ y, por x , $V(T^{Dxy}(w_3, v_4)) \cap N_G(x) = \{v_4, v_5\}$, se deduce que $\{v_4, v_5\} \subseteq V(R)$, es decir $v_4v_5 \in$

$A(G)$. Lo cual no es posible, pues se tendría que los triángulos R y (x, v_3, v_4) serían adyacentes.

Si $y \in V(R)$, entonces por razones similares a las dadas en el párrafo anterior, se obtiene que $w_3 w_5 \in A(G)$, que tampoco es posible, ya que en tal caso los triángulos (y, w_3, w_4) y (y, w_3, w_5) serían adyacentes.

Si $f(w_5) \neq f(w_4)$, considerando $D'' = P \cup w_5 y \cup y w_4 \cup T^{Dxy}(w_4, v_1) \cup v_1 x \cup x v_5$, y en forma similar a como se hizo en los tres párrafos anteriores se llega a una contradicción.

xii) En este penúltimo inciso demostraremos que $V(Dx)$ es un corte puntual de G_{12}^f , que separa a los vértices de $V(D)-V(Dx)$ de los de $N_G(x)-V(Dx)$, es decir en $G_{12}^f - V(Dx)$ no existe ninguna trayectoria que una a un vértice de $V(D)-V(Dx)$ con uno de $N_G(x)-V(Dx)$.

Empecemos por ver que $V(D)-V(Dx) \neq \emptyset$, es decir $|V(D)| > 4$.

Si $|V(D)| = 4$, significa que $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $v_2 v_3 \in Dx$, con lo que los triángulos (x, v_1, v_2) y (x, v_2, v_3) serían adyacentes. Que es una contradicción.

Por ix), $N_G(x)-V(Dx) \neq \emptyset$. Si $V(Dx)$ no es un corte puntual de G_{12}^f que separa a los vértices de $V(D)-V(Dx)$ de los de $N_G(x)-V(Dx)$, entonces existe una trayectoria P que une a un vértice $v_5 \in N_G(x)-V(Dx)$ con un vértice $q \in V(D)-V(Dx)$, tal que $V(P) \cap V(Dx) = \emptyset$. Es fácil ver que podemos suponer $V(P) \cap N_G(x) = \{v_5\}$ y $V(P) \cap V(D) = \{q\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $q \in V(T^{Dxy}(v_2, w_1))$, por lo tanto $q \neq v_2$ (fig. 17).

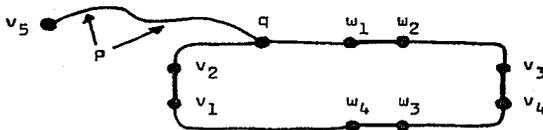


Fig. 17

Si $f(v_5)=f(v_2)=2$, sea P' la qv_1 -trayectoria contenida en $T^{Dxy}(v_2, w_1)$ y sea $D'=P \cup P' \cup w_1y \cup yw_4 \cup T^{Dxy}(w_4, v_1) \cup v_1x \cup xv_5$. Como $V(P) \cap V(D)=\{q\}$, se tiene que $P \cup P'$ es una trayectoria y, por lo tanto, D' es un ciclo. Como $f(v_5)=f(v_2) \neq f(v_1)$ y $f(w_1)=f(w_4)$ entonces, del lema d) se deduce que D' es impar. Por el teorema 3.5, existe un triángulo R tal que $V(R) \subseteq V(D')$. Nuevamente es fácil ver que $x \in V(R)$ o $y \in V(R)$. Si $x \in V(R)$, entonces los otros dos vértices de R deben estar en $N_G(x)$, pero $V(P) \cap N_G(x)=\{v_5\}$ y, por el inciso x), $V(P') \cap N_G(x)=\emptyset$ y $V(T^{Dxy}(w_4, v_1)) \cap N_G(x)=\{v_1\}$, es decir $V(D') \cap N_G(x)=\{v_1, v_5\}$; por lo tanto $V(R)=\{x, v_1, v_5\}$, que no es posible, ya que en tal caso R sería adyacente al triángulo (x, v_1, v_2) . De lo anterior se tiene que $y \in V(R)$; entonces los otros dos vértices de R deben estar en $N_G(y)$, pero por xi) se sabe que $V(P) \cap N_G(y)=\emptyset$ ó $V(P) \cap N_G(y)=\{w_1\}$ (esto último si $w_1=q$), y por x) se tiene que $V(P') \cap N_G(y)=\{w_1\}$ y $N_G(y) \cap V(T^{Dxy}(w_4, v_1))=\{w_4\}$, lo que significa que $V(D') \cap N_G(y)=\{w_1, w_4\}$, es decir $V(R)=\{y, w_1, w_4\}$; que tampoco es posible, pues en tal caso se tendría que R sería adyacente al triángulo (y, w_1, w_2) .

