

14



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

« VIENTOS ESTELARES »

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a :

PEDRO COLIN ALMAZAN

México, D.F.

1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

CAPITULO I	INTRODUCCION	1
	1-1 Vientos estelares	1
	1-2 Vientos de estrellas T-Tauri	6
CAPITULO II	VIENTOS CONDUCIDOS POR PRESION TERMICA	10
	2-1 Ecuaciones de la hidrodinámica para un fluido ideal y compresible	10
	2.1.a Cinematica	10
	2.1.b La ecuación de continuidad	13
	2.1.c Ecuación de momento	13
	2.1.d Ecuación de la energía	13
	2.1.e Ondas de sonido	16
	2-2 Modelo hidrostático para una atmósfera estelar	17
	2-3 Vientos coronales	19
	2.3.a Comparación con las observaciones, para el caso solar	30
CAPITULO III	VIENTOS CONDUCIDOS POR PRESION DE ONDAS DE ALFVEN	33
	3-1 Teoría cinética	33
	3.1.a El plasma como un fluido	33
	3.1.b El plasma visto desde el punto de vista de la teoría cinética	34
	3.1.c Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica	39
	3-2 Campos magnéticos embebidos en fluidos conductores	43
	3.2.a Congelamiento y difusión de campos magnéticos	43
	3.2.b Ondas magnetohidrodinámicas	44

3-3	Vientos estelares generados por ondas de Alfven (tratamiento perturbativo)	49
3.3.a	Teoria	50
3.3.b	La ecuación de Bernoulli generalizada	53
3-4	Interacción entre ondas magnetohidrodinámicas y un medio inhomogeneo, dependiente del tiempo	56
3.4.a	El tensor de esfuerzo de la onda y las ecuaciones de movimiento para el flujo promedio	57
3.4.b	El invariante adiabático, también llamado densidad de acción de la onda	58
3.4.c	Aplicación a ondas propagandose radialmente	59
3.4.d	Disipación de energia de las ondas de Alfven	62
3.4.e	Un viento, considerando pérdidas radiativas	64
CAPITULO IV	UN MODELO DE VIENTO GENERADO POR ONDAS DE ALFVEN, PARA LOS VIENTOS OBSERVADOS EN LAS ESTRELLAS T-TAURI	68
4-1	Introducción	68
4.1.a	Estrellas T-Tauri	69
4-2	Resultados numéricos	71
4-3	Análisis de resultados y conclusiones	76
APENDICE		85
REFERENCIAS		89

RESUMEN DE TESIS

" VIENTOS ESTELARES "

Los vientos que se observan en las estrellas pueden ser, en general, englobados dentro de tres categorías, cuyos nombres se deben al mecanismo que los genera: vientos conducidos por (1) presión de radiación, (2) presión térmica, y (3) presión de ondas de Alfvén. Aquellos vientos que nosotros hemos denotado por (1) sólo son tratados, en esta tesis, de manera muy superficial; en cambio, se hace una discusión más o menos detallada de (2) y (3). De los vientos térmicos, esencialmente, sólo se hace una revisión del modelo de Parker. Sin embargo, puesto que nuestro interés principal se enfocaba hacia los vientos de las estrellas T-Tauri (cuyo mecanismo de generación que más se acerca a los resultados observacionales es aquél denotado por (3)) un modelo de viento conducido por ondas, politrópico, esféricamente simétrico, y con una longitud de amortiguamiento constante, es trabajado en la parte final de esta tesis. Las curvas de velocidad contra distancia muestran perfiles que aceleran en un comienzo (debido a la fuerza de presión de las ondas) y luego desaceleran (producto de la disipación de la energía de las ondas y de la atracción gravitacional de la estrella) para luego volver a acelerarse (por efecto de la presión térmica). Tales efectos en la velocidad también se deducen del modelo isotérmico (H1 1980). Así como DeCampli (1981) y otros autores, nosotros también concluimos que el mecanismo (3) no puede generar tan altas tasas de pérdida de masa ($\sim 10^{-7} - 10^{-6}$) M_{\odot} /año si la luminosidad de las ondas está restringida a ser menor que la luminosidad de la estrella ($\sim L_{\odot}$).

INTRODUCCION

En este capítulo, que consta de tan solo dos secciones, se discuten brevemente los mecanismos de generación de vientos que se han propuesto para los diversos tipos de estrellas. Se hablará, también, de la importancia que tienen los vientos estelares en la Astronomía. En la primera sección, se da una somera revisión del por que gran parte de las estrellas muestran un flujo continuo de materia alejándose de ellas (viento), de la importancia de este fenómeno para la estrella, y en que se basan los astrónomos para creer que esto está pasando. En la segunda sección, se hace énfasis en los vientos de estrellas jóvenes ($\sim 10^4 - 10^7$ años), de baja masa ($\sim 0.2 - 3 M_{\odot}$), y que presentan líneas en emisión del hidrógeno y del calcio una vez ionizado (Cohen y Kuhl 1979, y referencias ahí contenidas).

1-1 VIENTOS ESTELARES

¿Quién no se asombraría al enterarse de que casi cualquier clase de estrella, incluyendo al Sol, está eyectando material al espacio, unas veces en forma de explosiones repentinas y otras en forma de una corriente lenta y continua (viento estelar); sabiendo de antemano que liberar una nave fuera del campo gravitatorio terrestre requiere grandes cantidades de energía?

En lo que sigue exponemos algunas de las razones por las cuales el estudio de estos fenómenos es de gran importancia para la Astronomía. Primero, la pérdida de materia de la estrella puede tener un efecto significativo sobre su fase evolutiva. Para algunas estrellas puede llegar al grado de determinar si ellas finalizaran su vida en forma pacífica o violenta. Durante la mayor parte de su vida las estrellas "lucen" a costa de la energía liberada por las reacciones nucleares que se realizan en su interior, en las cuales el hidrógeno se transforma en helio (el llamado quemado de hidrógeno). Aunque existe en grandes cantidades, el combustible de la estrella es finito y debe llegar un momento en que éste casi se agote. Por cierto, cuando la estrella está en su etapa de quemado de hidrógeno se dice que es estrella de secuencia principal.

Aunque la teoría evolutiva dista de estar completa, parece bien establecido que la fase siguiente puede seguir una de estas dos opciones. En la primera, la estrella sufre un colapso gravitacional

catastrófico provocando una violenta explosión que arroja hacia al espacio las capas exteriores de la estrella. En la segunda, la estrella se contrae pacíficamente hasta formar un objeto cuyo tamaño es del orden del de la Tierra, radiando su calor residual. Esta última alternativa no está permitida a estrellas con masa superior a $(2 - 3) M_{\odot}$. Se ha hallado que estrellas nacidas con masa sustancialmente superior a la cota anterior terminan su vida como enanas blancas. Esto quiere decir que existen etapas en la vida de una estrella en la cual pierde parte importante de su masa; en que etapa y/o mediante que mecanismo se da este fenómeno no está claro todavía.

En segundo lugar, la comprensión de los procesos mediante los cuales las estrellas están expulsando materia es crucial para determinar si el gas, que no está condensado formando parte de las estrellas, se está enriqueciendo o agotando. Después del tiempo de vida que lleva la galaxia ($\sim 1.5 \times 10^9$ años) todavía se siguen formando estrellas; prueba de ello son las estrellas altamente masivas y luminosas que se observan embebidas en enormes nubes de gas interestelar, el ritmo de consumo de energía es tan grande que pueden vivir únicamente unos pocos millones de años. Si el intercambio de gas entre el medio interestelar (M.I.) y las estrellas fuera en un solo sentido (de M.I. a estrellas), no encontraríamos el 10% de gas no condensado que se observa hoy. Para los astrofísicos interesados en la evolución tanto del contenido estelar como del gaseoso, así como de la composición química, es importante tener lo más claro posible los procesos que inducen pérdidas de masa en las estrellas; desde luego, si desean entender mejor la evolución galáctica.

Y en tercero, el interés puesto en los fenómenos que dan lugar a la eyección de masa conducirá a los astrofísicos a examinar más cuidadosamente los procesos físicos que tienen lugar en las atmósferas de las estrellas. Esos estudios llevan consigo preguntas tales como ¿cuándo? ¿cómo? y bajo que circunstancias puede existir una tenue envoltura de gas extremadamente caliente (corona) en la atmósfera de la estrella. O bien, otras como, ¿cuáles son los efectos de los campos magnéticos sobre la dinámica de las atmósferas? y bajo que condiciones su efecto es significativo sobre las varias clases de estrellas.

La pérdida de masa se logra de diferentes formas, en algunos casos la materia es expelida en uno o varios episodios, y en otras en forma continua. En las supernovas y en las nebulosas planetarias, por ejemplo,

la materia es expulsada en un solo episodio; sin embargo, a diferencia de las supernovas en las cuales el suceso ocurre en una violenta explosión, en las nebulosas planetarias se da en una forma mucho más suave. En cambio en las novas, la eyección de material (en forma explosiva) por lo general ocurre en diversos episodios. En otros casos, la materia parece estar desprendiéndose continuamente de la superficie, a veces en grandes cantidades $\sim 10^{-7} M_{\odot}$ /año (comparado con $10^{-14} M_{\odot}$ /año para el sol) y/o grandes velocidades $\sim 10^3$ km/seg y a veces en bajas cantidades $\sim 10^{-13} M_{\odot}$ /año y/o bajas velocidades ~ 50 km/seg, lo que sugiere la existencia de una variedad de mecanismos de pérdida de masa muy distintos entre sí.

El ejemplo mejor conocido de este desprendimiento continuo es el Sol. La corona solar es un tenue halo, aproximadamente esférico, de gas a altas temperaturas ($\sim 10^6$ °K), que rodea al Sol. Se cree que las altas temperaturas que alcanza la corona se deben a que en ese lugar diversos tipos de ondas, generadas en la zona de convección ubicada inmediatamente abajo de la fotosfera, disipan su energía. El papel que juega el campo magnético en esto es fundamental. La temperatura es tan alta que la gravedad solar es incapaz de reducir la presión del gas coronal a valores suficientemente bajos para que quede confinada por la presión del medio exterior. Como consecuencia de este gradiente de presión, la corona se expande continuamente penetrando el medio interestelar, y es reemplazada por nueva materia que fluye desde niveles más bajos de la atmósfera hasta penetrar en la zona de intenso calentamiento. El viento originado por esta causa se dice que está generado o conducido por presión térmica. Tal viento se analiza con detalle en el segundo capítulo.

¿Hasta qué punto está difundido este tipo de viento en las estrellas?. Al parecer, el Sol no tiene nada de excepcional y es razonable suponer que estrellas con similares valores de la temperatura y gravedad superficial tengan corona y entonces vientos térmicos. Es casi imposible detectar los vientos de estas estrellas por su baja densidad ($\dot{M} \sim 10^{-13} - 10^{-14} M_{\odot}$ /año); al sol se le ha podido detectar viento gracias a las mediciones de vehículos espaciales in situ y a observaciones indirectas de su efecto sobre los cometas. Además, debido a la baja tasa de pérdida de masa es poco importante para los puntos antes mencionados; sin embargo, es de gran interés por que de su estudio se pueden aclarar en detalle muchos puntos que de otra manera seguirían oscuros. Para estrellas calientes y luminosas, estrellas O y tempranas B (particularmente estrellas supergigantes, Of, y

WR), se sugiere otro mecanismo más efectivo para conducir los vientos que se observan. Esta última aseveración se basa en lo siguiente. Para obtener las altas velocidades terminales y tasas de pérdida de masa que se observan se necesitaría una temperatura coronal tan grande ($\sim 10^7$ °K) que las líneas de los átomos ionizados CIV, NV y SiIV no se observarían (Lucy y Solomon 1970). Recientemente, la existencia de átomos altamente ionizados, NV y OVI, han provocado el surgimiento de un modelo de viento radiativo (ver siguiente párrafo) en cuya base existe una corona delgada a una temperatura $T \sim 5 \times 10^6$ °K. Tal modelo puede ser eliminado debido a la observación de rayos X blandos ($E < 1$ Kev) (Lucy y White 1980) (si existiese tal corona a esa temperatura no se esperaría ver radiación, con la intensidad que se detecta, en esa parte del espectro debido a la atenuación que sufriría por parte del viento). También se piensa que los vientos de las estrellas presecuencia principal poseen otro origen; por ejemplo, las observaciones en rayos X en las estrellas T-Tauri son de varios órdenes de magnitud inferiores que las predichas por el modelo térmico. Bajo argumentos similares uno puede concluir que los vientos de las gigantes y supergigantes rojas tampoco son térmicos. Al parecer, sólo las estrellas semejantes al Sol tienen un viento térmico.

Un mecanismo que se aplica con bastante éxito para las estrellas calientes y luminosas, es la de un viento conducido por presión de radiación, primeramente propuesto (teórica y cuantitativamente) por Lucy y Solomon (1970). Ellos sugieren lo siguiente: existe fuerte absorción en la parte ultravioleta del campo de radiación, proveniente de la fotosfera, por parte de intensas líneas de resonancia; debido a que la absorción de momento del campo es dirigida (hacia afuera) y los procesos de emisión son isotrópicos, hay una ganancia neta de momento por parte de las partículas. Así, los iones absorbedores se aceleran radialmente sufriendo colisiones con las otras partículas del medio; en esta forma, el momento ganado por los iones es compartido con los otros átomos del gas, y el medio se acelera como un todo.

Una característica interesante de ese mecanismo es que la fuerza radiativa depende fuertemente del gradiente de velocidad del medio. La razón es que las líneas de absorción son tan fuertes que atenuarían la radiación en esas longitudes de onda si toda la materia se estuviera moviendo a la misma velocidad. Sin embargo, si hay un fuerte gradiente, las partículas de las capas más altas de la atmósfera encontrarán radiación

"no amortiguada"(por efecto Doppler)que las puede continuar acelerando. A causa de que cuanto más rapido es el flujo tanto mayor es la cantidad de movimiento que debe extraerse del campo de radiación de la estrella para impulsarlo, Lucy y Solomon mostraron que la tasa de pérdida de masa se puede estimar sin tomar en cuenta la velocidad del gas. En efecto, ellos encontraron que \dot{M}_* era aproximadamente igual al número de líneas de resonancia ultravioleta multiplicado por la luminosidad de la estrella y dividida por la velocidad de la luz al cuadrado.

A diferencia de las estrellas de secuencia principal de clase espectral G o más tardías, las atmósferas de estas estrellas tempranas presentan una serie de características (perfiles P-Cygni, líneas de absorción corridas por efecto Doppler, asimetría en líneas de emisión) en sus espectros que prueban con mucho la existencia de estos vientos estelares. Estos vientos se caracterizan por tener altas tasas de pérdida de masa ($\sim 10^{-6} M_{\odot}/\text{año}$), estimados, por ejemplo, de las intensidades de los perfiles de línea observados, y altas velocidades (\sim miles de km/seg). Ultimamente se ha sugerido (Friend y MacGregor 1984) que la adición de rotación y campo magnético a la teoría de viento radiativo podía mejorar los resultados. El efecto de incrementar el campo magnético es hacer crecer la fuerza de Lorentz a grandes distancias, elevando, en consecuencia la velocidad terminal. La rotación, por otra parte, hace elevar la fuerza centrífuga cerca de la estrella provocando con ello un aumento en \dot{M}_* . Para entender con mayor profundidad el mecanismo que genere un viento radiativo ver, por ejemplo; Lucy y Solomon (1970), Mihalas (1978), Castor et al. (1975), Abbott (1980), Friend y MacGregor (1984).

Tanto en las estrellas T-Tauri como en las gigantes y supergigantes rojas, y quizás otro clase de estrella, los vientos que se observan se cree son sostenidos por presión de ondas de Alfvén. Los vientos de estas estrellas no pueden ser generados por presión de radiación debido a la cantidad insuficiente de momento que puede absorber el gas del campo de radiación (ésto es así en última instancia por el valor bajo de la temperatura superficial, $\sim 10^4$ K). Para las gigantes y supergigantes se tiene un mecanismo alternativo que fue propuesto antes (ver, por ejemplo, Weymann 1960 y Kwok 1975); el gas es acelerado por las colisiones con los granos de polvo, que se sabe existen en las envolventes de estas estrellas, los cuales adquieren el momento del campo de radiación. Este mecanismo tiene entre sus defectos uno que se considera grave, y es que la formación de

estos granos a distancias adecuadas (en la base del viento) es difícil de sostener. Como lo más probable es que este mecanismo se aplique sólo a casos particulares (HM 1980) no se hablará más de él.

Las ondas hidromagnéticas generadas en la zona de convección de estas estrellas se propagan en la baja y alta cromósfera, los modos de mayor carácter compresivo son fácilmente amortiguados (debido a que forman frentes de choque) y su efecto principal es calentar el gas cromosférico (Osterbrock 1961). Las ondas de Alfvén, que tienen carácter transversal, y en menor grado el modo rápido (el ángulo que hace el vector de onda con el campo magnético debe ser aproximadamente 0° o 90° Barnes 1966) pueden alcanzar grandes distancias $\sim 2 R_*$ antes de que hayan disipado gran parte de su energía. Así, la presión de estas ondas sobre el gas atmosférico puede ser tan efectiva que puede provocar en un momento dado un viento o bien ayudar a que éste sea más efectivo, como parece ser el caso del viento solar. En el capítulo II se examina esto con mucho mayor detalle.

1-2 VIENTOS DE ESTRELLAS T-TAURI

En este momento no cabe la menor duda de que las estrellas T-Tauri están expulsando material en enormes cantidades ($\dot{M} \sim 10^{-7} - 10^{-9} M_\odot/\text{año}$) y a velocidades relativamente altas (\sim cientos de km/seg). Prueba de ello son: (a) las líneas de absorción corridas por efecto Doppler, hacia el azul, que indican material alejándose de la estrella a una determinada velocidad; (b) asimetría en las líneas de emisión por efecto del ocultamiento geométrico de la estrella (ver fig.1.1); (c) perfiles P-Cygni en algunas de sus líneas (ver fig.1.2) con un ancho de banda muy grande como para ser considerado térmico. Es posible que en algunos casos en donde los perfiles de línea sean altamente simétricos, el ensanchamiento de sus líneas se deba a turbulencia en la atmósfera de la estrella, pero no es nada claro que lo anterior se deba a turbulencia si los perfiles son realmente asimétricos. En este caso, si uno supone que la asimetría es debida a efectos de ocultación, uno llega a la conclusión de que algunas estrellas tienen vientos que alcanzan velocidades de $\sim 150-350$ km/seg, dentro de $1.1-1.5 R_*$ (Mundt 1984, Lago 1984). Velocidades de expansión tan altas, cercanas a la superficie de la estrella, son incompatibles con los modelos de Hartmann, Edwards, y Avrett (1932) (en sus modelos, esas

velocidades se alcanzan a partir de $r \gtrsim 2R_*$). En el siguiente párrafo ahondaremos en este punto.

Como mostraremos más adelante (ver capítulo IV sec.4-2)

$$\dot{M}_* \propto M_*^{-1.5} R_*^{3.5} (F_{\omega_0} / B_0)^2, \quad (1.1)$$

donde M_* y R_* denotan la masa y el radio de la estrella; y, $F_{\omega_0} = \frac{B_0 c_0}{\sqrt{4\pi c_0}}$, y B_0 denotan el flujo de las ondas y el campo magnético en la superficie, respectivamente. La expresión anterior es aproximadamente válida para un modelo de viento conducido por ondas de Alfvén, el cual es el mecanismo más aceptable para generar los vientos que se observan en estas estrellas (DeCampi 1981, Hartmann et al. 1982, Lago 1984). Es claro de (1.1) que la manera más eficiente de aumentar \dot{M}_* es dando valores cada vez más altos de F_{ω_0} (o de $L_{\omega_0} = 4\pi R_*^2 F_{\omega_0}$ la luminosidad de la onda), para parámetros fijos de la estrella R_* y M_* . De esta manera, restringiendo L_{ω_0} a la luminosidad de la estrella, L_* , uno obtiene una cota superior para \dot{M}_* . Para valores típicos de las T-Tauri $R_* \gtrsim 1R_{\odot}$, $M_* \sim 1M_{\odot}$ y $L_* \lesssim 3L_{\odot}$, \dot{M}_* no puede ser mayor

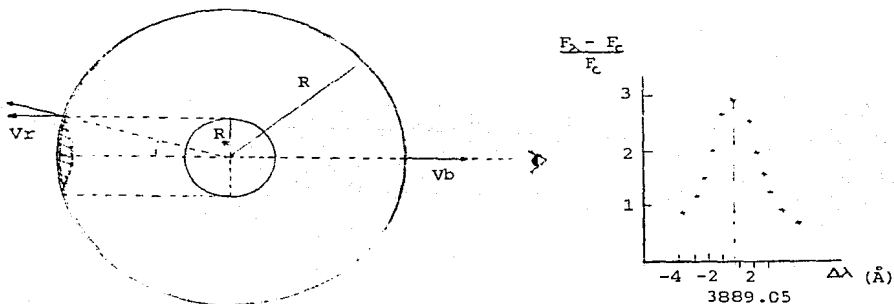


Fig. 1.1 (a) Se supone que la línea de emisión se origina en una capa esférica estrecha de radio R . En la figura V_r y V_b son las componentes máxima de velocidad corridas hacia el rojo y el azul respectivamente (Lago 1982). (b) Perfil teórico asimétrico de la línea H8(B), tomado de Lago 1984.

H8(B): la línea 8 en la serie de Balmer
para el hidrógeno

que unas cuantas $10^{-8} M_{\odot}/\text{año}$. El problema de las altas velocidades en las cercanías de R_* trae consigo, si uno desea satisfacerlo con el mismo modelo (el de un viento generado por ondas de Alfvén), dos cosas: (1) L_{∞} rebasa la cota superior impuesta por L_* , y (2) la velocidad ya es supersónica en r_0 (tomado por lo regular como R_*). El punto (1) puede soslayarse pensando que L_* es muy superior a $3L_{\odot}$, de hecho para las estrellas que muestran el comportamiento anterior (Mundt 1984) $L_* \gg 7.6L_{\odot}$ e incluso llega a ser $86L_{\odot}$ para V1331Cyg. El punto (2) parece ser inevitable, pero tiene la ventaja de hacer que \dot{M}_* alcance valores tan altos como $10^{-7} - 10^{-6} M_{\odot}/\text{año}$, valores que se observan para algunas estrellas.

En realidad, los parámetros del viento \dot{M}_* y v_{∞} para estas estrellas siguen sujetos a gran discusión. Altas tasas de pérdida de masa de varios $10^{-7} M_{\odot}/\text{año}$ (Hartmann 1984) conducen a severos problemas de energía si L_* es de pocas luminosidades solares. El mismo estado dinámico de una T-Tauri está sujeto a controversia. Indicaciones en algunas estrellas para expulsión y caída de materia en diferentes tiempos han sido observados, mientras que en otras ambos fenómenos se han visto al mismo tiempo. Todas estas observaciones indican un complejo movimiento de masa en las atmósferas de estas estrellas (Mundt 1984 y referencias ahí contenidas)

Una de las características de las T-Tauri es que se encuentran dentro

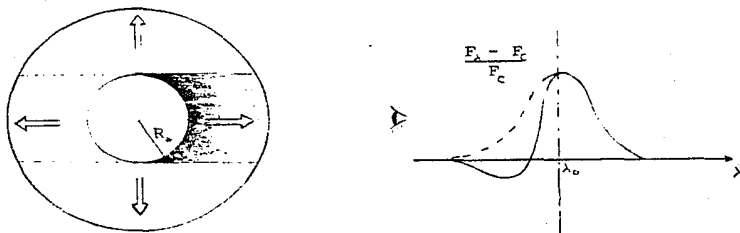


Fig 1.2 La envolvente gaseosa de la estrella, debido a su alta temperatura, tiene líneas en emisión. Si nos fijamos en una de ellas, es posible que presente un perfil de línea como el que se muestra arriba. La parte que cae abajo del

continuo (indicado por el eje λ) se debe a la absorción frontal del continuo estelar (lado obscuro). La longitud de onda más corta da, por efecto Doppler, una cota inferior a la velocidad terminal. En caso de que el gas se desacelere, como en nuestros modelos, la aseveración anterior no es válida. El área de la parte de absorción nos da una estimación de la densidad del gas en la envolvente. Combinando ambas informaciones podemos obtener un valor aproximado de \dot{M}_* .

o en los límites de nubes moleculares, generalmente oscuras (Mendoza 1984). Sus vientos deberían, en un momento dado, ser importantes para la dinámica y longevidad de tales nubes moleculares (Norman y Silk 1980). En efecto, indicaciones directas del depósito de energía y momento hacia las nubes por parte de los vientos de las T-Tauri han sido encontrados. Por ejemplo, existen muchas razones para creer que la fuente última de energía de los objetos Herbig-Haro (HH) es un viento estelar de una estrella joven (Cantó 1984). El gas de CO a altas velocidades, los objetos HH, y los "chorros" HH detectados alrededor de ciertas estrellas T-Tauri dan indicaciones de flujos hacia afuera, altamente colimados (bipolares), de estos objetos.

En este capítulo se hará una revisión de los vientos que se sabe son generados por presión térmica. Gran parte de este capítulo sigue el desarrollo dado por Mihalas en la segunda edición de su libro *Atmósferas Estelares* (Mihalas 1978). En la primera sección se obtendrán las ecs. de la hidrodinámica y en la segunda y tercera sección se hará uso de estas ecs. al aplicarlas al caso de una atmósfera estelar.

2-1 ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA PARA UN FLUIDO IDEAL Y COMPRESIBLE

En esta sección encontraremos las ecs. de la hidrodinámica para un gas ideal, no viscoso, y compresible. La deducción no va a ser detallada y de acuerdo a los intereses del lector puede ser leída u omitida. Por simplicidad, las ecs. son deducidas en un sistema cartesiano y después reescritas en notación tensorial; así, en caso de requerir las ecs. en un sistema de coordenadas especial, se utilizan éstas últimas.

