

207  
158



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## Facultad de Ingeniería

“ INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA PARA MARCOS  
RETICULARES CON NUDOS ARTICULADOS. PROGRAMA  
DE COMPUTADORA EN LENGUAJE FORTRAN ”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A N :  
ARTURO QUIROZ PEREZ  
EDUARDO FIGUEROA GUTIERREZ

México, D. F.

1982



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A los Pasantes señores EDUARDO FIGUEROA GUTIERREZ y  
ARTURO QUIROZ PEREZ,  
P r e s e n t e s .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a ustedes a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Agustín Deméneghi Colina, para que lo desarrollen como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero - CIVIL.


"INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA PARA MARCOS RETICULARES CON NUDOS ARTICULADOS. PROGRAMA DE COMPUTADORA EN LENGUAJE FORTRAN"

- I. Introducción.
- II. Descripción del método.
- III. Análisis estructural.
- IV. Análisis de asentamientos del suelo.
- V. Compatibilidad de deformaciones.
- VI. Programa de computadora.
- VII. Ejemplos de aplicación.
- VIII. Conclusiones.
- IX. Apéndices.
- X. Bibliografía.

Ruego a ustedes se sirvan tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberán prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Ed. Universitaria, 24 de abril de 1981  
EL DIRECTOR

  
ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

  
JJE/OBLH/ser

## I N D I C E

|  | Página |
|--|--------|
| CAPITULO I.-   |        |
| INTRODUCCION .....   | 1      |
| <br>CAPITULO II.-  |        |
| DESCRIPCION DEL METODO .....   | 3      |
| <br>CAPITULO III.-   |        |
| ANALISIS ESTRUCTURAL   |        |
| 3.1.- Principios del Análisis Estructural .....  | 7      |
| 3.2.- Equilibrio de momentos en los nudos .....  | 23     |
| 3.3.- Condición de equilibrio de fuerzas cortantes en -<br>cada una de las crujías ..... | 25     |
| 3.4.- Obtención del desplazamiento al centro de cada -<br>crujía en la cimentación ..... | 30     |
| 3.5.- Equilibrio de fuerzas verticales .....   | 32     |
| <br>CAPITULO IV.-  |        |
| ANALISIS DEL SUELO .....   | 33     |
| <br>CAPITULO V.-   |        |
| COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES .....  | 41     |
| <br>CAPITULO VI.-  |        |
| PROGRAMA DE COMPUTADORA .....  |        |
| 6.1.- Descripción .....  | 43     |
| 6.2.- Operación del programa .....   | 56     |
| 6.3.- Interpretación de resultados .....   | 59     |
| 6.4.- Listado de computadora .....   | 61     |

|   | Páginas |
|---|---------|
| CAPITULO VII.-  |         |
| EJEMPLOS RESUELTOS .....  | 78      |
| CAPITULO VIII.-   |         |
| CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....  | 152     |
| APENDICE I.-  |         |
| 1.1.- Obtención de las ecuaciones de momentos en los -<br>extremos de una barra con ambos nudos continuos .                       | 154     |
| 1.2.- Obtención de la ecuación de momentos en los extre-<br>mos de una barra con un nudo continuo y el otro -<br>articulado ..... | 159     |
| 1.3.- Obtención de las expresiones de los momentos de -<br>empotramiento .....  | 162     |
| 1.4.- Obtención de las ecuaciones de desplazamiento al-<br>centro de la cruzja .....  | 166     |
| 1.5.- Resumen de ecuaciones .....   | 177     |
| BIBLIOGRAFIA .....  | 182     |

# CAPITULO I

## C A P I T U L O   I

### I N T R O D U C C I O N

Actualmente el estudio del análisis de estructuras cimentadas en un suelo de mediana a alta compresibilidad, así como el de sus asentamientos en el terreno, se hace con procedimientos que distan mucho de la realidad; esto es que por un lado en el análisis estructural se considera en general que la estructura está empotrada o articulada en su cimentación y por otro lado, en el análisis de hundimientos, se hace considerando la cimentación cien por ciento flexible o totalmente rígida. Esto hace ver la urgente necesidad de desarrollar métodos de análisis estructural que tomen en cuenta los efectos de los hundimientos del suelo.

A últimas fechas el Ing. Agustín Deméneghi, Profesor de la Facultad de Ingeniería, UNAM, se ha abocado a este problema y había desarrollado un procedimiento de análisis estructural para marcos rígidos. En base a este método, y con la ayuda del Ing. Deméneghi, estamos desarrollando el presente que consiste en hacer el análisis estructural a marcos rígidos y/o flexibles ( que tienen nudos continuos y/o articulados ).

Para este tipo de análisis, el número de ecuaciones y de incógnitas que se manejan para resolver un problema es de gran magnitud; así como el procedimiento es muy laborioso. Por lo que se hace necesario hacer un programa de computadora que nos facilite a resolver el problema. Este programa se codificará en lenguaje Fortran.

En los siguientes capítulos se presenta el desarrollo y la explicación -

del método así como el programa de computadora. Se ilustra además el procedimiento con ejemplos de aplicación y finalmente, en el último capítulo, se presentan conclusiones y recomendaciones relativas al mismo procedimiento.



# CAPITULO II

## C A P I T U L O   I I

### DESCRIPCION DEL METODO

Con el presente método se pretende realizar un análisis conjunto de estructura-suelo. La estructura en cuestión será un marco reticular, cuya estructuración es a base de trabes y columnas ortogonales entre sí, la cuál es tará desplantada sobre un terreno compresible y con una cimentación resuelta con zapatas corridas o con cotratrabes y losa de cimentación. Además se considera que en un momento dado las uniones de los elementos estructurales -- ( nudos ) pueden estar ligados continuamente o con una articulación; entendiéndose por nudo continuo como aquel que sea capaz de transmitir momentos y fuerzas cortantes entre los distintos elementos que concurren en él y como nudos articulados aquellos que solamente transmiten fuerzas cortantes.

Por otra parte, se considera que el terreno de cimentación estará formado por uno o varios estratos de suelo con gran contenido de agua como es el caso de un terreno arcilloso o limoso con permeabilidad baja o casi nula y mejor conocidos como suelos de alta compresibilidad. Los diferentes estratos se supondrán compuestos por material homogéneo e isótropo y de un espesor -- constante en todo lo largo de la cimentación.

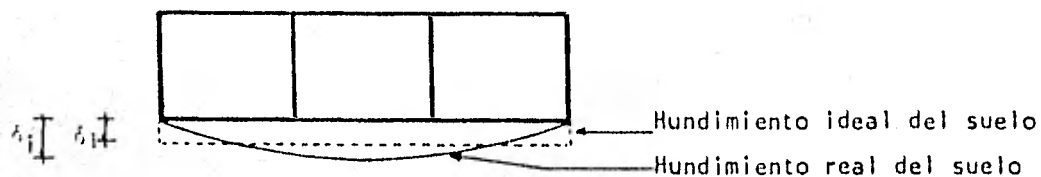
El análisis de interacción suelo-estructura se hará únicamente bajo con diciones de cargas gravitacionales ( vivas y muertas ) suponiendo distribu- ción de carga uniforme en toda la longitud de las trabes. No se consideran - cargas o empujes laterales sobre las columnas ya que los hundimientos más -- significativos, que es uno de los puntos que queremos determinar, en suelos-

compresibles son a largo plazo y debido a cargas permanentes verticales. Por esta razón no se recomienda este análisis para fuerzas sísmicas.

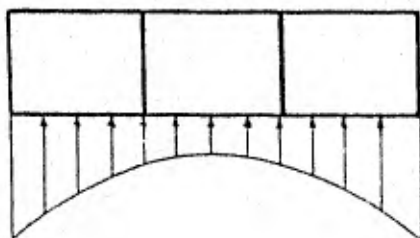
El primer planteamiento que se hace en la interacción es que las deformaciones producidas en el suelo son las mismas que sufre la estructura, cosa que sucede realmente. Para esto se supone un diagrama de reacción del terreno que estará en función de la rigidez de la estructura y de la forma de los asentamientos, por lo que nos basaremos en lo siguiente :

En un suelo compresible se presentan asentamientos de la forma en que se muestra en la figura 2.1, de donde se observan hundimientos mayores al centro que los que se presentan en los extremos de la superficie cargada. Si se pretende obtener hundimientos diferenciales nulos, es decir que la estructura tenga el mismo hundimiento en todos los puntos de la cimentación, tendremos que aplicar presiones variables inversamente proporcionales a los hundimientos. Esto significa que en los extremos de la cimentación, en donde los hundimientos son pequeños, la presión deberá ser grande, y para que los hundimientos sean iguales en el centro, la presión deberá ser pequeña. De esta forma se tendrá un diagrama de presiones como el que se muestra en la misma figura 2.1 . Para fines de este trabajo simplificaremos este diagrama, sin apartarnos del diagrama real, dividiéndolo en varios segmentos con cargas de magnitud distinta, una abajo de cada columna y otra al centro del claro entre las dos columnas. ( ver figura 2.1 )

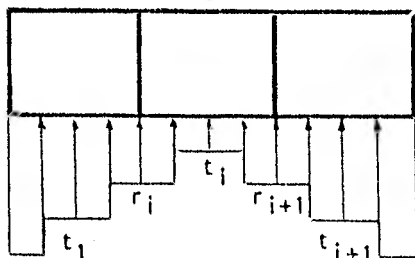
Para el análisis de la estructura nos basaremos en el método de rigideces por lo que utilizaremos el método modificado de Kani desarrollado por el Ing. Heberto Castillo ( ref.1 ). Al utilizar este procedimiento obtendremos la matriz de rigideces que al multiplicarla por un vector de desplazamientos nos dará un vector de cargas. En el caso general del método de rigideces el vector de cargas es conocido, pero no así el vector de desplazamientos ( al hablar de desplazamientos nos referimos a los desplazamientos verticales  $\delta(i)$  y  $\psi(i)$  y a los desplazamientos angulares o giros  $\theta(i,j)$  de cada uno de los nudos de la estructura ).



a) Hundimientos en el suelo



b) Diagrama real de reacciones del suelo



c) Simplificación del diagrama de reacciones del suelo

Fig. 2.1.- Hundimientos y reacciones del suelo

Sin embargo, en nuestro caso, el vector de cargas no es totalmente conocido pues las reacciones del terreno  $r(i)$  y  $t(i)$  son también incógnitas. No obstante, al realizar el análisis de hundimientos del terreno, podremos obtener los desplazamientos del suelo  $\delta(i)$  y  $\xi(i)$  en función de las reacciones  $r(i)$  y  $t(i)$ . Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones derivadas de la aplicación inicial del método de rigideces, nos queda un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son únicamente los giros en los nudos  $\phi(i,j)$  y las reacciones del terreno  $r(i)$  y  $t(i)$ . Resolviendo este sistema determi-

haremos los giros en los nudos y las reacciones del suelo. Y conocidos estos es fácil determinar los momentos en los extremos de cada barra y los hundimientos del terreno.

Como es de suponerse, para este tipo de análisis, el número de incógnitas y de ecuaciones que se manejan es de tal magnitud que resulta muy laborioso estarlas trabajando manualmente, por lo que se hace necesario elaborar un programa de computadora que ayude a resolver este problema.

En el siguiente capítulo, correspondiente al análisis estructural, se formará la matriz de rigidez de la estructura planteando distintas condiciones de equilibrio tales como : equilibrio de momentos en los nudos, equilibrio de fuerzas cortantes en cada crujía, obtención del desplazamiento al centro de cada crujía y equilibrio de fuerzas verticales en la estructura. Referidos a este capítulo, se encuentran en el Apéndice I los desarrollos de las ecuaciones obtenidas.

En el capítulo IV veremos como obtener los desplazamientos verticales  $\delta(i)$  y  $\xi(i)$  en función de las reacciones del terreno  $r(i)$  y  $t(i)$ , utilizando la teoría de consolidación de Terzaghi.

En el capítulo V se describirá como igualar las deformaciones del suelo a las de la estructura sustituyendo las ecuaciones del capítulo IV en las obtenidas en el capítulo III, para después resolver el sistema de ecuaciones.

En el capítulo VI se resumirán todos los trabajos relativos al programa de computadora y finalmente en el capítulo VII estarán algunos problemas resueltos para ejemplificar el uso del método propuesto.

# CAPITULO III

## C A P I T U L O   I I I

### ANALISIS ESTRUCTURAL

#### 3.1.- *Principios del Análisis Estructural*

En la parte de este trabajo correspondiente a todo lo relacionado con la estructura haremos uso del método de rigideces, que aborda cada parte de la estructura en forma particular, es decir en cada barra -- plantea momentos en sus extremos en función de los desplazamientos, y con estos momentos y con las fuerzas externas se plantean condiciones de equilibrio formando así un sistema de ecuaciones, que ayudarán a -- resolver el problema objeto de este estudio.

En este subcapítulo nos ocuparemos únicamente del planteamiento - de los momentos en las barras, para lo cuál haremos uso de las ecuaciones de pendiente-deformación que expresan los momentos en función de - los desplazamientos lineales y angulares de los extremos de las barras. En este trabajo los desplazamientos que consideraremos son los componentes angulares en los nudos continuos y los componentes lineales que se presenten en dirección perpendicular a los ejes de las trabes ( desplazamientos verticales de las columnas ), ya que éstos son los que se toman en cuenta por ser los mas significativos ante cargas verticales permanentes.

Antes de detallar mas en el estudio de las barras cabe aclarar --- que solo se considerarán en éste los efectos debidos a flexión despre--- ciando los debidos a fuerzas cortantes y fuerzas axiales; asi como tam--- bién se considerarán todos los desplazamientos dentro del rango elás--- tico de deformación.

En el capítulo anterior se estableció que solo se consideran car--- gas gravitacionales actuando sobre el marco, de aqui que los únicos ele--- mentos de éste que están sometidos a la acción directa de las cargas -- son las trabes. Asi pués se estudiarán las trabes hasta obtener sus -- ecuaciones de momentos para después, como una variante de éstas, obte--- ner las correspondientes a las columnas.

Dado que el propósito de este trabajo es contemplar la existencia--- en el marco de nudos articulados y nudos continuos en combinación, al--- estudiar cada barra nos encontraremos con distintas condiciones de apo--- yo donde cada una de ellas es un caso de estudio y que resumimos a con--- tinuación :

Caso I.- Barra con ambos nudos continuos.- Se generan momentos en los extremos de la barra debidos a la continuidad de éstos. Para fines prác--- ticos usaremos el símbolo de apoyo empotrado para ilustrar que es un nudo continuo y exis--- te un momento.

Caso II.- Barra con un nudo continuo y el otro articu--- lado.- Esta barra estará sujeta solamente a un momento en el extremo del nudo continuo - y en el extremo articulado se considerará -- como libremente apoyado debido a la incapaa--- cidad de la articulación de transmitir momen--- tos.

Caso III.- Barra con ambos nudos articulados.- Se le -- considera como libremente apoyada en ambos - extremos.

Con estos tres casos abarcamos el total de las posibles combina--- ciones de apoyos en cada una de las barras que pudieran presentarse en el marco.

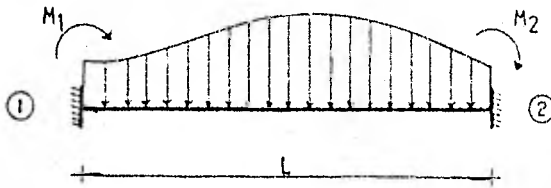


La obtención y desarrollo de las ecuaciones de pendiente-deformación para cada uno de los casos citados se encuentran en el Apéndice I y se listan a continuación :

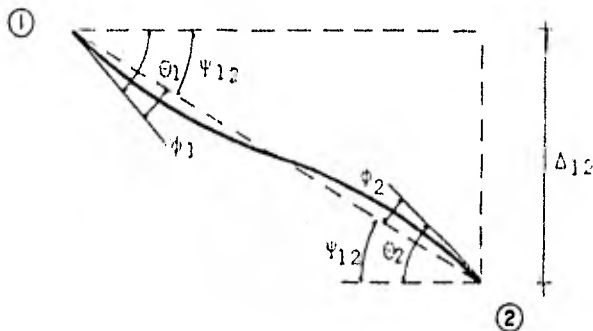
Para el Caso I y refiriéndonos a la Figura 3.1 la ecuación de pendiente-deformación será : ( ver deducción en I.1 del Apéndice I ).

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \Delta_{12} + Me_1 \quad \dots (3-1)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \Delta_{12} + Me_2 \quad \dots (3-2)$$



a) Sistema cualesquiera de Cargas



b) Deformación de la Barra

Fig. 3.1. Barra con ambos nudos continuos ( Caso I )

de donde :

$M_1$  y  $M_2$  son los momentos de la Barra sobre nudo en los extremos de la Barra.

$\theta_1$  y  $\theta_2$  son los desplazamientos angulares ( giros ) en los extremos de la Barra.

$M_{e1}$  y  $M_{e2}$  son los momentos de empotramiento en los extremos de la Barra y dependen del sistema de Cargas a que esté sujeta la Barra.

$E$ ,  $I$  y  $L$  son las propiedades físicas de la Barra y son el módulo de elasticidad del material, el momento de inercia de la sección y la longitud de la Barra respectivamente.

$\Delta_{12}$  representa el desplazamiento lineal vertical relativo entre los dos extremos de la Barra.

Este último desplazamiento lo podemos expresar en función de los desplazamientos verticales totales de los nudos, es decir, de los hundimientos del suelo bajo las columnas.

$$\Delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$$

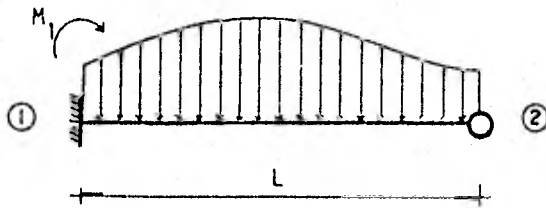
por lo tanto las ecuaciones ( 3-1 ) y ( 3-2 ) podemos expresarlas así :

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L^2} \delta_2 + M_{e1} \dots ( 3-3 )$$

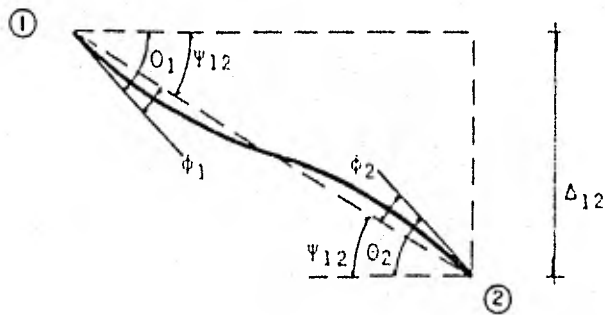
$$M_2 = \frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L^2} \delta_2 + M_{e2} \dots ( 3-4 )$$

De la misma manera como se procedió para obtener los momentos correspondientes al Caso I se hará para el Caso II barra con un nudo continuo y el otro articulado ( ver sección 1.2 del Apéndice I ). Se tiene la barra como se

muestra en la Figura 3.2



a) Sistema de Cargas Cualesquiera



b) Deformación de la Barra

Fig. 3.2 .- Barra con un nudo continuo y el otro articulado.

de donde se obtuvo la siguiente ecuación :

$$M_1 = \frac{3EI}{L} \theta_1 - \frac{3EI}{L^2} \delta_1 + \frac{3EI}{L^2} \delta_2 + M_{e1} \dots (3-5)$$

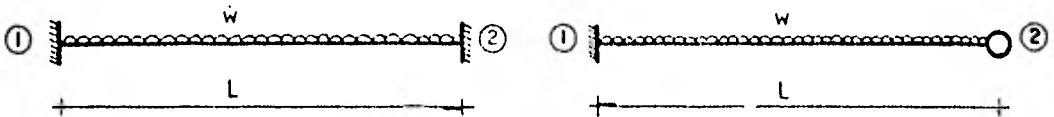
Para el mismo Caso II pero si ahora el nudo continuo es el nudo 2 la ecuación será :

$$M_2 = \frac{3EI}{L} \theta_2 - \frac{3EI}{L^2} \delta_1 + \frac{3EI}{L^2} \delta_2 + M_{e2} \dots (3-6)$$

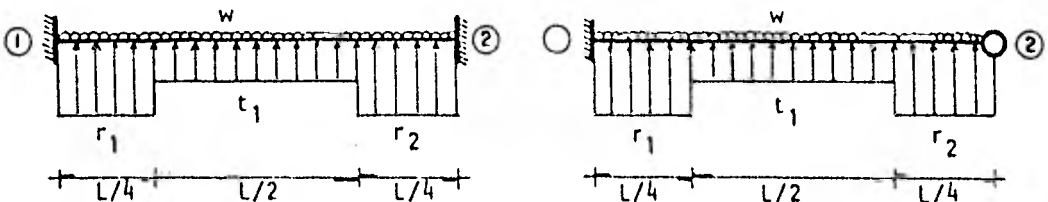
Nótese que en estas ecuaciones solo interviene el giro en el nudo continuo; el giro en el nudo articulado no nos interesará conocerlo porque no necesitamos calcular el momento en ese nudo ya que de antemano sabemos que por definición de articulación no existen momentos en ese punto. Por esta misma razón, es obvio que no se hará la deducción de las ecuaciones de pendiente--deformación para el Caso III que es la Barra con ambos nudos articulados.

En las ecuaciones ( 3-3 ), ( 3-4), ( 3-5 ) y ( 3-6 ) están incluidos -- los términos del momento de empotramiento que como ya dijimos depende del -- sistema de Cargas a que esté sujeta la barra. En este trabajo, según el elemento del marco que estemos estudiando se nos podrán presentar dos sistemas--de Cargas distintos :

- A) Las traveses de superestructura están sometidas a una carga lineal uniformemente repartida debido a efectos gravitacionales.
- B) Las traveses de cimentación estarán sujetas a una carga uniformemente repartida y a la reacción del terreno compuesta por Cargas de magnitudes distintas--distribuidas de la siguiente forma : una en cada extremo de la trabe con una longitud tributaria -- igual a la cuarta parte del claro entre columnas y la otra central con una longitud tributaria igual a la mitad del claro.



a) Sistema de Cargas actuando en las Traveses de Superestructura



b) Sistema de Cargas actuando en las Traveses de cimentación

Fig 3.3 .- Tipos de Cargas en las Traveses del marco

A continuación presentaremos las ecuaciones de momentos de empotramiento para cuando se trata de traveses de superestructura para después sustituirlas en ecuaciones ( 3-3 ), ( 3-4 ), ( 3-5 ) y ( 3-6 ). Posteriormente se hará el mismo procedimiento para estas mismas ecuaciones pero correspondientes a las traveses de cimentación .

En traveses de superestructura, par el Caso I, tendremos las siguientes ecuaciones ( ver desarrollo en sección 1.3a del Apéndice I ).

$$M_{e_1} = \frac{wL^2}{12} \dots\dots ( 3-7 )$$

$$M_{e_2} = \frac{-wL^2}{12} \dots\dots ( 3-8 )$$

Sustituyendo ( 3-7 ) y ( 3-8 ) en ( 3-3 ) y ( 3-4 ) respectivamente

$$M_1 = \frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L^2} \delta_2 \dots ( 3-9 )$$

$$M_2 = \frac{-wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2 - \frac{6EI}{L^2} \delta_1 + \frac{6EI}{L^2} \delta_2 \dots ( 3-10 )$$

Para las traveses de superestructura que pertenecen al Caso II se obtuvieron las siguientes ecuaciones ( ver desarrollo en sección 1.3b del Apéndice I ).

Cuando el nudo continuo es el nudo 1

$$M_{e_1} = \frac{wL^2}{8} \dots\dots ( 3-11 )$$

Cuando el nudo continuo es el nudo 2

$$M_{e_2} = \frac{-wL^2}{8} \dots\dots ( 3-12 )$$

Sustituyendo las ecuaciones ( 3-11 ) y ( 3-12 ) en las ecuaciones ( 3-5 ) y ( 3-6 ), respectivamente .

Si el nudo continuo es el nudo 1

$$M_1 = \frac{w L^2}{8} + \frac{3EI}{L} \theta_1 - \frac{3EI}{L^2} \delta_1 + \frac{3EI}{L^2} \delta_2 \dots (3-13)$$

Si el nudo continuo es el nudo 2

$$M_2 = \frac{-w L^2}{8} + \frac{3EI}{L} \theta_2 - \frac{3EI}{L^2} \delta_1 + \frac{3EI}{L^2} \delta_2 \dots (3-14)$$

Una vez obtenidas estas ecuaciones para los Caso I y II haremos un artificio para generalizar ambas ecuaciones en una sola, de tal manera que creando coeficientes adimensionales para cada una de las variables, con solo identificar el tipo de apoyo de la trabe podremos asignar valores a los coeficientes y convertir la ecuación general en la ecuación del Caso I o en la del -- Caso II, según corresponda.

Los "coeficientes", que es como llamaremos de aquí en adelante a la relación entre cada uno de los términos de una ecuación con sus correspondientes de la otra, se obtienen de la siguiente forma :

Para el término del momento de empotramiento :

$$\begin{array}{l} \text{Caso I : } \frac{1}{12} \\ \text{Caso II : } \frac{1}{8} \end{array} \quad A = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}} = 1.5$$

Para el término de  $\theta_1$  :

$$\begin{array}{l} \text{Caso I : } 4 \\ \text{Caso II : } 3 \end{array} \quad B = \frac{3}{4} = 0.75$$

Para el término de  $\theta_2$  :

Caso I : 2

$$C = \frac{0}{2} = 0$$

Caso II : 0

Para el término de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  :

Caso I : 6

$$D = \frac{3}{6} = 0.5$$

Caso II : 3

Por lo tanto la ecuación general del momento en el extremo de una trabe será :

$$M_1 = A_2 \frac{wL^2}{12} + 4 B_2 \frac{EI}{L} \theta_1 + 2 C_2 \frac{EI}{L} \theta_2 - 6 D_2 \frac{EI}{L^2} \delta_1 + 6 D_2 \frac{EI}{L^2} \delta_2 \quad (3-15)$$

Procediendo de la misma forma para el momento en el otro extremo :

$$M_2 = A_1 \frac{-wL^2}{12} + 4 B_1 \frac{EI}{L} \theta_2 + 2 C_1 \frac{EI}{L} \theta_1 - 6 D_1 \frac{EI}{L^2} \delta_1 + 6 D_1 \frac{EI}{L^2} \delta_2 \quad (3-16)$$

donde el valor de los coeficientes será :

| Coeficientes    | A   | B    | C   | D   |
|-----------------|-----|------|-----|-----|
| Nudo continuo   | 1.0 | 1.0  | 1.0 | 1.0 |
| Nudo articulado | 1.5 | 0.75 | 0.0 | 0.5 |

Ahora bien, si definimos las siguientes variables :

$$\phi = 2\theta \quad (\text{doble giro de } " \theta " )$$

$$K = \frac{EI}{L} \quad (\text{rigidez de la barra } )$$

Y las sustituimos en las ecuaciones ( 3-15 ) y ( 3-16 ) tenemos :

$$M_1 = A_2 \frac{wL^2}{12} + 2 B_2 K \phi_1 + C_2 K \phi_2 - 6 D_2 \frac{K}{L} \delta_1 + 6 D_2 \frac{K}{L} \delta_2 \quad \dots (3-17)$$

$$M_2 = A_1 \frac{-wL^2}{12} + 2 B_1 K \phi_2 + C_1 K \phi_1 - 6 D_1 \frac{K}{L} \delta_1 + 6 D_1 \frac{K}{L} \delta_2 \quad \dots (3-18)$$

Estas son las ecuaciones generales para obtener momentos en los extremos de una trabe de superestructura.

Ahora obtendremos las ecuaciones generales para una trabe de cimentación con el mismo procedimiento seguido hasta aquí :

Para el Caso I, los momentos de empotramiento en una trabe de cimentación son : ( ver deducción en sección 1.3c del Apéndice I ).

$$M_{e1} = \frac{wL^2}{12} - \frac{67}{3072} r_1 L^2 - \frac{11}{192} t_1 L^2 - \frac{13}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (3-19)$$

$$M_{e2} = \frac{-wL^2}{12} + \frac{13}{3072} r_1 L^2 + \frac{11}{192} t_1 L^2 + \frac{67}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (3-20)$$

Para el Caso II, si el nudo continuo es el nudo 1, la ecuación será :

$$M_{e1} = \frac{wL^2}{8} - \frac{49}{2048} r_1 L^2 - \frac{11}{128} t_1 L^2 - \frac{31}{2048} r_2 L^2 \quad \dots (3-21)$$

Si el nudo continuo es el 2 :

$$M_{e2} = \frac{-wL^2}{8} + \frac{31}{2048} r_1 L^2 + \frac{11}{128} t_1 L^2 + \frac{49}{2048} r_2 L^2 \quad \dots (3-22)$$

En seguida obtendremos los coeficientes para los términos que no habían sido considerados :

Para el término de  $r_1$  :

$$\text{Caso I} : \frac{67}{3072}$$

$$\text{Caso II} : \frac{49}{2048}$$

$$E = \frac{\frac{49}{2048}}{\frac{67}{3072}} = \frac{147}{134}$$



Para el término de  $t_1$  :

$$\text{Caso I} : \frac{11}{192}$$

$$\text{Caso II} : \frac{11}{128}$$

$$A = \frac{\frac{11}{128}}{\frac{11}{192}} = 1.5$$

Para el término de  $r_2$  :

$$\text{Caso I} : \frac{13}{3072}$$

$$\text{Caso II} : \frac{31}{2048}$$

$$F = \frac{\frac{31}{2048}}{\frac{13}{3072}} = \frac{93}{26}$$

Por lo tanto las ecuaciones generales para una trabe de cimentación -- serán :

$$M_1 = A_2 \frac{wL^2}{12} + 2 B_2 K \phi_1 + C_2 K \phi_2 - 6 D_2 \frac{K}{L} \delta_1 + 6 D_2 \frac{K}{L} \delta_2 - E_2 \frac{67}{3072} r_1 L^2 - A_2 \frac{11}{192} t_1 L^2 - F_2 \frac{13}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (3-23)$$

$$M_2 = A_1 \frac{-wL^2}{12} + 2 B_1 K \phi_2 + C_1 K \phi_1 - 6 D_1 \frac{K}{L} \delta_1 + 6 D_1 \frac{K}{L} \delta_2 + F_1 \frac{13}{3072} r_1 L^2 + A_1 \frac{11}{192} t_1 L^2 + E_1 \frac{67}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (3-24)$$

Donde los coeficientes tendrán los siguientes valores :

| Coeficientes    | A   | B    | C   | D   | E                 | F               |
|-----------------|-----|------|-----|-----|-------------------|-----------------|
| Nudo continuo   | 1.0 | 1.0  | 1.0 | 1.0 | 1.0               | 1.0             |
| Nudo articulado | 1.5 | 0.75 | 0.0 | 0.5 | $\frac{147}{134}$ | $\frac{93}{26}$ |

Las ecuaciones ( 3-17 ) y ( 3-18 ), ó bien ( 3-23 ) y ( 3-24 ) son -- las que usaremos, según se trate de superestructura o de cimentación, para obtener los momentos en los extremos de una trabe cualquiera del marco.

Estas mismas ecuaciones las modificaremos para obtener los momentos en las columnas, eliminando todos los términos relativos a los momentos de empotramiento y los términos de los desplazamientos verticales de los nudos - debido a que las columnas no están sujetas a cargas ni se considera ningún desplazamiento lineal, como se muestra en la Figura 3.4 :

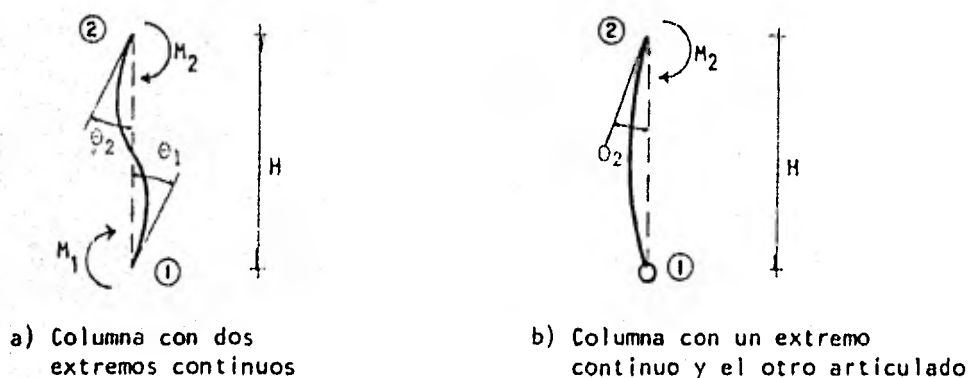


Fig. 3.4 Deformación en las Columnas.

Por lo tanto la ecuación de momentos en el extremo de una columna será la siguiente :

$$M_2 = 2 B_1 K \phi_2 + C_1 K \phi_1 \quad \dots ( 3-25 )$$

Donde se conservan los mismos valores de coeficientes que se obtuvieron para las trabes.

Para la aplicación de las ecuaciones al problema de los marcos, será necesario convenir en una cierta simbología tal que nos permita identificar a cada una de las trabes y columnas que componen la estructura, y a la vez sea posible el uso de la computadora.

Los marcos forman una retícula de ejes paralelos y ortogonales entre sí que nos permite generar unos ejes coordenados ortogonales donde llamaremos "  $i$  " al eje horizontal con sentido positivo de izquierda a derecha, y un eje vertical al que llamaremos "  $j$  " con sentido positivo de abajo hacia arriba.

Se toma como origen de los ejes el punto  $(1,1)$  y lo haremos coincidir con el nudo del extremo inferior izquierdo de la estructura. Así pues, cada nudo tiene unas coordenadas  $(i,j)$  y todos los elementos de la estructura y sus propiedades físicas estarán referidas a estas coordenadas; de esta manera las trabes llevarán los mismos índices del nudo que se encuentra en su extremo izquierdo y las columnas llevarán los mismos índices del nudo que está en su extremo inferior.

Además a cada nudo le asignaremos los coeficientes que les corresponden según se trate de un nudo continuo o articulado, o si es un nudo de superestructura o es uno de cimentación. Por lo tanto también los coeficientes tendrán coordenadas que serán las mismas del nudo en cuestión.

Por lo que respecta a las reacciones del terreno, serán nombradas como "  $r(i)$  " las reacciones bajo las columnas y como "  $t(i)$  " las reacciones al centro de cada entre-eje. Las  $r(i)$  llevarán el mismo índice de la columna que les corresponde y las  $t(i)$  llevarán el índice de la columna que se encuentre a su izquierda. ( ver Figura 3.4 ).