Si $f(v_5) \neq f(v_2)$, entonces sea P'' la qv_2 -trayectoria contenida en $T^{Dxy}(v_2, w_1)$ y sea $D''=P \cup P'' \cup v_2x \cup xv_5$. Es fácil ver que

D' es un ciclo. Como $f(v_5) \neq f(v_2)$, del lema c) se deduce que D' es impar (obsérvese que $P \cup P''$ es una trayectoria pues $V(P) \cap V(D) = \{q\}$). Por razones similares a las dadas en este y otros incisos se obtiene una contradicción.

xiii) Finalmente, demostraremos que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{w_1, w_2\}$ o $\{w_3, w_4\}$ es un corte puntual de G_{12}^f .

Supongamos que $\{v_1, v_2\}$ ni $\{v_3, v_4\}$ son cortes puntuales de G_{12}^f .

Del inciso ix) se sabe que existe $v_5 \in N_G(x) - V(Dx)$. Puesto que $\{v_1, v_2\}$ no es un corte puntual de G_{12}^f , entonces existe una trayectoria P que une a v_5 con un vértice de $\{v_3, v_4\}$ tal que $V(P) \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$. Claramente se puede suponer $|V(P) \cap \{v_3, v_4\}| = 1$; también supondremos, sin perder generalidad, que $V(P) \cap \{v_3, v_4\} = \{v_3\}$. Del inciso anterior se deduce que $V(P) \cap V(D) = \{v_3\}$, y del inciso xi) se tiene que $V(P) \cap \{N_G(y) - V(Dy)\} = \emptyset$.

En forma similar, como $\{v_3, v_4\}$ no es un corte puntual de G_{12}^f , entonces existe una trayectoria P' que une a v_5 con un vértice de $\{v_1, v_2\}$ tal que $V(P') \cap \{v_3, v_4\} = \emptyset$. Aquí también se puede suponer que $|V(P') \cap \{v_1, v_2\}| = 1$; analizaremos el caso $V(P') \cap \{v_1, v_2\} = \{v_1\}$, en forma similar se sigue la demostración si $V(P') \cap \{v_1, v_2\} = \{v_2\}$. Nuevamente, del inciso anterior se tiene que $V(P') \cap V(D) = \{v_1\}$, y del inciso xi) se deduce que $V(P') \cap \{N_G(y) - V(Dy)\} = \emptyset$ (Fig. 18).

Del teorema 1.2, se tiene que existe una $v_1 v_3$ -trayectoria P'' tal que $A(P'') \subseteq A(P \cup P')$, y de los párrafos anteriores se

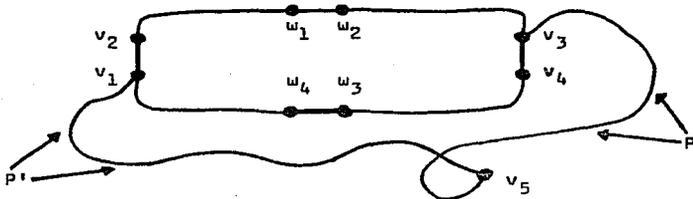


fig. 18

sabe que $V(P'') \cap V(D) = \{v_1, v_3\}$ y que $V(P'') \cap \{N_G(y) - V(Dy)\} = \emptyset$.

Sea $D' = P'' \cup v_3 v_4 \cup T^{Dx}(v_4, v_1)$. Entonces, como $V(P'') \cap V(D) = \{v_1, v_3\}$, es claro que D' es un ciclo en G_{12}^f tal que $w_3 w_4 \in A(D')$. Como $V(P'') \cap \{N_G(y) - V(Dy)\} = \emptyset$ y, por el inciso x), $V(T^{Dx}(v_4, v_1) \cap N_G(y) = \{w_3, w_4\}$, se deduce que $V(D') \cap N_G(y) \subseteq \{w_2, w_3, w_4\}$ (nótese que se puede dar $w_2 = v_3$). Del teorema 3.6 se tiene que existe un ciclo D'' sin diagonales, tal que $V(D'') \subseteq V(D')$ y $w_3 w_4 \in A(D'')$. Pero $V(D'') \cap N_G(y) \subseteq V(D') \cap N_G(y) \subseteq \{w_2, w_3, w_4\}$; esto significa que $D'' = \{w_3 w_4\}$, y por 1) se tiene que $\{w_3, w_4\}$ es un corte puntual de G_{12}^f .

