4/9
2 Ejem.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

GOLPE DE ARIETE

TESIS:

Que para obtener el título de

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

PRESENTA:

ELSA FLORES SANCHEZ

DIRECTOR:

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

I N D I C E

I INTRODUCCION

El golpe de ariete, es un fenómeno que se presenta en las tuberías conductoras de fluídos y consiste en la formación de una onda de presión debido a un repentino cambio en la velocidad del flujo (aceleración o desaceleración).

Hablando en forma teórica, el golpe de ariete (conocido en ingles como "Waterhammer", debido a que este fenómeno produce un ruido semejante al generado por un martillo que golpeara a una tubería), consiste de 4 pasos que son:

a) Aumento de presión en la tubería (la tubería se expande).
b) Inversión de flujo, como consecuencia de lo señalado en el inciso anterior.
c) Disminución de la presión en la tubería como resultado de la inversión del flujo (la tubería se contrae).
d) Debido a la disminución de presión en el inciso anterior, el flujo vuelve a tener su dirección original y las condiciones iniciales regresan a su valor inicial.

Lo expresado anteriormente, es referido a su aspecto teórico, pues en la práctica la fricción juega un papel muy importante ya que es la que amortigua el fenómeno y provoca su mitigación.

Para el caso ideal, el tiempo del ciclo de "golpe de ariete es de $4L/a$ seg.

Donde: L = Longitud de la tubería.

a = Velocidad del sonido en el medio.

1.1 Objetivo

El objetivo de este trabajo es encontrar el modelo matemático que represente el comportamiento de los fenómenos transitorios (estado no estable), que ocurren durante el funcionamiento de un sistema de tuberías. Este tipo de fenómenos suceden debido a un cambio en la velocidad del fluído en el interior de la tubería.

Dentro de los fenómenos clasificados como transitorios encontramos: el golpe de ariete, cavitación, separación de columna, etc.

En la descripción de estos fenómenos (modelo matemático), se requiere el uso de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento de la mecánica de los fluídos en su forma más general. Estas dan como resultado un sistema de dos ecuaciones diferenciales, parciales e hiperbólicas de dos incógnitas, las cuales requieren para su solución el procedimiento conocido con el nombre de "método de las características" el que consiste en la conversión de las ecuaciones parciales en ordinarias.

Como toda ecuación diferencial requiere ya sea de condiciones iniciales o de frontera para hallar una solución particular de la misma, en este análisis se ha creado un capítulo en donde se deducen de una manera tanto teórica como práctica las expresiones que nos representan a dichas condiciones.

El estudio del comportamiento de los diferentes elementos que componen un sistema de tuberías se realiza por separado, con esto se quiere decir que la tubería se secciona y se analizan independientemente, por ejemplo válvulas, conexiones, bombas, tanques de amortiguamiento, etc. y finalmente se agrupa todo en un conjunto que viene a resultar el modelo matemático.

1.2 Antecedentes

El estudio de loc transientes hidráulicos empezó con la investiga - ción de la propagación de las ondas en el aire, la propagación de las -- ondas en agua, y el flujo de sangre en arterias. Sin embargo ninguno de estos problemas podía ser rigurosamente resuelto hasta el desarrollo de las teorías de la elasticidad y el cálculo, y la solución de las ecua - ciones diferenciales parciales. Newton presento en su " *Principia* ", el resusltado de sus investigaciones sobre la propagación de las ondas de sonido en el aire y la propagación de las ondas de agua en canales. Newton y Lagrange obtubieron teoricamente la velocidad del sonido en aire como 298.4 m/seg comparada con el valor experimental de 348 m/seg. Lagrange atribuyó erroneamente esta diferencia a un error experimen - tal, pero Newton explicó que la velocidad teórica era incorrecta debido al espaciamiento de las partículas sólidas de aire y a la presencia de vapor en éste. Comparando las oscilaciones en un tubo U con las de un péndulo, Newton derivó una expresión incorrecta para la celeridad de las ondas de agua en un canal, como $\pi\sqrt{L/g}$, donde L= longitud de onda y g= aceleración de la gravedad. Euler desarrolló una teoría detallada de la propagación de ondas elásticas y derivó la siguiente ecuación diferencial parcial para propagación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

En donde a^2= gh ; x= posición de equilibrio de una partícula; y= desplazamiento de la partícula; y h= altura de la columna de aire. También desarrolló una solución general de esta ecuación como:

$$y = F(x + at) + f(x - at)$$

En la cual F y f son funciones de las ondas. Euler también trató, pero falló en obtener una solución para el flujo de sangre en arterias. Lagrange analizó el flujo de fluídos compresible e incompresible, para este propósito desarrolló el concepto de velocidad potencial. El, también derivó una expresión correcta para la celeridad de la onda en un canal como; $c = \sqrt{gd}$, en donde d = profundidad del canal. En 1789, Monge desarrolló un método gráfico para integrar las ecuaciones diferciales parciales e introdujo el término " *Método de las característi-cas* ". En 1808, Laplace puntualizó el porqué de las diferencias entre valores medidos y teóricos de la velocidad del sonido en aire. Explicó que las relaciones derivadas por Newton y Lagrange estaban basadas en la ley de Boyle y que ésta no era válida bajo variaciones de presión ya que la temperatura del aire no era constante. Propuso que la velocidad teórica se incrementaba más o menos en un 20 por ciento si eran usadas condiciones adiabáticas en lugar de condiciones isotérmicas.
Young investigó el flujo de corriente sanguinea, la propagación de ondas de presión en tuberías asi como pérdidas por fricción y por accesorios. Helmholtz aparece como el primero en puntualizar que la velocidad de la onda de presión en agua contenida en una tubería, era menor que en agua libre. El, correctamente atribuyó esta diferencia a la elasticidad de las paredes de la tuberia. En 1869, Riemann desarrolló una ecuación tridimensional de movimiento y su forma unidimensional aplicada a campos tales como vibración en hilo tensado y ondas de sonido. Weber estudió el flujo de un flüido incompresible en una tubería elástica y condujó experimentos para determinar la velocidad de las ondas de presión. El también desarrolló las ecuaciones dinámica y de continuidad que son la base del presente trabajo. Marey trabajó en una se-

rie de experimentos para determinar la velocidad de las ondas de presión en agua y en mercurio y concluyó que la velocidad de la onda era:

1. Independiente de la amplitud de la onda de presión
2. tres veces mayor en el mercurio que en el agua
3. proporcional a la elasticidad del tubo.

Resal desarrolló las ecuaciones dinámica y de continuidad y una ecuación de onda de segundo orden, usó los resultados experimentales de -- Marey para verificar sus estudios analíticos. En 1877, Lord Rayleigh publicó su libro sobre teoría del sonido, en el que resumió los ultimos estudios que existían junto con sus propias investigaciones.

Korteweg fué el primero en determinar la velocidad de la onda considerando la elasticidad de las paredes del conducto, así como del flúido; otros investigadores consideraban solo alguna de las dos.

A pesar de que Wood mencionó a Michaud como el primero en ocuparse - del problema de golpe de ariete, recientes investigaciones hechas por Anderson muestran que Menabrea fué el primero en estudiar este problema. Michaud estudió el problema del golpe de ariete y el diseño y uso de cámaras de aire y válvulas de seguridad.

Gromeka incluyó las pérdidas por fricción en el análisis de golpe de ariete por primera vez. Él supuso sin embargo, que el líquido era incompresible y que las pérdidas por fricción eran directamente proporcionales a la velocidad del flujo.

Weston y Carpenter ingenieros americanos realizarón una serie de experimentos para desarrollar una relación teórica entre la reducción de la velocidad en una tubería y el correspondiente incremento de presión. Sin embargo ninguno tuvo exito ya que sus tuberías eran cortas.

Frizell presentó un análisis de golpe de ariete basado en estudios que realizó en la hidroeléctrica de Ogden en Utah. Esta tenía una compuerta de 9499 m. Frizell desarrolló expresiones para la velocidad de la onda en golpe de ariete y para aumentos de presión debidos a reducción instantánea del flujo. El estableció que la velocidad de la onda debería ser igual que la de la onda del sonido en agua, si el módulo de elasticidad de la tubería fuera infinito. Tambien presentó los efectos de redes de tuberías, reflexión de las ondas y ondas sucesivas en reguladores de velocidad. Desafortunadamente, el trabajo de Frizell no ha sido tan apreciado como el de sus contemporaneos, Joukowski y Allievi. En 1897, Joukowski condujo extensos experimentos en Moscú, para tuberías con las siguientes dimensiones (expresadas en longitud y diametro - respectivamente); 7620 m, 50 mm; 305 m, 101.5 mm; y 305 m, 152.5 mm. Basado en sus estudios teóricos y experimentales, publicó su reporte clásico sobre la teoría de golpe de ariete. Desarrolló una fórmula para la velocidad de onda, tomando en cuenta la elasticidad del agua y de la pared de la tubería, también desarrolló la relación entre la reducción de la velocidad y el resultante aumentó de presión usando dos métodos: la conservación de la energía y la condición de continuidad. Trabajó en la propagación de una onda de presión a lo largo de una tubería y la reflexión de las ondas de presión a lo largo de toda la red de tuberías. Estudió los efectos de cámaras de aire, cámaras de oscilación y válvulas de seguridad para presiones debidas a golpe de ariete, Investigó los efectos por cierre de válvulas y encontró que el aumento de presión eran máximos para tiempos de cierre, $T \leq 2L/a$, en donde L= longitud de la tubería y a= velocidad de onda.

