



**Universidad Nacional Autónoma de México**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**APLICACIONES NO CONVENCIONALES DE LA  
TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER.**

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

**P r e s e n t a :**

**MIGUEL TIRADO BENITEZ**

**Director de Tesis: DR. LUIS ANDRES BUZO DE LA PEÑA**

**México, D. F.**

**1984**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

## CAPITULO 1. Introducción.

La Transformada de Fourier.....	1
La Transformada discreta de Fourier.....	4
La Transformada rápida de Fourier.....	10

## CAPITULO 2. Aplicaciones a Sistemas Lineales.

Aplicación 1. Convolución rápida.....	13
Convolución de una señal de longi- tud finita con una señal de longi- tud infinita.....	21

## CAPITULO 3. Aplicaciones a Sistemas de comunicación.

Aplicación 2. Un banco de filtros óptimos imple- mentado con la TRF.....	24
Aplicación 3. Banco de demoduladores complejos - utilizando la TRF.....	29

## CAPITULO 4. Aplicaciones a procesamiento de señales de voz.

Aplicación 4. Análisis y Síntesis de una señal - de voz.....	36
Interpretación clásica de la Trans- formada corta de Fourier.....	37
Reducción del número de parámetros en la frecuencia para representar $x(n)$ .....	39
Implementación de un sistema de -- "Análisis" de voz utilizando la -- TRF.....	40

I N D I C E

(Continuación)

Implementación de un sistema de sín- tesis de voz utilizando la TRF....	44
Experimentos hechos con el codifi- cador de voz con fase.....	47
APENDICE A. Obtención de un algoritmo de TRF.....	49
REFERENCIAS.....	53

CAPITULO 1

INTRODUCCION

## I N T R O D U C C I O N .

## LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La comercialización del telégrafo (1837), la invención del teléfono (1876), y el comienzo del uso de la electricidad como fuente de energía, fueron factores que incrementaron la importancia del estudio de los medios de transmisión de señales eléctricas.

Se hicieron estudios que permitieron el desarrollo de conceptos como el de "ancho de banda", el cual indicaba cuál era el rango de frecuencia que se podían transmitir en un canal determinado. Poco después se desarrolló lo que ahora denominamos multiplex por división de frecuencias, el cual permitió transmitir simultáneamente varios mensajes por un solo canal. En particular la voz se estudió en el dominio de la frecuencia y esto permitió que se pudiera transmitir o reproducir "sin distorsión", lo cual dio un gran avance a la telefonía.

Las anteriores fueron algunas de las innovaciones que se desarrollaron gracias al estudio del dominio de la frecuencia, el cual tiene como "herramienta" fundamental la "Transformada de Fourier" [1] [2] [6] que relaciona funciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

La transformada de Fourier es de fundamental importancia en el estudio de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo debido a que estos tienen la siguiente propiedad: "La respuesta de un sistema lineal e invariante en -

el tiempo a una entrada  $V_0 e^{j\omega_0 t}$  es  $V_0 H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}$ ." Se observa que la razón entre la salida y la entrada es independiente del tiempo. De esta razón se deriva el concepto de "función" de transferencia del sistema".  $H(\omega)$ .



De aquí se concluye que conociendo la función de transferencia  $H(\omega)$  de un sistema lineal e invariante es posible determinar el efecto que tendrá el sistema sobre cada una de las componentes en frecuencia de la señal de entrada.

La transformada de Fourier se usa en áreas tales como la óptica, el control, las comunicaciones, la teoría de probabilidad, antenas, etc.

A continuación se mencionan algunas de las aplicaciones típicas de la transformada de Fourier.

#### Sistemas lineales.

La transformada de Fourier de la salida de un sistema lineal es el producto de la función de transferencia del sistema, por la transformada de Fourier de la señal de entrada.

### Optica.

Los sistemas ópticos tienen la propiedad de que una transformada de Fourier relaciona la distribución de intensidad luminosa entre los planos focales anterior y posterior de una lente convergente.

### Procesos aleatorios.

El espectro de densidad de potencia de un proceso aleatorio está dado por la transformada de Fourier de la función de autocorrelación del proceso.

### Probabilidad.

La función característica de una variable aleatoria está definida como la transformada de Fourier de la función de densidad de probabilidad.

Se podría continuar enumerando muchos ejemplos de aplicaciones de la Transformada de Fourier, pero estos nos bastan para darnos cuenta de que la Transformada de Fourier es una herramienta que permite resolver problemas de diversas áreas de la investigación, debido principalmente a su aplicación a los sistemas lineales.

## LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.

La transformada continua de fourier de una función  $h(t)$  se define como:

$$(1) \quad H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Se desea modificar la ecuación (1) de tal manera que pueda ser resuelta por una computadora digital usando un método numérico, lo que implicaría manejar valores discretos de  $h(t)$  y de  $H(f)$ . Esto es particularmente útil si el miembro izquierdo de la ecuación (1) resulta imposible de calcular para  $h(t)$ , o si esta última está dada por medio de tablas, o solo se tiene una representación gráfica de ella.

A la versión discreta de la transformada continua de Fourier se le llama "transformada discreta de Fourier", (T.D.F.) y tiene la forma que se muestra en la ecuación (2).

$$(2) \quad \tilde{H}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} mn} \quad m=0,1,\dots,N-1$$

donde  $\tilde{H}(m)$  y  $\tilde{h}(n)$  están relacionadas con  $H(f)$  y  $h(t)$

por:

$$\tilde{H}(m) = \tilde{H}(mf_0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} H(mf_0 + rf_1) \quad m=0,1,\dots,N-1$$

$$\tilde{h}(n) = \tilde{h}(nT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(mT_1 + kT_0) \quad n=0,1,\dots,N-1$$

donde

$$f_1 = \frac{1}{T_1}$$

y

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$y \quad \frac{T_0}{T_1} = N$$

Notese que la ecuación (2) relaciona  $N$  valores en el dominio del tiempo  $\tilde{h}(0), \tilde{h}(1), \dots, \tilde{h}(N-1)$  con  $N$  valores en el dominio de la frecuencia  $\tilde{H}(0), \tilde{H}(1), \dots, \tilde{H}(N-1)$ , lo cual presenta el atractivo de que la TDF pueda ser calculada por una computadora digital.

A continuación se explicará mediante un desarrollo gráfico, la relación que existe entre la TDF y la Transformada continua de Fourier. La relación matemática que existe entre estas no se demostrará, pero se encuentra en las referencias [1] [2].

Véase la Figura 1., la cual será desglosada paso a paso partiendo de una transformada de Fourier y llegando a lo que es una Transformada Discreta de Fourier.

Fig. 1 (a) En ella se ven un par de transformadas continuas de Fourier  $h(t) \longleftrightarrow H(f)$

Fig. 1 (b) Se muestra un tren de impulsos en el tiempo, con su correspondiente transformada, que es otro tren de impulsos en la frecuencia.

$$\Delta_0(t) \longleftrightarrow \Delta_0(f)$$

Fig. 1 (c) Se multiplican  $h(t)$  de Fig. 1(a) con  $\Delta_0(t)$  de Fig. 1(b) teniéndose en la frecuencia la con-

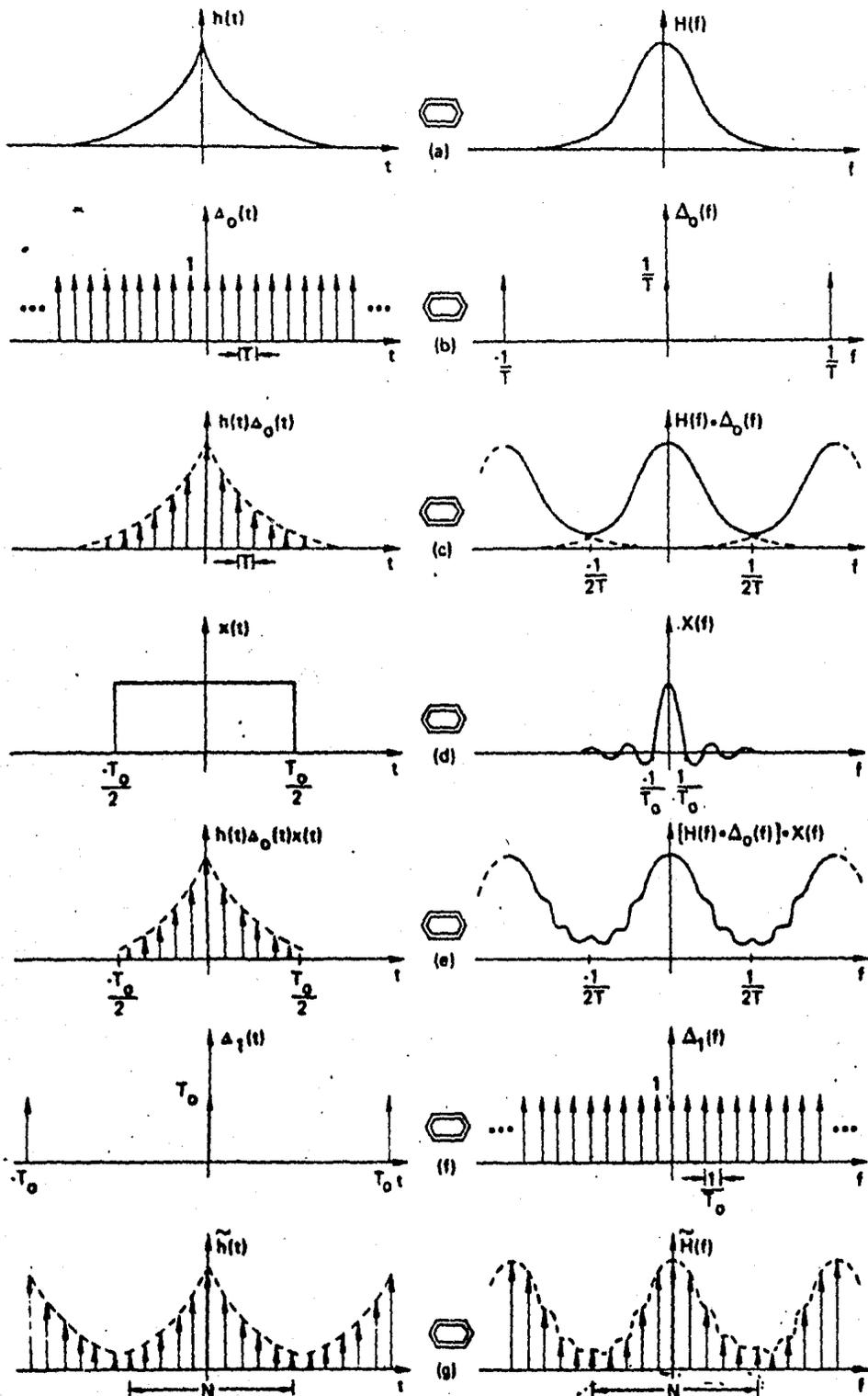


Figura 1

volución de  $H(f)$  de Fig. 1(a) con  $\Delta_0(f)$  de --  
Fig. 1 (b).

Fig. 1(d) Se muestra una ventana rectangular  $x(t)$  en el tiempo, con su correspondiente transformada -  $X(f)$  en la frecuencia.

Fig. 1(e) Se multiplica  $x(t)$  por la función en el tiempo de la Fig. 1(c), lo cual en la frecuencia implica una convolución de la función en la - frecuencia de 1(c) con  $X(f)$  quedando lo que - se muestra en la Fig. 1(e).