Paso 4. Por el teorema 1.3 y en vista de que todo vértice de G_{12}^f tiene grado mayor que uno en G_{12}^f (paso 1 inciso 1), entonces existen ciclos contenidos en G_{12}^f . Del teorema 3.6 se deduce que G_{12}^f contiene ciclos sin diagonales, por lo tanto se tiene, por el paso anterior, que existe $vv' \in A(G_{12}^f)$ tal que $\{v, v'\}$ es un corte puntual de G_{12}^f . Sea CP el conjunto de aristas de este tipo. Si $b = ww' \in CP$, entonces existe una componente conexa de

$G_{12}^f - \{w, w'\}$ con el menor número de vértices; denotemos por I_b al número de vértices de tal componente. Y sea $I = \min\{I_b\}$, donde el mínimo se toma sobre todos los elementos de CP . Por lo tanto : existe $a' = vv' \in CP$ tal que $I = I_{a'}$; sea G_1 una de las componentes conexas de $G_{12}^f - \{v, v'\}$ tal que $I_{a'} = |V(G_1)|$, y sea G_2 la subgráfica inducida de G_{12}^f (y de G) por el conjunto $V(G_1) \cup \{v, v'\}$.

1) Empecemos por demostrar que si existe $b \in CP \cap A(G_2)$, entonces b incide en v o v' .

Supongamos que existe $b \in CP \cap A(G_2)$ tal que b no incide en v ni en v' . Si $b = ww'$, claramente v y v' están en una misma componente conexa de $G_{12}^f - \{w, w'\}$. Sea G_3 una de las componentes conexas de $G_{12}^f - \{w, w'\}$, tal que $\{v, v'\} \cap V(G_3) = \emptyset$.

Veamos que $V(G_3) \cap \{V(G_{12}^f) - V(G_2)\} = \emptyset$. Si existiera $h \in V(G_3) \cap \{V(G_{12}^f) - V(G_2)\}$, entonces sea $h' \in V(G_3)$ tal que h' es adyacente a w o w' en G_{12}^f . Puesto que $h, h' \in V(G_3)$, existe una hh' -trayectoria T contenida en G_3 , es decir $V(T) \cap \{v, v'\} = \emptyset$. Si a T le agregamos la arista que incide en h' y en un vértice de $\{w, w'\}$, entonces estaremos obteniendo una trayectoria T' que une a un vértice que no está en G_1 (ya que $h \in V(G_{12}^f) - V(G_2)$ y $V(G_1) \subseteq V(G_2)$) con un vértice que está en G_1 (pues $w, w' \in V(G_1)$), tal que $V(T') \cap \{v, v'\} = \emptyset$. Lo cual no es posible puesto que G_1 es una componente conexa de $G_{12}^f - \{v, v'\}$.

Entonces, como $V(G_3) \cap \{V(G_{12}^f) - V(G_2)\} = \emptyset$, se tiene que $V(G_3) \subseteq V(G_2)$. Pero $\{v, v', w, w'\} \subseteq V(G_2)$ y $\{v, v', w, w'\} \cap V(G_3) = \emptyset$, lo cual significa que $|V(G_3)| < |V(G_1)|$, es decir $I_b < I_{a'} = I$, que es una contradicción.

ii) De lo anterior es directo que G_1 no contiene ciclos, porque si D fuera un ciclo en G_1 entonces, por el teorema 3.6, existiría un ciclo D' sin diagonales tal que $V(D') \subseteq V(D)$ y, por el paso anterior, se tendría que existiría $b \in A(D') \cap CP$; lo cual es una contradicción, ya que b no incidiría en v ni en v' y $b \in A(D') \cap CP \subseteq A(G_1) \cap CP \subseteq A(G_2) \cap CP$, que por el inciso anterior no es posible.

iii) Ahora probaremos que G_2 no contiene cuadrados.

Supongamos que D es un cuadrado contenido en G_2 . Claramente D no tiene diagonales. Sea $D = (h_1, h_2, h_3, h_4)$.