Allievi desarrolló la teoría general del golpe de ariete, que publicó en 1902. La ecuación dinámica que él obtuvo fué más adecuada que la propuesta por Korteweg. Mostró que el término $V(\partial v/\partial x)$ en la ecuación dinámica no era tan importante comparado con los otros términos y podía despreciarse. Introdujo los parámetros adimensionales,

$$\rho = \frac{a\,V_o}{2\,g\,H_o}$$

$$\theta = \frac{a\,T_c}{2\,L}$$

en donde a= velocidad de la onda; V_o= velocidad del flúido en estado estable; L= longitud de la tubería; T_c= tiempo de cierre de la válvula ρ= a un medio de la energía cinética del flúido dividida por la energía potencial almacenada en el flúido y las paredes del conducto a una carga de presión H_o; y θ= característica del cierre de la válvula. Para un tiempo T_c de cierre de la válvula, Allievi obtuvó una expresión para el incremeto de presión en la válvula y presentó cartas para el auménto y caída de presión causados por abertura o cierre de la válvula. Braun presentó ecuaciones similares a las publicadas por Allievi y posteriormente propone que la llamada constante de Allievi , fue realmente introducida por él. Sin embargo se considera que Allievi fué el primero que propone la teoría básica del golpe de ariete. Allievi, también estudió el movimiento rítmico del cierre o abetura de una válvula y provó que la presión no puede exceder dos veces la carga estática.

Las teorías de Joukowski y Allievi fueron principalmente usadas en las primeras dos décadas del siglo XX. Camichel demostró que duplicando las cargas de presión, esto no es posible a menos que $H_o > aV_o/g$.

Constantinescu Inventó un mecanismo para transmitir energía mecánica usando las ondas de golpe de ariete.

Basado en la teoría de Joukowski, Gibson presentó un trabajo que incluía por primera vez en el análisis, pérdidas por fricción no-lineales. También inventó un aparato para medir la descarga de la turbina.

Strowger y Kerr presentaron un procedimiento de computadora para determinar los cambios de velocidad de una turbina hidráulica causados por cambios de carga. Las presiones debidas a golpe de ariete cambian la eficiencia de la turbina para varias posiciones de abetura y los movimiento uniformes y no-uniformes de la abertura, también fueron tomados en cuenta para el análisis. Wood introdujó un método gráfico para el análisis de golpe de ariete. Löwy independientemente desarrolló un método gráfico en 1928. También estudió la resonancia causada por movimientos periódicos de la válvula y caídas de presión debidas a la abertura gradual de válvulas y compuertas. Consideró las pérdidas por fricción en su análisis de las ecuaciones diferenciales parciales básicas. Schnyder incluyó características completas de bombas en su análisis de golpe de ariete para tuberías conectadas a bombas centrífugas. Bergeron extendió el método gráfico para determinar las condiciones en las secciones intermedias de una tubería y Schnyder fué el primero en incluir las pérdidas por ficción en el análisis gráfico. En el simposio organizado por la ASCE y la ASME en 1933 en Chicago, fueron presentados muchos trabajos sobre análisis de golpe de ariete en tuberías y en compuertas.

Angus delineó la teoría básica y algunas aplicaciones del método gráfico, incluyendo pérdidas por fricción y Bergeron presentó un trabajo describiendo la teoría de ondas elásticas planas para varios medios.

Otro simposio sobre golpe de ariete fué en 1937 en el congreso anual de la ASME. En este simposio fueron presentados trabajos en el análisis de cámaras de aire y válvulas. Linealizando el término de fricción. Wood usó el cálculo operacional de Heaviside y después Rich usó la transformada de Laplace para el análisis de golpe de ariete en tuberías. Angus presentó en 1938 el análisis de tuberías compuestas y en ramificaciones y también el análisis de separación de columna. Otros trabajos sobre separación de columna fueron presentados por Lupton, Richard y Duc.

De 1940 a 1960 además de los libros de Rich, Jaeger y Parmakian, numerosos trabajos fueron publicados sobre análisis de golpe de ariete. debido a que son muchos no son nombrados en el presente trabajo.

Ruus fué el primero que presentó procedimientos para determinar la secuencia del cierre de una válvula, llamando cierre óptimo de válvula, a la presión máxima que permanece dentro de los límites prescritos.

Posteriormente Cabelka y Franc y Streeter independientemente desarrollarón la teoría más reciente y la computarizarón para sistemas complejos de tuberías.

Gray introdujó el método de las características para el análisis de golpe de ariete por computadora. Lai lo usó en su tesis doctoral y su trabajo junto con el de Streeter fueron los pioneros haciendo popular el uso de la computadora para el análisis de fenómenos transitórios. Luego Streeter publicó numerosos trabajos sobre el método de las características, asi como un texto sobre tarnsientes hidráulicos.

Nota: Todos los autores nombrados en esta sección se encuentran referenciados en la bibliografia 3.

1.3 Velocidad de la onda de presión

La magnitud de la velocidad de la onda de presión depende de dos variables como lo son el módulo volumétrico del fluído y la dilatación de la tubería.

Antes que nada, deduciremos la expresión de Allievi, que nos ayudará a calcular la velocidad de la onda de presión.

Por la segunda ley de Newton sabemos que:

$$F = m\ddot{x} \qquad \begin{array}{l} F = \text{Fuerza} \\ m = \text{Masa} \\ \ddot{x} = \text{Aceleración} \end{array}$$

dividiendo por el área:

$$\frac{F}{A} = \frac{m}{A}\ddot{x}$$

además sabemos que:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} \qquad y \qquad P = \frac{F}{A} = \text{presión}$$

consecuentemente, la segunda ley de Newton:

$$P = \frac{m}{A}\frac{dv}{dt} \tag{1}$$

pero, la masa se puede definir como:

$$\rho = \frac{M}{V}; \begin{array}{l} M = \text{Masa} \\ V = \text{Volumen} \end{array}$$

entonces $M = \rho V$

$$V = A\,L \qquad \begin{array}{l} A = \text{Area} \\ L = \text{Longitud} \end{array}$$

entonces $M = \rho A\,L$

por lo tanto (1), quedará así:

$$P = \frac{\rho A L}{A}\frac{dv}{dt} \quad \text{entonces} \quad P = \rho L \frac{dv}{dt}$$

Si tomamos un pequeño elemento de tubería, la ecuación anterior será modificada de la forma siguiente:

$$\Delta P = \rho \Delta x \frac{dv}{dt} \qquad \Delta x = \text{Elemento de tubería} \tag{2}$$

Ahora, supongamos que la velocidad de la onda de presión la definimos por la letra "a"; entonces tendremos que:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a} \qquad \Delta t = \text{Tiempo que tarda la onda de presión en pasar la distancia "}\Delta x\text{".} \tag{3}$$

La ecuación (2), podrá ser escrita como:

$$\Delta P = \rho \Delta x \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4}$$

de(3), en (4):

$$\Delta P = \rho \Delta x \frac{\Delta v}{\frac{\Delta x}{a}}$$

$$\Delta P = \rho a \Delta v$$

dividiendo entre el peso específico (γ):

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \rho a \frac{\Delta v}{\gamma} \quad ; \quad \gamma = \rho g$$

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \rho a \frac{\Delta v}{\rho g}$$

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{a}{g}\Delta v \tag{5}$$

pero si partimos desde velocidad nula:

$$\Delta v = v_f - v_i = v_f - o = v_f = v$$

$$\Delta v = v$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5):

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{a}{g}\, v$$

$$\frac{\Delta P}{v} = \frac{a\gamma}{g} = \frac{a\rho g}{g}$$

$$\frac{\Delta P}{v} = a\rho \qquad \text{Ecuación de Allievi} \qquad (6)$$

A continuación, deduciremos la expresión para calcular la velocidad de la onda de presión con base en la ecuación de Allievi (6).

Supongamos que se aplica una presión " P" a una tubería, como consecuencia de ésto el fluído interior se comprimirá.

Por la definición de módulo volumétrico tenemos:

$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad V = \text{Volumen}$$

Como el incremento de volumen será negativo, el aumento en el volumen del líquido debido a la presión será:

$$K = \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \text{, entonces } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta P}{K}$$

$$\Delta V = V\,\frac{\Delta P}{k} = \frac{\pi d^2}{4}\, L\, \frac{\Delta P}{k} \qquad L = \text{Longitud de la tubería.}$$

El esfuerzo en las paredes de la tubería es $f_h = \frac{\Delta P d}{2e}$, donde " e ", es el espesor de la tubería.

En tanto que el esfuerzo circunferencial es :

$$\sigma_h = \frac{f_h}{E} \qquad \text{E=Módulo de Young o de elasticidad}$$

El incremento en el radio de la tubería es $= \sigma_h \frac{d}{2}$

El aumento en el volumen de la tubería ΔV_t = Circunferencia . longitud . incremento del radio.

$$\therefore \quad \Delta V_T = (\pi d L)\sigma_h \frac{d}{2}) = \frac{1}{2}\pi d^2 L\sigma_h$$

$$\Delta V_T = \frac{1}{2}\pi d^2 L \frac{fh}{E}$$

$$\therefore \quad \Delta V_T = \frac{1}{2}\pi d^2 L \frac{1}{E}\left(\frac{\Delta P d}{2e}\right) \tag{7}$$

Consecuentemente, el volumen total debido a la dilatación de la tubería y a la compresión será:

$$\Delta V_{Total} = \frac{\pi d^2}{4} L \frac{\Delta P}{K} + \frac{1}{2}\pi d^2 L \frac{1}{E}\left(\frac{\Delta P d}{2e}\right) \tag{8}$$

$$\Delta V_{Total} = \frac{\pi d^2 L}{4}\Delta P\left(\frac{1}{K} + \frac{d}{Ee}\right)$$

También sabemos que:

$$Q = \frac{V}{t}$$

Q = Gasto
V = Volumen
t = Tiempo

Entonces $t = \frac{V}{Q}$

pero $Q = vA$ v = Velocidad
A = Area

Quedando el tiempo en función de:

$$t = \frac{V}{vA}$$

Expresando lo anterior por medio de incrementos:

$$t = \frac{V}{vA}$$

Para nuestro caso:

$$\Delta t = \frac{\Delta V_{Total}}{v\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} \tag{9}$$

De (8) en (9):

$$\Delta t = \frac{\frac{\pi d^2}{4} L \,\Delta P\left(\frac{1}{K} + \frac{d}{Ee}\right)}{v\left(\pi d^2\right)}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta P\ L}{v} \left(\frac{1}{k} + \frac{d}{Ee} \right) \tag{10}$$

De la ecuación

$$\frac{\Delta P}{v} = \rho a \tag{11}$$

$$\Delta P = \rho v a$$

Además de la ecuación (2), podemos ver que:

$$\Delta P = \rho L \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{12}$$

Igualando (12) y (11):

$$\rho v\ a = \rho L \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{L}{v} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{13}$$

Pero como supusimos anteriormente que $\Delta v = v$:

$$a = \frac{L}{v} \frac{v}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t}$$

De (10) en (13):

$$a = \frac{L}{\frac{\Delta PL}{v} \left(\frac{1}{k} + \frac{d}{Ee}\right)}$$

$$a = \frac{1}{\frac{\Delta P}{v} \left(\frac{1}{k} + \frac{d}{Ee}\right)} \tag{14}$$

De (1) en (14):

$$a = \frac{1}{a\rho \left(\frac{1}{k} + \frac{d}{Ee}\right)}$$

$$a^2 = \frac{1}{\rho \left(\frac{1}{k} + \frac{d}{Ee}\right)}$$

Entonces $a^2 = \dfrac{1}{\rho\left(\dfrac{Ee + kd}{kEc}\right)}$

Entonces $a^2 = \dfrac{kEe}{\rho(Ee + kd)} \cdot \dfrac{\frac{1}{Ee}}{\frac{1}{Ee}}$

Entonces $a^2 = \dfrac{K}{\rho\left(1 + \dfrac{Kd}{Ee}\right)}$ Ecuación de la velocidad de onda (15)

Donde: K = Módulo de elasticidad volumétrico del fluído.