Fig. 1(f) Se observa un tren de impulsos en el tiempo -  $\Delta_1(t)$  con su correspondiente transformada - -  $\Delta_1(f)$  que es otro tren de impulsos en la frecuencia..

Fig. 1(g) La función en la frecuencia de 1(e) se multi-  
plica por  $\Delta_1(f)$  quedando  $\tilde{H}(f)$ , mientras que  
la función en el tiempo de la Fig. 1(e) se --  
convolucionó con  $\Delta_1(t)$  quedando  $\tilde{h}(t)$ .

Las funciones  $\tilde{h}(t)$  y  $\tilde{H}(f)$  de la Fig. 1(g) definen lo que se denomina un par de Transformadas Discretas de Fourier, de esta figura se observa una secuencia periódica en el tiempo con periodo de N muestras, cuya transformada de Fourier es una secuencia periódica en la frecuencia, con periodo de N muestras. De estas dos secuencias, la parte modular son las N muestras de ambas que se señalan en la Fig. 1(g), las cuales están relacionadas por la ecuación 3).

$$(3) \quad \tilde{H}(mf_0) = T \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nm}$$

Vemos que la ecuación (3) es idéntica a la ecuación (2) salvo por un factor de escala T.

Pero por simplicidad en la escritura y en los cálculos se acostumbra escribir  $h(n)$  en lugar de  $T \tilde{h}(nT)$ , y  $H(m)$  en lugar de  $\tilde{H}(mf_0)$ , lo cual da la ecuación (2).

La importancia de la TDF radica en que sus N valores periódicos en la frecuencia pueden llegar a ser muy similares a las muestras de la Transformada Continua de Fourier. Para que estos N valores de la TDF sean parecidos a las muestras de la Transformada Continua de Fourier, es necesario que las ondulaciones que aparecen en la Fig. 1(e) disminuyan o desaparezcan. Estas ondulaciones son debidas a los lóbulos de la función  $X(f)$  de la Fig. 1(d) que al convolucionarse con  $H(F) * \Delta_0(f)$  de la Fig. 1(c) producen las ondulaciones a la función. Para reducir este error nos bastara con recordar la relación que existe, entre el ancho de una

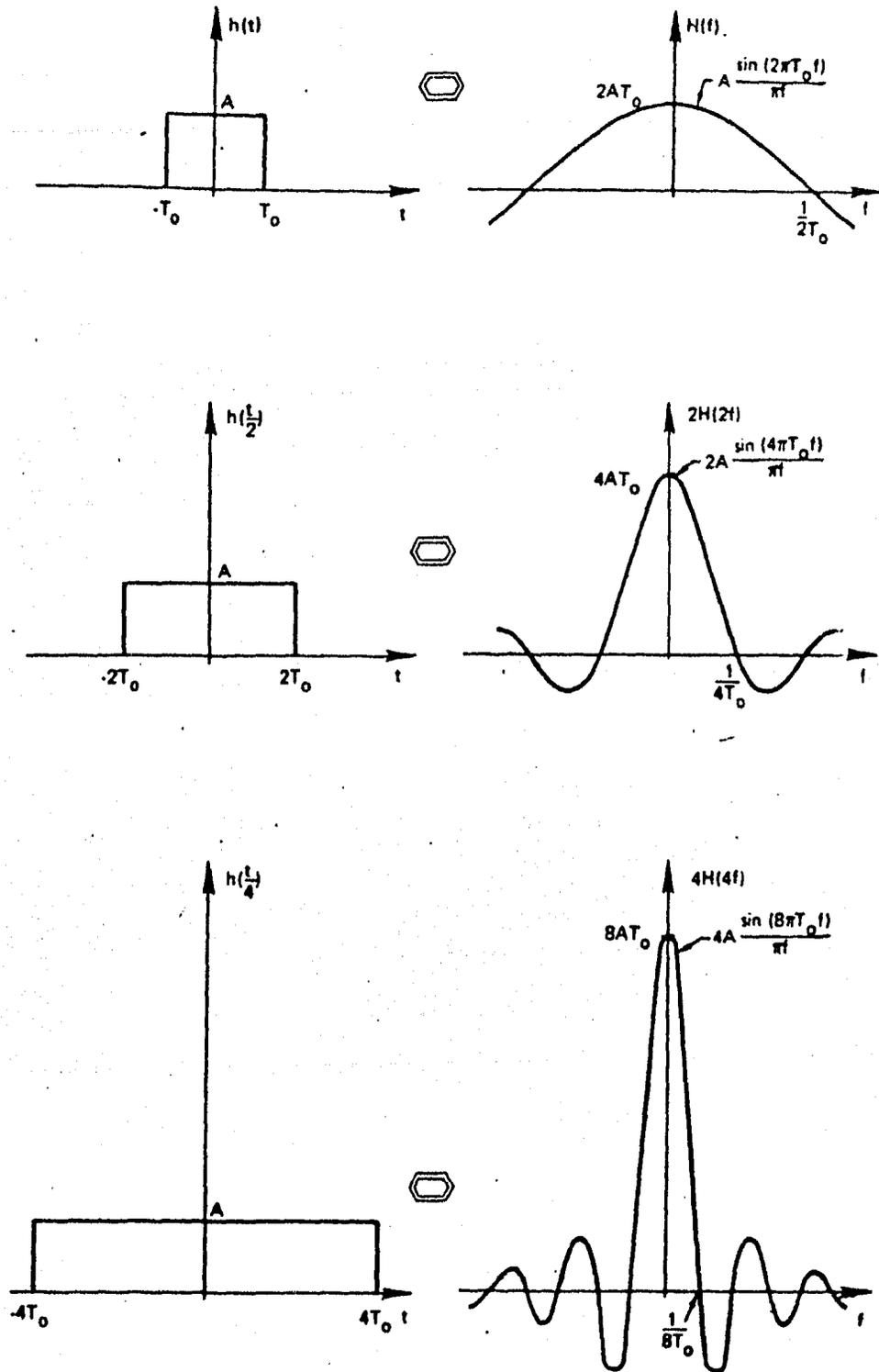


Figura 2

señal en el tiempo con su transformada de Fourier:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Lo cual nos recuerda que una expansión en el tiempo, - produce una compresión en la frecuencia y viceversa, como - se puede observar en la Fig. 2, en la cual se muestra como varía la Transformada de Fourier de una señal cuando ésta - se expande en el tiempo.

Por lo tanto lo que se puede hacer, para reducir las - ondulaciones en el dominio de la frecuencia, es alargar la ventana en el dominio del tiempo, produciendo con ésto que la función  $\frac{\text{Sen } f}{f}$  se parezca más a un impulso, lo cual hace que las ondulaciones de la Fig. 1(e) sean más pequeñas, y - se tenga mayor resolución en la frecuencia.

#### LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER (T.R.F.)

Aunque la TDF de la ecuación (2) es "fácil" de calcular en una computadora digital, existen muchas aplicaciones en las cuales se requiere calcular muchas veces la TDF y a pesar de las altas velocidades de procesamiento que tienen las computadoras digitales actualmente, la solución directa de la ecuación (2) toma mucho tiempo. Esto se puede visualizar sustituyendo:

$$w = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad A_m = H(m) \quad a_n = h(n)$$

en la ecuación 2, con lo que se obtiene:

$$(4) \quad A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w^{mn} \quad m=0,1,\dots,N-1$$

La ecuación (4) expresada en forma matricial queda:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdot & \cdot & \cdot & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdot & \cdot & \cdot & w^{2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{N-1} \end{bmatrix}$$

De la matriz (5) se puede ver que para obtener todas las  $A_m$  se requieren del orden de  $(N-1)^2$  multiplicaciones, pero gracias a la invención de la TRF estas multiplicaciones se pueden reducir al orden de  $\frac{N}{2} \log_2 N$  al utilizar un algoritmo de TRF. La ventaja que se obtiene se puede visualizar fácilmente en la Fig. 3, en la cual se observa la gran reducción de operaciones que se obtiene.

La TRF ha encontrado muchas aplicaciones debido a que mediante ella fue posible evaluar la TDF en tiempos muy cortos, y permitió que la TDF que antes requería varios minutos para ser obtenida, ahora sea obtenida en varios segundos, y que el costo de su obtención sea menor.

La TRF ha revolucionado el mundo del procesamiento digital de señales, especialmente en el análisis espectral, -

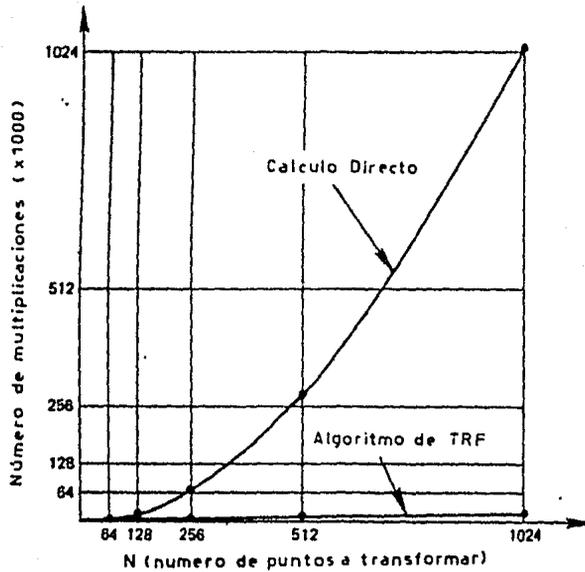


Figura 3

el cual se requiere para estudios de ancho de banda, en los sistemas de sonar, radar, etc., y aunque la estimación espectral se puede obtener por otros métodos que dan una mejor aproximación de ella, en las aplicaciones tales como el radar, se requiere que la estimación sea rápida para poder dar una buena indicación sobre la velocidad de un objeto.

Otro ejemplo en el cual vemos que la TRF tiene aplicación es en el estudio de la voz, la cual cambia drásticamente su espectro un promedio de diez veces por segundo lo cual implica obtener una estimación espectral cada  $\frac{1}{10}$  seg. cuando menos.

En el Apéndice A se describe el desarrollo matemático de uno de los muchos algoritmos que sirven como TRF.

CAPITULO 2

APLICACIONES A SISTEMAS  
LINEALES

## 1. CONVOLUCION RAPIDA Y CORRELACION

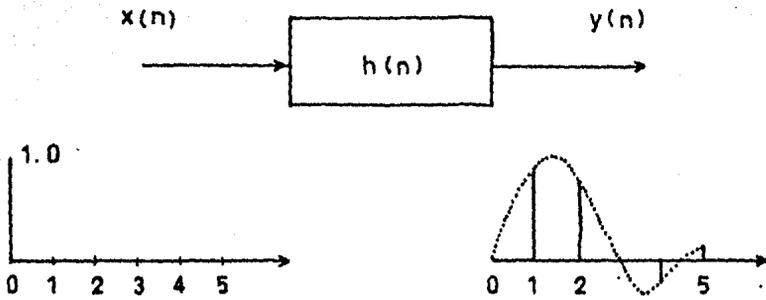
Dos de los puntos importantes en procesamiento de señales, son la convolución y la correlación de señales, la primera, como una de sus diversas aplicaciones tiene la implementación de filtros [4], y la segunda generalmente usada - como filtro óptimo, o para comprimir señales [3].

Por ejemplo: Lo que normalmente se hace, cuando se quiere filtrar una señal digital, es obtener la convolución de la señal de entrada con la respuesta a impulso del filtro.