2.1a CINEMATICA

Trabajaremos primeramente con las propiedades cinemáticas básicas de nuestro gas. Supondremos que nuestro gas está totalmente ionizado y que consiste de una mezcla de diferentes especies de partículas (por ejemplo, protones, electrones, helio una vez ionizado HeII, etc.). Cada especie k tiene una masa m_k y una función de distribución $f_k(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Aquí, f_k está definida de forma que

$$f_k d\vec{r} d\vec{v},$$

dá el número de partículas de tipo k cuyas componentes de su vector generalizado $\vec{R} = (x^1, x^2, x^3, v^1, v^2, v^3)$ (las primeras tres asociadas con el espacio de posición y las restantes con el de la velocidad) son tales que $x_i^1 \leq x_i^1 + dx_i^1$ y $v_i^1 \leq v_i^1 + dv_i^1$ ($i=1,2,3$); donde $d\vec{r} = dx_1 dx_2 dx_3$ y $d\vec{v} = dv_1 dv_2 dv_3$. La función de distribución se caracteriza físicamente en términos de velocidades promedio macroscópicas y de una distribución térmica microscópica; la primera describe el movimiento del fluido dirigido,

mientras que la segunda da el movimiento azaroso de las partículas respecto a la promedio. Se supone que la tasa de colisiones Coulombianas es tan alta que (a) la diferencia de velocidad entre las distintas especies es nula, y (b) que hay equipartición de la energía en cada punto. Como resultado de (a) y (b) se obtiene que la magnitud de la velocidad y la temperatura es la misma para todas las especies, en todo punto. Además de lo ya dicho, se considera que la distribución es isotrópica.

Desde luego, debido a la definición de f_k la densidad de partículas de la especie k esta dada por

$$n_k(\bar{r}, t) = \int_{\tau} f_k(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{v}, \quad (2-1)$$

donde τ representa la región de integración en el espacio de la velocidad. La densidad de masa de la especie k es $m_k n_k(\bar{r}, t)$, y la densidad total es

$$\rho(\bar{r}, t) = \sum_k \rho_k = \sum_k m_k n_k(\bar{r}, t). \quad (2-2)$$

La componente i de la velocidad de flujo de la especie k es

$$n_k \langle v_i \rangle_k = \int_{\tau} f_k(\bar{r}, \bar{v}, t) v_i d\bar{v}. \quad (2-3)$$

Aquí $\langle \eta \rangle_k = \frac{\int_{\tau} f_k(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{v}}{\int_{\tau} f_k(\bar{r}, \bar{v}, t) d\bar{v}}$ representa el promedio de η . Debido a lo

que se mencionó antes $\langle v_i \rangle_k$ no depende de k y así, el subíndice puede ser eliminado. Tomando en cuenta esto último, uno encuentra que la velocidad del fluido debe ser

$$\bar{v}(\bar{r}, t) = \langle v_1 \rangle \hat{i} + \langle v_2 \rangle \hat{j} + \langle v_3 \rangle \hat{k} \equiv v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k} \quad (2-4)$$

Por otra parte, el flujo de masa, producto del movimiento dirigido del fluido, esta dado por

$$\sum_k m_k n_k (\langle v_1 \rangle \hat{i} + \langle v_2 \rangle \hat{j} + \langle v_3 \rangle \hat{k}) = \rho \bar{v} \quad (2-5)$$

A su vez, las partículas pueden acarrear momento. La tasa de transporte de

la componente i -ésima del momento a través de una superficie normal a la dirección j -ésima, por las partículas de la especie k , es

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{ij}^k(\bar{r}, t) &= m_k n_k(\bar{r}, t) \langle v_i v_j \rangle_k = m_k n_k \langle (\langle v_i \rangle + v_i') (\langle v_j \rangle + v_j') \rangle \\ &= m_k n_k \langle \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle v_i \rangle v_j' + \langle v_j \rangle v_i' + v_i' v_j' \rangle_k \\ &= m_k n_k [\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle_k + \langle v_i' v_j' \rangle_k], \end{aligned} \quad (2-6)$$

donde v_i' es la parte térmica de la componente i -ésima de la velocidad. Para obtener (2-6) se ha hecho uso de que $\langle v_i \rangle = 0$ ($i=1,2,3$). Al tener una distribución térmica isotrópica las componentes son independientes; así, cuando $i \neq j$ $v_i' v_j'$ dará otra componente azarosa la cual al ser promediada se anulará. En cambio si $i=j$ $\langle v_i' v_j' \rangle_k = \langle (v_i')^2 \rangle_k = (kT/m_k)$, que se deduce del teorema de la equipartición de la energía para un grado de libertad $(1/2)m_k \langle (v_i')^2 \rangle = (1/2)kT$. Usando lo mencionado, (2-6) puede ser reescrito como

$$\overline{\Pi}_{ij}^k = m_k n_k v_i v_j + (n_k kT) \delta_{ij} = p_k v_i v_j + p_k \delta_{ij}, \quad (2-7)$$

donde p es la presión parcial de la especie k . Sumando sobre todas las especies, el tensor de flujo de momento total está dado por

$$\overline{\Pi}_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}, \quad (2-8)$$

donde p es la presión total. El primer término está relacionado con lo que uno conoce como presión hidrodinámica y se debe únicamente al movimiento dirigido del fluido; así, si el fluido está en reposo su valor será cero. El segundo, representa la presión térmica (producto de los movimientos azarosos de las partículas) del gas y opera únicamente normal a la superficie.

Existen dos maneras conceptualmente diferentes de tratar un fluido: (1) la llamada descripción Euleriana, en la cual cualquier propiedad del fluido depende de la posición y del tiempo, visto éste desde un sistema de referencia fijo en el laboratorio; o bien, (2) la descripción Lagrangiana, la cual consiste en seguir el movimiento de un elemento de fluido, cuyo tamaño es lo suficientemente grande como para contener tantas partículas de forma que tenga sentido realizar un promedio, y lo suficientemente pequeño como para considerarlo un punto material. La relación entre las derivadas de ambos sistemas es la siguiente:

$$(d\alpha/dt) = (\partial\alpha/\partial t) + (\vec{v} \cdot \nabla)\alpha. \quad (2-9)$$

Aquí, α denota cualquier propiedad del fluido y puede ser un escalar o un vector. La derivada Lagrangiana o derivada total está representada por d/dt .

2.1.b LA ECUACION DE CONTINUIDAD

Imaginemos un elemento de volumen dV fijo en el fluido. Entonces, si nosotros suponemos conservación de masa, la tasa de pérdida de masa en dV debe ser igual al flujo de masa que sale a través de la superficie de él, i.e.,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{S} = - \int \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV, \quad (2-10)$$

donde se ha usado el teorema de la divergencia. Como dV es arbitrario se concluye de (2-10) que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2-11)$$

En caso de tener un flujo estacionario con simetría esférica la ec. de continuidad toma la forma siguiente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (2-12)$$

la cual puede ser integrada para dar

$$4\pi r^2 \rho v = \text{cte.} = \dot{M} \quad (2-13)$$

Aquí, \dot{M} representa la tasa de pérdida de masa a través de una superficie esférica y v la velocidad radial (medida a partir del centro del objeto, estrella, planeta etc.).

2.1.c ECUACION DE MOMENTO

La ec. de momento será derivada de una manera similar a la ec. de

continuidad. Supongamos de nuevo un elemento de volumen fijo dV , a través de él habrá una tasa de cambio de momento que será compensada por un flujo de momento que cruza su superficie (desde luego, estamos suponiendo conservación de momento) y la ganancia de momento debido a la fuerza externa por unidad de volumen actuando sobre él. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \rho \bar{v} \, dV \right) &= - \int \bar{\pi} \cdot d\bar{S} + \int \bar{f} \, dV \\ &= \int \left(\bar{f} - \nabla \cdot \bar{\pi} \right) \, dV, \end{aligned} \quad (2-14)$$

de nuevo notamos que el teorema de la divergencia ha sido empleado para derivar (2-14). Como antes, concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) = -\nabla \cdot \bar{\pi} + \bar{f} \quad (2-15)$$

Uno puede fácilmente mostrar, usando la ec. (2-16) y la expresión para el tensor de flujo de momento, que

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right] = -\nabla p + \bar{f}. \quad (2-17)$$

La cual representa simplemente la segunda ley de Newton aplicada a una partícula de fluido.

Si α es cualquier variable física (escalar o vectorial) se cumple que

$$\rho \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \alpha) + \nabla \cdot (\rho \alpha \bar{v}) \quad (2-16)$$

Para obtener (2-16) se usa la ec. de continuidad en la forma

$$\alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\alpha \bar{v}) = 0$$

y la ec. (2-9).

Para un flujo estacionario, esféricamente simétrico, y en el cual actúa como fuerza externa la gravedad $f_r = -(GM/r^2)$, la ec. (2-17) viene a ser

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (2-18)$$

La ec. anterior puede ser integrada, en principio, si uno supone una relación conocida entre la presión y la densidad.

2.1.1.a ECUACION DE ENERGIA

La primera ley de la Termodinámica establece que el cambio de la energía interna específica (o sea, por unidad de masa), que denotamos por e , más el trabajo hecho por la presión p del gas cuando el volumen específico cambia por una cantidad $d(1/\rho)$ debe ser igual a la cantidad de calor específico suministrado al elemento de gas. En otras palabras,

$$de + pd(1/\rho) = dq. \quad (2-19)$$

Supongamos que tales cambios ocurren a un elemento de fluido seguido por nosotros en un tiempo dt , y también supongamos que la única manera de intercambiar energía con los alrededores es por conducción térmica (se ha despreciado aquí procesos tales como radiación y mecanismos de disipación de energía mecánica). Usando (2-18) uno llega a la ec. de energía para el gas

$$\rho \{ (de/dt) + p d(1/\rho)/dt \} = -\nabla \cdot \bar{q}_c. \quad (2-20)$$

En la ec. anterior la cantidad que nosotros hemos representado por \bar{q}_c denota el flujo de calor conductivo.

Uno puede obtener de la ec. de momento una ley de conservación de energía mecánica tomando el producto punto de la ec (2-17) con \bar{v} , lo que encontramos es

$$\rho d[(1/2)v^2]/dt + (\bar{v} \cdot \nabla)_p = \bar{v} \cdot \bar{f}. \quad (2-21)$$

De la ec. de continuidad es fácil ver que $\rho d(1/\rho)/dt = \nabla \cdot \bar{v}$; así, si uno toma en cuenta esta relación, la ec. (2-20), la ec. (2-21), y la identidad vectorial $\nabla \cdot (f\bar{g}) = (\bar{g} \cdot \nabla)f + f(\nabla \cdot \bar{g})$ la ec. de energía total salta a la vista

$$\rho d[(1/2)v^2 + e]/dt + \nabla \cdot (p\bar{v}) = \bar{v} \cdot \bar{f} - \nabla \cdot \bar{q}_c. \quad (2-22)$$

Considerando la ec. (2-16) lo anterior puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\partial [(1/2)\rho v^2 + \rho e] / \partial t + \nabla \cdot \{ [(1/2)\rho v^2 + \rho e + p]\bar{v} + \bar{q}_c \} = \bar{v} \cdot \bar{f}. \quad (2.23)$$

Notamos de la ec (2-23) que $\vec{f} \cdot \vec{v}$ representa la contribución a la ec. de la energía del trabajo hecho sobre el gas por las fuerzas externas, $\nabla \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + p \right] \vec{v} \right\}$ la contribución debida al transporte de masa más el trabajo hecho por la fuerza de presión, y $\nabla \cdot \vec{q}_c$ la pérdida de energía debido al flujo de calor por conducción. Así, si $\vec{v} = 0$ la energía interna cambiará únicamente por el calor añadido.

Para un flujo estacionario, esféricamente simétrico, y en el cual el flujo de calor conductivo es $\vec{q}_c = -\kappa (\nabla T)$, donde κ denota el coeficiente de conductividad térmica, la ec. de energía puede ser integrada, haciendo esto obtenemos

$$(4\pi r^2 \rho v) \left\{ \frac{1}{2} v + \left(\frac{p}{\rho} \right) + e - \frac{GM}{r} \right\} - 4\pi r^2 \kappa \left(\frac{dT}{dr} \right) = \text{cte.} = E. \quad (2-24)$$

La ec. (2-24) establece que el flujo de energía total a través de una superficie esférica es una constante.

Para un gas ideal $e = (p/\rho) / (\gamma - 1)$, así que (2-24) puede ser reescrita como

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} - \frac{4\pi r^2}{M} \kappa \frac{dT}{dr} = \frac{E}{M}, \quad (2-25)$$

donde γ es el exponente adiabático, cociente de los calores específicos a presión y volumen constante. Para obtener (2-25) hemos usado que $4\pi r^2 \rho v = \dot{M} = \text{cte.}$

2.1.e ONDAS DE SONIDO

Si a un fluido compresible se le da un pequeño empuje, el disturbio se propagará a través del medio a la velocidad del sonido. Supongamos un medio homogéneo con condiciones iniciales $v_0 = 0$, ρ_0 , y p_0 ; y con valores de perturbación, δv , $\rho_0 + \delta \rho$ y $p_0 + \delta p$. Además, pensaremos que $\delta \rho \ll \rho_0$, $\delta p \ll p_0$, y que δv es pequeña. Bajo tales condiciones uno puede usar las ecs. de continuidad y momento con fuerza externa nula, y retener términos de primer orden para obtener

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\delta \vec{v}) = 0 \quad (2-26)$$

y

$$\rho_0 \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta p) = 0 \quad (2-27)$$

Ahora, derivando (2-26) con respecto a t , sacando la divergencia de (2-27), y restando una de la otra obtenemos

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 (\delta p) = 0. \quad (2-28)$$

Por la regla de la cadena $\nabla^2 (\delta p) = \left(\frac{\partial \delta p}{\partial \rho} \right) \nabla^2 (\delta \rho)$; así, de (2-28) se llega a

$$\nabla^2 (\delta \rho) = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2}, \quad (2-29)$$

donde por definición $v_s^2 = \delta p / \delta \rho$. La ec. (2-29) la recuerda uno como la ec. de onda en la cual v_s representa la velocidad a la cual se propaga el disturbio (el sonido, en este caso). Si uno supone que nuestro gas ideal está sometido a cambios que fuerzan relacionar a la presión con la densidad de manera politrópica, i.e., $p = p_0 (\rho / \rho_0)^\alpha$ (donde α es el exponente politrópico, $1 \leq \alpha \leq (5/3)$), la velocidad del sonido viene dada por

$$v_s = (\alpha p / \rho)^{1/2} = (\alpha kT / \mu m_H)^{1/2}. \quad (2-30)$$

Si alfa toma los valores extremos, de menor a mayor, v será o $(\gamma kT / \mu m_H)^{1/2}$ o bien $(kT_0 / \mu m_H)^{1/2}$, caso adiabático o isotérmico, respectivamente. En la ec. (2-30) μ denota el número de unidades de masa atómica por partícula, $\mu = \left(\sum_k n_k m_k / \sum_k n_k m_H \right) = (\rho / n m_H)$ con $n = \sum_k n_k$, m_H denota la masa del átomo de hidrógeno.

2-2 MODELO HIDROSTATICO PARA UNA ATMOSFERA ESTELAR

Aunque es bien sabido en este momento que el Sol posee un viento, esto no era nada claro hasta hace poco (~ 1950). Fue Biermann (ver Mihalas 1978, pag. 521) quien propuso primero la idea avanzada de una emisión continua de partículas del Sol. Posteriormente, Parker (1958, 1960, y 1965) mostraría que los modelos estáticos eran inconsistentes y una expansión coronal debía ocurrir.

Si en este momento nos preguntáramos ¿por qué la atmósfera del Sol, así como la de otras estrellas, no se encuentra en equilibrio hidrostático? la respuesta tendría que ser dada en base a las comparaciones de los resultados obtenidos por ambos modelos, el hidrostático y el de viento, con las observaciones. Esto se hizo para el caso solar, y se concluyó que la corona debía estar sometida a una expansión estacionaria. El siguiente

análisis se hace para el Sol pero es fácilmente generalizable a otros cuerpos.

Si la atmósfera del Sol estuviera en equilibrio hidrostático ($v = 0$) entonces (ver ec.(2-18))

$$(\rho p / dr) = -(GM\rho / r), \quad (2-31)$$

donde G es la constante de gravitación universal, M la masa del Sol, ρ y p la densidad y presión total, respectivamente; y r la distancia radial al centro del Sol.

Para el caso de una atmósfera isotérmica la integración de la ec.(2-31) da

$$p = p_0 \exp\{-H[1 - (r_0/r)]\} \quad (2-32)$$

donde $H = (GM_0 / p_0 r_0)$ y p_0 y r_0 son la presión y la distancia a un nivel de referencia, por ejem., para el caso de una estrella este generalmente es tomado como el radio de la estrella (para estrellas con corona, r_0 es tomado como la base de la corona).

Para modelos en los cuales p está relacionado con la densidad de manera politrópica, la ec. de equilibrio hidrostático determina un perfil de presión diferente a aquel de la ec.(2-32), a decir

$$p = p_0 \left\{ 1 - ((\alpha - 1)/\alpha) H [1 - (r_0/r)] \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} \quad (2-33)$$

A diferencia del caso isotérmico, p puede anularse para un cierto valor de r , r_{min} , si $H > \alpha/(\alpha - 1)$. El valor de r_{min} está dado por

$$r_{min} = r_0 \left\{ H / [H - (\alpha/(\alpha - 1))] \right\}. \quad (2-34)$$

En este caso la atmósfera está soportada hidrostáticamente. Por otra parte, si $H < \alpha/(\alpha - 1)$ p tiende a $p_\infty = p_0 \left\{ 1 - \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} H \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}$ conforme r tiende a infinito. Así, siempre y cuando la presión del medio exterior (interestelar, interplanetario, etc.) sea menor que p_∞ (para el caso isotérmico $p_\infty = p_0 \exp(-H)$) vamos a tener un flujo de materia que escapa del cuerpo (estrella, planeta, etc.), en caso contrario la atmósfera estará estática.

Tomando a $\alpha=1.23$ (Belcher 1971) como adecuado para el caso solar encontramos, para $T_0 = 2 \times 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$, que $p_r \sim 10^{-4}$ dinas/cm². De conocimiento sobre el medio interestelar, Mihalas determina una cota superior para la presión interestelar. El valor que él da es 10^{-11} dinas/cm², que al ser comparado con el obtenido por el modelo politrópico resulta ser de seis a siete ordenes de magnitud menor. Adoptando el modelo isotérmico o cualquier otro más realista (por ejemplo, aquel que da $T \propto r^{2/4}$ obtenida de la condición de $\nabla \cdot \vec{q}_c = 0$, con $T \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$) se obtienen resultados similares.

Lo que se mencionó en el anterior párrafo responde a la pregunta del por qué la atmósfera solar no está en equilibrio hidrostático. Por último, notamos que este mismo análisis se puede realizar con cualquier otro cuerpo que posea una atmósfera.

Antes de terminar esta sección considero bueno mencionar lo siguiente. Las estrellas pueden no tener corona, caracterizada por su alta temperatura $\sim 10^6$ °K, y en consecuencia no tener un viento térmico; y sin embargo, no estar en equilibrio hidrostático (recordemos que los vientos pueden ser generados por otras causas).

2-3 VIENTOS CORONALES

Las siguientes suposiciones serán usadas no sólo a lo largo de esta sección sino a través de todo éste trabajo de tesis: (1) el flujo es considerado estacionario; (2) el viento es considerado esféricamente simétrico; (3) el gas se supone ideal, compresible, y no viscoso; y (4) se propone que la tasa de colisiones entre las partículas sea tan alta de forma que, la presión y la temperatura sean únicas en cada punto y además la velocidad sea la misma para todas especies de partículas (modelo de un fluido). Una hipótesis adicional sobre el gas para el caso de un viento térmico es que el plasma es considerado únicamente de hidrógeno y totalmente ionizado. Desde luego, alguien puede reprocharnos que nuestras suposiciones son totalmente ideales y que la realidad es bastante diferente, efectivamente le daríamos la razón, pero argumentaríamos a nuestro favor que ellas suministran un buen modelo físico para el estudio que emprendemos. Aparte de esto, uno sabe bien que en Física, así como otras áreas de la ciencia, existen fenómenos cuya matemática es tan complicada que a veces lleva a uno alejarse de la realidad (lo que ocurre más fácilmente si uno no ha trabajado con un modelo más simple).

Bajo las anteriores hipótesis, las ecs. que describen al viento son: la ec.(2-13)

$$4\pi r^2 \rho v = \dot{M}, \quad (\text{conservación de masa})$$

la ec.(2-18)

$$v(dv/dr) + (1/\rho)(dp/dr) + (GM/r^2) = 0, \quad (\text{conservación de momento})$$

y la ec.(2-25)

$$(1/2)v^2 + [\gamma/(\gamma - 1)] (p/\rho) - (GM/r) - 4\pi r^2 \kappa (dT/dr) = (E/M). \quad (\text{conservación de energía})$$

Mejor que considerar la solución general del anterior sistema de ecs., trabajaremos con el caso isotérmico. La ventaja de ello es la simplificación matemática que ofrece y lo instructivo que es. Al suponer $T = \text{cte.} = T_0$ las funciones desconocidas se reducen a dos, por decir algo n y v , obtenidas de resolver simultáneamente las ecs. de continuidad y momento. Al considerar de antemano una forma funcional para la temperatura uno tiene que omitir la ec. de la energía; i.e., al dar esa información uno ha especificado una forma de ec. de energía -ver abajo-. En cierta forma, el suponer un flujo isotérmico es equivalente a invocar algún mecanismo no especificado para calentar o enfriar el gas de manera que produzca el perfil de temperatura $T(r) = T_0$.

Usando la ec. de continuidad y la hipótesis de $T = T_0$, la ec. de momento puede ser manipulada para dar

$$v(dv/dr) - v_s^2 \{ (2/r) + (1/v)(dv/dr) \} + (GM/r^2) = 0,$$

$$\circ \quad (v^2 - v_s^2)(dv/dr) = (2v/r)(v_s^2 - (1/2)(GM/r)),$$

$$\circ \quad (v^2 - v_s^2)(dv/dr) = (2v/r)(v_s^2 - (1/4)v_s^2). \quad (2-35)$$

En la ec. (2-35) las cantidades denotadas por $v_s^2 = (dp/d\rho)_T = v_{\tau}$ y $v_e^2 = (2GM/r)$ representan la velocidad del sonido y escape, respectivamente. Definiendo la velocidad y la distancia adimensional

como

$$u=(v/v_c) \text{ y } z=(r/r_o) ,$$

la ec.(2-35) viene a ser

$$(u^2 - 1) (du/dz)=(2u/z) [1 - (1/4)(v_c/v_c)^2] . \quad (2-36)$$

Las ecs. de movimiento de los vientos que vamos analizar en todo este trabajo siempre se pueden poner de la forma

$$(du/dz) = (2u/z) N(u,z)/D(u,z) . \quad (2-37)$$

Así, será provechoso trabajar de una vez por todas con esta fórmula general. El siguiente análisis es tomado de Hartmann y MacGregor (1980) (de aquí en adelante HM (1980)), para información más detallada ver, por ejemplo, Boyce DiPrima (1977) y referencias ahí contenidas.

Para ver el comportamiento de las soluciones de la ec.(2-37) cerca del punto crítico (definido éste como aquel en el cual N y D se anulan simultáneamente) haremos lo siguiente. Expresamos las variables u y z en la forma

$$u = u_c + \Delta u \quad \text{y} \quad z = z_c + \Delta z ,$$

con $\Delta u \ll u$ y $\Delta z \ll z$; a continuación, desarrollamos en serie de Taylor $2uN$ y zD alrededor del punto crítico. Entonces, a primer orden lo que obtenemos de (2-37) es

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta u}{d \Delta z} &= \frac{z_c N(u_c, z_c) + \frac{\partial}{\partial u} [z u N(u, z)]_c \Delta u + \frac{\partial}{\partial z} [z u N(u, z)]_c \Delta z}{z_c D(u_c, z_c) + \frac{\partial}{\partial u} [z D(u, z)]_c \Delta u + \frac{\partial}{\partial z} [z D(u, z)]_c \Delta z} \\ &= \frac{z_c N(u_c, z_c) + C_1 \Delta u + C_2 \Delta z}{z_c D(u_c, z_c) + C_3 \Delta u + C_4 \Delta z} = \frac{C_1 \Delta u + C_2 \Delta z}{C_3 \Delta u + C_4 \Delta z} \quad (2-38) \end{aligned}$$

donde la definición de los C_i ($i=1,2,3$) es directa. Para derivar (2-38) se usó que $N(u_c, z_c) = D(u_c, z_c) = 0$. Por otra parte, supongamos que $\Delta u = S \Delta z$ con S constante, entonces, (2-38) se cumple si

$$S_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1 - C_4}{C_3} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{C_1 - C_4}{C_3} \right)^2 + 4 \left(\frac{C_3}{C_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2-39)$$

donde el subíndice 1(2) corresponde al signo +(-).

Apliquemos el análisis que acabamos de realizar al viento isotérmico. La ec.(2-36) tiene un único punto crítico dado por

$$u_c^2 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad (v_{ec}/4v_{rc})^2 - 1 = 0$$

o

$$u_c = 1 \quad \text{y} \quad (v_{ec}/z_c) = 2v_{rc}, \quad \text{con } v_c = (v_{ec}/z) \text{ y } v_r = v_{rc}.$$

Los coeficientes C_i ($i=1,2,3$) son: $C_1=C_4=0$, $C_2=(2/z_c)$, y $C_3=2z_c$. Usando estos C_i , el valor que encontramos para $S_{1,2}$ de (2-39) es

$$S_{1,2} = \pm(2/z_c).$$

Debido a que S_1 y S_2 son reales y de signos opuestos, el punto resultante es un punto silla. A partir de este punto el flujo se vuelve supersónico.

La forma de las curvas solución cercanas a los puntos críticos pueden ser deducidas suponiendo a Δu como $\mu \Delta z$, donde μ es una función de z e integrando (2-38); haciendo esto obtenemos (Lerche y Vasyliunas 1970)

$$\left(\Delta u - S_1 \Delta \gamma \right)^{- (S_1 + C_4/C_3)} \left(\Delta u - S_2 \Delta \gamma \right)^{ (S_2 + C_4/C_3)} = cte. \quad (2-40)$$

Para nuestro caso la ec.(2-40) se reduce a

$$\Delta u^2 - c^2 \Delta \gamma^2 = cte.,$$

ec. que define una familia de hipérbolas cuyas asíntotas son $u = \pm(2/z_c)$. Las mismas conclusiones pueden ser obtenidas si uno elige un punto en el plano $u-z$, fuera de la solución crítica, y trata de graficar su solución asociada. Para hacer esto lo recomendable es graficar previamente las curvas $N(u,z)=0$ y $D(u,z)=0$ y reconocer el signo de la derivada de las subregiones obtenidas de ellas (ver fig. 2.1).