Aplicando esta nomenclatura a las ecuaciones  $(3-17)$  y  $(3-18)$  tenemos que, para cualquier trabe  $(i,j)$  de la superestructura :

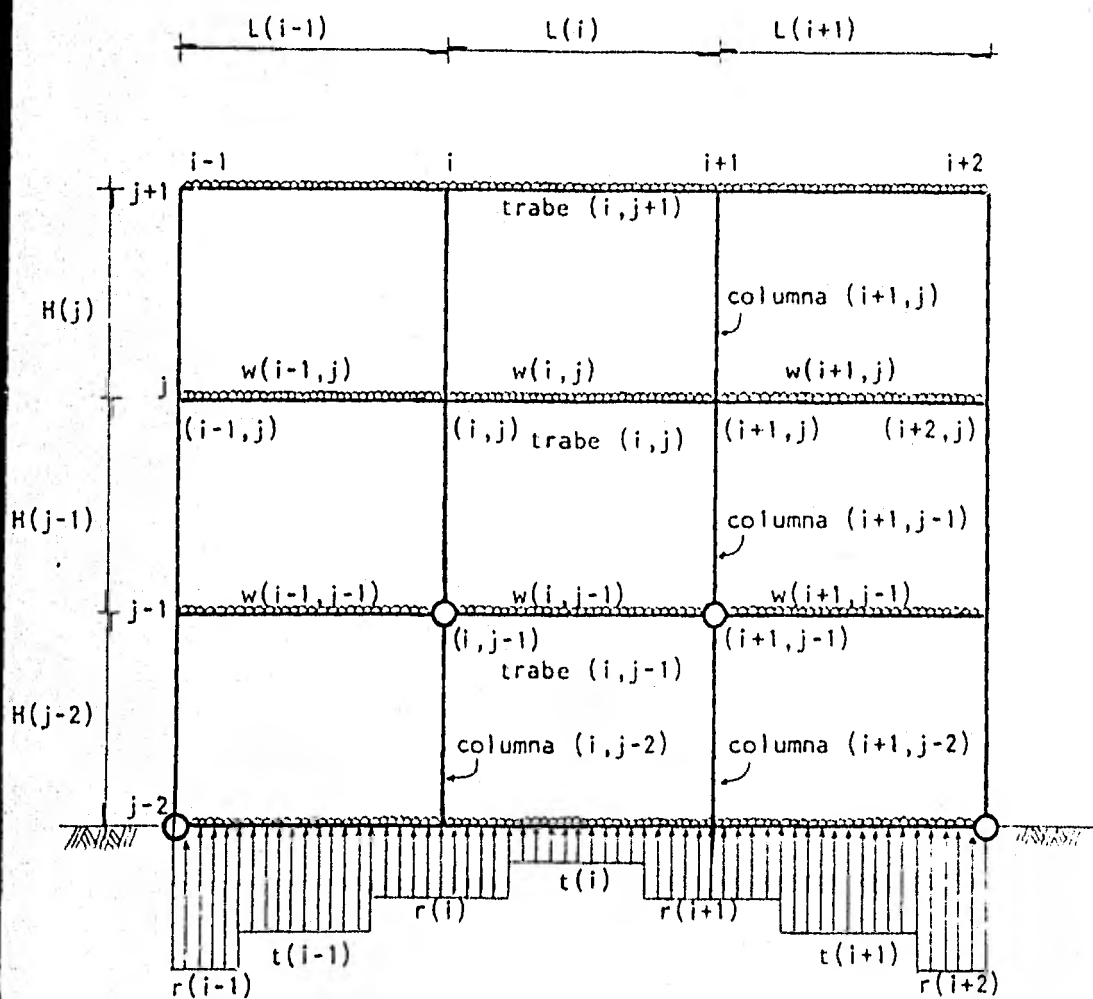


Fig. 3.4. Simbología de Identificación del marco.

$$\begin{aligned}
 M(i,j) (i+1,j) &= \frac{A(i+1,j) w(i,j) L(i)^2}{12} + 2 B(i+1,j) K_t(i,j) \phi(i,j) + \\
 &+ C(i+1,j) K_t(i,j) \phi(i+1,j) - 6 D(i+1,j) \frac{K_t(i,j)}{L(i)} \delta(i) + \\
 &+ 6 D(i+1,j) \frac{K_t(i,j)}{L(i)} \delta(i+1) \quad \dots (3-17A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(i+1,j) (i,j) &= \frac{-A(i,j) w(i,j) L(i)^2}{12} + 2 B(i,j) K_t(i,j) \phi(i+1,j) + \\
 &+ C(i,j) K_t(i,j) \phi(i,j) - 6 D(i,j) \frac{K_t(i,j)}{L(i)} \delta(i) + \\
 &+ 6 D(i,j) \frac{K_t(i,j)}{L(i)} \delta(i+1) \quad \dots (3-18A)
 \end{aligned}$$

de donde :

$M(i,j) (i+1,j)$  es el momento en el extremo  $(i,j)$  de la barra que va de  $(i,j)$  a  $(i+1,j)$

$M(i+1,j) (i,j)$  es el momento en el extremo  $(i+1,j)$  de la barra que va de  $(i+1,j)$  a  $(i,j)$

$K_t(i,j)$  es la Rigidez de la trabe  $(i,j)$

Ahora en las ecuaciones ( 3-23 ) y ( 3-24 ), tenemos que para cualquier trabe  $(i,1)$  de la cimentación :

$$\begin{aligned}
 M(i,1) (i+1,1) &= \frac{A(i+1,1) w(i,1) L(i)^2}{12} + 2 B(i+1,1) K_t(i,1) \phi(i,1) + \\
 &+ C(i+1,1) K_t(i,1) \phi(i+1,1) - 6 D(i+1,1) \frac{K_t(i,1)}{L(i)} \delta(i) + \\
 &+ 6 D(i+1,1) \frac{K_t(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) - E(i+1,1) \frac{67}{3072} r(i) L(i)^2 - \\
 &- A(i+1,1) \frac{11}{192} t(i) L(i)^2 - F(i+1,1) \frac{13}{3072} r(i+1) L(i)^2 \quad \dots (3-23A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(i+1,1) (i,1) &= \frac{-A(i,1) w(i,1) L(i)^2}{12} + 2 B(i,1) Kc(i,1) \phi (i+1,1) + \\
 &+ C(i,1) Kc(i,1) \phi (i,1) - 6 D(i,1) \frac{Kc(i,1)}{L(i)} \delta(i) + \\
 &+ 6 D(i,1) \frac{Kc(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + F(i,1) \frac{13}{3072} r(i)L(i)^2 + \\
 &+ A(i,1) \frac{11}{192} t(i)L(i)^2 + E(i,1) \frac{67}{3072} r(i+1)L(i)^2 \quad \dots(3-24A)
 \end{aligned}$$

De la ecuación ( 3-25 ), se tiene que para cualquier columna ( i, j ) :

$$M(i,j) (i,j+1) = 2 B(i,j+1) Kc(i,j) \phi (i,j) + C(i,j+1) Kc(i,j) \phi (i,j+1) \quad \dots( 3-25A )$$

$$M(i,j+1) (i,j) = 2 B(i,j) Kc(i,j) \phi (i,j+1) + C(i,j) Kc(i,j) \phi (i,j)$$

... ( 3-25B )

de donde :

$M(i,j) (i,j+1)$  es el momento en el extremo ( i, j ) de la barra que va de -- ( i, j ) a ( i, j+1 )

$Kc(i,j)$  es la rigidez de la columna ( i, j )

Estas ecuaciones son las que utilizaremos en las siguientes subcapitulos para la obtención y desarrollo de las ecuaciones de equilibrio que proporciona el análisis de la estructura para la formación de la matriz.

### 3.2.- Equilibrio de momentos en los nudos

La primera ecuación de equilibrio que debemos generar, para formar nuestro sistema de ecuaciones, surge de plantear la condición de que cualquier nudo continuo de la estructura debe estar en equilibrio, esto es que la suma algebraica de los momentos producidos por todas las barras que concurren al nudo debe ser igual a cero. Esta condición la aplicaremos en cada uno de los nudos continuos de la estructura, pues es obvio que en un nudo articulado esta condición no se aplicará ya que de antemano sabemos que en éste no existen momentos. De esta forma, obtendremos una ecuación en la matriz por cada nudo continuo de la estructura.

Refiriéndonos a la figura 3.4 obtendremos el equilibrio de momentos en el nudo  $(i,j)$  de las barras que concurren a él. Nótese que es un nudo de la superestructura donde  $j > 1$ . Planteando el equilibrio tenemos que :

$$M(i,j) (i+1,j) + M(i,j) (i-1,j) + M(i,j) (i,j+1) + M(i,j) (i,j-1) = 0 \quad \dots ( 3-26 )$$

de donde :

$M(i,j) (i+1,j)$  = Momento en el extremo  $(i,j)$  de la barra que va de  $(i,j)$  a  $(i+1,j)$

$M(i,j) (i-1,j)$  = Momento en el extremo  $(i,j)$  de la barra que va de  $(i,j)$  a  $(i-1,j)$

$M(i,j) (i,j+1)$  = Momento en el extremo  $(i,j)$  de la barra que va de  $(i,j)$  a  $(i,j+1)$

$M(i,j) (i,j-1)$  = Momento en el extremo  $(i,j)$  de la barra que va de  $(i,j)$  a  $(i,j-1)$

Sustituyendo las ecuaciones ( 3-17A ), ( 3-18A ), ( 3-25A ) y ( 3-25B ) - en la ecuación ( 3-26 ) y agrupando términos nos quedará :

$$\begin{aligned}
 & C(i-1,j) K_t(i-1,j) \phi(i-1,j) + 2 K_n(i,j) \phi(i,j) + C(i+1,j) K_t(i,j) \phi(i+1,j) + \\
 & + C(i,j-1) K_c(i,j-1) \phi(i,j-1) + C(i,j+1) K_c(i,j) \phi(i,j+1) - \\
 & - 6 \frac{D(i-1,j) K_t(i-1,j)}{L(i-1)} \delta(i-1) + 6 \left\{ \frac{D(i-1,j) K_t(i-1,j)}{L(i-1)} - \frac{D(i+1,j) K_t(i,j)}{L(i)} \right\} \delta(i) + \\
 & + 6 \frac{D(i+1,j) K_t(i,j)}{L(i)} \delta(i+1) = \frac{A(i-1,j) w(i-1,j) L(i-1)^2}{12} - \frac{A(i+1,j) w(i,j) L(i)^2}{12}
 \end{aligned}$$

... ( 3-27 )

de donde definimos el término  $K_n(i,j)$  como rigidez del nudo :

$$\begin{aligned}
 K_n(i,j) &= B(i-1,j) K_t(i-1,j) + B(i+1,j) K_t(i,j) + B(i,j+1) K_c(i,j) + \\
 & + B(i,j-1) K_c(i,j-1)
 \end{aligned}$$

... ( 3-28 )

La ecuación ( 3-27) es la que usaremos cuando al nudo concurren dos tra- bes y dos columnas . Para los nudos de esquina o de borde seguiremos la misma secuencia unicamente suprimiendo las ecuaciones de las barras que desaparecen.

Estos desarrollos los omitimos ya que son similares al anterior.

En el caso de los nudos de cimentación se realiza el mismo desarrollo -- con la diferencia de que se toman distintas ecuaciones. Planteando el equili- brio de momentos en un nudo (i,1) cualquiera de cimentación (j=1) :

$$M(i,1) (i+1,1) + M(i,1) (i-1,1) + M(i,1) (i,2) = 0 \quad \dots ( 3-29 )$$

Sustituyendo las ecuaciones ( 3-23A ), ( 3-24A ) y ( 3-25A ), en la ecua- ción ( 3-29 ) y agrupando términos :



$$\begin{aligned}
& C(i-1,1) K_t(i-1,1) \delta(i-1,1) + 2 K_n(i,1) \delta(i,1) + C(i+1,1) K_t(i,1) \delta(i+1,1) + \\
& + C(i,2) K_c(i,1) \delta(i,2) - 6 D(i-1,1) \frac{K_t(i-1,1)}{L(i-1)} \delta(i-1) + \\
& + 6 \left\{ D(i-1,1) \frac{K_t(i-1,1)}{L(i-1)} - D(i+1,1) \frac{K_t(i,1)}{L(i)} \right\} \delta(i) + 6 D(i+1,1) \frac{K_t(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + \\
& + F(i-1,1) \frac{13}{3072} L(i-1)^2 r(i-1) + \frac{67}{3072} (E(i-1,1) L(i-1)^2 - E(i+1,1) L(i)^2) r(i) - \\
& - F(i+1,1) \frac{13}{3072} L(i)^2 r(i+1) + A(i-1,1) \frac{11}{192} L(i-1)^2 t(i-1) - \\
& - A(i+1,1) \frac{11}{192} L(i)^2 t(i) = \frac{A(i-1,1) w(i-1,1) L(i-1)^2}{12} - \frac{A(i+1,1) w(i,1) L(i)^2}{12}
\end{aligned}$$

... ( 3-30 )

Para este caso son igualmente válidas las notas de la ecuación anterior relativas a los nudos de esquina.

De estas ecuaciones, usando la que corresponda, aplicaremos una por cada uno de los nudos continuos del marco.

### 3.3.- Condición de equilibrio de fuerzas cortantes en cada una de las Crujías

Esta es otra de las ecuaciones de equilibrio de las que haremos uso para formar el sistema de ecuaciones y la matriz ya antes mencionados. Esta se genera de la condición de que en cualquier crujía se debe cumplir que las fuerzas cortantes en las trabes estén en equilibrio. Plantearemos una ecuación de equilibrio por cada crujía, que consiste en tomar momentos con respecto al nudo que se encuentre en el extremo inferior derecho de la crujía, de todas las fuerzas que se encuentren a la izquierda de éste e igualarlas a cero. Estas fuerzas son : las reacciones del suelo en la cimentación, las cargas verticales uniformemente repartidas y los momentos en los extremos que actúan en las trabes en cada nivel correspondientes a la crujía en cuestión y finalmente la fuerza cortante actuante a la izquierda de la crujía --

que es la suma de todas las fuerzas verticales y reacciones de las crujeas precedentes ). De aqui que se nos presentarán dos alternativas y por consiguiente dos ecuaciones distintas : la primera, cuando se trata de la primera cruja donde no hay fuerza cortante a la izquierda de las trabes, y la segunda que se trata de las crujeas de la segunda en adelante, que es donde existe fuerza cortante.

Primeramente plantearemos la ecuación correspondiente a la primera cruja ( $i=1$ ) y posteriormente a la otra condición ( $i>1$ ) .

Tomando momentos de todas las fuerzas con respecto al punto P ( ver figura 3.5 ) tenemos que :

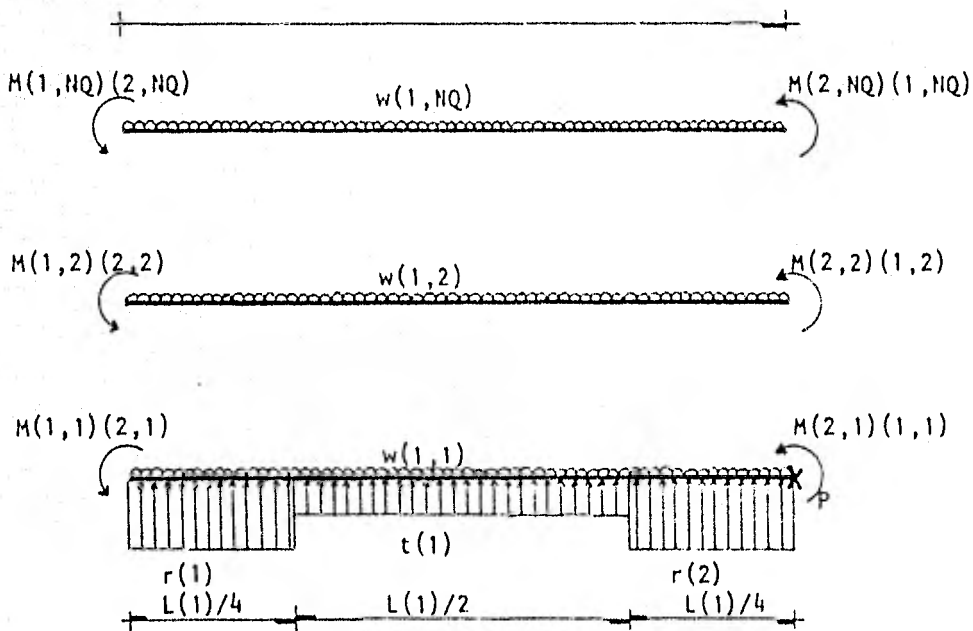


Fig. 3.5.- Fuerzas actuantes en la primera cruja ( $i=1$ ).

$$r(1) \frac{L(1)}{4} \frac{7}{8} L(1) + t(1) \frac{L(1)}{2} \frac{L(1)}{2} + r(2) \frac{L(1)}{4} \frac{L(1)}{8} - \sum_{j=1}^{NQ} w(1,j) L(1) \frac{L(1)}{2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{NQ} M(1,j) (2,j) C(1,j) + \sum_{j=1}^{NQ} M(2,j) (1,j) C(2,j) \dots (3-31)$$

de donde :

$r(1), t(1)$  y  $r(2)$  = reacciones del terreno

$L(1)$  = longitud de la trabe

$w(1,j)$  = carga vertical sobre la trabe en la crujía 1, nivel  $j$

$NQ$  = número de niveles en la crujía

$M(1,j) (2,j)$  = momento en el extremo (1,j) de la barra que va de (1,j) a -- (2,j). Este momento se obtiene de la ecuación ( 3-17A )

$M(2,j) (1,j)$  = momento en el extremo (2,j) de la barra que va de (2,j) a -- (1,j). Este momento se obtiene de la ecuación ( 3-18A )

$C(1,j)$  = coeficiente en el nudo (1,j) que anula el momento si se trata de un nudo articulado.

Sustituyendo las ecuaciones ( 3-17A ) y ( 3-18A ), en la ecuación --- ( 3-31 ) obtenemos que :

$$\sum_{j=1}^{NQ} \{ 2 C(1,j) B(2,j) + C(2,j) C(1,j) \} Kt(1,j) \phi(1,j) + \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(1,j) C(2,j) +$$

$$+ 2 C(2,j) B(1,j) \} Kt(1,j) \phi(2,j) - \frac{6}{L(1)} \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(1,j) D(2,j) +$$

$$+ C(2,j) D(1,j) \} Kt(1,j) \delta(1) + \frac{6}{L(1)} \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(1,j) D(2,j) +$$

$$+ C(2,j) D(1,j) \} Kt(1,j) \delta(2) - \frac{L(1)^2}{3072} \{ 672 + 67 C(1,1) E(2,1) -$$

$$- 13 C(2,1) F(1,1) \} r(1) - \frac{L(1)^2}{3072} \{ 96 + 13 C(1,1) F(2,1) -$$

$$- 67 C(2,1) E(1,1) \} r(2) - \frac{L(1)^2}{192} \{ 48 + 11 C(1,1) A(2,1) -$$

$$\begin{aligned}
 - 11 C(2,1) A(1,1) \} t(1) &= - \frac{L(1)^2}{2} \sum_{j=1}^{NQ} w(1,j) + \frac{L(1)^2}{12} \{ C(2,1) A(1,1) - \\
 - C(1,1) A(2,1) \} w(1,1) &+ \frac{L(1)^2}{12} \sum_{K=2}^{NQ} \{ C(2,K) A(1,K) - \\
 - C(1,K) A(2,K) \} w(1,K) &\dots (3-32)
 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de equilibrio de cortantes en la primera cruzía -- ( $i=1$ ).

Planteando ahora la ecuación para las cruzías de la segunda en adelante ( $i>1$ ). Tomando momentos con respecto al punto P ( ver figura 3.6 )

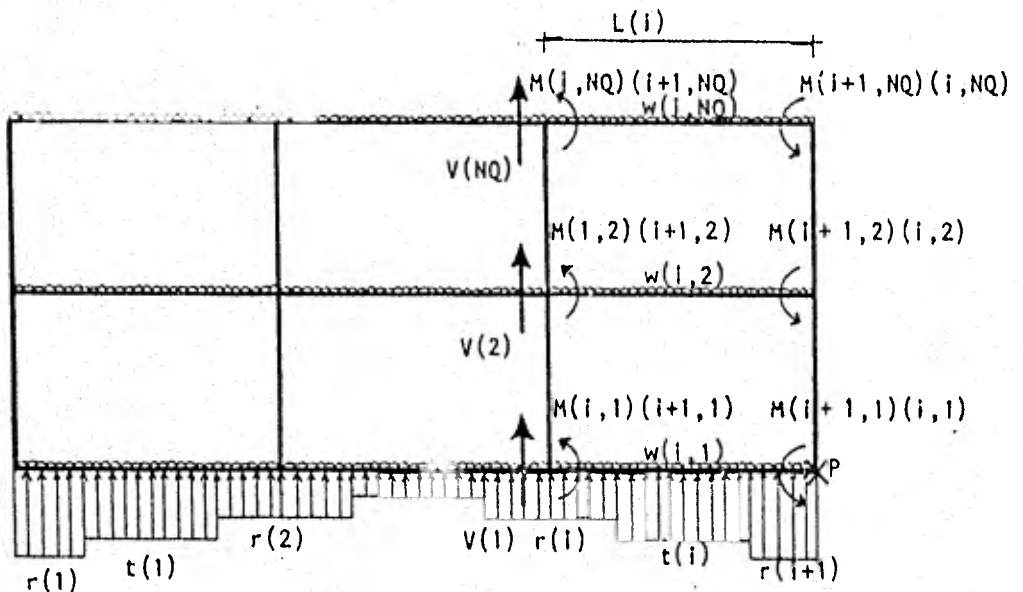


Fig. 3.6.- Fuerzas que actúan en la cruzía  $i$  ( $i>1$ )

$$\sum_{j=1}^{NQ} V(j) L(i) + r(i) \frac{L(i)}{4} - \frac{7}{8} L(i) + t(i) \frac{L(i)}{2} - \frac{L(i)}{2} + r(i+1) \frac{L(i)}{4} - \frac{L(i)}{8} -$$

$$- \sum_{j=1}^{NQ} w(i,j) L(i) \frac{L(i)}{2} = \sum_{j=1}^{NQ} M(i,j) (i+1,j) C(i,j) + \sum_{j=1}^{NQ} M(i+1,j) (i,j) C(i+1,j)$$

... ( 3-33 )

donde todos los términos significan lo mismo que en la ecuación anterior. Ahora llamemos  $V(1), V(2) \dots V(n)$  a los cortantes debidos a todas las fuerzas a la izquierda de la cruzía en cuestión, en el nivel indicado por el índice.

Así :

$$V(1) = r(1) \frac{L(1)}{4} + t(1) \frac{L(1)}{2} + r(1) \frac{L(1)}{4} + \sum_{K=2}^{i-1} \left( r(K) \frac{L(K)}{4} + t(K) \frac{L(K)}{2} + r(K+1) \frac{L(K)}{4} \right) - w(1,1) L(1) - \sum_{K=2}^{i-1} \left( w(K,1) L(K) \right) \quad \dots (3-34)$$

$$V(2) = -w(1,2) L(1) - \sum_{K=2}^{i-1} \left( w(K,2) L(K) \right) \quad \dots (3-35)$$

$$V_{NQ} = -w(1,NQ) L(1) - \sum_{K=2}^{i-1} \left( w(K,NQ) L(NQ) \right) \quad \dots (3-36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3-34), (3-35), (3-36), (3-17A) y -- (3-18A) en (3-33) y agrupando los términos tendremos :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{NQ} \left( 2 B(i+1,j) C(i,j) + C(i+1,j) C(i,j) \right) Kt(i,j) \delta(i,j) + \\ & + \sum_{j=1}^{NQ} \left( C(i,j) C(i+1,j) + 2 C(i+1,j) B(i,j) \right) Kt(i,j) \delta(i+1,j) - \\ & - 6 \sum_{j=1}^{NQ} \left( C(i,j) D(i+1,j) + C(i+1,j) D(i,j) \right) \frac{Kt(i,j)}{L(i)} \delta(i) + \\ & + 6 \sum_{j=1}^{NQ} \left( C(i,j) D(i+1,j) + C(i+1,j) D(i,j) \right) \frac{Kt(i,j)}{L(i)} \delta(i+1) - \frac{L(1) L(i)}{4} r(1) - \\ & - \frac{L(i)}{4} \sum_{k=2}^{i-1} \left( L(k-1) + L(k) \right) r(k) - \left( \frac{L(i-1) L(i)}{4} + \right. \\ & \left. + \frac{672 + 67 E(i+1,1) C(i,1) - 13 F(i,1) C(i+1,1) L(i)^2}{3072} \right) r(i) - \\ & - \frac{L(i)^2}{3072} + 96 + 13 F(i+1,1) C(i,1) - 67 E(i,1) C(i+1,1) \left. \right) r(i+1) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{L(i)}{2} \sum_{K=1}^{i-1} L(K) t(K) - \frac{L(i)^2}{192} (48 + 11 A(i+1,1) C(i,1) - \\
 & 11 A(i,1) C(i+1,1) ) t(i) = -L(i) \sum_{K=1}^{i-1} L(K) \sum_{j=1}^{NQ} w(K,j) - \\
 & \frac{L(i)^2}{2} \sum_{j=1}^{NQ} w(i,j) - \frac{L(i)^2}{12} \sum_{j=1}^{NQ} ( C(i,j) A(i+1,j) - \\
 & C(i+1,j) A(i,j) ) w(i,j) \quad \dots (3-37)
 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de equilibrio de cortantes para crujeas de la segunda en adelante, y se deberá calcular para cada una de las crujeas.

### 3.4.- Obtención del desplazamiento al centro de cada crujía, en la cimentación.

Esta ecuación se aplicará a las contratraves de cimentación únicamente y es con el fin de obtener los desplazamientos a la mitad del claro debidos a las cargas que actúan en ellas ( que son la carga uniforme gravitacional, los momentos en los extremos y las reacciones del terreno ). De esta manera aquí se generan nuevas variables que son los desplazamientos verticales de las contratraves al centro de cada entre-eje y los nombraremos como "  $\eta(i)$  ", para diferenciarlos de los desplazamientos verticales de las columnas  $\delta(i)$  .

Para obtener los desplazamientos  $\eta(i)$  utilizaremos los teoremas de la viga conjugada, para lo cuál haremos mención de la idealización de los apoyos de las traves que se hizo en el inciso 3.1 que agrupa tres casos posibles :

Caso I .- Trabe con los dos apoyos continuos

Caso II .- Trabe con un apoyo continuo y el otro articulado

Caso III.- Trabe con los dos apoyos articulados.

Los desarrollos de las ecuaciones para cada uno de tres casos se encuentran en el Apéndice I sección I.4 y a continuación solo se presentan las --

ecuaciones que se usarán para la formación de la matriz.

Caso I.- Trabe con los dos apoyos continuos :

$$\begin{aligned}
 & Kt(i,1) \phi(i,1) - Kt(i,1) \phi(i+1,1) - \frac{8}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - \\
 & - \frac{8}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + \frac{16}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} n(i) + \frac{1}{256} r(i) L(i)^2 + \\
 & + \frac{1}{256} r(i+1) L(i)^2 + \frac{13}{384} t(i) L(i)^2 = \frac{1}{24} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-38)
 \end{aligned}$$

Caso II.- Trabe con un nudo continuo y el otro articulado :

a.-) Nudo izquierdo continuo y el derecho articulado

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} Kt(i,1) \phi(i,1) - \frac{11}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - \frac{5}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + \\
 & + \frac{16}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} n(i) + \frac{37}{6144} r(i) L(i)^2 + \frac{1}{16} t(i) L(i)^2 + \\
 & + \frac{91}{6144} r(i+1) L(i)^2 = \frac{1}{12} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-39)
 \end{aligned}$$

b.-) Nudo izquierdo articulado y el derecho continuo

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{2} Kt(i,1) \phi(i+1,1) - \frac{11}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) - \frac{5}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) + \\
 & + \frac{16}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} n(i) + \frac{37}{6144} r(i+1) L(i)^2 + \frac{1}{16} t(i) L(i)^2 + \\
 & + \frac{91}{6144} r(i) L(i)^2 = \frac{1}{12} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-40)
 \end{aligned}$$

Caso III.- Trabe con ambos nudos articulados

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + \frac{2}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} n(i) + \frac{23}{6144} r(i) L(i)^2 + \\
 & + \frac{19}{1024} t(i) L(i)^2 + \frac{23}{6144} r(i+1) L(i)^2 = \frac{5}{192} w(i,1) L(i)^2 \\
 & \dots (3-41)
 \end{aligned}$$

De estas cuatro ecuaciones obtenidas, se escoje la adecuada según los tipos de nudos que se presenten de tal manera que se calcule una ecuación -- por cada cruzía o entre-eje.

### 3.5.- Equilibrio de Fuerzas verticales

Esta es la última condición de equilibrio de que nos valemos para completar el número de ecuaciones necesarias para el sistema de ecuaciones y -- consiste en que la suma de todas las fuerzas verticales que actuan en el marco ( cargas gravitacionales y reacciones del terreno ) es igual a cero. Como se trata de cargas repartidas, multiplicaremos a cada una por su respectiva longitud y consideraremos con signo positivo a las reacciones del terreno y con signo negativo a las cargas gravitacionales :

$$\begin{aligned}
 r(1) L(1) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} t(i) L(i) + \sum_{i=2}^{N-1} \{ L(i-1) + L(i) \} r(i) + \\
 + r(N) L(N-1) = 4 \sum_{i=1}^{N-1} L(i) \sum_{j=1}^{NQ} w(i,j) \quad \dots ( 3-42 )
 \end{aligned}$$

de donde :

N es el número de ejes de columnas en el marco.

Esta ecuación se calcula una sola vez porque es para todo el marco.

Con esta ecuación finalizaremos todo lo que en cuanto a la estructura -- se refiere, completando lo que falta del método en los siguientes capítulos.



# CAPITULO IV

## C A P I T U L O    I V

### ANALISIS DEL SUELO

En este capítulo se obtendrán los hundimientos del terreno originados -- por las cargas que transmite la estructura al suelo. Los hundimientos a considerarse son los mismos que hasta ahora hemos llamado desplazamientos verticales de la estructura ( desplazamientos de las columnas  $\delta(i)$  y desplazamientos al centro de cada entre-eje  $n(i)$  ) y que han sido tratados como incógnitas.- Así mismo, tomaremos ahora como cargas en el suelo a las mismas que se usaron como reacciones del terreno en el análisis de la estructura (  $r(i)$  y  $t(i)$  ) - pero ahora tomándolas como cargas concentradas (  $R(i)$  y  $T(i)$  ) para simplificar el análisis. Esto es, si a cada reacción del terreno, que es una carga -- repartida, la multiplicamos por su respectiva longitud nos queda una carga -- concentrada que ahora va a actuar como carga en el suelo. En la fig. 4.1 se -- podrá observar que las  $R(i)$  serán cargas bajo las columnas y las  $T(i)$  serán -- cargas al centro del entre-eje.

Para que solo exista una variable para todos los hundimientos y otra para todas las cargas en el terreno ( y no dos como se han estado manejando --- hasta ahora  $n(i), \delta(i)$  y  $R(i)$  ,  $T(i)$  respectivamente ) haremos un cambio de -- variable que a continuación definiremos :

$$\delta(i) = \xi( 2i-1 ) \quad \dots \quad ( 4-1 )$$

$$n(i) = \xi( 2i ) \quad \dots \quad ( 4-2 )$$

$$R(i) = Q( 2i-1 ) \quad \dots \quad ( 4-3 )$$

$$T(i) = Q( 2i ) \quad \dots \quad ( 4-4 )$$

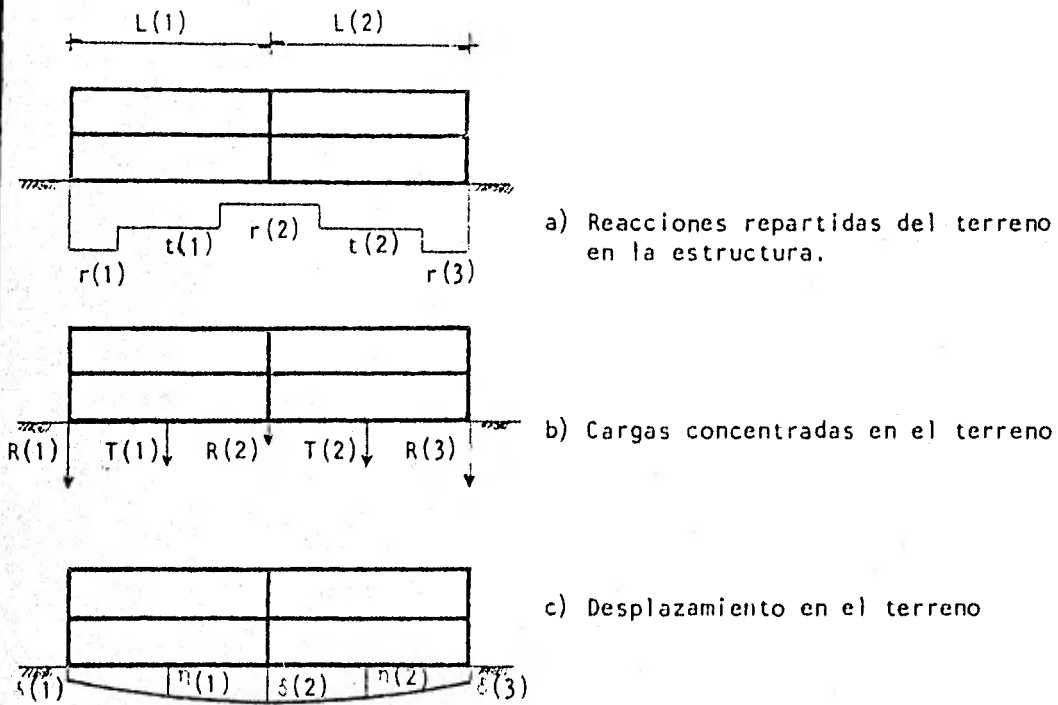


Fig. 4.1.- Cargas y hundimientos del terreno.

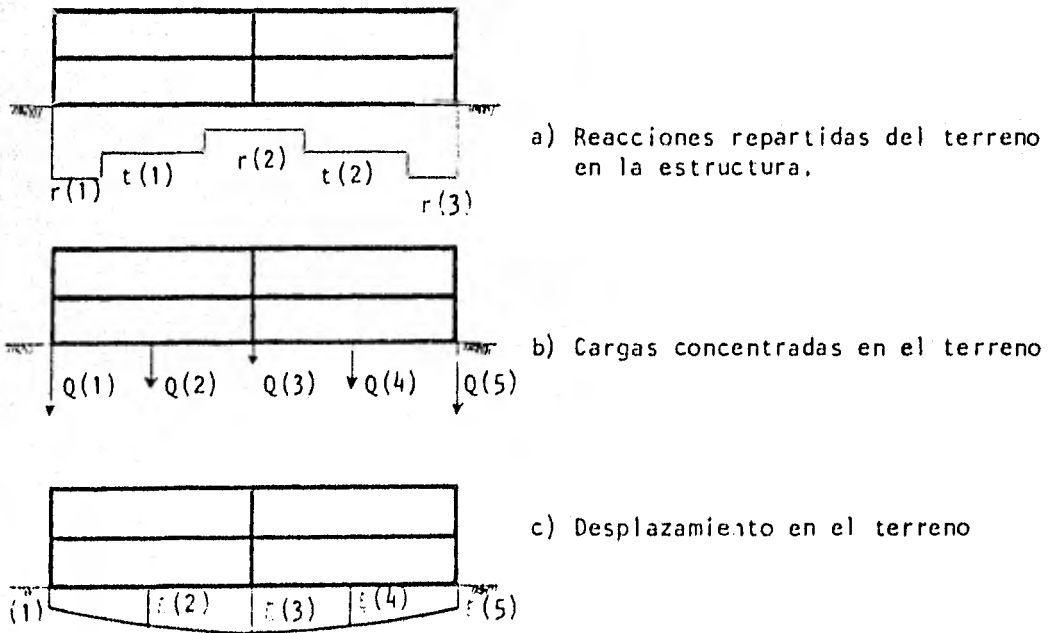


Fig. 4.2.- Cargas y hundimientos del terreno con el cambio de variable

Donde ahora  $\xi(i)$  es la variable que utilizaremos para los hundimientos -  $Q(i)$  es para las cargas concentradas sobre el suelo.

En la figura 4.2 se muestra la misma figura 4.1 pero con el cambio de variable.

Como se aclaró al principio de este trabajo, los suelos con los que trataremos serán de mediana a alta compresibilidad y por tanto para el análisis de los hundimientos usaremos las fórmulas de la teoría de la consolidación unidimensional de Terzaghi. Consideramos al suelo como un material homogéneo e isótropo y que puede estar constituido de uno o más estratos con las mismas o diferentes propiedades mecánicas.

Según Terzaghi el hundimiento en un diferencial de terreno (i) producido por una carga  $P_i$  aplicada en un punto, está dada por :

$$\alpha_i = m v_i \Delta P_i H_i \quad \dots \quad (4-5)$$

Refiriendo esta ecuación a nuestro caso en estudio, tenemos que el diferencial de terreno estará formado por "cuadros" en el perfil estratigráfico del suelo ( ver Fig. 4.3 ) y la carga  $\Delta P_i$  serán las reacciones del terreno sobre la estructura.

A cada "cuadro" y a sus correspondientes propiedades les asignaremos unos índices (i,j) donde ahora "i" será el índice de la carga bajo la que se encuentra el cuadro y "j" será el índice del estrato en que se encuentre. El primer estrato será el que se encuentre a menor profundidad, es decir, el que está en contacto con la cimentación y crecerá el índice conforme aumente la profundidad en el suelo. Llamaremos  $H(j)$  al espesor del estrato.