E = Módulo de Young, de la tubería.

e = Espesor de la tubería.

d = Diámetro interior de la tubería.

ρ = Densidad del fluído.

OTROS TIPOS DE ECUACIONES UTILIZADAS EN EL CALCULO DE LAS VELOCIDADES DE ONDA.

Haiiliwell presenta la siguiente ecuación general para el cálculo de la velocidad de onda.

$$a^2 = \frac{K}{\rho(1 + (k/E)\psi)}$$

Donde:

ψ = Parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas del conducto.

k = Módulo de elasticidad volumétrico del fluído.

ρ = Densidad del fluído

E = Módulo de Young.

Las expresiones de ψ, para diferentes condiciones son las siguientes:

1.- Conducto rígido

$\psi = 0$

2.- Conductos elásticos de pared gruesa.

a) Conducto sujeto con movimiento longitudinal restringido

$$\psi = 2\ (1+\nu)\ \frac{Ro^2 + Ri^2}{Ro^2 - Ri^2} - \frac{2\nu Ri^2}{Ro^2 - Ri^2}$$

Donde:

ν = Relación de Poisson.

Ro = Radio externo

b) Conducto anclado con el movimiento longitudinal restringido en la extremidad superior.

$$\psi = 2\left[\frac{Ro^2 + 1.5Ri^2}{Ro^2 - Ri^2} + \frac{\nu(Ro^2 - 3Ri^2)}{Ro^2 - Ri^2}\right]$$

Donde:

Ro = radio exterior
Ri = radio interior
ν = relación de Poisson

c) Conducto con juntas de expansión.

$$\psi = 2\left[\frac{Ro^2 + Ri^2}{Ro^2 - Ri^2} + \nu\right]$$

Donde:

Ro = radio exterior
Ri = radio interior
ν = relación de Poisson.

3.- Conductos elásticos con paredes delgadas.

a) Conducto anclado con el movimiento longitudinal restringido.

$$\psi = \frac{D}{e}(1-\nu)$$

Donde:

D = diámetro del conducto
e = espesor
ν = relación de Poisson

b) Conducto anclado para evitar el movimiento longitudinal en el extremo superior.

$$\psi = \frac{D}{e}(1.25 - \nu)$$

Donde:

D = diámetro del conducto
e = espesor
ν = relación de Poisson.

II ECUACIONES PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE

Con el propósito de obtener las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio en una tubería, es necesario utilizar :

a) La segunda ley de Newton

b) La ecuación de continuidad

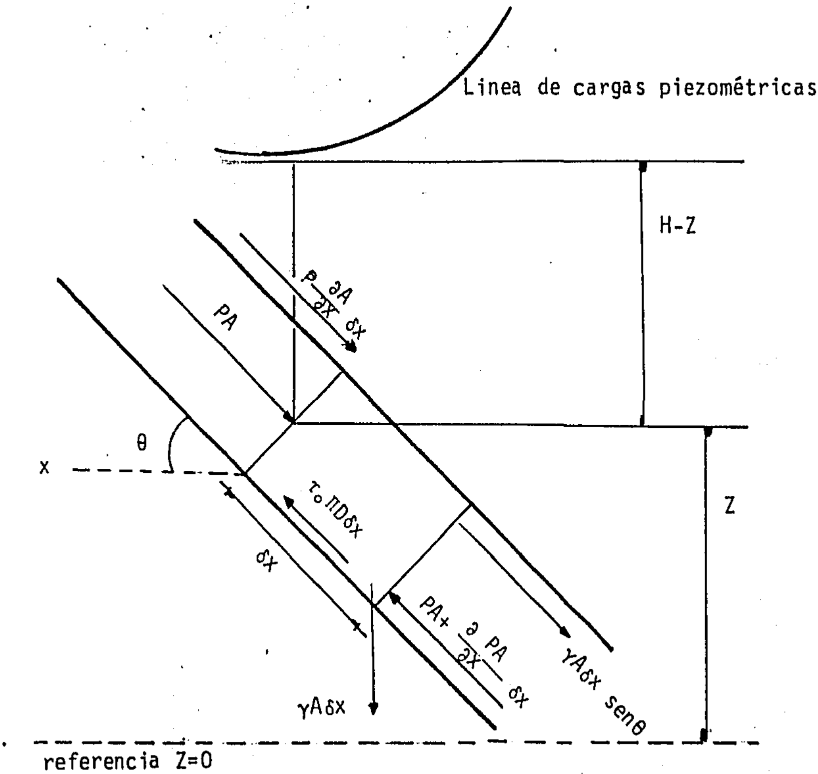
En nuestro caso las variables dependientes que se consideran son el nivel "H" de la linea de cargas piezométricas con respecto a un plano base de referencia y Q el gasto que pasa através de una sección transversal. Por otra parte, las variables independientes estan constituidas por la distancia "x" a lo largo de la tuberia, medida desde el extremo aguas arriba de la tuberia y el tiempo t. De esta manera:

$$H = H\ (x,t)$$

$$Q = Q\ (x,t)$$

2.1 Ecuación dinámica o de movimiento

En este caso se aplica la segunda ley de Newton en la dirección axial de la tubería, se toma como volumen de control un elemento de fluido entre dos secciones, separadas por una distancia " δx " segun lo muestra la figura 1.



Linea de cargas piezométricas
H-Z
P ∂A/∂x δx
PA
θ
x
$\tau_o \pi D \delta x$
δx
Z
PA+ ∂ PA/∂x δx
γAδx senθ
γAδx
referencia Z=0

Figura 1.

Donde: H = carga total en un punto de la Línea de cargas piezométricas.

P = presión

A = Area

$\gamma A\delta x$ = peso del elemento de fluído

$P\frac{\partial A}{\partial x}\delta x$ = variación de la fuerza de acuerdo al área.

$\tau\P D\delta x$ = fuerza debida a la fricción

$\tau o = \frac{\rho f v^2}{8}$ esfuerzo cortante en la pared de la tubería

Donde: ρ = densidad

V = velocidad

f = coeficiente de fricción.

Por lo tanto aplicando la segunda ley de Newton a nuestra figura

$$\Sigma F = ma$$

$$m = \rho A\delta x$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$PA-\left[PA+\frac{\partial(PA)}{\partial X}\delta x\right] + P\frac{\partial A}{\partial x}\delta x + \gamma A\,\delta x\,\mathrm{sen}_\theta - \tau_o\P D\delta x = \rho A\delta x\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\partial(PA)}{\partial x}\delta x + \frac{P\partial A}{\partial x}\delta x + \gamma A\delta x\,\mathrm{sen}_\theta - \tau_o\P D\delta x = \rho A\delta x\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\rho\partial A}{\partial x}\delta x - \frac{A\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{P\partial A}{\partial x}\delta x + \gamma A\delta x\,\mathrm{sen}\theta - \tau_o\P D\delta x = \rho A\delta x\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{A\partial P}{\partial x}\delta x + \gamma AS\,x\,\mathrm{sen}\Theta - \tau_o\P\,D\delta x = \rho A\,\delta x\frac{dv}{dt}$$

dividiendo entre $\rho A\delta x$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} + g\,\mathrm{sen}\theta - \frac{\tau_o\P D}{A} = \frac{dv}{dt}$$

Como: $\tau_o = \frac{\rho f v^2}{8}$ $A = \frac{\pi D^2}{4}$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\ \mathrm{sen}\theta - \frac{\left(\frac{\rho f v^2}{8}\right)\ \pi D}{\rho\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g\ \mathrm{sen}\theta - \frac{4\rho f\ v^2 \pi D}{8\rho\pi D^2} = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g\ \mathrm{sen}\theta - \frac{fv^2}{2D} = \frac{dv}{dt} \tag{16}$$

Como estamos tomando positivo el descenso del fluido tendremos que:

$$Z = -\ x\ \mathrm{sen}\theta$$

Por otra parte

$$P = \gamma H = \rho g H$$

Entonces

$$P = \rho g\ (H-Z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g\ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}$$

Además

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\ \mathrm{sen}\theta$$

Así

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g\left[\frac{\partial H}{\partial x} - (-\mathrm{sen}\theta)\right] = \rho g\left[\frac{\partial H}{\partial x} + \mathrm{sen}\theta\right] \tag{17}$$

de (17) en (16):

$$-\frac{1}{\rho}\left[\rho g\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \mathrm{sen}\theta\right)\right] + g\ \mathrm{sen}\theta - \frac{fv^2}{2D} = \frac{dv}{dt}$$

$$-g\frac{\partial H}{\partial x} - g\ \mathrm{sen}\theta + g\ \mathrm{sen}\theta - \frac{fv^2}{2D} = \frac{dv}{dt}$$

$$-g\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{fv^2}{2D} = \frac{dv}{dt}$$

$$g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dv}{dt} + \frac{fv^2}{2D} = 0 \tag{18}$$

De Cálculo sabemos que la derivada total se expresa como:

$$V = V\ (x,t)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\ dx + \frac{\partial V}{\partial t}\ dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}\ \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{pero como } V = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\ V + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{19}$$

De (19) en (18) :

$$L2 = g\,\frac{\partial H}{\partial x} + V\,\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f\ v/v/}{2D} = 0$$

v^2 = v/v/, pués el flujo puede cambiar de dirección.