El resultado de integrar la ec.(2-36) es

$$\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 - \ln\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 = 4\ln(r/r_c) + 4\left(\frac{r}{r_c}\right) + C \quad (2-41)$$

donde C es una constante de integración. Para decidir que solución elegir usaremos las condiciones de frontera que se deducen a partir de las observaciones. En las tipo (1), para $r \gg r_c$ $2\ln(v/v_c) \sim 4\ln(r/r_c)$ i.e., $v \sim (1/r^{-2})$; esto último indica que la densidad tiende a un valor finito, conforme r tiende a infinito. Por los mismos argumentos que deshecharon el modelo hidrostático queda relegada esta posibilidad. En la solución transónica (5) vemos que para $r \gg r_c$ $(v/v_c)^2 \sim 4\ln(r/r_c)$ o $v \sim 2[\ln(r/r_c)]^{1/2}$. En este caso $\rho \sim r^{-2} v^{-1} \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$. Las otras soluciones pueden ser eliminadas directamente de la fig. 2.1(b). Las soluciones (2) y (6) comienzan en un régimen supersónico y después se desaceleran, tales perfiles no son esperados para un viento conducido por algún mecanismo físico (describirían, posiblemente, acreción de materia). Las soluciones (3) y (4) se excluyen por no ser univaluadas. En conclusión,

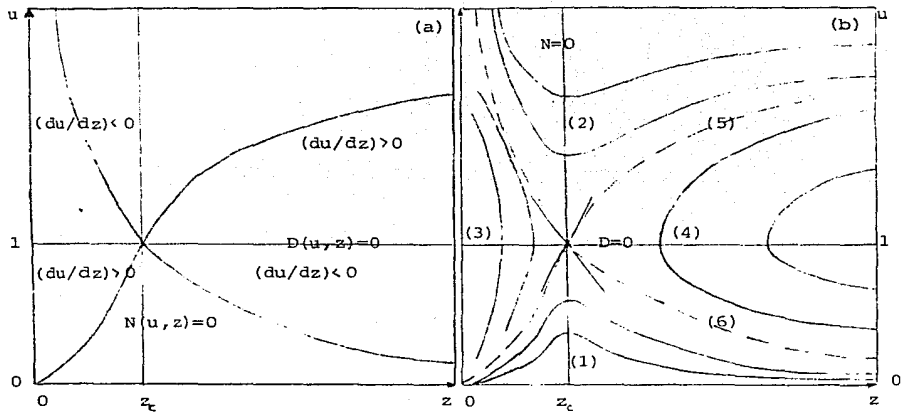


Fig. 2.1 (a) Aquí mostramos las curvas $N=0$ y $D=0$, y la forma aproximada de las soluciones críticas. Además, se muestran las regiones que tienen el mismo signo en su derivada. (b) En este caso se han graficado, con líneas continuas, las asíntotas y las otras soluciones. Las líneas a trazos son de nuevo las soluciones críticas.

solución que satisface las condiciones de frontera (aunque, como se verá más adelante, no del todo) deducidas de las observaciones es la solución transónica.

Un defecto del modelo isotérmico es que predice velocidad infinita en $r = \infty$. Esto se debe a la suposición de temperatura constante para la corona. En efecto, cercano a la base de la corona el viento se comporta casi isotérmicamente debido a la conducción tan efectiva; sin embargo, a grandes distancias la expansión, en última instancia, debe enfriar al gas. Así, si uno insiste en mantener la suposición $T = \text{cte.}$ lo que uno está haciendo es introducir una fuente de energía ficticia que mantiene la temperatura constante y en consecuencia el gas es acelerado sin límite. No obstante, el problema puede fácilmente resolverse y conducir a soluciones de viento satisfactorias si como Parker hizo, uno considera las siguientes dos suposiciones: (a) la corona es isotérmica para $r_0 \leq r \leq r_*$, y se expande adiabáticamente para $r > r_*$; o bien (b) la corona es en todo lugar politrópica con un exponente politrópico $\alpha < (3/2)$. Ambas clases de soluciones evitan que $v \rightarrow \infty$ conforme $r \rightarrow \infty$ i.e., v se acerca a un valor finito v_∞ (velocidad terminal) conforme r tiende a infinito.

El modelo isotérmico modificado, (a) o (b), describe bien el comportamiento dinámico general de un viento, pero el conocimiento de la termodinámica está fuera de nuestras posibilidades. Es necesario pues, considerar las ecs. en forma completa si deseamos tratar el flujo en forma detallada. Cuando se hace esto, de nuevo se encuentra el tipo de soluciones mostradas en la fig. 2.1(b). Condiciones para la existencia del punto crítico se dan, por ejemplo, Parker (1963). Aquí distinguiremos los dos tipos de soluciones físicamente aceptables para un viento: (1) las soluciones subsónicas (tipo (1)), llamadas brisas estelares; (2) soluciones críticas transónicas (tipo (5)), propiamente conocidas como vientos estelares. Las dos soluciones se distinguen una de la otra por el valor que toma la energía, E , en la ec. (2-23). Para las brisas $E = 0$, mientras que para los vientos $E > 0$. Como consecuencia de esto, la velocidad terminal es cero para las brisas y mayor que cero para los vientos (ya sea finita o infinita).

Por consideraciones que más tarde se van hacer claras, los investigadores usan el modelo con las siguientes variables adimensionales (Chamberlain 1961):

$$\tau = (T/T_0)$$

$$\psi \equiv \frac{\sqrt{2} \mu m_n}{k^2 T_0}$$

y

$$\lambda \equiv \frac{G M_n \mu m_n}{k T_0^2 r}$$

Con tales variables las ecs. (2-13), (2-18), y (2-25) vienen a ser, respectivamente, (después de un trabajo tedioso de algebra)

$$n \lambda^{-2} \psi^{1/2} = \frac{F (\mu m_n / k T_0)^{3/2}}{4\pi G^2 M_n^2} \equiv C, \quad (2-42)$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\tau}{\psi} \right] \frac{d\psi}{d\lambda} = 1 - 2 \left(\frac{\tau}{\lambda} \right) - \frac{d\tau}{d\lambda}, \quad (2-43)$$

y

$$A \tau^{5/2} \frac{d\tau}{d\lambda} = \xi_{\infty} - \frac{1}{2} \psi + \lambda - \frac{5}{2} \tau, \quad (2-44)$$

donde $\xi_{\infty} \equiv \frac{E}{k T_{0F}}$ es la energía residual por partícula en infinito (en unidades de kT), y

$$A \equiv \frac{4\pi G M_n \mu m_n T_0^{3/2}}{k^2 F}$$

Todavía se puede hacer otra transformación (para vientos unicamente) la cual reduce el número de constantes en la ec. de energía. Así, definiendo las nuevas variables como $\tau_* = \tau/\xi_{\infty}$, $\psi_* = \psi/\xi_{\infty}$, y $\lambda_* = \lambda/\xi_{\infty}$ el sistema de ecs. anterior toma la siguiente forma

$$n \lambda_*^{-2} \psi_*^{1/2} = \frac{F_*^{3/2} (\mu T_0 / k T_{0F})^{3/2}}{4\pi G^2 M_n^2} F = C' \quad (2-45)$$

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\tau_*}{\psi_*} \right] \frac{d\psi_*}{d\lambda_*} = 1 - 2 \frac{\tau_*}{\lambda_*} - \frac{d\tau_*}{d\lambda_*} \quad (2-46)$$

$$A' \tau_*^{5/2} \frac{d\tau_*}{d\lambda_*} = 1 - \frac{1}{2} \psi_* + \lambda_* - \frac{5}{2} \tau_* \quad (2-47)$$

donde $A' = \frac{3/2}{\xi_{\infty}} A$.

Para obtener una solución de viento del anterior sistema de ecs. uno debe pedir que la solución pase por el punto crítico y que $\tau \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$ (claro, A' debe ser conocido). En el punto crítico se satisfacen las siguientes ecs.

$$\psi_* - \tau_* = 0 \quad (2-48)$$

$$\lambda_* - \left(\frac{d\tau_*}{d\lambda_*}\right)_c - 2\tau_* = 0 \quad (2-49)$$

$$A' \tau_*^{5/2} \left(\frac{d\tau_*}{d\lambda_*}\right)_c = 1 - \frac{1}{2} \psi_* + \lambda_* - \frac{5}{2} \tau_* \quad (2-50)$$

Usando dichas ecs. uno obtiene la siguiente relación entre ψ_* y λ_* (en el punto crítico)

$$(A' \psi_*^{5/2} - 1) \lambda_* = 1 - 3\psi_* + 2A' \psi_*^{7/2} \quad (2-51)$$

El punto crítico caerá en algún lugar de la curva definida por la ec.(2-51) exactamente donde la solución satisfaga que $\tau_*(\lambda_* = 0) = 0$.

En el artículo de Durney y Roberts (1971) se dan un gran número de soluciones obtenidas de un amplio rango de valores para A' . También en ese artículo se ve, para el caso solar, la forma de recuperar una solución única dado T_* y F .

No diremos mucho acerca de las soluciones brisa, sólo mencionaremos dos pequeños comentarios que pueden ser de interés. Uno de ellos tiene que ver con las condiciones de frontera, i.e., T , v , y p tienden a 0 conforme r tiende a infinito. A diferencia del caso isotérmico, aquí si la presión se anula en infinito y por tanto tales soluciones brisa no pueden ser deshechadas por los argumentos antes mencionados. El otro, siguiendo a Roberts y Soward (1972), tiene que ver con la velocidad de la brisa respecto a la velocidad del sonido isotérmica v_T . Resulta que bajo ciertas condiciones nuestra brisa puede ser supersónica (con respecto a v_T) en todo lugar; tener un punto crítico i.e., ser subsónica para $\lambda > \lambda_c$ y supersónica para $0 < \lambda < \lambda_c$; o ser subsónica en todo sitio. Este segundo comentario viene explicado con todo detalle en el artículo de Roberts y Soward, aquí solamente trabajaremos en el caso límite $r \rightarrow \infty$. En el caso de que la conducción térmica sea despreciable (a grandes distancias de la estrella esta es una hipótesis plausible; para r cercana a r_0 los campos magnéticos pueden inhibir fuertemente la conducción), podemos suponer $A = 0$ y con ello obtener, de (2-43) y (2-44),

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \tau \frac{2\psi - \lambda}{2\psi - \lambda - \xi_\infty} \quad (2-52)$$

Para las soluciones brisa $\xi_\infty = 0$ así que, de (2-52)

Cuando uno está trabajando con $r \gg r_0$, por la anterior observación, se tiene que

$$T \simeq (G\mu M_r/k)(s/r) \quad r \rightarrow \infty, \quad (2-53)$$

donde s es una constante. Usando (2-53), la ec. de energía (2-25) y la suposición $A=0$, nosotros encontramos que

$$v^2 \simeq (GM_r/r)(2 - 5s) \quad r \rightarrow \infty. \quad (2-54)$$

Desde luego, (2-53) y (2-54), pueden tener sentido únicamente si $0 \leq s \leq \frac{2}{5}$; además también se ve de ellas que $p \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$, ya que p va como $r^{-5/2}$ (respuesta a la primera observación). Si uno juega con las dos ecs. anteriores lo siguiente es fácil de ver.

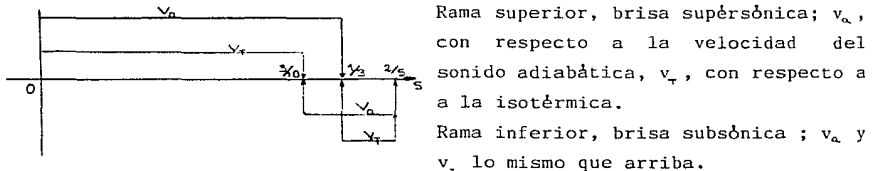


Fig. 1.2 Comportamiento de las brisas para varios valores del parámetro s , en el límite r tendiendo a infinito.

Examinemos ahora las soluciones viento. En todas ellas, conforme r se aleja v tiende a un valor finito distinto de cero, y la densidad y la temperatura se acercan a 0. Las condiciones iniciales que usualmente se toman son: (a) los valores de la densidad y temperatura en un nivel de referencia (base de la corona), (b) la solución pase por el punto crítico, y (c) la temperatura tienda a cero conforme r tienda a infinito. A diferencia de las brisas, la forma funcional de la temperatura en infinito

varia dependiendo del mecanismo de transporte de calor en $r = \infty$. Supongamos primero que el flujo de calor permanece finito en $r = \infty$, entonces de la ec. (2-25)

$$\dot{M} \left[(1/2)v_{\infty}^2 + (5/3)v_{\infty}^2 - (GM/r)_{\infty} \right] - 4\pi r^2 \kappa (dT/dr)_{\infty} = E_c = E$$

o bien

$$v_{\infty} = \left\{ 2(E - E_c(\infty)) / \dot{M} \right\}, \quad (2-56)$$

donde $E_c(\infty) \equiv -(4\pi r^2 \kappa (dT/dr))_{\infty}$. De esta última igualdad, con $\kappa \propto T^{5/2}$, se llega a que $T \propto r^{-2/5}$. También uno puede considerar que tanto el flujo conductivo como el térmico se van a cero conforme $r \rightarrow \infty$, pero que la razón $(5kT/\mu m) / (r^2 T^{5/2} dT/dr)$ tiende a una constante, en este caso

$$v_{\infty} = (2E/\dot{M})^{1/2}, \quad (2-55)$$

y $T \propto r^{-2/5}$. Finalmente, uno puede pensar que el flujo conductivo se anula más rápidamente que el térmico. De nuevo, $v_{\infty} = (2E/\dot{M})^{1/2}$; pero debido a que no hay intercambio de energía con los alrededores, el gas se expandirá adiabáticamente para $r = \infty$ y en consecuencia $T \propto r^{-2/3}$ (ya que $T \propto \rho^{\gamma-1}$ y $\rho \propto r^{-2}$, con $\gamma = 5/3$).

Si mantenemos fija la temperatura inicial T_0 , el comportamiento anterior puede verse de la manera siguiente. Para valores pequeños de n_0 , las soluciones críticas producen altos valores de $\xi_c \equiv \xi(\infty)$ y $T \propto r^{-2/3}$ para $r \rightarrow \infty$ (ley asintótica de Parker). Conforme n_0 aumenta, $\xi_c(\infty)$ disminuye hasta que se alcanza un punto n_0 tal que $\xi_c(\infty)$ se anula; aquí $T \propto r^{-2/5}$ para $r \rightarrow \infty$ (ley asintótica de Whang y Chang). Si seguimos aumentando n_0 , $\xi_c(\infty)$ sigue siendo cero, $\xi(\infty)$ disminuye aún más y T cumple con $T \propto r^{-4/3}$ para $r \rightarrow \infty$ (ley asintótica de Durney). Por último, si n_0 crece aún más se llega a un punto en el cual $\xi_c(\infty) = 0$ y una brisa estelar toma su lugar. Físicamente estos resultados nos dicen que conforme n_0 crece E disminuye (debido a que el flujo siendo más masivo consume más energía conductiva y térmica) al grado de llegar a anularse.

Para entender un poco más la fig. 1.3 creo necesario mencionar lo siguiente. Como ya dijimos, en Durney y Roberts (1971) dan soluciones variando el parámetro A' ; lo que ellos encuentran, especificando T_0 y F

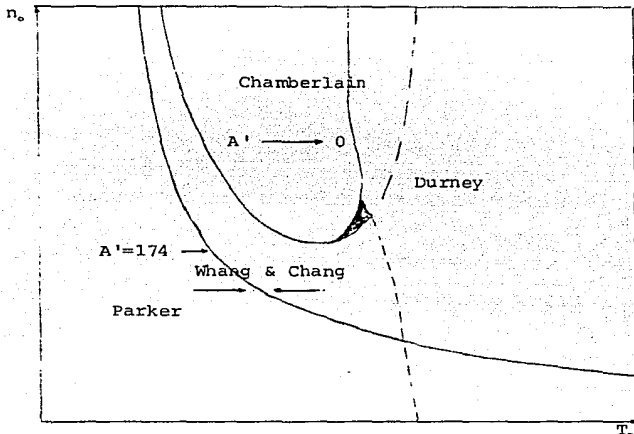


Fig. 1.3 Aquí mostramos los diferentes tipos de soluciones obtenidas de las ecs. de viento estelar (incluyendo brisas) como función de T_0 y n_0 . (T_0 está en unidades de $G\mu_e M_e / kT_0$ y n_0 en unidades de $2\kappa_0 (GM_e r_0)^{-1/2} / k$). A la derecha de la línea a trazos cortos y fuera de la curva $A' \rightarrow 0$ no podemos tener un viento estacionario que satisfaga $v_e < v_{te}$ (aunque, como se ve, en algunas regiones soluciones brisa pueden existir). El cuadro se divide en varias regiones según el comportamiento de la temperatura en infinito: (a) Parker, ubicada abajo de la curva $A' = 174$, en ella $T \propto r^{-2/3}$; (b) Durney, arriba de la anterior curva y fuera de $A' \rightarrow 0$, aquí $T \propto r^{-4/3}$; (c) Whang y Chang, una pequeña banda ubicada entre Parker y Durney y cercana a la curva $A' = 174$, aquí $T \propto r^{-2/3}$; y (d) Chamberlain, dentro de las curvas $A' \rightarrow 0$ y la de trazos largos, con $T \propto r^{-1}$. En la pequeña región oscura pueden existir tanto soluciones brisa como de viento ($A' \neq 0$).

(para el caso solar), usando sus gráficas es un punto (sobre una curva A' determinada) que identifica a la estrella. Si ahora, uno se "monta" sobre una curva A' determinada y barre con todos los puntos de la misma, lo que resulta es una curva sobre el plano $n_0 - T_0$ (ya que uno obtiene de cada punto un par de valores (n_0, T_0) los cuales definen la estrella).

2.3a COMPARACION CON LAS OBSERVACIONES , PARA EL CASO SOLAR

A diferencia de lo que se pensaba en un principio, un modelo de un viento solar quieto (un viento "libre de estructuras") con velocidad a 1 U.A. de ~ 300 km/seg y densidad de protones ~ 10 cm^{-3} (Jacques 1978 y referencias ahí contenidas), observaciones más recientes (Bame et al. 1977) han sugerido que las corrientes de alta velocidad ~ 700 km/seg (a 1 U.A.) provenientes de los hoyos coronales serían las más adecuadas para ser consideradas como el estado fundamental del viento solar. Así, si uno desea trabajar con un modelo para el viento solar, la comparación de los resultados analíticos con las observaciones deberá tomar en cuenta lo dicho antes.

En la tabla 1 se comparan los datos obtenidos de los dos tipos de corriente existente en el viento solar.

Los resultados típicos de los modelos térmicos generalmente conducen a un buen acuerdo con los datos observados en las corrientes de baja velocidad. Tomando el modelo de Whang y Chang (1965), uno encuentra $n_p = 8$ cm^{-3} , $v = 260$ km/seg, y $T = 1.6 \times 10^5$ °K a 1 U.A.. Comparando con los valores observados (ver tabla 1, segunda columna), vemos que el modelo se aproxima mucho en el caso de la densidad y la temperatura electrónica, pero difiere por un factor de cuatro respecto a T_p y cerca de un 20% en su velocidad. No obstante, por lo mencionado en el anterior párrafo, la comparación con el modelo "lento" parece que no tiene mucho significado.

El modelo de viento trabajado en este capítulo, por lo visto, no da buenos resultados con las observaciones (corrientes rápidas), ésto es seguramente debido a las grandes simplificaciones que hemos hecho; por otra parte, modelos más refinados que toman en cuenta el viento como un plasma de dos fluidos y/o efectos de viscosidad no dan mejores respuestas. Consideramos que una de las suposiciones fuertes que pueden llegar a modificar por mucho el modelo de Parker es la ausencia de campo magnético. Como se sabe, en la fotosfera solar existen regiones de campo magnético bipolares y unipolares (ejemplo de ésta última, son los hoyos coronales). La magnitud del campo magnético depende de la región, en zonas de alta actividad puede llegar a medir desde 50 (en las "plagas") hasta 4000 gauss (en las manchas); en cambio, en zonas de poca actividad (éstas abarcan la mayor parte de la superficie solar) el campo viene a ser 1 a

2 gauss. En particular, el campo magnético que interactúa en la zona de convección provocará la generación de ondas hidromagnéticas las cuales modificarán la Termodinámica y dinámica de la atmósfera.

Con lo dicho en el anterior párrafo, uno ya no se sorprende al darse cuenta que el modelo térmico del viento solar no funciona bien. Con esto uno se da cuenta que la etapa a seguir es modelar el viento solar introduciendo las ondas hidromagnéticas en las ecs. de movimiento. Debido a que son ondas de Alfvén (y no otro modo) con densidades de energía comparable a ambas, la del campo magnético no perturbado y la densidad de energía térmica, lo que se ha observado en el espacio interplanetario (ver, por ejemplo, Belcher y Davis 1971); y el hecho el cual muestra que los otros modos hidromagnéticos (incluyendo las ondas acústicas como caso límite) son fuertemente amortiguados (Barnes 1966, también ver 1977 del mismo autor), sólo es necesario considerar (para modelos dinámicos) un sistema consistente de ondas de Alfvén y una atmósfera estelar. Refinamientos más detallados acerca de los vientos estelares tendrán que tomar en cuenta siempre este efecto, si las condiciones de la estrella son tales que este hecho no puede ser soslayado.

TABLA 1
PARAMETROS MEDIOS A 1 U.A. PARA CORRIENTES DE BAJA Y ALTA RAPIDEZ

Parámetro*	Rápida	lenta
n_p (cm^{-3})	3.9 ± 0.6	8.7
v (km/seg).....	702 ± 32	300-325
T_p (10^5°K).....	2.3 ± 0.3	0.4
T_e (10^5°K).....	0.99 ± 0.08	1.5
E_T ($10^{-3} \text{ergs cm}^2/\text{seg}$).....	24 ± 5 (protones)	8 (electrones)
F_c ($10^{-3} \text{ergs cm}^2/\text{seg}$).....	2.8 ± 0.9	7
E_A ($10^{-3} \text{ergs cm}^2/\text{seg}$).....	11.6 ± 4.7	3
n_{pv} ($10^8 \text{cm}^2/\text{seg}$).....	3.3 ± 0.5	2.4
G ($\text{erg cm}^2/\text{seg}$).....	2.4 ± 0.4	0.24
E ($10^{10} \text{ergs/particula}$)....	31.6	4.35
Φ (10 (gr/seg)/sr).....	1.74	1.26
F_T (10^{26} (ergs/seg)/sr).....	5.4	0.54

* T_p y T_e representan la temperatura de los protones y electrones,

respectivamente. La cantidad F_T es la densidad de flujo entalpico de los protones para las corrientes de alta rapidez , y de los electrones para los de baja. F_C es la componente radial del flujo de calor, y E_A es la densidad de flujo de energía de las ondas de Alfvén. La cantidad $(n_p v)$ es la densidad de flujo de los protones, G la densidad de flujo de energía total , E es el promedio de energía total por partícula , Φ es el flujo de masa por unidad de ángulo sólido , y F_T es el flujo de energía total por ángulo sólido (tomado de Jacques 1973).

Como se mencionó en la introducción, existen varias razones para creer que los vientos que se observan en las estrellas T-Tauri son causados por la presión que ejercen las ondas de Alfvén sobre el medio. Para entender un poco la manera en que ocurre este fenómeno, haremos una discusión muy similar a la realizada para los vientos térmicos. En la primera sección se hablará de las ecs. de la magnetohidrodinámica (MHD). Se verá la forma en la cual éstas pueden ser deducidas de una teoría cinética de la materia, y las condiciones bajo las cuales ellas pueden ser aplicadas. En la segunda sección se mostrará como perturbando un sistema (un plasma descrito por las ecs. de la MHD) diferentes tipos de onda MHD "salen a relucir". En la tercera sección se utilizarán las ecs. de la MHD y la aproximación Eikonal para deducir un modelo de viento conducido por ondas de Alfvén no amortiguadas. Lo anterior se basará en el artículo de Belcher (1971). En la cuarta sección se discutirá brevemente las ecs. de momento y energía deducidas por Dewar (1970) para un sistema que consiste de ondas y un fluido de fondo. Se considera que los parámetros del medio varían lentamente en el espacio y en el tiempo; i.e., si h es la escala en la cual varían los parámetros físicos del sistema, debe suceder que $\lambda \ll h$ donde λ es la longitud de onda (lo mismo ocurre en el tiempo). Se verá más tarde que lo anterior no es más que la suposición que hizo Belcher (aproximación de onda plana o Eikonal) en su trabajo.

3-1 TEORIA CINETICA

3.1.a EL PLASMA COMO UN FLUIDO

En un sólido conductor el efecto de los campos electromagnéticos aplicados provocará esfuerzos en su estructura atómica. En un fluido conductor (pensemos, por ejemplo, en un plasma parcialmente ionizado) los campos actuarán sobre los electrones y los átomos ionizados produciendo efectos dinámicos, incluyendo movimiento del medio mismo. (En el sólido, efectos dinámicos tales como conducción eléctrica y efecto Hall ocurren, pero en general no se observa el movimiento de masa.) El movimiento del fluido como un todo generará corrientes eléctricas que modificarán a su vez los campos aplicados. Como se ve, el sistema a tratar será un

acoplamiento complejo entre campos y materia. El estudio del movimiento de un fluido electricamente conductor en presencia de campos electromagnéticos es conocido como Magnetohidrodinámica (MHD).