De la ecuación ( 4-5 ), la deformación en el cuadro (i,j) debido a una carga cualquiera  $Q(r)$  colocada en "r" está dada por :

$$\alpha(i,j)_r = m v(i,j) H(j) \Delta T(i,j)_r \quad \dots \quad (4-6)$$

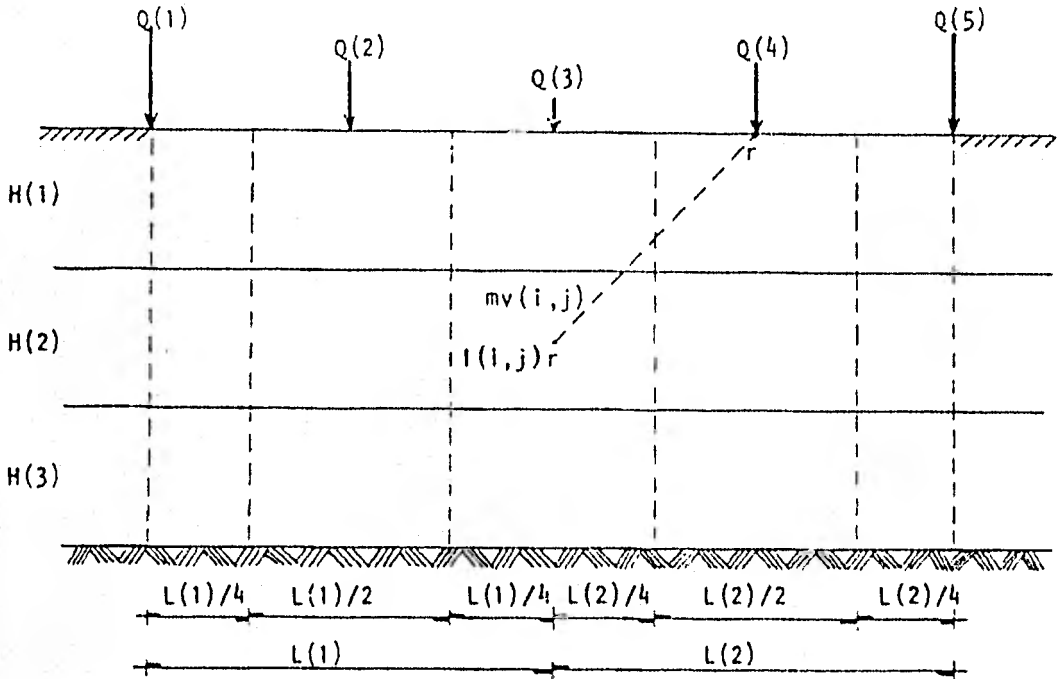


Fig. 4.3.- Perfil del terreno a analizar

Donde  $mv(i,j)$  es el módulo de deformación volumétrica del material -- que se encuentre en el cuadro  $(i,j)$ , y el término  $\Delta T(i,j)_r$  es el incremento de esfuerzo normal vertical en el cuadro  $(i,j)$  debido a la presión bajo el punto  $r$  en el contacto cimentación -suelo y se obtiene de la siguiente ecuación :

$$\Delta T(i,j)_r = I(i,j)_r \frac{Q(r)}{a(r)} \quad \dots \quad (4-7)$$

El término  $a(r)$  es el área en planta de la cimentación que corresponde a la carga  $Q(r)$  y el término  $I(i,j)_r$  es el valor de influencia en el cuadro  $(i,j)$  y se determina calculando el esfuerzo que ocasiona una presión -- unitaria aplicada en el área  $a(r)$  sobre el cuadro  $(i,j)$  ( Referencia 2 ).

Si sustituimos la ecuación ( 4-7 ) en ( 4-6 ) se tiene que debido a -- una carga aplicada en  $r$  , la deformación del cuadro será :

$$\alpha(i,j)_r = mv(i,j) H(j) I(i,j)_r \frac{Q(r)}{a(r)} \quad \dots \quad (4-8)$$

La deformación total del cuadro (i,j) será la suma de las deformaciones debidas a cada una de las cargas y se da con la ecuación siguiente :

$$\alpha(i,j) = mv(i,j) H(j) \sum_{r=1}^m l(i,j)_r \frac{Q(r)}{a(r)} \quad \dots (4-9)$$

donde m es el número total de cargas aplicadas en la superficie y es igual a  $m = 2n-1$ ; n = número de ejes de columnas ( ver fig. 4.2 ). Por lo tanto, el hundimiento bajo un punto "i" cualquiera será la suma de las deformaciones de cada uno de los " cuadros " que se encuentran bajo ese punto debido a todas las cargas actuantes en el suelo, y está dado por la ecuación :

$$\xi(i) = \sum_{j=1}^p \alpha(i,j) \quad \dots (4-10)$$

Siendo "p" el número total de estratos del suelo. Si sustituimos la ecuación ( 4-9 ) en ( 4-10 ) se tendrá en forma general la ecuación de hundimientos como sigue :

$$\xi(i) = \sum_{j=1}^p mv(i,j) H(j) \sum_{r=1}^m l(i,j)_r \frac{Q(r)}{a(r)} \quad \dots (4-11)$$

Pero como las cargas del terreno habían sido manejadas en las otras etapas del análisis como cargas repartidas haremos :

$$\begin{aligned} Q(r) &= l_t(r) q(r) \\ a(r) &= l_t(r) b(r) \end{aligned} \quad \dots (4-12)$$

donde a  $l_t(r)$  le llamaremos longitud del " cuadro " correspondiente y a  $b(r)$  el ancho de la cimentación en ese cuadro, y a  $q(r)$  la carga repartida. Ahora la ecuación nos quedará como sigue :

$$\xi(i) = \sum_{j=1}^p mv(i,j) H(j) \sum_{r=1}^m l(i,j)_r l_t(r) q(r) \quad \dots (4-13)$$

donde  $l(i,j)_r = \frac{l(i,j)_r}{l_t(r) b(r)}$

Para los valores de influencia  $I'(i,j)_r$ , solo se calcularán hasta el segundo estrato de suelo utilizando la carta de Newmark, donde se dibuja la planta de la cimentación y se obtiene el incremento de esfuerzos en la profundidad media de cada estrato debido a una carga de 1 ton/m<sup>2</sup> y se divide éste entre el área tributaria correspondiente; para estratos del suelo del segundo en adelante se usará la fórmula de Boussinesq para cargas concentradas y se divide también entre su área tributaria. Se hacen estas simplificaciones porque en la práctica se observa que solo en los dos primeros estratos influye la geometría de la cimentación y ya para profundidades mayores influye de mayor parte la magnitud de la carga. Con esto se puede adelantar considerablemente en el análisis ya que para la ecuación de Boussinesq se facilita el uso de la computadora.

Es importante aclarar que los valores del módulo de deformación del suelo  $mv(i,j)$  dependen del esfuerzo de confinamiento, el cual no se conoce a priori. Por esta razón, los  $mv(i,j)$  deben determinarse para un nivel de esfuerzos lo más cercano posible a la realidad (Referencia 2), dependiendo este nivel de la experiencia del ingeniero que realiza el análisis. Si posteriormente se ve que el nivel de presiones considerado en el primer análisis está muy alejado de la magnitud de los esfuerzos obtenidos después de resolver todo el problema, es probable que haya necesidad de volver a calcular los hundimientos del suelo con un nuevo valor del módulo de deformación obtenido de las curvas de compresibilidad al entrar con la deformación obtenida en el anterior análisis. Así se genera un proceso iterativo que converge rápidamente y permite obtener un valor bastante real del módulo de deformación y por consiguiente de los hundimientos.

Volviendo al desarrollo de las ecuaciones, es necesario que los términos de la ecuación ( 4-13 ) sean congruentes con los términos manejados en el resto del análisis. De esta ecuación observamos que los hundimientos son una función lineal de las cargas por lo que, por facilidad en el desarrollo relacionaremos ambos por medio de un coeficiente :

$$\begin{aligned} \xi(i) &= f( q(i) ) \\ \xi(i) &= \sum^n c(i,i) q(i) \quad \dots ( 4-14 ) \end{aligned}$$

$$\text{en donde } c(i,j) = \sum_{r=1}^m m_v(i,j) H(j) l'(i,j) r_l t(r)$$

Esta ecuación la adaptaremos a la notación de hundimientos y reacciones que se utilizó en el análisis de la estructura (  $\delta(i)$ ,  $n(i)$ ,  $r(i)$  y  $t(i)$  ) - para poder relacionar las variables de ambos análisis. Para este cambio utilizaremos las mismas ecuaciones ( 4-1 ), ( 4-2 ), ( 4-3 ) y ( 4-4 ) usadas - al principio de este capítulo, y al coeficiente  $c(i,j)$  de la ecuación (4-14) se le nombrará dependiendo bajo que punto esté calculado el hundimiento y -- que carga lo esté produciendo. Esto es, si se trata del hundimiento bajo una columna y debido a una reacción  $r(i)$  el coeficiente será  $R_d(i,j)$  y si es debido a una reacción  $t(i)$  será  $T_d(i,j)$ ; si el hundimiento es al centro de la cruzía los coeficientes serán  $R_z(i,j)$  y  $T_z(i,j)$ . Esta nomenclatura la usaremos solo con el fin de poder hacer más fácil su operación por medio de la -- computadora; además de que esta parte del programa ya había sido elaborada - en un trabajo anterior, realizado por los Ingenieros Agustín Deméneghi y --- César Hernández. Desarrollando entonces la ecuación ( 4-14 ) con el cambio - de notación :

$$\delta(1) = R_d(1,1)r(1) + T_d(1,1) t(1) + \dots + T_d(n-1,1) t(n-1) + R_d(n,1) r(n)$$

$$n(1) = R_z(1,1)r(1) + T_z(1,1) t(1) + \dots + T_z(n-1,1) t(n-1) + R_z(n,1) r(n)$$

.

.

.

$$n(n-1) = R_z(1,n-1)r(1) + T_z(1,n-1)t(1) + \dots + T_z(n-1,n-1) t(n-1) + R_z(n, n-1) r(n)$$

$$\delta(n) = R_d(1,n)r(1) + T_d(1,n) t(1) + \dots + T_d(n-1,n) t(n-1) + R_d(n,n) r(n)$$

Estas mismas las podemos resumir en las siguientes ecuaciones :

$$\delta(k) = \sum_{p=1}^n R_d(p,k) r(p) + \sum_{q=1}^{n-1} T_d(q,k) t(q) \quad \dots \quad ( 4-15 )$$



donde  $k = 1, \dots, n$

$$\eta(l) = \sum_{p=1}^n R_z(p, l)r(p) + \sum_{q=1}^{n-1} T_z(q, l)t(q) \quad \dots \quad (4-16)$$

donde  $l = 1, \dots, n-1$

Estas dos ecuaciones serán las que utilizaremos en el cálculo de hundimientos del terreno.

# CAPITULO V

## C A P I T U L O V

### COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Es en este capítulo donde radica la importancia del método, porque es en esta parte del trabajo donde conjuntamos el análisis de la estructura y el del suelo en uno solo.

Consiste en igualar las deformaciones de la estructura a las del suelo y esto es a lo que le llamaremos interacción estructura-suelo, porque la estructura no se deformará más de lo que el suelo le permita y a su vez el suelo se hundirá solo por las cargas que le trasmite la estructura .

Esto lo lograremos sustituyendo las ecuaciones de los hundimientos en el suelo ( ecs. 4-15 y 4-16 ), las cuales están en función de las reacciones, en el sistema formado por las ecuaciones obtenidas en el análisis de la estructura ( ecs. 3-28, 3-30, 3-32, 3-37, 3-38, 3-39, 3-40, 3-41 y 3-42) y que están en función de los giros, de las reacciones y de los hundimientos. De esta manera los hundimientos que fungían como incógnitas en el sistema ahora desaparecen, dejando solamente a los giros y las reacciones, formando así un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Ahora el problema se reduce unicamente a resolver el sistema de ecuaciones, que puede hacerse por cualquiera de los múltiples métodos existentes. - Para nuestro caso utilizaremos un programa de computadora que utiliza el método de Gauss y que será descrito en el siguiente capítulo.

Una vez resuelto el sistema se conocen las reacciones y los giros, que al sustituirlos en las ecuaciones ( 3-17A ), ( 3-18A ), ( 3-23A ), ( 3-24A ) ( 3-25A ) y ( 3-25B ) se obtienen los momentos en los extremos de las traveses y columnas; y sustituyéndolos en las ecuaciones ( 4-15 ) y ( 4-16 ) se obtienen los hundimientos del suelo. Así pues se obtienen los parámetros buscados y podremos considerar como resuelto el problema.

# CAPITULO VI

C A P I T U L O   V I

PROGRAMA DE COMPUTADORA

6.1.- Descripción .

Antes de iniciar la descripción del programa propiamente dicha consideramos pertinente hacer una aclaración referente a la capacidad de la computadora a utilizar y a una modificación opcional al método, que a continuación describiremos.

El problema en cuestión se reduce a formar y resolver un sistema de ecuaciones cuya magnitud dependerá básicamente del tamaño del marco a analizar. Tenemos que el número de ecuaciones del sistema está dado por la ecuación siguiente :

$$\text{Núm. de ecuaciones} = \left[ (N \times NQ) + (2N) - 1 \right] - NA \dots (6-1)$$

donde : N = número de ejes de columnas

NQ = número de niveles o pisos

NA = número de nudos articulados

En la formación y solución del sistema de ecuaciones intervienen dos factores determinantes : la capacidad de memoria de la computadora que se utilice y el tiempo del procesador que se consuma en el programa. A este último se le deberá dar la suficiente importancia porque afecta en el aspecto económico y representa una de las limitaciones fundamentales que se presentan en este tipo de trabajos.

Podremos proporcionar mayor flexibilidad para la utilización del método mientras mayor sea la holgura con que manejemos esos dos parámetros. Una de las formas más sencillas de lograr esto es reducir el tamaño del sistema de ecuaciones, es decir que hay que reducir el tamaño del marco a analizar.

Se ha observado en la práctica que la influencia de la interacción ---suelo-estructura en los elementos mecánicos de las barras del marco, es mayor en los niveles inferiores de la estructura, mientras que en los niveles superiores ya no son significativos. Tomando en cuenta lo anterior implementaremos en el programa una sección de éste donde se analizarán únicamente los niveles inferiores mientras que los superiores se sustituirán por fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran las columnas ( ver Fig. 6.1 ). El número de niveles a analizar será elegido a criterio del Ingeniero.

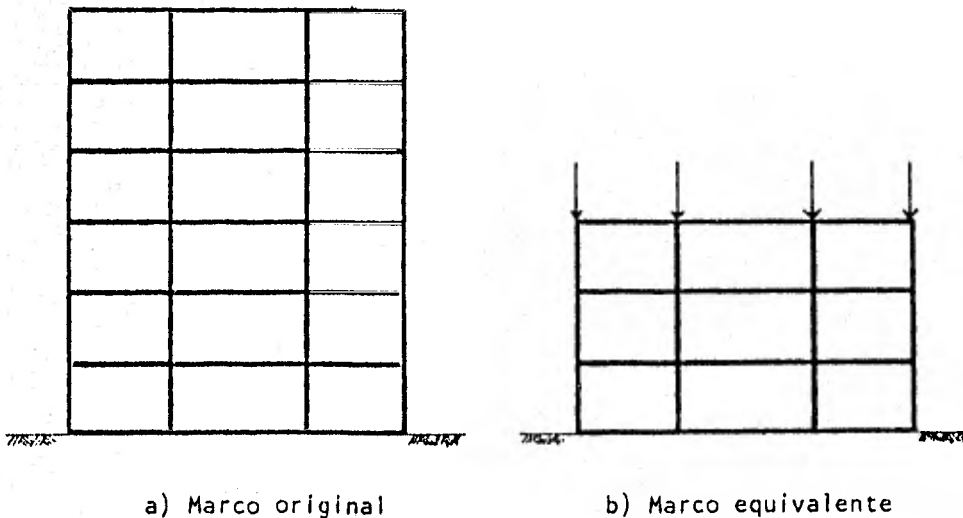


Fig. 6.1.- Reducción del tamaño del marco por analizar.

Estas fuerzas concentradas representan las reacciones que transmitirán a las columnas debido a la carga en las traveses, suponiendo que el marco es cortado en el nivel señalado como límite para el análisis. Estas fuerzas -- concentradas las calcularemos suponiendo longitudes tributarias de trabe -- iguales a la mitad del claro entre ejes de columna; así multiplicando la --

carga lineal por su correspondiente longitud tributaria se obtiene la fuerza concentrada en cada columna y en ese nivel, y acumulándola para todos los niveles se tiene la fuerza total que es la que se usará en el análisis del marco y se da por la siguiente ecuación :

$$P(i) = \sum_{Q=NQ+1}^{NJ} \left( \frac{w(i-1,Q) L(i-1)}{2} + \frac{w(i,Q) L(i)}{2} \right) \dots (6-2)$$

donde :

NQ = Número de niveles límite para analizarse

NJ = Número de total de niveles.

Entonces tendremos ahora que, además de las consideraciones hechas en el capítulo III, se hará el análisis del marco con fuerzas verticales aplicadas en los nudos del último nivel; lo que representa ligeras modificaciones extras al análisis de algunas de las ecuaciones obtenidas en el capítulo citado líneas arriba. En el Apéndice 1.5.- resumimos el total de las ecuaciones obtenidas en el capítulo III, apreciándose las modificaciones debidas a las cargas concentradas en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas cortantes en las crujeas y en la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales. Todas estas ecuaciones serán codificadas en el programa para la formación de la matriz.

Cabe aclarar que esta manipulación del número de niveles del marco nos limita en cuanto que a que los resultados del programa serán solo de una parte del marco, es decir, será necesario un análisis posterior, ya sea con un método manual o con computadora, del marco completo metiendo como datos las reacciones del terreno que fueron obtenidas como resultados del primer análisis.

El programa fué codificado en lenguaje de programación FORTRAN. Aunque fué diseñado para operarlo en la computadora BURROGHS-6700 del CSC-UNAM, con algunas modificaciones es posible utilizarlo en máquinas con menor capacidad.



En esencia el programa consiste en formar una matriz cuadrada cuya orden será de  $(N \times NQ) + 2N - 1$ , en el caso de que todos los nudos del marco sean continuos, y se reduce en uno por cada nudo articulado. Los elementos de la matriz son los coeficientes de cada una de las variables ( giros, desplazamientos y reacciones ) generados para cada una de las ecuaciones calculadas anteriormente, las cuales son : equilibrio de momentos en los nudos, equilibrio de fuerzas cortantes en la crujía, desplazamiento a la mitad de la crujía y equilibrio de fuerzas verticales ( Ecuaciones 3-27, 3-30, 3-32A, 3-37A, 3-38, 3-39, 3-40, 3-41 y 3-42A en este orden ), formando así el correspondiente renglón de la matriz; para el caso creamos un índice "k" extra para todas las variables con el que se hace referencia al renglón que corresponda. En cuanto al ordenamiento de columnas, comenzamos con los coeficientes de los giros  $\phi(i,j)$  que ahora llamaremos  $\phi(i,j,k)$  según lo explicado y comenzando por los nudos del primer nivel barriendo de izquierda a derecha y repitiéndose para cada uno de los niveles superiores en forma progresiva, quedando como sigue :  $\phi(1,1,k)$ ,  $\phi(2,1,k)$ , ... ,  $\phi(N,1,k)$ ,  $\phi(1,2,k)$ ,  $\phi(2,2,k)$ , ... ,  $\phi(N,2,k)$ , ... ,  $\phi(N,NQ,k)$ ; de estos términos no aparecerán los que correspondan a nudos articulados. Les siguen las reacciones bajo las columnas  $r(i)$  que ahora llamaremos  $r(i,k)$  y también en el mismo orden de izquierda a derecha :  $r(1,k)$ ,  $r(2,k)$ , ... ,  $r(N,k)$ ; después las reacciones al centro del claro entre columnas  $t(i)$  que ahora será  $t(i,k)$  en el mismo orden :  $t(1,k)$ , ... ,  $t(2,k)$ , ... ,  $t(N-1,k)$ . También por cada ecuación habrá un término independiente que llamaremos  $c(k)$  y que formará otra matriz que llamaremos de términos independientes.

Durante la ejecución del programa, a los términos que no sean calculados en cada ecuación se les asignará el valor de cero.

Una vez formada la matriz, el programa se implementó con un programa de biblioteca que resuelve el sistema por el método de Gauss y arroja como solución un vector que representa los giros y las reacciones en el orden arriba citado. Con estos resultados y con ayuda de las ecuaciones ( 3-17A ), ( 3-18A ), ( 3-23A ), ( 3-24A ), ( 3-25A ) y ( 3-25B ) se obtendrán momentos en los extremos de las barras, y con las ecuaciones ( 4-15 ) y ( 4-16 )

Se calcularán los hundimientos del terreno.

Con esta visión general del programa podremos ahora abordar parte por parte, donde veremos como con cada una de las ecuaciones vamos generando los elementos de la matriz.

A continuación resumimos la totalidad de las variables que intervienen en el programa y que van relacionadas con propiedades o características de los elementos del marco, omitiendo aquellas que solo fueron utilizadas como herramienta.

- N.- Número de columnas del marco.
- NQ.- Número de niveles o pisos que se desea que se analicen.
- NJ.- Número total de niveles del marco.
- TL(i).- Longitud de las trabes (claro entre ejes de columnas).
- CH(j).- Altura de columnas (altura de entrepisos).
- W(i,j).- Carga por unidad de longitud en la trabe (i,j).
- ET(i,j).- Módulo de elasticidad de la trabe (i,j).
- EC(i,j).- Módulo de elasticidad de la columna (i,j).
- TMI(i,j).- Momento de Inercia de la trabe (i,j).
- CMI(i,j).- Momento de inercia de la columna (i,j).
- PE(i).- Fuerza concentrada sobre la columna (i), calculada por el programa.
- BAN(i,j).- Coeficiente bandera del nudo (i,j) que indica si el nudo es -- continuo o articulado.
- CA(i,j), CB(i,j), CC(i,j), CD(i,j), CE(i,j) y CF(i,j).-  
Son coeficientes del nudo (i,j) que se asignan en el programa-- según si el nudo es continuo o articulado.
- M.- Número de reacciones del terreno =  $N + (N-1)$ .
- NP.- Número de estratos en que dividiremos al terreno compresible.

- $H(j)$ .- Espesor del estrato (j) del suelo.
- $SMV(i,j)$ .- Coeficiente de variación volumétrica en el estrato (j) del suelo y bajo el punto donde se considera aplicada la reacción (i) de la estructura.
- $F(i,j,k)$ .- Esta variable tiene dos usos dentro del programa. El primero es en la parte relativa a la obtención de hundimientos del suelo donde representa a los valores de influencia bajo la reacción (i), en el estrato (j) y debido a la carga (k). El segundo uso es en la parte relativa al análisis estructural y la formación de la matriz donde representa el coeficiente del giro del nudo (i,j) en la ecuación correspondiente al renglón (k).
- $R(i,k)$ .- Coeficiente de la reacción  $r(i)$  del suelo sobre la estructura correspondiente al renglón (k).
- $T(i,k)$ .- Coeficiente de la reacción  $t(i)$  del suelo sobre la estructura correspondiente al renglón (k).
- $Q(i,j)$ .- Coeficiente utilizado en la obtención de hundimientos del suelo y representa el hundimiento debido a la carga (i) bajo la reacción (j).
- $RD(i,j)$ .- Esta variable se genera en el cambio de variable y representa el hundimiento debido a la reacción  $r(i)$  bajo la columna (j).
- $TD(i,j)$ .- Esta variable se genera en el cambio de variable y representa el hundimiento debido a la reacción  $t(i)$  bajo la columna (j).
- $RZ(i,j)$ .- Esta variable se genera en el cambio de variable y representa al hundimiento debido a la reacción  $r(i)$  bajo un punto al centro del claro (j) entre columnas.
- $TZ(i,j)$ .- Esta variable se genera en el cambio de variable y representa al hundimiento debido a la reacción  $t(i)$  bajo un punto al centro del claro (j) entre columnas.
- $AL(i)$ .- Distancia acumulada de un punto (i) del suelo con respecto al origen. Se utiliza en el cálculo de los valores de influencia.

- $AH(j)$ .- Profundidad acumulada de un punto (j) del suelo con respecto a la superficie del terreno. Se utiliza en la obtención de los valores de influencia.
- $TLS(i)$ .- Longitud tributaria de la reacción (i). Se utiliza en el cálculo de hundimientos del terreno.
- $D(i,k)$ .- Es el coeficiente del desplazamiento vertical de la columna (i) correspondiente al renglon (k).
- $Z(i,k)$ .- Es el coeficiente del desplazamiento vertical de la cimentación al centro del claro (i) entre columnas, correspondiente al renglon (k).
- $TK(i,j)$ .- Rigidez relativa de la trabe (i,j).
- $CK(i,j)$ .- Rigidez relativa de la columna (i,j).
- $TKN(i,j)$ .- Rigidez del nudo (i,j).
- $C(k)$ .- Término independiente de la ecuación correspondiente al renglon (k).
- $X(i)$ .- Representa al elemento (i) del vector solución de la matriz.
- $RE(i)$ .- Representa el valor de la reacción bajo la columna (i) obtenida como resultado del análisis.
- $TE(i)$ .- Representa el valor de la reacción al centro del claro (i) entre columnas obtenida como resultado.
- $DELTA(i)$ .- Es el hundimiento de la estructura bajo la columna (i) obtenido como resultado.
- $ZETA(i)$ .- Es el hundimiento de la estructura al centro del claro (i) entre columnas obtenido como resultado.
- $TMOMI(i,j)$ .- Es el valor del momento en el extremo izquierdo de la trabe (i,j) obtenido como resultado.
- $TMOMD(i,j)$ .- Es el valor del momento en el extremo derecho de la trabe (i,j) obtenido como resultado.
- $CMOMAB(i,j)$ .- Es el valor del momento en el extremo inferior de la columna (i,j) obtenido como resultado.

$MOMAR(i,j)$ . - Es el valor del momento en el extremo superior de la columna -  
(i,j) obtenido como resultado.

$FI(i,j)$ . - Es el valor del giro en el nudo (i,j) obtenido como resultado.

$X, A, B, C, UL, AINV, SCALES, IPS, RE$  y  $DX$ . -

Son variables utilizadas en el programa de biblioteca para la -  
solución de la matriz.

Pasaremos ahora a comentar cada parte del programa, dejando los detalles -  
de la lectura de datos para más adelante en la sección correspondiente a la -  
operación del programa.

Cálculo de fuerzas concentradas. - Como se dijo anteriormente, la parte -  
del marco que se analizará es sustituida por unas fuerzas aplicadas en cada -  
uno de los nudos del último nivel. El programa primero obtiene el número de -  
niveles restantes que llamamos NS.

$$NS = NJ - NQ \dots\dots (6-6)$$

para después aplicar la ecuación (6-2) para las columnas centrales y modifi-  
cando esta misma para las columnas de orilla, barriendo el marco de izquierda  
a derecha.

Asignación de coeficientes de nudo. - Al entrar como dato el coeficiente  
bandera  $BAN(i,j)$  de cada nudo el programa detecta cuando éste es igual a cero,  
significando que el nudo en cuestión es continuo para así asignar al nudo los  
coeficientes CA, CB, CC y CD correspondientes a un nudo continuo; y cuando el -  
coeficiente bandera es distinto de cero significa que se trata de un nudo ar-  
ticulado y le asigna los coeficientes CA, CB, CC y CD que le corresponden a un  
nudo articulado. Cuando se trata de un nudo de cimentación se le asignan ade-  
más los coeficientes CE y CF de un nudo continuo o articulado según sea el --  
caso.

## ANALISIS DEL SUELO

Obtención de los valores de influencia. - Los valores de influencia co---  
rrespondientes a los dos primeros estratos dependen de la geometría de ----

de cimentación en planta y por lo tanto se dan como datos. Los valores de influencia para los estratos que restan son calculados en el programa utilizando la ecuación de Boussinesq para fuerzas concentradas.

$$F(i,j,Kr) = \frac{3}{2\pi} \frac{AH(j)^3}{[(AL(i) - AL(Kr))^2 + AH(j)^2]^{5/2}} \dots (6-7)$$

donde :

- $F(i,j,Kr)$  Es el valor de influencia bajo la reacción (i) en el estrato (j) y debido a la fuerza (Kr)
- $AH(j)$  Es la profundidad del punto medio del punto de interés
- $AL(i)$  Es la distancia horizontal del punto de interés al origen
- $AL(Kr)$  Es la distancia horizontal del punto de aplicación de la fuerza al origen

El programa primero valúa las distancias  $AH(j)$ ,  $AL(i)$  y  $AL(Kr)$  y después valúa la expresión ( 6-7 ). Con objeto de optimizar el programa, se aprovechó la simetría que se obtiene al calcular los valores de influencia, calculando los mencionados valores "barriendo" de izquierda a derecha los puntos de interés solo una vez e igualando los valores correspondientes que faltaban por calcular.

Cálculo de hundimientos del suelo.- Usando la ecuación ( 4-13 ) se calcularán en forma progresiva, todas las deformaciones debidas a todas las reacciones ( ahora consideradas como fuerzas concentradas, como ya se mencionó ). Después se hace un cambio de variable de manera que se use la misma notación que se usará en la parte correspondiente al análisis estructural, por lo tanto expresamos los hundimientos con las variables  $RD(i,j)$ ,  $TD(i,j)$ ,  $RZ(i,j)$  y  $TZ(i,j)$  tal y como se obtuvieron en las ecuaciones ( 4-15 ) y ( 4-16 ). Estos hundimientos serán utilizados más tarde en la parte del programa correspondiente a la compatibilidad de deformaciones.

En este momento, como ya fueron empleados y no se requieren para posteriores cálculos, los valores de influencia serán borrados de la memoria -

asignándosele valor de cero a las variables  $F(i,j,k)$  para su utilización en la parte del análisis estructural.

## ANALISIS ESTRUCTURAL

Obtención de rigideces de traves y columnas.- En esta sección únicamente se obtendrán las relaciones siguientes :

$$TK(i,j) = \frac{ET(i,j) TMI(i,j)}{TL(i)}$$

$$CK(i,j) = \frac{EC(i,j) CMI(i,j)}{CH(j)}$$

que fueron definidas en el capítulo III como rigidez de trabe y rigidez de columna, respectivamente.

Obtención de rigideces de nudo.- En esta parte del programa se valorará la ecuación ( 3-28 ) para cada uno de los nudos y representa la suma de rigideces de las barras que inciden en ese nudo. Al sumarse cada una de estas rigideces se multiplican por el coeficiente "CB" correspondiente al extremo de la barra contrario al nudo. Esto es con el fin de obtener la rigidez adecuada debida a nudos articulados contiguos al nudo en cuestión.

Esto anterior se codificó para nudos interiores y también para los casos de nudos de esquinas superiores e inferiores así como a los nudos de orilla; cada caso con sus respectivas modificaciones particulares.

Ecuación de equilibrio de momentos en los nudos de la cimentación.- Como se mencionó anteriormente, cada coeficiente de las incógnitas de una ecuación representa un elemento del renglón correspondiente de la matriz de rigideces. Con el objeto de obtener facilmente la forma matricial calcularemos elemento por elemento, es decir, cada coeficiente de las incógnitas ----

er separado. Se calculará también el respectivo elemento de la matriz de --  
terminos independientes.

Para cada uno de los nudos de cimentación se aplicará la ecuación ----  
( 3-30 ), siempre y cuando el nudo sea continuo, para lo cuál se implementó--  
el programa de tal manera que por cada nudo se prueba su coeficiente bande--  
a; si el nudo es articulado el programa no aplica la ecuación y pasa al si--  
guiente nudo; si el nudo es continuo, aumenta en uno el índice "k", que es -  
el contador de renglones de la matriz y aplica la ecuación, con sus respecti  
as modificaciones en el caso de los nudos de orilla.

Ecuación de equilibrio de momentos en los nudos de la superestructura.-  
Se realiza el mismo procedimiento anterior de probar el coeficiente bandera-  
de cada nudo, pero ahora aplicando la ecuación ( 3-27 ). Se hacen también --  
modificaciones a la ecuación para los nudos de orilla y los de esquina. El -  
índice "k" se sigue aumentando en uno por cada nudo continuo de tal manera -  
que cuando se terminen de recorrer todos los nudos se tendrá un número de --  
renglones igual a (N x NQ) menos el número de nudos articulados.

Ecuación de equilibrio de fuerzas cortantes en la crujía.- De la misma-  
forma como hasta ahora se han determinado los elementos de la matriz, se pro-  
cederá aplicando la ecuación ( 3-32A ) para la primera crujía, es decir, la-  
del extremo izquierdo; y la ecuación ( 3-37A ) para cada una de las crujías-  
de la segunda en adelante, de tal manera que el índice "k" se aumente en uno  
por cada crujía.

Las citadas ecuaciones ( 3-32A ) y ( 3-37A ) tienen entre sus términos-  
ciertas sumatorias, las cuales logramos creando nuevas variables y sumando -  
en ellas iterativamente. A continuación se muestran dichas variables :

$$\text{SUMD} = \sum_{j=1}^{\text{NQ}} \{ \text{CC}(i,j) \text{CD}(i+1,j) + \text{CC}(i+1,j) \text{CD}(i,j) \} \text{TK}(i,j)$$

$$\text{SUMI} = \sum_{j=1}^{\text{NQ}} \text{W}(i,j)$$



$$\text{SUMC} = \sum_{j=2}^{NQ} \{ \text{CC}(2,j) \text{CA}(1,j) - \text{CC}(1,j) \text{CA}(2,j) \} \text{W}(1,j)$$

$$\text{SUMK} = \sum_{\text{KC}=1}^{i=1} \text{W}(\text{KC},j)$$

$$\text{SUMF} = \sum_{\text{KM}=1}^i \text{PE}(\text{KM})$$

$$\text{SUML} = \sum_{j=1}^{NQ} \{ \text{CC}(i,j) \text{CA}(i+1,j) - \text{CC}(i+1,j) \text{CA}(i,j) \} \text{W}(i,j)$$

$$\text{SUME} = \sum_{\text{KC}=1}^{i-1} \text{TL}(\text{KC}) \text{SUMK}$$

Ecuación del desplazamiento a la mitad de la cruzja.- En esta sección del programa aplicaremos en cada una de las cruzjas cualquiera de las ecuaciones- ( 3-38 ), ( 3-39 ), ( 3-40 ) y ( 3-41 ) dependiendo de las condiciones de apoyo de la trabe de cimentación de que se trate. Para identificar cuál de estas ecuaciones utilizar acudiremos a los coeficientes bandera de los nudos de cimentación, es decir, barriendo las cruzjas comenzando por un extremo y después el del otro nudo, para después de las cuatro ecuaciones codificadas seleccionar la adecuada. Cada vez que se ejecuta una ecuación se aumenta en uno el índice "k" que es el contador del número de renglones de la matriz.

Ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales.- Esta ecuación es única- en el análisis del marco y genera el último renglón de la matriz de rigideces. En la ecuación ( 3-42A ) tenemos que existen nuevamente sumatorias en sus coeficientes y que resolveremos en la misma forma como se hizo anteriormente. -- Las variables que se generan son :

$$\text{SUMI} = \sum_{j=1}^{NQ} \text{W}(i,j)$$

$$\text{SUMT} = \sum_{i=1}^N \text{PE}(i)$$

$$\text{SUMB} = \sum_{i=1}^{N-1} (\text{SUMI}) \text{TL}(i)$$

Sustitución en el método de rigideces.- Hasta este momento se han generado ya el total de renglones de la matriz, pero el número de incógnitas es mayor que este número debido a los coeficientes de desplazamientos verticales de las columnas y los coeficientes de desplazamientos al centro de las crujeas, obtenidos en la parte del análisis estructural. Es ahora cuando haremos la compatibilidad de deformaciones sustituyendo en dichos términos los hundimientos obtenidos en la sección correspondiente del programa. De esta forma eliminamos estas incógnitas extras ya que los hundimientos están en función sólo de las reacciones del terreno, quedando ya el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

Formación de la matriz.- Hasta ahora se han formado los elementos de la matriz en su totalidad pero únicamente como elementos aislados. En esta parte del programa se genera una variable  $A(i,j)$  que representa a los elementos de la matriz y que igualaremos a los elementos ya calculados, acomodados según el orden mencionado al principio de este capítulo.

Se genera también una variable  $B(K)$  que representa a los elementos de la matriz de términos independientes y que se igualan a los términos ya calculados en cada ecuación.

Solución del sistema de ecuaciones.- Se ha formado entonces un sistema de ecuaciones expresado en forma matricial como sigue :

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

Como ya se mencionó, se resuelve el sistema con un programa de biblioteca que utiliza el método iterativo de Gauss, y que no describiremos en este trabajo por no desviar la atención de nuestro problema. Se obtiene como resultado la matriz  $\begin{bmatrix} X \end{bmatrix}$  cuyos elementos son los valores de los giros y de las reacciones del terreno. A estos elementos los llamaremos  $X(i)$ .