Un ejemplo de esta convolución se ve en la figura (1.1) La carga computacional de una convolución directa, son aproximadamente  $M$  multiplicaciones y sumas por cada punto de la señal de entrada al filtro, (donde  $M$  es el número de muestras de la respuesta a impulso del filtro).

Se observa para uso posterior que la respuesta a una muestra de la señal de entrada, es de longitud  $M$ , la respuesta a dos muestras de la señal de entrada es  $M+1$ , a tres muestras sucesivas de la señal de entrada es  $M + 2$ , etc. Vemos que si continuamos el procedimiento, y la longitud de la secuencia de entrada tiene longitud de  $P$  muestras, la longitud de la secuencia de salida será de  $M + P - 1$ .

La convolución de señales discretas de la que acabamos de hablar, puede efectuarse de una manera indirecta utilizando la TDF, siempre y cuando las señales a convolucionar sean de longitud finita, obteniéndose los mismos resultados,



RESPUESTA A IMPULSO

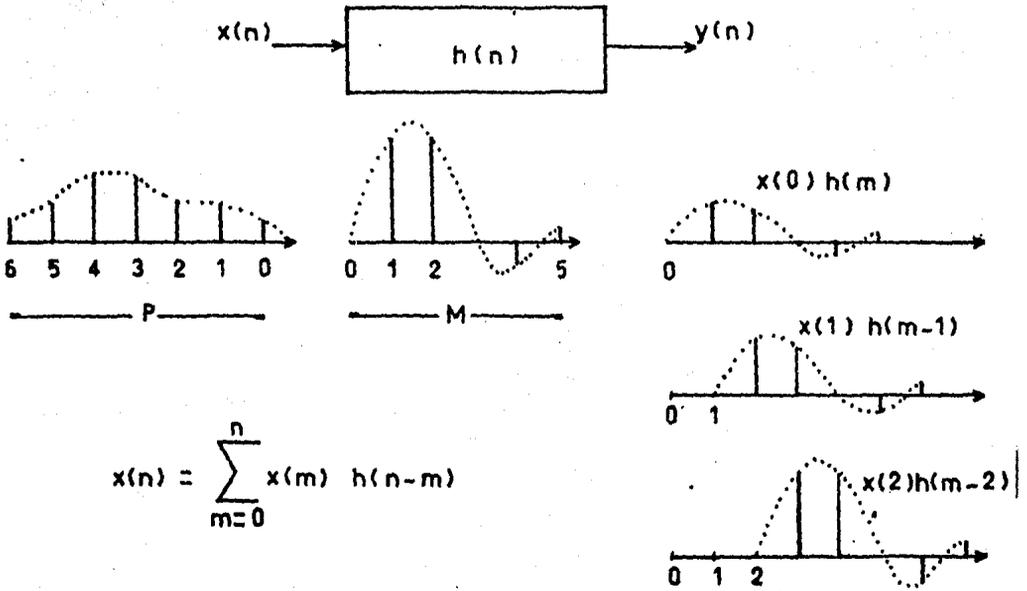


figura 1.1

pero con la ventaja de poder utilizar la TRF, obteniendo --  
economía computacional.

Para explicar como se realiza el proceso de convolu---  
ción recuerdese que la convolución discreta de dos secuen--  
cias  $x(n)$  y  $h(n)$  se define como:

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i) h(i)$$

Pero si la señal  $h(i)$  toma valores diferentes de cero  
para  $i = 0, 1, \dots, N-1$  y toma valor cero para cualquier --  
otro  $i$ , entonces la convolución discreta quedá:

$$(1.1) \quad y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(n-i) h(i)$$

Ahora definiremos lo que es una convolución cíclica, y  
su relación con la ecuación (1.1) será lo que permitirá ob-  
tener  $y(n)$  utilizando la TRF.

Sean dos secuencias periódicas de  $-\infty$  a  $\infty$   $x_p(n)$  y --  
 $h_p(n)$  con periodo  $N$  y cuyas TDF son:

$$(1.2) \quad X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} \right) nk}$$

$$(1.3) \quad H_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_p(n) e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} \right) nk}$$

Llamaremos a la secuencia periódica  $y_p(n)$  la convolu-  
ción cíclica de  $x_p(n)$  con  $h_p(n)$  si:

$$(1.4) \quad y_p(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_p(n-i) h_p(i)$$

Cumpléndose que:

$$(1.5) \quad Y_p(k) = H_p(k) X_p(k)$$

Demostración: Obteniendo la TDF de (1.4) tenemos:

$$\begin{aligned} Y_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} x_p(n-i) h_p(i) \right] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} h_p(i) \underbrace{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n-i) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-i)k} \right]}_{X_p(k)} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)ik} \\ &= X_p(k) \sum_{i=0}^{N-1} h_p(i) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)ik} \end{aligned}$$

$$Y_p(k) = X_p(k) H_p(k) \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Observando las ecuaciones (1.1) y (1.4) vemos que tienen cierta similaridad pero son diferentes debido a que  $y(n)$  de (1.1) se obtuvo de dos secuencias no periódicas  $x(n)$  y  $h(n)$ , mientras que  $Y_p(n)$  de (1.4) se obtuvo de dos secuencias periódicas infinitas.

Pero si  $x(n)$  y  $h(n)$  son finitas de longitud  $P$  y  $M$  respectivamente la longitud de  $y(n)$  será  $M + P - 1$  como ya se dedujo anteriormente, y si hacemos:

$$X_p(n) = \begin{cases} x(n) & \text{para } n=0, 1, \dots, P-1 \\ 0 & \text{para } n=P, P+1, \dots, P+M-1 \end{cases}$$

y

$$h_p(n) = \begin{cases} h(n) & \text{si } n=0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{si } n=M, M+1, \dots, (P+M-1) \end{cases}$$

donde  $x_p(n)$  y  $h_p(n)$  tienen periodo  $N=P+M$ , y si se efectúa.

la convolución cíclica de  $x_p(n)$  y  $h_p(n)$  usando la ec. 1.4 obtendremos  $y_p(n)$  la cual será una secuencia periódica que se repite cada  $P + M$ , y no es difícil ver que:

(1.6)

$$y_p(n) = y(n) \quad \text{para} \quad n=0, 1, \dots, P+M-1$$

Aprovechando esto y la ecuación (1.5) vemos que si obtenemos  $X_p(k)$  y  $H_p(k)$  de  $x_p(n)$  y  $h_p(n)$  respectivamente, podemos obtener:

$$Y_p(k) = X_p(k) H_p(k)$$

Y después obtener  $y_p(n)$  mediante la I.T.D.F. (1)

$$y_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_p(k) \cdot e^{j \left(\frac{2\pi}{N}\right) nk}$$

$$N = P + M$$

Y mediante (1.6) conocemos  $y(n)$ .

La figura 1.2(a) nos muestra una convolución continua, y las figuras 1.2(b), 1.2(c) y 1.2(d) nos muestran convoluciones cíclicas con  $P = 6$ ,  $M = 6$  y diferentes  $N$ 's, de donde podemos observar que solo en 1.2(c), tenemos  $N = P + M$  cumpliéndose que de 0 a  $N-1$  tenemos las muestras equivalentes a la convolución continua de la Fig. 1.2(a), mientras que en 1.2(b).

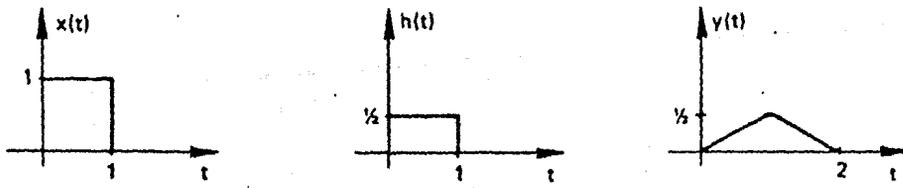
$$N < P + M - 1$$

y en 2 (d)

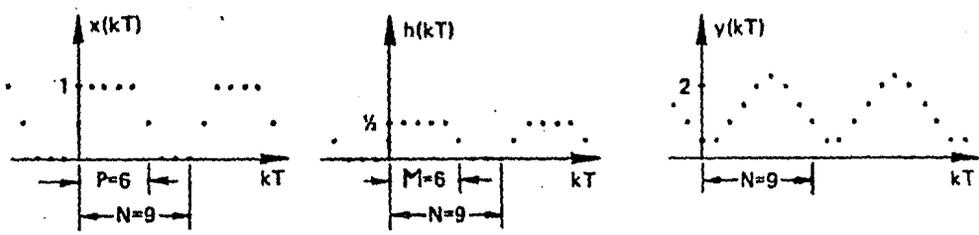
$$N > P + M - 1$$

Teniéndose en estas últimas convoluciones cíclicas que el resultado está traslapado o está muy separado.

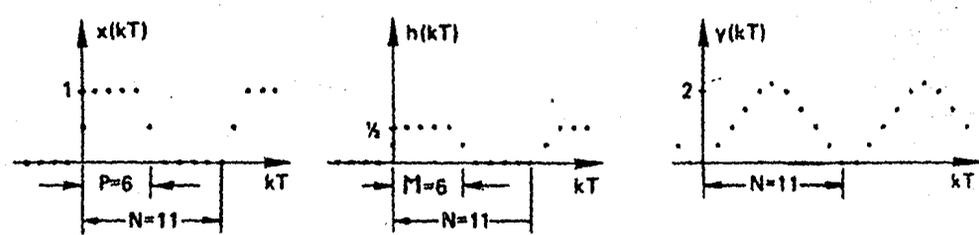
(1) Inversa de la Transformada discreta de Fourier [2].



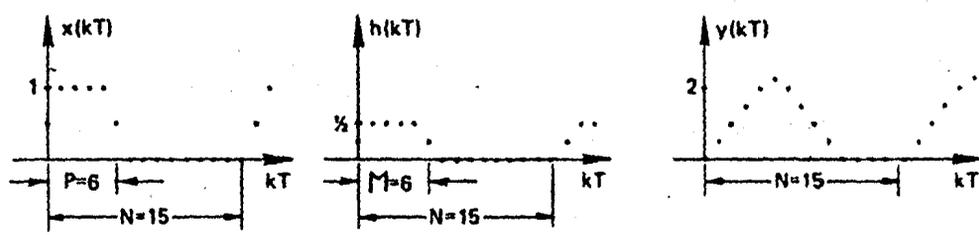
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.2

Como se vió al principio de esta sección la carga computacional de una convolución directa es aproximadamente  $M$  multiplicaciones y sumas por cada punto de la señal de entrada al filtro, o sea que si la señal de entrada tiene longitud  $P$ , haremos  $P \cdot M$  multiplicaciones y sumas para obtener  $y_p(n)$ , pero si aplicamos el método de la TRF para obtener la convolución cíclica, solamente tendríamos que efectuar 2 TRF de secuencias de longitud  $P + M$  para obtener  $X_p(k)$  y  $H_p(k)$ ,  $P + M$  multiplicaciones para obtener  $Y_p(k)$ , y una TRF de longitud  $P + M$ , para obtener  $y_p(n)$ .

