

24. 20

**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Facultad de Ingeniería**

**DEFLEXIONES EN ELEMENTOS DE  
CONCRETO PRESFORZADO**

Trabajo Escrito en opción de Tesis  
Que para obtener el Título de  
**I N G E N I E R O C I V I L**

Presenta:

**CARLOS ARMENTA MENA**

Director del Trabajo Escrito:  
**Ing. Constancio Rodríguez Cabello**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AYACUCHA

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-1-302

Señor CARLOS ARMENTA MENA,  
Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Constanancio Rodríguez Cabello, para que lo desarrolle como TRABAJO ESCRITO en opción de tesis para su Examen Profesional de la carrera de INGENIERO CIVIL.

"DEFLEXIONES EN ELEMENTOS DE CONCRETO PRESFORZADO"

1. Introducción.
2. Deflexiones máximas permisibles.
3. Evaluación de deflexiones instantáneas en vigas presforzadas.
4. Evaluación de deflexiones diferidas en vigas presforzadas.
5. Deflexiones totales.
6. Conclusiones.  
Bibliografía.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento con lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares del trabajo escrito, el título del trabajo realizado.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, a 16 de diciembre de 1985  
EL DIRECTOR

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ.

QARCI/RCCH/sho.

## I N D I C E

1	INTRODUCCION	3
2	DEFLEXIONES MAXIMAS PERMISIBLES	5
	2.1 Deflexiones Permisibles	5
	2.2 Control de Deflexiones	7
3	EVALUACION DE DEFLEXIONES INSTANTANEAS EN VIGAS PRESFORZADAS	11
	3.1 Generalidades	11
	3.2 Cálculo de Deflexiones Instantáneas	12
	3.3 Ejemplo	17
4	EVALUACION DE DEFLEXIONES DIFERIDAS EN VIGAS PRESFORZADAS	19
	4.1 Generalidades	19
	4.2 Método del PCI ( Prestressed Concrete Institute )	19
	4.2.1 Bases del Método	19
	4.2.2 Dedución del Factor de Largo Plazo " $\lambda$ "	21
	4.2.3 Ejemplo	26
	4.3 Método de la Línea de Presión	27
	4.3.1 Bases del Método	27
	4.3.2 Características y Desarrollo del Método	29
	4.3.3 Ejemplo	36
	4.4 Método de Dan E. Branson	47
	4.4.1 Bases del Método	47
	4.4.2 Ejemplo	53

5	DEFLEXIONES TOTALES	54
	5.1 Deflexión Total	54
	5.2 Ejemplo	56
6	CONCLUSIONES	59
	APENDICE A	61
	APENDICE B	67
	BIBLIOGRAFIA	69

## CAPITULO 1

### INTRODUCCION

Las deflexiones son una parte importante de los estados límite de servicio que deben de cumplir cualquier estructura, y se exige su evaluación en condiciones de servicio para garantizar el buen comportamiento de los distintos elementos que la forman.

El problema de las deflexiones, y en general el de los requisitos de servicio, ha ido adquiriendo una importancia cada vez mayor a medida que se han estado empleando en las construcciones materiales de mayor resistencia y elementos estructurales con secciones más esbeltas.

Por ejemplo, actualmente se emplean en algunas estructuras aceros con una resistencia bastante superior a los que se empleaban hace algunas décadas pero conservando el mismo módulo de elasticidad; lo que implica que desde el punto de vista de la resistencia, pueden emplearse dimensiones menores en los elementos estructurales; sin embargo esto conlleva una disminución en la rigidez con respecto a lo que antes se obtenía.

En la actualidad no existe en nuestro medio una bibliografía extensa para los estudiantes y profesionales de ingeniería, sobre la evaluación de deflexiones en elementos de concreto presforzado.

Este trabajo recopila información, básicamente de los Estados Unidos, sobre el cálculo de deflexiones en elementos pretensados y presenta algunos métodos prácticos de evaluación.

Los métodos propuestos son válidos para vigas totalmente presforzadas que trabajan con sección simple.

El capítulo dos trata sobre las deflexiones máximas permisibles que marcan el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal y el Instituto Americano del Concreto, con algunos comentarios acerca de la necesidad de dichos límites. También se proponen algunas medidas que se pueden tomar para el control de las deflexiones.

En el capítulo tres se presenta la forma de evaluar las deflexiones elásticas instantáneas; el método se aplica a una viga IT que se sigue en los capítulos posteriores. Esto último tiene por objeto mostrar, numéricamente, la secuela de cálculo a seguir en cada uno de los métodos presentados.

En el cuarto capítulo se consideran tres métodos para evaluar las deflexiones diferidas en vigas presforzadas, los métodos son : Método del PCI (Prestressed Concrete Institute), Método de la Línea de Presión y el Método de Dan E. Branson.

En cada uno de ellos se muestran sus características y el desarrollo a seguir para la evaluación.

Las deflexiones totales se tratan en el capítulo cinco y al final se dan las conclusiones del trabajo.

Para complementar el trabajo, se incluyen dos apéndices que son de utilidad. El Apéndice A presenta la forma de obtener los factores de largo plazo recomendados por el PCI, mientras que el Apéndice B propone un método para evaluar las deflexiones en vigas presforzadas de sección compuesta.

## CAPITULO 2

## DEFLEXIONES MAXIMAS PERMISIBLES

## 2.1 DEFLEXIONES PERMISIBLES

La deflexión se puede definir como el desplazamiento total de un punto de un elemento estructural de su posición antes de la aplicación de la carga a su posición después de que se carga el elemento.

Aunque los elementos estructurales pueden diseñarse satisfactoriamente por resistencia, pueden desarrollar contraflechas o deflexiones excesivas con el tiempo y su comportamiento será riesgoso.

Elementos de puentes totalmente presforzados en los cuales no existe o se permiten pequeñas tensiones, frecuentemente desarrollan grandes contraflechas que provocan un perfil desigual del camino afectando seriamente las condiciones de circulación.

Deflexiones excesivas en elementos de edificios, pueden ocasionar serios daños a los muros divisorios, marcos de las ventanas y a otros elementos no estructurales conectados a los elementos.

De lo anterior se deduce que las deflexiones deben de limitarse para el buen comportamiento del elemento.

Las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal en la sección de concreto presforzado indica: "Las deformaciones bajo las condiciones de carga que puedan ser críticas durante el proceso constructivo y la vida útil de la estructura, no deben exceder los valores que en cada caso se consideren aceptables".

Además el Título IV del mismo reglamento señala:

"Se considerará como estado límite cualquier deformación de la estructura que ocasione daños inaceptables a la propia construcción o a sus vecinas, o que cause interferencia con el funcionamiento de equipos e instalaciones o con el adecuado drenaje de superficies y cualquier daño o interferencia a instalaciones de servicio público.

Adicionalmente se considerarán los siguientes límites:

Una flecha vertical, incluyendo los efectos a largo plazo, igual a 0.5 cm, más el claro entre 240. Además para miembros cuyas deformacio-



nes afecten elementos no estructurales, como muros de mampostería, que no sean capaces de soportar deformaciones apreciables, se considerará como estado límite una deflexión, medida después de la colocación de los elementos no estructurales, igual a 0.3 cm más el claro entre 480".

Estos límites se refieren esencialmente a los elementos horizontales (losas y vigas) bajo el efecto de las cargas verticales.

El primer límite, establecido en función del claro, obedece a evitar vibraciones excesivas y a razones de aspecto. El valor admisible tiende a 0.5 cm cuando el claro tiende a cero, por considerarse que una deflexión de esa magnitud es prácticamente imperceptible y no ocasiona problemas.

Se establece un límite de cerca de la mitad del primero, cuando pueden afectarse elementos no estructurales frágiles. El caso más representativo es el de una viga o una losa sobre la que está colocado un muro divisorio de mampostería.

Por la baja resistencia a tensión de la mampostería, los muros se agrietan por pequeños hundimientos de su base que provocan la aparición de tensiones debidas a flexión o cortante en su plano.

La magnitud de los esfuerzos y de las grietas que se producen dependen de la distorsión que se provoca en el muro, o sea de la rotación entre el movimiento vertical del apoyo y la longitud a lo largo de la cual este movimiento se desarrolla; de ahí que el límite se exprese como función del claro.

El límite establecido para el segundo caso, se refiere a la deflexión que ocurre después de colocados los elementos no estructurales, ya que las deformaciones que se presenten con anterioridad no causan problemas a ellos.

El Reglamento ACI proporciona un número de deflexiones permisibles para elementos de edificios. Estos están divididos en dos grupos; uno donde las deflexiones probablemente dañarán a elementos no estructurales ligados al elemento capaces de sufrir daños y otro en donde no sucede así. Las limitaciones del segundo grupo son más rigurosas.

Generalmente se consideran dos tipos de deflexiones; la deflexión instantánea debida a la carga viva, y su combinación con la deflexión adicional de largo plazo debida a la carga permanente.

Un resumen de las deflexiones máximas permisibles del Reglamento ACI se muestran en la tabla 2.1.

El Reglamento Británico sigue una proposición similar a la del ACI pero los valores numéricos son ligeramente diferentes.

## 2.2 CONTROL DE DEFLEXIONES

La deflexión en elementos de concreto parcial y totalmente presforzados, puede ser controlada adecuadamente seleccionando la magnitud y trayectoria del presfuerzo. Sin embargo en nuestro medio no es posible dicha solución, pues por limitaciones técnicas se utilizan únicamente tendones rectos.

Para elementos comunes de concreto reforzado, el Reglamento ACI proporciona espesores mínimos para vigas y losas que se dan en la tabla 2.2 y están en función de la longitud del claro del elemento.

Aunque es difícil establecer límites racionales para elementos presforzados sin referirse a la fuerza de presfuerzo y su trayectoria, dos reglas que inicialmente fueron sugeridas por Lin, pueden ser de valor:

- 1) Usar un peralte del elemento presforzado aproximadamente igual al 75 % del correspondiente a un elemento de concreto reforzado.
- 2) Usar un peralte  $h = 1.5$  a  $2\sqrt{M_{m\acute{a}x}}$ , donde  $h$  es el peralte de la viga en pulgadas y  $M_{m\acute{a}x}$  es el momento máximo actuante en Kips-ft.  
 Nótese que como el momento máximo incluye el momento de peso propio de la pieza, se pueden necesitar algunas iteraciones.

En la práctica el peralte de losas macizas y aligeradas varían burdamente entre  $L/45$  y  $L/30$ .

Las vigas T o TT varían entre L/35 y L/25. Para claros simples de puentes, los peraltes de las vigas varían entre L/25 y L/15.

Adicionalmente de estar dentro de la práctica en los límites de peraltes, el diseñador puede tomar algunas acciones apropiadas para reducir la contraflecha o deflexión; algunas de ellas son:

- Adicionar acero de refuerzo en lugares apropiados para reducir la deformación del concreto debida a flujo plástico y a la contracción. La parte de la deflexión o contraflecha dependiente del tiempo puede reducirse significativamente.
- Dar una contraflecha en el colado de la pieza. Este procedimiento procura balancear la deflexión de largo plazo para lograr un perfil recto del elemento.
- Retardar o dar por etapas la aplicación del presfuerzo. El efecto es disminuir las deflexiones de largo plazo, pues al tiempo de dar el presfuerzo, el concreto ha aumentado su resistencia y su módulo de elasticidad.
- Proporcionar acero de refuerzo en compresión y también en el nivel del acero de presfuerzo, con ésto se logra disminuir los efectos de largo plazo.

TIPO DE MIEMBRO	DEFLEXION CONSIDERADA	LIMITE DE LA DEFLEXION
Azoteas planas que no soporten ni estén ligadas a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones	Deflexión instantánea debida a la carga viva, L.	$\frac{L}{180}$ (1)
Entrepisos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	Deflexión instantánea debida a la carga viva, L.	$\frac{L}{360}$ (2)
Sistema de entepiso o azotea que soporte o esté ligado a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales, (las y ma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas sostenidas, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional). ( 2 ).	$\frac{L}{480}$ (3)
Sistema de entepiso o azotea que soporte o esté ligado a elementos no estructurales no susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.		$\frac{L}{240}$ (4)

**TABLA 2-1**  
**DEFLEXIONES MAXIMAS PERMISIBLES POR EL REGLAMENTO A C I**

- (1) Este límite no tiene por objeto constituirse en un resguardo contra el estancamiento de aguas. Este se debe verificar mediante cálculos de deflexiones adecuadas, incluyendo las deflexiones adicionales debidas al agua estancada y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas sostenidas, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las preparaciones para el drenaje.
- (2) Las deflexiones a largo plazo deben determinarse de acuerdo con la sección 9.5.2.5 o la 9.5.4.2, pero se pueden reducir según la cantidad de la deflexión que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determinará basándose en los datos de ingeniería aceptables con relación a las características tiempo-deformación de miembros similares a los que están siendo considerados.
- (3) Este límite se puede exceder si se toman medidas adecuadas para prevenir daños en elementos apoyados o unidos.
- (4) Pero no mayor que la tolerancia establecida para los elementos no estructurales. Este límite se puede exceder si se proporciona una contraflecha de modo que la deflexión total menos la contraflecha no exceda dicho límite.