Obtención de hundimientos como resultado.- Únicamente sustituiremos los elementos  $X(i)$  correspondientes a las reacciones del suelo en las ecuaciones

( 4-15 ) y ( 4-16 ) obteniendo así los hundimientos que llamaremos DELTA(i) y ZETA(i) respectivamente.

Obtención de los momentos a la izquierda y a la derecha en cada trabe.-

Se sustituyen los elementos X(i) en las ecuaciones ( 3-17A ), ( 3-18A ) ---- ( 3-23A ) y ( 3-24A ) obtenidas en el análisis estructural para obtener momentos a la izquierda y a la derecha respectivamente en cada trabe, barriendolo el marco primero en cada nivel de izquierda a derecha y despues en todos los niveles de abajo a arriba.

Obtención de los momentos abajo y arriba en cada columna.- De la misma-

forma, se sustituyen los elementos X(i) que corresponden a los giros en las ecuaciones ( 3-25A ) y ( 3-25B ) para momentos abajo y arriba respectivamente.

Como última parte del programa se les asigna un valor de cero a todas las variables que intervienen en la formación de las matrices para entonces direccionar el programa hacia el principio del mismo para así poder resolver varios marcos en una sola corrida del programa.

Al final del presente capítulo, presentamos el listado del programa.

## 6.2.- Operación del Programa

Este programa fué codificado para operar con un rango de cada variable igual a 25. Una forma sencilla de estimar el rango necesario de las variables es valuando el número de ecuaciones del sistema con la expresión (6-1)-

$$NE = \left[ (N \times NQ) + (2N) - 1 \right] - NA \dots (6-1)$$

donde :

- NE = Número de ecuaciones
- N = Número de ejes de columnas
- NQ = Número de pisos o niveles
- NA = Número de nudos articulados

Si el rango necesario resultara mayor de 25 unicamente restará modificar la instrucción DIMENSION para todas las variables con el rango requerido.

Una vez revisada la limitante anterior se procede a proporcionar los datos en el orden señalado :

#### 1.- Número de ejes de columnas y número de pisos

Estos datos se perforan en una sola tarjeta en un formato " 3 I 4 ", -- siendo el primer valor el número de ejes de columnas ( N ), el segundo el número de pisos que se analizarán ( NQ ) incluyendo la cimentación, y por último el número total de niveles del marco ( NJ ).

#### 2.- Distancia entre cada eje de columnas

Estas distancias se proporcionan en metros, de izquierda a derecha de la estructura. Se dan en un formato " 8 F 10.5 " pudiéndose perforar hasta 8 valores por tarjeta y en tantas tarjetas como sea necesario.

#### 3.- Alturas de columnas

Estas alturas son entre los ejes de cada nivel dándose de abajo hacia arriba. Se proporcionan en metros en un formato " 8 F 10.5 " .

#### 4.- Cargas en cada una de las trabes

Las cargas se dan en ton/m y la forma de proporcionarlas es por cada nivel de izquierda a derecha y comenzando de la cimentación hacia arriba. Se perforarán en un formato " 8 F 10.5 " hasta 8 datos por tarjeta ocupando las tarjetas necesarias por cada nivel. Para cambiar de nivel deberá iniciarse en la siguiente tarjeta.

#### 5.- Módulo de elasticidad de cada trabe

Se dan en Kg/cm<sup>2</sup>, de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba al igual que en el inciso anterior. Se perforan los datos en un formato exponencial " 8 E 10.5 " .

#### 6.- Módulo de elasticidad de cada columna

Se dan en kg/cm<sup>2</sup> en un formato " 8 E 10.5 " al igual como se hizo en el número 4.

7.- Momento de inercia en cada trabe.

Se dan en cm<sup>4</sup> en un formato " 8 E 10.5 " al igual como se hizo en el número 4.

8.- Momento de inercia de columnas.

Se dan en cm<sup>4</sup> en un formato " 8 E 10.5 " al igual que el número 4.

9.- Coeficientes bandera de cada nudo.

Se deberá perforar el valor "0" para cuando se trate de un nudo continuo y el valor "1" para cuando el nudo sea articulado. Estos valores se perforarán en un formato " 20 I 4 " donde podrán darse hasta 20 datos por tarjeta. Primero de proporcionar los coeficientes bandera de izquierda a derecha comenzando por los del primer nivel y de la misma forma para cada uno de los niveles superiores.

10.- Número de reacciones y número de estratos del terreno.

El número de reacciones del suelo está dado por la expresión

$$M = 2N - 1 \quad \text{donde : } N = \text{es el número de ejes de columnas.}$$

este valor, junto con el número de estratos del suelo, se perforan en una sola tarjeta en un formato " 2 I 4 " siendo el primer dato el valor de M y el segundo el número de estratos.

11.- Espesor de cada estrato de suelo.

Se dan en metros comenzando desde el estrato superior hasta el inferior y se perforarán en un formato " 8 F 10.5 " .

12.- Módulo de variación volumétrica en cada estrato del suelo.

Se proporciona un valor del módulo de variación bajo cada reacción y en cada estrato de suelo, en m<sup>2</sup>/ton. Se dan en un formato " 8 F 10.5 " , de izquierda a derecha comenzando por el estrato superior y despues de la misma forma para estratos inferiores.

### 3.- Valores de influencia de los primeros estratos.

Se proporcionan los valores de influencia en un formato " 8 F 10.5" de izquierda a derecha en el primero y segundo estrato para una fuerza colocada en la primera reacción. Se repite lo mismo para fuerzas en cada una de las reacciones.

### 6.3.- Interpretación de Resultados.

Obtendremos un listado de resultados para cada uno de los marcos que analizemos en cada corrida del programa. En cada listado se imprimen primeramente las características y las propiedades físicas de los elementos de la estructura, mismas que fueron proporcionadas como datos.

Inmediatamente después de estas se imprimen las fuerzas concentradas en toneladas, que fueron calculadas por el programa. Se imprimen en un formato " 10 ( 3 X, 10.3 ) " de izquierda a derecha de la estructura.

En seguida se imprimen los coeficientes bandera de todos los nudos, indicando por niveles la ubicación de éstos en el marco. Esta es una forma de ilustrar la forma del marco que se está analizando.

A continuación se imprimen las propiedades del suelo que fueron proporcionadas como datos. Se imprimen los valores de influencia de los primeros dos estratos y además los que fueron calculados por el programa para el resto de los estratos del suelo. Cada bloque representa dichos valores bajo cada reacción y en cada uno de los estratos debidos a una fuerza aplicada en cada columna o al centro del claro.

Después se imprimen todos los elementos de la matriz por cada renglón, los elementos del vector de términos independientes y el vector solución del sistema. Todos ellos se imprimen con un formato " 8 F 15.6 ".

En seguida se imprimen las reacciones del terreno bajo las columnas, en un formato " 8 F 15.6 " en orden de izquierda a derecha. Se imprimen tam

bién las reacciones al centro de las crujiás, con el mismo formato, y ambas se dan en ton/m.

Después se imprimen los giros de los nudos en radianes, de izquierda a derecha en el primer nivel y después lo mismo para los niveles superiores.- El valor del giro en los nudos articulados aparecen como "0.0" ya que no fué calculado en el programa. Se imprimieron en un formato " 8 F 15.6 ".

Posteriormente se presentan los hundimientos del terreno, en m, primeramente bajo las columnas, de izquierda a derecha, y al siguiente renglón - para los hundimientos al centro de las crujiás también de izquierda a derecha. Se imprimieron con un formato " 8 F 15.6 ".

Los momentos a la izquierda y a la derecha de cada trabe se dan en ton m y se presentan por pares, donde el primer valor es el del momento en el extremo izquierdo de la trabe y el segundo es el del extremo derecho. - Así por pares se recorren cada una de las trabes de izquierda a derecha comenzado por el primer nivel y después lo mismo para el resto de los niveles. Se imprimieron en un formato " 4 ( F 10.4, 3X, F 10.4 ) ".

Los momentos abajo y arriba en cada columna se dan en ton m y cada par - representa una columna donde el primer valor es el del momento en el extremo inferior de la columna y el segundo valor es el del momento en el extremo superior. Se recorren las columnas de izquierda a derecha primero en el primer nivel y después en los niveles superiores. Se imprimieron en un formato - " 4 ( F 10.4, 3X, F 10.4 ) ".

















```

F(N-1, J, K) = T(K(N-1, J)) * CC(N-1, J, J)
F(N, NO, K) = 2.0 * K * (N, J)
F(N, NO, J, K) = CA(N, NO) - 1 * CC(N, J, J)
D(N-1, K) = 5.0 * A(N-1, J) * CD(N-1, J) / IL(N-1)
Z(N, K) = 6.0 * K(N-1, N) * ACU(N-1, J) / IL(N-1)
Z(K) = N * V(1, N) * CA(N-1, J) * (L(N-1) * 2) / 2.0
EQUACION DE EQUILIBRIO DE FUERZAS CORTANTES EN LA CRUJIA
PARA I=1 UNA SOLA CRUJIA
474 K=K+1
SUMD=0.0
SUMI=0.0
J=484
F(1, J, K) = ((CC(1, J) * 2.0 * C(2, J)) + (CC(2, J) * CC(1, J))) * K(1, J)
F(2, J, K) = ((CC(1, J) * CC(2, J)) + (CC(2, J) * 2.0 * C(1, J))) * K(1, J)
SUMD = SUMD + ((CC(1, J) * C(2, J)) + (CC(2, J) * C(1, J))) * K(1, J)
SUMI = SUMI + I(1, J)
484 CONTINUE
J=5, 0 * SUMD / IL(1)
J(2, K) = 6.0 * SUMD / IL(1)
D(2, K) = ((IL(1) * 2) * (67.0 * CC(1, 1) * C(2, 1)) - (13.0 * CC(2, 1) * C(1, 1))) / 2072.0
Z(2, K) = ((IL(1) * 2) * (76.0 * (CC(1, 1) * C(2, 1) * 13.0) - (67.0 * CC(2, 1) * C(1, 1)))) / 3072.0
I(1, K) = ((IL(1) * 2) * (48.0 * (11.0 * CC(1, 1) * CA(2, 1)) - (11.0 * CC(2, 1) * C(1, 1)))) / 12.0
SUMC=0.0
J=485 K=2, N
SUMC = SUMC + ((C(2, KK) * CA(1, KK)) - (CC(1, KK) * CA(2, KK))) * A(1, KK)
486 CONTINUE
C(K) = ((-IL(1) * 2) * SUMI / 2.0) + ((IL(1) * 2) * ((CC(2, 1) * CA(1, 1)) - (CC(1, 1) * CA(2, 1)))) * N(1, 1) / 2.0 + (SUMC * (IL(1) * 2) / 2.0) - (PF(1) * IL(1))
PARA I=1 UNA SOLA CRUJIA
IF(N.E.2) GO TO 490
J=495 I=2, N-1
SUMD=0.0
SUMI=0.0
SUMJ=0.0
SUMK=0.0
SUML=0.0
SUMM=0.0
SUMN=0.0
K=K+1
J=505 J=1, N
F(1, J, K) = ((2.0 * C(1, J) * CC(1, J)) + (CC(1, J) * C(1, J))) * K(1, J)
F(1, J, K) = ((2.0 * C(1, J) * CC(1, J)) + (CC(1, J) * C(1, J))) * K(1, J)
SUMD = SUMD + ((C(1, J) * C(1, J)) + (CC(1, J) * C(1, J))) * K(1, J)
SUMI = SUMI + I(1, J)
505 CONTINUE
J=506 K=1, 1
SUMI = SUMI + PE(KM)
506 CONTINUE
J=500 C=1, (-)
SUMI=0.0
J=510 J=1, N
SUMK = SUMK + V(KU, J)
510 CONTINUE
SUML = SUML + (IL(KC) * SJ4K)
I(KC, K) = IL(I) * IL(KC) / 2.0
500 CONTINUE
J=511 J=1, N
SUML = SUML + ((CC(1, J) * CA(1, J)) - (CC(1, J) * CA(1, J))) * N(1, J)
511 CONTINUE
C(K) = -IL(I) * SUML - ((IL(1) * IL(1) * SUMI / 2.0) - (IL(1) * IL(1) * SUML / 2.0)) - (I

```

```

002: 050: 1
002: 051: 1
002: 052: 3
002: 053: 4
002: 054: 4
002: 055: 4
002: 056: 3
002: 057: 5
002: 058: 5
002: 059: 5
002: 060: 1
002: 061: 2
002: 062: 2
002: 063: 6
002: 064: 5
002: 065: 5
002: 066: 2
002: 067: 3
002: 068: 1
002: 069: 1
002: 070: 5
002: 071: 3
002: 072: 0
002: 073: 0
002: 074: 1
002: 075: 1
002: 076: 1
002: 077: 1
002: 078: 3
002: 079: 3
002: 080: 1
002: 081: 1
002: 082: 1
002: 083: 1
002: 084: 1
002: 085: 1
002: 086: 1
002: 087: 1
002: 088: 1
002: 089: 1
002: 090: 1
002: 091: 1
002: 092: 1
002: 093: 1
002: 094: 1
002: 095: 1
002: 096: 1
002: 097: 1
002: 098: 1
002: 099: 1
002: 100: 1
002: 101: 1
002: 102: 1
002: 103: 1
002: 104: 1
002: 105: 1
002: 106: 1
002: 107: 1
002: 108: 1
002: 109: 1
002: 110: 1
002: 111: 1
002: 112: 1
002: 113: 1
002: 114: 1
002: 115: 1
002: 116: 1
002: 117: 1
002: 118: 1
002: 119: 1
002: 120: 1
002: 121: 1
002: 122: 1
002: 123: 1
002: 124: 1
002: 125: 1
002: 126: 1
002: 127: 1
002: 128: 1
002: 129: 1
002: 130: 1
002: 131: 1
002: 132: 1
002: 133: 1
002: 134: 1
002: 135: 1
002: 136: 1
002: 137: 1
002: 138: 1
002: 139: 1
002: 140: 1
002: 141: 1
002: 142: 1
002: 143: 1
002: 144: 1
002: 145: 1
002: 146: 1
002: 147: 1
002: 148: 1
002: 149: 1
002: 150: 1
002: 151: 1
002: 152: 1
002: 153: 1
002: 154: 1
002: 155: 1
002: 156: 1
002: 157: 1
002: 158: 1
002: 159: 1
002: 160: 1
002: 161: 1
002: 162: 1
002: 163: 1
002: 164: 1
002: 165: 1
002: 166: 1
002: 167: 1
002: 168: 1
002: 169: 1
002: 170: 1
002: 171: 1
002: 172: 1
002: 173: 1
002: 174: 1
002: 175: 1
002: 176: 1
002: 177: 1
002: 178: 1
002: 179: 1
002: 180: 1
002: 181: 1
002: 182: 1
002: 183: 1
002: 184: 1
002: 185: 1
002: 186: 1
002: 187: 1
002: 188: 1
002: 189: 1
002: 190: 1
002: 191: 1
002: 192: 1
002: 193: 1
002: 194: 1
002: 195: 1
002: 196: 1
002: 197: 1
002: 198: 1
002: 199: 1
002: 200: 1

```





```

IF(H,LE,2)GO TO 540
DO 550 I=2,N-1
R(I,K)=IL(I-1)+TL(I)
550 CONTINUE
545 DO 555 I=1,H-1
T(I,K)=1.0+TL(I)
555 CONTINUE
SUM1=0.0
DO 560 I=1,N-1
SUM1=0.0
DO 565 J=1,N
SUM1=SUM1+R(I,J)
565 CONTINUE
SUM1=TL(I)*SUM1+SUM1
560 CONTINUE
SUM1=0.0
DO 566 I=1,N
SUMT=SUM1+PE(I)
566 CONTINUE
C
C(K)=(4.0*SUM1)+(4.0*SUMT)
SUSTITUCION EN EL METODO DE RIGIDECES
VF=K
DO 570 K=1,NT
DO 575 I=1,N-1
DO 580 KC=1,N-1
SUM1=RO(I,KC)*D(KC,K)+NZ(I,KC)*Z(KC,K)
R(I,K)=R(I,K)+SUM1
580 CONTINUE
SUM1=RO(I,I)*D(N,K)
R(I,K)=R(I,K)+SUM1
575 CONTINUE
DO 585 I=1,N-1
DO 590 KC=1,N-1
SUM2=TO(I,KC)*D(KC,K)+TZ(I,KC)*Z(KC,K)
T(I,K)=T(I,K)+SUM2
590 CONTINUE
SUM2=TO(I,I)*D(N,K)
T(I,K)=T(I,K)+SUM2
585 CONTINUE
570 CONTINUE
C
FORMACION DE LA MATRIZ
DO 595 I=1,NT
JA=I
DO 600 J=1,NT
DO 605 J=1,H
IF(LA4(J,J3))GO6,606,606,605
606 A(I,JA)=F(J,JO,I)
JA=JA+1
605 CONTINUE
606 CONTINUE
595 CONTINUE
DO 610 I=1,NT
JO=JA
DO 615 J=1,N
A(I,JO)=R(I,I)
JO=JO+1
615 CONTINUE
610 CONTINUE
DO 620 I=1,NT
JJ=JO
DO 625 J=1,H-1

```

|     |     |   |   |
|-----|-----|---|---|
| 002 | 070 | 1 | 0 |
| 002 | 071 | 1 | 0 |
| 002 | 072 | 1 | 0 |
| 002 | 073 | 1 | 0 |
| 002 | 074 | 1 | 0 |
| 002 | 075 | 1 | 0 |
| 002 | 076 | 1 | 0 |
| 002 | 077 | 1 | 0 |
| 002 | 078 | 1 | 0 |
| 002 | 079 | 1 | 0 |
| 002 | 080 | 1 | 0 |
| 002 | 081 | 1 | 0 |
| 002 | 082 | 1 | 0 |
| 002 | 083 | 1 | 0 |
| 002 | 084 | 1 | 0 |
| 002 | 085 | 1 | 0 |
| 002 | 086 | 1 | 0 |
| 002 | 087 | 1 | 0 |
| 002 | 088 | 1 | 0 |
| 002 | 089 | 1 | 0 |
| 002 | 090 | 1 | 0 |
| 002 | 091 | 1 | 0 |
| 002 | 092 | 1 | 0 |
| 002 | 093 | 1 | 0 |
| 002 | 094 | 1 | 0 |
| 002 | 095 | 1 | 0 |
| 002 | 096 | 1 | 0 |
| 002 | 097 | 1 | 0 |
| 002 | 098 | 1 | 0 |
| 002 | 099 | 1 | 0 |
| 002 | 100 | 1 | 0 |
| 002 | 101 | 1 | 0 |
| 002 | 102 | 1 | 0 |
| 002 | 103 | 1 | 0 |
| 002 | 104 | 1 | 0 |
| 002 | 105 | 1 | 0 |
| 002 | 106 | 1 | 0 |
| 002 | 107 | 1 | 0 |
| 002 | 108 | 1 | 0 |
| 002 | 109 | 1 | 0 |
| 002 | 110 | 1 | 0 |
| 002 | 111 | 1 | 0 |
| 002 | 112 | 1 | 0 |
| 002 | 113 | 1 | 0 |
| 002 | 114 | 1 | 0 |
| 002 | 115 | 1 | 0 |
| 002 | 116 | 1 | 0 |
| 002 | 117 | 1 | 0 |
| 002 | 118 | 1 | 0 |
| 002 | 119 | 1 | 0 |
| 002 | 120 | 1 | 0 |
| 002 | 121 | 1 | 0 |
| 002 | 122 | 1 | 0 |
| 002 | 123 | 1 | 0 |
| 002 | 124 | 1 | 0 |
| 002 | 125 | 1 | 0 |
| 002 | 126 | 1 | 0 |
| 002 | 127 | 1 | 0 |
| 002 | 128 | 1 | 0 |
| 002 | 129 | 1 | 0 |
| 002 | 130 | 1 | 0 |
| 002 | 131 | 1 | 0 |
| 002 | 132 | 1 | 0 |
| 002 | 133 | 1 | 0 |
| 002 | 134 | 1 | 0 |
| 002 | 135 | 1 | 0 |
| 002 | 136 | 1 | 0 |
| 002 | 137 | 1 | 0 |
| 002 | 138 | 1 | 0 |
| 002 | 139 | 1 | 0 |
| 002 | 140 | 1 | 0 |
| 002 | 141 | 1 | 0 |
| 002 | 142 | 1 | 0 |
| 002 | 143 | 1 | 0 |
| 002 | 144 | 1 | 0 |
| 002 | 145 | 1 | 0 |
| 002 | 146 | 1 | 0 |
| 002 | 147 | 1 | 0 |
| 002 | 148 | 1 | 0 |
| 002 | 149 | 1 | 0 |
| 002 | 150 | 1 | 0 |









```

3 J3P0 J T I E S U L Y E ( I I , U L , J , X )
2 I 4 C 4 3 I U J J L ( 2 5 , 2 5 ) , 3 ( 2 5 ) , 2 ( 2 5 ) , I P 3 ( 2 5 )
- J 4 H O I I 3 ;
I = 4 I
I P = I P 3 ( I )
K ( I ) = J ( I )
J ) 2 I = 2 , 4
I P = I P 3 ( I )
J J = 0 , 0
J ) 1 J K I , I - 1
J J 4 = S U 4 + U L ( I P , J ) * K ( J )
I ( I ) = I ( I P ) - S I I 4
I P = I P 3 ( I )
I ( I ) = X ( I ) / U L ( I P , I )
J J 4 I I A K = 2 , N
I = 4 I - I 8 A C
I V A D E 3 ) E ( 4 - 1 ) H A J T A I
I P = I P 3 ( I )
3 J = 0
J ) 3 J = 1 + 1 / 4
J J 4 = S U 4 + U L ( I P , J ) * K ( J )
I ( I ) = ( K ( I ) - S U 4 ) / U L ( I P , I )
I E I J R )
E 4 0

```

C

```

START OF SEGMENT 004
009 0000010
009 0000010
009 0000010
009 0000010
009 0000015
009 0000015
009 0000012
009 0000010
009 0000013
009 0000011
009 0000013
009 0000012
009 0000012
009 0000015
009 0000015
009 0000010
009 0000015
009 0000015
009 0000014
009 0000010
009 0000013
009 0000011
009 0000014
009 0000014
SEGMENT 004 IS 2034 LUNG

```

```

SUBROUTINE IMPROY (N, A, UL, J, X, I DIGIT)
DIMENSION A(25,25), JL(25,25), S(25), X(25), HE(25), DX(25)
DOUBLE PRECISION SU4
Y=NT
EPS=1.0*10**(-8)
IIMAX=5
XNORM=0.0
DO 1 I=1,N
1 XNORM=MAX1(XNORM,ABS(X(I)))
IF(XNORM.NE.0)GO TO 3
DIGITS=-ALOG10(EPS)
IDIGIT=DIGITS
GO TO 10
3 DO 9 ITER=1,IIMAX
DO 5 I=1,N
SUM=0.0
DO 4 J=1,N
4 SUM=SUM+A(I,J)*X(J)
SUM=SUM-I)*SUM
5 RE(I)=SUM
CALL SOLVE (N,UL,HE,DX)
DXNORM=0.0
DO 6 I=1,N
TEMP=X(I)+X(I)
6 DXNORM=MAX1(DXNORM,ABS(X(I)-TEMP))
CONTINUE
IF(ITER.LE.1)GO TO 3
DIGITS=-ALOG10(MAX1(DXNORM,XNORM,EPS))
IDIGIT=DIGITS
9 IF(DXNORM.EPS*XNORM)10,10,9
CONTINUE
C LAS ITERACIONES NO CONVERGIERON
CALL STYG (3)
10 RETURN
END

```

```

          STATE OF SEGMENT 004
004:0000:0
004:0000:0
004:0000:0
004:0000:0
004:0000:5
004:0003:3
004:0004:2
004:0005:0
004:0006:0
004:0007:3
004:0008:4
004:0009:2
004:0010:0
004:0010:3
004:0011:0
004:0013:0
004:0013:3
004:0015:0
004:0016:3
004:0017:0
004:0018:0
004:0020:2
004:0021:1
004:0024:2
004:0025:1
004:0026:2
004:0027:0
004:0028:0
004:0028:0
004:0029:2
004:0032:1
004:0034:2
004:0035:3
004:0036:1
004:0038:5
004:0038:4
004:0039:3
004:0039:3
004:0040:3
004:0041:2
SEGMENT 004 IS 004A LUN6

```





# CAPITULO VII

## C A P I T U L O   V I I

### EJEMPLOS DE APLICACION

A continuación presentamos una serie de ejemplos, de los cuales dos de ellos, están resueltos "a mano", paso a paso, y el resto solo se presentan con los datos y el listado de resultados de la computadora.

#### Ejemplo 1 :

Se trata de una estructura para un servicio de lavado y lubricación de autos. Consideramos un marco de concreto formado por columnas, de 30 x 30 cm, traveses de 30 x 60 cm, y losa maciza de 15 cm de espesor, de 8.0 m de ancho. Se suponen articulaciones en las uniones de las columnas con la trabe de cimentación.

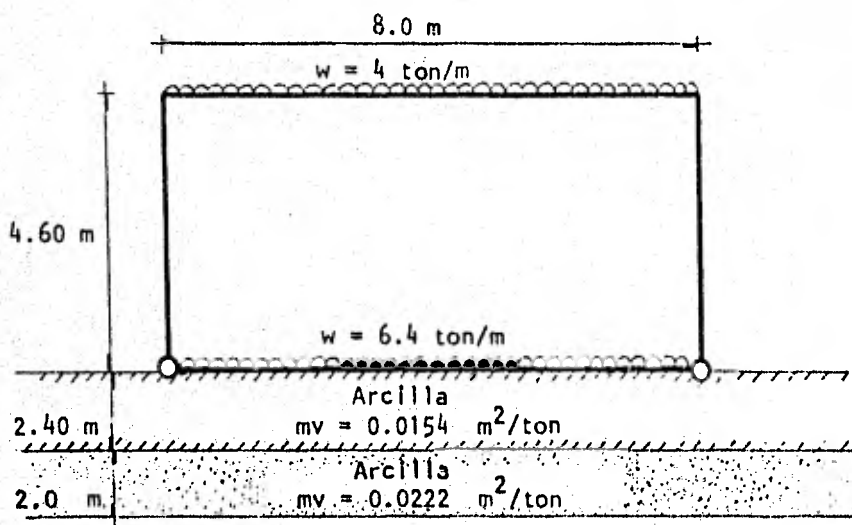


Fig. 7.1.- Croquis del Marco

Módulo de elasticidad del concreto :

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'c} = 10\,000 \sqrt{250} = 1.5811 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

Momento de inercia de traveses :

$$\text{trabe } I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 60^3}{12} = 5.4 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$\text{Losa } I = \frac{bh^3}{12} = \frac{800 \times 15^3}{12} = 2.25 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_t(1,1) = I_t(1,2) = 2(5.4 \times 10^5) + 2.25 \times 10^5 = 1.305 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

Rigidez de traveses :

$$K = \frac{EI}{L} = \frac{(1.5811 \times 10^5) (1.305 \times 10^6)}{800} = 2.5791 \times 10^8 \text{ kg-cm} = 2.5791 \times 10^3 \text{ ton-m}$$

$$\therefore K_t(1,1) = K_t(1,2) = 2.5791 \times 10^3 \text{ ton-m}$$

Momento de inercia de columnas :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 30^3}{12} = 6.75 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_c(1,1) = I_c(2,1) = 2(6.75 \times 10^4) = 1.35 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

Rigidez de columnas :

$$K = \frac{EI}{L} = \frac{(1.5811 \times 10^5) (1.35 \times 10^5)}{460} = 4.64018 \times 10^7 \text{ kg-cm}$$

$$\therefore K_c(1,1) = K_c(2,1) = 4.64018 \times 10^2 \text{ ton-m}$$

Equilibrio de momentos en cada nudo

En los nudos de cimentación no se planteará esta condición puesto que se trata de articulaciones.

En el nudo (1,2) :

Rigidez del nudo ( Ecuación ( 3-28 ) )

$$K_n(1,2) = B(2,2) K_t(1,2) + B(1,1) K_c(1,1) = 1.0 (2.5791 \times 10^3) + 0.75 (4.64018 \times 10^2) = 2.9271 \times 10^3 \text{ ton-m}$$

De la ecuación ( 3-27 ) :

$$2(2.9271 \times 10^3) \phi(1,2) + 1.0 (2.5791 \times 10^3) \phi(2,2) - \frac{6(1.0)}{8} (2.5791 \times 10^3) \delta(1) + 6(1.0) \frac{(2.5791 \times 10^3)}{8} \delta(2) = - \frac{(1.0) (4.0) (8)^2}{12}$$

Y simplificando :

$$5.8542 \times 10^3 \phi(1,2) + 2.5791 \times 10^3 \phi(2,2) - 1.9343 \times 10^3 \delta(1) + 1.9343 \times 10^3 \delta(2) = -21.33 \quad \dots (1)$$

En el nudo (2,2) :

Rigidez del nudo ( Ecuación ( 3-28 ) )

$$K_n(2,2) = B(1,2) k_t(1,2) + B(2,1) K_c(2,1) = (1.0) (2.5791 \times 10^3) + 0.75 (4.64018 \times 10^2) = 2.9271 \times 10^3 \text{ ton-m}$$

De la ecuación ( 3-27 ) :

$$2(2.9271 \times 10^3) \phi(2,2) + (1.0) (2.5791 \times 10^3) \phi(1,2) - \frac{6(1.0)}{8} (2.5791 \times 10^3) \delta(1) + 6(1.0) \frac{(2.5791 \times 10^3)}{8} \delta(2) = \frac{(1.0) (4) (8)^2}{12}$$

Y simplificando :

$$5.8542 \times 10^3 \phi(2,2) + 2.5791 \times 10^3 \phi(1,2) - 1.9343 \times 10^3 \delta(1) + 1.9343 \times 10^3 \delta(2) = 21.33 \quad \dots (2)$$

#### Equilibrio de cortantes en la cruzja

De la ecuación ( 3-32 )

$$\{2(1) (1) + (1) (1)\} (2.5791 \times 10^3) \phi(1,2) + \{(1)(1) + 2(1)(1)\}$$

$$\begin{aligned}
 & (2.5791 \times 10^3) \phi(2,2) - \frac{6}{8} \{ (1)(1) + (1)(1) \} (2.5791 \times 10^3) \delta(1) + \\
 & + \frac{6}{8} \{ (1)(1) + (1)(1) \} (2.5791 \times 10^3) \delta(2) - \frac{(8)^2}{3072} (672) r(1) - \frac{(8)^2}{3072} (96) r(2) - \\
 & - \frac{(8)^2}{192} (48) t(1) = - \frac{(8)^2}{12} (6.4 + 4) - \frac{(8)^2}{12} \{ (1)(1)(4) \} + \frac{(8)^2}{12} \{ (1)(1)(4) \}
 \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$\begin{aligned}
 & 7.7373 \times 10^3 \phi(1,2) + 7.7373 \times 10^3 \phi(2,2) - 3.8686 \times 10^3 \delta(1) + \\
 & + 3.8686 \times 10^3 \delta(2) - 14 r(1) - 2 r(2) - 16 t(1) = - 332.8 \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

#### Obtención del desplazamiento a la mitad de la cruzía

De la ecuación (3-41) para una barra con los dos extremos articulados :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(2.5791 \times 10^3)}{8} \delta(1) - \frac{(2.5791 \times 10^3)}{8} \delta(2) + \frac{2(2.5791 \times 10^3)}{8} \eta(1) + \\
 & + \frac{23}{6144} (8)^2 r(1) + \frac{19}{1024} (8)^2 t(1) + \frac{23}{6144} (8)^2 r(2) = \frac{5}{192} (6.4) (8)^2
 \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$\begin{aligned}
 & - 3.2238 \times 10^2 \delta(1) - 3.2238 \times 10^2 \delta(2) + 6.4477 \times 10^2 \eta(1) + \\
 & + 2.3958 \times 10^{-1} r(1) + 1.1875 t(1) + 2.3958 \times 10^{-1} r(2) = 10.667 \quad \dots (4)
 \end{aligned}$$

#### Equilibrio de fuerzas verticales

De la ecuación (3-42) :

$$8 r(1) + 2(8) t(1) + (8) r(2) = 4(8)(4) + 4(8)(6.4)$$

Y simplificando :

$$8 r(1) + 16 t(1) + 8 r(2) = 332.8 \quad \dots (5)$$

Cálculo de hundimientos del suelo

Haciendo un cambio de variable

$$\delta(1) = \xi(1) \quad r(1) = q(1)$$

$$n(1) = \xi(2) \quad t(1) = q(2)$$

$$\delta(2) = \xi(3) \quad r(2) = q(3)$$

Consideramos como datos los siguientes valores de influencia :

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| ↓        |          |          |
| 0.020723 | 0.000020 | 0.000001 |
| 0.002581 | 0.000147 | 0.000024 |
|          | ↓        |          |
| 0.000041 | 0.010362 | 0.000041 |
| 0.000294 | 0.001291 | 0.000294 |
|          |          | ↓        |
| 0.000001 | 0.000020 | 0.020723 |
| 0.000024 | 0.000147 | 0.002581 |

De la ecuación ( 4-13 ) tenemos que :

$$\begin{aligned} \xi(1) = & mv(1,1) H(1) \{ I'(1,1)_1 I_t(1) q(1) + I'(1,1)_2 I_t(2) q(2) + \\ & + I'(1,1)_3 I_t(3) q(3) \} + mv(1,2) H(2) \{ I'(1,2)_1 I_t(1) q(1) + \\ & + I'(1,2)_2 I_t(2) q(2) + I'(1,2)_3 I_t(3) q(3) \} \end{aligned}$$

Sustituyendo valores tenemos que :

$$\begin{aligned} \xi(1) = & (0.0154)(2.4) \{ (0.020723)(2) q(1) + (0.000041)(4) q(2) + \\ & + (0.00001)(2) q(3) \} + (0.0222)(2.0) \{ (0.002581)(2) q(1) + (0.000294)(4) q(2) + \\ & + (0.000024)(2) q(3) \} \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$\xi(1) = 0.001761 q(1) + 0.000058 q(2) + 0.000002 q(3)$$

haciendo el cambio de variable :

$$\delta(1) = 0.001761 r(1) + 0.000058 t(1) + 0.000002 r(2) \quad \dots\dots (6)$$

De la ecuación ( 4-13 )

$$\begin{aligned} \xi(2) = & mv(2,1) H(1) \{ l'(2,1)_1 l_t(1) q(1) + l'(2,1)_2 l_t(2) q(2) + \\ & l'(2,1)_3 l_t(3) q(3) \} + mv(2,2) H(2) \{ l'(2,2)_1 l_t(1) q(1) + l'(2,2)_2 l_t(2) q(2) + \\ & l'(2,2)_3 l_t(3) q(3) \} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores :

$$\begin{aligned} \xi(2) = & (0.0154)(2.4) \{ (0.000020)(2) q(1) + (0.010362)(4) q(2) + \\ & (0.000020)(2) q(3) \} + (0.0222)(2.0) \{ (0.000147)(2) q(1) + (0.001291)(4) q(2) + \\ & (0.000147)(2) q(3) \} \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$\xi(2) = 0.000015 q(1) + 0.001761 q(2) + 0.000015 q(3)$$

haciendo el cambio de variable :

$$\eta(1) = 0.000015 r(1) + 0.001761 t(1) + 0.000015 r(2) \quad \dots\dots (7)$$

De la ecuación ( 4-13 ) :

$$\begin{aligned} \zeta(3) = & mv(3,1) H(1) \{ l'(3,1)_1 l_t(1) q(1) + l'(3,1)_2 l_t(2) q(2) + \\ & l'(3,1)_3 l_t(3) q(3) \} + mv(3,2) H(2) \{ l'(3,2)_1 l_t(1) q(1) + l'(3,2)_2 l_t(2) q(2) + \\ & l'(3,2)_3 l_t(3) q(3) \} \end{aligned}$$

Sustituyendo valores :

$$\begin{aligned} \zeta(3) = & (0.0154)(2.4) \{ (0.000001)(2) q(1) + (0.000041)(4) q(2) + \\ & (0.000001)(2) q(3) \} + (0.0222)(2.0) \{ (0.000024)(2) q(1) + \\ & (0.000004)(4) q(2) + (0.000004)(2) q(3) \} \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$r(3) = 0.000002 q(1) + 0.000058 q(2) + 0.001761 q(3)$$

haciendo el cambio de variable :

$$\delta(2) = 0.000002 r(1) + 0.000058 t(1) + 0.001761 r(2) \quad \dots\dots (8)$$

### Compatibilidad de deformaciones

Sustituyendo las ecuaciones (6), (7) y (8) en las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) tenemos que :

$$\begin{aligned} 5.8542 \times 10^3 \phi(1,2) + 2.5791 \times 10^3 \phi(2,2) - 3.40243 r(1) + 3.40243 r(2) = \\ = - 21.33 \quad \dots\dots (1') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.5791 \times 10^3 \phi(1,2) + 5.8542 \times 10^3 \phi(2,2) - 3.40243 r(1) + 3.40243 r(2) = \\ = 21.33 \quad \dots\dots (2') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.7373 \times 10^3 \phi(1,2) + 7.7373 \times 10^3 \phi(2,2) - 20.80487 r(1) + 4.80487 r(2) - \\ - 16.0 t(1) = - 332.8 \quad \dots\dots (3') \end{aligned}$$

$$- 0.31910 r(1) - 0.31910 r(2) + 2.28554 t(1) = 10.667 \quad \dots\dots (4')$$

$$8 r(1) + 8 r(2) + 16 t(1) = 332.8 \quad \dots\dots (5')$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos que :

$$\phi(1,2) = - 0.006513$$

$$\phi(2,2) = 0.006513$$

$$r(1) = 12.611324 \quad \text{ton/m}$$

$$r(2) = 12.611324 \quad \text{ton/m}$$

$$t(1) = 8.188676 \quad \text{ton/m}$$



Estos resultados se grafican en la Fig. 7.2.-

Para conocer los hundimientos sustituimos estos valores en (6), (7) y (8)

$$\delta(1) = 0.022709 \text{ m}$$

$$n(1) = 0.014799 \text{ m}$$

$$\delta(2) = 0.022709 \text{ m}$$

Estos resultados se grafican en la Fig. 7.3.-

Para obtener momentos en los extremos de las trabes

De las ecuaciones ( 3-23A ) y ( 3-24A )

$$M(1,1)(2,1) = M(2,1)(1,1) = 0.0$$

De las ecuaciones ( 3-17A ) y ( 3-18A )

$$M(1,2)(2,2) = 4.535655 \text{ ton/m}$$

$$M(2,2)(1,2) = -4.535655 \text{ ton/m}$$

Para obtener momentos en los extremos de las columnas

De la ecuación ( 3-25A )

$$M(1,1)(1,2) = M(2,1)(2,2) = 0.0$$

De la ecuación ( 3-25B )

$$M(1,2)(1,1) = -4.533223 \text{ ton/m}$$

$$M(2,2)(2,1) = 4.533223 \text{ ton/m}$$

Estos resultados se grafican en la Fig. 7.4.-

Puede observarse en la Fig. 7.2.- que las reacciones del terreno tienen la forma supuesta en la hipótesis de reacción repartida del terreno.