Donde:

L_2 es la ecuación dinámica para un flujo transitorio en tuberías.

2.2 Ecuación de continuidad

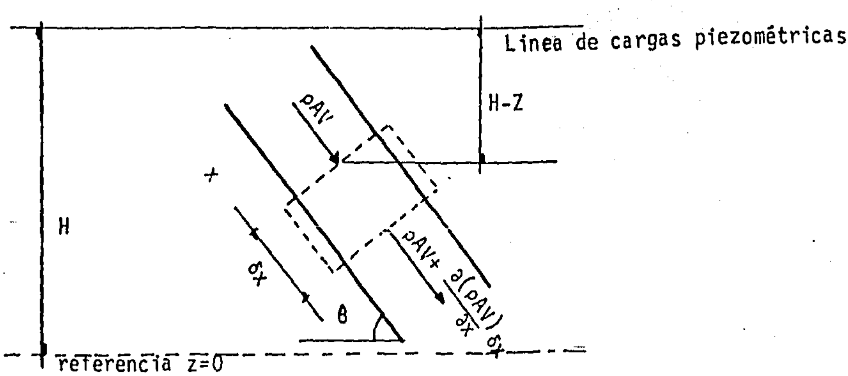


Figura 2.

La ecuación de continuidad, nos dice que:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

expresado lo anterior de otra forma:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{v.c.} \rho \, dv + \int_{s.c.} \rho \, v.dA$$

Para nuestro caso $dv = A\delta x$

la ecuación de continuidad en nuestro caso se podrá escribir como:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A\delta x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho AV) \, \delta x$$

desarrollando la ecuación anterior

$$0 = (A\delta x)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\delta x\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (VA\delta x) + \frac{\partial v}{\partial x} (\rho A\delta x) + \frac{\partial A}{\partial x} (\rho V\delta x)$$

dividiendo la ecuación anterior entre $\rho A\delta x$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\rho} v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{A} V \frac{\partial A}{\partial x}$$

reacomodando términos:

$$\underbrace{\frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t}}_{\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}} + \underbrace{\frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

pués:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = V$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = V$$

quedando:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (20)$$

de resistencia de materiales sabemos que:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = \frac{D}{t'E}\frac{dP}{dt} \text{ (para tuberías)}$$

Además de mecánica de fluídos conocemos "K" como el modulo de elasticidad volumétrica que se define:

$$K = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dP}{dt}$$

sustituyendo lo anterior en (20)

$$\frac{D}{t'E}\frac{dp}{dt} + \frac{1}{K}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad A$$

Además sabemos que:

$$a^2 = \frac{K/\rho}{1 + \left(\frac{K}{E}\right)\left(\frac{D}{t'}\right)C_1}$$

Donde:

ρ = densidad del fluido
a = velocidad de la onda
K = módulo de elasticidad volumetrica
E = módulo de Young
D = Diámetro de la tubería
t' = espesor de la tubería
C_1 = constante de tubería ($C_1 = 1$, para juntas de expansión)

Sustituyendo a^2 en la ecuación A obtenemos :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} + a^2\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad B$$

Como:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial t}\frac{dt}{dt} = V\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$P = \rho g\ (H-Z)\ ;\ \frac{dP}{dt} = V\ \rho g\ \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial Z}{\partial x}}^{\,sen\,\theta}\right) + \rho g\ \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial Z}{\partial t}}^{\,0}\right)$$

sustituyendo en (B), finalmente tenemos:

$$L_1 = \frac{a^2}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + V\ sen\theta = 0$$

Donde L_1 es la ecuación de continuidad

Ahora bien para la solución de las ecuaciones L_1 y L_2 se útiliza en el presente trabajo, el método de las características que es presentado ahora.

III METODO DE LAS CARACTERISTICAS

3.1 Ecuaciones Características

Las ecuaciones L_1 y L_2 tienen dos incognitas y se pueden combinar linealmente en una sola ecuación.

$$L = L_1 + \lambda\ L_2 \tag{21}$$

Con lo anterior se persigue, encontrar dos valores de λ que nos ayuden a simplificar las ecuaciones.

sustituyendo L_1 y L_2 en (21)

Tenemos:

$$L = \left[\frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + V\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + V\ sen\theta\right] + \lambda\left[g\ \frac{\partial H}{\partial x} + V\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV/V/}{2D}\right] = 0$$

(22) $$L = \left[\frac{\partial H}{\partial x}\ (V + \lambda\ g) + \frac{\partial H}{\partial t}\right] + \lambda\left[\frac{\partial V}{\partial x}\ \left(V + \frac{a^2}{g.\lambda}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}\right] + V\ sen\theta + \frac{\lambda fV/V/}{2D} = 0$$

La ecuación anterior puede modificarse si los términos entre paréntesis son parte de una derivada total, o sea:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = V\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} ;$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = V + \lambda g \qquad (23)$$

Para el segundo parentesis rectangular.

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{a^2}{\lambda g} \qquad (24)$$

igualando(23) a (24)

$$V + \lambda g = V + \frac{a^2}{\lambda g}$$

$$(\lambda g)^2 = a^2$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{g^2}$$

$$\therefore \quad \lambda = \pm\frac{a}{g} \qquad (25)$$

sustituyendo(25) en (22)

$$L = \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g}\frac{dv}{dt} + V\, sen\theta + \frac{afV/V/}{2gD} = 0$$

Pendiente Positiva

$$\frac{dx}{dt} = V + a$$

$$L = \frac{dH}{dT} - \frac{a}{g}\frac{dv}{dt} + V\, sen\theta - \frac{afV/V/}{2gD} = 0$$

Pendiente Negativa

$$\frac{dx}{dt} = V - a$$

El signo de las pendientes se debe a qüe " $V \ll a$ mult plicando las ecuaciones anteriores por dt e inteqrando

$$\int dH + \int \frac{a}{g}\, dv + \int V \operatorname{sen}\theta\, dt + \int \frac{afV/V/}{2gD}\, dt = 0$$

$$\int dH - \int \frac{a}{g}\, dv + \int V \operatorname{sen}\theta\, dt - \int \frac{afV/V/}{2gD}\, dt = 0$$

finalmente integrado:

$$Hpi - H_{i-1} + \frac{a}{g}(Vpi - V_{i-1}) + (V_{i-1} \operatorname{sen}\theta)\,\Delta t + \frac{afV/V/}{2gD}\,\Delta t = 0$$

$$Hpi - H_{i+1} - \frac{a}{g}(vpi - V_{i+1}) + (V_{i+1} \operatorname{sen}\theta)\,\Delta t - \frac{afV/V/}{2gD}\,\Delta t = 0$$

pero $Q = VA \qquad V = \frac{Q}{A}$

$$Hpi - H_{i-1} + \frac{a}{gA}(Qpi - Q_{i-1}) + \frac{Q_{i-1}}{A}\Delta t \operatorname{sen}\theta + \frac{f\Delta x}{2gA^2D} Q_{i-1}/Q_{i-1}/=0 \qquad (26)$$

$$Hpi - H_{i+1} - \frac{a}{gA}(Qpi - Qp_{i+1}) + \frac{Q_{i+1}}{A}\Delta t \operatorname{sen}\theta - \frac{f\Delta x}{2gA^2D} Q_{i+1}/Q_{i+1}/=0 \qquad (27)$$

ecuaciones que nos darán el resultado en puntos intermedios en la tubería.

Sumando las dos ecuaciones anteriores.

$$Hpi = 0.5\Big[H_{i-1} + H_{i+1} + \frac{a}{gA}(Q_{i-1}\, Q_{i+1}) - \frac{\Delta t \operatorname{sen}\theta}{A}(Q_{i-1} + Q_{i+1})$$

$$- \frac{f\Delta x}{2gD\, A^2}\,(Q_{i-1}\,|Q_{i-1}| - Q_{i+1}\,|Q_{i+1}|)\Big]$$

Conocido este valor y sustituyendo en la ecuación 26 ó 27 conocemos el gasto Q.

3.2 Condiciones de frontera

El término condición de frontera se refiere a la condición que priva en cada extremo de una tubería.