Como ya sabemos cada TRF de longitud  $N$ , efectúa  $\frac{N}{2} \log_2 N$  multiplicaciones, entonces utilizando la TRF para obtener la convolución tendremos que efectuar:

$$3 \left( \frac{N}{2} \log_2 N \right) + N \quad \text{multiplicaciones}$$

donde  $N = P + M$

mientras que por el método directo de la ecuación (1.1) tendríamos que hacer:

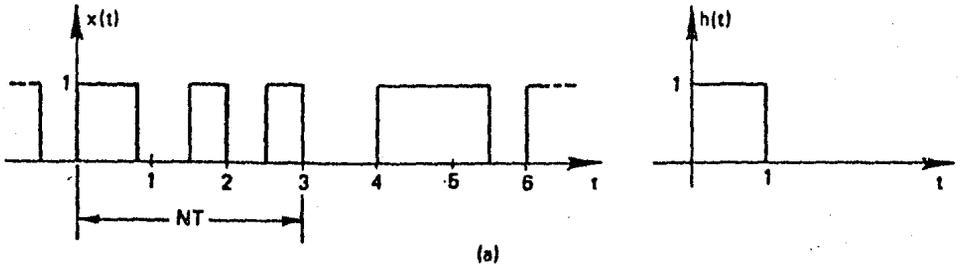
$$P \cdot (M + 1) \text{ multiplicaciones.} \quad (1)$$

Si el número de muestras del filtro  $h(n)$  es grande, y/o el número de muestras de la señal  $x(n)$  que va a entrar al filtro también es grande, entonces la TRF tiene grandes ventajas sobre la convolución directa.

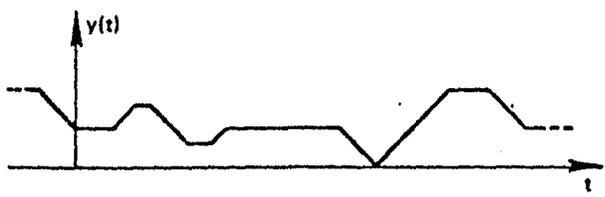
Por ejemplo: Si la longitud del filtro es  $M = 50$ , y la longitud de la señal de entrada es  $P = 100$ , utilizando la TRF tendremos:

---

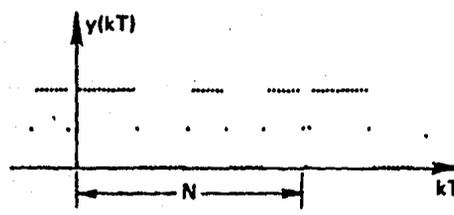
(1) Se agregaron  $P$  multiplicaciones por las sumas que se realizan.



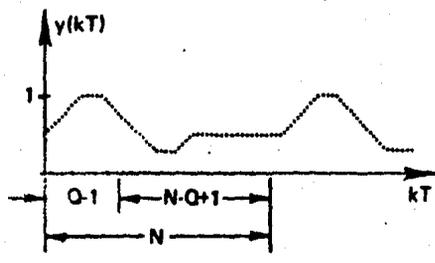
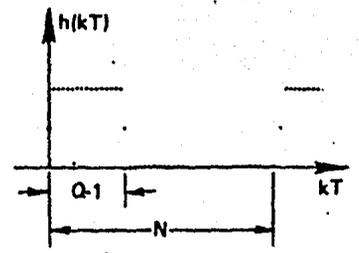
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.3

$$3 \left( \frac{150}{2} \log_2 150 \right) + 150 = 1776.48 \text{ multiplicaciones}$$

y por el método directo:

$$100 (50 + 1) = 5100 \text{ multiplicaciones.}$$

Lo cual implica un gran ahorro computacional con el uso de la TRF.

#### CONVOLUCION DE UNA SEÑAL DE LONGITUD FINITA CON UNA SEÑAL DE LONGITUD INFINITA [5]

En la Fig. 1.3(a) se ven dos señales continuas  $x(t)$  y  $h(t)$  que van a ser convolucionadas, en la fig. 1.3(b) se ve el resultado de esta convolución. Si las señales  $x(t)$  y  $h(t)$  se muestrean, se toma un intervalo de  $N$  muestras de cada señal, con este intervalo se forman dos señales periódicas  $x(kT)$  y  $h(kT)$  Fig. 1.3(c) y se efectúa la convolución cíclica con una TDF y se obtiene la señal  $y(kT)$  de la fig. 1.3(d), la cual se puede observar es idéntica a la señal  $y(t)$  en el intervalo  $(Q-1) \leq k \leq N$ .

De lo anterior se puede ver que la convolución de una señal infinita  $x(t)$  con una señal finita  $h(t)$  se puede efectuar como se muestra en la fig. 1.4, en la cual se quiere convolucionar la señal de A, con la señal de B, teniendo en cuenta que se toman bloques traslapados de la señal B, los cuales son la parte C de la fig. 1.4, y después se efectúa la convolución cíclica de cada bloque de C con la señal de A, obteniéndose D, y por último se obtiene la convolución E, la cual se forma quitándole a cada bloque de D, un trozo de se

ñal de tamaño  $P$ , y juntando todas las partes restantes para formar la señal de  $E$ .

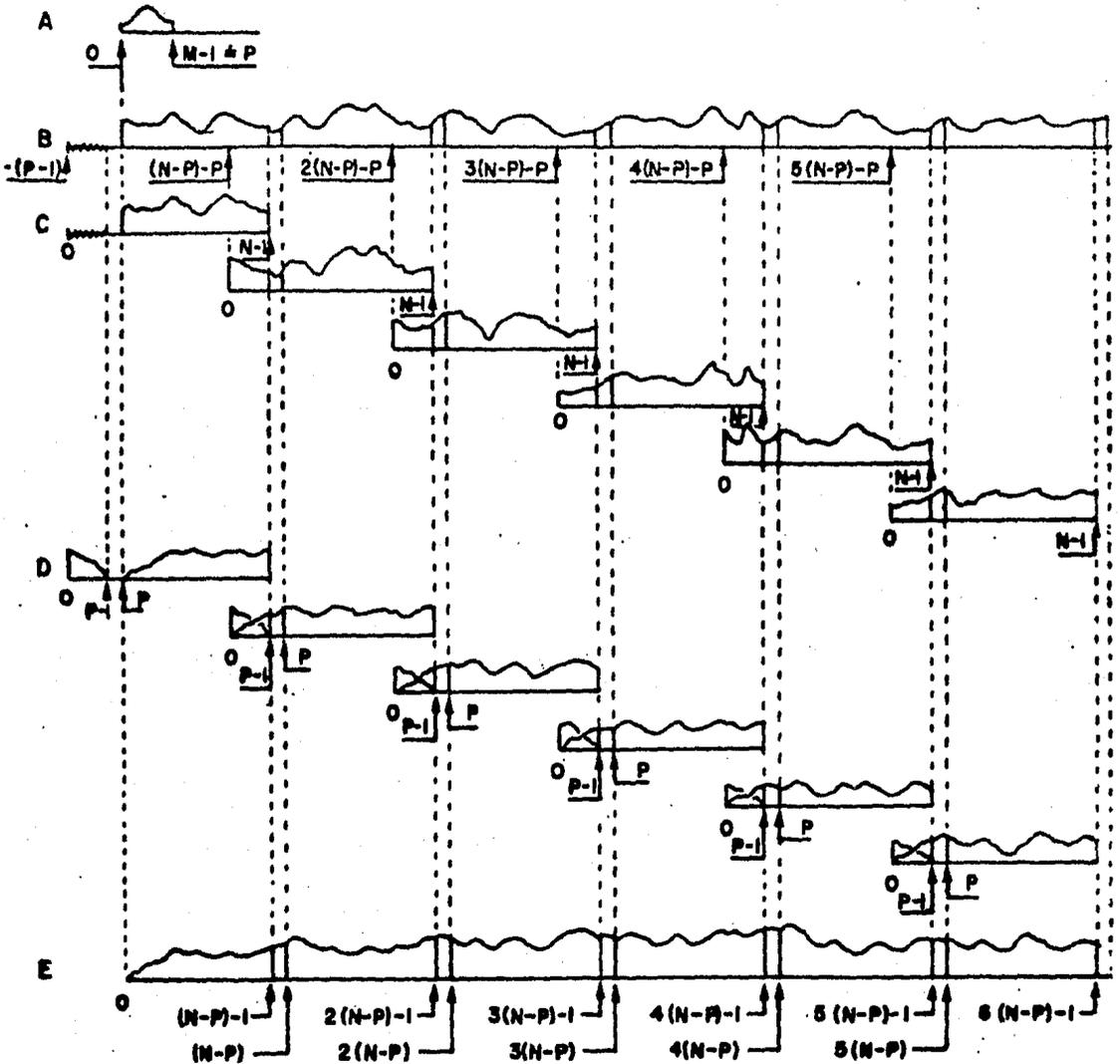


Figura 1.4

En esta aplicación se ha mostrado la forma en que se puede efectuar la convolución de dos señales de longitud finita utilizando la TRF. Se ha hecho notar que la TRF es un método computacionalmente económico, si las señales a convolucionar son de longitud grande, ya que si esto no sucede la convolución directa resulta computacionalmente más económica que la convolución utilizando la TRF.

Se describió una técnica que utiliza la TRF para convolucionar una señal de longitud finita con una señal de longitud infinita (o una de larga duración). Esta técnica al apoyarse en la TRF, implica economía computacional solo si la señal de longitud finita es larga, pues en caso contrario la convolución directa también sería preferible. Este procedimiento se utiliza en el filtrado de señales.

CAPITULO 3

APLICACIONES A SISTEMAS  
DE COMUNICACION

## 2. UN BANCO DE FILTROS OPTIMOS IMPLEMENTADO CON LA TRF.

Generalmente las aplicaciones de la "Transformada de Fourier" están relacionadas con el dominio de la frecuencia (como es el caso de la convolución indirecta, en la cual parte del proceso se efectua en la frecuencia), pero existen ciertas aplicaciones de la TDF, que se efectuan en el dominio del tiempo exclusivamente (esto es, sin pasar al dominio de la frecuencia y después tener que regresar al dominio del tiempo), una de ellas es la implementación de un banco de filtros óptimos.

Supóngase que se tiene un transmisor que tiene la capacidad de transmitir el k'esimo tono senoidal  $\text{Sen}(\frac{2\pi}{N} kn)$ , escogido entre N tonos de diferentes frecuencias igualmente espaciadas, y este tono se va a contaminar en un canal de transmisión con ruido blanco Gaussiano  $[\phi(n)]$  dando por resultado  $x(n)$ , y queremos implementar un receptor que, recibiendo el tono contaminado nos diga de cual se trata.

De la teoría de receptores óptimos [3] se sabe que si la señal discreta

$$x(n) = \text{Sen}(\frac{2\pi}{N} kn) + \phi(n)$$

es pasada por un banco de filtros como el mostrado en la figura 2.1. en la cual la respuesta a impulso del k'esimo filtro esta dada por:

$$(2.1) \quad h(n) = e^{-j(\frac{2\pi}{N}) nk} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

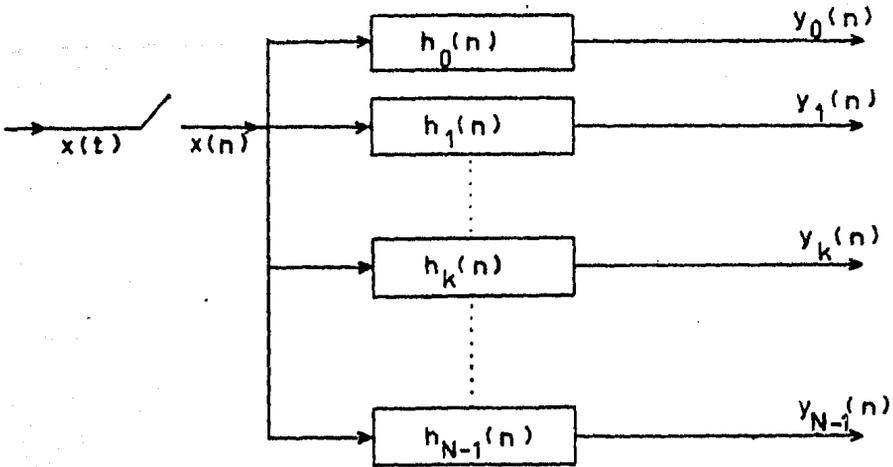


Figura 2.1

El receptor decidirá a favor del k'esimo tono si la energía a la salida del k'esimo filtro es la mayor, esto es:

$$2.2) \quad \text{Energía} [ y_k (n) ] > \text{Energía} [ y_i (n) ] \quad \forall i \neq k$$

Esto se puede hacer utilizando la TRF la cual se muestra a continuación.