De la Fig. 7.3.- se observa que el hundimiento al centro de la crujías es menor que en los extremos y se debe a la flexión misma de la trabe de cimentación ante la reacción del terreno.

En la Fig. 7.4.- se aprecia que en los extremos de las barras donde -- hay una articulación el momento es nulo, mientras que en los nudos conti--- nuos es comprobable el equilibrio de momentos.

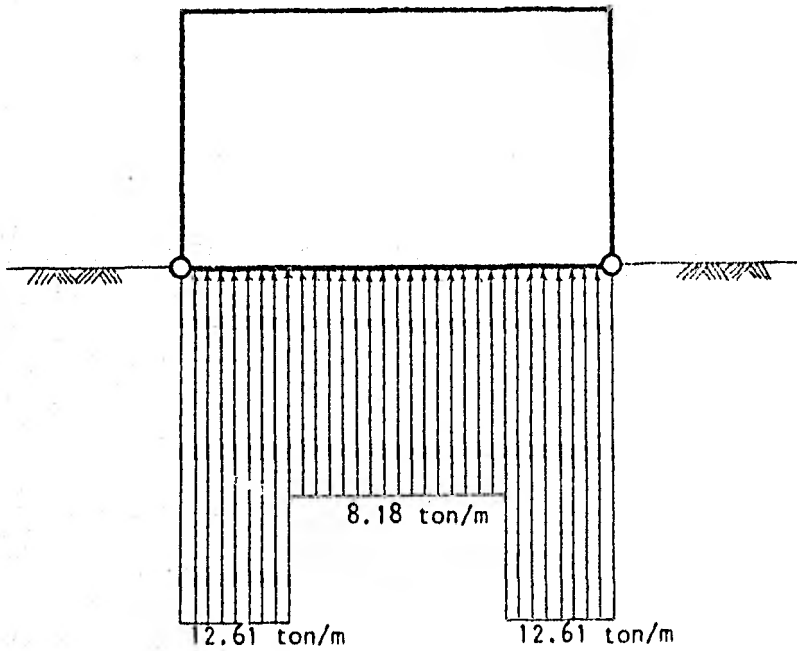


Fig. 7.2.- REACCIONES DEL TERRENO

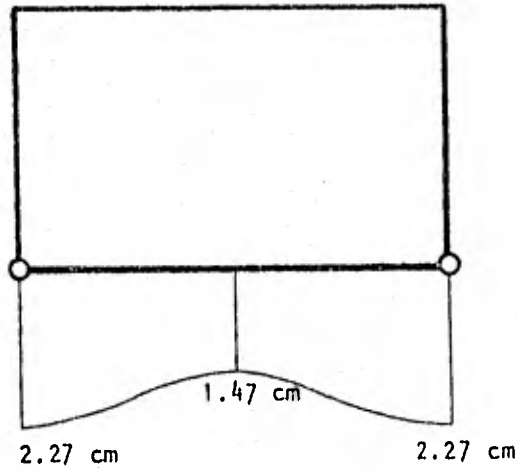


Fig. 7.3.- HUNDIMIENTOS CALCULADOS

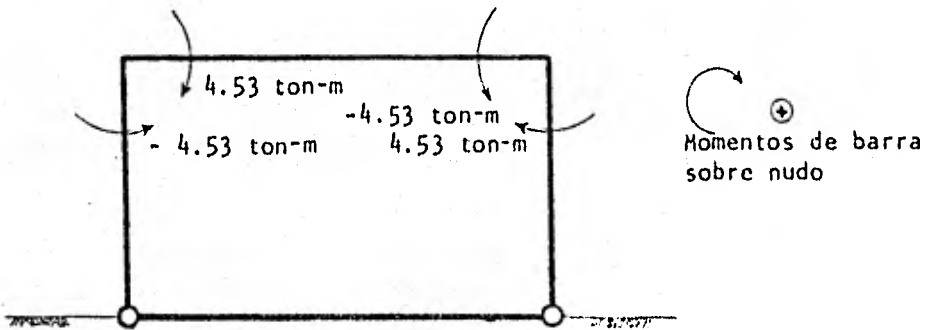


Fig. 7.4.- Momentos en los extremos de las barras

ESPEJOR DE CADA ESTRATO DE SUELO  
2.40000 2.00000

MV EN CADA ESTRATO DE SUELO  
0.01540 0.01540 0.01540  
0.02220 0.02220 0.02220

VALORES DE INFLUENCIA  
0.02072 0.00002 0.00000  
0.00258 0.00015 0.00002  
  
0.00004 0.01036 0.00004  
0.00029 0.00129 0.00029  
  
0.00000 0.00002 0.02072  
0.00002 0.00015 0.00258

MATRIZ A DE COEFICIENTES

|             |             |            |           |            |
|-------------|-------------|------------|-----------|------------|
| REGIÓN 1    |             |            |           |            |
| 5854.366467 | 2579.169375 | -3.402473  | 3.402473  | 0.000000   |
| REGIÓN 2    |             |            |           |            |
| 2579.169375 | 5854.366467 | -3.402473  | 3.402473  | 0.000000   |
| REGIÓN 3    |             |            |           |            |
| 7737.508125 | 7737.508125 | -20.804927 | 4.804927  | -16.000000 |
| REGIÓN 4    |             |            |           |            |
| 0.000000    | 0.000000    | -0.319099  | -0.319099 | 2.285780   |
| REGIÓN 5    |             |            |           |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000  | 16.000000  |

VECTOR B DE TERMINOS INDEPENDIENTES

-21.333333 21.333333 -332.900000 10.666667 332.800000

VECTOR X, SOLUCION SIN MEJORAMIENTO ITERATIVO

-0.006514 0.006514 12.612122 12.612122 0.187878

NO HAY CONVERGENCIA EN LA SUBRUTINA IMPROV

|  |           |           |           |          |
|--|-----------|-----------|-----------|----------|
| -0.006514  | 0.005514  | 12.612122 | 12.612122 | 0.187978 |
| R(I)=REACCIONES BAJO LAS COLUMNAS                    |           |           |           |          |
| 12.612122  | 12.612122 |           |           |          |
| T(I)=REACCIONES AL CENTRO DE LAS CRUJIAS             |           |           |           |          |
| 0.187878   |           |           |           |          |
| P(I,J)=GIROS EN LOS NUDOS                            |           |           |           |          |
| 0.000000   | 0.000000  |           |           |          |
| -0.006514  | 0.006514  |           |           |          |
| MOVIMIENTOS DEL TERRENO                              |           |           |           |          |
| 0.022699   | 0.022699  |           |           |          |
|  | 0.014790  |           |           |          |
| MOMENTOS A LA IZQUIERDA Y A LA DERECHA EN CADA TRABE |           |           |           |          |
| 0.0000   | 0.0000    |           |           |          |
| 4.5336   | -4.5336   |           |           |          |
| MOMENTOS BAJO Y ARRIBA EN CADA COLUMNA               |           |           |           |          |
| 0.0000   | -4.5336   | 0.0000    | 4.5336    |          |

Ejemplo 2 :

Se trata de la idealización de un marco plano para el análisis de un edificio. Se consideran dos articulaciones en la cimentación. ( Ver Fig. 7.5.- )

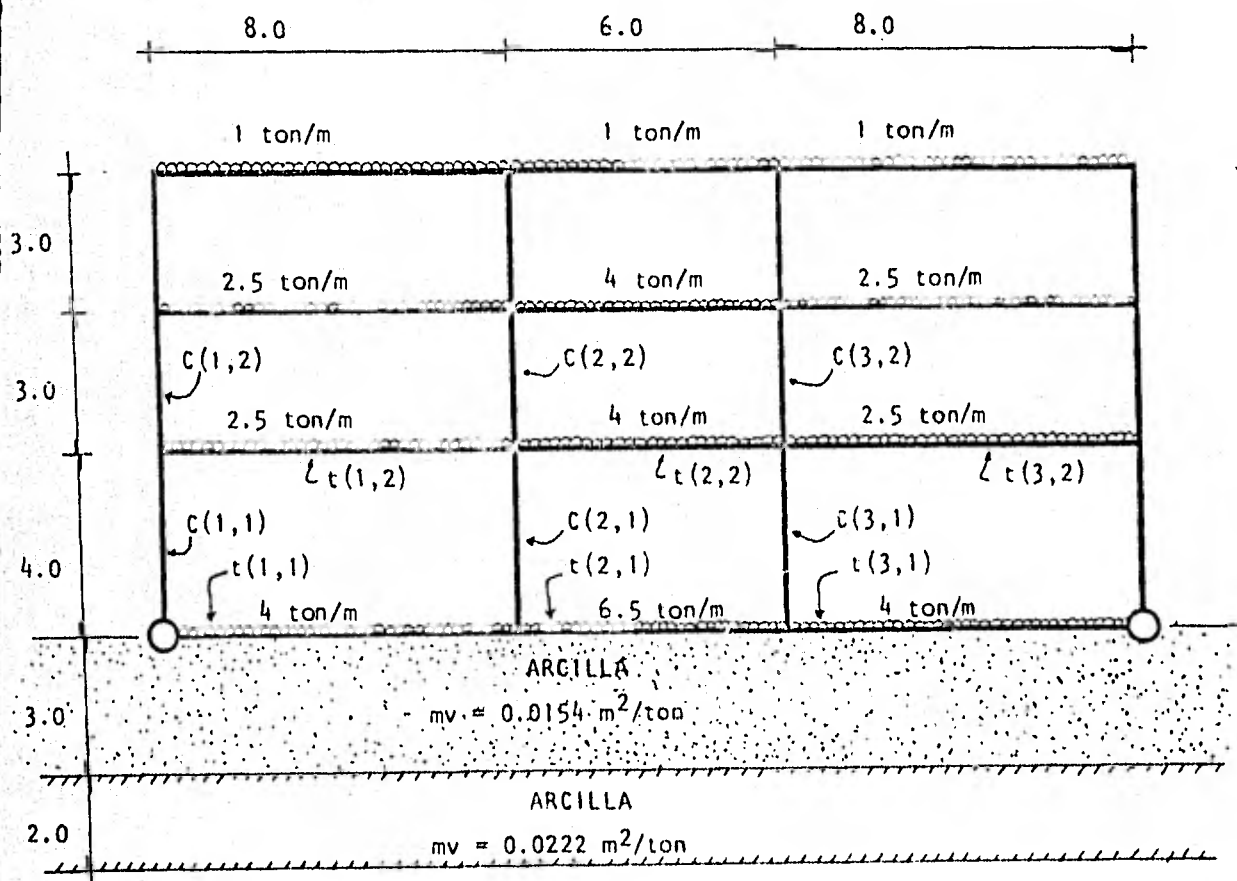


Fig. 7.5.- Croquis del Marco

Propiedades geométricas de las secciones :

Rigideces de Trabes :

$$K_t (1,1) = \frac{EI_t (1,1)}{L(1)} = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 5.45 \times 10^5}{800} = 1,077.15 \text{ ton-m}$$

$$K_t (2,1) = \frac{EI_t (2,1)}{L(2)} = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.24875 \times 10^6}{600} = 3,290.74 \text{ ton-m}$$

$$K_t (3,1) = \frac{EI_t (3,1)}{L(3)} = 1,077.15 \text{ ton-m}$$

$$K_t (1,2) = \frac{EI_t (1,2)}{L(1)} = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 3.81866 \times 10^5}{800} = 754.73 \text{ ton-m}$$

$$K_t (2,2) = \frac{EI_t (2,2)}{L(2)} = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.1664 \times 10^6}{600} = 3,073.73 \text{ ton-m}$$

$$K_t (3,2) = \frac{EI_t (3,2)}{L(3)} = 754.73 \text{ ton-m}$$

$$K_t (1,3) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 3.81866 \times 10^5}{800} = 754.73 \text{ ton-m}$$

$$K_t (2,3) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.664 \times 10^6}{600} = 3,073.73 \text{ ton-m}$$

$$K_t (3,3) = 754.73 \text{ ton-m}$$

$$K_t (1,4) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 2.052 \times 10^5}{800} = 405.56 \text{ ton-m}$$

$$K_t (2,4) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.764 \times 10^5}{600} = 464.85 \text{ ton-m}$$

$$K_t (3,4) = 405.56 \text{ ton-m}$$

Rigideces de columnas :

$$K_c (1,1) = \frac{EI_c (1,1)}{H(1)} = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.04166 \times 10^6}{400} = 4,117.52 \text{ ton-m}$$

$$K_C (2,1) = \frac{EI_C (2,1)}{H(1)} = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 2.16 \times 10^6}{400} = 8,538.15 \text{ ton-m}$$

$$K_C (3,1) = K_C (2,1) = 8,538.15 \text{ ton-m}$$

$$K_C (4,1) = K_C (1,1) = 4,117.50 \text{ ton-m}$$

$$K_C (1,2) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 4.2666 \times 10^5}{300} = 2,248.70 \text{ ton-m}$$

$$K_C (2,2) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.04166 \times 10^6}{300} = 5,490.03 \text{ ton-m}$$

$$K_C (3,2) = K_C (2,2) = 5,490.03 \text{ ton-m}$$

$$K_C (4,2) = K_C (1,2) = 2,248.70 \text{ ton-m}$$

$$K_C (1,3) = K_C (2,3) = K_C (3,3) = K_C (4,3) = \frac{10,000 \sqrt{250} \times 1.35 \times 10^5}{300} = 711.51 \text{ ton-m}$$

#### Equilibrio de momentos en cada nudo

Aplicación de la ecuación de suma de momentos en los nudos de cimentación  $J=1$  ( Ecuación 3-30 )

Nudo (1,1) En éste no plantearemos la ecuación ya que sabemos de antemano que aquí no existe momento.

Nudo (2,1) Rigidez de nudo ( Ecuación 3-28 )

$$K_n (2,1) = B(1,1) K_t (1,1) + B(3,1) K_t (2,1) + B(2,2) K_C (2,1)$$

Donde en este caso tenemos que :

$$B(1,1) = 0.75, B(3,1) = 1.0 \text{ y } B(2,2) = 1.0$$

$$\therefore K_n (2,1) = 0.75 \times 1,077.15 + 1.0 \times 3,290.74 + 1.0 \times 8,538.15 = 12,636.75 \text{ ton-m}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3-30) tenemos que :



$$\begin{aligned}
& 0.0 \phi(1,1) + 2(12,636.75) \phi(2,1) + (1.0) (3,290.74) \phi(3,1) + \\
& + (1.0) (8,538.15) \phi(2,2) - 6(0.5) \frac{1,077.15}{8.0} \delta(1) + 6 \left\{ \frac{(0.5)(1,077.15)}{8.0} - \right. \\
& - \left. \frac{(1.0)(3,290.74)}{6} \right\} \delta(2) + 6 (1.0) \frac{3,290.74}{6.0} \delta(3) + \left( \frac{93}{26} \right) \frac{13}{3072} \times 8.0^2 r(1) + \\
& + \frac{67}{3072} \left( \frac{147}{134} \times 8.0^2 - 1 \times 8.0^2 \right) r(2) - (1.0) \frac{13}{3072} (6.0)^2 r(3) + \\
& + (1.5) \times \frac{11}{192} \times 8.0^2 t(1) - (1.0) \times \frac{11}{192} (6.0)^2 t(2) = \\
& = \frac{(1.5) (4) (8.0)^2 - (1) (6.5) (6.0)^2}{12}
\end{aligned}$$

Los valores de los coeficientes son los mostrados en la tabla de " Coeficientes " de la sección 3.1 . Simplificando la ecuación anterior queda :

$$\begin{aligned}
& 0.0 \phi(1,1) + 25,273.5 \phi(2,1) + 3,290.74 \phi(3,1) + 8,538.15 \phi(2,2) - \\
& - 403.93 \delta(1) - 2,886.81 \delta(2) + 3,290.74 \delta(3) + 0.97 r(1) + 0.75 r(2) - \\
& - 0.15 r(3) + 5.5 t(1) - 2.06 t(2) = 12.5 \quad \dots (1)
\end{aligned}$$

Nudo (3,1) Rigidez de nudo ( Ecuación 3-28 )

$$K_n(3,1) = B(2,1) K_t(2,1) + B(4,1) K_t(3,1) + B(3,2) K_c(3,1)$$

Donde en este caso tenemos que :

$$B(2,1) = 1.0 , B(4,1) = 0.75 \text{ y } B(3,2) = 1.0$$

$$\therefore K_n(3,1) = 12,636.75 \text{ ton-m}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3-30) tenemos que :

$$\begin{aligned}
& (1)(3,290.74) \phi(2,1) + 2(12,636.75) \phi(3,1) + 0.0 \phi(4,1) + \\
& + (1)(8,538.15) \phi(3,2) - 6 (1) \frac{(3,290.74)}{6.0} \delta(2) + 6 \left\{ (1) \frac{3,290.74}{6.0} - \right. \\
& - (0.5) \frac{1,077.15}{8.0} \left. \right\} \delta(3) + 6 (0.5) \frac{1,077.15}{8.0} \delta(4) + (1.0) \frac{13}{3072} (6.0)^2 r(2) + \\
& + \frac{67}{3072} \left\{ (1) (6.0)^2 - \frac{147}{134} (8.0)^2 \right\} r(3) - \left( \frac{93}{26} \right) \frac{13}{3072} (8)^2 r(4) +
\end{aligned}$$

$$+ (1) \frac{11}{192} (6.0)^2 t(2) - (1.5) \frac{11}{192} (8.0)^2 t(3) = \frac{(1)(6.5)(6.0)^2 - (1.5)(4)(8.0)^2}{12}$$

Simplificando queda :

$$\begin{aligned} & 3,290.74 \phi(2,1) + 25,273.5 \phi(3,1) + 0.0 \phi(4,1) + 8,538.15 \phi(3,2) + \\ & - 3,290.74 \delta(2) + 2,886.80 \delta(3) + 403.93 \delta(4) + 0.15 r(2) - 0.75 r(3) - \\ & - 0.97 r(4) + 2.06 t(2) - 5.5 t(3) = -12.5 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

#### Nudo (4,1)

No se plantea ecuación ya que es articulación y no existe momento.

Aplicación de la ecuación de suma de momentos en los nudos de la estructura  $J > 1$  ( Ecuación 3-27 )

#### Nudo (1,2) Rigidez de nudo ( Ecuación 3-28 )

$$K_n(1,2) = B(2,2) K_t(1,2) + B(1,3) K_c(1,2) + B(1,1) K_c(1,1)$$

$$\therefore K_n(1,2) = (1)(754.73) + (1)(2,248.70) + (0.75)(4,117.52) = 6,091.57$$

Sustituyendo valores en la ecuación (3-27) queda :

$$\begin{aligned} & 2(6,091.57) \phi(1,2) + (1)(754.73) \phi(2,2) + (0.0) \phi(1,1) + \\ & + (1)(2,248.70) \phi(1,3) + 6 \left\{ 0 - \frac{(1)(754.73)}{8.0} \right\} \delta(1) + 6 (1) \frac{(754.73)}{8.0} \delta(2) = \\ & = \frac{0 - (1)(2.5)(8.0)^2}{12} \end{aligned}$$

Simplificando queda :

$$\begin{aligned} & 12,183.14 \phi(1,2) + 754.73 \phi(2,2) + 2,248.70 \phi(1,3) - 566.05 \delta(1) + \\ & + 566.05 \delta(2) = -13.33 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

Nudo (2,2) Rigidez de nudo ( Ecuación 3-28 )

$$K_n(2,2) = B(1,2) K_t(1,2) + B(3,2) K_t(2,2) + B(2,3) K_c(2,2) + B(2,1) K_c(2,1)$$

$$\therefore K_n(2,2) = 1(754.73) + 1(3,073.73) + 1(5,490.03) + 1(8,538.15) = 17,856.64$$

Sustituyendo valores en la ecuación (3-27) queda :

$$\begin{aligned} & (1) 754.73 \phi(1,2) + 2(17,856.64) \phi(2,2) + (1) 3,073.73 \phi(3,2) + \\ & + (1) 8,538.15 \phi(2,1) + (1) 5,490.03 \phi(2,3) - 6 \frac{(1)}{8.0} (754.73) \delta(1) + \\ & + 6 \left\{ (1) \frac{754.73}{8.0} - (1) \frac{3,073.73}{6.0} \right\} \delta(2) + 6 (1) \frac{3,073.73}{6.0} \delta(3) = \\ & = \frac{(1)(2.5)(8.0)^2 - (1)(4.0)(6.0)^2}{12} \end{aligned}$$

Simplificando queda :

$$\begin{aligned} & 754.73 \phi(1,2) + 35,713.28 \phi(2,2) + 3,073.73 \phi(3,2) + 8,538.15 \phi(2,1) + \\ & + 5,490.03 \phi(2,3) - 566.05 \delta(1) - 2,507.68 \delta(2) + 3,073.73 \delta(3) = 1.33 \\ & \dots (4) \end{aligned}$$

Si guiendo este mismo procedimiento continuaremos con los siguientes --- nudos de la estructura :

Nudo (3,2) Donde  $K_n(3,2) = 17,856.64$

$$\begin{aligned} & 3,073.73 \phi(2,2) + 35,713.28 \phi(3,2) + 754.73 \phi(4,2) + 8,538.15 \phi(3,1) + \\ & + 5,490.03 \phi(3,3) - 3,073.73 \delta(2) + 2,507.68 \delta(3) + 566.05 \delta(4) = - 1.33 \\ & \dots (5) \end{aligned}$$

Nudo (4,2) Donde  $K_n(4,2) = 6,091.57$

$$754.73 \phi(3,2) + 12,183.14 \phi(4,2) + 2,248.70 \phi(4,3) - 566.05 \delta(3) + 566.05 \delta(4) = 13.33 \quad \dots (6)$$

Nudo (1,3)       $K_n(1,3) = 3,714.94 \text{ ton-m}$

$$7,429.88 \phi(1,3) + 754.73 \phi(2,3) + 2,248.70 \phi(1,2) + 711.51 \phi(1,4) - 566.05 \delta(1) + 566.05 \delta(2) = -13.33 \quad \dots (7)$$

Nudo (2,3)       $K_n(2,3) = 10,030 \text{ ton-m}$

$$754.73 \phi(1,3) + 20,060 \phi(2,3) + 3,073.73 \phi(3,3) + 5,490.03 \phi(2,2) + 711.51 \phi(2,4) - 566.05 \delta(1) - 2,507.68 \delta(2) + 3,073.73 \delta(3) = 1.33 \quad \dots (8)$$

Nudo (3,3)       $K_n(3,3) = 10,030 \text{ ton-m}$

$$3,073.73 \phi(2,3) + 20,060 \phi(3,3) + 754.73 \phi(4,3) + 5,490.03 \phi(3,2) + 711.51 \phi(3,4) - 3,073.73 \delta(2) + 2,507.68 \delta(3) + 566.05 \delta(4) = -1.33 \quad \dots (9)$$

Nudo (4,3)       $K_n(4,3) = 3,714.94 \text{ ton-m}$

$$754.73 \phi(3,3) + 7,429.88 \phi(4,3) + 2,248.70 \phi(4,2) + 711.51 \phi(4,4) - 566.05 \delta(3) + 566.05 \delta(4) = 13.33 \quad \dots (10)$$

Nudo (1,4)       $K_n(1,4) = 1,117.07 \text{ ton-m}$

$$2,234.14 \phi(1,4) + 405.56 \phi(2,4) + 711.51 \phi(1,3) - 304.17 \delta(1) + 304.17 \delta(2) = -5.33 \quad \dots (11)$$

$$\underline{\text{Nudo (2,4)}} \quad K_n(2,4) = 1,581.92 \quad \text{ton-m}$$

$$405.56 \phi(1,4) + 3,163.84 \phi(2,4) + 464.85 \phi(3,4) + 711.51 \phi(2,3) - \\ - 304.17 \delta(1) - 160.68 \delta(2) + 464.85 \delta(3) = 2.33 \quad \dots (12)$$

$$\underline{\text{Nudo (3,4)}} \quad K_n(3,4) = 1,581.92 \quad \text{ton-m}$$

$$464.85 \phi(2,4) + 3,163.84 \phi(3,4) + 405.56 \phi(4,4) + 711.51 \phi(3,3) - \\ - 464.85 \delta(2) + 160.68 \delta(3) + 304.17 \delta(4) = -2.33 \quad \dots (13)$$

$$\underline{\text{Nudo (4,4)}} \quad K_n(4,4) = 1,117.07 \quad \text{ton-m}$$

$$405.56 \phi(3,4) + 2,234.14 \phi(4,4) + 711.51 \phi(4,3) - 304.17 \delta(3) + \\ + 304.17 \delta(4) = 5.33 \quad \dots (14)$$

El siguiente paso será calcular la ecuación de equilibrio de fuerzas cortantes en la crujía  $i=1$  Ecuación (3-32)

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (3-32) ésta queda :

$$2,264.19 \phi(1,2) + 2,264.19 \phi(1,3) + 1,216.68 \phi(1,4) + 1,615.73 \phi(2,1) + \\ + 2,264.19 \phi(2,2) + 2,264.19 \phi(2,3) + 1,216.68 \phi(2,4) - 3,276.46 \delta(1) + \\ + 3,276.46 \delta(2) - 13.031 r(1) - 0.4687 r(2) - 10.5 t(1) = -288 \\ \dots (15)$$

Ecuación de fuerzas cortantes para  $i=2$

ecuación (3-37)

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (3-37) para  $i=2$  ésta queda :

$$\begin{aligned}
& 9,872.22 \phi(2,1) + 9,221.19 \phi(2,2) + 9,221.19 \phi(2,3) + 1,394.55 \phi(2,4) + \\
& + 9,872.22 \phi(3,1) + 9,221.19 \phi(3,2) + 9,221.19 \phi(3,3) + 1,394.55 \phi(3,4) - \\
& - 19,806.1 \delta(2) + 19,806.1 \delta(3) - 12 r(1) - 20.51 r(2) - 0.49 r(3) - 9t(2) - \\
& - 24 t(1) = -759 \quad \dots (16)
\end{aligned}$$

Sustituyendo valores en la misma ecuación anterior pero ahora con ----  
 $i=3$  ésta queda :

$$\begin{aligned}
& 1,615.73 \phi(3,1) + 2,264.19 \phi(3,2) + 2,264.19 \phi(3,3) + 1,216.68 \phi(3,4) + \\
& + 2,264.19 \phi(4,2) + 2,264.19 \phi(4,3) + 1,216.68 \phi(4,4) - 3,276.46 \delta(3) + \\
& + 3,276.46 \delta(4) - 16 r(1) - 27.53 r(3) - 2.97 r(4) - 28 r(2) - 21.5 t(3) - \\
& - 32 t(1) - 24 t(2) = -1,736 \quad \dots (17)
\end{aligned}$$

El siguiente paso será plantear las ecuaciones de desplazamiento a -  
la mitad de la crujía.

Para la 1ª crujía  $i=1$  utilizaremos la ecuación (3-40) que corresponde -  
a la condición de nudo articulado a la izquierda y nudo continuo a la derecha

$$\begin{aligned}
& - 1,615.73 \phi(2,1) - 1,481.08 \delta(2) - 673.22 \delta(1) + 2,154.3 \eta(1) + \\
& + 0.95 r(1) + 0.39 r(2) + 4 t(1) = 21.33 \quad \dots (18)
\end{aligned}$$

Para  $i=2$  utilizaremos la ecuación (3-38) que corresponde a la condición  
de ambos nudos continuos

$$\begin{aligned}
& 3,290.74 \phi(2,1) - 3,290.74 \phi(3,1) - 4,387.65 \delta(2) - 4,387.65 \delta(3) + \\
& + 8,775.31 \eta(2) + 0.14 r(2) + 0.14 r(3) + 1.22 t(2) = 9.75 \quad \dots (19)
\end{aligned}$$

Para  $i=3$  utilizaremos la ecuación (3-39) que corresponde a la condición de nudo articulado a la derecha y nudo continuo a la izquierda

$$1,615.73 \phi(3,1) - 1,481.08 \delta(3) - 673.22 \delta(4) + 2,154.3 \eta(3) + 0.39 r(3) + 0.95 r(4) + 4 t(3) = 21.33 \quad \dots (20)$$

Finalmente plantearemos la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en el marco (ecuación (3-42))

$$8.0 r(1) + 8.0 r(4) + 14 r(2) + 14 r(3) + 16 t(1) + 12 t(2) + 16 t(3) = 1,012.8 \quad \dots (21)$$

Hasta aquí hemos planteado las ecuaciones de equilibrio referentes a la estructura dándonos en total 21 ecuaciones con 28 incógnitas. El resumen de estas incógnitas es :

14 giros  $\phi(i,j)$  + 4 reacciones  $r(i)$  + 3 reacciones  $t(i)$  + 4 desplazamientos  $\delta(i)$  + 3 desplazamientos  $\eta(i)$  = 28 incógnitas.

El siguiente paso será reducir el número de incógnitas en el sistema de ecuaciones para poder tener solo 21 incógnitas y hacer así el sistema compatible. Para esto haremos el análisis del suelo donde encontraremos los desplazamientos en función de las reacciones del terreno y que al sustituirlos en el sistema de ecuaciones sólo quedará un sistema en función de  $\phi(i,j)$ ,  $r(i)$  y  $t(i)$ , pudiéndose así resolver el problema.

#### Cálculo de hundimientos del suelo

Al hacer el análisis del suelo haremos el siguiente cambio de notación :

$$\begin{aligned} r(i) &= q(2i-1) & \delta(i) &= \epsilon(2i-1) \\ t(i) &= q(2i) & \eta(i) &= \epsilon(2i) \end{aligned}$$

A continuación se muestra la tabla de valores de influencia que se consideran como datos del problema :

|         |         |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.02120 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00300 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00010 | 0.01060 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00050 | 0.00150 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.01210 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00030 | 0.00170 | 0.00070 | 0.00010 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00020 | 0.01410 | 0.00020 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00060 | 0.00200 | 0.00060 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.01210 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00010 | 0.00070 | 0.00170 | 0.00030 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.01060 | 0.00010 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.00150 | 0.00050 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.02120 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.00300 |

Sustituyendo valores en la ecuación (4-13) tenemos que el desplazamiento del terreno en el punto 1 vale :

$$\xi(1) = mv(1,1) H(1) \{ I'(1,1)_1 I_t(1) q(1) + I'(1,1)_2 I_t(2) q(2) + I'(1,1)_3 I_t(3) q(3) + \dots \} + mv(1,2) H(2) \{ I'(1,2)_1 I_t(1) q(1) + I'(1,2)_2 I_t(2) q(2) + I'(1,2)_3 I_t(3) q(3) + \dots \}$$

Sustituyendo valores tenemos que :



$$\begin{aligned} \xi(1) = & 0.0154 \times 3.0 \{ 0.0212 \times 2.0 q(1) + 0.00010 \times 4 q(2) + \\ & + 0.0 \times 3.5 q(3) \} + 0.0222 \times 2.0 \{ 0.003 \times 2.0 q(1) + 0.0005 \times 4 q(2) + \\ & + 0.0 \times 3.5 q(3) \} \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$\xi(1) = 0.00223 q(1) + 0.00011 q(2) \quad \dots \quad (S-1)$$

Para el desplazamiento en el punto 2 tenemos que :

$$\begin{aligned} \xi(2) = & mv(2,1) H(1) \{ l'(2,1)_1 l_t(1) q(1) + l'(2,1)_2 l_t(2) q(2) + \\ & + l'(2,1)_3 l_t(3) q(3) + \dots \} + mv(2,2) H(2) \{ l'(2,2)_1 l_t(1) q(1) + \\ & + l'(2,2)_2 l_t(2) q(2) + l'(2,2)_3 l_t(3) q(3) + \dots \} \end{aligned}$$

Sustituyendo valores tenemos que :

$$\begin{aligned} \xi(2) = & 0.0154 \times 3.0 \{ 0 \times 2.0 q(1) + 0.0106 \times 4.0 q(2) + 0.0 \times 3.5 q(3) \} + \\ & + 0.0222 \times 2.0 \{ 0.0003 \times 2 q(1) + 0.0015 \times 4.0 q(2) + 0.0003 \times 3.5 q(3) \} \end{aligned}$$

Y simplificando :

$$\xi(2) = 0.00003 q(1) + 0.00223 q(2) + 0.00005 q(3) \quad \dots \quad (S-2)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen los demás desplazamientos - en función de las cargas y que a continuación resumimos :

$$\begin{aligned} \xi(3) = & 0.00005 q(2) + 0.00222 q(3) + 0.00011 q(4) + 0.00002 q(5) \\ & \dots \quad (S-3) \end{aligned}$$

$$\xi(4) = 0.00016 q(3) + 0.00222 q(4) + 0.00016 q(5) \quad \dots \quad (S-4)$$

$$\xi(5) = 0.00002 q(3) + 0.00011 q(4) + 0.00222 q(5) + 0.00005 q(6) \quad \dots (S-5)$$

$$\xi(6) = 0.00005 q(5) + 0.00223 q(6) + 0.00003 q(7) \quad \dots (S-6)$$

$$\xi(7) = 0.00011 q(6) + 0.00223 q(7) \quad \dots (S-7)$$

Donde vemos que tenemos 7 ecuaciones con 7 incógnitas. Para poder sustituir estas ecuaciones en el sistema inicial tenemos que hacer el cambio de variable compatible con el de la estructura.