Cuando quer^mos calcular la condición de frontera aguas abajo aplicamos las siguientes formulas;

$$Hp_{n,s} = Cp - CH\ Qp_{n,s},$$

Donde:

$$Cp = Hn + Qn\ (CH - \frac{\Delta t}{A}\ \text{sen}\theta - \frac{f\Delta x}{2gDA^2}\ /Qn/)$$

$$CH = \frac{a}{gA}$$

En tanto, aguas arriba las condiciones se calculan como:

$$Hp_1 = CM + CH\ Q\ p_1$$

Donde:

$$CM = H_2 - Q_2\ (CH + \frac{\Delta t}{A}\ \text{sen}\theta - \frac{f\Delta x}{2gDA^2}\ /Q_2/)$$

Condiciones de frontera para una válvula u orificio descargando a la atmósfera.

de Bernoulli

$$Q_o = (Cd\ Ag)_o \sqrt{2gHo}$$

$$Qp = (Cd\ Ag)_p \sqrt{2gHp}$$

$$\frac{Q_p}{Q_o} = \frac{(Cd\ Ag)_p}{(Cd\ Ag)_o} \frac{\sqrt{2gHp}}{\sqrt{2gHo}}$$

Donde:

$$\tau = \frac{(Cd\ Ag)p}{(Cd\ Ag)o}$$

$$Q_p = Qo\tau\frac{Hp}{Ho}$$

$$Q_{pns} = Qo\tau\sqrt{\frac{Hpns}{Ho}} \qquad (a)$$

De las ecuaciones características.

$$H_{pns} = Cp - B\,Q_{ns} \qquad \text{(b)}$$

$$Cp = H_n + Q_n \left(B - \frac{\Delta t}{A}\,\mathrm{sen}\theta - \frac{f\Delta x}{2gDA^2}\,/Q_n/\right)$$

$$B = \frac{a}{gA}$$

sustituyendo (a) en (b)

$$Q_{pns} = Qo\tau\sqrt{\frac{Cp - BQpns}{Ho}}$$

$$\left(\frac{Q_{pns}}{Qo\,\tau}\right)^2 = \frac{Cp - BQ_{pns}}{Ho}$$

$$Ho\left(\frac{Qpns}{Qo\tau}\right)^2 - Cp + BQ_{pns} = 0$$

$$Ho\,(Q_{pns})^2 + B(Qo\tau)^2\,Q_{pns} - (\tau Qo)^2\,Cp = 0$$

$$Q_{p,ns} = \frac{-B\,(Qo\tau)^2 \pm\sqrt{B^2(Qo\tau)^4 - 4(Ho)(-(\tau Qo)^2\,Cp)}}{2Ho}$$

$$Cv = \frac{(Qo\tau)^2}{2Ho}$$

$$Q_{p\,ns} = -BCv + \sqrt{B^2Cv^2 + 2C_p\,Cv}$$

Conexiones en serie (aumento en el díametro de la tubería)

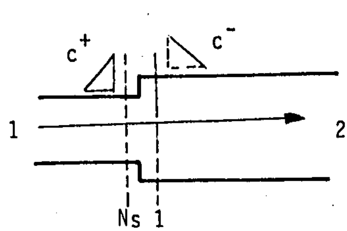


Figura 3.

De acuerdo a la ecuación de continuidad:

$$Q_1 = Q_2$$

$$Q_{p1,ns} = Q_{p2,1}$$

con referencia a las ecuaciones de compatibilidad

$$Hpi = Cp - BQpi \quad (C^{+})$$

$$Hpi = Cm + BQpi \quad (C^{-})$$

como buscamos una Hp Común

$$Hp = Hp_{1,ns} = Hp_{2,1}$$

igualando las ecuaciones de compatibilidad y tomando en cuenta a la ecuación de continuidad:

$$Cp_1 - B_1Qp_{1,ns} = Cm_2 + B_2\, Qp_{2,1}$$

$$Cp_1 - B_1Qp = Cm_2 + B_2Qp$$

$$\therefore \quad Qp\,(B_1 + B_2) = Cp_1 - Cm_2$$

$$Qp = \frac{Cp_1 - Cm_2}{B_1 + B_2}$$

$$Qp_{1,ns} = \frac{Cp_1 - Cm_2}{B_1 + B_2}$$

Para válvula u orificio en medio de la tubería.

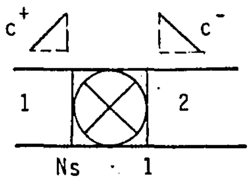


Figura 4.

$$Qo = (Ag\ Cd)o\sqrt{2gHo}$$

$$Qp = (Ag\ Cd)p\sqrt{2g(H_1-H_2)}$$

$$\frac{Qp}{Qo} = \frac{(Ag\ Cd)p}{(Ag\ Cd)o}\sqrt{\frac{2g(H_1-H_2)}{2gHo}}$$

$$\frac{Qp}{Qo} = \frac{(Ag\ Cd)p}{(Ag\ Cd)o}\sqrt{\frac{H_1-H_2}{Ho}}$$

$$\tau = \frac{(Ag\ Cd)p}{(Ag\ CD)o}$$

$$Qp = Qo\tau\sqrt{\frac{H_1-H_2}{Ho}}$$

$$Qp_{1,ns} = \tau Qo\sqrt{\frac{Hp_1ns - Hp_{2,1}}{Ho}} = Qp_{2,1}$$

$$Hp_{1,ns} = Cp_1 - B_1Qp_{1,ns}$$

$$Hp_{2,1} = Cm_2 + B_2Qp_{2,1}$$

$$Qp_{1,ns} = \tau Qo\sqrt{\frac{(Cp_1 - B_1Qp_{1,ns}) - (Cm_2 + B_2\ Qp_{2,1})}{Ho}}$$

Como:

$$Qp_{1,ns} = Qp_{2,1}$$

$$Qp_{1,ns} = \tau Qo\sqrt{\frac{(Cp_1 - Cm_2) - Qp_{1,ns}(B_1+B_2)}{Ho}}$$

$$\left(\frac{Qp_{1,ns}}{\tau Qo}\right)^2 = \frac{(Cp_1 - Cm_2) - Qp_{1,ns}(B_1+B_2)}{Ho}$$

$$Ho\ (Qp_{1,ns})^2 + (\tau Qo)^2\ Qp_{1,ns}(B_1+B_2) - (Cp_1-Cm_2)(\tau Qo)^2 = 0$$

$$Qp_{1,ns} = -\ \frac{(\tau Qo)^2\ (B_1+B_2) \pm\sqrt{(\tau Qo)^4\ (B_1+B_2)^2 - 4Ho(Cp_1-Cm_2)(\tau Qo)^2}}{2Ho}$$

$$Cv = \frac{(\tau Qo)^2}{2Ho}$$

$$Qp_{1,ns} = -Cv(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1+B_2)^2\ Cv^2 - 2(Cp_1 - Cm_2)Cv}$$

Donde:

$$B_1 = \frac{a_1}{gA_1}$$

$$B_2 = \frac{a_2}{gA_2}$$

$$Cm_2 = H_2 - Q_2(B_2 + \frac{\Delta t}{A_2}\ \text{sen}\theta - \frac{f\Delta x}{2gFA^2}\ /Q_2/)$$

Conexión de tuberías (ramificadas)

Supongamos que se tiene el siguiente sistema de tuberias

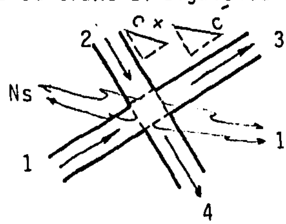


Figura 5.

Entonces:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$

Pero se sabe de las ecuaciones de compatibilidad que:

$$Hpi = Cp - BQpi$$

$$Hpi = Cm + BQpi$$

$$B = \frac{a}{gA}$$

Despejando el gasto

$$Qpi = \frac{Hpi - Cp}{B} \qquad (C+)$$

$$Qpi = \frac{Hpi - Cm}{B} \qquad (C-)$$

De acuerdo a la notación de la figura 5.

$$Qpi_{,ns} = \frac{Cp_1}{B_1} - \frac{Hp_{1,ns}}{B_1}$$

$$Qp_{2,ns} = \frac{Cp_2}{B_2} - \frac{Hp_{2,ns}}{B_2}$$

$$Qp_{3,1} = \frac{Hp_{3,1}}{B_3} - \frac{Cm_3}{B_3}$$

$$Qp_{4,1} = \frac{Hp_{4,1}}{B_4} - \frac{Cm_4}{B_4}$$

aplicando la ecuación de balance de gastos

$$\frac{Cp_1}{B_1} - \frac{Hp_{1,ns}}{B_1} + \frac{Cp_2}{B_2} - \frac{Hp_{2,ns}}{B_2} = \frac{Hp_{3,1}}{B_3} - \frac{Cm_3}{B_3} + \frac{Hp_{4,1}}{B_4} - \frac{Cm_4}{B_4}$$

como buscamos una altura común

$$Hp = Hp_{1,ns} = Hp_{2,ns} = Hp_{3,1} = Hp_{4,1}$$

Sustituyendo lo anterior en la última ecuación

$$\frac{Cp_1}{B_1} - \frac{Hp}{B_1} + \frac{Cp_2}{B_2} - \frac{Hp}{B_2} = \frac{Hp}{B_3} - \frac{Cm_3}{B_3} + \frac{Hp}{B_4} - \frac{Cm_4}{B_4}$$

$$\therefore\ Hp\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_3} + \frac{1}{B_4}\right) = \frac{Cp1}{B_1} + \frac{Cp2}{B_2} + \frac{Cm3}{B_3} + \frac{Cm4}{B_4}$$

$$\therefore\ Hp = \frac{Cp_1/B_1 + Cp_2/B_2 + Cm_3/B_3 + Cm_4/B_4}{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{B_i}\right)}$$

En este caso Qp puede ser encontrado con las ecuaciones de compatibilidad.

Para una bomba centrifuga de flujo radial.

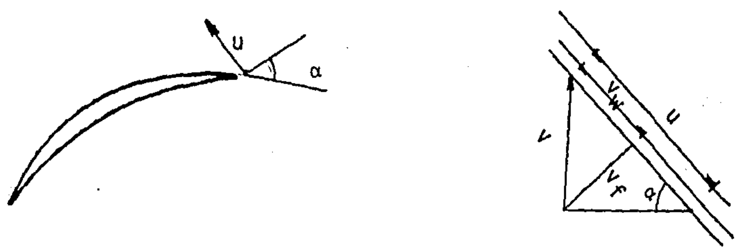


Figura 6.

Donde:

u = es la velocidad de las hojas del impulsor

v = es la velocidad absoluta del fluído

Vw = componente tangencial de la velocidad absoluta.

Vr = velocidad absoluta del flúido con respecto a la del impulsor.

Vt = componente radial de la velocidad absoluta

Suponiendo la entrada radial al impulsor, de Bernoulli

$$H = \frac{Vw'\,u}{g} - Kv\,\frac{V^2}{2g} - Kr\,\frac{Vr^2}{2g}$$

Donde: $Kv\,\frac{V^2}{2g}$ Son pérdidas de energía debido a la fricción y turbulencia local en la voluta.

$Kr\,\frac{Vr^2}{2g}$ Pérdidas por fricción entre el fluído y el impulsor.