PERALTE M I N I M O h				
MIEMBROS	Libremente apoyados	Con un extremo continuo	Ambos extremos continuos	En voladizo
	Miembros que no soporten o estén ligados a divisiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse por grandes deflexiones.			
Losas macizas en una dirección	$\frac{L}{20}$	$\frac{L}{24}$	$\frac{L}{28}$	$\frac{L}{10}$
Vigas o losas nervadas en una dirección	$\frac{L}{16}$	$\frac{L}{18.5}$	$\frac{L}{21}$	$\frac{L}{8}$

TABLA 2.2

PERALTES MINIMOS DE VIGAS NO PRESFORZADAS O LOSAS EN UNA DIRECCION, A MENOS QUE SE CALCULE LA DEFLEXION.

Los valores dados en esta tabla se deben usar directamente en miembros de de concreto de peso normal y acero de refuerzo de grado 42.

Para otras condiciones los valores deben modificarse como sigue:

a) Para concreto ligero estructural de peso unitario dentro del rango de 1400 a 1900  $\text{Kg / m}^3$ , los valores de la tabla deben multiplicarse por  $(1.65 - 0.0003 W_c)$ , pero no menos de 1.09, donde  $W_c$  es el peso unitario en  $\text{Kg / m}^3$ .

b) Para otros valores de  $f_y$  distintos de 4200  $\text{Kg / cm}^2$ , los valores de esta tabla deberán multiplicarse por  $0.4 + \frac{f_y}{7000}$

( $f_y$  en  $\text{Kg / cm}^2$ ).

## CAPITULO 3

## EVALUACION DE DEFLEXIONES INSTANTANEAS EN VIGAS PRESFORZADAS

## 3.1 GENERALIDADES

Se consideran como deflexiones instantáneas a aquéllas que ocurren antes de que empiecen a presentarse las pérdidas de presfuerzo diferidas, es decir, antes de que terminen las pérdidas de presfuerzo instantáneas.

Las pérdidas instantáneas se componen de las pérdidas por relajación del acero de presfuerzo y de las pérdidas por acortamiento elástico del concreto; generalmente el valor de dichas pérdidas es del 7%.

En la figura 3.1 se muestra la variación típica de los esfuerzos en el acero de presfuerzo para un elemento pretensado.

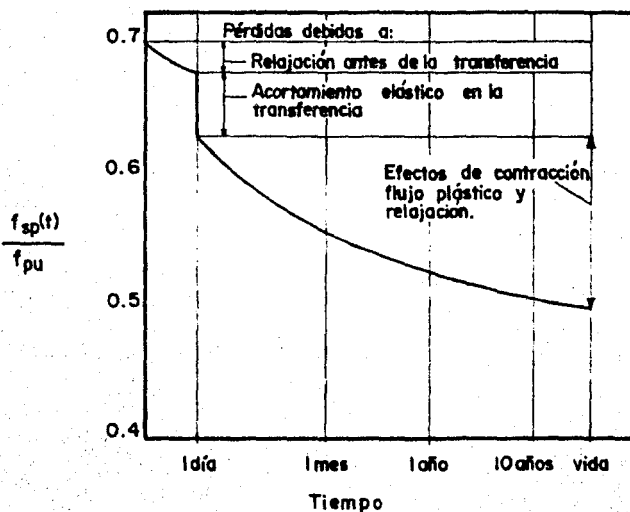


FIGURA 3-1 Variación típica con el tiempo de los esfuerzos en el acero de presfuerzo.

De acuerdo con la figura 3.1, un día después de la transferencia se habrán presentado las pérdidas instantáneas y por lo tanto, la forma de evaluación presentada en este capítulo es aplicable sólo para ese período de tiempo.

Si se desea calcular la deflexión a un tiempo relativamente corto pero ya han ocurrido las pérdidas instantáneas, por ejemplo en la etapa del montaje de la pieza, existirán efectos de contracción y flujo plástico del concreto que deberán de tomarse en cuenta; por consiguiente se deben utilizar los métodos propuestos en el capítulo 4.

### 3.2 CALCULO DE DEFLEXIONES INSTANTANEAS

Los elementos totalmente presforzados no se agrietan bajo cargas de servicio, pues los materiales se esfuerzan dentro de su rango elástico.

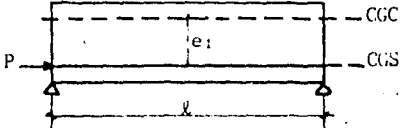
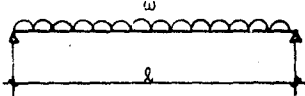
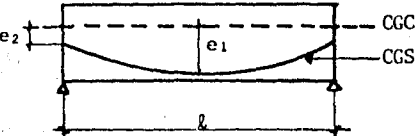
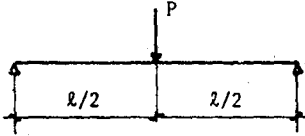
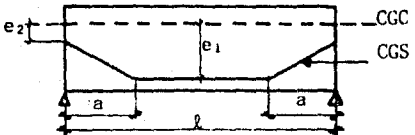
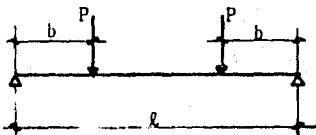
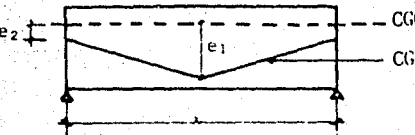
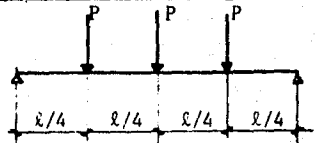
La deflexión instantánea para el período de tiempo que se está considerando, se puede evaluar utilizando los principios generales de la Mecánica. En esta etapa existen sólo dos efectos a saber: el efecto del presfuerzo que produce una contraflecha y el efecto del peso propio.

Empleando herramientas tales como el método de área de momentos y el de la viga conjugada, podemos conocer el valor de la deflexión en cualquier parte de la viga.

En la tabla 3.1 se muestran expresiones para el cálculo de deflexiones en vigas simplemente apoyadas considerando varios tipos de cargas externas y varias trayectorias del acero de presfuerzo.

Como es válida la superposición para el cálculo de deflexiones en elementos no agrietados, varias combinaciones son cubiertas con las expresiones dadas en la tabla 3.1.

Se dan las expresiones para cada caso, una en función de la fuerza de presfuerzo y otra en función de la curvatura en las secciones del centro del claro y del apoyo de la viga.

CONTRAFLECHA DEBIDA AL PRESFUERZO	DEFLEXION DEBIDA A LA CARGA
 $\Delta = -\frac{P e_1 l^2}{8 EI}$ $\Delta = \phi_1 \frac{l^2}{8}$	 $\Delta = \frac{5}{384} \frac{w l^4}{EI}$ $\Delta = \phi_1 \frac{5 l^2}{48}$
 $\Delta = -\frac{P l^2}{8 EI} \left[ e_2 + \frac{5}{6} (e_1 - e_2) \right]$ $\Delta = \phi_2 \frac{l^2}{8} + (\phi_1 - \phi_2) \frac{5 l^2}{48}$	 $\Delta = \frac{P l^3}{48 EI}$ $\Delta = \phi_1 \frac{l^2}{12}$
 $\Delta = -\frac{P l^2}{8 EI} \left[ e_1 + (e_2 - e_1) \frac{4}{3} \frac{a^2}{l^2} \right]$ $\Delta = \phi_1 \frac{l^2}{8} + (\phi_2 - \phi_1) \frac{a^2}{6}$	 $\Delta = \frac{P b}{24 EI} (3l^2 - 4b^2)$ $\Delta = \phi_1 \left( \frac{3 l^2 - 4 b^2}{24} \right)$
 $\Delta = -\frac{P l^2}{8 EI} \left[ e_2 + \frac{2}{3} (e_1 - e_2) \right]$ $\Delta = \phi_2 \frac{l^2}{6} + (\phi_1 - \phi_2) \frac{l^2}{12}$	 $\Delta = \frac{19 P l^3}{384 EI}$ $\Delta = \phi_1 \left( \frac{19 l^2}{192} \right)$

**TABLA 3-1**  
**DEFLEXIONES EN EL CENTRO DEL CLARO PARA VIGA PRESFORZADAS**  
**SIMPLEMENTE APOYADAS.**



La deflexión, positiva hacia abajo y negativa hacia arriba, expresada en función de las curvaturas, tiene la siguiente forma general:

$$\Delta = \phi_1 \frac{l^2}{8} + (\phi_2 - \phi_1) \frac{a^2}{6} \quad (3.1)$$

donde:

$\phi_1$  = curvatura en el centro del claro

$\phi_2$  = curvatura en el apoyo

a = parámetro en función de la trayectoria usada en los tendones

Los valores de "a" han sido integrados directamente en las expresiones dadas en la tabla 3.1.

La curvatura en cualquier sección puede calcularse de la conocida expresión:

$$\phi = \frac{M}{EI} \quad (3.2)$$

donde:

M = momento flexionante actuante en la sección

E = módulo de elasticidad del concreto

I = momento de inercia de la sección

La curvatura también puede calcularse de la distribución de deformaciones a lo largo de la sección:

$$\phi = \frac{\epsilon_{cs} - \epsilon_{ci}}{h} \quad (3.3)$$

donde:

$\epsilon_{cs}$  = deformación en la fibra superior de la sección

$\epsilon_{ci}$  = deformación en la fibra inferior de la sección

h = peralte de la sección

En los siguientes capítulos se aplican los conceptos definidos en esta sección.

La ecuación (3.3) se ilustra en la figura 3.2, suponiendo a la sección no agrietada.

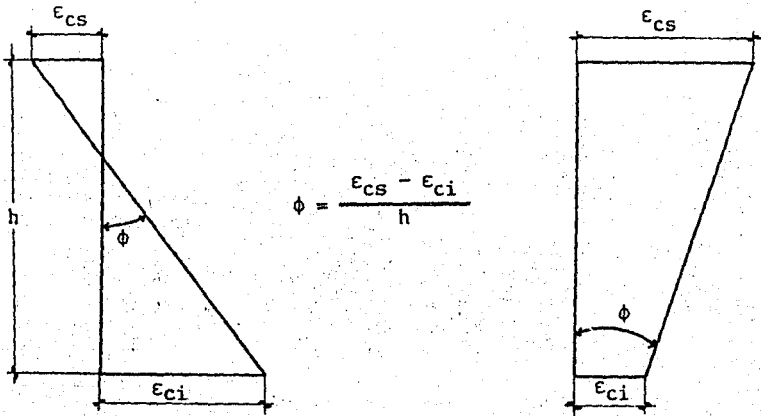


FIGURA 3.2 Representación de la curvatura para secciones no agrietadas

Para el uso de las expresiones anteriores, dos propiedades importantes deben ser definidas; el módulo de elasticidad del concreto y el momento de inercia de la sección.

El módulo de elasticidad del concreto, para fines de diseño, puede ser calculado de la expresión recomendada en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal (RDF-76):

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} \quad (3.4)$$

donde:

$f'_c$  = resistencia a la compresión del concreto a los 28 días,  
en  $\text{Kg}/\text{cm}^2$

Actualmente se recomienda utilizar  $8\,500\sqrt{f'c}$ , por la calidad de los agregados.

Como la resistencia del concreto varía con el tiempo, su módulo de elasticidad también varía. Es común usar el módulo de elasticidad inicial del concreto,  $E_{ci}$ , en el cálculo de las contraflechas iniciales.

$$E_{ci} = 8\,500\sqrt{f'c_i} \quad (3.5)$$

y

$$f'c_i = 0.8 f'c \quad (3.6)$$

donde:

$E_{ci}$  = módulo de elasticidad inicial del concreto, en  $\text{Kg/cm}^2$ .

$f'c_i$  = resistencia a la compresión inicial del concreto, en  $\text{Kg/cm}^2$

El momento de inercia de la sección depende si está o no agrietada.

Cuando la sección no está agrietada, es costumbre utilizar el momento de inercia total,  $I$ , para elementos pretensados.

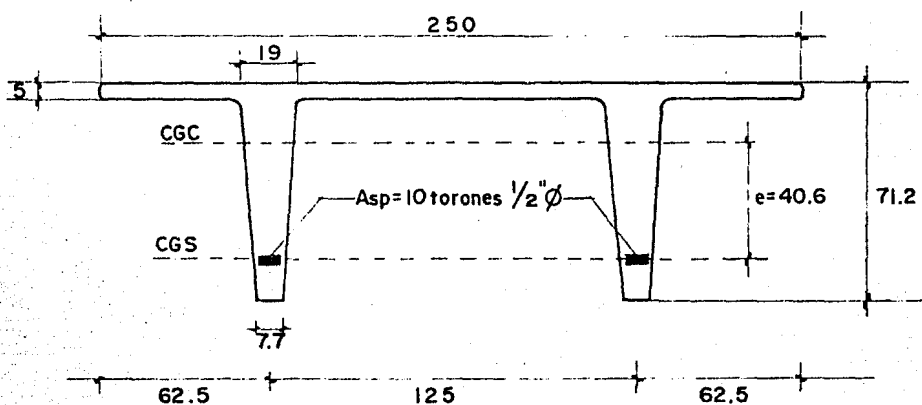
Se puede utilizar el momento de inercia de la sección transformada aunque la ganancia en exactitud no justifica el alargamiento de los cálculos.