Por lo tanto :

$$\begin{array}{ll} \xi(1) = \delta(1) & r(1) = q(1) \\ \xi(2) = \eta(2) & t(1) = q(2) \\ \xi(3) = \delta(2) & r(2) = q(3) \\ \xi(4) = \eta(3) & t(2) = q(4) \\ \xi(5) = \delta(3) & r(3) = q(5) \\ \xi(6) = \eta(4) & t(3) = q(6) \\ \xi(7) = \delta(4) & r(4) = q(7) \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (S-1) a (S-7) tenemos :

$$\begin{array}{l} \delta(1) = 0.00223 r(1) + 0.00011 t(1) \\ \eta(1) = 0.00003 r(1) + 0.00223 t(1) + 0.00005 r(2) \\ \delta(2) = 0.00005 t(1) + 0.00222 r(2) + 0.00011 t(2) + 0.00002 r(3) \\ \eta(2) = 0.00016 r(2) + 0.00222 t(2) + 0.00016 r(3) \\ \delta(3) = 0.00002 r(2) + 0.00011 t(2) + 0.00222 r(3) + 0.00005 t(3) \\ \eta(3) = 0.00005 r(3) + 0.00223 t(3) + 0.00003 r(4) \\ \delta(4) = 0.00011 t(3) + 0.00223 r(4) \end{array}$$

Con este cambio de notación ahora sí podemos sustituir estos valores en un sistema de ecuaciones inicial ( ecuaciones 1 a la 21 ), por lo que al sustituir

tituir y simplificar éste queda de la siguiente forma :

$$\begin{aligned}
 & 25,273 \phi(2,1) + 3,290.74 \phi(3,1) + 8,538.15 \phi(2,2) + 0.06793 r(1) - \\
 & - 5.5969 r(2) + 7.0957 r(3) + 5.31123 t(1) - 2.01757 t(2) + 0.16454 t(3) = \\
 & = 12.5 \qquad \qquad \qquad \dots ( 1' )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3,290.74 \phi(2,1) + 25,273 \phi(3,1) + 8,538.15 \phi(3,2) - 7.0957 r(2) + \\
 & + 5.5969 r(3) - 0.06793 r(4) - 0.16454 t(1) + 2.01757 t(2) - 5.31123 t(3) = \\
 & = - 12.5 \qquad \qquad \qquad \dots ( 2' )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 12,183.14 \phi(1,2) + 754.73 \phi(2,2) + 2,248.70 \phi(1,3) - 1.26229 r(1) + \\
 & + 1.25663 r(2) + 0.01132 r(3) - 0.03397 t(1) + 0.06227 t(2) = - 13.33 \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots ( 3' )
 \end{aligned}$$

.....  
 .....  
 .....

Al comparar las ecuaciones obtenidas a "mano" con las del programa --- de computadora vemos que prácticamente son las mismas; por lo que juzgamos -- que ya no es necesario volver a escribir todas éstas. Anexo a este ejemplo -- estamos presentando el listado del programa con los resultados obtenidos. --- También presentamos los resultados gráficamente para su mejor comprensión. --

Puede observarse de las figuras 7.7 y 7.8 que tanto las reacciones como los hundimientos al centro de las crujeas que contienen articulación cambian bruscamente, esto debido obviamente a la disminución de rigidez que hay por la presencia de la articulación. Por otro lado, en un intento por establecer diferencias entre este método de interacción suelo-estructura y los métodos tradicionales de análisis, se resolvió este mismo ejemplo con el programa de computadora STRESS cuyos resultados se muestran en la Fig. 7.9; y comparándolos con los de la Fig. 7.6 se observan diferencias significativas de momentos

en las columnas interiores de los dos primeros niveles, y donde inclusive --  
llegan a presentarse cambios de signos para un mismo elemento. Esto hace pen  
sar muy seriamente en la importancia de un análisis que tome en cuenta las -  
características reales de la cimentación y el tipo de terreno donde se apoya  
una estructura, como es el método que proponemos . En los niveles superiores  
podemos deducir que los resultados de los elementos mecánicos son indepen--  
dientes de la interacción.

⊕ Momento de barra sobre nudo

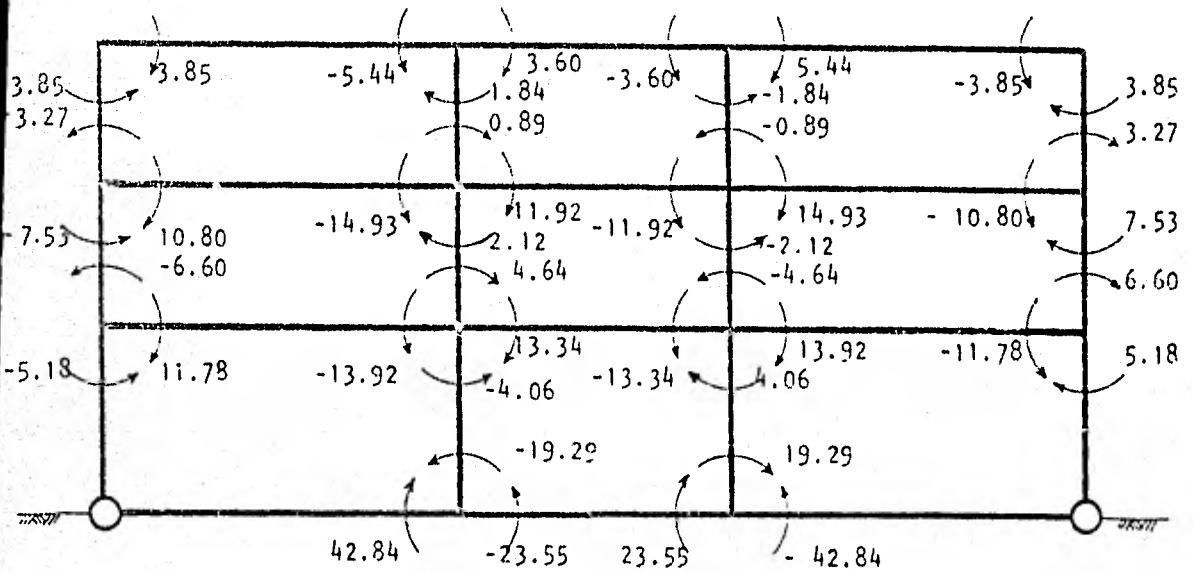


Fig. 7.6.- Momentos en los extremos de las barras obtenidas con interacción suelo-estructura en ton-m.

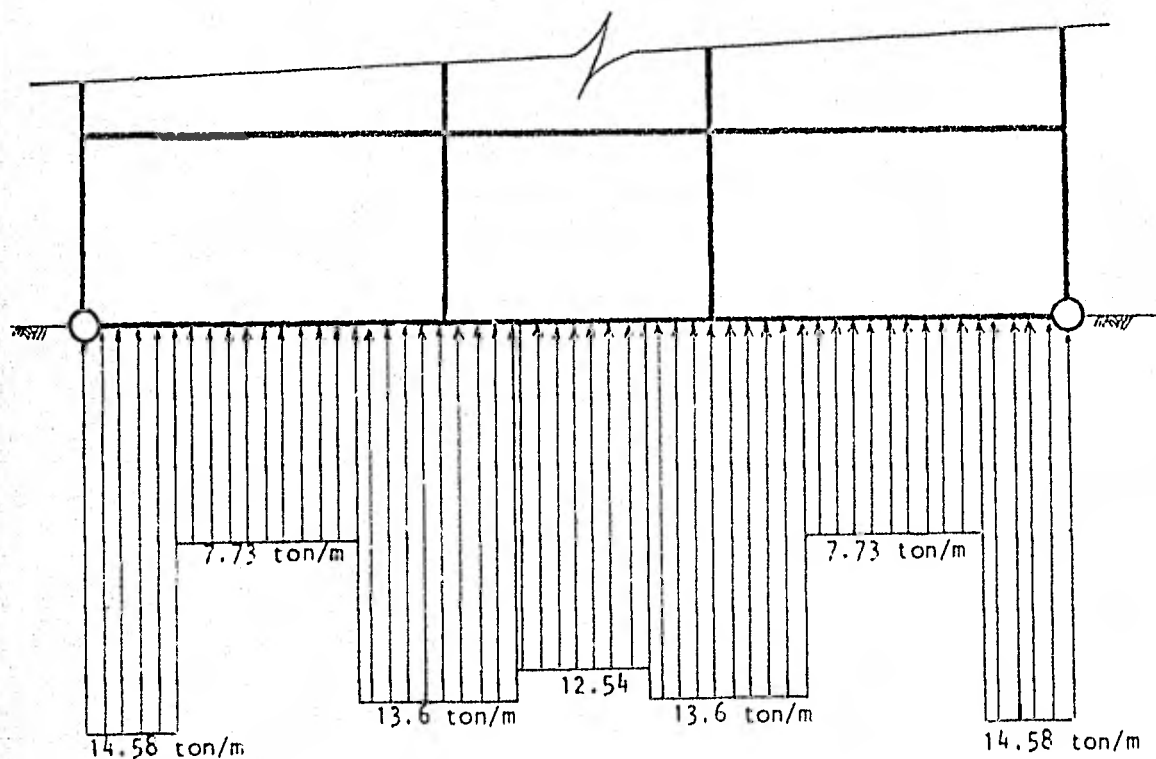


Fig. 7.7.- REACCIONES DEL TERRENO

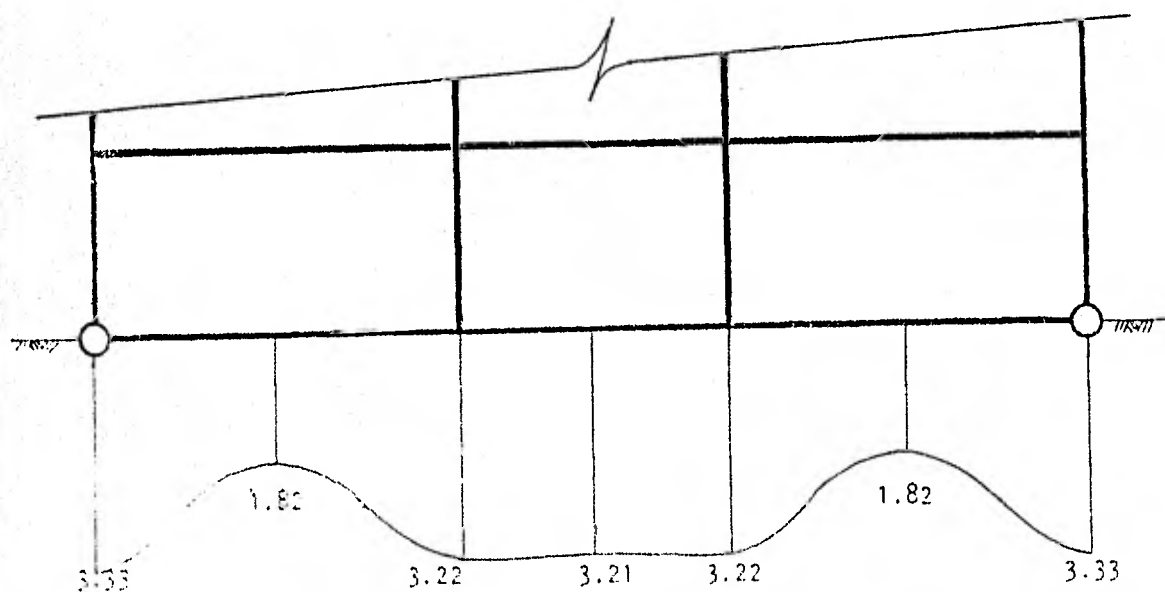



Fig. 7.8.- HUNDIMIENTOS CALCULADOS EN CM.

Momentos de barra sobre nudo  


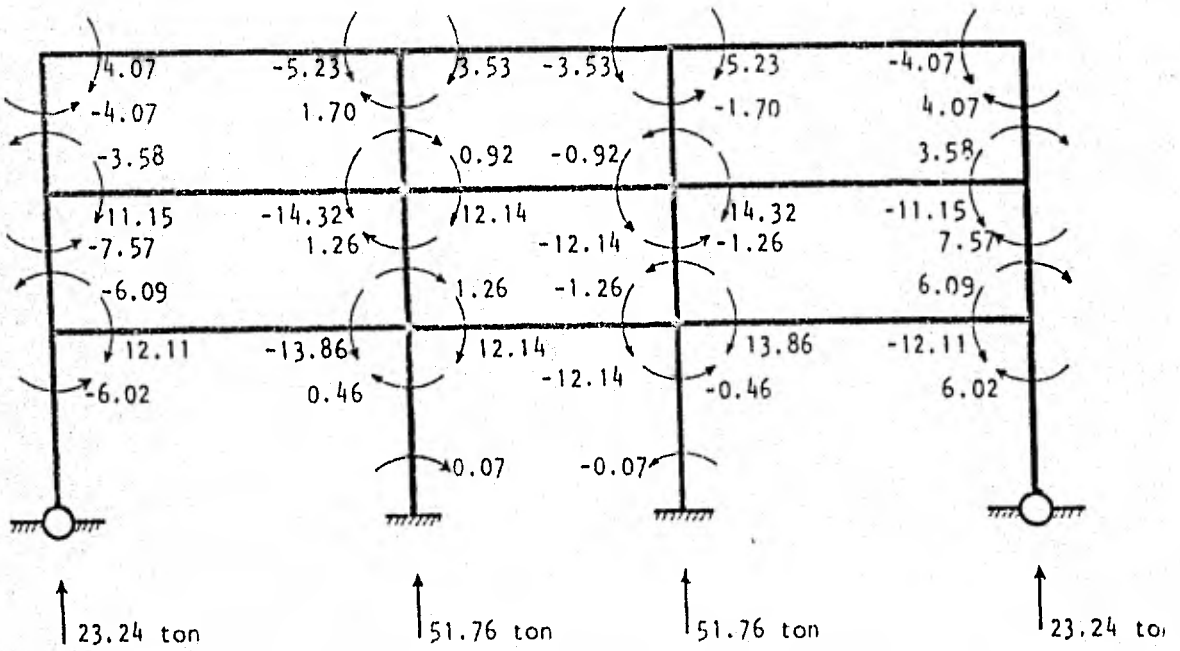


Fig. 7.9.- Momentos en los extremos de las barras, calculados con el Programa STRESS.

ANÁLISIS DE MARCOS PLANOS CONSIDERANDO  
INTERACCIÓN ENTRE SUELO Y ESTRUCTURA

|  |            |                         |            |                                     |   |
|--|------------|-------------------------|------------|-------------------------------------|---|
| NUMERO DE COLUMNAS                     | 4          | NUMERO TOTAL DE NIVELES | 4          | NUMERO DE NIVELES QUE SE ANALIZARAN | 4 |
| LARGITUD DE TRABES                     | 8.00000    | 6.00000                 | 8.00000    |                                     |   |
| ALTURAS DE COLUMNAS                    | 4.00000    | 3.00000                 | 3.00000    |                                     |   |
| CARGA UNIFORME CADA TRAMO              | 7.00000    | 4.00000                 | 4.00000    |                                     |   |
|  | 2.50000    | 2.00000                 | 2.00000    |                                     |   |
|  | 1.00000    | 1.00000                 | 1.00000    |                                     |   |
| MÓDULO DE ELASTICIDAD DE TRABES        |            |                         |            |                                     |   |
|  | :15811E+08 | :15811E+08              | :15811E+08 |                                     |   |
|  | :15811E+08 | :15811E+08              | :15811E+08 |                                     |   |
| MÓDULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS      |            |                         |            |                                     |   |
|  | :15811E+08 | :15811E+08              | :15811E+08 | :15811E+08                          |   |
|  | :15811E+08 | :15811E+08              | :15811E+08 | :15811E+08                          |   |
|  | :15811E+08 | :15811E+08              | :15811E+08 | :15811E+08                          |   |
| MOMENTO DE INERCIA DE TRABES           |            |                         |            |                                     |   |
|  | :54500E+06 | :1187E+07               | :54500E+06 |                                     |   |
|  | :36188E+06 | :11604E+07              | :36188E+06 |                                     |   |
|  | :20520E+06 | :17384E+07              | :20520E+06 |                                     |   |
| MOMENTO DE INERCIA DE COLUMNAS         |            |                         |            |                                     |   |
|  | :10418E+07 | :11604E+07              | :21000E+07 | :10418E+07                          |   |
|  | :13500E+06 | :13500E+06              | :13500E+06 | :13500E+06                          |   |
| CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LAS COLUMNAS |            |                         |            |                                     |   |
|  | 0.000      | 0.000                   | 0.000      | 0.000                               |   |
| TITULO DE HOJAS                        |            |                         |            |                                     |   |



NUMERO CONTI

NUMERO ARTICLADO

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 |

NUMERO DE REACCIONES 7

NUMERO DE EXTRACCIONES DEL SUELO 2

ANCHO DE LA CINTURA EN CONTACTO CON EL SUELO 5.0000 5.0000 5.0000

ESPESOR DE CADA STRATO LL SUELO

EN LA STRATO SUELO 0.0150 0.0150 0.0150  
 0.0220 0.0220 0.0220

VALORES DE INFLUENCIA 0.0000 0.0000 0.0000  
 0.0030 0.0030 0.0030

0.0010 0.0010 0.0010  
 0.0050 0.0050 0.0050

0.0000 0.0000 0.0000  
 0.0000 0.0000 0.0000

0.0000 0.0000 0.0000  
 0.0000 0.0000 0.0000

0.0000 0.0000 0.0000  
 0.0000 0.0000 0.0000

0.0000 0.0000 0.0000  
 0.0000 0.0000 0.0000

0.0000 0.0000 0.0000  
 0.0000 0.0000 0.0000

MATRIZ A DE COEFICIENTES

|         |    |                           |                      |                          |                           |                        |                          |                           |                      |                      |                      |                      |
|---------|----|---------------------------|----------------------|--------------------------|---------------------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| HEAGLUN | 1  | 2527 0:000000<br>7:110249 | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 8537 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000   | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 2  | 2290 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 3  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 12142:454555<br>{:000000 | 754:490554<br>{:000000    | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 2240:440470<br>-1:154502  | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 4  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 2714:044420<br>{:000000  | {:000000<br>{:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 7424:667555<br>-1:154502  | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 5  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 754:490554<br>0:000000 | 12142:454555<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 6  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 2240:440470<br>711:490400 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 7  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 8  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 9  | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |
| HEAGLUN | 10 | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | {:000000<br>{:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000   | 0:000000<br>0:000000     | 0:000000<br>0:000000      | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 | 0:000000<br>0:000000 |



|           |          |           |           |           |          |          |           |
|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|
| 0.000000  | 0.000000 | 0.000000  | 0.000000  | 0.000000  | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000  |
| 0.000000  | 0.000000 | 0.000000  | 0.000000  | 0.000000  | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000  |
| 14.000000 | 0.000000 | 11.000000 | 13.000000 | 16.000000 | 8.000000 | 8.000000 | 14.000000 |

VECTORES DE TERMINOS INDEPENDIENTES

|             |           |           |           |           |           |            |             |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|
| 12.500000   | 12.500000 | 13.333333 | 13.333333 | 13.333333 | 13.333333 | 13.333333  | 12.500000   |
| -1734888888 | 211333333 | 117222222 | 211333333 | 117222222 | 211333333 | -211333333 | -759.000000 |

VECTORES DE SOLUCION DEL METODO DE GAUSS ITERATIVO

|           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.001347  | 0.001347  | 0.000436  | 0.000436  | 0.000436  | 0.000436  | 0.001257  | 0.000979  |
| 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 |

NO HAY CONVERGENCIA EN LA SUBRUTINA IMPRESA

VECTORES DE SOLUCION REVISADA CON INDICADORES

|           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.001347  | 0.001347  | 0.000436  | 0.000436  | 0.000436  | 0.000436  | 0.001257  | 0.000979  |
| 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 | 19.888888 |

(1) RELACCIONES BAJA LAS COLUMNAS

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 14.579598 | 11.704879 | 11.604879 | 14.579598 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|

(2) RELACCIONES AL CENTRO DE LAS FILAS

|          |           |          |
|----------|-----------|----------|
| 7.727910 | 12.641271 | 7.727910 |
|----------|-----------|----------|

(3) INDICADORES EN LOS ALGEBRAS

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.000000  | 0.001347  | 0.001347  | 0.000000  |
| -8.888888 | -8.888888 | -8.888888 | -8.888888 |
| 0.002076  | 0.001206  | 0.001206  | 0.000000  |

INDICADORES DEL RESULTADO

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| 8.888888 | 8.888888 | 8.888888 | 0.000000 |
|----------|----------|----------|----------|

INDICADORES A LA COMPLETA Y A LA CERRADA EN CADA FILA

|         |          |         |          |         |          |
|---------|----------|---------|----------|---------|----------|
| 0.0000  | 4.0000   | 23.5551 | 23.5551  | 47.1101 | 0.0000   |
| 13.8888 | -14.8888 | 11.7222 | -11.7222 | 11.7222 | -14.8888 |
| 3.6666  | -1.4444  | 3.6666  | -3.6666  | 3.6666  | -1.4444  |

INDICADORES REALES Y COMPLEJOS EN CADA COLUMNA

|         |         |        |        |        |        |        |        |
|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0000  | 1.0000  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| -5.7777 | -1.2222 | 8.8888 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Ejemplo 3 : Se tiene la idealización de un marco de un edificio alto.

Propiedades geométricas de las secciones

Módulo de elasticidad de traveses y columnas  $E = 0.14142 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Momento de inercia de traveses  $I_t = 0.16 \times 10^6 \text{ cm}^4$

Momento de inercia de columnas  $I_c = 0.675 \times 10^5 \text{ cm}^4$

Ancho de la cimentación = 1.5 m

Valores de influencia

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.32800 | 0.01970 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.05270 | 0.02370 | 0.00730 | 0.00200 | 0.00000 |
| 0.03970 | 0.22430 | 0.01000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.02770 | 0.04970 | 0.02000 | 0.00530 | 0.00150 |
| 0.00000 | 0.01000 | 0.22430 | 0.01000 | 0.00000 |
| 0.00730 | 0.02000 | 0.04970 | 0.02000 | 0.00730 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.01000 | 0.22430 | 0.03970 |
| 0.00150 | 0.00530 | 0.02000 | 0.04970 | 0.02770 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.01970 | 0.32800 |
| 0.00000 | 0.00200 | 0.00730 | 0.02370 | 0.05270 |

En este ejemplo, y en los siguientes, se presentan los resultados obtenidos directamente del programa de computadora. Además se presentan gráficamente los resultados y se hacen comentarios de éstos.

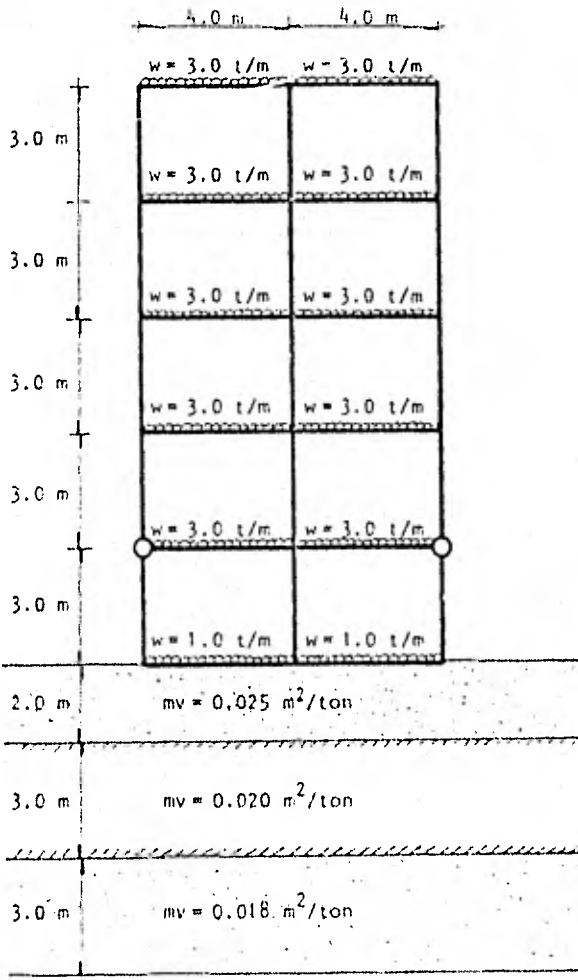


Fig. 7.10.- CROQUIS DEL MARCO

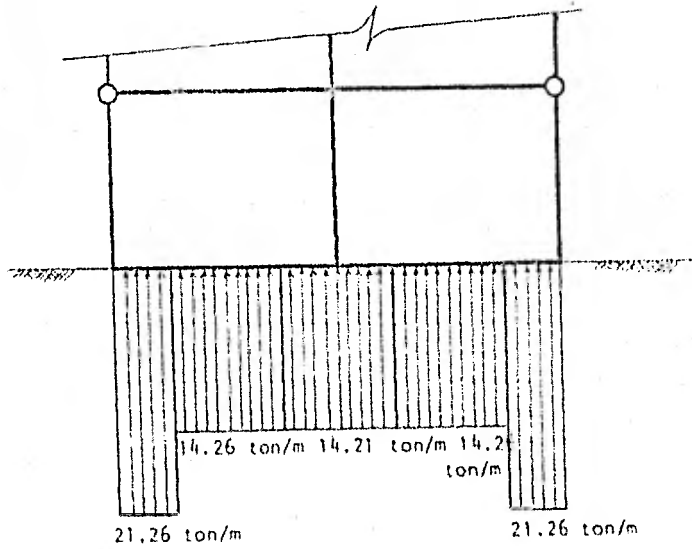


Fig. 7.11.- REACCIONES DEL TERRENO

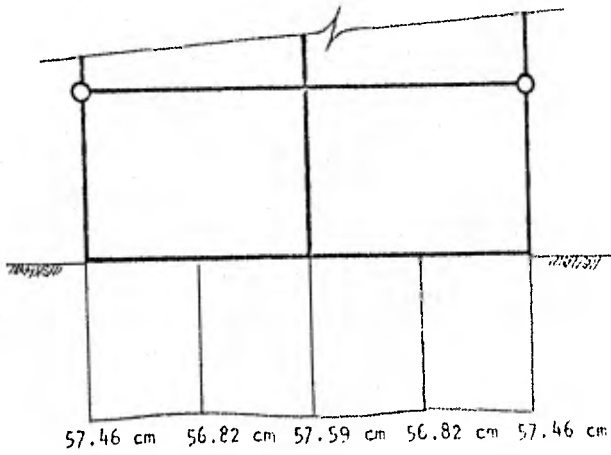
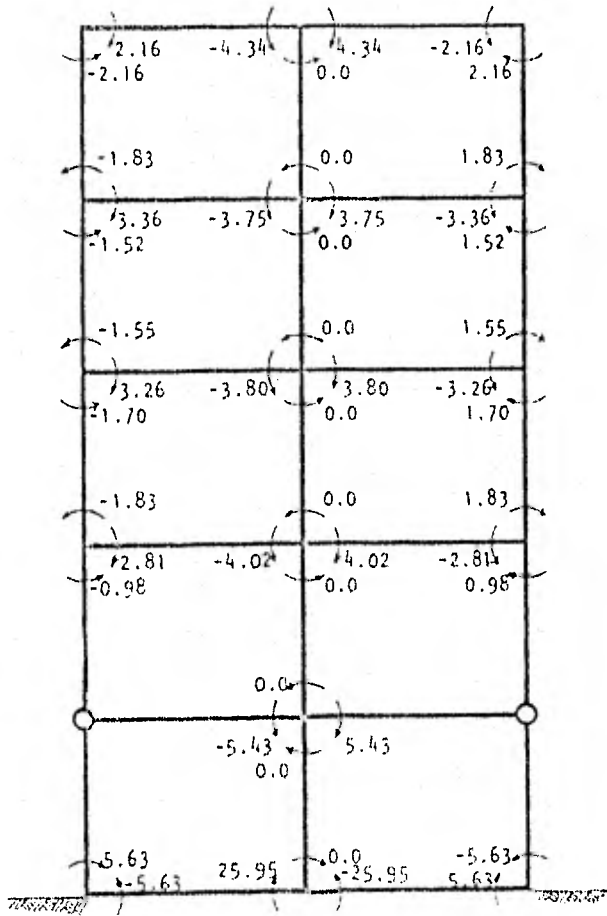


Fig. 7.12.- HURDIMIENTOS CALCULADOS



⊕ Momentos de barra sobre nudo

Fig. 7.13.- Momentos en los extremos de la barras en ton-m



ANÁLISIS DE MARCOS PLANOS CONSIDERANDO  
INTERACCIÓN ENTRE SUELO Y ESTRUCTURA



NUMERO DE COLUMNAS 3      NUMERO TOTAL DE NIVELES 6      NUMERO DE NIVELES QUE SE ANALIZARAN 6

LONGITUD DE PAAES  
4,00000      4,00000

ALTURAS DE COLUMNAS      3,00000      3,00000      3,00000

CARGAS EN CAJA IZQUIERDA  
1,00000      1,00000  
1,00000      1,00000  
1,00000      1,00000  
1,00000      1,00000  
1,00000      1,00000  
1,00000      1,00000

MÓDULO DE ELASTICIDAD DE PAAES  
\*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06

MÓDULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS  
\*141421+06      \*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06      \*141421+06  
\*141421+06      \*141421+06      \*141421+06

MÓDULO DE INERCIA DE PAAES  
\*100001+05      \*100001+05  
\*100001+05      \*100001+05  
\*100001+05      \*100001+05  
\*100001+05      \*100001+05  
\*100001+05      \*100001+05  
\*100001+05      \*100001+05

MÓDULO DE INERCIA DE COLUMNAS  
\*075001+03      \*075001+03      \*075001+03  
\*075001+03      \*075001+03      \*075001+03  
\*075001+03      \*075001+03      \*075001+03  
\*075001+03      \*075001+03      \*075001+03  
\*075001+03      \*075001+03      \*075001+03  
\*075001+03      \*075001+03      \*075001+03

CARGAS CORRECTIVAS SOBRE LAS COLUMNAS  
 3,000 0,000 0,000

GRUPO DE LA RAMA

ORDEN CONTINUA  
 ORDEN ALTERNATIVO

0 0 0  
 1 0 1  
 0 0 0  
 0 0 0  
 0 0 0  
 0 0 0

NUMERO DE REACCIONES 2 NUMERO DE ESTRATOS DEL SUELO 4

ESPESOR DE CADA ESTRATO DEL SUELO  
 2,00000 1,00000 3,00000

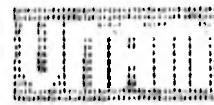
| MY CADA ESTRATO DEL SUELO | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 |
|---------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,02500                   | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 |
| 0,01000                   | 0,01000 | 0,01000 | 0,01000 | 0,01000 | 0,01000 |

| VALORES DE INFLUENCIA | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,02500               | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 |
| 0,01100               | 0,00400 | 0,00300 | 0,00200 | 0,00200 | 0,00100 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,03300 | 0,02400 | 0,01000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,02700 | 0,01400 | 0,02000 | 0,00300 | 0,00100 |
| 0,00100 | 0,01100 | 0,00100 | 0,00200 | 0,00200 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,00000 | 0,01000 | 0,02100 | 0,01000 | 0,00000 |
| 0,00700 | 0,02000 | 0,03700 | 0,02000 | 0,00700 |
| 0,00300 | 0,00100 | 0,01100 | 0,00100 | 0,00100 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,00100 | 0,00000 | 0,01000 | 0,02400 | 0,01000 |
| 0,00100 | 0,00100 | 0,02000 | 0,04400 | 0,01000 |
| 0,00100 | 0,00100 | 0,01000 | 0,01100 | 0,00100 |



|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.01170 | 0.12800 |
| 0.00000 | 0.00200 | 0.00750 | 0.02310 | 0.05270 |
| 0.00111 | 0.00242 | 0.00506 | 0.00401 | 0.01150 |



TAJAJE A DE COEFICIENTES

|             |             |             |            |             |          |            |
|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|----------|------------|
| 1509.652000 | 765.500000  | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.861000  | 21.931000   | 0.000000    | -0.220000  | 5.130000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 2           |             |            |             |          |            |
| 565.600000  | 2099.110000 | 565.600000  | 512.120000 | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.797217  | 0.000000    | 16.937219   | -0.723071  | 5.723571    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 3           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 1400.652000 | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -0.552025   | -23.953075  | 16.861000   | -3.336001  | 2.200000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 4           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 2243.000000 | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 13.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 310.145000 |
| 967.7000    | 5           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 310.145000  | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 6           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 7           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 8           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 9           |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 10          |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 11          |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |
| 767.7000    | 12          |             |            |             |          |            |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000   | 0.000000    | 0.000000 | 0.000000   |
| -10.512702  | 23.721100   | 0.522025    | -3.304117  | 3.336001    | 0.000000 | 0.000000   |



|                                    |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| -0,552022                          | -23,421104                         | 16,512402                         | -3,336401                            | 3,304117                         |                                    |                                  |                                  |
| REYJLUM 10                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>-5,640534    | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 11                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-4,532463  | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>8,532463  | 2467,020000<br>0,000000<br>-3,320264 | 0,000000<br>0,000000<br>3,320264 | 311,192000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 12                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 313,192000<br>0,000000<br>-0,640534  | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 13                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>-5,640534    | 0,000000<br>0,000000<br>5,640534 | 311,192000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 14                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>-5,640534    | 0,000000<br>0,000000<br>5,640534 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 15                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-15,512402 | 0,000000<br>0,000000<br>23,421104  | 0,000000<br>0,000000<br>16,512402 | 0,000000<br>0,000000<br>-3,336401    | 0,000000<br>0,000000<br>3,336401 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 16                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-0,552022  | 0,000000<br>0,000000<br>-23,421104 | 0,000000<br>0,000000<br>16,512402 | 0,000000<br>0,000000<br>-3,336401    | 0,000000<br>0,000000<br>3,336401 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 17                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>-5,640534    | 0,000000<br>0,000000<br>5,640534 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 18                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>-5,640534    | 0,000000<br>0,000000<br>5,640534 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |
| REYJLUM 19                         |                                    |                                   |                                      |                                  |                                    |                                  |                                  |
| 0,000000<br>0,000000<br>-17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>17,064927 | 0,000000<br>0,000000<br>-5,640534    | 0,000000<br>0,000000<br>5,640534 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000   | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 | 0,000000<br>0,000000<br>0,000000 |





*Ejemplo 4 :* Este ejemplo es en referencia al anterior, sólo que ahora aplicando la simplificación de sustituir varios niveles por fuerzas concentradas en las columnas.