Ahora bien:

$$u = \frac{\pi DN}{60} \quad (28) \qquad Vf = \frac{Q}{Ae} \quad (29)$$

Donde:

Ae es el área del flujo de la hoja y D es el díametro externo del impulsor.

$$Vw = u - Vf\cot\gamma$$

$$Vr = Vf\,\mathrm{cosec}\,\gamma$$

$$V^2 = Vw^2 + Vf^2$$

$$V^2 = (u - Vf\cot\gamma)^2 + Vf^2$$

$$V^2 = u^2 - 2u\,Vf\cot\gamma + Vf^2\csc^2\gamma + Vf^2$$

$\therefore$

$$H = \frac{(2-Kv)u^2}{2g} + \frac{2(kv-1)\,(uVf\cot\gamma)}{2g} - \frac{(Kv+Kr)(Vf^2\csc^2\gamma)}{2g} \qquad (30)$$

Sustituyendo (28)y(29) en (30) :

$$H = AN^2 + BNQ - CQ^2 \qquad (31)$$

Donde:

$$A = \frac{2-Kv}{2g}\left(\frac{\pi D}{60}\right)^2$$

$$B = \frac{Kv-1}{g}\cot\gamma\,\frac{\pi D}{60\,A_e}$$

$$C = (Kv + Kr)\,\frac{\csc^2\gamma}{2gA_e}$$

IV TRANSITORIOS CAUSADOS POR BOMBAS CENTRIFUGAS

El arranque y frenado de las bombas, son causa de transitorios en los sistemas de bombeo. Para analizar este tipo de transitorios, el "metodo de las características" presentado anteriormente, es el más adecuado.

En éste capítulo es presentado el análisis de transitorios causados por la operacion de varias bombas.

Dentro de los transitorios registrados en los sistemas de bombeo encontramos: el arranque de la bomba, el paro de la bomba y el corte súbito de la energía susmistrada a la bomba.

Cuando el suministro de energía es suspendido, la velocidad de la bomba se reduce ya que su inercia es pequeña comparada con la del líquido en la línea de descarga. Debido a esto último, el flujo y la altura dada por la bomba se reducen, con lo cual se generan ondas de presión tanto en la sección aguas arriba como aguas abajo. Ya que el flujo en la línea de descarga tiende rápidamente a cero, se produce un inversión en la dirección de éste, entonces se dice que la bomba se encuentra trabajando en la zona de energía de disipación. A continuación, la bomba se para y acto seguido comienza a trabajar como turbina. Si la velocidad de la bomba en reversa se incrementa, se podría porvocar un desbocamiento de esta.

De igual manera, también es importante tener en cuenta la cavitación y separación de columna en el diseño de una bomba.

4.1 Representación matemática de una bomba

La representación matemática de una bomba se basa en los siguientes parámetros:

a) Velocidad de rotación (N)

b) Altura dada por la bomba (H)

c) Gasto dado por la bomba (Q)

d) Par de la bomba (T)

e) Momento de inercia combinado de la bomba, motor y líquido.

Las curvas que relacionan los parámetros antes mencionados se conocen con el nombre de "características de la bomba".

Datos para prototipos (características de la bomba), son obtenidos de modelos por medio de las relaciones de homología. Para bombas homólogas - las siguientes relaciones son válidas:

$$\frac{H}{N^2 D^2} = \text{cte} \quad \text{y} \quad \frac{N}{QD^3} = \text{cte} \tag{32}$$

En donde D = diámetro del impulsor. Puesto que D es una constante para una unidad particular, ésta se puede incluir en la constante entonces:

$$\frac{H}{N^2} = \text{cte} \quad \text{y} \quad \frac{N}{Q} = \text{cte} \tag{33}$$

Estas últimas ecuaciones pueden ser adimensionalizadas usando las condiciones nominales como valores de referencia. Así:

$$V = \frac{Q}{Qr} \quad , \quad h = \frac{H}{Hr} \quad , \quad \alpha = \frac{N}{Nr} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{T}{Tr} \tag{34}$$

En estas ecuaciones T, es el par y el subíndice "R", indica el valor nominal de la variable. Con base en (2), (3) puede escribirse de la manera siguiente:

$$\frac{h}{\alpha^2} = \text{cte} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha}{v} = \text{cte} \tag{35}$$

Ya que se puede dar el caso en las ecuaciones (35)de que α ó v tiendan a cero, Marchal propone que $h/(\alpha^2 + v^2)$ sea sustituido por h/α^2 . Además, cuando $L/v \to \infty$. ya que $v \to 0$ provoca una indeterminación, se define un nuevo parámetro:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha}{v} \tag{36}$$

Y entonces las curvas características pueden ser dibujadas con los parámetros θy $h/(\alpha^2+v^2)$ y otro nuevo definido como $\beta/(\alpha^2+v^2)$. Por definición es siempre finito y varía entre 0°y 360°para las cuatro zonas de operación dadas en la tabla siguiente:

TABLA I

Zona de Operación	Signo v	Signo α	Rango de
Bomba	+	+	$0° \leq \theta \leq 90°$
Disipación de energía	-	+	$90° \leq \theta \leq 180°$
Turbina	-	-	$180° \leq \theta \leq 270°$
Disipación de energía	+	-	$270° \leq \theta \leq 360°$

Cuando no se cuenta con las curvas características originales, se pueden utilizar las de una bomba que tenga el mismo número específico de revoluciones.

4.2 Condiciones impuestas por una bomba

Como señalamos en la sección pasada, las características de la bomba pueden ser representadas por curvas teniendo como variables θy h/α^2+v^2 ; θ y β/α^2+v^2 , en que $\theta = \tan^{-1}\frac{\alpha}{v}$.

Para usar esas curvas en un modelo matemático, puntos discretos de éstas con iguales intervalos de θ entre 0°y 360°son almacenados en la computadora. Cada segmento de curva puede ser linealizado. Si un número suficiente de puntos son almacenados, entonces el error introducido por aproximación de la curva a una recta es despreciable.

Asumamos que el cálculo ha progresado hasta el i=ésimo intervalo de

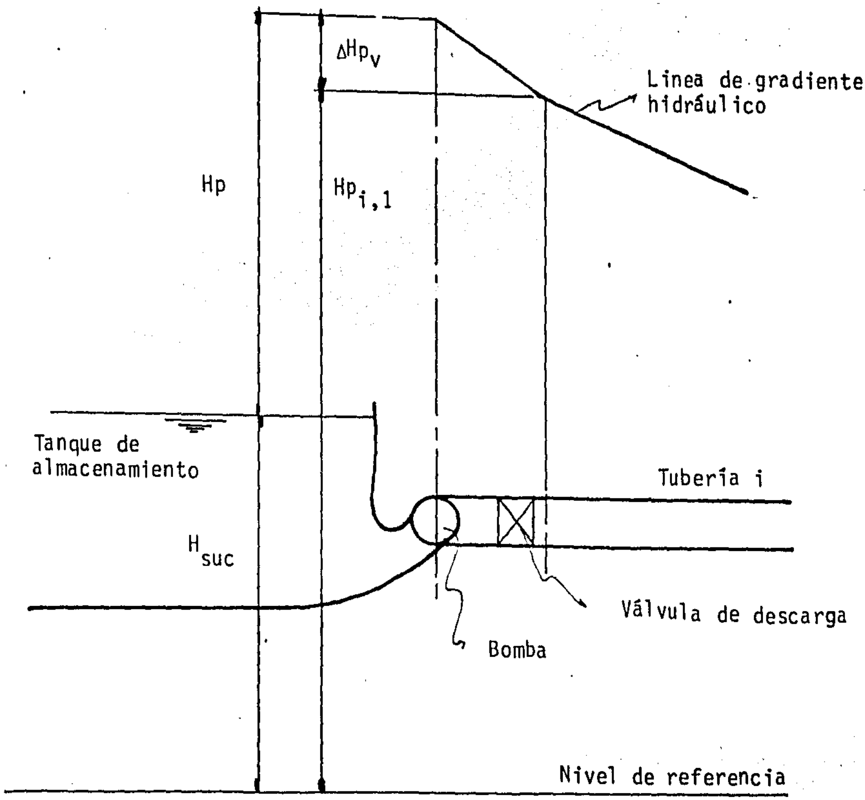

ΔHp_v
Linea de gradiente hidráulico
Hp
$Hp_{i,1}$
Tanque de almacenamiento
Tubería i
H_{suc}
Válvula de descarga
Bomba
Nivel de referencia

Figura 7.

tiempo; que las variables α, v, h, y β al principio de éste intervalo de tiempo son conocidas; y que necesitamos calcular los valores de esas variables al término del intervalo de tiempo. Denotemos esas incógnitas por αp, Vp, hp, y βp. Para determinar los valores de dichas variables, necesitamos primero determinar la ecuación del segmento de curva correspondiente a αp y Vp. Sin embargo, ya que los valores de esas variables son inicialmente desconocidos, podemos usar, como una primera estimación, sus valores determinados por explotación de los valores conocidos en el intervalo de tiempo anterior. Por ejemplo:

$$\alpha_e = \alpha_i + \Delta\alpha_{i-}$$

$$V_e = V_i + \Delta V_{i-} \qquad (37)$$

en donde α_e y V_e son los valores estimados al fin del i-ésimo intervalo de tiempo, α_i y V_i son los valores conocidos al principio del intervalo y $\Delta\alpha_{i-1}$ y ΔV_{i-1} son la variación de esas variables durante el intervalo $(i-_1)$.
La linealización mostrada puede ser usada cuando el intervalo de tiempo es pequeño. Ahora, los puntos de la red sobre uno y otro lado de $\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha e}{ve}$ son aproximados y las ordenadas $h/(\alpha^2 + V^2)$ y $\beta/(\alpha^2 + V^2)$ para esos puntos son determinados de los almacenados en la computadora.
De éstos, las constantes para la ecuación del segmento de línea recta son determinadas. Ahora, asumiendo que los puntos correspondientes a αp, Vp, hp, y βp, entonces:

$$\frac{Hp}{\alpha p + vp} = a_1 + a_2 \tan^{-1} \frac{\alpha p}{vp} \qquad (38)$$

$$\frac{\beta p}{\alpha_p^2 + v_p^2} = a_3 + a_4 \tan^{-1} \frac{\alpha p}{vp} \qquad (39)$$

en que a_1, a_2, a_3, y a_4 son las constantes de la línea recta.