Primero obtenemos la transformada Z de la respuesta impulso del filtro de la ecuación (2.1):

$$H_k (z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} \right) nk} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} \right) k}}$$

y evaluando  $H_k (z)$  en el círculo unitario tenemos:

$$H_k (e^{j\omega}) = e^{-j\omega \left( \frac{N-1}{2} \right)} e^{j \left( \frac{\pi k}{N} \right)} \frac{\text{Sen} \left( \frac{N\omega}{2} \right)}{\text{Sen} \left( \frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N} \right)}$$

La cual se puede escribir como:

$$2.3) \quad H_k(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\left(\frac{\pi k}{N}\right)} f_N(\omega, k)$$

donde  $f_N(\omega, k) = \text{Sen}\left(\frac{N\omega}{2}\right) / \text{Sen}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)$

En la figura 2.2 podemos ver  $|H_k(e^{j\omega})|$  que es  $f_N(\omega, k)$  para  $k = 0$  y  $N = 16$ .

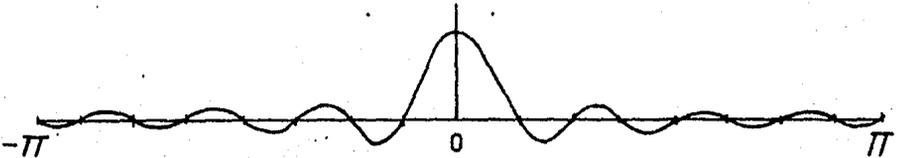


Figura 2.2

En la figura 2.3 podemos ver como se vería  $|H_k(e^{j\omega})|$  para  $0 \leq k \leq 15$ , o sea para cada uno de estos  $N$  filtros; en la parte de arriba de la figura tenemos las  $k$ 's pares, y en la parte de abajo las  $k$ 's impares, y solo están dibujados los lóbulos principales de cada filtro, excepto para el filtro 8, al cual se le dibujó su función de transferencia completa.

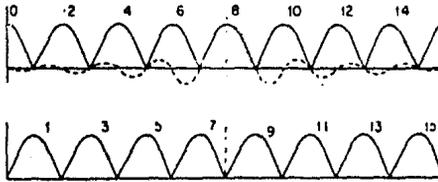


Figura 2.3

Examinando las respuestas en frecuencia de cada filtro en la Fig. 2.3., vemos que tendríamos traslapes entre los lóbulos principales de cada filtro con los adyacentes, y por lo tanto, un banco de filtros poco eficiente.

Pero si en lugar de 16 filtros de la forma de la ecuación 2.1., se tubieran 32 filtros (o sea  $N=32$ , y  $0 \leq k \leq 31$ ) y de nuevo solo interesaran 16 puntos espectrales igualmente separados en la frecuencia. Entonces se desechan los 16 filtros que esten fuera de las frecuencias de interés quedando los filtros que se ven en la Fig. 2.4.

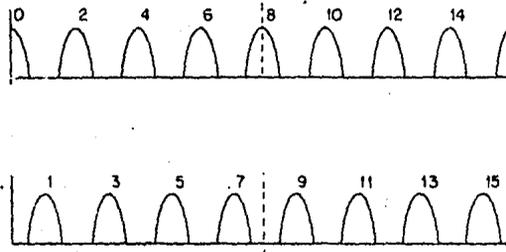


Figura 2.4

El banco de filtros que se muestra en la fig. 2.4. puede ser suficientemente bueno para detectar cualquiera de los 16 diferentes tonos senoidales que haya enviado el transmisor, lo cual depende del error tolerado en el diseño del sistema.

Ahora bien, la salida  $y_k(n)$  del  $k$ 'esimo filtro, es la convolución de  $x(n)$  con  $h_k(n)$ .

$$\begin{aligned}
 Y_k(n) &= \sum_{m=0}^n x(m) h(n-m) \\
 &= \sum_{m=0}^n x(m) e^{-j \left(\frac{2\pi}{N}\right) k (n-m)} \\
 &= e^{j \left(\frac{2\pi}{N}\right) kn} \sum_{m=0}^n x(m) e^{-j \left(\frac{2\pi}{N}\right) km}
 \end{aligned}$$

$$2.4) \quad \text{Pero } X(k) = \sum_{m=0}^n x(m) e^{-j \left(\frac{2\pi}{N}\right) km}$$

donde  $X(k)$  es la TDF de  $x(m)$ .

y por lo tanto

$$2.5) \quad Y_k(n) = e^{j \left(\frac{2\pi}{N}\right) kn} X(k)$$

Por lo tanto la salida de  $k$ 'esimo filtro es el coeficiente  $k$ 'esimo de la TDF de  $x(n)$ , o sea  $X(k)$ , multiplicado por un exponencial complejo.

Ahora simplemente se tiene que encontrar la energía de la señal de salida de cada filtro, la cual es la información necesaria para que el receptor óptimo elija el tono transmitido de acuerdo a 2.2).

La ventaja que representa implementar el banco de filtros utilizando la TRF es significativa si la cantidad de tonos diferentes que puede mandar el transmisor son muchos, y por lo tanto la cantidad de filtros en el receptor tendrían un costo muy elevado, mientras que si se utiliza una TRF con una  $N$  apropiada, el costo de este banco de filtros disminuye considerablemente.

## BANCO DE DEMODULADORES COMPLEJOS UTILIZANDO TRF.

En esta aplicación se tratará la implementación de un banco de demoduladores complejos. Un demodulador complejo sirve para demodular señales de banda lateral única (BLU) o señales que se transmitieron por multicanalización en -- cuadratura [6].

A continuación se explica el proceso de modulación -- por multicanalización en cuadratura de fase, de dos señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , el cual se muestra en la fig. 3.1.

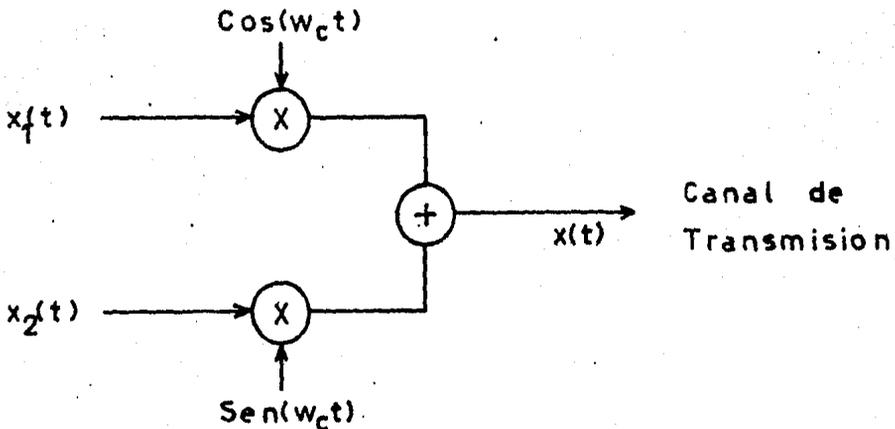


Figura 3.1

La salida  $x(t)$  del Modulador de la figura 3.1. es:

$$(3.1.) \quad x(t) = x_1(t) \cos \omega_c t + x_2(t) \sin \omega_c t$$

La anterior ecuación se puede reescribir como:

$$(3.2) \quad x(t) = R(t) \cos (\omega_c t + \phi(t))$$

- (1) Se puede ver facilmente, que si  $x_2(t)$  es igual a la señal  $x_1(t)$  con las fases de todos sus componentes de frecuencia desviadas  $-\frac{\pi}{2}$ , el modulador sería un modulador de BLU [6].

donde:

$$R(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$

$$\phi(t) = \text{Tan}^{-1} \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$$

Nótese que un modulador complejo o de fase en cuadratura sirve para modular dos señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  usando una misma frecuencia.

El proceso de demodulación, consiste en obtener las señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de  $x(t)$ , y se realiza comúnmente como se muestra en la figura 3.2. En el proceso mostrado, se trabajó con  $x(n)$  y no con  $x(t)$  debido a que a continuación se mostrará otro procedimiento que utiliza una TRF y trabaja con señales discretas.

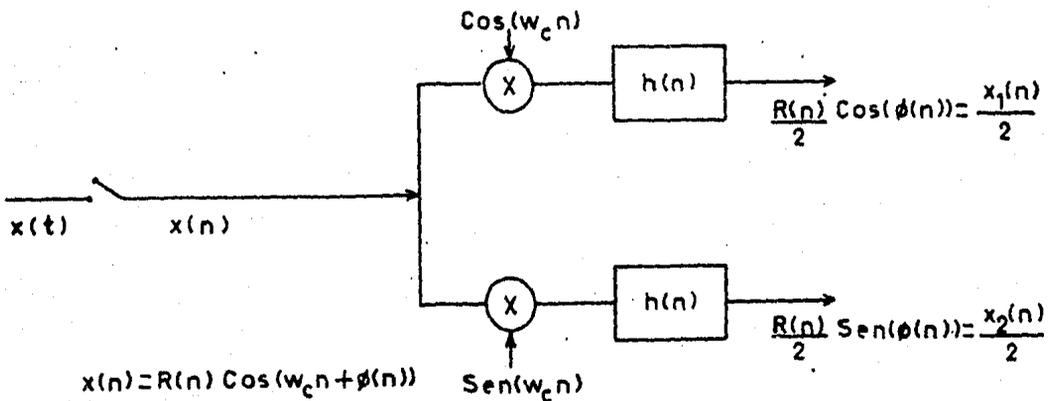


Figura 3.2

De la figura 3.2 es fácil ver que:

$$x_1(n) = x(n) \text{Cos } \omega_c n * h(n)$$

3.3. Y

$$x_2(n) = x(n) \text{ Sen } \omega_c n * h(n)$$

Donde el filtro  $h(n)$  es la respuesta a impulso de un filtro pasabajas de longitud  $N$ , por lo que la ecuación 3.3. se puede escribir como:

$$(3.4.) \quad x_1(n) = \sum_{m=0}^{N-1} 2 x(n-m) \text{ Cos } [\omega_c(n-m)] h(m)$$

$$x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} 2 x(n-m) \text{ Sen } [\omega_c(n-m)] h(m)$$

Si el demodulador de la figura 3.2., lo sustituimos por el que se muestra en la figura 3.3., que básicamente es similar al primero, pero su salida es la suma de una parte real  $\frac{x_1(n)}{2}$  y de una parte imaginaria  $\frac{x_2(n)}{2}$ , dando por resultado  $y(n)$ , la cual se puede escribir como:

$$(3.5.) \quad y(n) = \frac{x_1(n)}{2} + j \frac{x_2(n)}{2}$$

y sustituyendo 3.4. en 3.5. tenemos:

$$(3.6.) \quad y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m) \{ \text{Cos } [\omega_c(n-m)] + j \text{ Sen } [\omega_c(n-m)] \} h(m)$$