### 3.3 EJEMPLO DEL CALCULO DE LA DEFLEXION INSTANTANEA EN UNA VIGA PRESFORZADA.

Se considera la siguiente viga TT presforzada que trabaja simplemente apoyada con una longitud de 15 m.

La pieza es de concreto de peso normal con las siguientes características:  $f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $f'ci = 280 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $E_c = 159\,000 \text{ Kg/cm}^2$ , y  $E_{ci} = 142\,200 \text{ Kg/cm}^2$ . Se usan 10 torones de  $\phi = 1/2''$  con un fsr de  $19\,000 \text{ Kg/cm}^2$ , el área por torón es de  $1.03 \text{ cm}^2$ ,  $F_o = 13\,700 \text{ Kg}$  y  $F = 10\,960 \text{ Kg}$ ,  $E_{sp} = 1\,900\,000 \text{ Kg/cm}^2$ .

Se suponen 20% de pérdidas de presfuerzo totales. La sección con sus propiedades geométricas y las cargas de servicio se muestran en la figura 3.3. Calcular la contraflecha elástica instantánea en el centro del claro.



$$A = 3\,034 \text{ cm}^2$$

$$I = 1\,316\,664 \text{ cm}^4$$

$$Y_s = 20.6 \text{ cm}$$

$$Y_i = 50.6 \text{ cm}$$

$$S_s = 64\,031 \text{ cm}^3$$

$$S_i = 26\,043 \text{ cm}^3$$

$$r^2 = 433.97 \text{ cm}^2$$

$$W_{pp} = 728 \text{ Kg/m}$$

$$W_{scm} = 320 \text{ Kg/m}^2 = 800 \text{ Kg/m}$$

$$W_{cv} = 250 \text{ Kg/m}^2 = 625 \text{ Kg/m}$$

$$L = 15 \text{ m}$$

FIGURA 3.3

## Solución

## a) Contraflecha debida al presfuerzo

Vamos a suponer que existen 5% de pérdidas de presfuerzo en la transferencia, entonces:

$$P_o = 0.95 (10 \times 13700) = 130\ 150 \text{ Kg}$$

$$e_1 = 40.6 \text{ cm}$$

$$E_{ci} = 142\ 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\Delta_p = - \frac{P_o e_1 l^2}{8 E_{ci} I}$$

$$\Delta_p = - \frac{130150 (40.6) (1500)^2}{8 (142200) (1316664)} = -7.9 \text{ cm}$$

## b) Deflexión por peso propio

$$\Delta_{pp} = \frac{5 W_{pp} l^4}{384 E_{ci} I}$$

$$\Delta_{pp} = \frac{5 (7.28) (1500)^4}{384 (142200) (1316664)} = 2.6 \text{ cm}$$

## c) Deflexión instantánea

$$\Delta_i = \Delta_p + \Delta_{pp} = -7.9 + 2.6 = -5.3 \text{ cm}$$

$$\Delta_i = -5.3 \text{ cm}$$

## CAPITULO 4

## EVALUACION DE DEFLEXIONES DIFERIDAS EN VIGAS PRESFORZADAS

## 4.1 GENERALIDADES

La deflexión diferida o dependiente del tiempo es la parte de la deflexión total debida al flujo plástico y contracción del concreto y a la relajación del acero de presfuerzo.

Con el tiempo, la carga permanente origina incrementos en la deflexión debidos principalmente a la presencia de los factores mencionados.

El efecto del flujo plástico del concreto es doble, mientras que produce una pérdida de presfuerzo tendiente a reducir la contraflecha, las deformaciones por flujo plástico por lo general aumentan las curvaturas negativas y en consecuencia aumentan la contraflecha.

Por lo general, el segundo efecto es el que predomina y la contraflecha aumenta a pesar de la reducción de la fuerza de presfuerzo.

La contracción del concreto y la relajación del acero de presfuerzo producen una pérdida de presfuerzo que contribuye a la deflexión del elemento.

La presencia de estos factores complican la evaluación de las deflexiones en los elementos presforzados, y mas aún si existe agrietamiento en el elemento.

En este capítulo se presentan tres métodos para evaluación de deflexiones que, con sus respectivas simplificaciones, los hacen realmente prácticos para los fines de diseño.

## 4.2 METODO DEL PCI (PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE)

## 4.2.1 Bases del Método

La evaluación de deflexiones y contraflechas diferidas en elementos presforzados se complica no sólo por la presencia de los factores de largo plazo ya mencionados, sino porque la deflexión o contraflecha no sólo es importante en las etapas inicial y final del elemento, sino que también

durante el montaje de la pieza el cual ocurre en diferentes plazos de tiempo según cada proyecto en particular.

Ha sido costumbre en el diseño de elementos de concreto reforzado o presforzado, calcular la deflexión diferida multiplicando la deflexión o contraflecha inicial por un factor, generalmente basado en la experiencia del diseñador.

La deflexión total puede ser dividida en una deflexión elástica instantánea y en otra deflexión adicional de largo plazo o diferida.

$$\Delta_T = \Delta_i + \Delta_{ad} \quad (4.1)$$

donde:

$\Delta_T$  = deflexión total

$\Delta_i$  = deflexión elástica instantánea

$\Delta_{ad}$  = deflexión diferida

y además:

$$\Delta_T = \Delta_i + \lambda \Delta_i \quad (4.2)$$

$$\Delta_T = \Delta_i (1 + \lambda) \quad (4.3)$$

donde:

$\lambda$  = factor que toma en cuenta los efectos de largo plazo

Este método está basado en la ecuación del Reglamento ACI 318-77 para calcular la deflexión diferida en elementos de concreto reforzado, pero adaptada a los elementos presforzados por Leslie D. Martin, quien hizo algunas suposiciones para hacerla válida a estos elementos. La fórmula que proporciona el ACI es:

$$\lambda = \left( 2 - 1.2 \frac{A'_s}{A_s} \right) \geq 0.6 \quad (4.4)$$

donde:

$A'_s$  = área de acero de refuerzo en compresión

$A_s$  = área de acero de refuerzo en tensión

	FACTOR $C=(1+\lambda)$	
	Sección simple	Sección compuesta
<b>EN EL MONTAJE</b>		
(1) Deflexión aplicable a la deflexión elástica debida al peso propio del elemento en la transferencia del presfuerzo.	1.85	1.85
(2) Contraflecha aplicable a la contraflecha elástica debida al presfuerzo en la transferencia del presfuerzo.	1.80	1.80
<b>AL FINAL</b>		
(3) Deflexión aplicable a la deflexión elástica debida al peso propio del elemento en la transferencia del presfuerzo.	2.70	2.40
(4) Contraflecha aplicable a la contraflecha elástica debida al presfuerzo en la transferencia del presfuerzo.	2.45	2.20
(5) Deflexión aplicable a la deflexión elástica debida únicamente por la sobrecarga -- muerta.	3.0	3.0
(6) Deflexión aplicable a la deflexión elástica causada por la loss de la sección -- compuesta.	—	2.30

**TABLA 4-1**

**FACTORES SUGERIDOS PARA EL CALCULO DE DEFLEXIONES DIFERIDAS.**



En el Apéndice A se muestra el desarrollo que hizo Leslie D. Martin para encontrar distintos valores de  $\lambda$ .

En la tabla 4.1 se proporcionan los factores sugeridos  $(1 + \lambda)$  por el PCI que pueden ser usados como una buena aproximación para el cálculo de las deflexiones a largo plazo para elementos presforzados típicos. Estos factores son los encontrados por Martin.

Shaikh y Branson sugieren que los efectos de largo plazo se pueden reducir por un factor aplicado al factor  $\lambda$ :

$$\alpha = \frac{1}{1 + A_s/A_{sp}} \quad (4.5)$$

donde:

$A_s$  = área de acero de refuerzo al nivel del acero de presfuerzo

$A_{sp}$  = área de acero de presfuerzo

y el nuevo factor  $(1 + \lambda)$  será:

$$C_2 = 1 + \alpha(C_1 - 1)$$

donde:

$C_1$  = factor de la tabla 4.1

#### 4.2.2 Deducción del Factor de Largo Plazo " $\lambda$ "

Se dijo que se acostumbra calcular la deflexión de largo plazo o diferida, multiplicando la deflexión instantánea por un factor apropiado.

La razón básica de esta proposición, proviene del análisis del efecto del flujo plástico del concreto en la respuesta esfuerzo-deformación como se aprecia en la figura 4.1.

Suponiendo un esfuerzo constante, la deformación por flujo plástico se puede obtener multiplicando a la deformación instantánea,  $\epsilon_{ci}$ , por un factor de flujo plástico  $C_c(t)$ , así:

$$\epsilon_c C(t) = \epsilon_{ci} \times C_c(t) \quad (4.6)$$

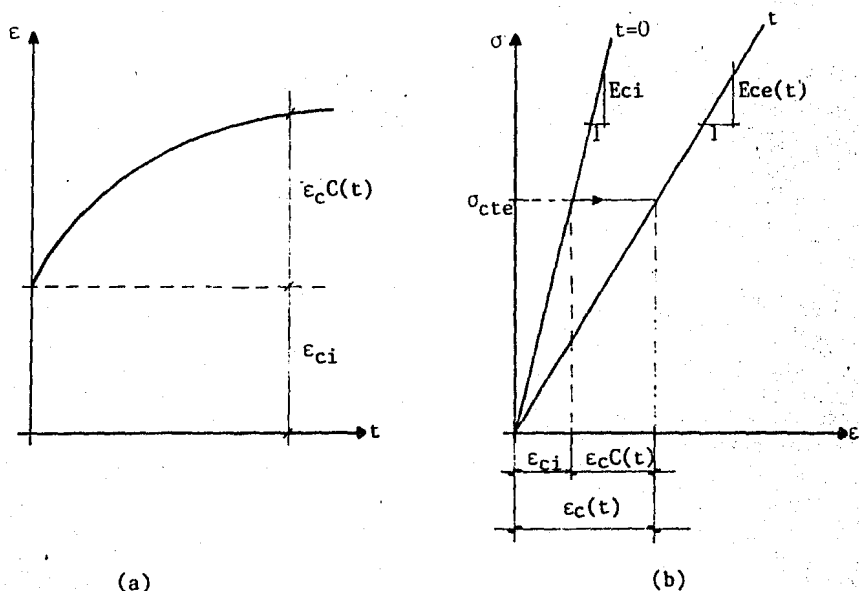


FIGURA 4.1 Relaciones entre : (a) variación de la deformación por flujo plástico y (b) módulo de elasticidad equivalente.

Mirando simultáneamente el diagrama de esfuerzo-deformación del concreto en su rango elástico, uno puede separar la deformación elástica instantánea de la deformación por flujo plástico.

El cociente  $\sigma/\epsilon_{ci}$  es igual al módulo elástico inicial. Con el tiempo, dicho cociente disminuye por la deformación de flujo plástico.

Este efecto puede simularse usando un módulo equivalente que se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 E_{ce}(t) &= \frac{\sigma}{\epsilon_c(t)} = \frac{\sigma}{\epsilon_{ci} + \epsilon_cC(t)} \\
 &= \frac{\sigma}{\epsilon_{ci} + \epsilon_{ci} C_c(t)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_{ci} + (1 + Cc(t))}$$

$$Ece(t) = \frac{Eci}{1 + Cc(t)} \quad (4.7)$$

Cualquier fórmula de deflexión es inversa del módulo de elasticidad y en general:

$$\Delta = \frac{K}{E} \quad (4.8)$$

aplicado a la deflexión inicial:

$$\Delta_i = \frac{K}{E_{ci}} \quad (4.9)$$

si la carga es permanente en un tiempo "t":

$$\Delta(t) = \frac{K}{Ece(t)} \quad (4.10)$$

Sustituyendo "K" de la ecuación (4.9) y Ece(t) de la (4.7), se obtiene:

$$\Delta(t) = \frac{\Delta_i E_{ci}}{\frac{E_{ci}}{1 + Cc(t)}}$$

$$\Delta(t) = \Delta_i (1 + Cc(t)) \quad (4.11)$$

$$\Delta(t) = \Delta_i + \Delta_i Cc(t) \quad (4.12)$$

al final de la vida del elemento se tiene:

$$\Delta u = \Delta_i + Ccu \Delta_i$$

$$= \Delta_i (1 + Ccu)$$

$$\Delta u = \Delta_i + \Delta_{ad} \quad (4.13)$$

en la cual:

$$\Delta_{ad} = C_{cu} \Delta_i \quad (4.14)$$

en las expresiones anteriores:

$\Delta_u$  = deflexión última total para la carga permanente considerada

$\Delta_{ad}$  = deflexión adicional de largo plazo o diferida

La ecuación (4.13) sugiere que la deflexión adicional de largo plazo o diferida, puede ser calculada multiplicando la deflexión instantánea por un factor.

De acuerdo con esta ecuación, el factor es igual al coeficiente último de flujo plástico, sin embargo los otros factores ya mencionados deben de considerarse.

#### 4.2.3 Ejemplo del Cálculo de la Deflexión Diferida en una Viga Presforzada

Calcular la deflexión diferida de la viga TT mostrada en el ejemplo del capítulo 3, al final de su vida útil.