La derivación de las ecs. de la MHD hace uso de la teoría cinética de la materia. En ella se considera la función de distribución de velocidades f de cada una de las especies de las cuales está constituido nuestro plasma. No obstante, antes de empezar en esta dirección, mencionaremos que estas ecs. pueden ser obtenidas extrapolando las ecs. de la hidrodinámica. La manera de lograr esto es muy sencilla, sólo hay que añadir a las ecs. (2-11) y (2-17) (ecs. de continuidad y momento respectivamente) las ecs. de Maxwell, la ec. de la conservación de la carga

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{j} = 0, \quad (3-1)$$

y la ley de Ohm

$$\bar{j} = \sigma (\bar{E} + (\bar{v} \times \bar{B})/c), \quad (3-2)$$

donde \bar{E} y \bar{B} son los campos eléctrico y magnético, respectivamente; q y \bar{j} la densidad de carga y corriente, respectivamente; y σ la conductividad eléctrica. En la ec. de momento (2-17), se ha considerado como fuerza externa la electromagnética, \bar{f}_e ,

$$\bar{f}_e = q\bar{E} + (\bar{j} \times \bar{B})/c. \quad (3-3)$$

Tomando en cuenta una relación entre la presión y la densidad (por ejem., la politrópica) el conjunto de ecs. (2-11), (2-17), (3-1), y (3-2) estará completo.

3.1.b EL PLASMA VISTO DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA CINÉTICA

En la teoría cinética, la ec. fundamental viene a ser

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} + \frac{\bar{f}}{m} \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c. \quad (3-4)$$

Aquí, \vec{f} es la fuerza actuante sobre las partículas y $(\partial f / \partial t)_c$ es la razón de cambio de f (se ha omitido el subíndice k de la especie) en el tiempo debido a colisiones. Con $\partial f / \partial \vec{v}$ denotamos el gradiente en el espacio de la velocidad; i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \equiv \frac{\partial}{\partial v_x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial v_y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial v_z} \hat{k}$$

La deducción de las ecs. de la MHD se hará tomando como medio el caso particular de un plasma de hidrógeno totalmente ionizado.

Representando por ψ una función que sólo depende de \vec{v} , la siguiente ec. se puede deducir de (2-4) (para mayores detalles ver Boyd y Sanderson 1969)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n \langle \psi \rangle \rangle + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \langle n \langle \vec{v} \psi \rangle \rangle - \frac{n}{m} \vec{F} \cdot \langle \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \rangle - \frac{n c}{m c} \langle (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \rangle = \int \psi (\nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial t})_c d\vec{v} \quad (3-5)$$

En (3-5) $\langle \psi \rangle$ está definido como antes y F es la fuerza externa independiente de la velocidad. Para evaluar la integral del término colisional necesitamos conocer la forma funcional de $(\partial f / \partial t)_c$. En general, para cualquier modelo realista, tal término es una función, no lineal, integral, complicada de f . En lo que sigue, las suposiciones que se hagan serán satisfechas por la integral de colisión de Boltzmann (ver, por ejemplo, ec. (1-10) Boyd y Sanderson). Suponiendo que

$$\int \psi (\nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial t})_c d\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle n \langle \psi \rangle \rangle \right)_c \quad (3-6)$$

y $\vec{F} = e\vec{E}$ la ec. (3-5) toma la forma siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n \langle \psi \rangle \rangle + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \langle n \langle \vec{v} \psi \rangle \rangle - \frac{n c}{m} \vec{E} \cdot \langle \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \rangle - \frac{n c}{m c} \langle (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle n \langle \psi \rangle \rangle \right)_c \quad (3-7)$$

La ec. (3-7) es conocida como la ec. de transporte por que describe la transferencia de masa, momento, y energía cuando ψ vale 1, $m\vec{v}$, y $(1/2)m\vec{v}^2$, respectivamente. Antes de empezar a trabajar con la ec. (3-7) es adecuado hacer las siguientes definiciones. Definimos la velocidad del centro de masa como (recordar que nuestro medio consiste de un plasma de hidrógeno completamente ionizado)

$$\vec{v} = \frac{m^+ n^+ \vec{v}^+ + m^- n^- \vec{v}^-}{m^+ n^+ + m^- n^-} \quad (3-8)$$

donde los signos + o - refieren a cantidades asociadas a los protones o electrones, respectivamente; y donde v^+ y v^- están definidos como sigue

$$v^+ = \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n^+} \int \vec{v} f^+ d\vec{v} \quad \text{y} \quad v^- = \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n^-} \int \vec{v} f^- d\vec{v}.$$

Además, definimos los tensores de presión p_{ij}^k y flujo de calor q_{ijl}^k en base a la velocidad de la partícula relativa al centro de masa, $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}$,

$$p_{ij}^k = m^k n^k \langle w_i w_j \rangle \quad (3-9)$$

y

$$q_{ijl}^k = m^k n^k \langle w_i w_j w_l \rangle \quad (3-10)$$

donde $k = + \text{ o } -$.

Haciendo uso de la ec. (3-7); poniendo en ella 1 , $m\vec{v}$, $(1/2)m(v^2)^2$, uno encuentra las siguientes tres ecs.

$$\frac{\partial n^k}{\partial t} + \nabla \cdot (n^k \vec{v}^k) = \left(\frac{\partial n^k}{\partial t} \right)_c, \quad (\text{ec. de continuidad}) \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^k n^k v_i^k) + \nabla \cdot (m^k n^k \langle \vec{v} v_i \rangle) - n^k e E_i - n^k e (\vec{v}^k \times \vec{B})_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} (m^k n^k v_i^k) \right)_c$$

(i-ésima componente de la ec. de momento) (3-12)

y

$$\frac{\partial}{\partial t} (n^k \langle \frac{1}{2} m^k v^2 \rangle) + \nabla \cdot (n^k \langle \frac{1}{2} m^k v^2 \vec{v} \rangle) - n^k e \vec{E} \cdot \vec{v}^k = \left(\frac{\partial}{\partial t} (n^k \langle \frac{1}{2} m^k v^2 \rangle) \right)_c$$

(ec. de energía) (3-13)

De aquí en adelante vamos a suponer que las colisiones entre las partículas son de corto alcance; i.e., que la trayectoria libre media de la partícula es pequeña comparada con las dimensiones del elemento de volumen. Bajo tal condición, uno esperaría que la densidad de partículas por especie se conservara y en consecuencia que el término de la derecha de la ec. (3-11) se anulara. También, uno pensaría que los términos de la derecha de las ecs. (3-12) y (3-13) representarían el intercambio de momento y energía, entre los protones y los electrones, respectivamente.

Bajo las anteriores hipótesis, las ecs. (3-11) a (3-13) vienen a ser

$$\frac{\partial \rho^k}{\partial t} + \nabla \cdot (n^k v^k) = 0 \quad (3-14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^k n^k v_i^k) + \nabla \cdot (m^k n^k \langle v v_i \rangle) - n^k e E_i - \frac{n^k e}{c} (\vec{v}^k \times \vec{B})_i = \pm K_i, \quad (3-15)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} (n^k \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle) + \nabla \cdot (n^k \langle \frac{1}{2} m v^2 v \rangle) - n^k e E \cdot \vec{v}^k = \pm H \quad (3-16)$$

Aquí ,

$$K = \int m^k \nabla \cdot \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = - \int m^k \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} \right)_c d\vec{v}$$

y

$$H = \int \frac{1}{2} m^k v^2 \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = - \int \frac{1}{2} m^k v^2 \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} \right)_c d\vec{v},$$

representan la tasa de transferencia de momento y energía. Los signos + o - en las ecs. (3-15) a (3-16) representan las ecs. asociadas a los protones y electrones, respectivamente. El cambio de signo es debido a que mientras que los protones (electrones) ganan energía (momento) debido a las colisiones los electrones (protones) deben perder esa energía (momento) a la misma razón.

Ahora, si uno utiliza las definiciones de v_i^k , p_{ij}^k , y $q_{ij\lambda}^k$, se puede encontrar fácilmente que

$$\langle v_i v_j^k \rangle = (1/m^k n^k) p_{ij}^k + v_i^k v_j^k + v_j^k v_i^k - v_i^k v_j^k \quad (3-17)$$

y

$$\langle v^2 v_i^k \rangle = \frac{q_{jjj}^k + p_{jj}^k v_i + 2p_{ij}^k v_j}{m^k n^k} + 2v_j^k v_j^k + v_i^k v_j^k v_j^k - 2v_i^k v_j^k v_j^k \quad (3-18)$$

Sustituyendo (3-17) y (3-18) en (3-15) y (3-16), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (m^k n^k v_i^k) + \frac{\partial}{\partial x_j} [p_{ij}^k + m^k n^k (v_i^k v_j^k + v_j^k v_i^k - v_i^k v_j^k)] - n^k e E_i \\ - \frac{n^k e}{c} (\vec{v}^k \times \vec{B})_i = \pm K_i \end{aligned} \quad (3-19)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} P_{ii}^k + m^k n^k (\vec{v}^k \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} v^2) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} q_{ij} + \frac{1}{2} P_{ij} V_j + P_j V_i \right\} + m^k n^k (\vec{v}^k \cdot \vec{v} V_j + \frac{1}{2} V_j^k v^2 - V_j v^k) - n^k e \vec{E} \cdot \vec{v}^k = \pm H. \quad (2-20)$$

Para tener una visión general de la Física y debido a la simplificación matemática que él produce, es conveniente trabajar con el modelo de un fluido. En tal modelo, una única densidad de partículas, masa, carga, y corriente es definida como sigue:

$$\begin{aligned} n &= n^+ + n^-, \\ \rho &= m^+ n^+ + m^- n^-, \\ q &= e^+ n^+ + e^- n^-, \end{aligned}$$

y

$$\vec{j} = e^+ n^+ \vec{v}^+ + e^- n^- \vec{v}^-,$$

respectivamente. Por simplicidad y para estar de acuerdo con la notación del capítulo II definimos la velocidad del fluido \vec{v} como \bar{v} . La temperatura cinética es tal que

$$T = (p_{ii} / 3nk),$$

donde k es la constante de Boltzmann y $p_{ii} = p_{ii}^+ + p_{ii}^-$ (En general p_{ij} está definido como la suma de p_{ij}^+ y p_{ij}^- y el vector de flujo de calor q_i , como $(1/2)(q_{ij}^+ + q_{ij}^-)$). Usando las anteriores definiciones y las ecs. (3-14), (3-19), y (3-20) uno encuentra el siguiente sistema de ecs.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{ec. de continuidad}) \quad (3-21)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (\text{ec. de conservación de la carga}) \quad (3-22)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{P} - \rho \vec{E} - \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) = 0, \quad (\text{ec. de momento}) \quad (3-23)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} nkT + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} nkT + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} + \vec{q} + \mathbf{P} \cdot \vec{v} \right] - \vec{j} \cdot \vec{E} = 0.$$

$$(\text{ec. de energía}) \quad (3-24)$$

Antes de seguir, haremos un pequeño exámen de la ec. de energía. El primer término de la parte izquierda de la ec. representa la tasa de cambio de la energía interna $(3/2)nkT$ y de la energía cinética del flujo $(1/2)\rho v^2$ con el tiempo. Los términos $\nabla \cdot [(3/2)nkT + (1/2)\rho v^2] \bar{v}$ y $\nabla \cdot \bar{Q}$ representan el flujo de masa y calor, respectivamente. Por último, $\nabla \cdot (\bar{p} \cdot \bar{v})$ y $\bar{j} \cdot \bar{E}$ son la razón de trabajo que realizan las fuerzas de presión y la tasa de pérdida de energía por efecto Joule, respectivamente.

Una forma alternativa de la ec. de energía se puede obtener si usamos las ecs. (3-21), (3-23), y (3-24); i.e.,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} P_{ii} \right) + \frac{1}{2} P_{ii} \nabla \cdot \bar{v} + \bar{p} \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \bar{q} + (\bar{q} \cdot \bar{j}) \cdot (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) = 0$$

(ec. de energía interna) (3-25)

donde $\bar{p} \cdot \nabla \bar{v} \equiv P_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$.

3.1.c ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA

La transformación que hicimos para obtener (3-21) a (3-23) es incompleta por que obtuvimos una única ec. de momento (energía) de dos ecs. independientes. Así, si uno desea trabajar con el modelo de un fluido tendrá que pedir ciertas hipótesis que hagan que nuestro sistema de ecs. que describen el plasma se cierren.

Existen dos situaciones muy generales en las cuales lo anterior se cumple. Una de ellas es el llamado límite de "plasma frío"; aquí, la energía térmica es lo suficientemente pequeña como para que ambos tensores p_{ij} y q_{ij} sean despreciables. La otra situación se da en el momento en que las colisiones dominan. Las colisiones, siendo un proceso azaroso, tienden a suavizar cualquier anisotropía en la función de distribución logrando que ésta no se separe de una Maxwelliana.

De esta forma, que las colisiones dominen es un indicativo para creer que los elementos diagonales de p_{ij} y q_{ij} sean pequeños y que $p_{ii} \approx p_{xx} \approx P_i$. Aún más, debido a que fuertes campos electromagnéticos se oponen a la separación de carga uno puede suponer que

$$n^+ \approx n^- \approx (n/2) \quad \text{y} \quad \bar{v}^+ \approx \bar{v}^- \approx \bar{v} \quad (\text{esto último porque } m^+ \ll m^-). \quad (3-26)$$

Para derivar las ecs. de la MHD, de una forma más simple, lo que haremos es definitivamente despreciar q_{ij}^k y suponer p_{ij}^k isotrópico. Es decir,

$$q_{ij}^k = 0 \quad (\text{para todo } i, j, k)$$

y

$$p_{ii}^k = p_{jj}^k = p_{kk}^k = (1/3)p_{ii}^k = p^k$$

$$p_{ij}^k = 0 \quad i \neq j. \quad (3-27)$$

Sustituyendo (3-27) en (3-23) la ec. de momento se reduce a

$$\rho(d\bar{v}/dt) = -\nabla p + q\bar{E} + (1/c)(\bar{j} \times \bar{B}), \quad (3-28)$$

(ver ec. (2-17) con \bar{F} dada por (3-3)) donde $p = (p_{ii}/3)$ (por analogía con (3-27)).

De manera similar, la ec. de energía interna (3-25) viene a ser

$$(p\bar{v}^2)/t = (2/3)\bar{v}^2(\bar{j} - q\bar{v})(\bar{E} + (\bar{v} \times \bar{B})/c). \quad (3-29)$$

Tomando en cuenta las suposiciones a nuestro modelo (ver ec. (3-26)) y el hecho de tener m^+m^- , de (3-19) obtenemos

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial t} - \frac{e}{2m} \nabla p - \frac{e^2}{3m^+m^-} (\bar{E} + \frac{\bar{v} \times \bar{B}}{c}) + \frac{e}{m^+c} (\bar{j} \times \bar{B}) = \frac{e}{m^-} \bar{K}. \quad (3-30)$$

El paso final es poner \bar{K} en términos de variables del modelo de un fluido. Se supone que el intercambio de momento entre protones y electrones es proporcional a la diferencia de sus velocidades promedio; i.e.,

$$\bar{K} \propto (\bar{v}^- - \bar{v}^+) = -(m^+ \bar{j}) / \rho e.$$

La constante de proporcionalidad se obtiene al pedir que se cumpla la ley de Ohm, $\bar{j} = \tau \bar{E}$, cuando $\partial \bar{j} / \partial t$, ∇p y \bar{B} son cero. Así, (3-30) viene a ser

$$\frac{m^+m^-}{\rho e^2} \frac{\partial \bar{j}}{\partial t} = \bar{E} + \frac{\bar{v} \times \bar{B}}{c} - \frac{m^+}{\rho e c} (\bar{j} \times \bar{B}) + \frac{m^+}{2\rho e} \nabla p - \frac{\bar{j}}{e}. \quad (3-31)$$

El conjunto de ecs. para las variables ϱ , q , \bar{v} , \bar{j} , p , \bar{E} , y \bar{B} se cierra al considerar las ecs. (3-21), (3-22), (3-28), (3-29), (3-31) y las dos siguientes ecs. de Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (3-32)$$

y

$$\nabla \times \bar{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j} \quad (3-33)$$

La ec. (3-31) es conocida como la ley generalizada de Ohm.

Es directo ver, bajo un análisis dimensional, que bajo las siguientes condiciones:

(i) $(v/c) \sim (\omega L/c) \ll 1$,

(ii) $(\omega/\omega_p) \ll (v/c)$,

(iii) $(\omega\Omega_e/\omega_p^2) \ll (v/c)$,

(iv) $(\omega/\Omega_i) \ll (v/v_T)^2$;

donde L y $(1/\omega)$ son una longitud y un tiempo característico sobre el cual los campos cambian apreciablemente, c la velocidad de la luz, $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}}$ la frecuencia del plasma, $\Omega_e = (e^-B/m^-c)$ y $\Omega_i = (e^+B/m^+c)$ denotan las frecuencias ciclotrónicas de los electrones y los iones, respectivamente; las ecs. de la MHD se ven así

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \bar{v}) = 0, \quad (\text{ec. de continuidad}) \quad (3-34)$$

$$\varrho \frac{d\bar{v}}{dt} + \nabla p - \frac{1}{c} (\bar{j} \times \bar{B}) = 0, \quad (\text{ec. de momento}) \quad (3-35)$$

$$\frac{d}{dt} (p \varrho^{-5/3}) = \frac{2}{3} \frac{p}{\varrho}^{-5/3} \bar{j}^2, \quad (\text{ec. de energía}) \quad (3-36)$$

$$\bar{j} = \sigma \left(\bar{E} + \frac{\bar{v} \times \bar{B}}{c} \right), \quad (\text{ley de Ohm}) \quad (3-37)$$

y

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-38)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{ecs. de maxwell}) \quad (3-39)$$

Para un plasma perfectamente conductor, \vec{E} puede ser eliminado como variable independiente ; las ecs. resultantes dan lugar a las ecs. de la MHD ideal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3-40)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p - \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) = 0, \quad (3-41)$$

$$\rho \rho^{-5/3} = \text{cte.}, \quad (3-42)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3-43)$$

y

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3-44)$$

En general , los modelos de viento que se van a trabajar suponen un plasma en estado estacionario. Cuando se considera esta condición automaticamente se cumplen (ii) , (iii) , y (iv) ; esto es así por que $(1/\omega)$ tiende a infinito (los parametros del plasma cambian muy lentamente con el tiempo , en particular los campos electromagnéticos). Además , como los vientos estelares siempre alcanzan velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz , es claro que (i) se cumple. Por otra parte si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\lambda \ll h \quad \tau_c \ll \tau ;$$

donde λ y τ_c denotan el recorrido libre medio y el tiempo promedio de colisión entre las partículas , respectivamente , y h y τ una distancia y un tiempo típico sobre el cual los parámetros del plasma varían ; podemos suponer que nuestro plasma está "dominado" por colisiones . Lo dicho antes representa un criterio para la validez de la descripción

usando las ecs. de la MHD.

3-2 CAMPOS MAGNETICOS EMBEBIDOS EN FLUIDOS CONDUCTORES

3.2.a CONGELAMIENTO Y DIFUSION DE CAMPOS MAGNETICOS

La conducta de un fluido en presencia de campos electromagnéticos depende en gran medida de la conductividad de éste. Los efectos pueden ser tanto electromagnéticos como mecánicos. En primera instancia, hablaremos de los efectos electromagnéticos. Usando (3-37) y (3-39) para despejar \bar{E} en términos de \bar{v} y \bar{B} , y sustituyendo la expresión obtenida en (3-38), obtenemos

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \bar{B} . \quad (3-45)$$

Para obtener (3-45) σ se ha supuesto constante. Para un fluido en reposo $\bar{v} = 0$ y (3-45) se reduce a la ec. de difusión

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \bar{B} \quad (3-46)$$

La ec. de difusión para el campo magnético nos dice que cualquier configuración de éste cambiará en un tiempo de difusión

$$\tau_d = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \quad (3-47)$$

donde L es una longitud característica en la cual \bar{B} varía apreciablemente. El tiempo τ_d es del orden de 1 seg, 10^4 y 10^{10} años, para una esfera de cobre de 1 cm de radio, para el núcleo fundido de la tierra y para el campo magnético típico del Sol, respectivamente.

Para tiempos cortos comparados con τ_d , o en su caso σ tomando valores tan altos que el segundo término de la derecha de la ec. (3-45) puede ser despreciado, la conducta del plasma se rige por la ec.

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) . \quad (3-48)$$

De (3-48) uno puede mostrar lo siguiente: (a) el flujo magnético a través de cualquier superficie moviéndose con el fluido permanece constante

y (b) si dos partículas de fluido están inicialmente en la misma línea de fuerza permanecerán en ella por todo el tiempo (ver ,por ejemplo, Mestel y Weiss 1974). De (b) , uno concluye que las líneas de fuerza magnéticas están "atrapadas" por el fluido y se mueven con él.

Un parámetro útil que mide la magnitud relativa de los dos miembros de la derecha de la ec. (3-45) es el llamado número de Reynolds Magnético

$$R_m = (V \tau_0 / L) , \quad (3-49)$$

donde V representa una velocidad típica del problema. El transporte de líneas de fuerza dominará sobre la difusión si $R_m \gg 1$. Para casos de interés astrofísico , en general , R_m va resultar grande comparado con

Una consecuencia del "congelamiento" de las líneas de fuerza es la producción de una componente toroidal de un campo dipolar en presencia de una rotación diferencial (Imagine, por ejemplo, una estrella, que posee un campo dipolar, rotando y con una conductividad eléctrica muy alta ver fig. 2.2 .). Esto se puede ver como sigue. Supongamos, en el medio, un tubo de flujo de sección recta A y longitud l . Por la conservación del flujo magnético y de masa , $B_A = \text{cte.}$ y $lA = \text{cte.}$, respectivamente; de lo anterior $B \propto 1/l$. La componente normal a \vec{B} de \vec{v} provocará un aumento en l y en consecuencia una disminución en A (para ρ constante); produciendo esto último un aumento en \vec{B} .

3.2.b ONDAS MAGNETOHIDRODINAMICAS

Para examinar el movimiento ondulatorio de un fluido conductor en presencia de un campo magnético , pediremos que nuestro fluido sea compresible , no viscoso , infinitamente conductor , y libre de fuerzas gravitacionales. Las ecs. que lo gobernarán serán las de la MHD ideal:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (3-50)$$

EJE DE ROTACION

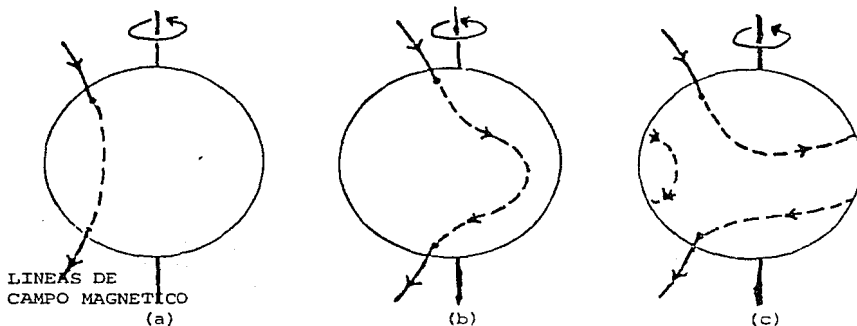


Fig. 2.2 Producción de un campo toroidal a partir de un campo dipolar.

En la figura hemos supuesto que la velocidad angular aumenta hacia el centro de la estrella. El campo dipolar penetra en el interior de la estrella (línea a trazos (a)). Las partes más internas del campo magnético "rotan" más rápido que las externas provocando con ello un torcedura en el campo magnético en la dirección de la rotación (b). Después de varias vueltas el campo magnético ya se ha "enroscado" y se ha producido con ello componentes toroidales que apuntan en dirección opuesta (según el hemisferio) (c) (Calvet 1986).

donde se ha despejado \vec{j} de (3-44) y sustituido en (3-41). La ec. adiabática no es necesaria para obtener los resultados deseados.

Supongamos que nuestro medio es homogéneo e isotrópico. Pensemos que se encuentra atravesado por un campo magnético, \vec{E}_0 , constante. Los valores de los parámetros en equilibrio son ρ_0 , $\vec{v}_0=0$, y \vec{E}_0 . Ahora, imaginemos que introducimos en el sistema pequeñas perturbaciones $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$, y $\delta\vec{E}$; las variables que satisfacen (3-50) serán

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 + \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) &= \rho_0 + \delta\rho(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= \delta\vec{v}(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

Sustituyendo las ec. de (3-51) en (3-50) , a primer orden , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\delta \vec{v}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + v_s^2 \nabla \delta \rho + \frac{\vec{E}_0}{4\pi} \times (\nabla \times \delta \vec{E}) &= 0 \\ \frac{\partial \delta \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{E}_0) &= 0 . \end{aligned} \quad (3-52)$$

Combinando las ecs. de (3-52) para obtener una ec. para $\delta \vec{v}$ se llega a

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{v}}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla (\nabla \cdot \delta \vec{v}) + \vec{v}_A \times \nabla \times [\nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{v}_A)] = 0 , \quad (3-53)$$

donde $v_A = (B_0 / \sqrt{4\pi \rho_0})$ denota la velocidad de Alfvén.

La ec. (3-53) representa una ec. de onda relativamente compleja. Para analizar el tipo de ondas que se deducen de ella supondremos a $\delta \vec{v}(\vec{r}, t)$ como una onda plana con vector de onda \vec{k} y frecuencia ω ; i.e.,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \delta \vec{v} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) . \quad (3-54)$$

Sustituyendo (3-54) en (3-53) obtenemos , después de un poco de algebra , la relación de dispersión

$$-\omega^2 \delta \vec{v} + (v_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}) + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) [(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \delta \vec{v} - (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}) - (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}) \vec{v}_A] = 0 . \quad (3-55)$$

La ec. (3-55) da tres tipos de perturbación en el medio, veamos. Consideremos primero el producto escalar de (3-55) con $\vec{k} \times \vec{v}_A$:

$$\omega^2 \delta \vec{v} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}_A) = (v_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}) \vec{k} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}_A) + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) [(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \delta \vec{v} - (\vec{v}_A \cdot \delta \vec{v}) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}) \vec{v}_A] \cdot (\vec{k} \times \vec{v}_A)$$

o

$$\omega^2 \delta \vec{v} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}_A) = (\vec{v}_A \cdot \vec{k})^2 \delta \vec{v} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}_A)$$

o

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta , \quad (3-56)$$

donde θ es el ángulo que hace el vector de onda (desde luego , \vec{k} indica la dirección de propagación de la onda) con \vec{E}_0 . La ec. (3-56) describe ondas transversales, torsionales , cuya velocidad de fase y grupo son $v_\phi = v_A \cos\theta$ y $v_g = \bar{v}_A$, respectivamente. Este modo corresponde a las comunmente llamadas ondas de Alfvén (ver fig. 2.1 (a) , con $\theta=0$).