La cual se puede escribir como:

$$(3.7.) \quad y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m) e^{-j\omega_c(n-m)} h(m)$$

y sacando un exponencial de la sumatoria queda:

$$(3.8.) \quad y(n) = e^{-j\omega_c n} \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m) h(m) e^{j\omega_c m}$$

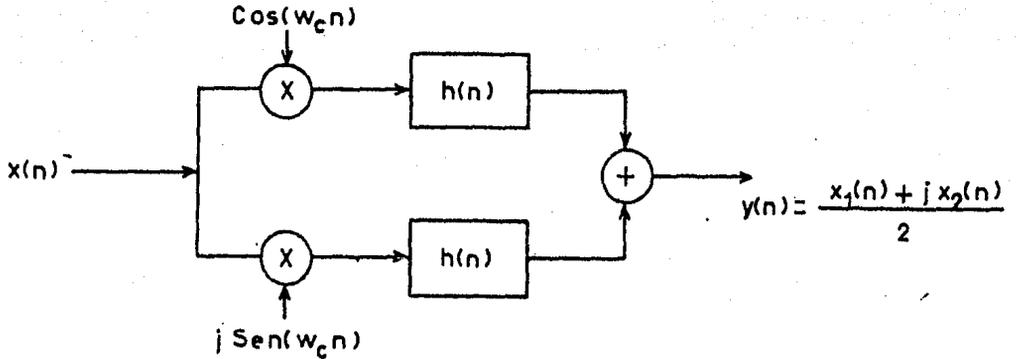


Figura 3.3

Se observa que la ecuación (3.8.) es una TDF, la cual puede ser obtenida mediante una TRF, multiplicada por una corrección de fase, y que al obtener  $y(n)$  hemos demodulado a la señal  $x(n)$  debido a que la parte real de  $y(n)$  es  $-\frac{x_1(n)}{2}$  y la parte imaginaria es  $\frac{x_2(n)}{2}$ .

Ahora bien la ecuación (3.8) puede ser implementada como un filtro  $h'(n)$  cuya respuesta a impulso es:

$$h'(n) = h(n) e^{j\omega_c n}$$

Y por el cual pasa la señal  $x(n)$ , para posteriormente multiplicar la salida del filtro por  $e^{-j\omega_c n}$ , lo cual se puede ver claramente en la parte superior de la figura 3.4. Debido a que  $h(n)$  es la respuesta a impulso de un filtro pasabajas, el ancho de banda de la señal  $y(n)$  es menor que el ancho de banda de la señal de entrada  $x(n)$ , por lo que

se puede reducir la frecuencia de muestreo de la señal  $y(n)$  con tal que se satisfaga el criterio de Nyquist. Por lo anterior se puede reducir la frecuencia de muestreo de  $y(n)$  a  $y(Rn)$  como se muestra en la figura 3.4., y en la parte inferior de esta misma figura podemos ver que el intercambiar la reducción del periodo de muestreo con la multiplicación por  $e^{-j\omega_c n}$ , es benéfico, pues no se tiene que hacer una multiplicación para cada índice  $n$ , sino para cada  $R$ 'esimo valor del índice  $n$ .

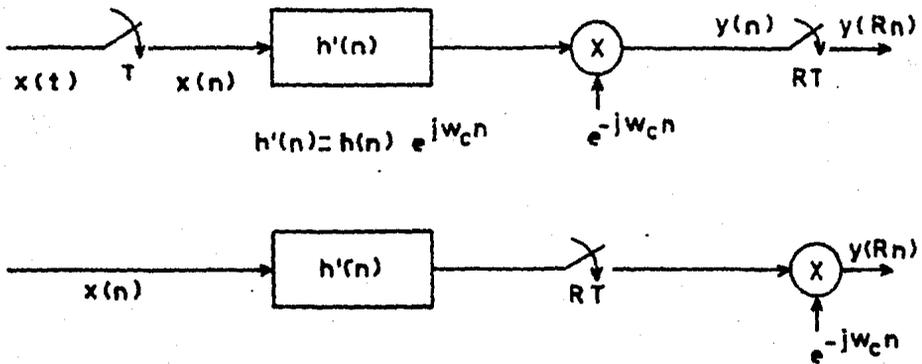


Figura 3.4

Con el anterior cambio del periodo de muestreo la ecuación 3.8. se transforma a:

(3.9.)

$$y(Rn) = e^{-j\omega_c Rn} \sum_{m=0}^{N-1} x(Rn-m) h(m) e^{j\omega_c m}$$

Con 3.9. se ha terminado de explicar como se demodula-

(1) RSN.

rían dos señales  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ . Obsérvese que hasta este momento hemos utilizado solamente una frecuencia de trabajo ( $\omega_c$ ), y que la ecuación 3.9. puede ser implementada con una TRF, pero recordando que esta última puede manejar hasta  $N$  frecuencias diferentes igualmente espaciadas, si hacemos:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{N} c \quad \text{donde } c = 0, 1, \dots, N-1$$

La ecuación 3.9. se transformaría a:

$$(3.10) \quad y_{\omega_c}(Rn) = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}c\right)Rn} \sum_{m=0}^{N-1} x(Rn-m) h(m) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}c\right)m}$$

Y para cada una de las  $N$  distintas frecuencias ( $\omega_c, c=0, 1, \dots, N-1$ ) tendríamos un demodulador complejo, lo cual tiene la ventaja de que si para calcular 3.10, usamos una TRF, - estamos calculando  $y_{\omega_c}(Rn)$  para toda  $\omega_c$ , o sea que hemos implementado un banco de  $N$  demoduladores complejos con una sola TRF. La implementación de este sistema es como se ve en la figura 3.5.

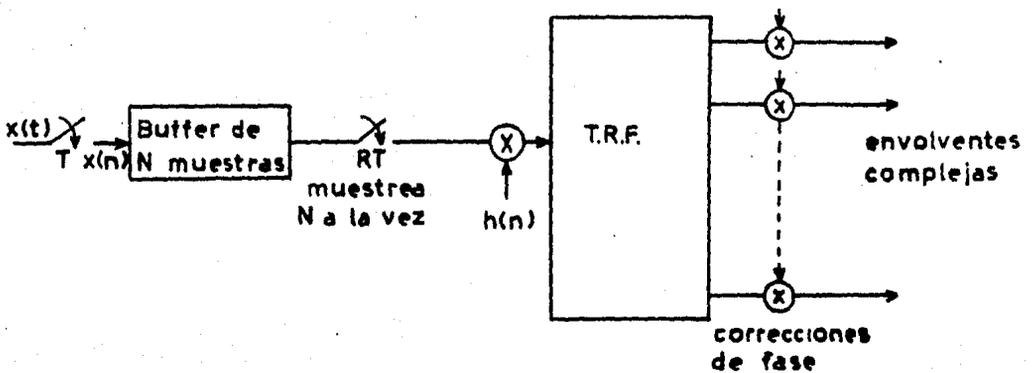


Figura 3.5

La ecuación (3.10) es la salida de nuestro banco de demoduladores y puede tener la siguiente interpretación: Cada señal demodulada  $y_w(Rn)$  es la salida de un filtro pasobanda  $h(m)$   $e^{j(\frac{2\pi}{Nc})m}$ , multiplicada por una corrección de fase. Las bandas de paso de estos filtros no deben traslaparse, lo cual sería posible si los filtros pasobanda de (3.10) fueran ideales, pero esto no sucede en la práctica. Una alternativa para disminuir el traslape de las bandas de paso de los filtros es manejar en la modulación y en la demodulación un número de frecuencias menor a  $N$  (número de puntos de la TRF) y que estas estén igualmente espaciadas. Por ejemplo, si usamos  $\frac{N}{2}$  frecuencias igualmente espaciadas, en el proceso de demodulación solo se utilizarán  $\frac{N}{2}$  filtros pasobanda igualmente espaciados en el dominio de la frecuencia, logrando con ello que disminuya el traslape con respecto al que existiría si se utilizaran  $N$  frecuencias con  $N$  filtros.

(1)  
La ventaja de usar una TRF en vez de  $M$  demoduladores complejos separados como los de la fig. 3.5 es que en la TRF el costo es casi constante aunque  $M$  sea grande, en cambio utilizando demoduladores separados, el costo se incrementa proporcionalmente con  $M$ .

---

(1)  $M \leq N$ .

CAPITULO 4

APLICACIONES A PROCESAMIENTO  
DE SEÑALES DE VOZ

## 4. ANALISIS Y SINTESIS DE UNA SEÑAL VOZ.

Las señales de voz han sido estudiadas durante mucho tiempo con el interés enfocado principalmente en manipular sus parámetros básicos o en reducir el número de datos necesarios para transmitirla en un sistema de comunicación.

Uno de los métodos de estudio es el de la transformada corta de Fourier [4], que no es sino una representación frecuencial variable con el tiempo, de la voz. Los sistemas basados en esta representación son comúnmente llamados codificadores de voz con fase (Phase-Vocoder) debido a que los parámetros obtenidos mediante la transformada corta de Fourier, son amplitud y fase.

Primero se estudiará la transformada corta de Fourier, y después el proceso de análisis y el de síntesis de una señal de voz.

La transformada corta de Fourier de la señal  $x(n)$  está definida como:

$$4.1) X_k(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) w_N^{-rk}$$

para  $k=0,1,\dots,N-1$  donde  $w_N = \exp [j (\frac{2\pi}{N})]$  y  $h(n)$  es una ventana escogida apropiadamente.  $X_k(n)$  puede ser vista como  $N$  muestras  $[X_0(n), X_1(n), X_2(n), \dots, X_{N-1}(n)]$  del espectro en frecuencia de una señal para un tiempo  $n$ . De acuerdo a lo anterior,  $X_k(n)$  se puede obtener para cada tiempo  $n$ , simplemente multiplicando la señal  $x(n)$  por una ventana  $h(n-r)$  y ob

teniendo la transformada discreta de Fourier de la secuencia resultante.

"Interpretación clásica de la Transformada corta de Fourier".