##### Solución

a) Deflexión instantánea por la sobrecarga muerta

$$\Delta_{scm} = \frac{5 W_{scm} L^4}{384 E_c I}$$

$$\Delta_{scm} = \frac{5 (8.0) (1500)^4}{384 (159000) (1316664)} = 2.5 \text{ cm}$$

b) Factores de largo plazo (  $1 + \lambda$  )

De la tabla 4.1 :

Por presfuerzo, (  $1 + \lambda$  ) = 2.45

Por peso propio, (  $1 + \lambda$  ) = 2.70

Por sobrecarga muerta, (  $1 + \lambda$  ) = 3.0

c) Deflexión diferida

Por presfuerzo:  $-7.9 (2.45 - 1) = -11.4 \text{ cm}$

Por peso propio:  $2.6 (2.7 - 1) = 4.4 \text{ cm}$

Por sobrecarga muerta:  $2.5 (3.0) = 7.5 \text{ cm}$

entonces:

$$\Delta_{ad} = -11.4 + 4.4 + 7.5 = 0.5 \text{ cm}$$

\* Nótese que en la deflexión diferida por presfuerzo y por peso propio solo se utiliza el factor "  $\lambda$  ", mientras que para la sobrecarga se utiliza (  $1 + \lambda$  ) por ser una carga nueva y se le considera adicional.

### 4.3 METODO DE LA LINEA DE PRESION

#### 4.3.1 Bases del Método

Este método desarrollado por Antoine E. Naaman, es llamado "Método de la Línea de Presión", porque considera a la viga sujeta a una fuerza de presfuerzo que sigue el perfil de la línea de presión a lo largo de la viga en lugar del perfil del acero de presfuerzo.

La línea de presión (también llamada línea-C), es la línea de acción de los esfuerzos resultantes de compresión en el concreto en cada sección a lo largo de la viga. En la figura 4.2 se muestra la línea de presión para una viga con carga uniformemente repartida y tendones rectos.

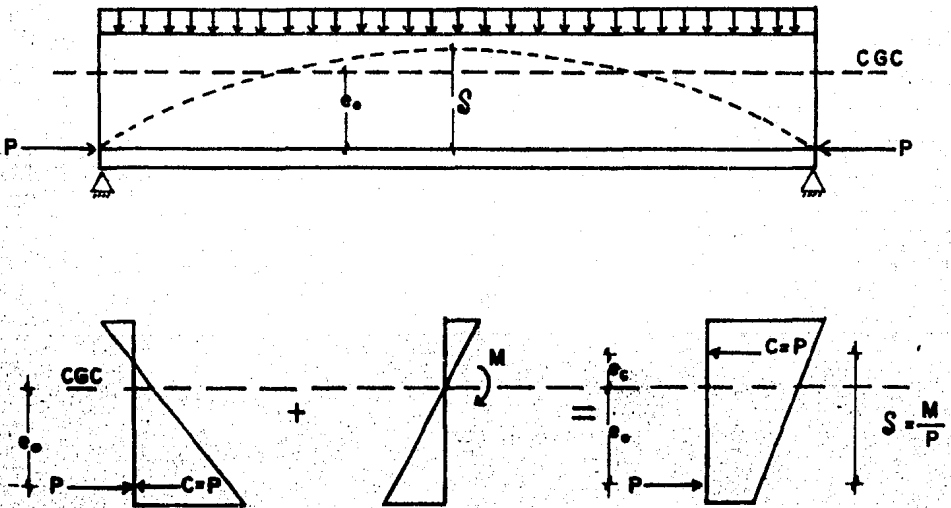


FIGURA 4.2 Efecto del momento externo en los esfuerzos resultantes y en la línea de presión en el concreto.

Nótese que en una viga estáticamente determinada, la línea de presión parte del centroide del acero de presfuerzo hasta una distancia  $M/P$ , donde  $M$  es el momento externo y  $P$  es la fuerza de presfuerzo.

Si no existiera superposición de carga, la resultante de los esfuerzos de compresión "C" coincidiría con el centroide del acero de presfuerzo formando un sistema autoequilibrado con valores nulos de las reacciones externas.

A medida que la sobrecarga es aplicada, la resultante de los esfuerzos de compresión se desplaza hacia arriba generando un par resistente con fuerzas iguales  $C = P$  y un brazo  $\delta$ .

Esta es una de las diferencias entre el concreto reforzado y presforzado. En el concreto reforzado, el brazo del par interno permanece básicamente constante a medida que se incrementa la carga y el incremento en el momento viene acompañado por un incremento casi proporcional de las fuerzas internas.

En el concreto presforzado, las fuerzas permanecen esencialmente constantes a medida que se incrementa la carga y el incremento en el momento viene acompañado por un incremento del brazo del par interno.

Este método para evaluar la deflexión total de largo plazo (incluye la deflexión instantánea y la adicional de largo plazo), combina la teoría del método de incrementos en intervalos de tiempo con algunas simplificaciones.

Tiene la ventaja de que es relativamente simple y bastante aproximado para un gran número de casos prácticos además de que es bastante manejable en el cálculo.

Como la deflexión se calcula en diferentes intervalos de tiempo, permite conocer la deflexión en tiempos intermedios adicionalmente al valor de la deflexión en el final de la vida útil del elemento.

El método se aplica a elementos parcial y totalmente presforzados en los cuales la descompresión no se excede bajo los efectos de la carga permanente.

#### 4.3.2 Características y Desarrollo del Método

A continuación se describen las características del método y sus justificaciones.

- 1) Se selecciona un número determinado de intervalos de tiempo; las pérdidas totales dependientes del tiempo (un valor global) y el porcentaje de pérdidas al final de cada intervalo de tiempo son estimadas a priori.

En general, las pérdidas totales de presfuerzo y el porcentaje de ellas en cada intervalo de tiempo se pueden suponer sin mucha exactitud. Esto se debe a que las leyes que gobiernan el flujo plástico y la contracción del concreto (y hasta cierto punto para la relajación del acero de presfuerzo), y sus ecuaciones de predicción, conducen a valores porcentuales muy similares en tiempos iguales.

Como se muestra en el ejemplo, la deflexión total última y la deflexión en tiempos intermedios no están significativamente influenciadas por las estimaciones en los porcentajes de pérdidas supuestos.

Estimado a priori el porcentaje de pérdidas de presfuerzo en el tiempo, los efectos de contracción del concreto y relajación del acero de presfuerzo son evaluados indirectamente, mientras que el efecto de flujo plástico en la deflexión de largo plazo está aislado.

- 2) Únicamente se considera una carga durante cada intervalo de tiempo y comprende los efectos combinados de la fuerza de presfuerzo y la carga externa permanente. Esto es contrario a los otros métodos donde las cargas son separadas en presfuerzo, peso propio y sobrecarga muerta.

Debido a las cargas combinadas, se supone a la viga equivalentemente presforzada por una fuerza que sigue la trayectoria de la línea de presión, en lugar de la trayectoria del acero de presfuerzo.

La fuerza resultante de compresión es igual en magnitud a la



fuerza de presfuerzo. Su excentricidad en cualquier sección a lo largo de la viga en cualquier tiempo "t", está dada por:

$$e_c(t) = e_0 - \frac{M}{P(t)} \quad (4.15)$$

donde M es el momento externo aplicado y P(t) es la fuerza de presfuerzo la cual varía con el tiempo según las pérdidas supuestas.

Durante cualquier intervalo de tiempo (t<sub>i</sub>, t<sub>j</sub>), M y P(t) se suponen constantes con el valor de P(t) tomado en el principio del intervalo, es decir P(t<sub>i</sub>).

En la mayoría de los casos, la variación de e<sub>0</sub> a lo largo del claro es lineal o parabólico y M también es lineal o parabólico, entonces el perfil de la trayectoria de la línea de presión será lineal o parabólico.

- (3) Únicamente dos secciones son consideradas en los cálculos de las variables dependientes del tiempo; la sección al centro del claro y la sección en el apoyo.

Esto se debe a que la deflexión de la viga para trayectorias comunes de la línea de presión, puede ser calculada en función de las curvaturas de las secciones consideradas (ecuación 3.1). Tales expresiones están dadas en la tabla 3.1 para el acero de presfuerzo. Se pueden utilizar directamente notando que e<sub>1</sub> y e<sub>2</sub> se convierten en las excentricidades de la línea de presión y son dependientes del tiempo.

En el uso de estas expresiones, se supone que la fuerza resultante de compresión, así como su excentricidad, permanecen constantes durante el intervalo de tiempo considerado.

Así, con el procedimiento descrito, la deflexión de la viga durante cada intervalo de tiempo puede calcularse directamente de las fórmulas de la tabla 3.1, donde e<sub>1</sub> y e<sub>2</sub> son las excentricidades de la línea de presión,

También la curvatura en cada sección se puede calcular de la ecua-

ción 3.2, en donde los valores de  $\epsilon_{cs}$  y  $\epsilon_{ci}$  pueden ser determinados de:

$$\epsilon_{cs} = \frac{P(t)}{E_{ce}(t) A_c} \left( 1 - e_c(t) \frac{A_c}{S_s} \right) \quad (4.16)$$

$$\epsilon_{ci} = \frac{P(t)}{E_{ce}(t) A_c} \left( 1 + e_c(t) \frac{A_c}{S_i} \right) \quad (4.17)$$

donde  $S_s$  y  $S_i$  son los módulos de sección superior e inferior respectivamente y  $E_{ce}(t)$  es el módulo de elasticidad equivalente del concreto influenciado por el flujo plástico.

Suponiendo que el módulo instantáneo de elasticidad (de corto período), varía con el tiempo, el módulo de elasticidad equivalente bajo cargas permanentes en cualquier tiempo "t" similarmente a la ecuación (4.7), puede calcularse de las siguientes expresiones:

$$E_{ce}(t) = \frac{E_c(t_a)}{1 + C_c(\tau)} \quad (4.18a)$$

$$E_{ce}(t) = \frac{E_c(t)}{1 + C_c(\tau)} \quad (4.18b)$$

donde:

$E_c(t)$  = módulo de elasticidad instantáneo del concreto en el tiempo "t"

$E_c(t_a)$  = módulo de elasticidad instantáneo del concreto en el tiempo "t<sub>a</sub>"

t = edad del concreto en días

$C_c(\tau)$  = coeficiente de flujo plástico en el tiempo "τ"

τ = tiempo en días después de la aplicación de la carga;

t - t<sub>a</sub> ≥ 0

t<sub>a</sub> = edad del concreto cuando se aplicó la carga por primera vez

Se ve que la ecuación (4.18a) cumple con la ecuación (4.7) y la ecuación (4.18b) difiere de la (4.18a) por su numerador  $E_c(t)$  en lugar de  $E_c(t_a)$ .

La ecuación (4.18b) se propone para tomar en cuenta, hasta cierto punto, el efecto de la edad del concreto. Su efecto en el módulo equivalente del concreto es comparable con el método más exacto usando el coeficiente de edad propuesto por Bazant.

El módulo de elasticidad del concreto en cualquier tiempo "t" suponiendo un período de carga corto, puede determinarse de acuerdo con la fórmula del Reglamento del Distrito Federal con la constante modificada:

$$E_c(t) = 8\,500 \sqrt{f'_c(t)} \quad (4.19)$$

donde:

$f'_c$  = resistencia a la compresión del concreto en el tiempo "t"

El Comité 209 del ACI sugiere el uso de la siguiente expresión:

$$f'_c(t) = \frac{t}{b + c \cdot t} f'_c \quad (4.20)$$

donde  $f'_c$  es la resistencia de diseño a compresión del concreto y b y c son parámetros que dependen del tipo de cemento usado y del método de curado de la pieza.

Estas relaciones se resumen en la tabla 4.2; así, la ecuación (4.19) se transforma en:

$$E_c(t) = 8\,500 \sqrt{f'_c} \sqrt{\frac{t}{b + c \cdot t}}$$

$$E_c(t) = E_c \sqrt{\frac{t}{b + c \cdot t}} \quad (4.21)$$

donde:

$E_c$  = módulo de elasticidad de diseño del concreto

El coeficiente de flujo plástico en cualquier tiempo "t", puede ser calculado usando la función dependiente del tiempo recomendada por el Comité 209 del ACI:

PROPIEDAD	EXPRESION *	VALORES DE LAS CONSTANTES	
		Concreto curado con humedad.	Concreto curado con vapor.
RESISTENCIA A COMPRESION	Para $t \geq 1$ día $f'_c(t) = \frac{t}{b+ct} f'_c \text{ 28 días}$ donde: $t$ = edad del concreto en días  Es la misma expresión para concreto de peso normal o ligero.	Cemento Tipo I $b = 4$ $c = 0.85$  Cemento Tipo III $b = 2.3$ $c = 0.92$	Cemento Tipo I $b = 1$ $c = 0.95$  Cemento Tipo III $b = 0.70$ $c = 0.98$
COEFICIENTE DE FLUJO PLASTICO	$C_c(t) = \frac{\gamma^{0.6}}{10 + \gamma^{0.6}} C_{cu} K_{ca} K_{ch} K_{cs}$ donde: $K_{ca}$ = factor de la edad de carga $K_{ch}$ = factor de corrección por humedad $K_{cs}$ = factor de formas y tamaño $\gamma = t - t_a$ = tiempo después de cargada la pieza $t_a$ = tiempo de carga de la pieza	$t, t_a \geq 7$ días y $H \geq 40\%$  $K_{ca} = 1.25 \gamma^{-0.118}$ $K_{ch} = 1.27 - 0.0067 H$ $K_{cs} = 1.14 - 0.09(\gamma) \geq 0.68$	$t, t_a \geq 1$ a 3 días y $H \geq 40\%$  $K_{ca} = 1.13 \gamma^{-0.095}$ $K_{ch} = 1.27 - 0.0067 H$ $K_{cs} = 1.14 - 0.09(\gamma) \geq 0.68$

TABLA 4-2 EXPRESIONES RECOMENDADAS PARA ALGUNAS PROPIEDADES DEPENDIENTES DEL TIEMPO DEL CONCRETO.