A continuación analizaremos el caso mostrado en la figura 7. La ecuación de la altura puede ser escrita como:

$$Hp_{i-1} = H_{suc} + H_p - \Delta H_{pv} \tag{40}$$

Donde:

H_{suc} = altura del líquido en el tanque de reserva, con respecto a un nivel dado.

H_p = altura dada por la bomba al final del intervalo de tiempo.

ΔH_v = pérdidas en la válvula = $C_v Q^2_{pi,1} = Cv\ Qp_{i,1}/Qp_{i,1}/$ (41)

Cv = coeficiente de pérdidas en la válvula.

4.3 Ecuación diferencial para masas en rotación

Sabemos que:

$T = I\alpha$ $\quad$ I = Momento de inercia

$\quad$ α = aceleración angular

Cuando se corta la energía que controla a una bomba tendremos:

$$T = I\alpha$$

$$T = wR^2 \frac{dw}{dt} \quad , \; w = \frac{2\pi N}{60} \quad , \quad \frac{dw}{dt} = \frac{2\pi}{60}\frac{dN}{dt}$$

$$T = -(wR^2)\left(\frac{2\pi}{60}\right)\frac{dN}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad T = -wR^2 \frac{2\pi}{60}\frac{dN}{dt} \tag{42}$$

Donde:

wR^2 = momento polar de inercia del motor, bomba, flecha y líquido que entra al impulsor de la bomba.

N = número de revoluciones por minuto.

Basándonos en (34), (42) queda como:

$$\beta = -wR^2 \frac{2\pi N_R}{60 T_R} \frac{d\alpha}{dt} \tag{43}$$

En la ecuación (43):

$$T_R = \frac{60\, H_R\, Q_R\, \gamma}{2\pi\, N_R\, \eta_R}$$

γ = peso específico del líquido

η_R = eficiencia de la bomba

Utilizando un valor promedio de β, durante el intervalo de tiempo, la ecuación (43) puede expresarse en diferencias finitas como:

$$\frac{\alpha_p - \alpha}{\Delta t} = - \frac{60\ T_R}{2\pi w r^2 N_R} \cdot \frac{\beta + \beta_p}{2} \tag{44}$$

Simplificando:

$$\alpha p - C_6 \beta p = \alpha + C_6 \beta \tag{45}$$

En que:

$$C_6 = \frac{-15\ T_R \Delta t}{\pi w r^2 N_R} \tag{46}$$

La ecuación característica para la descarga será:

$$Qp_{i,1} = Cn + Ca Hp_{i,1} \tag{47}$$

$$Cn = Q_{i+1} + \frac{gA}{a} H_{i+1} - \frac{f \Delta t}{2DA} \quad Q_{i+1}/Q_{i+1}/$$

$$Ca = \frac{gA}{a}$$

Por la ecuación de continuidad:

$$Qp_{i,1} = Qp = \text{Flujo através de la bomba al final del intervalo de tiempo.} \tag{48}$$

Solución de las Ecuaciones Reguladoras

Para encontrar las condiciones de frontera, se combinan las ecuaciones 38,39,40,45,47,48 simultaneamente. Eliminando $Hp_{i,1}$, ΔHp_v y $Qp_{i,1}$ de las ecuaciones 40,41,47 y 38 y usando Q_R y H_R como valores de referencia, el resultado de la ecuación es:

$$Q_R V_p = C_n + C_a H_{suc} + Ca\ HR\ hp - Ca\ Cv\ QR^2 Vp/Vp/ \qquad (49)$$

En nuestro caso tendremos cuatro ecuaciones que son 38,39,45 y 49 con cuatro incógnitas αp, Vp, hp, βp. Para simplificar la solución, eliminaremos hp y βp de la ecuaciones discutidas anteriormente.

Sustituyendo hp de la ecuación 38, en la 49 y βp de la ecuación 39 en la 45 y simplificando, obtendremos:

$$F_1 = Ca\,H_R a_1(\alpha p^2 + Vp^2) + Ca\ HR a_2(\alpha p^2 + Vp^2)\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp} - Q_R\,Vp -$$

$$- CaCv\,Q_R^2\ Vp/Vp/ + Cn + Ca\ H_{suc} = 0 \qquad (50)$$

$$F_2 = \alpha p - C_6 a_3(\alpha p^2 + Vp^2) - C_6 a_4(\alpha p^2 + Vp^2)\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp} - \alpha - C_6\beta = 0 \qquad (51)$$

Las ecuaciones (49) y (50) son no lineales con dos incógnitas, αp y Vp. Estas ecuaciones pueden ser solucionadas usando el método de Newton-Raphson.

Las ecuaciones se calculan de la siguiente manera:

$$\alpha p^{(2)} = \alpha p^{(1)} + \delta\alpha p \qquad (52)$$

$$Vp^{(2)} = Vp^{(1)} + \delta Vp \qquad (53)$$

Donde:

$$\partial\alpha p = \frac{F_2\frac{\partial F_1}{\partial Vp} - F_1\frac{\partial F_2}{\partial Vp}}{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha p}\frac{\partial F_2}{\partial Vp} - \frac{\partial F_1}{\partial Vp}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha p}} \qquad (54)$$

$$\partial Vp = \frac{F_2\frac{\partial F_1}{\partial \alpha p} - F_1\frac{\partial F_2}{\partial \alpha p}}{\frac{\partial F_1}{\partial Vp}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha p} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha p}\frac{\partial F_2}{\partial Vp}} \qquad (55)$$

En donde las ecuaciones (53) y (54) son evaluadas en los puntos $\alpha p^{(1)}$ y $Vp^{(1)}$. La derivación de las ecuaciones (50) y (51), dá las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial F1}{\partial \alpha p} = CaH_R\,(2a_1\alpha p+a_2Vp+2a_2\alpha p\ \tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp}) \quad (56)$$

$$\frac{\partial F1}{\partial Vp} = CaH_R\,(2a_1Vp-a_2\alpha p+2a_2Vp\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp})-Qr - 2\ CaCv\ Q\overset{2}{R}/Vp/ \quad (57)$$

$$\frac{\partial F2}{\partial \alpha p} = 1-C_6(2a_3\alpha p + a_4Vp+2a_4\alpha p\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp}) \quad (58)$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Vp} = C_6(-2a_3Vp + a_4\alpha p-2a_4Vp\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp}) \quad (59)$$

En donde las tolerancias de $/\delta\alpha p/$ y $/\delta Vp/$ podrán ser menores ó al menos iguales a 0.0001.

4.4 Condiciones de frontera para bombas en paralelo

En los tipos de bombas en paralelo existen dos casos:

$$Qp_{i,1} = Np\ Qp;\ Np=\#\text{ de bombas en paralelo} \quad (60)$$

A) cuando la línea de succión es corta.

Este tipo de análisis se debe hacer, basándonos en la sección anterior. Por tanto, de la ecuación (60) y de (49), tendremos que:

$$NpQRVp = Cn+CaH_{suc}+ Ca\ H_Rhp - Ca\ Cv\ Q\overset{2}{R}\ Vp/Vp/ \quad (61)$$

De las ecuaciones 38,39 y 45 y procediendo similarmente a la sección anterior, podremos obtener.

$$F_1 = Ca\ H_Ra_1\ (\alpha p^2 + Vp^2) + CaH_R\ a_2(\alpha p^2+Vp^2)\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp} - Np\ QR\ Vp -$$

$$- CaCv\ Q\overset{2}{R}\ Vp/Vp/ + Cn+Ca\ H_{suc} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial vp} = CaH_R(2a_1Vp-a_2\alpha p+2a_2Vp\ \tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp})-Np\,Q\,R-2CaCvQR^2/Vp/ \qquad (63)$$

Las demás expresiones son idénticas a las mostradas en la sección anterior.

b) Cuando la línea de succión es larga.

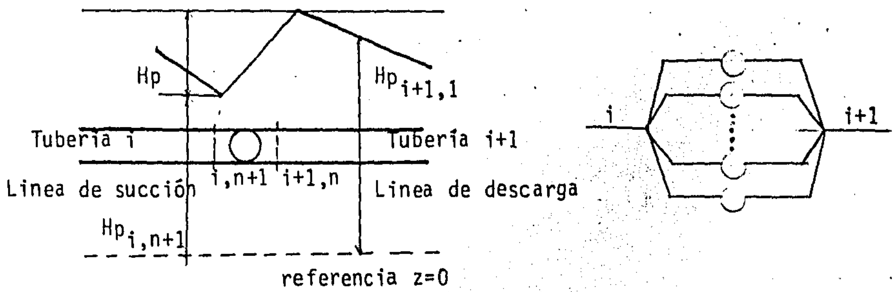


Figura 8.

Refiriendonos a la figura 8., podemos ver que:

$$Hp = Hp_{i+1,1} - Hp_{i,n+1} \qquad (64)$$

$$Qp_{i,n+1} = Cp - Ca_i\ Hp_{i,n+1} \qquad (65)$$

$$Qp_{i+1,1} = Cn + Ca_{i+1}Hp_{i+1,1} \qquad (66)$$

$$Qp_{i,n+1} = Qp_{i+1,1} = NpQp \qquad (67)$$

Multiplicando (65) por Ca_{i+1}, la ecuación(66) por Ca_i, sustituyendo $Qp_{i,n+1}$ y $Qp_{i+1,1}$ de (67) y sumando las ecuaciones resultantes obtendremos:

$$QpNp(Ca_i + Ca_{i+1}) = Cn\ Ca_i + CpCa_{i+1} + Ca_iCa_{i+1}\ Hp \qquad (68)$$

Usando Q_R y H_R como valores de referencia en la ecuación (68), podemos escribir:

$$hp = \frac{Np(Ca_i+Ca_{i+1})Q_R\ Vp - CnCa_i - Cp\ Ca_{i+1}}{Ca_iCa_{i+1}\ H_R} \qquad (69)$$

Eliminando hp de las ecuaciones (38)y (69), tendremos:

$$F_1 = a_1(\alpha p^2 + Vp^2) + a_2(\alpha_p^2 + v_p^2)\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp} - C_7 Vp + C_8 = 0$$

En que:

$$C_7 = \frac{Np(Ca_i + Ca_{i+1})}{Ca_i Ca_{i+1}}$$

$$C_8 = \frac{CnCa_i + Cp\ Ca_{i+1}}{Ca_i Ca_{i+1} H_R}$$

Entonces:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha p} = 2a_1\alpha p + 2a_2\alpha p\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp} + a_2 Vp$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial vp} = 2a_1 Vp + 2a_2 Vp\tan^{-1}\frac{\alpha p}{Vp} - a_2\alpha p - C_7$$

De las ecuaciones pasadas podemos hallar los datos faltantes para aplicar el método de Newton-Raphson.