Tomemos una arista cualquiera de D , por ejemplo $h_1 h_2$. Por el paso 1, se sabe que existe $z \in C_3$ tal que $h_1 h_2 \in Dz$. Si $h_3 z \in A(G)$ entonces los triángulos (z, h_1, h_2) y (z, h_2, h_3) serían adyacentes. Similarmente se ve que $h_4 z \notin A(G)$. Por lo tanto $Dz = \{h_1 h_2\}$ y, por el inciso i) del paso 3, se tiene que $h_1 h_2 \in A(G_2) \cap CP$. Como $h_1 h_2$ es arbitraria, se deduce que $A(D) \subseteq A(G_2) \cap CP$, y como D no tiene diagonales, entonces una arista de D no incide en v ni en v' ; lo cual no es posible, por el inciso i) de este paso.

iv) G_1 no contiene aristas de corte $f(1,2)$, pues si $h_1 h_2$ fuera una de tales aristas, entonces claramente $\{h_1, h_2\}$ sería un corte puntual de G_{12}^f (ya que por el paso 1, todo vértice de G_{12}^f tiene grado mayor que uno en G_{12}^f), es decir $h_1 h_2 \in A(G_1) \cap CP$; lo cual por el inciso i) no es posible, pues $A(G_1) \subseteq A(G_2)$ y $V(G_1) = V(G_2) - \{v, v'\}$.

v) Sea $b = w_1 w_2 \in A(G_1)$, entonces veamos que el grado de w_1 o el de w_2 en G_2 es mayor que dos.

Como $w_1, w_2 \in V(G_1)$, es fácil ver que el grado de w_1 y el de w_2 en G_2 es el mismo con respecto a G_{12}^f , y del paso 1 se sabe que es mayor que uno. Si w_1 y w_2 tuvieran grado dos en G_{12}^f entonces, también por el paso 1, tendrían grado cuatro en G ; pero por el paso 2 inciso iii), ésto significaría que $w_1 w_2$ sería de corte $f(1,2)$ de G , que por el inciso iv) de este paso no es posible.

vi) Por último, demostraremos que G_1 contiene un ciclo.

Como se dijo en el inciso anterior, si $h \in V(G_1)$ entonces el grado de h en G_2 es el mismo que en G_{12}^f . Sean $H_1 = \{h \in V(G_1) : hv \in A(G) \text{ o } hv' \in A(G), \text{ y } \text{gr}_{G_2}(h) > 2\}$ y $H_2 = \{h' \in V(G_1) : h' \text{ no es adyacente a } v \text{ ni a } v' \text{ en } G\}$. Si $G_3 = G(H_1 \cup H_2)$, entonces para demostrar que G_1 contiene un ciclo, es suficiente con demostrar que G_3 contiene uno; y para esto último sólo se necesita ver, por el teorema 1.3, que todo vértice de G_3 tiene grado mayor que uno en G_3 .

Empecemos por ver que $V(G_3) \neq \emptyset$.

Como $V(G_1) \neq \emptyset$, entonces existe $h \in V(G_1)$ tal que $hv \in A(G_2)$ o $hv' \in A(G_2)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $hv \in A(G_2)$. Puesto que el grado de h en G_2 es mayor que uno, existe $h' \in V(G_2)$ tal que $h'v$ y $hh' \in A(G_2)$.

Si $h' = v'$, entonces el triángulo (h, v, v') estaría contenido en G_2 y en G_{12}^f , lo cual no es posible. Si $h'v \in A(G_2)$, el

triángulo (h, h', v) estaría contenido en G_2 y en G_{12}^f , que tampoco es posible. Y si $h'v' \in A(G_2)$, se tendría que el cuadrado (h, h', v', v) estaría contenido en G_2 , que por iii) no puede ocurrir. Por lo tanto h' está en H_2 , lo cual significa que $V(G_3) \neq \emptyset$.

Ahora demostraremos que todos los vértices de G_3 tienen grado mayor que uno en G_3 . Por lo tanto sea $h \in V(G_3)$.

Si $h \in H_1$, sin perder generalidad supondremos que $hv \in A(G_2)$. Usando la misma idea que se dio en los párrafos anteriores, se demuestra que todos los vértices adyacentes a h en G_2 , salvo el vértice v , están contenidos en H_2 . Y como, por hipótesis, h tiene grado mayor que dos en G_2 , entonces el grado de h en G_3 es al menos dos.