\* Válida en todos los sistemas de unidades, H se da en porciento.

†  $\gamma/s$  Es la relación volumen a superficie del elemento en pulgadas.

$$C_c(\tau) = \frac{\tau^{0.6}}{10 + \tau^{0.6}} C_{cu} K_{ch} K_{ca} K_{cs} \quad (4.22)$$

y

$$\tau = t - t_a$$

donde:

$\tau$  = tiempo transcurrido después de la aplicación de la carga

$C_{cu}$  = coeficiente último de flujo plástico del concreto

$K_{ch}$  = factor de corrección que toma en cuenta el promedio de la humedad relativa del medio ambiente dentro de la cual la pieza será fabricada

$K_{ca}$  = factor de edad de carga

$K_{cs}$  = factor de forma y tamaño de la pieza

En la tabla 4.2, se muestran expresiones para calcular  $K_{ch}$  y  $K_{ca}$ , también se da una expresión para evaluar  $K_{cs}$ .

Sustituyendo  $C_c(\tau)$  y  $E_c(t)$  por sus valores de las ecuaciones (4.21) y (4.22) en la ecuación (4.18b), se tiene:

$$E_{ce}(t) = E_c \sqrt{\frac{t}{b + c \cdot t}} \left[ \frac{10 + (t - t_a)^{0.6}}{10 + (t - t_a)^{0.6} (1 + C_{cu} K_{ch} K_{ca} K_{cs})} \right] \quad \dots(4.23)$$

en donde las constantes  $b$ ,  $c$  y los factores  $K_{ch}$ ,  $K_{ca}$  y  $K_{cs}$  se dan en la tabla 4.2.

Para un problema dado, la ecuación (4.23) se reduce a una función del tiempo multiplicada por el módulo de elasticidad del concreto a los 28 días,  $E_c$ .

La variación de la deformación con el tiempo del concreto debida al flujo plástico y el tiempo de carga de la pieza, es un factor predominante en el cálculo de deflexiones de largo plazo.

En el procedimiento descrito, se usa el módulo de elasticidad equivalente en cualquier tiempo " $t$ " en lugar de la deformación por flujo plástico.

La ecuación (4.23) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{E_{ce}(t)}{E_c} = \sqrt{\frac{t}{b + c \cdot t}} \left[ \frac{10 + \tau^{06}}{10 + \tau^{06} (1 + \beta)} \right]$$

$$\frac{E_{ce}(t)}{E_c} = g_1(t) \times g_2(t) \quad (4.24)$$

y

$$\beta = C_{cu} K_{ch} K_{ca} K_{cs} \quad (4.25)$$

Para un valor conocido de  $\beta$ , la relación  $E_{ce}(t)/E_c$  es obtenida del producto de las dos funciones de tiempo,  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$ .

#### 4.3.3 Ejemplo del Cálculo de la Deflexión Diferida en una Viga Presforzada con el Método de la Línea de Presión

Calcular la deflexión de largo plazo de la viga TT mostrada en el ejemplo del capítulo 3, con los siguientes datos adicionales: en la pieza se utilizó cemento tipo 1 con curado a vapor, la transferencia del presfuerzo fué un día después de colada la pieza y la sobrecarga muerta se colocó a los 15 días de fabricada la pieza.

Se supone un coeficiente de flujo plástico igual a  $C_{cu} = 2.5$ ; el promedio de la humedad relativa del medio ambiente es del 50% y  $V/S$  tiene un valor de 3.93 cm (1.54 pulg).

#### Solución

Se consideran 6 intervalos de tiempo con el final de cada uno a los 1, 7, 30, 90, 365 y 365 x 50 días, con un porcentaje de pérdidas del 25, 35, 50, 70, 85 y 100% de las pérdidas totales supuestas (20%).

Para este ejemplo, se supondrá que la edad del concreto cuando se aplica la carga es de  $t_a = 1$  día para los dos primeros intervalos y de  $t_a = 8$  días para el resto de los intervalos. Esto último no es del todo cierto pues la sobrecarga muerta se coloca a los 15 días de fabricada la pieza, pero se supone así para tomar en cuenta la acción del peso propio que actúa desde el primer día.

Nótese que la pérdida de presfuerzo en el primer día (primer intervalo de tiempo) es:  $0.25 \times 20\% = 5\%$ , que corresponden a las pérdidas instantáneas y que ocurren en el primer día después de la transferencia del presfuerzo y que fueron supuestas desde el principio del ejemplo en el capítulo 3.

Como ya se dijo, este método evalúa la deflexión de largo plazo en tiempos intermedios y al final de la vida útil del elemento; con ese valor se podrá deducir fácilmente el valor de la deflexión diferida.

El problema se resuelve de dos formas, utilizando la fuerza de presfuerzo y la excentricidad en función del tiempo y utilizando las curvaturas.

## a) Cálculo de constantes

De la tabla 4.2:

$$b = 1$$

$$c = 0.95$$

$$Kca = 1.13 (1)^{-0.095} = 1.13 \text{ (para los dos primeros intervalos)}$$

$$Kca = 1.13 (8)^{-0.095} = 0.927 \text{ (para el resto de los intervalos)}$$

$$Kch = 1.27 - 0.0067 (50) = 0.935$$

$$Kcs = 1.14 - 0.09 (1.54) = 1.001$$

$$\beta = 2.5 (1.13) (0.935) (1.001) = 2.664 \text{ (para los dos primeros intervalos)}$$

$$\beta = 2.5 (0.927) (0.935) (1.001) = 2.169 \text{ (para el resto de los intervalos)}$$

b) Cálculo de los valores de  $P(t)$ 

De acuerdo con los porcentajes de pérdidas supuestas y el valor de  $P_0 = 10 \times 13700 = 137\ 000$  Kg:

$P(t) = P_0 (1 - (0.20 \times \% \text{ de pérdidas}))$ , así:  
para el primer intervalo de tiempo se tiene:

$P(t) = 137000 (1 - (0.20 \times 0.25)) = 130\ 150$  Kg  
y para el resto de los intervalos:

Intervalo de tiempo	Porcentaje de pérdidas	$P(t)$ , (Kg)
1	25	130 150
2	35	127 410
3	50	123 300
4	70	117 820
5	85	113 710
6	100	109 600

Los resultados de todos los cálculos se resumen en la tabla 4.3.

## c) Determinación de los valores del módulo de elasticidad equivalente

De la fórmula:



$$Ece(t) = E_c \sqrt{\frac{t}{b + c \cdot t}} \left[ \frac{10 + (t-t_a)^{0.6}}{10 + (t-t_a)^{0.6} (1 + C_{cu} K_{ch} K_{ca} K_{cs})} \right]$$

y sustituyendo los valores de  $b = 1$ ,  $c = 0.95$ ,  $t_a = 1$  día para los primeros intervalos y  $t_a = 8$  días para el resto de los intervalos;  $\beta = 2.664$  para los dos primeros intervalos,  $\beta = 2.169$  para el resto de los intervalos y  $E_c = 159\ 000\ \text{Kg/cm}^2$ , se tiene:

$$Ece(t) = 159000 \sqrt{\frac{t}{1 + 0.95 t}} \left[ \frac{10 + (t-1)^{0.6}}{10 + (t-1)^{0.6} (1 + 2.664)} \right]$$

para los primeros intervalos, y:

$$Ece(t) = 159000 \sqrt{\frac{t}{1 + 0.95 t}} \left[ \frac{10 + (t-8)^{0.6}}{10 + (t-8)^{0.6} (1 + 2.169)} \right]$$

El módulo de elasticidad equivalente para el primer intervalo de tiempo es:

$$Ece(t) = 159000 \sqrt{\frac{1}{1 + 0.95}} \left[ \frac{10 + (1-1)^{0.6}}{10 + (1-1)^{0.6} (3.664)} \right]$$

$$Ece(t) = 113\ 862\ \text{Kg/cm}^2$$

y para los demás intervalos, se tiene:

Intervalo de tiempo	Tiempo "t"	Ece(t), (Kg/cm <sup>2</sup> )
1	1	113 862
2	7	94 840
3	30	86 879
4	90	71 514
5	365	60 869
6	50 x 365	52 444

d) Excentricidad de la línea de presión en el centro del claro,  $e_{c1}(t)$

La excentricidad de la línea de presión es:

$$e_{c1}(t) = e_0 - \frac{M}{P(t)}$$

donde:

$e_0$  = excentricidad del acero de presfuerzo en el centro del claro

$M$  = momento en el centro del claro debido a la carga permanente

$$M = \frac{7.28 (1500)^2}{8} = 2\,047\,500 \text{ (para los dos primeros intervalos)}$$

$$M = \frac{15.28 (1500)^2}{8} = 4\,297\,500 \text{ (para el resto de los intervalos)}$$

Para el primer intervalo de tiempo se tiene:

$$e_{c1}(t) = 40.6 - \frac{2047500}{130150} = 24.87 \text{ cm}$$

Análogamente para los otros intervalos:

Intervalo de tiempo	$e_{c1}(t)$ , (cm)
1	24.87
2	24.53
3	5.74
4	4.12
5	2.81
6	1.39

e) Excentricidad de la línea de presión en el apoyo,  $e_{c2}(t)$

$$e_{c2}(t) = e_0 - \frac{M}{P(t)}, \text{ pero } M = 0$$

entonces:

$$e_{c2}(t) = 40.6 \text{ cm en todos los intervalos}$$

f) Cálculo de la deflexión de largo plazo

La deflexión en cada intervalo de tiempo se calculará con las fórmulas de la tabla 3.1, para una trayectoria parabólica del acero de presfuerzo pues la línea de presión tiene dicha trayectoria.

Entonces la ecuación es:

$$\Delta = - \frac{P l^2}{8 E I} \left[ e_2 + \frac{5}{6} (e_1 - e_2) \right]$$

y se transforma a:

$$\Delta = - \frac{P(t) l^2}{8 E_{ce}(t) I} \left[ e_{c2}(t) + \frac{5}{6} (e_{c1}(t) - e_{c2}(t)) \right]$$

Para el primer intervalo de tiempo tendremos:

$$\Delta_1 = - \frac{130150 (1500)^2}{8 (113862) (1316664)} \left( 40.6 + \frac{5}{6} (24.87 - 40.6) \right)$$

$$\Delta_1 = - 6.7 \text{ cm}$$

En este intervalo de tiempo, la diferencia con la deflexión elástica instantánea calculada en el capítulo 3, se debe al uso del módulo de elasticidad equivalente en lugar del módulo de elasticidad inicial,  $E_{ci} = 142\,200 \text{ Kg/cm}^2$ .

Si se hubiera utilizado el valor de  $E_{ci}$ :

$$\Delta_i = \frac{113862}{142200} (-6.71) = - 5.3 \text{ cm}$$

que es igual a la deflexión elástica instantánea del capítulo 3.

Para el segundo intervalo de tiempo:

$$\Delta_2 = - \frac{127410 (1500)^2}{8 (94840) (1316664)} \left( 40.6 + \frac{5}{6} (24.53 - 40.6) \right)$$

$$\Delta_2 = - 7.8 \text{ cm}$$

Para el tercer intervalo de tiempo:

$$\Delta_3 = - \frac{123300 (1500)^2}{8 (86879) (1316664)} \left( 40.6 + \frac{5}{6} (5.74-40.6) \right)$$

$$\Delta_3 = - 3.5 \text{ cm}$$

Para el cuarto intervalo de tiempo:

$$\Delta_4 = - \frac{117820 (1500)^2}{8 (71514) (1316664)} \left( 40.6 + \frac{5}{6} (4.12-40.6) \right)$$

$$\Delta_4 = - 3.6 \text{ cm}$$

Para el quinto intervalo de tiempo:

$$\Delta_5 = - \frac{113710 (1500)^2}{8 (60869) (1316664)} \left( 40.6 + \frac{5}{6} (2.81-40.6) \right)$$

$$\Delta_5 = - 3.6 \text{ cm}$$

Para el sexto intervalo de tiempo:

$$\Delta_6 = - \frac{109600 (1500)^2}{8 (52444) (1316664)} \left( 40.6 + \frac{5}{6} (1.39-40.6) \right)$$

$$\Delta_6 = - 3.5 \text{ cm}$$

La deflexión  $\Delta_6 = - 3.5 \text{ cm}$ , es la deflexión última del elemento. Si consideramos a la deflexión inicial como  $\Delta_i = - 5.3 \text{ cm}$ , la deflexión adicional de largo plazo o diferida será:

$$\Delta_{ad} = -3.5 - (-5.3) = 1.8 \text{ cm}$$

g) Deformaciones unitarias y curvaturas en cada intervalo de tiempo.