Es informativo interpretar (4.1) en términos de un conjunto de filtros digitales pasabanda en paralelo, con bandas de paso contiguas, lo que se verá a continuación:

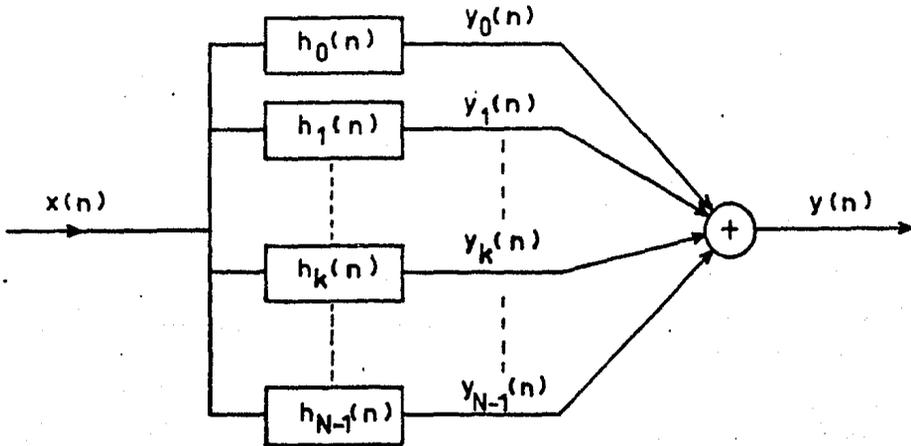


Figura 4.1

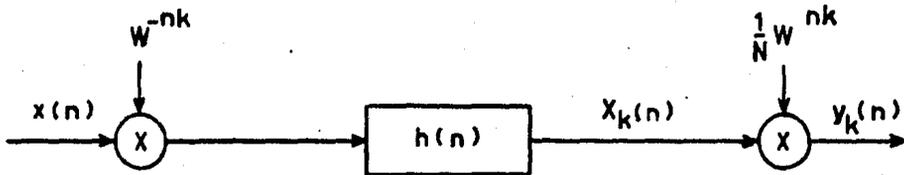


Figura 4.2

En la fig. 4.1 se tienen  $N$  filtros  $h(n)$  pasabanda, los cuales tienen respuesta a impulso:

$$h_k(n) = \frac{1}{N} h(n) w_N^{nk} \quad k=0,1,\dots,N-1$$

donde  $h(n)$  es un filtro pasabajas, y  $h_0(n), h_1(n), h_2(n) \dots h_{N-1}(n)$  son filtros pasabanda igualmente espaciados en la frecuencia, y la salida del  $k$ 'ésimo filtro cuando la entrada es  $x(n)$  está dada por :

$$\begin{aligned} y_k(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) \\ Y_k(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) \left[ \frac{1}{N} h(n-r) w_N^{(n-r)k} \right] \\ &= \frac{1}{N} w_N^{nk} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) w_N^{-rk} \\ &= \frac{1}{N} w_N^{nk} X_k(n) \end{aligned}$$

donde  $X_k(n)$  es la transformada corta de Fourier de  $x(n)$ .

La salida total del banco de filtros, está dada por:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k(n)$$

$$4.2) \quad y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) w_N^{nk}$$

Por lo tanto, si  $X_k(n)$  se obtuvo de la ecuación (1) mediante un  $h(n)$  adecuado, podemos volver a recuperar la señal  $x(n)$  mediante la ecuación (4.2) siempre y cuando  $y(n) = x(n)$ , esto es si:

$$4.3) \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) w_N^{nk}$$

Las características del filtro, que permitirían que  $x(n) = y(n)$  se deducen multiplicando la ecuación (1) por  $\left(\frac{1}{N}\right) w_N^{nk}$  y sumando para  $k=0,1,\dots,N-1$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) w_N^{nk} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) w_N^{-rk} w_N^{nk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{(n-r)k} \right] \end{aligned}$$

Pero  $\left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{(n-r)k} \right] = \begin{cases} 1 & \text{Si } n-r = qN \\ & \text{donde } q \in \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty\} \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases}$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) w_N^{nk} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(n + qN) h(-qN)$$

$$\text{Si hacemos } h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = qN \\ & q \in \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty\} \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) w_N^{nk} = x(n)$$

Por lo tanto, vemos que la función  $x(n)$  es recuperable totalmente, si se tienen las muestras de  $X_0(n), X_1(n), \dots, X_{N-1}(n)$  y  $h(n)$  es diferente de cero en  $n=0$  y es cero, en  $\pm N, \pm 2N, \dots$

"REDUCCION DEL NUMERO DE PARAMETROS EN LA FRECUENCIA PARA REPRESENTAR  $x(n)$ ".

Existen propiedades de la transformada corta de Fourier, que permiten reducir el número de parámetros en la frecuencia requeridos para representar  $x(n)$ .

Una propiedad que nos permite representar  $x(n)$  con menor número de parámetros, es que si  $x(n)$  es real,  $X_k(n) = X_{(N-k)}^*(n)$ .

Y si  $N$  es par entonces  $X_k(n)$  está completamente representado por:

$$X_k(n) \text{ para } k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

La segunda propiedad que nos permite una reducción en el número de parámetros en la frecuencia para representar  $x(n)$  es ver  $X_k(n)$  para un valor particular de una frecuencia  $k$ , y ver como varía con  $n$ . De la figura 4.2, se puede ver, que  $X_k(n)$  es la salida de un filtro pasobajas con respuesta a impulso  $h(n)$ , de tal manera que cada secuencia está limitada en banda en el rango  $-\frac{\pi}{N} < \Omega < \frac{\pi}{N}$ . Entonces del teorema de muestreo, vemos que

solo es necesario obtener  $X_k(n)$  para cada  $R$ 'ésimo valor de  $n$  donde  $R \leq N$ .

"Implementación de un sistema de "Análisis" de Voz  
utilizando la TRF."

Se describe un método que permite describir una señal de voz, en función de su "Transformada corta de Fourier", a este procedimiento se le denomina comúnmente "Análisis de una señal de voz". La ventaja que se tiene al tener representada una señal de voz por su "Transformada corta de Fourier", es saber cuales son y como varían las amplitudes y fases de cada una de las componentes en frecuencia de la señal de voz.

Primero se escribirá la ecuación (1) y partiendo de ella se expondrá el proceso de "Análisis de voz".

$$X_k(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) w_N^{-kr}$$

Haciendo  $s = r-n$

$$\begin{aligned} X_k(n) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(n+s) h(-s) w_N^{-(n+s)k} \\ &= w_N^{-nk} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x(n+\ell N+m) h(-\ell N-m) w^{-(\ell N+m)k} \end{aligned}$$

donde  $s = \ell N + m$  para  $m=0,1,\dots,N-1$

y  $\ell = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$  y  $w_N^N = 1$

entonces:

$$(4.4) X_k(n) = w_N^{-nk} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(n+\ell N+m) h(-\ell N-m) \right\} w_N^{-mk}$$

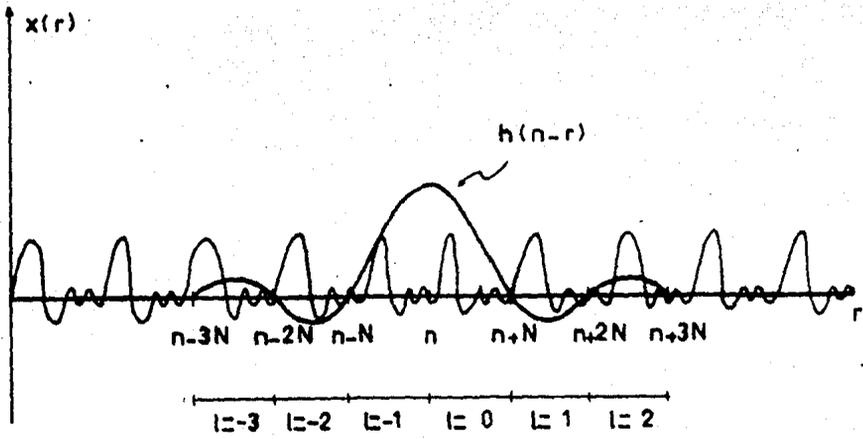
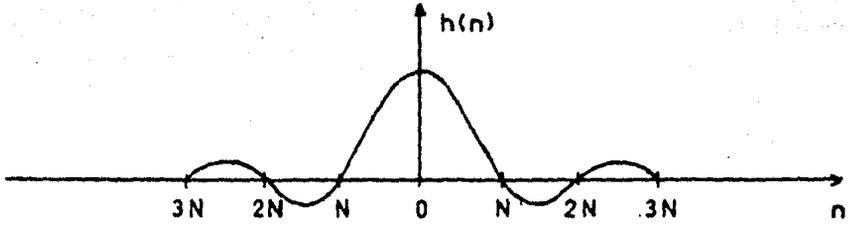


Figura 4.3

Y llamando a la sumatoria entre parentesis:

$$\tilde{x}_m(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(n+\ell N+m) h(-\ell N-m)$$

donde  $\tilde{x}_m(n)$  es una señal periódica en  $m$  con periodo  $N$  y sustituyendo en 4.4., ésta última queda:

$$X_k(n) = w_N^{-nk} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m(n) w_N^{-mk}$$

La cual se puede escribir como:

$$\tilde{X}_k(n) = w_N^{-nk} \tilde{X}_k(n)$$

(4.5) donde:

$$\tilde{X}_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m(n) w_N^{-mk}$$

Vemos que  $\tilde{x}_k(n)$  es la TDF de  $\tilde{x}_m(n)$  la cual puede ser evaluada usando el algoritmo de la TRF y además explotando la propiedad de corrimiento de la TDF [1], que nos dice que un corrimiento en el tiempo corresponde, a la multiplicación por un exponencial complejo en el dominio de la frecuencia, la expresión (4.5) se reduce a:

$$(4.6) \quad X_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_{(m-n)_N}(n) w_N^{-mk}$$

Donde  $\tilde{x}_{(m-n)_N}(n)$  es la señal  $\tilde{x}_m(n)$  desplazada circularmente en el tiempo  $n$  puntos [4].

(4.6) se puede escribir como:

$$(4.7) \quad X_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_m(n) w_N^{-mk}$$

donde:  $x_m(n) = \tilde{x}_{(m-n)_N}(n)$

Basándose en el anterior proceso de análisis, la forma de calcular los coeficientes de la Transformada Corta de Fourier  $x_k(n)$  para un valor particular de  $n$ , es como sigue: Obsérvese la fig. (4.3.), los datos de la secuencia de entrada son considerados como una función del índice mudo  $r$ , (la secuencia queda como  $x(r)$ ), y son multiplicados por la ventana  $h(n-r)$  (en la práctica  $h(n)$  es una función par, esto es  $h(n-r) = h(r-n)$ ). Se asume que  $h(n)$  es de duración finita, y que es escogida de tal manera que su longitud es un múltiplo par de  $N$ , más uno. La secuencia  $x(r)$  después de ser pesada con  $h(n-r)$ , es dividida en secciones de longitud  $N$  de tal manera que  $x(r)|_{r=n}$  es la muestra cero'ésima de una de las secciones.

Las subsecuencias resultantes de  $N$  puntos se denotan por  $x_m^{(\ell)}(n)$  para  $0 \leq m \leq N-1$  y son sumadas para formar:

$$\tilde{x}_m(n) = \sum_{\ell} x_m^{(\ell)}(n) \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

Y esta secuencia resultante  $\tilde{x}_m(n)$  es desplazada circularmente (en  $m$ ) la longitud de  $n$  muestras para obtener  $x_m(n)$

esto es:

$$(4.8) \quad x_m(n) = \tilde{x}_{(m-n)N}(n)$$

Con los  $N$  valores de  $x_m(n)$  mediante 4.7 obtenemos los valores  $X_0(n), X_1(n), \dots, X_{N-1}(n)$  que son el análisis espectral de la señal en el punto  $n$ .

"Implementación de un sistema de síntesis de voz utilizando la TRF"

Aquí se expone un método para recuperar la señal de voz cuando se tiene su "transformada corta de Fourier" obtenida mediante el proceso de "Análisis". A este proceso de recuperación de la señal de voz se denomina síntesis de voz; el proceso presenta la ventaja de utilizar una TRF lo cual hace --agil al proceso.

Se ha visto que  $x(n)$  puede ser recuperada de  $X_k(n)$  mediante:

$$(4.9) \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(n) w_N^{nk}$$

$$\text{Si } h(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n=\pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

Se argumentó ya, que para poder representar  $x(n)$  en la frecuencia, solo es necesario obtener  $X_k(n)$  para cada  $R$ 'esimo valor de  $n$  donde  $R \leq N$ , por lo tanto, los parámetros que irán al sintetizador serán  $X_k(rR)$  y no  $X_k(n)$ , debido a que podemos interpolar las  $X_k(rR)$  y obtener  $X_k(n)$ .