Si $h \in H_2$, empecemos por ver que h es adyacente en G_2 a lo más a un vértice que a su vez es adyacente a v o a v' .

Si existieran $h', h'' \in V(G_2)$ tales que cada uno es adyacente a v o v' y también a h , entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h'v \in A(G_2)$. Si $h''v \in A(G_2)$, se tendría que el cuadrado (h, h', v, h'') estaría contenido en G_2 , que por el inciso iii) no es posible. Y si $h''v' \in A(G_2)$, el ciclo impar (h, h', v, v', h'') estaría contenido en G_2 y en G_{12}^f , que tampoco es posible (recuérdese que todos los ciclos en G_{12}^f son pares). Por lo tanto h es adyacente a lo más a un vértice que a su vez es adyacente a v o a v' .

Si $h \in H_2$ pero h no es adyacente a ningún vértice que a su vez sea adyacente a v o a v' , entonces es claro que el grado de h en G_3 es el mismo que en G_2 , es decir mayor que uno. Por lo

tanto, sólo nos resta analizar el caso en que $h \in H_2$ y h es adyacente a exactamente un vértice que a su vez es adyacente a v o a v' .

Sea $h' \in V(G_2)$ tal que $hh' \in A(G_2)$ y h' es adyacente a v o a v' . Si $h' \in H_1$, entonces el grado de h en G_3 sigue siendo el mismo que en G_2 , es decir mayor que uno. Y si $h' \notin H_1$, significa que el grado de h' en G_2 es dos, por lo tanto el grado de h en G_2 es mayor que dos (por el inciso v)), de lo que se deduce que el grado de h en G_3 es mayor que uno.

De los incisos ii) y vi) de este paso se deduce el teorema.

Por último, para concluir este trabajo, quisiéramos proponer la siguiente conjetura, que es una generalización del teorema 3.1.

Conjetura 2. Sea G una gráfica u-nc, con más de n vértices y que no contiene ninguna subgráfica isomorfa a $K_{n+1}-e$, entonces G tiene un hoyo.

Donde $K_{n+1}-e$ es la gráfica K_{n+1} menos una arista. El teorema 3.1 vendría siendo el caso $n=3$, y es fácil ver que esta conjetura se cumple trivialmente para $n=1$ y $n=2$. No lo demostraremos, pero no es difícil ver que la conjetura también se cumple para $n=4$ en gráficas planas.

R E F E R E N C I A S

1. C. BERGE, Introduction á la theorie des hypergraphes. Lecture notes, Université de Montreal, Summer 1971.
2. B. BOLLOBAS, Uniquely colorable graphs. *J. Combinatorial Theory (B)* 25, 54-61 (1978).
3. B. BOLLOBAS, N. SAUER, Uniquely colourable graohs with large girth. *Canad. J. Math.* 28, no. 6, 1340-1344 (1976).
4. D. CARTWRIGHT, F. HARARY, On colorings of signed graphs. *Elem. Math.* 23, 85-89 (1968).
5. G. CHARTRAND, D. GELLER, On uniquely colorable planar graphs. *J. Combinatorial Theory* 6, 271-278 (1969).
6. B. GRÜNBAUM, Grötzsch's Theorem on 3-colorings. *Michigan Math. J.* 10, 303-310 (1963).
7. F. HARARY, *Graph theory*. Addison Welley (1969).
8. L. LOVASZ, A characterization of perfect graphs. *J. Combinatorial Theory (B)* 13, 95-98 (1972).
9. J. NESETRIL, On critical uniquely colorable graphs. *Arch. Math.* Vol. XXIII, 210-213 (1972).
10. K. PARTHASARATHY, G. RAVINDRA, The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs, *J. Combinatorial Theory (B)* 22, 212-223 (1976).
11. K. PARTHASARATHY, G. RAVINDRA, The validity of the strong perfect graph conjecture for (K_4-e) -free graphs. *J. Combinatorial Theory (B)* 26, 98-100 (1979).
12. A. TUCKER, *Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic*

- graphs. J. Combinatorial Theory (B) 23, 143-149 (1977).
13. A. TUCKER, The strong perfect graph conjecture for planar graphs. Canad. J. Math. 25, 103-114 (1973).
 14. H. WEN-LIAN, Unsolved problems, en "Progress in Graph Theory", Academic Press Canada, 538 (1984).