Para encontrar los otros dos modos , formemos el producto escalar de (3-55) con \vec{k} y \vec{v} y eliminemos $\delta\vec{v} \cdot \vec{v}_A$

$$\begin{aligned} \omega^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{k}) &= (v_S^2 + v_A^2) (\vec{k} \delta\vec{v}) k^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) [(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\delta\vec{v} \cdot \vec{k}) - (\vec{v}_A \delta\vec{v}) k^2] \\ &\quad - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\vec{k} \cdot \vec{v}) (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \quad (\text{producto con } \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{v}_A) &= (v_S^2 + v_A^2) (\vec{k} \delta\vec{v}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\delta\vec{v} \cdot \vec{v}_A) \\ &\quad - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) [(\vec{v}_A \delta\vec{v}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) + (\vec{k} \delta\vec{v}) v_A^2] \quad (\text{producto con } \vec{v}_A) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \omega^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{k}) &= (v_S^2 + v_A^2) k^2 (\vec{k} \delta\vec{v}) - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\vec{v}_A \delta\vec{v}) k^2 \\ \omega^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{v}_A) &= (v_S^2 + v_A^2) (\vec{k} \delta\vec{v}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\vec{k} \delta\vec{v}) v_A^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{k}) \\ \omega^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{v}_A) \end{aligned}} \right\} (3-57)$$

Multiplicando por la ec. de arriba de (3-57) por ω^2 y sustituyendo por la dada abajo obtenemos , después de resolver la ec. de segundo grado en $\frac{\omega^2}{k^2}$,

$$(\omega^2)^2 (\delta\vec{v} \cdot \vec{k}) = (v_S^2 + v_A^2) k^2 (\vec{k} \delta\vec{v}) \omega^2 - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) k^2 [(v_S^2 + v_A^2) (\vec{k} \delta\vec{v}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) - (\vec{v}_A \delta\vec{v}) (\vec{k} \cdot \vec{v}_A) v_A^2]$$

o

$$\omega^4 - k^2 (v_S^2 + v_A^2) \omega^2 + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) k^2 v_S^2 = 0$$

o

$$(v_\phi^2)^2 - (v_S^2 + v_A^2) v_\phi^2 + v_A^2 v_S^2 \cos^2 \theta = 0$$

$$v_\phi^2 = \frac{1}{2} [(v_S^2 + v_A^2) \pm [(v_S^2 + v_A^2)^2 - 4v_S^2 v_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2}] \quad (3-58)$$

Los signos + , - están asociados a los modos magnetosónicos rápidos y lentos, respectivamente. Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, sólo existe el modo rápido con velocidad de fase $v_{\pm} = \sqrt{v_s^2 + v_A^2}$. En caso de que θ valga cero, el modo rápido converge a las ondas sónicas y lento al modo Alfvénico. Para valores intermedios de θ las ondas no son ni longitudinales ni transversales (ver fig. 2.1 (b), con $\theta = \frac{\pi}{4}$).

Las ondas de Alfvén se caracterizan por ser transversales, esto es, siempre se propagan perpendicular a la dirección de la perturbación $\vec{k} \cdot \delta \vec{v} = 0$. Esto es fácil de ver utilizando (3-55). Sustituyendo (3-56) en (3-55) obtenemos

$$-(\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 \delta \vec{v} + (v_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \delta \vec{v}) \vec{k} + (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) [(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \delta \vec{v} - (\vec{v}_A \delta \vec{v}) \vec{k} - (\vec{k} \delta \vec{v}) \vec{v}_A] = 0.$$

o bien, si multiplicamos la expresión anterior por $\delta \vec{v}$

$$(v_s^2 + v_A^2) (\vec{k} \cdot \delta \vec{v}) = 0.$$

También es fácil ver que para cualquier θ las ondas de Alfvén satisfacen $\delta \vec{v} \cdot \vec{v}_A = 0$, y que la onda magnetosónica ($\theta = \frac{\pi}{2}$) es un modo longitudinal, $\delta \vec{v} \parallel \vec{k}$.

Los campos magnéticos de las ondas pueden ser encontrados usando la tercera ec. de (3-52)

$$\delta \vec{B} = \begin{cases} - (k/\omega) B_0 \delta \vec{v} & \text{Alfvén} & \vec{k} \parallel \vec{B}_0 \\ 0 & \text{sónica} & \vec{k} \parallel \vec{B}_0 \quad (3-59) \\ - (k/\omega) \delta v \vec{B}_0 & \text{magnetosónica} & \vec{k} \perp \vec{B}_0 \end{cases}$$

En el caso de que $v_s \ll v_A$ (de nuestro interés) la velocidad de fase del modo rápido no dependerá realmente de θ y su velocidad de grupo será

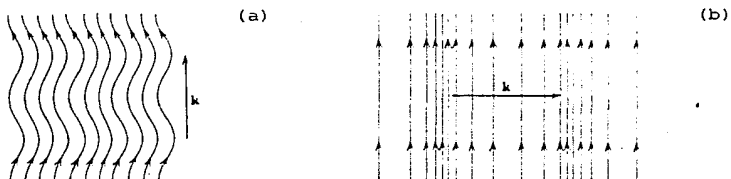


Fig. 2.3 (a) Las ondas de Alfvén paralelas a B provocan que las líneas de fuerza oscilen lateralmente hacia atrás y hacia adelante (muy semejante a lo que sucede con una cuerda). (b) Las ondas magnetosónicas moviéndose perpendicular a B provocan compresiones y rarefacciones en las líneas de fuerza sin que éstas cambien su dirección. En ambos casos las líneas de fuerza se encuentran "congeladas" en el medio y se mueven con el fluido (Jackson 1962).

siempre v_A . Para el modo lento, $v_+ \sim v_s \cos \theta$ y $v_- \sim v_s$. Bajo estas condiciones, la energía transmitida por las ondas rápidas será isotrópica mientras que por los otros modos (Alfvén y lento) se transmitirá a lo largo de las líneas de campo.

3-3 VIENTOS ESTELARES GENERADOS POR ONDAS DE ALFVÉN (TRATAMIENTO PERTURBATIVO)

Las ondas de Alfvén forman parte de un amplio espectro de modos perturbativos de un plasma. Los efectos esencialmente separados que se producen al interaccionar éstos disturbios con una atmósfera estelar son: (a) la transferencia de momento de las ondas al gas, el cual provoca una aceleración del medio, y (b) el calentamiento del gas, producto de la disipación de energía de las ondas (por amortiguamiento).

En esta sección, resolveremos el caso de una atmósfera estelar (descrita por las ecs. de la MHD ideal) interactuando con ondas de Alfvén no amortiguadas, usando un método perturbativo y la aproximación Eikonal. Se mostrará como, bajo ciertas condiciones, la influencia de las ondas de Alfvén sobre la dinámica del medio puede llegar a generar un viento. Se verá que la forma de interacción de las ondas sobre la atmósfera está descrita mediante un término de presión, semejante a la presión de radiación para el caso de un viento radiativo, en la ec. de movimiento.

3.3.a TEORIA

En presencia de un campo gravitacional, las ecs. de la MHD ideal toman la siguiente forma (ver ecs. (3-40), (3-41), (3-43), y (3-44))

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3-60)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) + \nabla p + \nabla \left(\frac{\rho^2}{2\pi} \right) - \frac{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}}{4\pi} + \rho \nabla \phi = 0, \quad (3-61)$$

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^{\kappa}, \quad (3-62)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0, \quad (3-63)$$

y

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3-64)$$

Hemos supuesto, como sustituto a la ec. de energía, una relación politrópica entre la presión y la densidad. El potencial gravitacional es desde luego, $\phi = -(GM_*/r)$.

Por simplicidad, supondremos que las ondas de Alfvén están polarizadas linealmente con su vector de propagación apuntando en la dirección de cambio del ángulo azimutal, $\hat{\phi}$. Cada cantidad será escrita como una suma de una parte fluctuante δf más una parte promediada, f ; i.e.,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v(r)\hat{r} + \delta v(\vec{r}, t)\hat{\phi} \quad \text{y} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = B(r)\hat{r} + \delta B(r, t)\hat{\phi}, \quad (3-65)$$

con $\delta \rho = \delta p = 0$. Como en el caso de un viento térmico, aquí también suponemos un modelo en estado estacionario y con simetría radial.

Sustituyendo (3-65) en (3-61) obtenemos: (i) para la componente radial

$$v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\delta v^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2\pi \rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta B)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (3-66)$$

(ii) para la componente azimutal

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta v) - \frac{B}{4\pi \rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta B) = 0, \quad (3-67)$$

y

(iii) para la componente polar

$$\left(\delta v^2 - \frac{\delta B^2}{4\pi\epsilon} \right) \frac{\cot\theta}{r} = 0, \quad (3-68)$$

Por otra parte, de las ecs. (3-60) y (3-64) tenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \delta v) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \delta B) = 0. \quad (3-69)$$

Además, la componente azimutal de (3-63) (las otras dos son cero) junto con la ec. (3-69) da

$$\frac{\partial \delta B}{\partial t} = \left(B \frac{\partial \delta v}{\partial r} - v \frac{\partial \delta B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} (v \delta B - B \delta v) + \frac{v \delta B}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (3-70)$$

Lo que resta por hacer es encontrar δB . Para obtener tal resultado usaremos la aproximación de onda plana. Supongamos que δv y δB se pueden expresar como

$$\delta v(r, t) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \delta v_i(r) \right] \exp[i(S(r) - \omega t)]$$

y

$$\delta B(r, t) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \delta B_i(r) \right] \exp[i(S(r) - \omega t)] \quad (3-71)$$

Aquí; $\mu = \frac{(2\pi/k) \lambda}{h}$, con h un parámetro de escala; y $k = \frac{\partial S}{\partial r}$, denota la magnitud del vector de onda. Se considera también que h representa un parámetro de escala para las cantidades δv_i , δB_i ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Insertando (3-71) en las ecs. (3-67) y (3-70) y manteniendo términos a primer orden en μ obtenemos

$$[(ikv - i\omega) \delta v_0 - (ikB/4\pi\epsilon) \delta B_0] = - [(ikv - i\omega) \delta v_1 - (ikB/4\pi\epsilon) \delta B_1] \mu$$

$$[(B/4\pi\epsilon r) \delta B_0 - (v/r) \delta v_0] + [(B/4\pi\epsilon) \frac{\partial \delta B_0}{\partial r} - v \frac{\partial \delta v_0}{\partial r}] \quad (3-72)$$

y

$$\begin{aligned}
 [(ikv - i\omega)\delta B_0 - ikB\delta v_1] = - [(ikv - i\omega)\delta B_1 - ikB\delta v_1]\mu + \frac{1}{r}(v\delta B_0 - B\delta v_0) \\
 + [B\frac{\partial}{\partial r}\delta v_0 - v\frac{\partial}{\partial r}\delta B_0] + \frac{v\delta B_0}{S}\frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad (3-73)
 \end{aligned}$$

donde hemos considerado que $r \geq h$ y usado que $\mu \ll 1$.

Tomando en cuenta las anteriores ecs. a orden cero obtenemos

$$\omega = k(v \pm v_A) \quad \text{y} \quad \delta v_0 = \delta B_0 / (4\pi\sigma)^{1/2} .$$

El signo + (-) indica ondas propagándose hacia afuera (dentro) de la estrella. Teniendo en mente éstos resultados las ecs. (3-72) y (3-73) se modifican a

$$\mu [ikv_A\delta v_1 + ikv_A^2\delta B_1/B] + \frac{1}{r}[v_A^2/B + v v_A/B] + [\frac{v_A^2}{B}\frac{\partial}{\partial r}\delta B_0 + v\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v_A\delta B_0}{B})] = 0 , \quad (3-74)$$

y

$$\mu [ikv_A\delta B_1 + ikB\delta v_1] + [\frac{1}{r}(v + v_A) + \frac{v}{S}\frac{\partial}{\partial r}]\delta B_0 - [B\frac{\partial}{\partial r}(\frac{v_A\delta B_0}{B}) + v\frac{\partial}{\partial r}\delta B_0] = 0 , \quad (3-75)$$

Las perturbaciones δv_1 y δB_1 se eliminan de (3-74) y (3-75) al multiplicar (3-74) por (B/v_A) y luego restarle (3-75). Haciendo ésto , lo que obtenemos es

$$\frac{\partial}{\partial r}(\ln \delta B) = \frac{1}{4}[\frac{\partial}{\partial r}(\ln \sigma)](\frac{2v + v_A}{v + v_A}) . \quad (3-76)$$

donde hemos identificado δB_0 como δB , la amplitud de la onda a orden cero. Integrando (3-76)

$$\delta B(r) = \delta B_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/4} \left[\frac{1 + (v_{A0}/v_0)}{1 + (v_{A0}/v_0)(\sigma/\sigma_0)^{1/2}} \right] \quad (3-77)$$

donde se ha usado que el número de Mach Alfvénico es

$$M_A \equiv (v/v_A) = (v_0/v_{A0})(\sigma/\sigma_0)^{1/2} .$$

En la ec. (3-77), las cantidades con subíndice cero son evaluaciones de las mismas en $r=r_0$.

3.3.b LA ECUACION DE BERNOULLI GENERALIZADA

Tomando en cuenta la ec. (3-77) y la relación $(\delta v)^2 = (\delta B)^2 / 4\pi\rho$, la ec. (3-66) viene a ser

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\delta B^2}{r} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(1 + \frac{(v_{\infty}/v_0)^2}{(v_{\infty}/v_0)(\rho/\rho_0)^{\frac{\alpha}{\gamma}}} \right)^2 \right\} = 0. \quad (3-78)$$

Integrando la ec. (3-78), tomando en cuenta la relación politrópica entre p y ρ y la forma funcional de ϕ con r , se obtiene el flujo de energía total como una constante

$$4\pi\rho v r^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM_*}{r} \right] + \frac{1}{4} \delta v^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta B^2}{4\pi\rho} (1 + M_a) \right\} = E$$

o bien

$$\left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM_*}{r} \right] + \frac{1}{4} \delta v^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta B^2}{4\pi\rho} (v + v_a) = (E/M) \quad (3-79)$$

Aquí, el término entre corchetes representa la contribución al flujo de energía debido a la energía cinética del movimiento radial, a la entalpia y conductividad térmica del gas (Jacques 1978), y a la energía gravitacional. Los otros dos términos se deben únicamente a la presencia de las ondas. El segundo, es la energía cinética de la onda convertida en movimiento de fluido (la componente no radial), y el tercero es la componente radial del vector de Poynting. Conforme las ondas se propagan, la pérdida de energía de ellas se emplea en incrementar el movimiento del gas (recordemos que supusimos que las ondas no se amortiguan).

Definiendo $\epsilon = (\delta B)^2 / 8\pi$, la densidad de energía de las ondas, y utilizando que $(1/\rho)(d\rho/dr) = -(2/r) + (1/v)(dv/dr)$, la ec. (3-78) toma la forma siguiente

$$v \frac{dv}{dr} + \alpha v^2 \left(-\frac{2}{r} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) + \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{2\rho} \frac{d\epsilon}{dr} = 0, \quad (3-80)$$

donde se usó que $(dp/dr) = (\alpha p/\rho)(d\rho/dr) = \alpha v^2 (d\rho/dr)$. (3-81)

En (3-81) la velocidad del sonido está dada por $(\partial p/\partial \rho) = \alpha p/\rho$. Con $v_T^2 = p/\rho$ hemos representado la velocidad térmica del gas. Para el caso isotérmico ésta viene a ser efectivamente la velocidad del sonido.

Usando (3-76) es fácil ver que

$$-\frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{dr} = -\frac{\epsilon}{v_T} \frac{dv}{dr} \left(\frac{1 + \frac{3M_A}{M_*}}{1 + \frac{3M_A}{M_*}} \right) = \frac{2}{v} \left(\frac{1 + \frac{3M_A}{M_*}}{1 + \frac{3M_A}{M_*}} \right) \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right). \quad (3-82)$$

A partir de esta expresión para $(1/2)(d\epsilon/dr)$ la ec. (3-80) puede ser puesta como

$$\left[v^2 - \alpha v_T^2 - \frac{\epsilon}{v_T} \left(\frac{1 + \frac{3M_A}{M_*}}{1 + \frac{3M_A}{M_*}} \right) \right] \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} \left[\alpha v_T^2 - \frac{v^2}{4} + \frac{\epsilon}{v_T} \left(\frac{1 + \frac{3M_A}{M_*}}{1 + \frac{3M_A}{M_*}} \right) \right]. \quad (3-83)$$

Notamos como, en caso de ausencia de ondas de Alfvén, la ec. (3-83) se reduce a la ec. (2-36) con $\alpha=1$. Un análisis similar al hecho para el viento térmico se puede realizar con la ec (3-83). A diferencia con aquel caso; aquí, el punto crítico debe ser obtenido por la resolución de un sistema de ecs. trascendentales provenientes del hecho de exigir que la ec. de energía (3-79) se satisfaga en el punto crítico y que $D(u_c, z_c) = N(u_c, z_c) = 0$; donde

$$N(u, z) = \alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{v_{\infty}}{v_T} \right)^2 \frac{1}{z} + \frac{\epsilon}{v_T v_T^2} \left(\frac{1 + \frac{3M_A}{M_*}}{1 + \frac{3M_A}{M_*}} \right)$$

y

$$D(u, z) = u^2 - \frac{\epsilon}{v_T v_T^2} \left(\frac{1 + \frac{3M_A}{M_*}}{1 + \frac{3M_A}{M_*}} \right) - \alpha, \quad (3-84)$$

con u y z definidos como antes, $u = (v/v_T)$ y $z = (r/r_0)$.

Debemos notar que la obtención del punto crítico requiere que se especifiquen las condiciones iniciales; por lo regular éstas son los valores de n , T , B , y ρ en $r=r_0$ (r tomado generalmente como el radio de la estrella) con R_* y M_* fijos. Además, en este caso, es necesario dar el valor del exponente politrópico, α . De este modo, habiendo obtenido el punto crítico (junto con el valor de u_c), la solución de viento es encontrada resolviendo la ec. de Bernoulli (3-79). Los detalles los dejamos para el próximo capítulo, en donde mostramos resultados numéricos.

En este modelo, uno puede encontrar la velocidad terminal analíticamente. Para eso escribimos la ec. de energía en la siguiente forma

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{P}{\rho} + \phi + f_w = \text{cte.}, \quad (3-85)$$

donde $f_{\omega} \equiv 2\eta v_{Ac}^2 (v_{Ac}/v_o) \{1 + (v_o/v_{Ac})\}^2 \frac{1 + 3\eta v_o^2}{(1 + \eta v_o^2)^2}$, con $\eta = (\delta B_o/B_o)^2$.
 De esta manera, evaluando (3-85) en r_o y en infinito y despejando v_{∞} obtenemos

$$v_{\infty}^2 = [v_o^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} v_{T0}^2 - v_{e0}^2] + f_{\omega o} \quad (3-86)$$

donde se utilizó que $v_{T\infty} = f_{\omega\infty} = 0$.

La ec (3-86) nos muestra que en $r \rightarrow \infty$ toda la energía de las ondas fue transferida al movimiento dirigido del fluido.

Belcher (1971) aplicó éste modelo para el caso del viento solar obteniendo resultados muy interesantes. Los valores iniciales que consideró fueron los siguientes: $r_o = 10^6$ Km, $B_o = 1$ gauss, $n_o = 2 \times 10^7$ (1/cm³) y $\alpha = 1.2283$. Con tales datos lo que resta por tener son T_o o H y ϵ o η , donde $H \approx GM_o v_o^2 / r_o p_o$. Pensando en un gas de hidrógeno totalmente ionizado p viene a ser $2nkT$. Usando los datos dados arriba obtenemos que

$$H = 8.07 \times 10^6 / T_o$$

Usando la relación politrópica entre la presión y la densidad para el modelo de un viento térmico se puede mostrar que H debe estar entre 2α y $\alpha/(\alpha - 1)$. El límite inferior representa el punto en el cual abajo de él, el campo gravitacional es tan débil que no puede simular la garganta de una tobera de Laval la cual permite al flujo pasar de un régimen subsónico a uno supersónico. De esta forma, si $H < 2\alpha$ la corona estalla hacia el espacio exterior y una expansión en estado estacionario puede lograrse solamente si el gas ya es supersónico en r_o . Esto puede verse de la siguiente ec., que se deduce del modelo de viento térmico en el cual $p \propto \rho^\alpha$

$$(1/2)v_o^2 - (1/2)v_{e0}^2 + (\alpha/(\alpha - 1))v_{\infty}^2 = ((5 - 3\alpha)/2(\alpha - 1))v_e^2 \quad (3-87)$$

El límite superior H es el punto en el cual arriba de él, la gravedad es tan fuerte que impide la expansión. Así, si $H > (\alpha/(\alpha - 1))$ existe equilibrio hidrostático (ver ec. (2-33)). Con los datos ya dados, este límite es $T_o = 1.5 \times 10^6$ °K.

Entre los resultados que creemos más importantes de este modelo se pueden citar los dos siguientes: (1) conforme η aumenta el punto crítico

se acerca más al Sol y la velocidad inicial crece (y en consecuencia \dot{M}_\odot), y (2) aún si el flujo inicial de la onda fuera infinitesimal, sería suficiente para acelerar masas igualmente infinitesimales a la velocidad de escape. El punto importante en (2) radica en que para valores moderados de η se alcanzan modelos razonables de viento aún si $T_0 < T_0^c$. De hecho, éste será el punto de partida para la aplicación del modelo a otro tipo de estrellas (T-Tauri, gigantes y supergigantes rojas, etc.).

3-4 INTERACCION ENTRE ONDAS MHD Y UN MEDIO INHOMOGENEO, DEPENDIENTE DEL TIEMPO

El título de esta sección tiene el propósito de hacer énfasis en la importancia del trabajo de Dewar (1970). Lo que se muestra en esta sección es la aplicación de las ecs. deducidas por Dewar en su artículo para el caso de una atmósfera estelar. Gran parte de lo que viene a continuación hace uso del artículo de Jacques (1977).

Si nosotros consideramos la atmósfera estelar constituida de ondas y un fluido de fondo (tanto el fluido como las ondas variando lentamente en el espacio y en el tiempo), el estado del fluido no puede ser conocido a priori independiente de las ondas. Las ondas y el medio, en el cual se propagan, interactúan de una forma acoplada; así, las ecs. que describan el sistema deberán resolverse simultáneamente. Es por esta razón que para incorporar ondas y flujos (fluido en movimiento) en modelos dinámicos de atmósferas estelares necesitamos una teoría de ondas en medios inhomogéneos y dependientes del tiempo (Dewar 1970).

Aunque ya lo mencionamos, debemos de nuevo hacer notar que el efecto de las ondas sobre el gas atmosférico se da de dos formas independientes: (1) hay calentamiento de la atmósfera por la disipación de energía de las ondas, y (2) se transfiere momento de las ondas al gas, producto del esfuerzo ejercido por ellas hacia éste. De esta manera, como vimos en la sección pasada, la disminución de energía de las ondas resulta de la transferencia de energía (térmica, por calentamiento, y cinética, por aceleración) al viento estelar. Ambos, calentamiento y presión por la onda, son sin lugar a dudas efectos importantes en la atmósfera (desde luego, siempre y cuando no haya otros fenómenos que hagan despreciables estos efectos).

3.4.a EL TENSOR DE ESFUERZO DE LA ONDA Y LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA EL FLUJO PROMEDIO

Volvemos a recalcar que tratar un sistema consistente de ondas y un fluido, ambos dependientes de \bar{r} y t , es un problema que necesita la resolución de un sistema acoplado de ecs. Las ondas modifican la dinámica del fluido, invalidando la ec. (3-61), y el medio a su vez cambia las características de las ondas. El tratamiento realizado por Dewar* en dicho sistema nos muestra las ecs. adecuadas de movimiento, a primer orden.

La ec. de momento para el flujo promedio es

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + \nabla P + \nabla \left(\frac{\bar{B}^2}{8\pi} \right) - \frac{(\bar{B} \cdot \nabla) \bar{B}}{4\pi} + \rho \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbb{P}_w = 0 \quad (3-88)$$

En la ec. (3-88) la única cantidad nueva es \mathbb{P}_w , él representa el término de interacción entre las ondas y el medio. En la literatura se le conoce con el nombre de tensor de esfuerzo (o de presión) de la onda. El tensor asume la siguiente forma (Dewar 1970)

$$\mathbb{P}_w = \epsilon \left\{ \hat{k} \hat{k} + \frac{1}{2} \left[(\mathbb{I} - 2\hat{B}\hat{B}) v_{\perp}^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{\perp}^2} + (\gamma - 1) \mathbb{I} v_{\parallel}^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{\parallel}^2} + (\hat{B}\hat{B} - \hat{k}\hat{k}) \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mu}^2} \right] \ln v_{\perp} \right\} \quad (3-89)$$

Aquí; \hat{k} y \hat{B} denotan vectores unitarios en la dirección de \bar{k} y \bar{B} , respectivamente; \mathbb{I} , representa el tensor unitario; $\bar{\mu} \equiv \cos\theta = \hat{k} \cdot \hat{B}$; y $v_{\perp} =$

(*) En síntesis, Dewar parte del Lagrangiano exacto que dan las ecs. sin considerar la interacción. Tal Lagrangiano es modificado por considerar que el fluido de fondo así como las ondas varían lentamente en el espacio y en el tiempo (aproximación de onda plana). Una vez obtenido el Lagrangiano exacto, éste es promediado en un periodo (Whitham 1965). Las ecs. que toman en cuenta la interacción de la onda con el fluido serán aquellas deducidas del Lagrangiano promedio (usando la técnica usual de Mecánica clásica, sólo considerando que las coordenadas aquí son continuas). Puesto que mayores detalles van más allá del alcance de este trabajo, remitimos al lector al artículo de Dewar y referencias ahí contenidas, si desea profundizar más sobre el tema.