Propiedades geométricas de las secciones

Módulo de elasticidad de traves y columnas  $E = 0.14142 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Momento de inercia de traves  $I_t = 0.16 \times 10^6 \text{ cm}^4$

Momento de inercia de columnas  $I_c = 0.675 \times 10^5 \text{ cm}^4$

Ancho de la cimentación = 1.5 m

Valores de influencia

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.32800 | 0.01970 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.05270 | 0.02370 | 0.00730 | 0.00200 | 0.00000 |
| 0.03970 | 0.22430 | 0.01000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.02770 | 0.04970 | 0.02000 | 0.00530 | 0.00150 |
| 0.00000 | 0.01000 | 0.22430 | 0.01000 | 0.00000 |
| 0.00730 | 0.02000 | 0.04970 | 0.02000 | 0.00730 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.01000 | 0.22430 | 0.03970 |
| 0.00150 | 0.00530 | 0.02000 | 0.04970 | 0.02770 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.01970 | 0.32800 |
| 0.00000 | 0.00200 | 0.00730 | 0.02370 | 0.05270 |

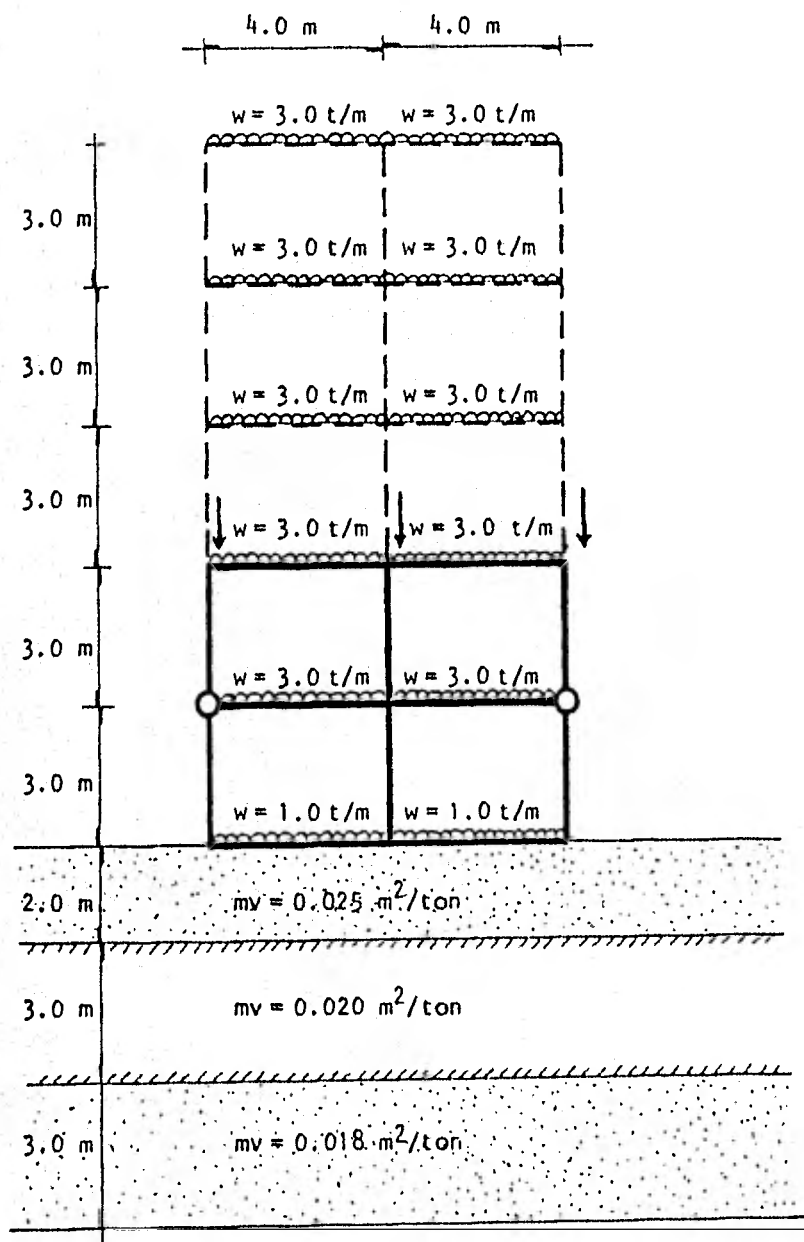


Fig. 7.14.- CROQUIS DEL MARCO



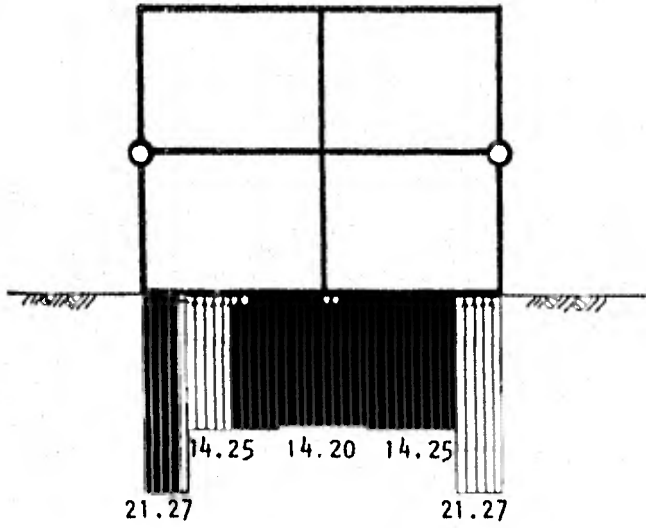


Fig. 7.15.- REACCIONES DEL TERRENO EN TON/M

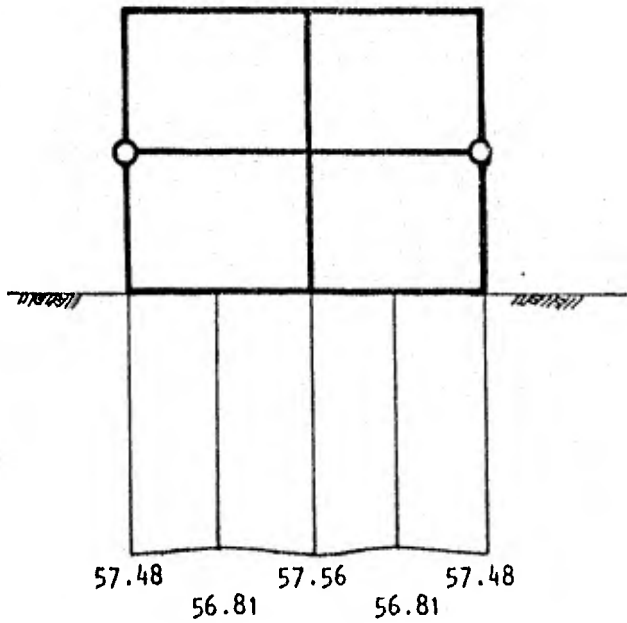
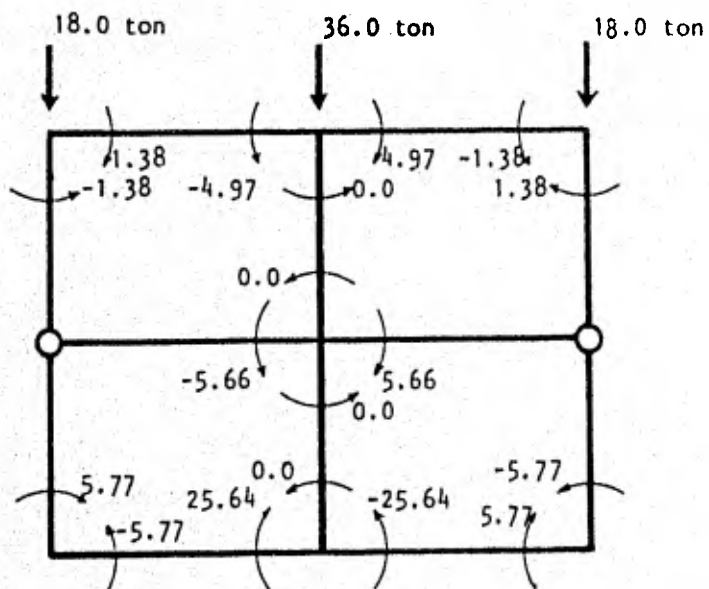


Fig. 7.16.- HUNDIMIENTOS CALCULADOS EN CMS.



⊕ Momentos de barra sobre nudo

Fig. 7.17.- Momentos en los extremos de las barras y fuerzas concentradas sobre las columnas.

De los ejemplos 3 y 4 podemos indicar que éstos se resolvieron con el fin de calibrar que el programa de computadora funciona indistintamente del arco que se trate con cualquier posición de sus articulaciones; además de justificar la validez del análisis en sustituir los niveles superiores de un arco por cargas concentradas. Los resultados obtenidos comprueban lo anteriormente dicho, es decir, que para fines prácticos los resultados obtenidos en una interacción, tanto de hundimientos, reacciones o elementos mecánicos en los primeros niveles, son los mismos que si se considera el marco completo o con cargas concentradas.

Por otro lado notamos que debido a que el largo de cimentación es relativamente pequeño las reacciones y los hundimientos no tiene diferencias relativas fuertes ya que se mantienen casi constantes a lo largo de la cimentación.

Lo que es de notarse son los fuertes hundimientos totales que sufre la estructura, por lo que podríamos sugerir la utilización de una cimentación parcial o totalmente compensada.

ANÁLISIS DE ARCS PLANOS CONSIDERANDO  
 INTERACCIÓN ENTRE SUELO Y ESTRUCTURA



NUMERO DE COLUMNAS 3    NUMERO TOTAL DE NIVELES 6    NUMERO DE NIVELES QUE SE ANALIZARAN 3

LONGITUD DE TRAVES  
 4,00000    4,00000

ALTURAS DE COLUMNAS  
 3,00000    3,00000

CARGAS EN CADA TRAVE  
 1,00000    1,00000  
 1,00000    1,00000  
 1,00000    1,00000

MODULO DE ELASTICIDAD DE TRAVES  
 1,4142E+06    1,4142E+06  
 1,4142E+06    1,4142E+06  
 1,4142E+06    1,4142E+06

MODULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS  
 1,4142E+06    1,4142E+06    1,4142E+06  
 1,4142E+06    1,4142E+06    1,4142E+06

NUMERO DE INERCIA DE TRAVES  
 1,2000E+05    1,2000E+05  
 1,2000E+05    1,2000E+05  
 1,2000E+05    1,2000E+05

NUMERO DE INERCIA DE COLUMNAS  
 6,7500E+05    6,7500E+05    6,7500E+05  
 6,7500E+05    6,7500E+05    6,7500E+05

CARGAS EXCENTRICAS SOBRE LAS COLUMNAS  
 15,000    36,000    18,000

CRONOMETRO DEL MARCO

28 4000 03 01 1001  
 12 1000 14 10 1000

0 1 0



I O I  
U O U

NUMERO DE REACCIONES      NUMERO DE ESTRATOS DEL SUELO

ESQUEMA DE CADA EJEMPLAR DE SUELO  
2,30000      3,00000      3,00000

NO EN CADA ESTRATO DE SUELO

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 | 0,02500 |
| 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 | 0,02000 |
| 0,01000 | 0,01000 | 0,01000 | 0,01000 | 0,01000 |

VALORES DE INFLUENCIA

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,32000 | 0,01700 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,05200 | 0,02300 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,01100 | 0,00400 | 0,00500 | 0,00200 | 0,00100 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,05700 | 0,22000 | 0,01000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,02700 | 0,04900 | 0,02000 | 0,00500 | 0,00100 |
| 0,00400 | 0,01100 | 0,00700 | 0,00500 | 0,00200 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,00000 | 0,01000 | 0,22000 | 0,01000 | 0,00000 |
| 0,00700 | 0,02000 | 0,04900 | 0,02000 | 0,00700 |
| 0,00500 | 0,00400 | 0,01100 | 0,00400 | 0,00500 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,00000 | 0,00000 | 0,01000 | 0,22000 | 0,00000 |
| 0,00100 | 0,00500 | 0,02000 | 0,04900 | 0,00100 |
| 0,00200 | 0,00500 | 0,00700 | 0,01100 | 0,00200 |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,01700 | 0,00000 |
| 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,02300 | 0,00000 |
| 0,00100 | 0,00400 | 0,00500 | 0,00200 | 0,00100 |

LISTA DE COEFICIENTES

DE VALOR 1

|         |         |          |         |         |         |         |           |
|---------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 1,00000 | 0,00000 | -0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | -11,00000 |
| 1,00000 | 0,00000 | -0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | -11,00000 |

DE VALOR 2

|         |         |         |         |         |         |         |           |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 1,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | -11,00000 |
| 1,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | -11,00000 |

DE VALOR 3



|             |             |             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,000000    | 205,600000  | 1600,602500 | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | -0,552025   |
| -23,053475  | 16,061960   | -3,336401   | 4,220809    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 4           |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 318,195000  | 505,600000  | 2649,110000 | 505,600000  | -17,064927  |
| 0,000000    | 17,064927   | -0,640538   | 8,640533    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 5           |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 318,192000  | 0,000000    | 2467,820000 | 0,000000    | 318,192000  | 0,000000    | -4,532463   |
| 0,000000    | 0,332463    | -3,320269   | 3,320269    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 6           |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 1600,652500 | 565,600000  | 0,000000    | -10,512902  |
| 23,921134   | 0,552025    | -3,309137   | 3,309137    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 7           |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 565,600000  | 1600,652500 | -0,552025   |
| -23,921134  | 16,512902   | -3,330401   | 3,330401    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 8           |             |             |             |             |             |             |
| 1597,040000 | 1697,040000 | 0,000000    | 899,520000  | 1617,040000 | 1617,040000 | 0,000000    | -78,069307  |
| 107,406375  | 2,404114    | -14,860616  | 13,011803   |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 9           |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 1697,040000 | 1697,040000 | 899,520000  | 0,000000    | 1697,040000 | 1697,040000 | +6,484114   |
| -115,326576 | 107,406375  | -23,011803  | 10,066616   |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 10          |             |             |             |             |             |             |
| 565,600000  | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | -17,016751  |
| -23,155979  | -0,302573   | 53,244522   | -2,770970   |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 11          |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | -505,770000 | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | +0,306394   |
| -23,155979  | 26,711000   | -2,770970   | 53,244522   |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 12          |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 4,000000    |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 13          |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | -122,000000 |
| -19,033333  | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    |             |             |             |             |
| 4EYJL04     | 14          |             |             |             |             |             |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 21,277247   |
| 13,202775   | 21,277247   | 0,000000    | 14,230726   | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    |             |
| 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    |             |             |             |             |



VELOCIDAD DE RESOLUCION REFINADA CON -10161125

0.012097 0.000000 -0.012097 0.000000 -0.002377 0.000000 0.002377 21.217291  
18.205295 21.217291 18.205295 14.255728

F(1)=REACCIONES BAJO LAS COLUMNAS

21.217291 18.205295 21.217291

F(1)=REACCIONES AL CENTRO DE LAS COLUMNAS

14.255728 14.255728

F(1,1)=01235 EN LOS YUROS

0.012097 0.000000 -0.012097  
0.000000 0.000000 0.000000  
-0.002377 0.000000 0.002377

MUYCIONES DEL TEMA

0.514893 0.514893 0.514893  
0.514893 0.514893 0.514893

ADVERTENCIAS A LA IZQUIERDA Y A LA DERECHA EN CADA TRAZO

-3.7738 23.5414 -23.5414 3.7738  
0.0000 -3.7738 3.7738 0.0000  
1.3438 -1.3438 1.3438 -1.3438

ADVERTENCIAS ABAJO Y ARRIBA EN CADA COLUMNA

3.7738 0.0000 0.0000 0.0000 -3.7738 0.0000  
0.0000 -1.3438 0.0000 0.0000 0.0000 1.3438

Ejemplo 5 : Se tiene un edificio largo típico de una nave industrial ó -- una escuela , tal como se muestra en la figura.

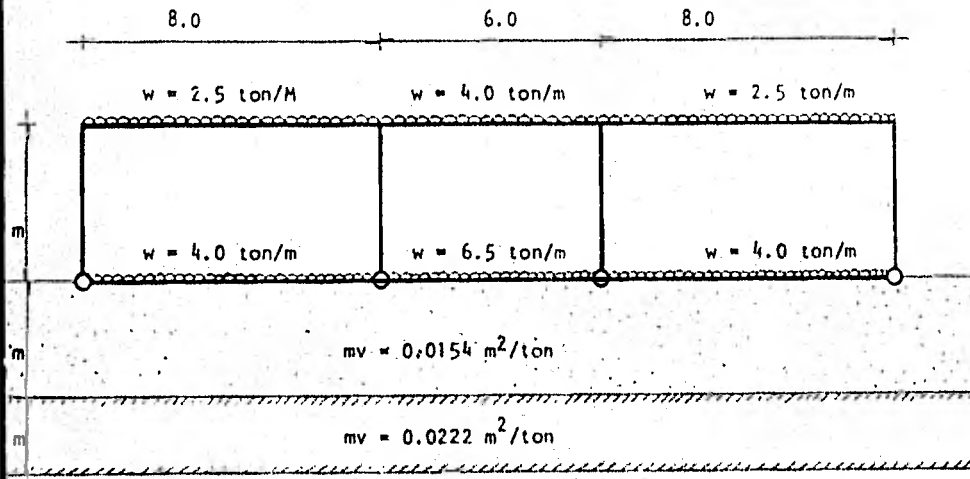


Fig. 7.8.- Croquis del Marco

Propiedades geométricas de las secciones

Módulo de elasticidad de traveses y columnas  $E = 0.15811 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Momentos de inercia de traveses

$$I_t(1,1) = I_t(3,1) = 0.545 \times 10^6 \text{ cm}^4 \quad I_t(1,2) = I_t(3,2) = 0.38186 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_t(2,1) = 0.12487 \times 10^7 \text{ cm}^4 \quad I_t(2,2) = 0.11664 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

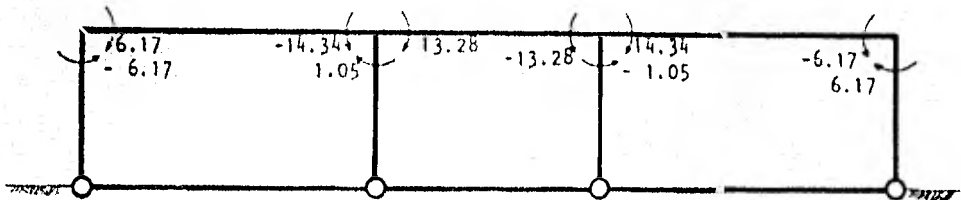
Momento de inercia de columnas

$$I_c(1,1) = I_c(4,1) = 0.135 \times 10^6 \text{ cm}^4 ; I_c(2,1) = I_c(3,1) = 0.42666 \times 10^6 \text{ cm}^4$$



## Valores de influencia

|         |         |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ↓       |         |         |         |         |         |         |
| 0.02120 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00300 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
|         | ↓       |         |         |         |         |         |
| 0.00010 | 0.01060 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00050 | 0.00150 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
|         |         | ↓       |         |         |         |         |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.01210 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00030 | 0.00170 | 0.00070 | 0.00010 | 0.00000 | 0.00000 |
|         |         |         | ↓       |         |         |         |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00020 | 0.01410 | 0.00020 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00060 | 0.00200 | 0.00060 | 0.00000 | 0.00000 |
|         |         |         |         | ↓       |         |         |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.01210 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00010 | 0.00070 | 0.00170 | 0.00030 | 0.00000 |
|         |         |         |         |         | ↓       |         |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.01060 | 0.00010 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.00150 | 0.00050 |
|         |         |         |         |         |         | ↓       |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.02120 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.00300 |



⊕ Momentos de barra sobre nudo

Fig. 7.19.- Momentos en los extremos de las barras en ton-m

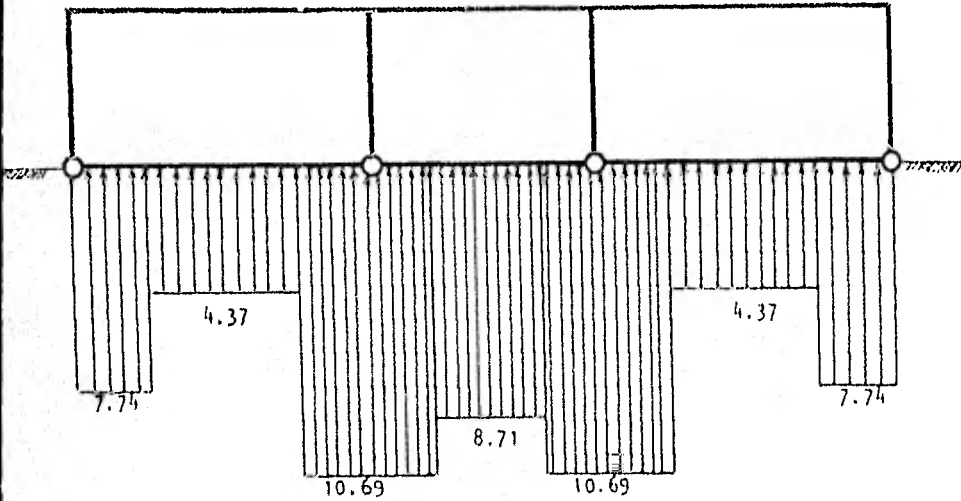


Fig. 7.20.- REACCIONES DEL TERRENO EN TON/M

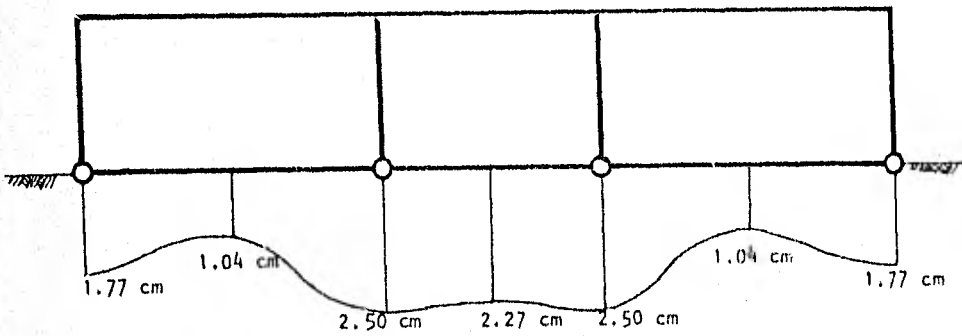


Fig. 7.21.- HUNDIMIENTOS CALCULADOS

Los resultados que se obtienen de este ejemplo eran de suponerse ya que se trata de una cimentación totalmente flexible ( no admite momentos en sus nudos ) .

Al observar las reacciones que resultaron podemos considerar que cada una de las trabes de cimentación está trabajando como si estuviera aislada. - Esto es debido a la falta de continuidad en los nudos de cimentación.



ANÁLISIS DE MARCOS PLANOS CONSIDERANDO  
INTERACCIÓN ENTRE SUELO Y ESTRUCTURA

NÚMERO DE COLUMNAS    4    NÚMERO TOTAL DE NIVELES    2    NÚMERO DE NIVELES QUE SE ANALIZAN    2

LUGITUD DE TRABES  
6,30000    6,00000    6,00000

ALTURAS DE COLUMNAS  
4,00000

CARGAS EN CADA NIVEL  
4,00000    6,50000    8,00000  
2,50000    4,00000    2,50000

MÓDULO DE ELASTICIDAD DE TRABES  
1,5811E+06    1,5811E+06    1,5811E+06  
1,5811E+06    1,5811E+06    1,5811E+06

MÓDULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS  
1,5811E+06    1,5811E+06    1,5811E+06    1,5811E+06

MÓDULO DE INERCIA DE TRABES  
1,34510E+06    1,2407E+07    1,34500E+06  
1,33132E+06    1,1609E+07    1,33100E+06

MÓDULO DE INERCIA DE COLUMNAS  
1,3500E+06    1,2500E+06    1,2500E+06    1,3500E+06

CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LAS COLUMNAS  
0,000    0,000    0,000    0,000

CARACTERÍSTICAS DEL MARCO

Y = 1000 (1+1) (1+1) (1+1)  
Z = 1000 (1+1) (1+1) (1+1)

1 1 1 1  
1 1 1 1

ESTADO DE ESFUERZOS DEL SUELO



|   |             |             |             |             |             |              |           |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-----------|
| 0,000000                                      | 0,000000    | 754,678558  | 2307,828970 | 0,000000    | -0,008776   | -1,232170    | 1,259567  |
| 0,000000                                      | -0,060927   | 0,030565    |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 3           |             |             |             |             |              |           |
| 2269,095673                                   | 2269,095673 | 0,000000    | 0,000000    | -16,519123  | 0,513975    | 0,017372     | 0,000000  |
| -16,061131                                    | 0,121854    | 0,000000    |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 5           |             |             |             |             |              |           |
| 0,000000                                      | 7220,473200 | 7220,973200 | 0,000000    | -12,000000  | -53,431120  | 12,431124    | 0,000000  |
| -24,327329                                    | -9,000000   | 0,127529    |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 7           |             |             |             |             |              |           |
| 0,000000                                      | 0,000000    | 2264,075673 | 2264,095673 | -16,000000  | -28,017542  | -28,513745   | 0,519123  |
| -32,000000                                    | -24,121854  | -15,930869  |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 9           |             |             |             |             |              |           |
| 0,000000                                      | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | -0,052576   | -0,046066   | -0,007072    | 0,000000  |
| 1,765109                                      | -0,019493   | 0,000000    |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 7           |             |             |             |             |              |           |
| 0,000000                                      | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | -0,919143   | -0,919143    | 0,000000  |
| -0,023220                                     | 2,745622    | -0,023220   |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 10          |             |             |             |             |              |           |
| 0,000000                                      | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | -0,002072   | -0,001066    | -0,052056 |
| 3,000000                                      | -0,014443   | 1,765108    |             |             |             |              |           |
| REYGLU4                                       | 11          |             |             |             |             |              |           |
| 0,000000                                      | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 0,000000    | 14,000000   | 14,000000    | 8,000000  |
| 16,000000                                     | 12,000000   | 16,000000   |             |             |             |              |           |
| REGION 3 DE TERRILOS INDEPENDIENTES           |             |             |             |             |             |              |           |
| 1,333333                                      | -1,333333   | -13,333333  | 13,333333   | -200,000000 | -501,000000 | -1128,000000 | 6,666667  |
| 6,097750                                      | 4,016667    | 568,030000  |             |             |             |              |           |
| REGION 4, SUCUCION DE TERRILOS INDEPENDIENTES |             |             |             |             |             |              |           |
| -0,007720                                     | 0,004411    | -0,004411   | 0,007720    | 1,743554    | 10,570071   | 10,671071    | 7,743554  |
| 4,977004                                      | 8,712411    | 4,977004    |             |             |             |              |           |
| NO DE CUENTAS DE LA SUBREGION IAPRUJ          |             |             |             |             |             |              |           |
| REGION 4, SUCUCION DEFINIDA CON 11 SIGILLAS   |             |             |             |             |             |              |           |
| -0,007720                                     | 0,004411    | -0,004411   | 0,007720    | 1,743554    | 10,570071   | 10,671071    | 7,743554  |
| 4,977004                                      | 8,712411    | 4,977004    |             |             |             |              |           |
| LISTA DE CUENTAS DE LAS SUCUCIONES            |             |             |             |             |             |              |           |
| 1,743554                                      | 10,671071   | 10,671071   | 7,743554    |             |             |              |           |





T(1)=REACCIONES AL CENTRO DE LAS CILIAS

4,377009      0,712411      4,377009

F(1,1)GIGIOS EN LOS TUBOS

-3:888888      0,888888      -0:888888      3:888888

MUOVIMIENTOS DEL TERRENO

0,017701      0,310445      0,023071      0,022712      0,025041      0,010445      0,017701

MUOVIMIENTOS A LA IZQUIERDA Y A LA DERECHA EN CADA IMAGEN

0:8888      -18:8888      18:8888      -18:8888      0,8888      -0:8888

MUOVIMIENTOS ARRIBA Y ABAJO EN CADA COLUMNA

0,0000      -0,1793      0,0000      1,0585      0,0000      -1,0585      0,0000      0,1793



Ejemplo 6 : Este ejemplo se presenta para demostrar la aplicabilidad del método en estructuras con poca asimetría.

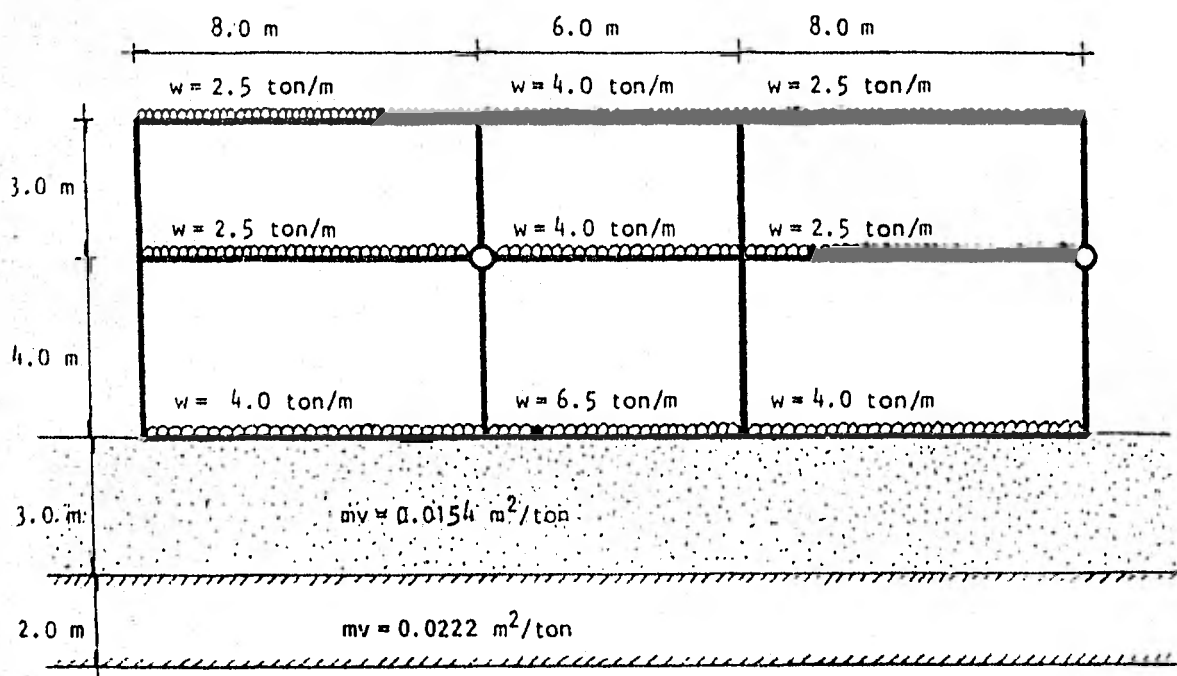


Fig. 7.22.- CROQUIS DEL MARCO

Módulo de elasticidad de traveses y columnas  $E = 0.15811 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Momentos de inercia de traveses

$$I_t(1,1) = I_t(3,1) = 0.545 \times 10^6 \text{ cm}^4 ; I_t(2,1) = 0.12487 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

$$I_t(1,2) = I_t(3,2) = I_t(1,3) = I_t(3,3) = 0.38186 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_t(2,2) = I_t(2,3) = 0.11664 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

Momentos de inercia de columnas

$$I_c(1,1) = I_c(4,1) = 0.10416 \times 10^7 \text{ cm}^4 ; I_c(2,1) = I_c(3,1) = 0.216 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

$$I_c(1,2) = I_c(4,2) = 0.42666 \times 10^6 \text{ cm}^4 ; I_c(2,2) = I_c(3,2) = 0.10416 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

## Valores de influencia

|         |         |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.02120 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00300 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00010 | 0.01060 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00050 | 0.00150 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.01210 | 0.00030 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00030 | 0.00170 | 0.00070 | 0.00010 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00020 | 0.01410 | 0.00020 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00060 | 0.00200 | 0.00060 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.01210 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00010 | 0.00070 | 0.00170 | 0.00030 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.01060 | 0.00010 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.00150 | 0.00050 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.02120 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00030 | 0.00300 |

Este ejemplo no es muy apropiado para este método, ya que tenemos una cierta asimetría que como se recordará se dijo que no era muy conveniente -- hacer el análisis para estos casos, pero nos servirá para mostrar que aún -- así el programa de computadora es válido.

Un resultado de interés es que en este marco, sin tener articulaciones en su cimentación, se comporta como uno de cimentación flexible tanto en sus reacciones como en sus movimientos, ya que éstos son muy variables entre sí. Estos resultados son comparables a los obtenidos en el ejemplo 5 .

De este ejemplo y de el número 5 podemos deducir que para relaciones -- largo de cimentación a altura del marco grande, la cimentación se comporta -- como una viga de gran flexibilidad, obteniendo hundimientos diferenciales de gran magnitud y reacciones cuya distribución a lo largo de la cimentación es muy variable.

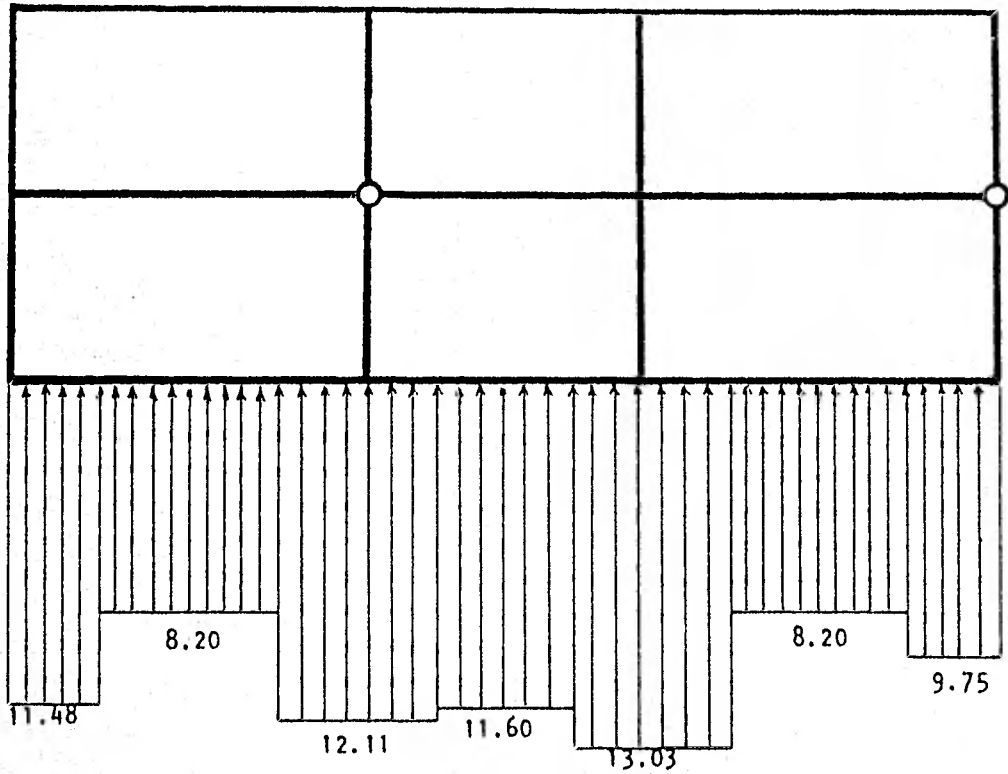


Fig. 7.23.- REACCIONES DEL TERRENO EN TON/M

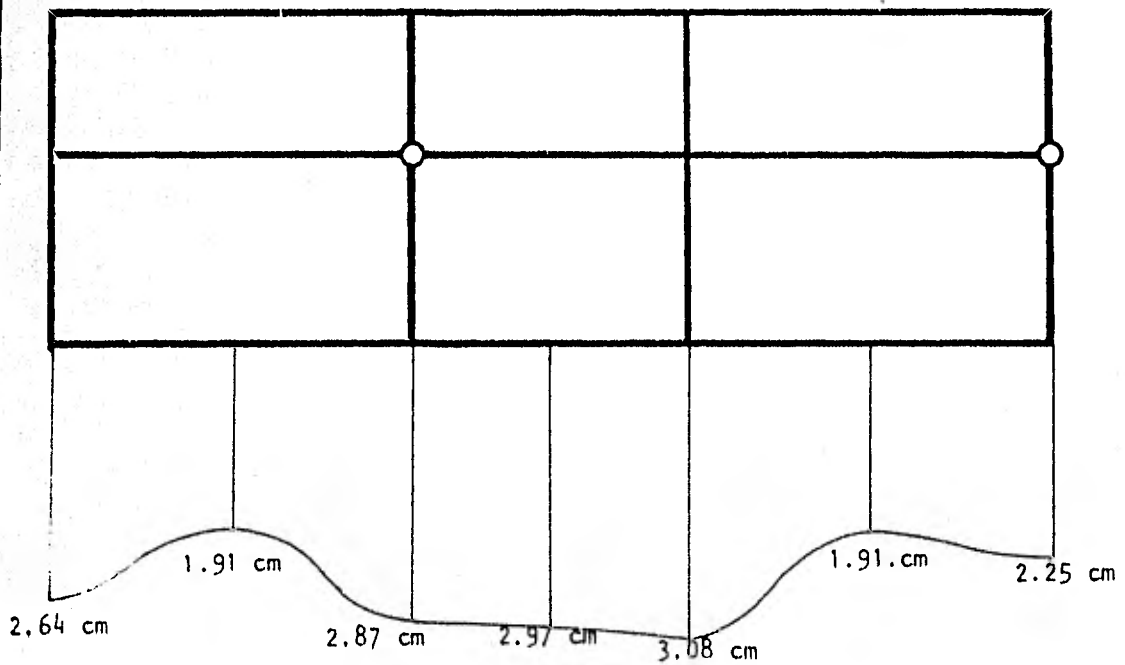
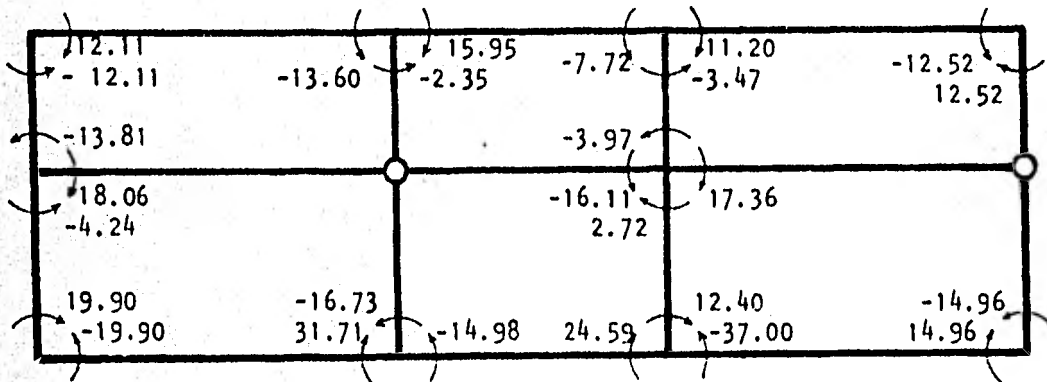


Fig. 7.24.- HUNDIMIENTOS CALCULADOS




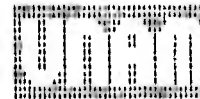

 Momentos de barra sobre nudo

Fig. 7.25.- Momentos en los extremos de la barras en ton-m

ANALISIS DE ARCS PLANOS CONSIDERANDO  
 INTERACCION ENTRE SUELO Y ESTRUCTURA



NUMERO DE COLUMNAS 4 NUMERO TOTAL DE NIVELES 3 NUMERO DE NIVELES QUE SE ANALIZARAN 3

LOGITUD DE TRAJES  
 8,00000 8,00000 8,00000

ALTURAS DE COLUMNAS  
 4,00000 3,00000

CARGAS EN CAJA TRAJE  
 4,00000 8,50000 4,00000  
 2,50000 4,00000 3,50000  
 2,50000 4,00000 2,50000

MODULO DE ELASTICIDAD DE TRAJES  
 1,5811E+05 1,5811E+06 1,5811E+05  
 1,5811E+06 1,5811E+06 1,5811E+06  
 1,5811E+05 1,5811E+06 1,5811E+06

MODULO DE ELASTICIDAD DE COLUMNAS  
 1,5811E+05 1,5811E+06 1,5811E+06 1,5811E+06  
 1,5811E+06 1,5811E+06 1,5811E+06 1,5811E+06

MOMENTO DE INERCIA DE TRAJES  
 2,4502E+05 1,2437E+07 2,4500E+06  
 3,3142E+06 1,1684E+07 3,3140E+06  
 3,3142E+05 1,1684E+07 3,3140E+05

MOMENTO DE INERCIA DE COLUMNAS  
 1,0410E+07 2,1500E+07 2,1500E+07 1,0410E+07  
 4,2656E+06 1,0410E+07 1,0410E+07 4,2656E+06

CARGAS CONCENTRADAS SOBRE LAS COLUMNAS  
 0,000 0,000 0,000 0,000

CONDICIONES DEL NUDO

2E+000 1E+000  
 1E+000 1E+000

0 0 0 0





|                                       |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
|---------------------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------|-------------|-------------|
| 0.175320                              |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| REV LUM 5                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 0.000000<br>0.000000<br>-3.941724     | 5290.232611<br>0.000000 | 2331.133883<br>0.000000 | 1077.124375<br>-7.116526 | 4.000000<br>4.051620    | 0231.740000<br>520844 | -0.0993100  | 9.000000    |
| REV LUM 4                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 0.000000<br>0.000000<br>3.710290      | 0.000000<br>0.000000    | 1077.124375<br>0.000000 | 4334.022350<br>-0.012554 | 0.000000<br>-1.521145   | 5.749311              | 0.000000    | -0.000000   |
| REV LUM 5                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 911.100000<br>0.000000<br>0.000000    | 0.000000<br>0.000000    | -0.244980               | 8.828288                 | 1300.000000<br>0.000000 | 8.000000              | 2200.071230 | 0.000000    |
| REV LUM 6                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 207.0.000000<br>0.000000<br>0.163763  | 0.000000<br>0.000000    | -0.233982               | -4.321005                | 8.788388                | 8.300000              | 120.070230  | 1500.000000 |
| REV LUM 7                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 1063.0.000000<br>0.000000<br>0.194130 | 0.000000<br>0.000000    | 0.000000                | -0.788388                | 8.599000                | 5007.217500           | -0.000000   | 107.000000  |
| REV LUM 8                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 200.0.000000<br>0.000000<br>0.097163  | 0.000000<br>0.000000    | 0537.000000             | -4.788388                | 8.788388                | 357.217500            | -0.000000   | -0.000000   |
| REV LUM 9                             |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 0.000000<br>0.000000<br>0.000000      | 0.000000<br>0.000000    | -0.233982               | 7.840484                 | 2200.000000             | 8.000000              | 600.000000  | 750.000000  |
| REV LUM 10                            |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 15.0.000000<br>0.000000<br>0.030563   | 4002.000000<br>0.000000 | 0.000000                | -0.000000                | -4.000000               | 1.288388              | 0.000000    | -0.000000   |
| REV LUM 11                            |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 223.0.000000<br>0.000000<br>0.000000  | 323.0.000000            | -27.000000              | 8.840480                 | 1170.000000             | 8.300000              | 220.000000  | 220.000000  |
| REV LUM 12                            |                         |                         |                          |                         |                       |             |             |
| 17.0.000000<br>0.000000<br>0.000000   | 1077.0.000000           | 4334.000000             | -5.000000                | 0.000000                | 4616.000000           | -20.000000  | 9220.000000 |







# CAPITULO VIII

## C A P I T U L O   V I I I

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se desarrollaron las ecuaciones necesarias para la aplicación de un método de análisis de Interacción Suelo-Estructura en marcos planos reticulares con articulaciones en cualquiera de sus nudos y cimentado sobre un terreno de mediana a alta compresibilidad.