Si los parámetros que vamos a introducir al sintetizador son:

$$S_k(r) = x_k(rR) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{para toda } r, \text{ y } l \text{ la--}$$

namo  $f(n)$  a la respuesta a impulso del filtro interpolador  $1/R$  (de - respuesta a impulso finita) de longitud  $2QR+1$  [7] , la señal interpolada estará dada por:

$$(4.10) X_k(n) = \sum_{r=L^-}^{L^+} f(n-rR) S_k(r)$$

Donde los límites de la sumatoria los determina la longitud de --  $f(n)$ .

$$L^-(n) = \left[ \frac{n}{R} \right] + Q$$

$$L^+(n) = \left[ \frac{n}{R} \right] - Q + 1$$

Donde  $\left[ \frac{n}{R} \right]$  es el entero más grande de  $\frac{n}{R}$ , si sustituimos  $X_k(n)$  de 4.10 en la ecuación 4.9.

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=L^-}^{L^+} f(n-rR) S_k(r) w_N^{nk}$$

$$x(n) = \sum_{r=L^-}^{L^+} f(n-rR) \sum_{k=0}^{N-1} S_k(r) w_N^{nk}$$

$$(4.11) x(n) = \sum_{r=L^-}^{L^+} f(n-rR) s_n(r)$$

Donde:

$$(4.12) s_n(r) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k(r) w_N^{nk}$$

Vemos que 4.12 es una TDF, y puede ser calculada con una TRF, y mediante 4.11 obtenemos  $x(n)$ , con lo cual hemos regresado de la frecuencia - al tiempo utilizando solo  $X_k(rR)$  y no  $X_k(n)$ .

Los algoritmos de "Análisis" y de "Síntesis" tienen variadas aplicaciones: Se utilizan para filtrar señales multiplicando la respuesta en frecuencia del filtro por la transformada corta de Fourier de la señal de entrada, teniendo la ventaja de que la respuesta en frecuencia del filtro puede variar con el tiempo. [12]

Cuando se desea variar las fases o las amplitudes de los componentes en frecuencia de una señal de voz, la transformada corta de Fourier obtenida con los algoritmos mencionados es un método eficiente de hacerlo. [12]

Los algoritmos de "Análisis" y "Síntesis" también han sido usados para comprimir una señal en el dominio de la frecuencia. En la referencia [11] se describe un método para comprimir una señal utilizando las magnitudes de la transformada corta de Fourier.

La transformada corta de Fourier tiene muchas aplicaciones, esto se debe en gran parte a que los algoritmos utilizados en su obtención utilizan la TRF, haciendo eficiente y rápido al proceso.

"Experimentos hechos con el codificador de voz con fase"

Se implementó un sistema de "Análisis" de voz y otro de "Síntesis" de voz.

Se hicieron varios experimentos con el fin de investigar cual era el efecto de variar la fase de una señal de voz y ver si era detectado el cambio de fase por el oído humano.

Primero se hizo el análisis de una señal de voz con el algoritmo que se describió previamente, utilizando una ventana finita del tipo  $\frac{\sin t}{t}$ , de 3 lóbulos por lado, con lo cual se obtuvieron las muestras de la transformada corta de Fourier con  $R = \frac{N}{2}$ , y después utilizando todas las amplitudes y fases de la transformada corta de Fourier se regresó al dominio del tiempo con el algoritmo de "síntesis" con lo cual se obtuvo de nuevo una señal digital de voz, la cual se escuchó sin percibir ninguna diferencia entre ella y la original.

Después se implementó un programa al que se le daban -- las amplitudes y las fases de la transformada corta de Fourier y el programa seleccionaba un porcentaje prefijado de -- las mayores amplitudes de cada espectro de la transformada -- corta de Fourier y solo a éstas se les conservaba su fase, y todas las fases de las demás amplitudes se hacían cero; con esta transformada corta de Fourier "distorsionada" se procedía a recuperar la señal de voz en el tiempo utilizando el método de "Síntesis" que se describió en hojas anteriores. Se -- encontró que si eran cero el 50% de las fases, y las amplitudes se conservaban intactas, al aplicar la "Síntesis" de voz,

la señal en el tiempo se escuchaba sin distorsión subjetiva. Se repitió el experimento haciendo cero un mayor porcentaje de las fases, notándose que entre más fases se hacían cero, la señal se distorsionaba más, pero seguía siendo entendible.

Estos experimentos se hicieron con el fin de empezar a trabajar en un problema importante: determinar la cantidad de información mínima que se requiere acerca de las fases - para poder sintetizar una señal de voz con una distorsión - subjetiva aceptable.

## A P E N D I C E A .

Obtención de un algoritmo de T.R.F.

Se tiene la TDF de la ecuación 1.A)

$$1.A) \quad A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w^{mn}$$

donde  $w = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$

y queremos obtener las  $A_m \quad m=0,1,\dots,N-1$

De la secuencia  $a_n$  de  $2N$  muestras que se ven en la Fig.

1.A)

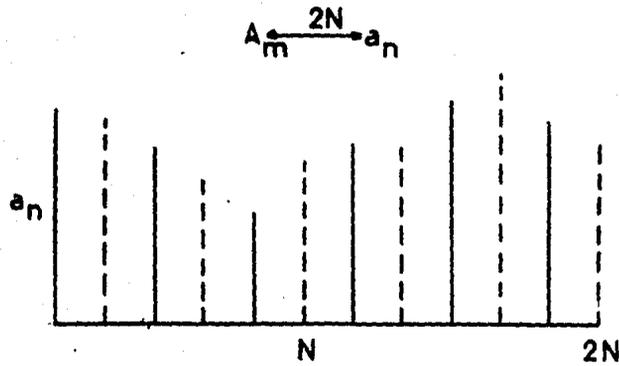


Figura 1.A

A continuación se demuestra que es suficiente con obtener la TDF de dos secuencias de  $N$  muestras:

$$b_n \xleftrightarrow{N} B_m$$

$$c_n \xleftrightarrow{N} C_m$$

y  $A_m$  se obtiene de:

$$2.A) \quad A_m = B_m + w_{2N}^m C_m$$

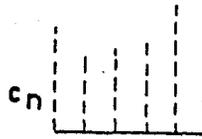
Demostración.

Si hacemos:

$$b_n = a_{2n}$$



$$c_n = a_{2n+1}$$



Donde  $b_n$  y  $c_n$  son los componentes pares e impares de  $a_n$ .

$$3.A) \quad A_m = \sum_{n=0}^{2N-1} a_n w_{2N}^{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k} w_{2N}^{2nk} + \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} w_{2N}^{(2k+1)m}$$

$$\text{pero } w_{2N}^{2km} = w_N^{km} \quad w_{2N}^{(2k+1)m} = w_N^{km} w_{2N}^m$$

Entonces:

$$4.A) \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k} w_{2N}^{2km} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k w_N^{km} = B_m$$

Y:

$$5.A) \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} w_{2N}^{(2k+1)m} = w_{2N}^m \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_N^{km} = w_{2N}^m C_m$$

de 3.A), 4.A) y 5.A) tenemos:

$$2.A) \quad A_m = B_m + w_{2N}^m C_m$$

De aquí se ve que para la evaluación de  $B_m$  y  $C_m$  el número de multiplicaciones requeridas, es  $2(N-1)^2$ . Notéase que para obtener  $A_m$  de 2.A se necesitan:

$2(N-1)^2 + 2N-1 = 2N^2 - 2N+1$  multiplicaciones por--  
que la ecuación (2.A) implica una multiplicación  $w_{2N}^m C_m$  -  
por cada  $m \neq 0$ .

Vemos que si se hubiera calculado  $A_m$  directamente de:

$$A_m = \sum_{n=0}^{2N-1} a_n w^{mn}$$

El número requerido de multiplicaciones hubiera sido  $(2N-1)^2 = 4N^2 - 4N + 1$  por lo tanto el número de multiplicaciones requerido, se ha reducido a casi la mitad.

Otra reducción importante en el número de multiplicaciones se debe a que:

$$B_{m+N} = B_m$$

$$C_{m+N} = C_m$$

$$W_{2N}^{m+N} = -W_{2N}^m$$

Entonces para computar  $A_m$  para  $m=0, \dots, N-1$  se utiliza -

$$A_{m+N} = B_m - W_{2N}^m C_m \text{ y para } m = N, \dots, 2N-1 \text{ usamos:}$$

$$A_{m+N} = B_m - W_{2N}^m C_m$$

Ahora bien si  $N = 2^S$  así como se separó  $a_n$  en dos series  $b_n$  y  $c_n$ , se puede separar  $b_n$ , en dos secuencias y asimismo  $c_n$  sucesivamente hasta que las descomposiciones lleguen a tener  $N=2$  términos.

Si se denomina  $F(N)$  al número de multiplicaciones para obtener una TDF de orden  $N$  utilizando lo anteriormente expuesto.

$$F(2N) = 2F(N) + N$$

$2F(N)$  son para la obtención de  $B_m$  y  $C_m$ , y  $N-1$  multiplicaciones para la evaluación de  $A_m$  agregando una multiplicación más por las restas requeridas.

Como  $F(2) = 1$   $F(4) = 4$   $F(8) = 12$ , se puede mostrar -

por inducción que:

$$F(N) = \frac{N}{2} \log_2 N$$

donde  $F(N)$  es el número de multiplicaciones requerido para obtener la TDF mediante la TRF.

## R E F E R E N C I A S .

- [1] BRIGHAM E. ORAN, "The Fast Fourier Transform", Prentice Hall, 1974.
- [2] PAPOULIS, ATHANASIOS. "Signal Analisis" Mc.Graw-Hill 1977.
- [3] J.M. WOZENCRAFT and I.M. JACOBS, "Principles of Communication Engineering" John Wiley & Sons, 1965.
- [4] L. RABINER, B. GOLD, "Theory and Application of Digital Signal Processing". Prentice Hall, 1975.
- [5] HARRIS, FREDRIC J., "The Discrete Fourier Transform -- Applied to Time Domain Signal Processing". IEEE - Communications Magazine, May 1982.
- [6] LATHI, B. P. "Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación", Limusa.
- [7] PORTNOFF, MICHAEL, R., "Implementation of the digital Phase vocoder using the Fast Fourier Transform" IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, June - 1976.
- [8] KEIL WOLF, JACH. "The Discrete Fourier Transform, and impulse noise cancellation." IEEE Transactions on Communications. March-1983.
- [9] PAPOULIS, ATHANASIOS. "Probability, Random variables, and Stochastic Processes." Mc.Graw-Hill.
- [10] "Convolution, correlation, and narrowband filtering -- with the fast fourier transform". IEEE-ESIME. Conf. Semana de la Ingeniería en Comunicaciones Eléctricas, México 1980.

- [11] NAWAB, S.H., QUATIERI, T.F. and LIM, J.S. "Signal Reconstruction from short-time Fourier Transform Magnitud." IEEE Transactions on Acoustics, - - - speech, and signal processing, Vol. 31 No. 4 - - August, 1983.
- [12] PORTNOFF, MICHAEL. "Time-Frecuency representation - of digital signals and systems based on short time Fourier Analisis". IEEE Transactions on acoustics speech, and signal processing, vol. 28 No.1 February, 1980.
- [13] BERGLAND, G.D., "A guided tour of the fast Fourier - Transform" IEEE Spectrum, July 1969.