(ω_0/k) la velocidad de fase de las ondas en un sistema de referencia moviéndose con el fluido, con ω_0 la frecuencia intrínseca.

Por otro lado, la ec. de energía es

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{G} = 0, \quad (3-90)$$

donde

$$W = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} + \epsilon$$

y

$$\bar{G} = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p - \rho \frac{GM_\odot}{r} \right) \bar{v} - \frac{(\bar{v} \times \bar{B}) \times \bar{B}}{4} + \bar{v} \epsilon + \bar{v} \cdot P_\omega + \bar{G}_\perp$$

En (3-90) con W hemos representado la densidad de energía total y con \bar{G} el flujo de energía. \bar{G}_\perp da contribuciones a \bar{G} de procesos tales como radiación o conducción de calor: $\bar{F} = \bar{v} \epsilon + \bar{v} \cdot P_\omega$ representa el flujo de energía de las ondas, donde ϵ denota la densidad de energía de las ondas (como ya se vió, $\epsilon = (\delta B)^2 / 8\pi$, para ondas de Alfvén).

Siempre que trabajemos con ondas transversales (por ejem., ondas de Alfvén) las cantidades que describen el sistema v , ρ , T , etc. serán las que puede medir una nave espacial (ver Jacques 1977 y Dewar 1970, apéndices A y B); i.e., en las que estamos interesados directamente.

3.4.b EL INVARIANTE ADIABATICO, TAMBIEN LLAMADO DENSIDAD DE ACCION DE LA ONDA

En el sistema que estamos trabajando se ha visto que la densidad de energía de las ondas no se conserva; no obstante, existe una cantidad llamada el invariante adiabático o la densidad de acción de la onda, S, que se conserva, en ausencia de amortiguamiento (Bretherton y Garret 1967). Los nombres de S son en analogía con la invarianza adiabática (ésto último por los cambios lentos, adiabáticos, de los parámetros) de la integral de acción del oscilador armónico (ver, por ejemplo, Landau y Lifshitz 1982). Esta cantidad está relacionada con la densidad de energía de la onda por medio de la ec. siguiente

$$S = (\epsilon / \omega_0),$$

con $\omega_0 = \omega - \bar{k} \cdot \bar{v}$.

El establecimiento matemático de tal ley de conservación es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}_g S) = 0, \quad (3-91)$$

Partiendo de la ec. (3-91) (Garret 1968) uno encuentra la ec. de conservación de energía de las ondas

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}_g \epsilon) + P_{\omega}^{\dagger} \nabla \bar{v} = 0, \quad (3-92)$$

donde P_{ω}^{\dagger} denota el tensor transpuesto de P_{ω} .

La ec. (3-92) muestra como en un medio acelerado la energía de la onda no se conserva.

Hasta el momento hemos considerado que las ondas no se amortiguan; en general, ésta es una suposición muy poco realista, aunque es aproximadamente válida para ondas de Alfvén. Para tomar en cuenta la disipación de energía de las ondas lo que la gente hace comunmente es introducir una longitud de amortiguamiento, L , en la ec. de conservación de S ; i.e., se supone que S satisface (en estado estacionario) la siguiente ec.

$$\nabla \cdot (\bar{v}_g S) = -\bar{v}_g S/L. \quad (3-93)$$

La ec. (3-93) es considerada en analogía con la ec. $\nabla \cdot (\bar{v}_g \epsilon) = -\Gamma \epsilon$ para ondas en un medio estático, $\Gamma = \Gamma(k, \rho, T)$ representa la tasa de amortiguamiento ($\Gamma = v_g/L$).

3.4.c APLICACION A ONDAS PROPAGANDOSE RADIALMENTE

Pensemos que el viento se encuentra confinado en tubos de flujo infinitesimales con sección transversal $A(r)$ (para expansión esféricamente simétrica, $A(r) \propto r^2$). Supongamos que las líneas de campo definen la frontera del tubo y que para cualquier función vectorial, \bar{f} , $\nabla \cdot \bar{f} = (1/A)(d(A\bar{f})/dr)$, ésto último con tal que \bar{f} esté dirigido a lo largo del tubo de flujo y sea función únicamente de r . Considerando que k , \bar{B} , y \bar{v} son radiales, los únicos modos MHD que sobreviven son el rápido y el Alfvénico. Aplicaremos las ecs. anteriores al caso en que las ondas que interaccionan con el medio son ondas de Alfvén (en el artículo de Jacques

1977 se realiza ésto mismo con el modo acústico y rápido).

Para ondas de Alfvén $v_{te} = v_A$, así

$$\begin{aligned} P_{\omega} &= \epsilon \{ \hat{k} \hat{k} + \frac{1}{2} [(\mathbb{I} - 2\hat{B}\hat{B})v_A^2 \frac{\delta v_A^2}{\delta v_A^2} + (\gamma-1)\mathbb{I}v_A^2 \frac{\delta v_A^2}{\delta v_A^2} + (\hat{B}\hat{B} - \hat{k}\hat{k})\bar{\mu} \frac{\delta \bar{\mu}}{\delta \bar{\mu}}] \ln v_A^2 \} \\ &= \epsilon \{ \hat{k} \hat{k} + \frac{1}{2} [(\mathbb{I} - 2\hat{B}\hat{B})v_A^2 \frac{\delta v_A^2}{\delta v_A^2}] \ln v_A^2 \} \\ &= \epsilon \{ \hat{k} \hat{k} + \frac{1}{2} (\mathbb{I} - 2\hat{B}\hat{B}) \} \end{aligned}$$

el tensor de esfuerzo de la onda, por lo tanto, es

$$P_{\omega} = (1/2)\epsilon \mathbb{I}, \quad (3-94)$$

donde se ha usado que $\hat{k}\hat{k} = \hat{B}\hat{B} = \hat{f}\hat{f}$.

De (3-94), vemos que el efecto de las ondas sobre el flujo promedio esta representado por un término de presión isotrópica (de ahí el nombre de tensor de presión). En general, la expresión para P_{ω} es siempre $(1/2)\epsilon \mathbb{I}$ independiente de la dirección de \hat{k} y \hat{B} .

De (3-94) obtenemos

$$\nabla \cdot P_{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \epsilon \mathbb{I} = \frac{1}{2} \nabla \epsilon \quad (3-95)$$

De la definición de \bar{F}_{ω} puede verse también que

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{A} \frac{d}{dr} [((3/2)v + \chi) A \epsilon] \quad (3-96)$$

ya que $\bar{v}_{\omega} = \bar{v}_{\text{po}} = \bar{v}_A$ y $\bar{v} \cdot P_{\omega} = (1/2)\epsilon \bar{v}$.

La densidad de energía de las ondas es $\epsilon = (1/2)\rho (\delta v)^2 = (\delta B)^2 / 8\pi$, donde δv y δB representan, como antes, la magnitud de las fluctuaciones en la velocidad y en el campo magnético, ambas relacionadas por $(\delta v/v_A)^2 = (\delta B/B)^2$. En ausencia de disipación, ϵ puede ser encontrado fácilmente usando la ley de conservación de acción de la onda; haciendo esto, obtenemos para ϵ (para un modelo en estado estacionario)

$$\epsilon = cte. \frac{v_A}{A(v + v_A)^2} = \frac{A_0 \epsilon_0 (v_0 + v_{A0})^2 (v_{A0})^2}{(v + v_A)^2 (v_{A0})^2} \quad (3-97)$$

Usando (3-93), pidiendo que \bar{v} esté dirigido a lo largo del tubo de flujo, uno encuentra

$$\frac{v_0}{\omega} \frac{A \epsilon}{\bar{k} \cdot \bar{v}} = c t \epsilon.$$

De la óptica geométrica nosotros tenemos $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{v}_j \cdot \nabla \omega = 0$; de este modo, ω es constante en la dirección de \bar{v}_j . Cuando \bar{k} es paralelo a \bar{v} y no hay dispersión ($\bar{v}_p = \bar{v}_j$), la ec. anterior puede ser escrita como

$$\frac{(v_{\phi 0} + v)^2 A \epsilon}{v_{\phi 0}} = c t \epsilon.$$

Usando que $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ y la ec. de continuidad, bajo cierta manipulación algebraica, uno encuentra (3-77) de (3-97). Este resultado no nos sorprende por que en principio se han usado las mismas hipótesis de trabajo, aunque los métodos han sido distintos. En general, se puede mostrar que la técnica de promedio coincide con la aproximación lineal en los métodos perturbativos de expansión en μ (ver sección 3-3) usando la aproximación de onda plana.

La ec. de energía, por otra parte, toma la siguiente forma (despreciando radiación)

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dt} \left\{ A \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \rho \phi \right] v + A (v_\alpha + \frac{1}{2} v) \epsilon \right\} = 0,$$

o bien si $A \propto r^2$,

$$4\pi r^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p - \rho \frac{G M}{r} \right] v + (v_\alpha + v) \epsilon + \frac{1}{2} v \dot{\epsilon} \right\} = \text{cte.} = E, \quad (3-98)$$

donde ϵ esta dado por (3-97).

Como menciona Jacques (1978) en su artículo, el modelo politrópico es equivalente a aquel descrito por un flujo de calor "sin colisiones" (Hollweg 1976), \bar{F}_{c_α} , dado por

$$\bar{F}_{c_\alpha} = c_\alpha p \bar{v}, \quad (3-99)$$

donde $c_\alpha = (\alpha / (\alpha - 1)) - (\gamma / (\gamma - 1))$, con $\gamma = (5/3)$.

3.4.d DISIPACION DE ENERGIA DE LAS ONDAS DE ALFVEN

¿Qué mecanismos de disipación de ondas MHD existen? , ¿por qué hay que considerarlos en nuestros modelos? , ¿en que forma entra este fenómeno en las ecs. de movimiento (energía y momento)?... éstas y otras preguntas van a ser analizadas brevemente a continuación (HM 1980).

En este momento , la mayoría de los trabajos sobre vientos estelares conducidos por ondas (ver , por ejemplo , HM 1980 ; DeCampli 1981 ; Hartmann et al. 1982 ; Holzer et al. 1983 ; Lago 1984) introducen el amortiguamiento de las ondas para estar más apegados con la realidad , y con ello obtener mejores resultados. Entre los mecanismos de disipación que se conocen se encuentran el amortiguamiento por:

(1) fricción ion-neutro ,

(2) calentamiento Joule (efecto que surge debido a la conductividad eléctrica finita del plasma) ,

y

(3) viscosidad (producto del choque entre iones) .

En adición a estos mecanismos , el amortiguamiento también puede ocurrir por

(4) conversión del modo Alfvénico a otros fácilmente atenuados y

(5) por interacciones onda-onda no lineales (efectos de segundo orden).

Los procesos (4) y (5) se caracterizan por la transferencia de energía de las ondas de Alfvén a una perturbación compresional , la cual es subsecuentemente amortiguada. Por ejemplo , una onda de Alfvén que viaja en una región con campo magnético inhomogeneo será parcialmente transformada si el campo se tuerce en la dirección de δv (Wentzel 1974) . También , bajo ciertas condiciones , si $v_A > v_s$ las ondas de Alfvén viajando paralelas al campo magnético de fondo , pueden decaer en ondas sónicas viajando en la misma dirección y en ondas de Alfvén propagándose en

dirección opuesta. Aunque tales procesos posiblemente contribuyan en , y podrían incluso dominar , la disipación de energía , las suposiciones inherentes en nuestro tratamiento de la propagación de las ondas nos impide calcular una longitud de amortiguamiento efectiva .

A diferencia de (4) y (5) , los procesos de disipación denotados por (1),(2) y (3) si se les puede calcular una L efectiva. Se encuentra que el amortiguamiento por efecto Joule o por viscosidad son poco importantes en comparación con el efecto de fricción ion-neutro. Para este mecanismo la longitud de amortiguamiento viene dada por (ver apéndice)

$$L = \frac{2v_A}{\omega^2 \tau_{in}^2} \frac{(1 + \frac{v}{v_A})}{\xi} \quad (3-100)$$

Aquí $\tau_{in}^{-1} = \frac{\sum_n (c_n / \tau_{in})}{\sum_n c_n}$; con $\tau_{in}^{-1} \approx \frac{2m_i n_i v_{in}}{m_i + m_n} \left(\frac{2kT}{\pi} \frac{m_i + m_n}{m_i m_n} \right)^{1/2}$

donde m_i y m_n son las masas del ión y de la partícula neutra, respectivamente, n_i la densidad del ión, y σ_{ni} la sección de choque. Además, ω es la frecuencia de la onda y $v = \frac{\sum_n c_n}{\rho_1}$. La fórmula (3-100) es válida para un gas consistente de un único tipo de partícula ionizada y varias especies de partículas neutras.

A diferencia del caso solar , donde el plasma está casi completamente ionizado y por tanto el efecto puede ser despreciado , existen otras estrellas (T-Tauri , gigantes y supergigantes rojas , etc.) en las cuales el amortiguamiento es apreciable. Por ejemplo, las temperaturas ($T \lesssim 10^4$ °K) inferidas para las atmósferas de estas estrellas implican la presencia de cantidad apreciable de gas neutro, el cual no interactúa directamente con el campo magnético fluctuante .Como resultado de ello , los disturbios Alfvénicos lincales estan sujetos a disipación que surge de la fricción entre los iones y los átomos neutros del viento. Para caracterizar éste y/o otros posibles mecanismos de amortiguamiento uno posee la ec. (3-93) , la cual al ser integrada da

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{M}{M_A} \right) \left(\frac{1 + \frac{M}{M_A}}{1 + \frac{M}{M_A}} \right)^2 \exp \left(- \int_{r_0}^r L^{-1} dr \right) \quad (3-101)$$

que para L constante es

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{M}{M_A} \right) \left(\frac{1 + \frac{M}{M_A}}{1 + \frac{M}{M_A}} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{L} \right) \right] \quad (3-102)$$

Bajo simetría esférica y en estado estacionario la ec. (3-88) toma la siguiente forma (usando (3-95))

$$\rho v \frac{dv}{dr} + \frac{dp}{dr} + \rho \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{dr} = 0, \quad (3-103)$$

donde $f_w \equiv -(1/2)(d\epsilon/dr)$ representa la fuerza promedio, por unidad de volumen, debido a las ondas. Una expresión explícita para f_w puede ser obtenida de la siguiente expresión, la cual se deduce de (3-93) para simetría radial y con un poco de álgebra,

$$\frac{d}{dr} [\epsilon M_a (1 + M_a)^2] = -\frac{1}{L} \epsilon M_a (1 + M_a)^2, \quad (3-104)$$

el resultado es

$$f_w = \frac{\epsilon}{2L} + \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{1+3M_a}{1+M_a} \right) \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) \quad (3-105)$$

Suponiendo, de nuevo, una relación politrópica entre p y ρ , las ecs. (3-103) y (3-105) pueden ser combinadas para obtener nuestra ec. de movimiento del viento

$$\left[v^2 - \alpha v_r^2 - \frac{\epsilon}{4\rho} \left(\frac{1+3M_a}{1+M_a} \right) \right] \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} \left[\alpha v_r^2 - \frac{1}{4} v_e^2 + \frac{\epsilon}{4\rho} \left\{ \left(\frac{1+3M_a}{1+M_a} \right) + \frac{r}{L} \right\} \right] \quad (3-106)$$

Note que la única diferencia de (3-106) con respecto a (3-82) es el término, $\frac{\epsilon}{4\rho} (r/L)$, que considera el amortiguamiento de las ondas.

3.4.e UN VIENTO, CONSIDERANDO PERDIDAS RADIATIVAS

De la ec. de los gases ideales, $p = \rho kT / \mu_m$, (la cual está implícita en todo este trabajo) vemos que

$$\frac{dp}{dr} = v_r^2 \frac{d\rho}{dr} + \rho v_r^2 \frac{d \ln T}{dr} \quad (3-107)$$

y de la ec. de continuidad que

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = - \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) \quad (3-108)$$

donde de nuevo se usó la definición de v_r , $v_r^2 = kT / \mu_m$.

Partiendo de la ec. (3-103) y usando (3-107), (3-108), y (3-105) uno puede escribir la ec. de movimiento del viento como

$$\left(v^2 - v_r^2 - \frac{\epsilon}{4\sigma} \left(\frac{1 + 3M_a}{1 + M_a} \right) \right) \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} \left\{ v_r^2 - \frac{1}{4} v^2 + \frac{\epsilon}{4\sigma} \left[\left(\frac{1 + 3M_a}{1 + M_a} \right) + \Gamma \right] - \frac{1}{2} v_r^2 \frac{\ln T}{\ln r} \right\}. \quad (3-109)$$

En caso de que $p \propto r^{\gamma}$ la ec. (3-107) se reduce a (3-81) y, desde luego, (3-109) a (3-106). Esto se ve facilmente para el caso isotérmico.

Considerando pérdidas radiativas y despreciando flujo de calor, la ec. de energía (3-90) para un modelo en estado estacionario y esfericamente simétrico viene a ser

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \left[v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} P - \rho \frac{GM_*}{r} \right) + \epsilon \left(\frac{3}{2} v + v_a \right) + F_R \right] \right\} = 0, \quad (3-110)$$

donde con F_R (erg cm⁻²/seg) representamos el flujo de energía radiativa. Utilizando la expresión de la tasa de calentamiento, producto de la disipación de energía de las ondas, obtenida por Hollweg (1973)

$$Q = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \left[\epsilon \left(\frac{3}{2} v + v_a \right) \right] + \frac{\gamma}{2} \frac{d\epsilon}{dr} \quad (3-111)$$

y definiendo como P_R , $P_R = (1/r^2) (d(r^2 F_R)/dr)$, la tasa de pérdida de energía por radiación, la ec. (3-110) toma la siguiente forma

$$\rho v \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} v_r^2 \right) + \rho v \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{2} v \frac{d\epsilon}{dr} = Q - P_R. \quad (3-112)$$

Tomando en cuenta la ec. (3-104) la expresión para Q se simplifica a

$$Q = \epsilon (v + v_a) / L. \quad (3-113)$$

Suponiendo L constante, como efectivamente sucede con nuestros modelos, la tasa de calentamiento viene a ser

$$Q = \frac{\epsilon_0 v_0}{L} \frac{v_0}{z^2} \left(\frac{1 + M_{a0}}{1 + M_a} \right)^2 e^{-\left(\frac{2}{3}-1\right)/\lambda} \quad (3-114)$$

donde $\lambda \equiv (L/r_0)$.

Usando (3-103), con dp/dr dado por (3-107), la ec. (3-112) se transforma en (para $\gamma = (5/3)$)

$$\frac{d \ln T}{d \ln z} = \frac{2}{3} \left[\frac{r(Q - P_r)}{\rho v_{T0}^2 V} \left(\frac{T_r}{T} \right) - (2 + \frac{d \ln v}{d \ln z}) \right]; \quad (3-115)$$

y la ec. de momento (3-109) viene a ser

$$\left[v^2 - \frac{5}{3} v_T^2 - \frac{\epsilon}{4\rho} \left(\frac{1 + 3M_A}{1 + M_A} \right) \right] \frac{dv}{dr} = 2 \frac{v}{r} \left[\frac{5}{3} v_T^2 - \frac{r(Q - P_r)}{3\rho v} - \frac{1}{4} v^2 + \frac{\epsilon}{4\rho} \left\{ \frac{1 + 3M_A}{1 + M_A} + \frac{r}{L} \right\} \right] \quad (3-116)$$

En la base del viento, donde $M_A < 1$, es factible suponer que los términos $r T_0 Q / \rho v_{T0}^2 v T$ y $r T_0 P_r / \rho v_{T0}^2 v T$ en la ec. de energía (3-115) son mucho más grandes que los otros. Esto conduce a la ec. de energía simplificada, la tasa de calentamiento es balanceada por las pérdidas radiativas,

$$Q = P_r. \quad (3-117)$$

La tasa radiativa está relacionada con la ley de enfriamiento radiativo, $\Lambda(T)$ (erg cm⁻³/seg), por

$$P_r = n_e n_H \Lambda(T) = \frac{\rho^2}{(\mu m_H)^2} f \Lambda(T) \quad (3-118)$$

donde $f \equiv (n^2 / n_e n_H)$, n la densidad total de partículas.

De la ec. de energía local, (3-117), la siguiente expresión para $\Lambda(T)$ puede ser obtenida, sólo hay que hacer uso de (3-118), (3-114) y de que $M_A^2 \propto \rho^{-1}$,

$$\Lambda(T) = \frac{\epsilon_0 v_{A0}}{L z^2} f \frac{(\mu m_H)^2}{\rho^2} \left(\frac{M_A}{M_{A0}} \right)^4 \frac{(1 + M_{A0})^2}{(1 + M_A)} e^{-(\gamma-1)/\lambda} \quad (3-119)$$

En el artículo de Hartmann et al. (1982) la ley de enfriamiento adoptada es aquella de Raymond (1976) para un plasma ópticamente delgado, en equilibrio de ionización, y en el límite de baja densidad.

Derivando la ec. (3-119) con respecto a r y sustituyendo el resultado

$$X(T) \frac{d \ln T}{d \ln z} = \left(\frac{2 + M_A}{1 + M_A} \right) - \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{4 + 3M_A}{1 + M_A} \right) \frac{d \ln v}{d \ln z}$$

en la ec. de momento (3-109) la ec. de movimiento para el viento es

$$[v^2 - v_r^2 \{ 1 - \frac{1}{2X} (\frac{4 + 3M_A}{1 + M_A}) \}] - \frac{\epsilon}{4\rho} (\frac{4 + 3M_A}{1 + M_A}) \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} [v^2 \{ 1 - \frac{1}{2X} (\frac{4 + 3M_A}{1 + M_A}) - \frac{\epsilon}{r} \} - \frac{1}{4} v_r^2] + \frac{2v}{r} [\frac{\epsilon}{4\rho} (\frac{4 + 3M_A}{1 + M_A}) + \frac{r}{l}] \quad (3-120)$$

donde $X(T) \equiv d \ln \Lambda(T) / d \ln T$.

Suponiendo conocida la forma funcional de Λ con la temperatura la solución de viento puede ser obtenida usando (3-117) y (3-116) o bien, si la aproximación de balance de energía es correcta, (3-120) y (3-119) como ec. auxiliar. En orden, para decidir cuando se considera un modelo u otro se calcula \bar{I} , el cual se define por la ec.

$$\bar{I} = \int \frac{v_r^2}{r} \frac{v}{R} \frac{r}{T_0} (2 + \frac{d \ln v}{d \ln r}) ; \quad (3-121)$$

cuando \bar{I} comienza a ser mayor que un cierto valor fijo (típicamente del orden de 0.01) las expresiones completas deben ser utilizadas.

El trabajo teórico realizado en el capítulo anterior será utilizado aquí con la intención de modelar los vientos que se observan en las estrellas T-Tauri. En la primera sección se da un breve resumen de los resultados obtenidos al aplicar el modelo de viento conducido por ondas de Alfvén a varios tipos de estrellas; en particular, se hace énfasis en los vientos de las estrellas T-Tauri. En la segunda sección, un modelo politrópico, esféricamente simétrico, y con una longitud de amortiguamiento constante, es aplicado con parámetros típicos de las estrellas T-Tauri. En la tercera sección, se analizan nuestros resultados y se dan las conclusiones.

4-1 INTRODUCCION

El reconocimiento, tanto teórico como observacional, del papel fundamental que juegan los fenómenos hidromagnéticos en la dinámica y termodinámica de la atmósfera solar, ha inducido a mucha gente a introducirlos en sus estudios sobre atmósferas estelares. Uno de los eventos atmosféricos que se ve afectado seriamente es el viento solar (el depósito de energía y momento por ondas de Alfvén alteran parámetros tales como \dot{M} , v_{∞}). Belcher (1971) modificó el modelo clásico de Parker, para el viento solar, al tomar en cuenta la interacción de las ondas de Alfvén y la atmósfera en expansión. El encontró, usando una relación politrópica entre p y ρ , que la inclusión de las ondas sin amortiguamiento podía producir las altas velocidades (~ 700 km/seg) y bajas densidades (~ 2 cm $^{-3}$) observadas a 1 U.A. en las corrientes de alta rapidez. Un tratamiento diferente fue usado por Kopp y Holzer (1976). Bajo la suposición de una divergencia más rápida que r^2 , ellos encontraron las bajas densidades observadas (a 1 U.A.) en las corrientes rápidas de los hoyos coronales pero no así las altas velocidades.

La mayoría de los trabajos posteriores fueron esencialmente refinamientos a los modelos básicos de Belcher (1971), Alazraki y Conturier (1971), y Hollweg (1973). Así tenemos, por ejemplo, como Jacques (1977, 1978) introduce en su modelo flujo de calor y disipación de energía de las ondas, esto último lo hace limitando la amplitud de las

ondas al campo magnético de fondo. Cuando se comparan sus resultados con las observaciones (principalmente con aquellas de alta rapidez) encuentra un gran acuerdo en la velocidad y densidad a $r_0=R_0$ y a 1 U.A. . Este trabajo, así como otros (ver Mendoza 1984), no obstante de obtener mejores acuerdos con las observaciones, no ha logrado reproducir adecuadamente al mismo tiempo las velocidades, densidades, y particularmente las temperaturas en las corrientes de alta rapidez.