Las deformaciones unitarias están dadas por:

$$\epsilon_s = \frac{P(t)}{E_c e(t) A} \left( 1 - e_c(t) \frac{A}{S_s} \right)$$

y

$$\epsilon_i = \frac{P(t)}{E_c e(t) A} \left( 1 + e_c(t) \frac{A}{S_s} \right)$$

y la curvatura está dada por:

$$\phi = \frac{\epsilon_s - \epsilon_i}{h}$$

Así, para el primer intervalo de tiempo tenemos:

En el centro del claro:

$$\epsilon_s = \frac{130150}{113862 (3034)} \left( 1 - 24.87 \frac{3034}{64031} \right) = - 67.2 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = \frac{130150}{113862 (3034)} \left( 1 + 24.87 \frac{3034}{26043} \right) = 1468.3 \times 10^{-6}$$

$$\phi_1 = \frac{(-67.2 - 1468.3) \times 10^{-6}}{71.2} = - 21.6 \times 10^{-6}/\text{cm}$$

En la sección del apoyo:

$$\epsilon_s = \frac{130150}{113862 (3034)} \left( 1 - 40.6 \frac{3034}{64031} \right) = - 348 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = \frac{130150}{113862 (3034)} \left( 1 + 40.6 \frac{3034}{26043} \right) = 2158.7 \times 10^{-6}$$

$$\phi_2 = \frac{(-348 - 2158.7) \times 10^{-6}}{71.2} = - 35.2 \times 10^{-6}/\text{cm}$$

Análogamente para los otros intervalos se tiene:

Para el segundo intervalo de tiempo:

En la sección del centro del claro:

$$\epsilon_S = - 71.9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = 1708.2 \times 10^{-6}$$

$$\phi_1 = - 25.0 \times 10^{-6}/\text{cm}$$

En la sección del apoyo:

$$\epsilon_S = - 409 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = 2537.1 \times 10^{-6}$$

$$\phi_2 = - 41.4 \times 10^{-6}/\text{cm}$$

Para el tercer intervalo de tiempo:

En la sección del centro del claro:

$$\epsilon_S = 304.5 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = 780.6 \times 10^{-6}$$

$$\phi_1 = - 6.7 \times 10^{-6}/\text{cm}$$

En la sección del apoyo:

$$\epsilon_S = - 432.1 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = 2680.3 \times 10^{-6}$$

$$\phi_2 = - 43.7 \times 10^{-6}$$

Para el cuarto intervalo de tiempo:

En la sección del centro del claro:

$$\epsilon_S = 437 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = 803.7 \times 10^{-6}$$

$$\phi_1 = - 5.15 \times 10^{-6}$$

En la sección del apoyo:

$$\epsilon_S = - 501.6 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_i = 3111.4 \times 10^{-6}$$

$$\phi_2 = - 50.74 \times 10^{-6}$$

Para el quinto intervalo de tiempo:

En la sección del centro del claro:

$$\begin{aligned}\epsilon_S &= 533.7 \times 10^{-6} \\ \epsilon_i &= 817.3 \times 10^{-6} \\ \phi_1 &= -3.98 \times 10^{-6}/\text{cm}\end{aligned}$$

En la sección del apoyo:

$$\begin{aligned}\epsilon_S &= -568.8 \times 10^{-6} \\ \epsilon_i &= 3528 \times 10^{-6} \\ \phi_2 &= -57.54 \times 10^{-6}/\text{cm}\end{aligned}$$

Para el sexto intervalo de tiempo:

En la sección del centro del claro:

$$\begin{aligned}\epsilon_S &= 643.4 \times 10^{-6} \\ \epsilon_i &= 800.4 \times 10^{-6} \\ \phi_1 &= -2.20 \times 10^{-6}/\text{cm}\end{aligned}$$

En la sección del apoyo:

$$\begin{aligned}\epsilon_S &= -636.3 \times 10^{-6} \\ \epsilon_i &= 3946.8 \times 10^{-6} \\ \phi_2 &= -64.37 \times 10^{-6}/\text{cm}\end{aligned}$$

h) Cálculo de las deflexiones de largo plazo utilizando las curvaturas

La deflexión para una trayectoria parabólica de la línea de presión en función de las curvaturas, tiene la siguiente forma:

$$\Delta = \phi_2 \frac{L^2}{8} + (\phi_1 - \phi_2) \frac{5L^2}{48}$$

Así se tiene que, para el primer intervalo de tiempo, el valor de la deflexión vale:

$$\Delta = -35.2 \times 10^{-6} \frac{(1500)^2}{8} + ((-21.6 + 35.2) \times 10^{-6}) \frac{5(1500)^2}{48}$$

$$\Delta = -6.7 \text{ cm}$$

Análogamente para los otros intervalos se tiene:

Intervalo de tiempo	$\Delta$ , (cm)
1	- 6.7
2	- 7.8
3	- 3.6
4	- 3.5
5	- 3.6
6	- 3.5

Las diferencias que se tengan con los valores de las deflexiones calculadas con las excentricidades, se deben al redondeo de estos valores.

Suponiendo unos porcentajes de pérdidas del 10, 20, 40, 60, 75 y 100 % en los intervalos de tiempo considerados, se obtienen unas deflexiones de - 7.0, - 8.2, - 3.8, - 3.9, - 4.0 y - 3.5 cm respectivamente, que difieren muy poco de los valores obtenidos lo que comprueba que el suponer las pérdidas de presfuerzo en cada intervalo de tiempo no altera significativamente los resultados.



PARAMETROS	TIEMPO FINAL t <sub>j</sub> DEL INTERVALO (t <sub>1</sub> , t <sub>j</sub> ), EN DIAS						
	1	7	30	90	365	vida útil 50 X 365	
Porcentaje estimado de pérdidas de presfuerzo	25	35	50	70	85	100	
P(t), en Kg	130 150	127 410	123 300	117 820	113 710	109 600	
E <sub>ce</sub> (t), en Kg/cm <sup>2</sup>	113 862	94 840	86 879	71 514	60 869	52 444	
e <sub>c1</sub> (t), en el centro del claro, en cm	24.87	24.53	8.74	4.12	2.81	1.39	
e <sub>c2</sub> (t), en el apoyo, en cm	40.6	40.60	40.6	40.6	40.6	40.6	
$\Delta = -\frac{P E^2}{8 E_{ce}(t) l} e_{c2} + \frac{5}{6} (e_{c1}(t) - e_{c2}(t))$ , cm	-6.7	-7.8	-3.5	-3.6	-3.6	-3.5	
Sección en el centro del claro	$\epsilon_B, \times 10^{-6}$	-67.2	-71.9	304.5	437.0	533.7	643.4
	$\epsilon_I, \times 10^{-6}$	1468.3	1708.2	780.6	803.7	817.3	800.4
	$\phi_1, \times 10^{-6}/cm$	-21.6	-25.0	-6.7	-5.15	-3.98	-2.2
Sección en el apoyo	$\epsilon_R, \times 10^{-6}$	-348.0	-409.0	-432.1	-501.6	-568.8	-636.3
	$\epsilon_J, \times 10^{-6}$	2158.7	2537.1	2680.3	3111.4	3528.0	3946.8
	$\phi_2, \times 10^{-6}/cm$	-35.2	-41.4	-43.7	-50.74	-57.54	-64.37
$\Delta = \phi_2 \frac{l^2}{8} + (\phi_1 - \phi_2) \frac{5 l^2}{48}$ , cm	-6.7	-7.8	-3.5	-3.6	-3.6	-3.5	

TABLA 4.3

RESUMEN DE LOS CALCULOS DE LAS DEFLEXIONES DE LARGO PLAZO.

#### 4.4 METODO DE DAN E. BRANSON

##### 4.4.1 Bases del Método

Este método es el resultado de las investigaciones hechas por Dan E. Branson y sus colaboradores y consiste en manejar por separado las distintas deflexiones instantáneas, la contraflecha por el presfuerzo y las deflexiones por peso propio y por la sobrecarga muerta, afectándolas posteriormente por un factor de largo plazo para obtener la deflexión diferida.

Este factor es similar al factor de largo plazo definido en la sección 4.2, aunque difiere en su valor numérico utilizando los valores que se sugieren aquí en lugar de los de la tabla 4.1.

La ecuación 4.26 determina la contraflecha o deflexión última en elementos presforzados como se ilustra en la figura 4.3.

$$\Delta u = (\Delta i)_{Po} + (\Delta i)_{pp} + \left( -\frac{\Delta P_u}{P_o} + (\alpha \text{ Cu}) \left( 1 - \frac{\Delta P_u}{2 P_o} \right) \right) (\Delta i)_{Po} + (\alpha \text{ Cu}) (\Delta i)_{pp} + (\Delta i)_{scm} + (\beta_s \alpha \text{ Cu}) (\Delta i)_{scm} \dots (4.26)$$

En ausencia de cálculos por separado de las pérdidas, en condiciones normales pueden utilizarse las relaciones de pérdidas de presfuerzo de la tabla 4.5.

Las diferencias que resulten de las deflexiones calculadas utilizando los valores de la tabla 4.5 y las calculadas para una estructura en particular, normalmente serán pequeñas.

A continuación se describe cada término de la ecuación 4.26:

El primer término es la contraflecha inicial debida a la fuerza inicial de presfuerzo, inmediatamente después de la pérdida elástica instantánea.

Si la trayectoria del acero de presfuerzo es recta, y utilizando el módulo de elasticidad inicial, el valor de la contraflecha vale:

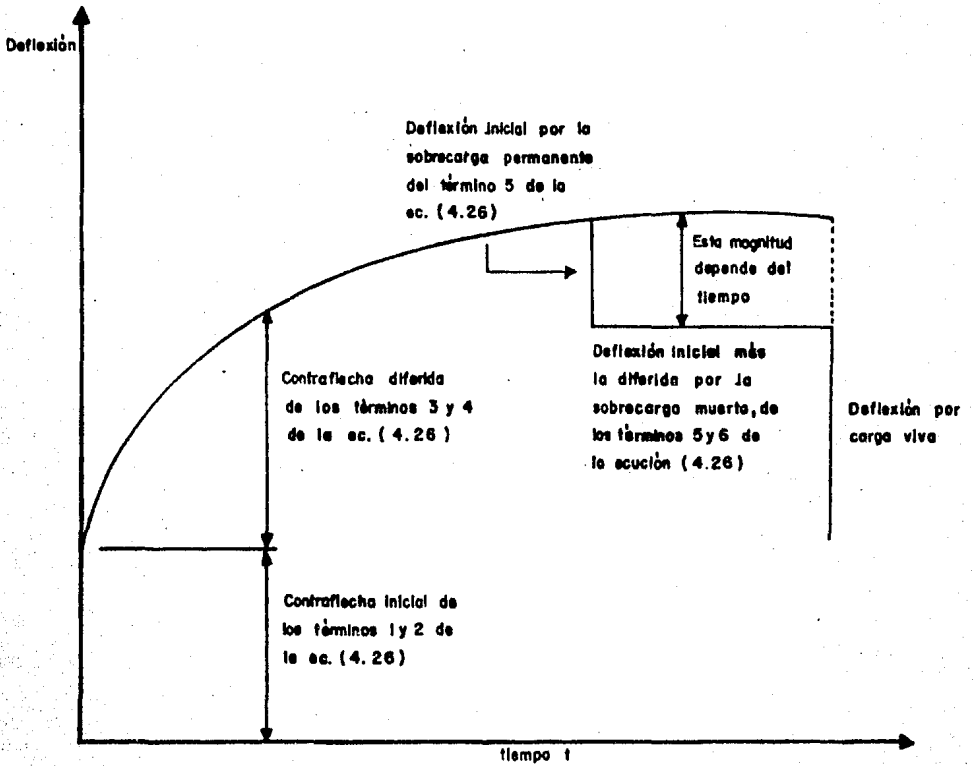


FIGURA 4.3 Curva típica de deflexión con el tiempo para vigas presforzadas de sección simple.

$$(\Delta i)_{Po} = \frac{-Po e l^2}{8 Eci I} \quad (4.27)$$

El segundo término es la deflexión inicial debida al peso propio de la viga, así:

$$(\Delta i)_{pp} = \frac{5 W_{pp} l^4}{384 Eci I} \quad (4.28)$$

El tercer término es la contraflecha dependiente del tiempo debida a la fuerza de presfuerzo. Esta expresión incluye el efecto del flujo plástico y la pérdida de presfuerzo (en la forma de relaciones de pérdidas como se define en la tabla 4.5); es decir, el efecto de la fluencia por esfuerzos variables.

El factor  $\alpha$  toma en cuenta el efecto reductor de la contraflecha dependiente del tiempo del acero de tensión que no sea de presfuerzo y que fué definido en la ecuación (4.5), y que vale:

$$\alpha = \frac{1}{1 + As/Asp}$$

El cuarto término es la deflexión dependiente del tiempo debida al peso propio del elemento. Puesto que la fluencia debida al presfuerzo y al peso propio ocurre bajo el esfuerzo combinado de ambos, queda incluido en este término el efecto de  $\alpha$  del acero de tensión que no sea de presfuerzo.