V CAMARAS DE OSCILACION

Una cámara de oscilación es una columna vertical de agua o un tubo vertical de depósito conectado a los conductos de una planta hidroeléctrica o al sistema de tuberias.

Las principales funciones de una cámara de oscilación son:

1. Reducir la amplitud de las fluctuaciones de presión por la reflección de las ondas en la cámara. Por ejemplos las ondas de presión producidas por golpe de ariete en una compuerta por los cambios de carga en una turbina que son reflejados hacia la cámara de oscilación,ver figura 12. Así la longitud del conducto a ser usada en el análisis de golpe de ariete es entre la turbina y la cámara de oscilación en vez de entre la turbina y el tanque de almacenamiento. Debido a esta reducción en la longitud de la tuberia el aumento o caida de presión es menor que si no hubiera cámara. Por otra parte si la cámara no estuviera presente entre el tunel y la compuerta, el tunel deberia diseñarse para soportar la presión del golpe de ariete.

2. Una cámara de oscilación mejora las características reguladoras de una turbina hidráulica. Ya que por la presencia de la cámara, la longitud de la tuberia a ser usada para determinar el tiempo de arranque es hasta la camara de oscilación, en vez de hasta el tanque de almacenamiento. Asi pues el tiempo de arranque de una hidroeléctrica es reducido, mejorando las características reguladoras de la hidroeléctrica.

3. Un tanque de oscilación actua como almacenamiento para el exceso de agua durante la reducción de carga en una hidroeléctrica y durante el arranque de un sistema de bombeo.Similarmente provee de agua durante la

admisión de carga de una hidroeléctrica y durante una falla del sistema de bombeo. En consecuencia el agua es acelerada o desacelerada lentamente y es reducida la amplitud de las fluctuaciones de presión en el sistema.

supongamos que tenemos la siguiente cámara de oscilación

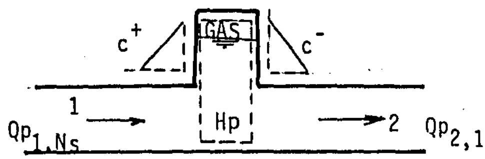


Figura 9.

DEspreciando inercia y fricción. Además, suponiendo que cumple con la ecuación politrópica:

$$P_A V^n = C \quad ; \quad P_A = \gamma H_A$$

$$\Rightarrow \qquad H_A V^n = C \quad \Rightarrow \quad H_A = \frac{C}{V^n}$$

Donde:

H_A = carga absoluta

V = volumen

C = Constante

Derivado:

$$\frac{dH_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{C}{V^n}\right)}{dv} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dH_A}{dt} = d(CV^{-n}) \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dH_A}{dt} = -nCV^{-n-1}\frac{dv}{dt} = -\frac{nC}{V^{n+1}}\frac{dv}{dt}$$

también:

$$\frac{dv}{dt} = Qp_2 - Qp_1$$

Combinando las ecuaciones anteriores:

$$Hp = H + C_6(Q_{1,ns} - Q_{2,1}) + C_6(QP_{1,ns} - Qp_{2,1})$$

Donde:

$$C_6 = 0.5\ N\text{ç}\ \frac{\Delta t}{V^{n+1}}$$

Las condiciones de frontera, se calculan con las ecuaciones ya conocidas

Para un tanque con inercia y fricción

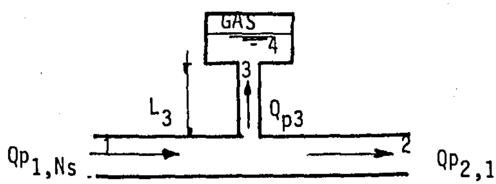


Figura 10.

Aplicando la ecuación de movimiento en 3 :

$$\gamma A_3 \left(\frac{Hp+H}{2} - \frac{Hp_4+H_4}{2} - \frac{fL_3}{D_3\ A_3^2}\ \frac{Q_3/Q_3/}{2g}\right) = \frac{\gamma A_3 L_3}{g}\ \frac{dv_3}{dt}$$

es decir:

$$Hp - Hp_4 = C_7 + C_8 Qp_3$$

Donde:

$$C_8 = \frac{2L_3}{gA_3\Delta t} \quad \text{y} \quad C_7 = H_4 - H + \frac{fl_3}{D_3 g A_3^2}\ Q_3/Q_3/ - C_8 Q_3$$

Entonces:

$$Hp_4 = H_4 + C_6Q_3 + C_6Qp_3$$

La ecuación de continuidad para 3 , será:

$$Qp_{1,ns} = Qp_{2,1} + Qp_3$$

Tanque de almacenamiento aguas arriba.

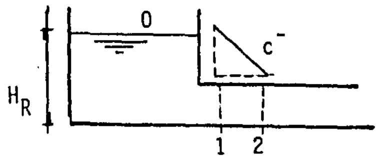


Figura 11.

aplicando la ecuación de la energía entre 0 y 1

$$\frac{po}{\gamma o} + HR + 0 = \frac{P_1}{\gamma} + 0 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{KV_2^2}{2g}$$

$$\therefore \quad HR = Hp_1 + \frac{Q_2^2}{2gA^2} + K\,\frac{Q_2^2}{2gA^2}$$

Donde: K es el coeficiente de pérdidas a la entrada de la tubería.

resolviendo la ecuación anterior con:

$$Hpi = Cm + CH\,Qpi$$

$$Qpi = -\,\frac{gCHA^2}{K+1} + \sqrt{\left(\frac{gCHA^2}{K+1}\right)^2 + (HR - Cm)\,\frac{2gA^2}{K+1}}$$

Tanque de almacenamiento aguas abajo.

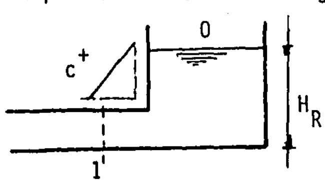


Figura 12.

aplicando la ecuación de energía entre 1 y 0 :

$$\frac{P_1}{\gamma_1} + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = \cancelto{0}{\frac{P_o}{\gamma_o}} + Hr + 0 + \frac{KV_1^2}{2g}$$

$$Hp_1 + \frac{V_1^2}{2g} = HR + \frac{KV_1^2}{2g}.$$

$$Q = VA$$

$$HR = Hp_1 + \frac{V_1^2(1-K)}{2g}$$

$$HR = Hp_1 + \frac{Q_1^2}{2gA^2}\ (1-K)$$

pero: $Hp_1 = HR$

$$\therefore\ Hp_{ns} = Cp - CH\,Qp_{ns}$$

VI RESUMEN DE FORMULAS

Ecuación de Allievi

$$a\,\rho = \frac{\Delta P}{V}$$

Ecuación de la velocidad de onda

$$a^2 = \frac{K}{\rho\left(1 + \frac{Kd}{Ee}\right)}$$

Ecuación de la velocidad de onda presentada por Halliwell

$$a^2 = \frac{K}{\rho\left(1 + \left(\frac{K}{E}\right)\psi\right)}$$

Ecuación dinámica o de movimiento

$$g\frac{\partial H}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f\,V^2}{2D} = 0$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{a^2}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + V\operatorname{sen}\theta = 0$$

Condiciones de frontera

Aguas abajo

$$Hp_{n,s} = Cp - C_H\,Qp_{n,s}$$

Aguas arriba

$$Hp_1 = C_M + C_H\,Qp_1$$

Válvula u orificio descargando a la atmósfera

$$Qp_{ns} = - BCv + B^2Cv^2 + 2CpCv$$

Conexiones en serie

$$Qp_{1,ns} = \frac{Cp_1 - Cm_2}{B_1 + B_2}$$

Válvula u orificio en medio de la tubería

$$Qp_{1,ns} = - Cv\,(B_1 + B_2) + (B_1+B_2)^2\,Cv^2 - 2(Cp - Cm_2)\,Cv$$

Tuberías ramificadas

$$Hp = \frac{Cp_1/B_1 + Cp_2/B_2 + Cm_3/B_3 + Cm_4/B_4}{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{B_i}\right)}$$

Bomba centrífuga de flujo radial

$$H = AN^2 + BNQ - CQ^2$$

Bombas en paralelo

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha p} = 2a_1 \alpha p + 2a_2 \alpha p \tan^{-1} \frac{\alpha p}{Vp} + a_2 Vp$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Vp} = 2a_1 Vp + 2a_2 Vp \tan^{-1} \frac{\alpha p}{Vp}\; a_2 \alpha p - C_7$$

Tanque de amortiguamiento

$$Hp_{ns} = Cp - C_H Q_{pns}$$

VII BIBLIOGRAFIA

1. Parmakian J. Waterhammer Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J., 1955 (Dover reprint, 1963)

2. Fox J. A. Hydraulic Analysis of Unsteady flow in pipe networks,Halsted press, John Wiley and Sons, N.Y., 1977

3. Chaudhry M. H. Applied Hydraulic Transients, Van Nostrand Reinhold, N.Y., 1979

4. Streeter V.L. y Wylie G. B. Fluid Transients, McGraw Hill Inc., 1978

5. Streeter y Wylie, Mecánica de los fluidos, McGraw Hill Inc., 1979

6. Joukowski, N., Waterhammer , traducido al ingres por O. Simin, proc. Amer. water works Asoc., vol 24, 1904, pp 341-424.

7. Evangelisti G., Waterhammer analysis by the method of characteristics, L'Energia Electrica nos 10-12, 1969,pp 673-692, 759-770,839-858.