El modelo de ondas, también se ha supuesto para los vientos masivos ($\dot{M}_* \sim 10^{-8} M_\odot/\text{año}$) de las estrellas frías, de baja gravedad. En el trabajo de HM (1980) hacen uso del modelo suponiendo un flujo isotérmico y esféricamente simétrico; además, consideran la aproximación de una longitud de amortiguamiento constante, L . En sus modelos toman a $L=R_*$, esto es justificado posteriormente por el cálculo de esta longitud usando (3-101), obteniendo un rango amplio de tasas de pérdida de masa ($\sim 10^{-11}$ a $10^{-5} M_\odot/\text{año}$) y velocidades terminales bajas ($\sim 110 - 22$ km/seg) para diversos parámetros típicos de las gigantes tardías. Encuentran que, a altas gravedades, la disipación de energía de las ondas conduce al calentamiento de la capa más externa de la atmósfera a temperaturas coronales. Así, ellos concluyen que no pueden obtener auto-consistentemente vientos de baja temperatura y baja velocidad terminal para $\log g \geq 2$. Posteriormente, Holzer et al. (1983) utilizan el modelo considerando, primeramente, tres tipos de amortiguamiento: (a) longitud de amortiguamiento constante, (b) amortiguamiento politrópico ($\epsilon_F = (\rho/\rho_0)^\alpha$, con ϵ dada por (3-97)), y (c) disipación no-lineal (ϵ está dada por (3-97) si $\langle \delta B^2 \rangle \leq B^2/4$ y $B/16\pi$ en caso contrario). En todos estos modelos el flujo se supone isotérmico y esféricamente simétrico. Enseguida, calculan el modelo auto-consistentemente con $Q = \epsilon v_e / L(\omega')$ y $L(\omega')$ dada en una forma más general. Los resultados indican dificultades serias para generar vientos masivos de baja rapidez en tales estrellas, y sugieren que los observadores deberían esforzarse más en obtener datos más precisos para v_∞ . También encuentran que los resultados dinámicos concuerdan bastante bien con el modelo $L = \text{cte.}$ (bajo una L adecuada), pero hacen énfasis en que esto no sucede así con la termodinámica del viento.

4.1.a ESTRELLAS T-TAURI

La lista de intentos de modelar la dinámica de las atmósferas de las

estrellas T-Tauri son largos y variados. Muchos autores favorecen los modelos de expulsión de material de la estrella, aunque otros consideran acreción y eyección o simplemente acreción. La lista de mecanismos que se han propuesto para generar los vientos (eyección de material) también es diversa. A pesar de esto, hay razones para creer que un modelo de viento generado por el depósito de energía y momento de las ondas de Alfvén satisfecerá gran parte de los requerimientos observacionales.

En el artículo de DeCampi (1981) se descartan los mecanismos de generación de viento por medio de presión térmica o presión de radiación, en base a las observaciones realizadas en rayos X y de cuestiones energéticas, respectivamente. Por una parte, él encuentra que la temperatura requerida para obtener las altas tasas de pérdida de masa observada daría una luminosidad coronal exageradamente alta ($\sim 10^{36} - 10^{34}$ ergs/seg), comparada a la luminosidad en rayos X observada ($\sim 10^{31} - 10^{29}$ ergs/seg), y por otra que, el flujo de momento $M_* v_\infty$ excede con mucho el flujo de momento de los fotones L_*/c (L_* es la luminosidad de la estrella y c la velocidad de la luz). Su modelo, aunque tiene la ventaja de considerar un campo magnético dipolar y rotación de la estrella, tiene el inconveniente de suponer la conservación de la acción de la onda (sin amortiguamiento). Los resultados numéricos que da son para un caso más simplificado; una estrella sin rotación, con campo magnético radial, y con una relación politrópica entre p y ρ . La solución es entonces esféricamente simétrica y puede ser obtenida como lo hizo Belcher (1971). El tipo de amortiguamiento que considera es el no-lineal, las ondas disipan gran parte de su energía cuando δB llega a ser comparable a B . Concluye que, no encuentra ningún mecanismo plausible para generar vientos en las estrellas T-Tauri típicas con tasas de pérdida de masa más altas que $(1 - 5) \times 10^{-8} M_\odot/\text{año}$. Para tasas de pérdida de masa $\leq 10^{-9} M_\odot/\text{año}$, la expansión coronal térmica o la presión de radiación son mecanismos posibles.

La teoría de un viento conducido por ondas de Alfvén para estrellas T-Tauri es de nuevo revivida por el trabajo de Hartmann et al. (1982). Ellos, como ya se mencionó antes, calculan perfiles de temperatura auto-consistentemente haciendo uso de la ley de enfriamiento radiativo en su ec. de energía. Tratan primeramente la ec. de energía suponiendo que las pérdidas radiativas balancean la tasa de calentamiento, producto de la disipación de las ondas; en la base del viento esto es, aproximadamente,

correcto. Cuando ésto no llega a ser cierto , bajo la aproximación deseada, hacen uso de las ecs. más completas. Suponiendo l constante igual a R y una $\eta = (\delta E_0 / E_0) = 0.1$ encuentran varias soluciones que vienen de diversos pares de valores de R_* y R_0 . Encuentran, de nuevo (como lo hizo DeCampi 1981), que si el flujo de las ondas está restringido a ser menor que la luminosidad estelar las tasas de pérdida de masa se restringen a ser $< (1 - 5) \times 10^{-8} M_\odot / \text{año}$. Se sugiere que la discrepancia entre las tasas de pérdida de masa observada y las ahí encontradas es debido a la inaplicabilidad de la aproximación de Sobolev a estas estrellas (desde luego que tal argumento no puede ser valido en todos los casos, puesto que existen otros métodos, que no usan la aproximación, para calcular \dot{M}_*).

3-2 RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección daremos los resultados obtenidos de un modelo de viento conducido por presión de ondas de Alfvén para parámetros típicos de las estrellas T-Tauri . El modelo está basado en las siguientes aproximaciones:

- (i) Aproximación de un fluido.
- (ii) Aproximación Eikonal.
- (iii) Estado estacionario.
- (iv) Disipación , considerando una longitud de amortiguamiento constante.
- (v) Relación politrópica entre la presión y la densidad.

La ec. de movimiento que describe tal modelo es la que nosotros hemos enumerado como (3-106)

$$\left[v^2 - \alpha v_T^2 - \frac{\epsilon}{4\mathcal{Q}} \left(\frac{1 + 3M_A}{1 + M_A} \right) \right] \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} \left[\alpha v_T^2 - \frac{1}{4} v_e^2 + \frac{\epsilon}{4\mathcal{Q}} \left[\left(\frac{1 + 3M_A}{1 + M_A} \right) + \frac{r}{L} \right] \right]$$

Aunque también trabajamos en un modelo con amortiguamiento no-lineal , el cual viene descrito por las siguientes ecs.

$$\left[v^2 - \alpha v_T^2 - \frac{\epsilon}{4\mathcal{Q}} \left(\frac{1 + 3M_A}{1 + M_A} \right) \right] \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} \left[\alpha v_T^2 - \frac{1}{4} v_e^2 + \frac{\epsilon}{4\mathcal{Q}} \left(\frac{1 + 3M_A}{1 + M_A} \right) \right] \quad (3-81)$$

(ε dado por (3-95)) para $r < r_s$, donde r_s es tal que $\delta B(r_s) = B(r_s)$

$$\left[v^2 - \alpha v_T^2 \right] \frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r} \left[\alpha v_T^2 - \frac{1}{4} v_e^2 + \frac{1}{2} v_A^2 \right] \quad (4-1)$$

($\epsilon = B^2/8\pi$) para $r > r_s$.

no se darán resultados numéricos por que consideramos que resultados muy similares pueden ser obtenidos con el modelo antes citado , para una longitud de amortiguamiento adecuada (Holzer et al. 1983) .

Por analogía con el modelo de HM (1980) , trataremos las ecs. en forma adimensional definiendo $u = (v/v_T)$ (velocidad en unidades de la velocidad térmica del gas), a $z = (r/r_s)$ (tomando a r_s como el radio de la estrella) , y $\lambda = L/R_s$. Cuando sustituimos tales variables en la ec. de movimiento del viento (3-106) , ésta queda como sigue:

$$\frac{du}{dz} = \frac{(\alpha+1)}{2} \left[\alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{v_e}{v_T} \right)^2 \frac{1}{z} + \frac{\epsilon}{4\sigma} v_T^2 \left(\frac{1+3M_A^2}{1+M_A^2} \right) \cdot \left(\frac{2}{\lambda} \right) \right] + \frac{(\alpha-1)}{2} \left[u^2 - \alpha - \frac{\epsilon}{4\sigma} v_T^2 \left(\frac{1+3M_A^2}{1+M_A^2} \right) \right] \quad (4-2)$$

Como ya mencionamos antes , para obtener los puntos críticos es necesario dar las condiciones iniciales asi como los parámetros de la estrella. Habiendo hecho ésto , se elige un valor para la velocidad inicial v_0 , y se resuelve el sistema de ecs. trascendentes provenientes de la condición de punto crítico

$$N(u_c, z_c) = (\alpha+1)/2 \left[\tilde{N}(u_c, z_c) + ((\alpha-1)/(\alpha+1)) \tilde{D}(u_c, z_c) \right] = 0 \quad (4-3)$$

$$D(u_c, z_c) = D(u_c, z_c) = 0$$

donde

$$\tilde{N}(u, z) = \alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{v_e}{v_T} \right)^2 \frac{1}{z} + \frac{\epsilon}{4\sigma} v_T^2 \left[\left(\frac{1+3M_A^2}{1+M_A^2} \right) + \frac{2}{\lambda} \right] \text{ y } \tilde{D}(u, z) = u^2 - \alpha - \frac{\epsilon}{4\sigma} v_T^2 \left(\frac{1+3M_A^2}{1+M_A^2} \right)$$

Las expresiones para M_A , v_T , y ϵ en términos de u y z son:

$$M_A^{\alpha+1} = (v_0/v_{s0}) M_{s0}^{\alpha} z^2 u, \quad (4-4)$$

$$v_T^2 = v_{T0}^2 \left(M_{\infty} / M_A(u, z) \right)^{2(\alpha - 1)} \quad (4-5)$$

y

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(M_{\infty} / M_A(u, z) \right) \left((1 + M_{\infty}) / (1 + M_A(u, z)) \right)^2 \exp((1-z)/\lambda) \quad (4-6)$$

donde $v_{T0} = (kT_c / \mu m_H)^{1/2}$; $v_{\infty} = (E_0 / 4\pi\rho_0)^{1/2}$; $M_{\infty} = (v_0 / v_{\infty})$; $\epsilon_0 = (E_0^2 \eta / 8\pi)$ y $v_{e0} = (2GM_x / R_x)^{1/2}$.

El punto crítico obtenido se utiliza para encontrar la pendiente en ese punto (ver ec. (2-39), para luego integrar numericamente (4-2) (aquí se utilizó un método de Runge-Kutta de cuarto orden con valores de G, k, m, M_0 , y R_0 tomados del Allen 1976) a partir de ahí. Dependiendo del valor elegido para v_{01} el correspondiente $v_0^{(1)}$, resultado de la integración, diferirá en mayor o menor grado, de v_{01} .

El proceso anterior se debe repetir hasta que se encuentre un valor v_{0n} tal que $(|v_{0n} - v_0^{(n)}| / v_{0n}) < \text{valor fijo}$, nosotros usamos como valor fijo 0.01. El método que acabamos de relatar es conocido como el método de "disparo".

Habiendo hecho esto lo que resta por hacer es integrar (4-2) para todo z con la condición de que la solución pase por el punto crítico.

Realmente, lo que uno obtiene de resolver (4-3) son tres puntos; dos de ellos son puntos silla y el otro un punto espiral. El punto silla exterior esta asociado con el punto crítico de Parker; note que, si z tiende a infinito la ec. (4-3) se reduce a

$$N(u, z) \approx \alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{v_{e0}}{v_{Tc}} \right)^2 = 0$$

$$D(u, z) \approx u_c^2 - \alpha = 0$$

donde la semejanza con un viento isotérmico ($\alpha=1$) es evidente; mientras que el punto interior está relacionado con el de un viento generado por ondas.

Antes de dar los resultados, es útil obtener una expresión aproximada para M_x en función de los parámetros iniciales del viento. La derivación se hará para el caso sin amortiguamiento ($\lambda=\infty$), la tasa de pérdida de masa varía muy poco para valores de λ mayores que uno.

Puesto que el punto crítico, en general, cae muy cerca de la base del viento, $M_A \ll 1$ (en nuestros resultados, $M_{AC} \approx 0.104 - 0.037$); esto

aunado con el hecho que $u_c \gg 1$ ($u_c^2 \approx 25 - 10$) y $(1/4)(v_e/v_c)^2 (1/z_c) \gg 1$ ($\sim 10^2 - 10^4$) conduce a las siguientes aproximaciones

$$(GM_*/2r_c) \approx (\epsilon_c/4 \rho_c) \quad \text{y} \quad v_c^2 \approx (\epsilon_c/4 \rho_c) . \quad (4-7)$$

Para obtener (4-7) utilizamos las relaciones (4-3).

También, usando de nuevo que $M_* \ll 1$, se tiene que $\epsilon_c \approx \epsilon_0 (\rho_c/\rho_0)^{1/2}$ y $F_{\omega_0} = v_c \epsilon_c = (B_0 \epsilon_c / \sqrt{4\pi \rho_0})$. Considerando estas dos últimas expresiones y (4-7) uno obtiene que

$$\dot{M}_* = 4\pi r_c^2 \rho_c v_c \approx (4\pi^2/\sqrt{2} G^{1.5}) z_c^{3.5} M_*^{-1.5} R_*^{3.5} (F_{\omega_0}/B_0)^2 , \quad (4-8)$$

donde se usó que $(GM_*/2r_c) \approx (\epsilon_c/4 \rho_c)(1/\rho_c)^{1/2} = \sqrt{\pi} F_{\omega_0} / 2B_0 \rho_c^{1/2}$.

En los modelos aquí calculados obtenemos valores de z que caen dentro del intervalo 1.4 a 1.8; así, un valor para z de 1.6 en (4.8) nos parece razonable. Con tal valor, la ec. (4-8) se ve así

$$\dot{M}_* = 1.33 \times 10^{-25} (M_*/M_\odot)^{-1.5} (R_*/R_\odot)^{3.5} (F_{\omega_0}/B_0)^2 M_\odot/\text{año} , \quad (4-9)$$

donde F_{ω_0} y B_0 están en unidades de cgs.

Los perfiles de velocidad que mostramos a continuación tienen en común los siguientes valores para $r_c = R_*$, M_* , μ , B_0 , y η .

$$R_* = 2.5 R_\odot$$

$$M_* = 1 M_\odot$$

$$\mu = 1$$

$$B_0 = 300 \text{ gauss}$$

$$\eta = 0.1 .$$

Los parámetros de la estrella, R_* y M_* , que hemos elegido se pueden considerar como típicos de las estrellas T-Tauri (Cohen y Kuhi 1979). Los valores de B_0 y η se han dado arbitrariamente a manera de obtener las tasas de pérdida de masa observadas y tratando de satisfacer la condición de que la luminosidad de las ondas sea menor que la luminosidad de la estrella. El valor de $\mu=1$ aquí adoptado representa un compromiso entre los valores dados en el artículo de HM (1980), $\mu=1.27$ (gas compuesto de hidrógeno y helio únicamente, con el helio totalmente neutro y $n_{\nu_1}/n_\nu=0.1$)

y $\mu=0.667$ (valor aproximado para estrellas de población I).

En la tabla 2 exhibimos las tasas de pérdida de masa y las velocidades terminales ($v_{\infty} = v(z=150)$) para soluciones de viento correspondientes a una variedad de valores de los parámetros T_0 , n_0 , α y λ . Con L_{∞} hemos denotado la luminosidad de las ondas en R_* , desde luego como $M_{A0} \ll 1$ ésta viene a ser simplemente

$$L_{\infty} = 4\pi R_*^2 F_{\infty} = (1/2) R_*^2 \eta B_0^2 v_{\infty}.$$

En la columna de v_{∞} la raya --- significa que la velocidad cayó a cero antes de llegar a $z=150$.

TABLA 2

MODELOS DE VIENTO GENERADOS POR ONDAS DE ALFVEN

	α	T_0 ($^{\circ}\text{K}$)	n_0 (cm^{-3})	λ	$\dot{M}_* (10^{-5})$	v_{∞}	z_c	v_c	u_c
1	1.1	1×10^4	1×10^{13}	1.0	2.42	174.6	1.616	97.19	15.16
2		5×10^4			2.54	160.4	1.66	95.76	6.667
3		1×10^5			2.70	142.2	1.72	93.97	4.630
4	1.2				2.41	174.5	1.615	97.17	21.48
5	1.5				2.40	175.7	1.612	97.20	61.13
6	5/3				2.39	176.1	1.611	97.24	109.3
7			5×10^{11}		4.70	164.9	1.60	98.47	14.35
8			1×10^{12}		20.6	182.8	1.44	109.5	13.60
9				0.8	2.22	---	1.64	88.94	13.90
10				0.9	2.34	110.7	1.62	93.46	14.58
11				1.2	2.51	256.3	1.608	102.6	16.01
12				1.5	2.58	341.8	1.612	108.6	16.98
13				2.0	2.63	445.3	1.63	116.0	18.18

Nota: Los parámetros que se modifican en nuestros modelos de viento son α , T_0 , n_0 , y λ . El modelo 1 es tomado como típico; así, los espacios en blanco toman valores de este modelo. Por ejemplo, para el modelo 2 los valores de α , n_0 , y λ son 1.1, 1×10^4 y 1.0, respectivamente.

En la tabla 3 damos un conjunto de valores obtenidos para z_c , u_c , y \dot{M}_* para un modelo de viento isotérmico, no amortiguado, y conducido por ondas de Alfvén, con el propósito de comparar con aquellos dados en la tabla 2. Como se puede ver, la forma de cambio de los parámetros z_c , \dot{M}_* , y v_c con respecto a los cambios en n_c y T_c es similar en ambas tablas. Esto nos induce a pensar que algo análogo ocurriría si uno modificara los otros parámetros (R_* , M_* , B_* , y η).

De la tabla 2 es claro que el valor de \dot{M}_* no cambia apreciablemente (de 2.22 a $2.70 \times 10^{-9} M_\odot/\text{año}$, comparémosla con $2.0 \times 10^{-9} M_\odot/\text{año}$ obtenida de (4-9) para $n_c = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) siempre y cuando no se modifique un parámetro que sea variable de la fórmula aproximada de \dot{M}_* (excepto, quizás, T_c). Lo anterior se debe esencialmente a que λ y T_c son parámetros que afectan principalmente la dinámica del viento más allá del punto crítico (α es poco relevante). Cercano a la base del viento, donde $M_* \ll 1$, la fuerza de las ondas por unidad de masa, f_w/ρ , puede aproximarse por

$$(f_w/\rho) = (\epsilon/2\zeta) \left((1/L) - (1/2\zeta)(d\zeta/dr) \right) \approx (\epsilon/2\zeta) \left((1/L) + (1/2h) \right); \quad (4-10)$$

así, puesto que para $r \approx r_c$, $h \ll L$, f_w/ρ será aproximadamente la misma para los modelos con o sin amortiguamiento y en consecuencia esperamos perfiles de velocidad similares en la base del viento.

A diferencia de \dot{M}_* , v_c se ve afectado por todos los parámetros (excepto α) en un mayor o menor grado; lo que viene a continuación es una posible explicación cualitativa de los datos obtenidos de nuestro modelo.

Como en la base del viento $\epsilon \approx \epsilon(\zeta/\zeta_c)^2$, de (4-10), con $h \ll L$, uno puede ver que la fuerza de las ondas por unidad de masa se incrementa conforme nos alejamos de la superficie de la estrella, de hecho (f_w/ρ) varía aproximadamente como $(1/\zeta)^2$. Para $z-1 \geq \lambda$ el término exponencial en ϵ empieza a sobresalir logrando, a la postre, que (f_w/ρ) alcance su máximo y a partir de él disminuya rápidamente. La fuerza de presión térmica va como (ζ^{-1}/h) ; i.e., es una función decreciente de r . Una vez dicho esto, la forma de los perfiles de velocidad se pueden entender de la siguiente manera. Hasta $z-1 \geq \lambda$, el término dominante de la ec. de movimiento es (f_w/ρ) , por lo que en esa región el gas es continuamente acelerado; a partir de ese punto (f_w/ρ) disminuye hasta que llega el

momento en que el término gravitacional domina y el gas se empieza a desacelerar. La desaceleración continúa hasta el punto crítico de Parker, donde $(2\alpha v_1^2/r) = (GM/r^2)$, más allá del cual el viento es térmicamente reacelerado (si $\alpha < 3/2$). Para $r \gg R_*$, $v \sim v_\infty$ por lo que, de la ec. de continuidad $(\rho/\rho_1) = (v_1/v_\infty)(1/z^2)$. Por otra parte, de la condición $\frac{2\alpha v_1^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$ uno encuentra que

$$z_c(\text{Parker}) = (1/\gamma)^{\frac{1}{3-2\alpha}} \left((1/2)(v_\infty/v_{c0}) \right)^{\frac{2}{3-2\alpha}}$$

ya que, generalmente, $z_c(\text{Parker}) \gg 1$. $\gamma \equiv ((1/\alpha)(v_\infty/v_c))^{\alpha-1}$.

Usando el comentario del anterior párrafo uno puede ver el por qué v_c toma diversos valores en los diferentes modelos. Como ya mencionamos, existe un punto $z_{m\acute{a}x}$, $z_{m\acute{a}x} - 1 \approx \lambda$, a partir del cual el gas se desacelera hasta alcanzar el punto crítico de Parker; sin embargo, dependiendo del valor de λ el punto de Parker puede o no ser alcanzado antes de que la velocidad se anule (ver Holzer et al. 1983). En este caso podemos decir que no existe solución física que pase por el punto crítico interior. Es precisamente ésto, lo que sucede en nuestro modelo 10; en él $v \rightarrow 0$ antes de alcanzar v ($z=150$). Otro punto que me parece notable destacar, y no aquel que muestra v_∞ mayores para λ más altos, es la disminución de v_c (o v_∞) con el aumento de T_0 (efecto que por otro lado también se observa en la tabla 3). Cuando hacemos crecer T_0 , el viento se vuelve más masivo; esto provoca que la energía por partícula disminuya y en consecuencia la velocidad del viento. Poco después de haber rebasado $T_{m\acute{a}x}$ (la temperatura crítica del modelo politrópico de un viento térmico), cualquier aumento en T_c dará un viento con mayor densidad y rapidez, i.e., ahora ya parte de la energía térmica suministrada en la base de la corona se va en acelerar el gas. Para $\lambda = \infty$ y $T_c \geq T_{m\acute{a}x}$ el viento se comportará similar al de Parker para $z \gg 1$, desde luego que ésto dependerá del valor de η elegido. El comportamiento de los perfiles de velocidad cuando cambia n_0 se puede explicar de la siguiente manera. Para valores suficientemente bajos de n_0 (en nuestro caso, por ejemplo, $n_0 = 1 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$) el flujo inicial de las ondas es tan alto que los otros perfiles de más alta densidad no logran "alcanzarlo" antes de que ellos se amortiguen (ver modelos 7 y 8). En cambio, cuando las diferencias en densidad tienen menor efecto, el perfil de baja tasa de pérdida de masa puede cortar al de menor densidad, antes que la disipación llegue a ser muy importante (ver modelos 1 y 7).

TABLA 3

PUNTOS CRITICOS PARA MODELOS DE VIENTO CONDUCIDOS POR ONDAS
DE ALFVEN, ISOTERMICO Y SIN AMORTIGUAMIENTO

$R_w (R_\infty)$	$M_w (v_\infty)$	$T (10^4 \text{°K})$	$E_2 (G)$	$n (10^{11} \text{ cm}^{-3})$	η	u_c	z_c	$\dot{N}_w (10^{-4})$	v_c
2.5	1.0	1.0	300	100	0.05	16.29	1.74	2.69	147.9
1.0						25.71	1.74	0.11	233.5
2.0						18.20	1.74	1.24	165.3
3.0						14.88	1.73	5.07	135.2
4.0						12.91	1.73	13.75	117.3
5.0						11.57	1.72	29.69	105.1
6.0						10.58	1.71	55.59	96.1
	2.0					23.00	1.74	0.96	208.9
	3.0					28.15	1.75	0.57	255.8
	4.0					32.50	1.75	0.34	295.2
		5.0				7.20	1.78	3.01	146.2
		7.0				6.05	1.80	3.19	145.4
		10.0				5.01	1.83	3.47	144.1
		50.0				2.01	2.27	11.49	129.4
		100.0				1.32	2.64	51.36	120.0
			250			16.25	1.74	1.32	147.6
			350			16.33	1.73	4.90	148.3
			450			16.42	1.71	12.80	149.2
			600			16.61	1.67	37.60	150.9
			800			16.95	1.60	105.5	153.9
			1000			17.39	1.52	223.6	157.9
				80		16.32	1.73	3.32	148.2
				50		16.40	1.72	5.13	148.9
				10		17.27	1.54	18.81	156.8
				7		17.74	1.46	23.28	161.1
				5		18.34	1.37	27.32	166.6
				3		19.60	1.20	31.97	178.1
					0.1	16.36	1.72	10.20	148.6
					0.2	16.46	1.70	37.40	149.5
					0.3	16.55	1.68	78.3	150.3
					0.4	16.65	1.66	131.0	151.2

Nota: Ver comentario debajo de la tabla 2, sobre los espacios en blanco.

Esto se da producto de la distribución de energía de las ondas hacia al gas por partícula; existe un punto \bar{z} , con $\bar{z} < z_c$, a partir del cual la densidad del viento es mayor en aquellos perfiles que comenzaron con n_e más baja. El efecto que se acaba de mencionar también se observa en el caso de un viento isotérmico y sin amortiguamiento sólo que a distancias mayores, porque no hay disipación.

Con los datos dados en nuestros modelos las luminosidades iniciales de la onda calculadas son del orden de una L_\odot , es decir

$$L_{\omega_c} = 2.81 \times 10^{33} \text{ (ergs/seg) para los modelos 1-5 y 9-13}$$

$$L_{\omega_c} = 3.98 \times 10^{33} \text{ (ergs/seg) para el modelo 7}$$

$$L_{\omega_c} = 8.91 \times 10^{33} \text{ (ergs/seg) para el modelo 8}$$

Así, si uno restringe a L_{ω_c} ser del orden de la luminosidad de la estrella L_* ($1 - 4 L_\odot$; para valores típicos de las estrellas T-Tauri, Cohen y Kuhl 1979) obtenemos tasas de pérdida de masa que van desde 1×10^{-9} a pocos $\times 10^{-8} M_\odot$ /año. con este mecanismo de pérdida de masa no se ve como podemos aumentar \dot{M}_* con la condición $L_{\omega_c} \leq L_*$. Al igual que DeCampli (1981), nosotros creemos que las altas tasas de pérdida de masa ($\sim 1 \times 10^{-7} M_\odot$ /año) encontradas en algunas estrellas T-Tauri son debidas posiblemente a la mayor masa y luminosidad de estas estrellas.