El quinto término es la deflexión inicial de la viga debida a la sobrecarga muerta.

$$(\Delta i)_{scm} = \frac{5 W_{scm} l^4}{384 Ec I} \quad (4.29)$$

El sexto término es la deflexión dependiente del tiempo debida a la sobrecarga muerta.

En la tabla 4.6 se define  $\beta_s$  y se incluyen valores representativos.

EDAD (días)	Humedad promedio relativa, curado con humedad o vapor, coeficiente último de fluencia o flujo, plástico.											
	≥ 90 %		80 %		70 %		60 %		50 %		≤ 40 %	
	Humedad	Vapor	Humedad	Vapor	Humedad	Vapor	Humedad	Vapor	Humedad	Vapor	Humedad	Vapor
	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu	Cu
1	—	1.57	—	1.72	—	1.88	—	2.04	—	2.21	—	2.35
7	1.57	1.53	1.72	1.66	1.88	1.82	2.04	1.98	2.21	2.14	2.35	2.28
10	1.50	1.42	1.63	1.54	1.79	1.69	1.94	1.84	2.10	1.99	2.23	2.12
20	1.37	1.34	1.49	1.46	1.64	1.60	1.78	1.74	1.92	1.88	2.05	2.00
28	1.32	1.31	1.44	1.42	1.58	1.56	1.72	1.70	1.86	1.83	1.97	1.95
60	1.21	1.20	1.32	1.30	1.45	1.43	1.57	1.55	1.70	1.68	1.81	1.79
90	1.17	1.17	1.27	1.27	1.39	1.39	1.51	1.51	1.63	1.63	1.74	1.74

TABLA 4-4

RESUMEN DE LOS COEFICIENTES DE FLUJO PLASTICO ( EN TIEMPO ), INCLUYENDO EFECTOS DE HUMEDAD RELATIVA, CURADO CON HUMEDAD Y VAPOR ASI COMO LOS EFECTOS DE LA EDAD DEL CONCRETO.

- a) EDAD DEL CONCRETO A QUE SE HACE REFERENCIA EN LA TABLA: EDAD EN QUE SE APLICA LA CARGA PARA LA FLUENCIA Y PERIODO DESDE LA EDAD INDICADA.

RELACIONES DE PERDIDAS DE PRESFUERZO	Peso normal	Peso ligero con arena	Peso ligero total
$\frac{\Delta P_s}{P_o}$ entre 3 semanas y 1 mes entre el presfuerzo y el colado de la losa	0.10	0.12	0.14
$\frac{\Delta P_s}{P_o}$ entre 2 y 4 meses entre el presfuerzo y el colado de la losa.	0.14	0.16	0.18
$\frac{\Delta P_t}{P_o}$	0.18	0.21	0.23

TABLA 4.5

RELACIONES TÍPICAS DE PERDIDA DE PRESFUERZO PARA CONCRETOS DE DIFERENTES PESOS. <sup>(a)</sup>

- (a) Los valores varían para concretos de diferentes pesos a causa de las deformaciones iniciales para niveles de esfuerzos ordinarios. Estas relaciones se refieren solamente a las pérdidas de presfuerzo dependientes del tiempo (pérdida total menos la pérdida elástica).

TIEMPO TRANSCURRIDO ENTRE EL PRES-FUERZO Y LA APLICACION DE LA CARGA SOSTENIDA , INCLUYENDO LA LOSA COMPUESTA	$\beta_s$ (b)
3 Semanas	0.85
1 Mes	0.83
2 Meses	0.76
3 Meses	0.74
4 Meses	0.71

TABLA 4.6 VALORES DE  $\beta_s$  PARA CONCRETO CURADO CON VAPOR ( O EQUIVALENTE )<sup>a</sup>

- a) Los factores de la tabla se aplican para concretos de difentes pesos.
- b)  $\beta_s$  es el factor de corrección de la fluencia para la edad del concreto de la viga prefabricada cuando se aplica la carga permanente.

#### 4.4.2 Ejemplo del Cálculo de la Deflexión Diferida en una Viga Presforzada con el Método de Dan E. Branson

Calcular la deflexión diferida de la viga TT mostrada en el ejemplo del capítulo 3, al final de su vida útil.

##### Solución

Para ser consistentes con la definición de deflexión diferida, ésta se calculará con los últimos cuatro términos de la ecuación (4.26).

Ya se conocen las siguientes deflexiones:

$$(\Delta i)_{P_0} = -7.9 \text{ cm}$$

$$(\Delta i)_{pp} = 2.6 \text{ cm}$$

$$(\Delta i)_{scm} = 2.5 \text{ cm}$$

##### a) Cálculo de constantes

De la tabla 4.5,  $\frac{\Delta P_u}{P_0} = 0.18$ , pero para el ejemplo se tomará como 0.15 por ser las pérdidas dependientes del tiempo que se fijaron desde el principio del ejemplo.

El valor de  $\alpha = 1$  se debe a que no existe acero de refuerzo en la zona de tensión. De la tabla 4.6,  $\beta_s = 0.85$ , aunque la carga permanente se colocó a los 15 días después de la transferencia del presfuerzo. De la tabla 4.4,  $C_u = 2.21$ .

##### b) Deflexión Diferida

$$\Delta_{ad} = \left\{ -0.15 + (2.21) \left( 1 - \frac{0.15}{2} \right) \right\} (-7.9) + (2.21) (2.6) +$$

$$+ 2.5 + (0.85 \times 2.21) (2.5)$$

$$= (1.894) (-7.9) + (2.21) (2.6) + 2.5 + (1.878) (2.5)$$

$$\Delta_{ad} = -2.0 \text{ cm}$$



## CAPITULO 5

## DEFLEXIONES TOTALES

## 5.1 DEFLEXION TOTAL

La deflexión total está formada por la deflexión elástica inicial, la deflexión diferida o adicional de largo plazo y por la deflexión instantánea debida a la carga viva.

Generalmente la deflexión instantánea por carga viva se calcula utilizando el módulo de elasticidad de diseño  $E_c$ , aunque sería válido utilizar el módulo de elasticidad equivalente,  $E_{ce}(t)$ , al final de la vida útil del elemento o en un tiempo intermedio.

Algunos autores consideran en la deflexión total, una parte de la carga viva total como carga permanente, es decir que se multiplica por un factor de largo plazo produciendo una deflexión diferida; el uso de esta condición se deja al criterio del diseñador.

Con el Método del PCI, la deflexión total se calculará utilizando los factores de la tabla 4.1 y sumando la deflexión instantánea por carga viva.

Con el Método de la Línea de Presión se obtiene directamente la deflexión de largo plazo o dependiente del tiempo, debiéndose adicionar la deflexión por carga viva para obtener la deflexión total.

Para evaluar la deflexión total con el Método de Dan E. Branson, se suma la deflexión instantánea de carga viva a la deflexión obtenida de la ecuación (4.26).

La deflexión total es la que se debe comparar con las deflexiones máximas permisibles especificadas por el reglamento considerado o con las deflexiones que se consideren aceptables.

Se debe tomar en cuenta, que algunos de los límites de deflexiones máximas establecidas por el Reglamento del Distrito Federal y por el del ACI, son válidos para las deflexiones que ocurren después de la colocación de los elementos no estructurales.

Esto quiere decir que la deflexión que se compara con dichos límites, es la deflexión adicional que ocurre después de la colocación de los elementos no estructurales más la deflexión instantánea debida a la carga viva.

## 5.2 EJEMPLO DEL CALCULO DE LA DEFLEXION TOTAL EN UNA VIGA PRESFORZADA

Calcular la deflexión total de la viga TT del capítulo 3, utilizando: a) Método del PCI, b) Método de la Línea de Presión y c) Método de Dan E. Branson; comparándolas con las deflexiones máximas permisibles suponiendo que existen elementos no estructurales capaces de sufrir daños por la deflexión.

## Solución

a) Deflexión total con el Método del PCI

La deflexión instantánea por carga viva es:

$$\Delta_{cv} = \frac{5 W_{cv} l^4}{384 E_c I}$$

$$\Delta_{cv} = \frac{5 (6.25) (1500)^4}{384 (159000) (1316664)} = 2.0 \text{ cm}$$

Utilizando los valores de la tabla 4.1, se obtiene:

	(1) Transferencia	Factor	(2) Montaje	Factor	(3) Final
PRESFUERZO	7.9 ↑	1.8x (1)	14.2 ↑	2.45x(1)	19.3 ↑
Peso propio	2.6 ↓	1.85x (1)	4.8 ↓	2.70x(1)	7.0 ↓
	5.3 ↑		9.4 ↑		
Sobrecarga muerta			2.5 ↓	3.0x(2)	7.5 ↓
			6.9 ↑		4.8 ↑
Carga viva					2.0 ↓
					2.8 ↑

La deflexión total vale - 2.8 cm. La deflexión que ocurre después de colocar los elementos no estructurales es:

$$\Delta = ( 6.9 - 4.8 ) + 2.0 = 4.1 \text{ cm}$$

La deflexión permisible de acuerdo con el Reglamento del ACI es:

$$\Delta = \frac{L}{240} = \frac{1500}{240} = 6.2 \text{ cm; y } 4.1 < 6.2 \text{ cm, correcto}$$

La deflexión permisible de acuerdo con el Reglamento del Distrito Federal es:

$$\Delta = \frac{L}{240} + 0.5 \text{ cm} = 6.7 \text{ cm; y } 4.1 < 6.7 \text{ cm, correcto}$$

#### b) Deflexión total con el Método de la Línea de Presión

En la sección 4.3.3 se calculó la deflexión última debida a la carga permanente y vale - 3.5 cm; entonces la deflexión total es:  
 $- 3.5 + 2.0 = - 1.5 \text{ cm}.$

Se puede considerar que la deflexión cuando se colocó la sobrecarga muerta (elementos no estructurales) es un promedio de - 7.8 y - 3.5 cm, puesto que no tenemos un intervalo de tiempo a los 15 días que es cuando se colocó la sobrecarga, la deflexión promedio será de - 5.5 cm.

La deflexión por carga viva es de 2.0 cm. Con lo anterior, la deflexión total después de la colocación de los elementos no estructurales es:

$$\Delta = ( 5.5 - 3.5 ) + 2.0 = 4.0 \text{ cm}$$

y es menor que las deflexiones máximas permisibles.

#### c) Deflexión total con el Método de Dan E. Branson

La deflexión total, se conoce aplicando la ecuación (4.26) y sumándole la deflexión por carga viva. La deflexión total vale:

$$\Delta_T = ( -5.3 - 2.0 ) + 2.0 = - 5.3 \text{ cm}$$

Consideremos el valor de la deflexión cuando se colocan los elementos no estructurales como el valor de la deflexión elástica inicial (- 5.3 cm), así, la deflexión que ocurre después de colocar dichos elementos vale:

$$\Delta = ( 5.3 - 7.3 ) + 2.0 = 0$$

Este último resultado indica que nunca se podrá reducir la contraflecha inicial de - 5.3 cm.

## CAPITULO 6

## CONCLUSIONES

Este trabajo es un resumen de información bibliográfica de los Estados Unidos, por lo tanto los valores numéricos de los distintos parámetros aquí tratados pueden tener variaciones importantes en relación a nuestro país; de aquí que se recomiende llevar a cabo investigaciones prácticas con las características propias de los materiales empleados en nuestro medio con el fin de tener más bases de comparación.

Respecto a las deflexiones máximas permisibles, y específicamente para los elementos de concreto presforzado, es necesario que los reglamentos que nos rigen especifiquen los valores límite de las deflexiones para diferentes condiciones de carga y de tiempo; por ejemplo los valores límite para contraflechas en la etapa de montaje y las deflexiones máximas de largo plazo referidas a los diferentes usos que pueda tener el elemento.

Inclusive se puede proponer un método sencillo para la evaluación de deflexiones de largo plazo en elemento presforzados, por ejemplo el Método del PCI, ajustando los valores de los distintos factores de largo plazo a las condiciones que rigen en nuestro medio.

En los métodos aquí propuestos, se observa que existen diferencias en los resultados obtenidos para la viga TT del ejemplo, sin embargo el Método del PCI y el de la Línea de Presión dan valores relativamente similares por lo que se puede recomendar el uso de estos dos métodos para la revisión de las deflexiones en vigas presforzadas; el primero para una revisión preliminar y el segundo para la revisión definitiva.

Es importante señalar que los métodos presentados son válidos para elementos pretensados típicos que trabajan con sección simple y simplemente apoyados. Para vigas de sección compuesta puede utilizarse el método propuesto en el Apéndice B.

Para vigas parcialmente presforzadas se recomienda utilizar el momento de inercia efectivo; su evaluación puede consultarse en la referencia 2.

El cálculo de deflexiones en elementos de concreto presforzado presenta ciertas dificultades debido a variaciones en las propiedades de los materiales con el tiempo, por lo que es necesario que se realicen más trabajos de investigación al respecto para ampliar los conocimientos actuales dentro del área del Diseño Estructural.

APENDICE A

" METODO DE EVALUACION DE DEFLEXIONES DE LARGO PLAZO EN ELEMENTOS PRESFORZADOS, BASADO EN LA ECUACION DEL ACI "

El Reglamento ACI proporciona en la sección 9.5.2.3, una ecuación para calcular la deflexión diferida en elementos de concreto reforzado; dicha ecuación proporciona el factor de largo plazo " $\lambda$ ", el cual, multiplicado por la deflexión instantánea, nos dá el valor de la deflexión diferida.

La ecuación del ACI es:

$$\lambda = ( 2 - 1.2 \frac{A's}{As} ) \geq 0.6 \quad (1)$$

en donde:

$A's$  = área de acero en compresión

$As$  = área de acero en tensión

Desafortunadamente no se dá una guía para elementos de concreto presforzado.

La determinación de contraflechas y deflexiones en elementos de concreto presforzado, es algo mas compleja por:

- 1) Efectos del presfuerzo y pérdidas de presfuerzo en el tiempo.
- 2) Ganancia en resistencia después de la transferencia del presfuerzo.
- 3) La contraflecha o deflexión no es importante únicamente en los estados inicial y final, sino que también en el montaje, el cual ocurre en un tiempo variable después de colada la pieza.

Este método sugiere una forma racional para determinar los factores de largo plazo para elementos presforzados y además es consistente con



la ecuación del ACI para elementos de concreto reforzado.

Hay que tomar en cuenta que debido a las distintas variables que afectan a la contraflecha o deflexión, como el mezclado del concreto, forma de almacenaje de la pieza, tiempo de relajación del presfuerzo, tiempo para el montaje de la pieza, colocación de sobrecargas, humedad relativa, etc.; los valores calculados son estimativos.

El uso de los factores aquí sugeridos, deben ser limitados a los elementos presforzados típicos.

Otros métodos mas precisos de evaluación de deflexiones, pueden ser usados en casos especiales.

#### DETERMINACION DE FACTORES

Debido a los efectos de largo plazo antes señalados, los factores aquí calculados están basados en suposiciones de elementos presforzados típicos, considerando la resistencia del concreto, pérdidas de presfuerzo, etc., y también utilizando un redondeo en los valores calculados.

El diseñador puede calcular sus propios valores del factor de largo plazo, basado en información conocida de diseño.

La determinación de los factores comienza con la ecuación de la sección 9.5.2.3 del ACI.

Sin acero en compresión, el factor base " $\lambda_b$ " para la deflexión adicional de largo plazo es:

$$\lambda_b = 2 - 1.2 \frac{0}{A_s} = 2.0 \quad (2)$$

En concreto reforzado, la deflexión elástica se basa normalmente en el módulo de elasticidad correspondiente al de la resistencia total del concreto, mientras que en el concreto presforzado, los factores se aplican a la contraflecha al momento de la transferencia.

Así que, el factor de largo plazo que se aplica a la deflexión

inicial causada por el peso propio del elemento será:

$$\lambda_{wf} = \frac{E_{ci}}{E_c} \lambda_b \quad (3)$$

Como la resistencia del concreto en la transferencia es usualmente el 70 % de la resistencia a los 28 días,  $E_{ci}$  es aproximadamente el 85 % del valor final.

De aquí tenemos que la ecuación (3) se convierte en:

$$\lambda_{wf} = 0.85 \lambda_b = 0.85 (2) = 1.7$$

y el factor que se aplica a la deflexión inicial será entonces:

$$1 + \lambda_{wf} = 1 + \frac{E_{ci}}{E_c} \lambda_b$$

$$1 + \lambda_{wf} = 1 + 1.7 = 2.7 \quad (4)$$

Para determinar la componente hacia arriba de la contraflecha o deflexión final, el factor que se aplica a la contraflecha inicial se debe de reducir por las pérdidas de presfuerzo que puedan ocurrir.

El factor de largo plazo será:

$$\lambda_{pf} = \lambda_{wf} \times \frac{P}{P_0} \quad (5)$$

Las pérdidas totales son generalmente supuestas o calculadas, y son del 20 al 30 %, y la parte que corresponde a las de largo plazo son del 10 al 20 %.

Si usamos un valor promedio del 15 %,  $P = 0.85 P_0$  y:

$$\lambda_{pf} = 1.7 (0.85) = 1.45$$

El factor usado para determinar la componente hacia arriba de la contraflecha o deflexión final es :

$$1 + \lambda_{pf} = 1 + \lambda_{wf} \frac{P}{P_0}$$

$$1 + \lambda_{pf} = 1 + 1.45 = 2.45 \quad (6)$$

Las cargas muertas permanentes, como pisos y cubiertas, causan una deflexión inmediata y una adicional de largo plazo.

Puesto que la deflexión de largo plazo es un resultado del flujo plástico causado por dicha carga permanente adicional, el factor de largo plazo es el mismo que el factor base:

$$\lambda_{sc} = \lambda_b \quad (7)$$

$$1 + \lambda_{sc} = 1 + 2.0 = 3.0 \quad (8)$$

La ecuación (8) indica el factor que se aplica a la deflexión elástica causada por la superposición de la carga muerta.

#### ETAPA DE MONTAJE DE LA PIEZA

La contraflecha al tiempo del montaje de la pieza también es importante. No existe un tiempo fijo para realizar esta actividad, aunque ocurre usualmente de 30 a 60 días después de colada la pieza.

Investigaciones han mostrado que el flujo plástico y la contracción del concreto, los factores primarios en el comportamiento de la pieza, han alcanzado en ese período de tiempo del 40 al 60 % de su valor último. Así que es razonable suponer que la mitad de la contraflecha o deflexión han ocurrido en ése entonces.

El factor para la fase de montaje será:

Para la componente hacia abajo por peso propio, el factor de montaje es:

$$\lambda_{wm} = 0.5 \lambda_{wf} \quad (9)$$

y el factor que se aplica a la deflexión inicial debida al peso propio del elemento es:

$$1 + \lambda_{wm} = 1 + 0.5 \lambda_{wf}$$

$$1 + \lambda_{wm} = 1 + 0.5 (1.7) = 1.85 \quad (10)$$

Para la componente hacia arriba, el factor de montaje es:

$$\lambda_{pm} = \lambda_{wm} \frac{P + P_o}{2 P_o} \quad (11)$$

y el factor aplicado a la contraflecha es:

$$1 + \lambda_{pm} = 1 + 0.85 (0.925) = 1.8 \quad (12)$$

#### ELEMENTOS DE SECCION COMPUESTA

Para elementos de sección compuesta, los factores finales deben ser modificados por el efecto de incremento en el momento de inercia después de colada la losa.

Si la sección se convierte en compuesta casi al tiempo del montaje, la diferencia entre los factores de largo plazo de la sección no compuesta en el montaje y al final, deben ser multiplicados por la relación de momentos de inercia de la sección no compuesta y compuesta  $I_o/I_c$ .

Los factores de largo plazo serán como sigue:

$$\lambda_{wfc} = \lambda_{wm} + (\lambda_{wf} - \lambda_{wm}) (I_o/I_c) \quad (13)$$

y el factor que se aplica a la componente hacia abajo inicial es:

$$1 + \lambda_{wfc} = (1 + 0.85) + (1.7 - 0.85) (I_o/I_c)$$

$$1 + \lambda_{wfc} = 1.85 + 0.85 (I_o/I_c) \quad (14)$$

Para elementos usados comúnmente con una losa de 2 pulgadas de espesor, la relación de momentos de inercia varía entre 0.5 y 0.8.

Usando un valor promedio de 0.65, la ecuación (14) se convierte en:

$$1.85 + 0.85 (0.65) = 2.4 \quad (14a)$$

Similarmente el factor de largo plazo para la componente hacia arriba es:

$$\lambda_{pfc} = \lambda_{pm} + (\lambda_{pf} - \lambda_{pm}) (I_o/I_c) \quad (15)$$

y el factor aplicado a la contraflecha inicial es:

$$1 + \lambda_{wm} \left\{ \frac{P + P_o}{2 P_o} \right\} \left( 1 - \frac{I_o}{I_c} \right) + \lambda_{wf} (P/P_o) (I_o/I_c) \quad (16)$$

$$1 + \lambda_{pfc} = 1 + (0.85) (0.925) (0.35) + (1.7) (0.85) (0.65) = 2.2 \quad \dots (16a)$$

La deflexión instantánea causada por la colocación de la losa se calcula usando las propiedades de la sección simple, así que los efectos de largo plazo son:

$$\lambda_l = \lambda_{sc} (I_o/I_c) \quad (17)$$

y el factor es entonces:

$$1 + \lambda_{sc} (I_o/I_c) = 1 + 2 (0.65) = 2.3 \quad (18)$$

La deflexión causada por otras sobrecargas se calcula usando las propiedades de la sección compuesta; así que el factor utilizado es el mismo que el de la ecuación (8).

## APENDICE B

### " DEFLEXIONES EN VIGAS PRESFORZADAS DE SECCION COMPUESTA "

La evaluación de las deflexiones en vigas presforzadas de sección compuesta presenta algunas dificultades mas complejas que las vigas de sección simple.

Las razones principales de lo anterior son las siguientes:

- 1) La viga trabaja con sección simple en su etapa inicial y como sección compuesta después de colada la losa.
- 2) Se tienen diferentes propiedades de largo plazo de la viga prefabricada y de la losa colada en sitio, además de presentarse diferentes edades de carga.
- 3) Por las razones anteriores, las deflexiones de largo plazo son sustancialmente influenciadas por el tiempo y los trabajos de construcción.
- 4) Una vez que la losa es colada, las pérdidas de presfuerzo posteriores llevan a la deflexión adicional de largo plazo cuyo efecto se puede ver aumentado por la sujeción que proporciona la losa.
- 5) Diferente contracción y flujo plástico entre la viga prefabricada y la losa colada en sitio, influyen en la deflexión de largo plazo.

No es simple la solución del problema y aunque algunas soluciones son propuestas en la literatura técnica, siempre contienen algunas suposiciones simplificadoras en las que se tiene cierta incertidumbre.

Para problemas comunes de diseño, Antoine E. Naaman recomienda el siguiente procedimiento:

- 1) Calcular la deflexión elástica instantánea debida a la fuerza de presfuerzo y al peso propio de la viga prefabricada. Para ésto, úsese un valor promedio entre  $P$  y  $P_o$  y un valor promedio entre  $E_{ci}$  y  $E_c$ ; llámese  $(\Delta i)_1$ .

- 2) Calcular la deflexión adicional de largo plazo de la viga prefabricada hasta el momento en que se colocará la losa. Llámese  $(\Delta_{ad})_2 = \lambda_1 (\Delta i)_1$ , donde  $\lambda_1$  es un coeficiente a determinar.
- 3) Determinar la deflexión instantánea en la viga prefabricada debida al peso de la losa. Llámese  $(\Delta i)_3$ . Nótese que esta deflexión vale cero si la viga está apuntalada.
- 4) Calcular la deflexión resultante en la etapa en que se coloca la losa, es decir:

$$\Delta_4 = (\Delta i)_1 + (\Delta_{ad})_2 + (\Delta i)_3$$

- 5) Determinar la deflexión instantánea debida a la carga muerta adicional que actúa en la sección compuesta, llámese  $(\Delta i)_5$ .
- 6) Calcular la deflexión resultante en la viga compuesta, llámese  $\Delta_6 = \Delta_4 + (\Delta i)_5$
- 7) Calcular la deflexión adicional de largo plazo en la viga compuesta, llámese  $(\Delta_{ad})_7 = \lambda_2 \Delta_6$ , donde  $\lambda_2$  es un coeficiente a determinar.
- 8) Calcular la deflexión instantánea debida a la carga viva utilizando las propiedades de la sección compuesta.

Los coeficientes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dependen de las propiedades de los materiales y del tiempo que transcurre entre las distintas operaciones constructivas. Algunos valores promedio se pueden derivar de la referencia 8 o del Manual de Diseño PCI.

Nótese que la deflexión adicional de largo plazo que puede afectar a elementos no estructurales conectados con la viga, es  $\Delta_7$ .

De los pasos descritos, en el paso 5,  $E_c$  puede tomarse como un promedio pesado de los dos concretos.

## B I B L I O G R A F I A

1. Nilson, Arthur; "Diseño de Estructuras de Concreto Presforzado", México, D.F., Limusa, 1982.
2. Naaman, Antoine; "Prestressed Concrete, Analysis and Design", New York, Mc-Graw Hill, 1982.
3. "Requisitos de Seguridad y Servicio para las Estructuras. Título Cuarto del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación N° 400. México, D.F., 1977.
4. "Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación N° 401. México, D.F., 1977.
5. Park R., Paulay T.; "Estructuras de Concreto Reforzado". México, D.F., Limusa, 1983.
6. Meli, Roberto; "Diseño Estructural". México, D.F., Limusa, 1985.
7. "PCI Design Handbook", Prestressed Concrete Institute. Chicago, 1978.
8. Branson, Dan; "Deflexiones de Estructuras de Concreto Reforzado y Presforzado". Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto. México, D.F., 1981.
9. Naaman, Antoine; "Time Dependent Deflection of Prestressed Beams by the Pressure Line Method". PCI Journal, March/April 1983.



10. Martin, Leslie; "A Rational Method for Estimating Camber and Deflection of Precast Prestressed Members".  
PCI Journal, January/February 1977.
  
11. Tadros M., Ghali A., Meyer A.; "Prestressed Loss and Deflection of Precast Concrete Members".  
PCI Journal, January/February 1985.