En la figura No. 3 damos las soluciones asociadas a los dos puntos silla, para valores de $\alpha=1.01$ y $T_c=3.0 \times 10^4$ K. En general, la solución térmica (asociada al punto crítico exterior, de Parker) no siempre existirá; por ejemplo, si $\lambda > \lambda_{crit}$. También, puede ocurrir que bajo ciertas condiciones, la solución interior desaparezca (ver modelo 9).

CONCLUSIONES

Al igual que HM (1980), DeCampli (1981), Mendoza (1984), entre otros autores, nosotros también encontramos perfiles de velocidad que se desaceleran por efecto gravitacional. El que este efecto se observe o no, y su magnitud, dependerá fuertemente de la ec. de energía adoptada y del tipo de amortiguamiento usado. Por esta razón puede haber diagramas de velocidad contra distancia para los cuales la región de desaceleración no exista o se de a distancias muy alejadas de la estrella (Mendoza 1984).

Como mencionan Holzer et al. (1983) en sus conclusiones, uno debe ser precavido al aplicar los modelos simples ($\lambda = \text{cte.}$, ley politrópica, etc.) de vientos generados por ondas. En particular, el modelo de L constante dará estimadores razonables para la dinámica, pero proveerá pobres resultados en la Termodinámica. Esto se debe principalmente a que el mecanismo de aceleración propuesto no depende sensiblemente de la estructura térmica de la envolvente atmosférica. De esta manera, no está claro si efectivamente modelos más complejos (por ejemplo, usando una ec. de energía más completa) darán mejores resultados dinámicos; por otra parte, los perfiles de temperatura obtenidos serán discutibles debido a las hipótesis contenidas en la ec. de energía. De cualquier forma, todo intento de mejorar los modelos será bien recibido (aunque los conocimientos que se tienen acerca del medio ambiente de estas estrellas imposibilitan un mejor tratamiento).

Mucho trabajo teórico y observacional queda por hacer, entre otros, podemos citar los siguientes.

(1) El proyecto planeado por la NASA de un acercamiento a los polos del Sol dará pie a que muchas dudas acerca del viento solar se desvanezcan, y con ello su consecuente aplicación a otros tipos de estrellas. Por mencionar algo, es bien sabido que gran parte de los datos que tenemos acerca del viento solar provienen de dos regiones relevantes: la corona interior y la parte asintótica del viento (la distancia a la cual se han hecho las observaciones más cercanas al Sol no sobrepasa 0.3 U.A.). Para satisfacer tales observaciones existen diversos modelos teóricos con suposiciones completamente diferentes acerca de los mecanismos de aceleración y calentamiento. La medición de la velocidad del viento, así como de la amplitud de las diversas ondas MHD, en regiones cercanas al Sol ($\sim 4 R_{\odot}$) eliminará varios modelos (Barnes 1978).

(2) Mayores y más precisas observaciones de T-Tauris deberán hacerse para obtener datos más confiables de \dot{M}_{*} , $v(z \geq 1)$, v_{∞} y de los parámetros característicos de la estrella M_{*} , R_{*} , T_{ef} y L_{*} . Además, datos de L_{*+uv} (luminosidad en rayos X y ultravioleta) serán muy útiles para determinar L_{wo} .

(3) Introducir en la ec. de energía términos disipativos (viscosidad,

conductividad térmica , etc.) y amortiguamiento de las ondas en una forma autoconsistente, además de considerar pérdidas radiativas.

(4) Tomar en cuenta la rotación de la estrella y una geometría más adecuada para el campo magnético.

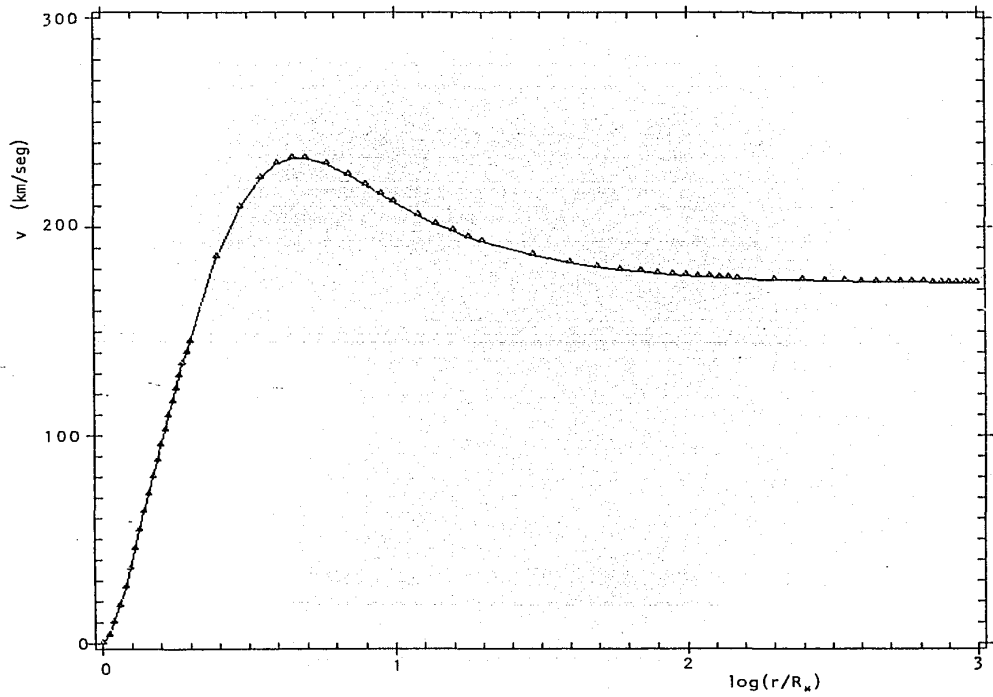


Fig. 1.- Perfil de velocidad para el modelo 5 de la tabla 2.

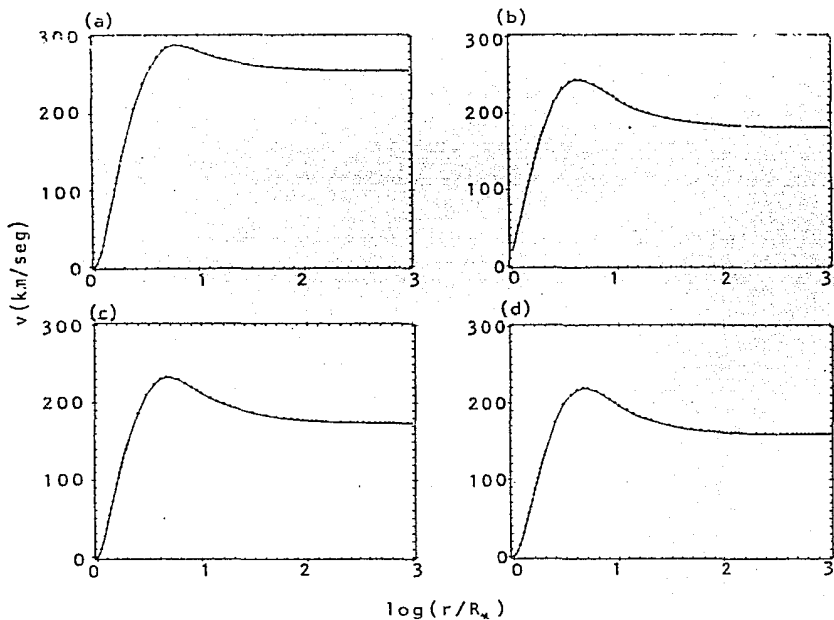


Fig. 2.- Perfiles de velocidad para los modelos 11, 8, 5, y 2 ; (a), (b), (c), y (d), respectivamente; tomados de la tabla 2. Altas velocidades terminales se alcanzan conforme λ aumenta, debido a que la disipación de la onda disminuye (comparese (a) con (b), (c), y (d)). De las gráficas también se ve que la velocidad inicial (v_0) (y por tanto \dot{M}_*) crece conforme disminuye n_0 (comparemos (b) con (a), (c), y (d)).

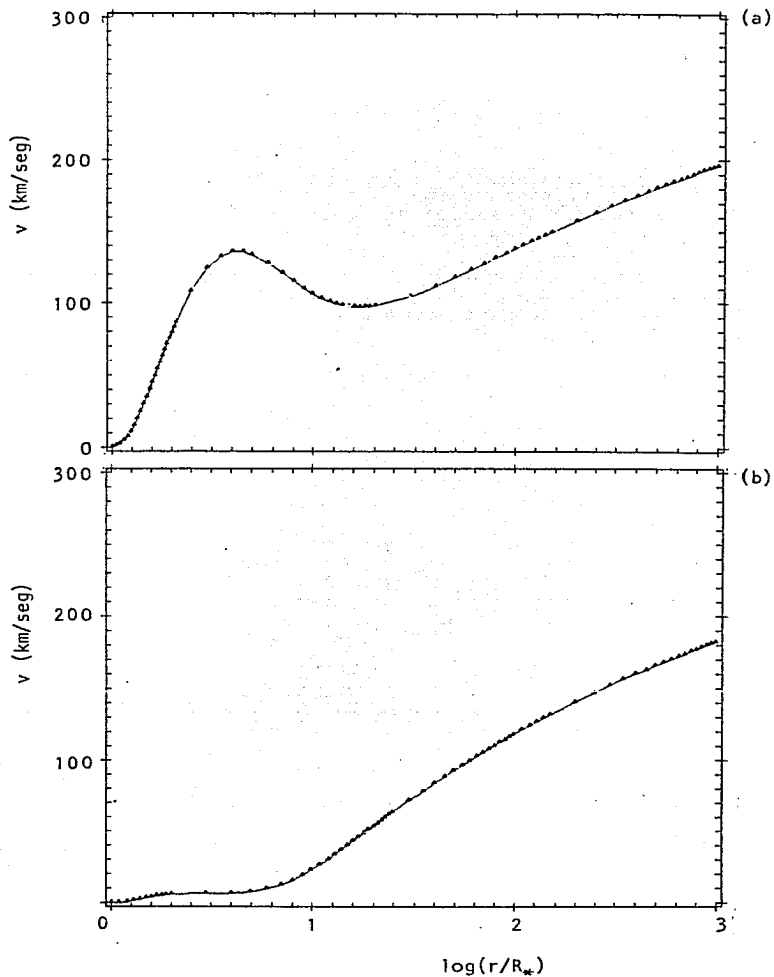


Fig. 3.- Aquí graficamos los perfiles de velocidad asociados a los dos puntos críticos. Los parámetros asociados al modelo son: $\alpha=1.01$, $T_0=3 \times 10^5$ °K, $n_0=1 \times 10^{13}$ (cm⁻³), $\gamma\lambda = 1$. Debido a la alta temperatura inicial la solución interior, (a), es inhibida; sin embargo, a partir del punto crítico de Parker el viento se vuelve acelerar y esencialmente se conduce térmicamente (note la semejanza de ambos perfiles; (a) y (b) para $\log(z) \geq \log[z_c(\text{Parker})]$).

APENDICE

AMORTIGUAMIENTO DE ONDAS DE ALFVEN , POR FRICCIÓN
ION-NEUTRO

Las propiedades de las ondas MHD en un gas parcialmente ionizado pueden ser estudiadas de dos formas diferentes (Piddington 1954, 1955 y 1956). Una, usando las ecs. de campo;

$$\nabla^2 H_x - (\sigma_x/\sigma_1) \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_x \bar{H} = 4\pi c_3 \left[\frac{\partial H_x}{\partial t} - \text{rot}_x (\bar{v} \times \bar{H}) \right] - (1 - \frac{\sigma_x}{\sigma_1}) \frac{\partial}{\partial y} \text{rot}_z \bar{H} , \quad (A.1)$$

$$\nabla^2 H_y - (\sigma_y/\sigma_1) \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_y \bar{H} = 4\pi c_3 \left[\frac{\partial H_y}{\partial t} - \text{rot}_y (\bar{v} \times \bar{H}) \right] - (1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_1}) \frac{\partial}{\partial y} \text{rot}_z \bar{H} , \quad (A.2)$$

$$\nabla^2 H_z - (\sigma_z/\sigma_1) \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_z \bar{H} = 4\pi c_3 \left[\frac{\partial H_z}{\partial t} - \text{rot}_z (\bar{v} \times \bar{H}) \right] , \quad (A.3)$$

donde σ_x , σ_y , σ_z son las conductividades a lo largo de \bar{H} , paralela a \bar{E} (componente de \bar{E} normal a \bar{H}); y perpendicular a \bar{H} y \bar{E} (asociada a la corriente Hall), respectivamente; con $\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y^2/\sigma_1)$ y \bar{H} denotando el campo magnético. Además de una ec. dinámica que describa la velocidad del gas en términos de las fuerzas externas.

La otra forma sería, suponer al plasma compuesto de dos fluidos, uno de ellos siendo la parte iónica del plasma (iones pesados más electrones) y el otro, desde luego, la parte neutra. Para tal gas binario, $c_3 = c_0$ y por tanto (A.1), (A.2), y (A.3) se reducen a

$$\nabla^2 \bar{H} - (\sigma_x/\sigma_1) \frac{\partial}{\partial z} \text{rot} \bar{H} = 4\pi c_3 \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \text{rot} (\bar{v} \times \bar{H}) \right] , \quad (A.4)$$

donde $\bar{H} = \bar{H}_0 + \delta \bar{H}$ con $\delta \bar{H}$ denotando el campo asociado a la fluctuación.

Usaremos esta segunda manera, para deducir una expresión para L , longitud de amortiguamiento, en el caso en que las fluctuaciones sean ondas de Alfvén y el amortiguamiento se deba a la fricción que existe entre los átomos ionizados (más electrones) y los neutros.

Cuando uno considera un gas parcialmente ionizado con densidades en la componente neutra, n_n , comparable a la iónica, n_i , existirá fricción entre ambas componentes debido a su diferencia de velocidad. Tal diferencia de velocidad es debida a que los iones son los que responden

principalmente a las oscilaciones electromagnéticas (i.e., la componente iónica al responder con mayor intensidad a las fluctuaciones MHD, cede energía, por colisiones, a la componente neutra).

Por simplicidad, los términos asociados a la presión del gas serán omitidos en la ec. de movimiento (siguiendo a Piddington(1956), la magnitud relativa de estos términos en la región de interés -media y alta C cromosfera- es pequeña y pueden ser despreciados). Bajo tales suposiciones las ecs. de movimiento vienen a ser

$$\rho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho_n \nu_c (\bar{v}_i - \bar{v}_n) + (v_i^2 / H_0^2) (\bar{H}_0 \times \text{rot } \bar{H}) = 0, \text{ (comp. iónica) (A.6)}$$

y

$$\rho_n \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho_n \nu_c (\bar{v} - \bar{v}_n) = 0. \text{ (comp. neutra) (A.7)}$$

donde ν_c es la frecuencia de colisión entre los iones y los átomos neutros. Para obtener (A.6) y (A.7) hemos supuesto que $\bar{K} \propto (\bar{v}_n - \bar{v}_i)$ (i.e., que el intercambio de momento entre una y otra componente es proporcional a la diferencia de sus velocidades promedio).

Soluciones de ondas planas de la forma

$$\bar{H} \propto \bar{v} \propto \exp(i\omega t - ik\zeta) \text{ (A.8)}$$

serán propuestas como soluciones a las ecs. (A.4), (A.6), (A.7). La variable ζ está definida de forma que $\hat{\zeta}$ esté sobre el plano x-z, haciendo un ángulo ψ con el eje z (ver fig. A.1). Con v_x, v_y, v_z denotamos las componentes de la velocidad \bar{v} y con H_x, H_y, H_z las componentes del campo de perturbación $\delta \bar{H}$.

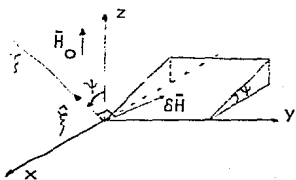


Fig. A.1 Aquí mostramos la dirección de los vectores \bar{H} , $\delta \bar{H}$, y $\hat{\zeta}$. Note como \bar{H} y $\hat{\zeta}$ (la dirección de propagación de las ondas) son perpendiculares.

Puesto que estamos tratando con ondas transversales

$$\delta \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \delta \mathbf{H} \cdot \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\gamma} = 0, \quad (\text{A.9})$$

y con ello

$$H_z = -H_x \tan \psi. \quad (\text{A.10})$$

Usando las relaciones $(\partial/\partial t) = i\omega I$, $(\partial/\partial x) = -ik \sin \psi I$, $(\partial/\partial y) = 0$, y $(\partial/\partial z) = -ik \cos \psi I$; donde I es el operador identidad y $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi \rho_i}$. Es fácil ver que el resultado de sustituir (A.8) en (A.4), (A.6), (A.7) es el siguiente:

$$(k^2 + i\epsilon\omega^2)H_x + i\epsilon H_0 \cos k v_x + (\epsilon_i/\epsilon_1) \cos^2(\psi) k^2 H_y = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$(k^2 + i\epsilon\omega^2)H_y + i\epsilon H_0 \cos(\psi) k v_y - (\epsilon_i/\epsilon_1) k^2 H_x = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$H_0 \cos(\psi) Q^{-1} \omega v_x + v_A^2 k H_x = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$H_0 Q^{-1} v_y + v_A^2 \cos(\psi) k H_y = 0, \quad (\text{A.14})$$

donde $\epsilon \equiv 4\pi n_0/\omega$ y $Q = [1 + \eta(1 + i\omega\tau)]^{-1}$, con $\eta \equiv S_n/S_i$ ($S_n = \frac{Z}{n} S_i$, si hay varias especies de átomos neutros) y $\tau = \nu^{-1}$.

Por conveniencia de términos, reemplazamos $(\epsilon_i v_A^2/\epsilon_1)$ por Ω/ω , donde Ω es la frecuencia giromagnética de los iones ($\Omega = H_0 e/m_i$, m_i la masa del ión). Así, manipulando el anterior sistema de ecs. uno obtiene una ec. cuadrática para $R (= H_y \cos \psi / H_x)$, polarización de las ondas,

$$R^2 - i \frac{\epsilon_i v_A^2 Q}{\epsilon_1} \left(\frac{1 - \cos^2 \psi}{\cos \psi} \right) R + 1 = 0, \quad (\text{A.15})$$

i.e.,

$$R = \frac{i}{2} \left[\frac{Q \Omega \sin^2 \psi}{\cos \psi} \pm \left(\frac{Q^2 \Omega^2 \sin^4 \psi}{\omega^2 \cos^2 \psi} + 4 \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Note, como en caso de que $Q=1$ (ausencia de átomos neutros), las ondas se encuentran elípticamente polarizadas.

Trabajando con R en las ecs. (A.11) - (A.14), la ec. de dispersión

para el sistema puede ser derivada de una manera sencilla, haciendo éstos obtenemos

$$\frac{\omega^2}{k^2} = Qv_A^2 S^2 + \frac{i}{\epsilon} \quad , \quad (\text{A.17})$$

donde
$$S^2 = \left[1 - \frac{\text{sen}^2 \psi}{2} \mp \left(\frac{\text{sen}^4 \psi}{2} + \frac{\text{cos}^2 \psi}{\Omega^2 Q^2} \right)^{1/2} \right] . \quad (\text{A.18})$$

De (A.17) vemos que si $\omega \ll \Omega$, $(\omega^2/\Omega^2)\text{cos}^2 \psi/Q^2 \ll 1$. En tal caso $S = \text{cos} \psi$ para la onda tipo O (Piddington 1955) , signo - , y $S=1$ para la tipo E , signo + . También vemos, como en caso de que $\omega \tau_n \gg 1$ y $\omega \tau_n \gg \eta$, i.e., los gases se mueven independientemente , $Q \rightarrow 1$; en cambio si $\omega \tau_n \ll 1$, $Q \sim (1 + \eta)^{-1}$ y las velocidades son $v' \text{cos} \psi$ y $v' = v_A (1 + \eta)^{-1/2}$ siendo más pequeña que v_A debido a la densidad del gas adicional.

Despreciando el segundo término de la derecha en la ec. (A.17) , la parte imaginaria de k vendría a ser

$$\text{Im}(k) = - (\omega/Sv_A) \text{Im}(Q^{-1/2}) \quad (\text{A.19})$$

Cuando $\omega \tau_n \ll 1$ (la frecuencia de la ondas es mucho menor que la frecuencia de colisión relevante) (A.19) toma la forma siguiente, con k' (= coeficiente de absorción) = $-\text{Im}(k)$,

$$k' \sim \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \tau_n \eta}{v_A (1 + \eta)} \quad (\text{A.20})$$

donde $v_A' = H_0 / \sqrt{4\pi \rho}$. Aquí $\rho = \rho_n + \rho_i$ representa la densidad total. Así, si $S=1$ (ondas tipo E)

$$L = (1/k) = \frac{2v_A' (1 + \eta)}{\omega^2 \tau_n} \quad (\text{A.21})$$

REFERENCIAS

- Abbott, D. C. 1980, Ap. J., 242, 1183.
- Alazraki, G. y Couturier, P. 1971, Astr. Ap., 13, 380.
- Allen, C. W. 1976, Astrophysical Quantities (3ra. ed., 2da. reimpresión; Londres: Athlone).
- Bame, S. J.; Asbridge, J. R., Feldman, W. C. y Gosling, J. T. 1977, J. Geophys. Res., S2, 1487.
- Barnes, A. 1966, Phys. Fluids, 9, 1483.
- Barnes, A. 1977, Solar System Plasma Physics, Twentieth Anniversary Review, ed. C. F. Kennel, L. J. Lanzerotti, y E. N. Parker (Amsterdam: North-Holland).
- Barnes, A. 1978, A Close-Up of the Sun, ed. Neugebauer, M. y Davies, R. W. (Pasadena, California: National and Space Administration). pag. 334.
- Belcher, J. W. 1971, Ap. J., 168, 509.
- Belcher, J. W. y Davis, L., Jr. 1971, J. Geophys. Res., 76, 3534.
- Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. 1977, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (3ra. ed. ; New York: Wiley), caps. 8 y 9.
- Boyd, T. J. M. y Sanderson, J. J. 1969, Plasma Dynamics (Londres: Thomas Nelson y Sons Ltd).
- Bretherton, F. P. y Garret, C. J. R. 1968, Proc. Roy. Soc. (London) A.302, 529.
- Calvet, M. 1986, Aparecerá en Ciencia.
- Cantó, J. 1984, Temas Selectos de Astrofísica, ed. Peimbert, H. (México, D.F. : UNAM).
- Castor, J. I., Abbott, D. C. y Klein, R. I. 1975, Ap. J., 195, 157.
- Cohen, M. y Kuhl, L. V. 1979, Ap. J., 41, 743.
- DeCampi, W. 1981, Ap. J., 244, 124.
- Dewar, R. L. 1970, Phys. Fluids, 13, 2710.
- Durney, B. R. y Roberts, P. H. 1971, Ap. J., 170, 319.
- Friend, D. B. y MacGregor, K. E. 1984, Ap. J., 282, 591.
- Garret, C. J. R. 1968, J. Fluid Mech., 34, 711.

- Hartmann, L. y MacGregor, K. E. 1980, Ap. J., 242, 260 (H1).
- Hartmann, L., Edwards, S. y Avrett, E. 1982, Ap. J., 261, 279.
- Hartmann, L. 1984, Comments Astrophys., 10, 97.
- Holzer, T. E., Fla, T. y Leer, E. 1983, Ap. J., 275, 808.
- Hollweg, J. V. 1973, Ap. J., 181, 547.
- Jackson, J. D. 1962, Classical Electrodynamics (2da. ed. ; New York: Wiley), cap. 10.
- Jacques, S. A. 1977, Ap. J., 215, 942.
- Jacques, s. A. 1978, Ap. J., 226, 632.
- Kopp, R. A. y Holzer, T. E. 1976, Solar Phys., 49, 43.
- Kwok, S. 1975, Ap. J., 198, 583.
- Lago, M.T.V.T. 1982, M.N.R.A.S., 198, 445.
- Lago, M.T.V.T. 1984, M.N.R.A.S., 210, 323.
- Landau, L. y Lifshitz, E. 1982, Curso Abreviado de Física Teórica (3ra. ed.; Moscu: Mir), tomo II y pag.117.
- Lerche, I. y Vasyliunas, V.M. 1976, Ap. J., 210, 85.
- Lucy, L. B. y Solomon, P. M. 1970, Ap. J., 159, 879.
- Lucy, L. B. y White R. L. 1980, Ap. J., 241, 300.
- Mendoza, O. B. E. 1984, Tesis Doctoral, University of Oxford.
- Mendoza, V. E. E. 1984, Temas Selectos de Astrofísica, ed. Pcimbert, M. (México, D.F. : UNAM).
- Weiss, N. O. 1974, Magnetohydrodynamics, ed. Mestel, L. y Weiss, N. O. (Binningen: Astronomical Institute University of Basel).
- Mihalas, D. 1978, Stellar Atmospheres (2da. ed. ; San Francisco: Freeman).
- Mundt, R. 1984, Ap. J., 280, 749.
- Norman, C. y Silk, J. 1980, Ap. J., 238, 158.
- Osterbrock, D. E. 1961, Ap. J., 134, 347.
- Parker, E. N. 1958, Ap. J., 128, 664.
- Parker, E. N. 1960, Ap. J., 132, 821.
- Parker, E. N. 1965, Ap. J., 141, 1463.
- Piddington, J. H. 1954, M.N.R.A.S., 114, 638.
- Piddington, J. H. 1955, M.N.R.A.S., 115, 671.
- Piddington, J. H. 1956, M.N.R.A.S., 116, 314.

- Raymond, J. C., Cox, D. P. y Smith, B. W. 1976, Ap. J., 204,
29C.
- Roberts, P. H., y Soward, A. M. 1972, Proc. Roy. Soc.
(London) A.328, 185.
- Whang, Y. y C. Chang. 1965, J. Geophys. Res., 70, 4175.
- Wentzel, D. 1974, Solar Phys., 39, 129.
- Weymann, R. 1960, Ap. J., 132, 380.
- Whitham, G. B. 1965, J. Fluid Mech., 22, 273.