Se elaboró también un programa de computadora en lenguaje FORTRAN con el fin de hacer más práctica la aplicación de dicho método.

Con la ayuda de este tipo de análisis es posible conocer simultáneamente los elementos mecánicos en la estructura y los hundimientos del terreno, ambos producidos exclusivamente por cargas verticales gravitacionales. Es importante aclarar que este método no es aplicable ante cargas laterales.

Podemos afirmar que la hipótesis de que la reacción del terreno es variable a lo largo de la cimentación es válida, ya que en general los resultados obtenidos con el método de interacción suelo-estructura dan lugar a una reacción del terreno que se aparta de la uniforme.

Por otra parte, en el ejemplo número ( 4 ) se puede observar que la sustitución de los niveles superiores de la estructura por cargas concentradas, arroja resultados prácticamente iguales. Es probable que analizando únicamente la mitad de una estructura alta, sustituyendo el resto de ella por cargas concentradas, dé lugar a una reacción del terreno similar al análisis de interacción suelo-estructura completo. Sin embargo, resultaría conveniente ana-

lizar con más detalle este punto.

Es notable también la diferencia que existe entre un análisis realizado con este método y otro con los tradicionales, ya que en el primero se detectaron en las columnas de los primeros niveles momentos importantes debido a los hundimientos diferenciales que representan serias deficiencias de la estructura que no se toman en cuenta en los métodos tradicionales.

Se observó que para marcos con una relación largo de cimentación a altura grande, los hundimientos son típicos de una estructura flexible donde los hundimientos diferenciales entre columnas son mayores que en un marco con relación largo a altura pequeña, donde los hundimientos son típicos de una estructura rígida.

Así mismo se observó que incluyendo articulaciones, en distintos nudos de una misma estructura, es alterada su rigidez y por consiguiente su respuesta en los hundimientos. Basándose en lo anterior podemos proponer, para posteriores trabajos, una forma de obtener la estructura óptima, que consiste en analizar varias alternativas de distribución de nudos articulados en el marco de tal manera que se obtengan hundimientos diferenciales y elementos mecánicos que conduzcan al costo mínimo de la obra.

No se recomienda aplicar el método en estructuras con fuerte asimetría, ya que no fueron considerados desplazamientos laterales producidos por esta misma.

Con el método propuesto se pretende dar los primeros pasos en la búsqueda de métodos prácticos que contemplen el aspecto estructural y al de mecánica de suelos en conjunto; por lo que puede estar sujeto a procesos de optimización en los aspectos de computación y métodos de análisis, tanto estructural como del suelo.

Además es necesario que todas las hipótesis planteadas se confirmen, en trabajos posteriores, mediante experimentación en modelos físicos y con observaciones en campo de estructuras reales.

# APENDICE I

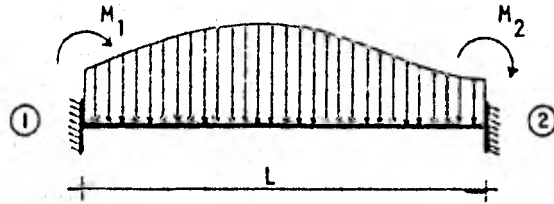
## APENDICE I

### *I.1.- Obtención de las ecuaciones de momentos en los extremos de una barra con ambos nudos continuos.*

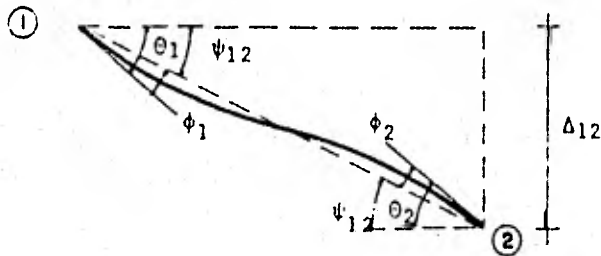
La ecuación de pendiente-deformación que utilizaremos en la obtención de los momentos está obtenida a partir de los Teoremas de Mohr y consiste en expresar el momento en el extremo de una barra en función de los giros de la tangente en cada extremo de la curva elástica de la barra ( desplazamientos-angulares ), de la rotación de la cuerda que une los extremos de la elástica y del sistema de cargas aplicado en dicha barra.

La convención de signos utilizada supone que los momentos de nudo sobre barra en los extremos de las barras, los giros  $\theta$  de las tangentes en los extremos y  $\psi$  de la cuerda, con respecto a la posición original de la barra, - son positivos en el sentido de giro de las manecillas del reloj.

Para el Caso I a la trabe se le somete a un sistema de cargas cualesquiera y un momento en cada extremo y se supone una deformación de la barra como se muestra en la Fig. A1-1 .



a) Sistema cualesquiera de Cargas



b) Deformación de la Trabe

Fig. A1-1.- Cargas y deformaciones en una trabe con dos nudos continuos

De esta figura podemos establecer las siguientes relaciones :

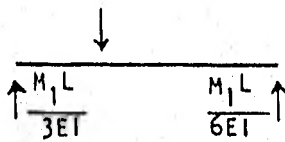
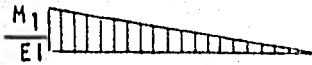
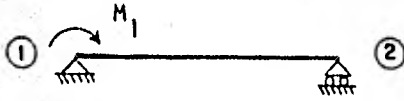
$$\phi_1 = \theta_1 - \psi_{12} \quad \dots\dots\dots ( A1-1 )$$

$$\phi_2 = \theta_2 - \psi_{12} \quad \dots\dots\dots ( A1-2 )$$

donde los giros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  los obtenemos utilizando los teoremas de la viga conjugada para lo cual se calculan los giros para cada una de las cargas en la trabe y después los sumaremos valiéndonos del principio de superposición.- Consideraremos la trabe como simplemente apoyada y en los nudos continuos -- aplicaremos un momento.



a) Momento aplicado en el nudo 1

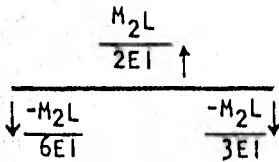


Los cortantes en la viga conjugada equivalen a los giros en la viga real, por lo tanto, el cortante en el 2 será el valor de la reacción - pero con signo contrario.

$$\therefore \phi_1 = \frac{M_1 L}{3EI} \quad \dots (A1-3)$$

$$\phi_2 = \frac{-M_1 L}{6EI} \quad \dots (A1-4)$$

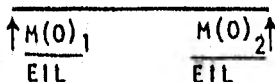
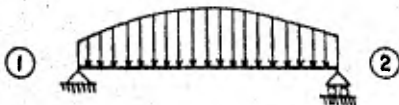
b) Momento aplicado en el punto 2



$$\therefore \phi_1 = \frac{-M_2 L}{6EI} \quad \dots (A1-5)$$

$$\phi_2 = \frac{M_2 L}{3EI} \quad \dots (A1-6)$$

c) Sistema de cargas verticales en la trabe



$$\therefore \phi_1 = \frac{M(0)_1}{EIL} \quad \dots (A1-7)$$

$$\phi_2 = \frac{-M(0)_2}{EIL} \quad \dots (A1-8)$$

donde  $(M0)_1$  y  $(M0)_2$  indica el momento estático con respecto al punto 1 y 2 del diagrama de momentos debido al sistema de cargas aplicado en la trabe libremente apoyada.

Superponiendo efectos, sumando ( A1-3 ), ( A1-5 ) y ( A1-7 ) tenemos :

$$\phi_1 = \frac{M_1 L}{3EI} - \frac{M_2 L}{6EI} + \frac{(MO)_1}{EIL} \quad \dots ( A1-9 )$$

y ahora sumando ( A1-4 ), ( A1-6 ) y ( A1-8 ) tenemos :

$$\phi_2 = \frac{-M_1 L}{6EI} + \frac{M_2 L}{3EI} - \frac{(MO)_2}{EIL} \quad \dots ( A1-10 )$$

Sustituyendo las ecuaciones ( A1-9 ) y ( A1-10 ) en las ecuaciones -- ( A1-1 ) y ( A1-2 ) respectivamente tenemos :

$$\frac{M_1 L}{3EI} - \frac{M_2 L}{6EI} + \frac{(MO)_2}{EIL} = \theta_1 - \psi_{12} \quad \dots ( A1-11 )$$

$$\frac{-M_1 L}{6EI} + \frac{M_2 L}{3EI} - \frac{(MO)_1}{EIL} = \theta_2 - \psi_{12} \quad \dots ( A1-12 )$$

Si a estas dos ecuaciones las consideramos formando un sistema en donde las incógnitas son  $M_1$  y  $M_2$  , resolviéndolo nos quedará :

$$M_1 = \frac{2EI}{L} ( 2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi_{12} ) + \frac{2}{L^2} \{ (MO)_1 - 2(MO)_2 \} \quad \dots ( A1-13 )$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L} ( \theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi_{12} ) + \frac{2}{L^2} \{ 2(MO)_1 - (MO)_2 \} \quad \dots ( A1-14 )$$

Si se considera ahora que en la trabe los dos extremos están empotrados, las condiciones de desplazamientos serán :

$$\theta_1 = \theta_2 = \psi_{12} = 0 \quad \dots ( A1-15 )$$

Estos valores al ser sustituidos en las ecuaciones ( A1-13 ) y ( A1-14 ) se obtienen :

$$M_1 = M_{e1} = \frac{2}{L^2} \{ (MO)_1 - 2(MO)_2 \} \quad \dots ( A1-16 )$$

$$M_2 = Me_2 = \frac{2}{L^2} ( 2(Mo)_1 - (Mo)_2 ) \quad \dots\dots\dots ( A1-17 )$$

a los que llamaremos momentos de empotramiento de la trabe. Si ahora relacionamos estas ecuaciones con ( A1-13 ) y ( A1-14 ) resulta :

$$M_1 = \frac{2EI}{L} ( 2O_1 + O_2 - 3 \psi_{12} ) + Me_1 \quad \dots\dots\dots ( A1-18 )$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L} ( O_1 + 2O_2 - 3 \psi_{12} ) + Me_2 \quad \dots\dots\dots ( A1-19 )$$

Volviendo a la figura 3.1 se observa que el ángulo  $\psi_{12}$  puede expresarse como :

$$\psi_{12} = \text{Ang Tan } \frac{\Delta_{12}}{L} \quad \dots\dots\dots ( A1-20 )$$

por tratarse de un ángulo pequeño debido a hundimientos diferenciales entre las columnas, podemos suponer para fines prácticos que :

$$\psi_{12} = \frac{\Delta_{12}}{L} \quad \dots\dots\dots ( A1-21 )$$

Sustituyendo esta ecuación en ( A1-18 ) y ( A1-19 ) y simplificando :

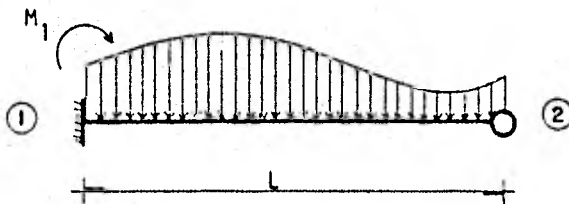
$$M_1 = 4 \frac{EI}{L} O_1 + 2 \frac{EI}{L} O_2 - 6 \frac{EI}{L^2} \Delta_{12} + Me_1 \quad \dots\dots\dots ( A1-22 )$$

$$M_2 = 2 \frac{EI}{L} O_1 + 4 \frac{EI}{L} O_2 - 6 \frac{EI}{L^2} \Delta_{12} + Me_2 \quad \dots\dots\dots ( A1-23 )$$

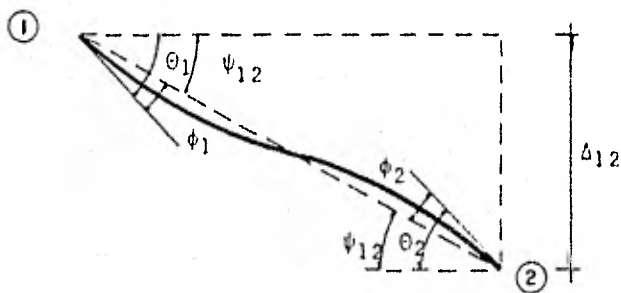
1.2.- Obtención de la ecuación de momento en el extremo de una barra con un nudo continuo y el otro articulado.

Haremos el desarrollo de la misma forma que como se procedió para el -- Caso I en la sección anterior

Se considera la trabe como libremente apoyada con un momento aplicado - en el extremo del nudo continuo y un sistema de cargas cualesquiera. ( ver -- fig. A1-2 ).



a) Sistema cualesquiera de cargas



b) Deformación de la Trabe

Fig. A1-2.- Cargas y deformación en una trabe con un nudo continuo y el otro articulado.

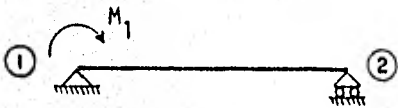
De la figura A1-2 podemos establecer las siguientes relaciones :

$$\phi_1 = \theta_1 - \psi_{12} \quad \dots\dots (A1-24)$$

$$\phi_2 = \theta_2 - \psi_{12} \quad \dots\dots (A1-25)$$

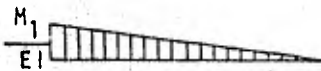
Usando los teoremas de viga conjugada obtendremos los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  para cada una de las cargas .

a) Momento aplicado en el nudo 1

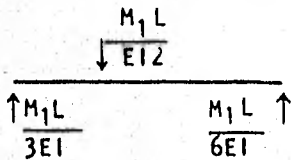


de donde :

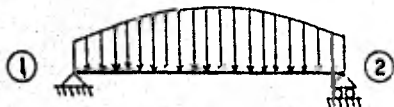
$$\phi_1 = \frac{M_1 L}{3EI} \quad \dots\dots (A1-26)$$



$$\phi_2 = \frac{-M_1 L}{6EI} \quad \dots\dots (A1-27)$$



b) Sistema de cargas verticales en la trabe



de donde :

$$\phi_1 = \frac{(MO)_1}{EIL} \quad \dots\dots (A1-28)$$



$$\phi_2 = \frac{-(MO)_2}{EIL} \quad \dots\dots (A1-29)$$



Superponiendo efectos, sumamos (A1-26) y (A1-28) tenemos :

$$\phi_1 = \frac{M_1 L}{3EI} + \frac{(MO)_1}{EIL} \quad \dots\dots (A1-30)$$

y si ahora sumamos (A1-27) y (A1-29) tenemos :

$$\phi_2 = \frac{-M_1 L}{6EI} - \frac{(MO)_2}{EIL} \quad \dots\dots (A1-31)$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones ( A1-30 ) y ( A1-31 ) en las ecuaciones ( A1-24 ) y ( A1-25 ) se tienen las ecuaciones :

$$\frac{M_1 L}{3EI} + \frac{(MO)_1}{EIL} = \theta_1 - \psi_{12} \quad \dots\dots ( A1-32 )$$

$$\frac{-M_1 L}{6EI} - \frac{(MO)_2}{EIL} = \theta_2 - \psi_{12} \quad \dots\dots ( A1-33 )$$

Aquí se tiene una sola incógnita que es  $M_1$  y como no nos interesará el giro en el nudo 2 podemos eliminar la ecuación ( A1-33 ) y de la otra despejar la incógnita, que será :

$$M_1 = \frac{3EI}{L} \theta_1 - \frac{3EI}{L} \psi_{12} - \frac{3(MO)_1}{L^2} \quad \dots\dots ( A1-34 )$$

de donde la expresión del momento de empotramiento será :

$$Me_1 = \frac{-3(MO)_1}{L^2} \quad \dots\dots ( A1-35 )$$

si esta ecuación la sustituimos en ( A1-34 )

$$M_1 = \frac{3EI}{L} \theta_1 - \frac{3EI}{L} \psi_{12} + Me_1 \quad \dots\dots ( A1-36 )$$

y si hacemos :

$$\psi_{12} = \frac{\Delta_{12}}{L}$$

y si sustituimos nos quedará la ecuación :

$$M_1 = \frac{3EI}{L} \theta_1 - \frac{3EI}{L^2} \Delta_{12} + Me_1 \quad \dots\dots ( A1-37 )$$

Para el caso de que el nudo continuo se encuentre en el extremo derecho se hace un desarrollo similar y se obtiene la ecuación :

$$M_2 = \frac{3EI}{L} \theta_2 - \frac{3EI}{L^2} \Delta_{12} + Me_2 \quad \dots\dots ( A1-38 )$$

### 1.3.- Obtención de las expresiones de los momentos de empotramiento.

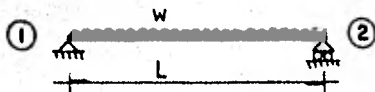
#### a) Trabe de superestructura con ambos nudos continuos

Partimos de las ecuaciones ( A1-16 ) y ( A1-17 ) que fueron obtenidas - en la sección I.1 de este mismo apéndice :

$$M_{e_1} = \frac{2}{L^2} \{ (M_0)_1 - 2(M_0)_2 \} \quad \dots \quad ( A1-16 )$$

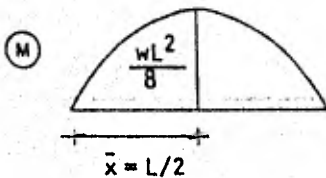
$$M_{e_2} = \frac{2}{L^2} \{ 2(M_0)_1 - (M_0)_2 \} \quad \dots \quad ( A1-17 )$$

Vamos a obtener primeramente los momentos estáticos  $(M_0)_1$  y  $(M_0)_2$  del - diagrama de momentos producido por el sistema de cargas con respecto a un -- punto en cada extremo de la trabe. Por ser una trabe de superestructura so-- lamente está sujeta a carga lineal uniformemente repartida .



Tomando momentos con respecto al punto 1 :

$$(M_0)_1 = \frac{2}{3} \frac{wL^2}{8} L \frac{L}{2} = \frac{wL^4}{24} \quad \dots \quad ( A1-39 )$$



Tomando momentos con respecto al punto 2 :

$$(M_0)_2 = \frac{2}{3} \frac{wL^2}{8} L \frac{L}{2} = \frac{wL^4}{24} \quad \dots \quad ( A1-40 )$$

Sustituyendo los valores de ( A1-39 ) y ( A1-40 ) en las ecuaciones -- ( A1-16 ) y ( A1-17 ) :

$$Me_1 = \frac{2}{L^2} \left\{ \frac{wL^4}{24} - 2 \left( \frac{wL^4}{24} \right) \right\} = \frac{-wL^2}{12} \quad \dots\dots (A1-41)$$

$$Me_2 = \frac{2}{L^2} \left\{ 2 \left( \frac{wL^4}{24} \right) - \frac{wL^4}{24} \right\} = \frac{wL^2}{12} \quad \dots\dots (A1-42)$$

Pero como trabajaremos con momentos de barra sobre nudo las expresiones (A1-41 y (A1-42) cambian de signo :

$$Me_1 = \frac{wL^2}{12} \quad \dots\dots (A1-43) \quad Me_2 = \frac{-wL^2}{12} \quad \dots\dots (A1-44)$$

b) Trabe de superestructura con un nudo continuo y el otro articulado

Partiendo de la ecuación (A1-35) obtenida en la sección 1.2 de este mismo apéndice .

$$Me_1 = \frac{-3 (M0)_1}{L^2} \quad \dots\dots (A1-35)$$

Sustituyendo el valor de (A1-39)

$$Me_1 = -3 \left\{ \frac{\frac{wL^4}{24}}{L^2} \right\} = \frac{-wL^2}{8} \quad \dots\dots (A1-45)$$

Pero como nos interesan momentos de barra sobre nudo, se cambia de signo :

$$Me_1 = \frac{wL^2}{8} \quad \dots\dots (A1-46)$$

Siguiendo el mismo procedimiento cuando el nudo continuo se encuentre en el punto 2 tenemos :

$$Me_2 = \frac{-wL^2}{8} \quad \dots\dots (A1-47)$$



## c) Trabe de cimentación con dos nudos continuos

En este caso por simplicidad, no utilizaremos el mismo método usado en los incisos a) y b) porque se complica el desarrollo debido al número de cargas que actúan. Ahora solamente aplicaremos fórmulas comunes que aparecen en cualquier manual, superponiendo efectos es decir obteniendo el momento de empotramiento para cada una de las cargas y después las sumaremos.

$$\begin{aligned}
 M_{e1} = & \frac{wL^2}{12} - \left\{ \frac{1}{12} r_1 \left(\frac{L}{4}\right)^2 \left( 4 \left(\frac{3}{4}L\right) + 2 \left(\frac{3}{4}L\right) + \left(\frac{L}{4}\right)^2 \right) \right\} - \\
 & - \left\{ \frac{1}{24} t_1 \left(\frac{L}{2}\right)L \left( 3 - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{L^2} \right) \right\} - \\
 & - \left\{ \frac{1}{12} r_2 \left(\frac{L}{4}\right)^2 \left( 3 - 2 \left(\frac{3}{4}L\right) - \frac{\left(\frac{3}{4}L\right)^2}{L^2} - 2 \frac{\left(\frac{L}{4}\right)^2}{L^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

simplificando nos queda :

$$M_{e1} = \frac{wL^2}{12} - \frac{67}{3072} r_1 L^2 - \frac{11}{192} t_1 L^2 - \frac{13}{3072} r_2 L^2 \quad \dots\dots\dots (A1-48)$$

de igual forma si hacemos el mismo desarrollo pero para el otro extremo:

$$M_{e2} = \frac{-wL^2}{12} + \frac{13}{3072} r_1 L^2 + \frac{11}{192} t_1 L^2 + \frac{67}{3072} r_2 L^2 \quad \dots\dots\dots (A1-49)$$

estas dos expresiones son las del momento de empotramiento para ambos nudos continuos en una trabe de cimentación .

## d) Trabe de cimentación con un nudo continuo y el otro articulado

Procediendo de igual forma que en el inciso anterior y apoyándose en los resultados ahí obtenidos haremos la expresión para cuando el nudo continuo está en el extremo izquierdo.

Si consideramos la trabe como empotrada en ambos extremos y planteamos la ecuación de momento en el punto 2:

$$M_2 = \frac{4EI}{L} \theta_2 + \frac{2EI}{L} \theta_1 - \frac{wL^2}{12} + \frac{13}{3072} r_1 L^2 + \frac{11}{192} t_1 L^2 + \frac{67}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (A1-50)$$

si tomamos como hipótesis que  $M_2=0$  y  $\theta_1=0$  y sustituimos en ( A1-50 ) --  
tenemos :

$$0 = \frac{4EI}{L} \theta_2 - \frac{wL^2}{12} + \frac{13}{3072} r_1 L^2 + \frac{11}{192} t_1 L^2 + \frac{67}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (A1-51)$$

despejando  $\theta_2$  de (A1-51) tenemos :

$$\theta_2 = \frac{\frac{wL^2}{12} - \frac{13}{3072} r_1 L^2 - \frac{11}{192} t_1 L^2 - \frac{67}{3072} r_2 L^2}{\frac{4EI}{L}} \quad \dots (A1-52)$$

ahora planteando el momento en 1 :

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 + \frac{wL^2}{12} - \frac{67}{3072} r_1 L^2 - \frac{11}{192} t_1 L^2 - \frac{13}{3072} r_2 L^2 \quad \dots (A1-53)$$

sustituyendo la ecuación ( A1-52 ) en ( A1-53 ) y simplificando :

$$M_{e1} = \frac{wL^2}{8} - \frac{49}{2048} r_1 L^2 - \frac{11}{128} t_1 L^2 - \frac{31}{2048} r_2 L^2 \quad \dots (A1-54)$$

De igual forma cuando el nudo continuo está en el punto 2 la ecuación -  
será :

$$M_{e2} = \frac{-wL^2}{8} + \frac{31}{2048} r_1 L^2 + \frac{11}{128} t_1 L^2 + \frac{49}{2048} r_2 L^2 \quad \dots (A1-55)$$

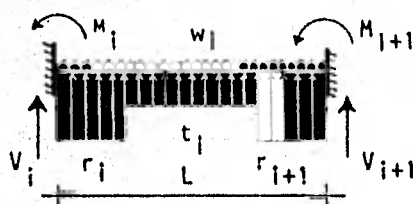
#### 4.- Obtención de las ecuaciones de desplazamiento al centro de la cruzja.

Utilizaremos los teoremas de la viga conjugada para obtener el desplazamiento al centro de la cruzja. Con este método se supone una viga ficticia denominada viga conjugada que tiene la misma longitud que la viga real pero con apoyos tales que si la viga conjugada se carga con el diagrama  $\frac{M}{EI}$  de la viga real, la fuerza cortante de la viga conjugada en una sección cualquiera es igual a la pendiente de la tangente ( giro ) de la viga real en ese punto, y el momento flexionante de la viga conjugada en un punto cualquiera es el desplazamiento de ese punto en la viga real. ( Luthe pag. 95 ) . Para nuestro caso este punto es el centro de la cruzja .

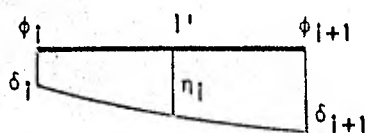
Los apoyos de la viga conjugada se pueden determinar considerando las características de la viga real y las condiciones correspondientes en la viga conjugada. Como nosotros tenemos 3 tipos diferentes de apoyo en la viga real los desplazamientos a la mitad de la cruzja serán diferentes.

A continuación se presentan los desarrollos para cada uno de los tres casos posibles .

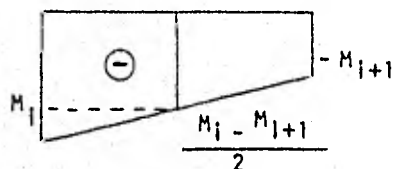
Caso 1.- Contratrabes con los dos nudos continuos.



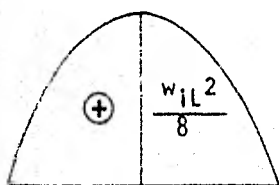
Sistema de cargas en la viga real



Desplazamientos en la viga real

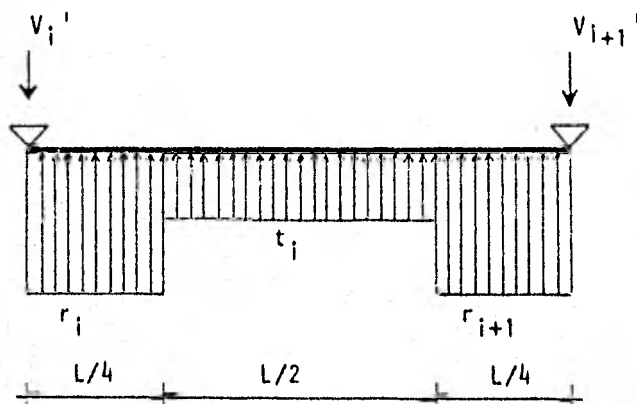


a) Diagrama de momentos debido a los momentos en los extremos.



b) Diagrama de momentos debido a la carga  $w_i$

Falta el diagrama de momentos debido a las reacciones del terreno y como estamos considerando una viga libremente apoyada obtendremos las reacciones tomando momentos con respecto al punto  $i+1$ .



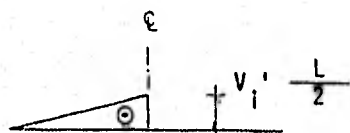
$$M_{i+1} = -V_i' L + r_i \frac{L}{4} \left( \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{1}{2} \frac{L}{4} \right) + t_i \frac{L}{2} \frac{L}{2} +$$

$$r_{i+1} \frac{L}{4} \frac{L}{8} = 0$$

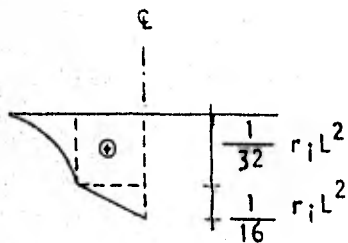
despejando :

$$V_i' = \frac{1}{L} \left\{ \frac{7}{32} L^2 r_i + \frac{1}{4} t_i L^2 + \frac{1}{32} r_{i+1} L^2 \right\} \quad \dots \text{ ( A1-56 ,$$

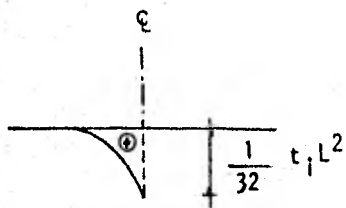
Los diagramas de momentos debidos a las reacciones serán :



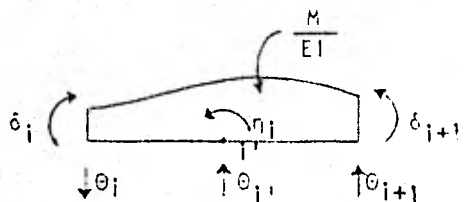
c) Diagrama de momentos debido a  $V_i'$



d) Diagrama de momentos debido a la --  
reacción  $r_i$



e) Diagrama de momentos debido a la --  
reacción  $t_i$



Sistema de cargas en la viga conjugada donde el diagrama de cargas será la suma de los diagramas a) a e) divididos entre EI.

Tomando momentos con respecto al punto i' en la viga conjugada :

$$\eta_i - \delta_i = \frac{1}{EI} \left( M_i - \frac{M_i - M_{i+1}}{2} \right) \underbrace{\left( \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{2} \right)}_{a)} + \frac{M_i - M_{i+1}}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{EI} -$$

$$- \underbrace{\frac{2}{3} \frac{w_i L^2}{8} \frac{L}{2} \frac{3}{8} \frac{L}{2} \frac{1}{EI}}_{b)} + \underbrace{\frac{1}{2} V_{i'} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{3} \frac{L}{2} \frac{1}{EI}}_{c)} -$$

$$- \underbrace{\frac{1}{3} \frac{L}{4} \frac{1}{32} r_i L^2 \left( \frac{L}{4} + \frac{1}{4} \frac{L}{4} \right) \frac{1}{EI} - \frac{L}{4} \frac{1}{32} r_i L^2 \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{1}{EI}}_{d)} -$$

$$- \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{1}{16} r_i L^2 \frac{1}{3} \frac{L}{4} \frac{1}{EI}}_{d)} - \underbrace{\frac{1}{3} \frac{L}{4} \frac{1}{32} t_i L^2 \frac{1}{4} \frac{L}{4} \frac{1}{EI}}_{e)} - \theta_i \frac{L}{2}$$

Sustituyendo las ecuaciones ( 3-9 ), ( 3-10 ) y ( A1-56 ) en la anterior, simplificando y haciendo  $\alpha = 2\theta$  tenemos que :

$$\eta_i = \frac{-\delta_i L}{16} + \frac{\delta_{i+1} L}{16} + \frac{\theta_i}{2} + \frac{\theta_{i+1}}{2} + \frac{w_i L^4}{384 EI} - \frac{r_i L^4}{4096 EI} - \frac{r_{i+1} L^4}{4096 EI} - \frac{13 t_i L^4}{6144 EI} \dots ( A1-57 )$$

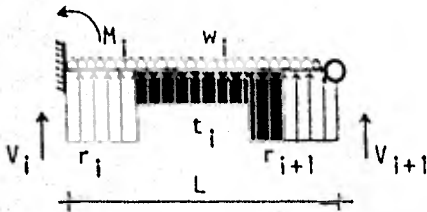
Si esta ecuación la ponemos en forma implícita y con notación de índices nos quedará :

$$\begin{aligned}
 & Kt(i,1) \phi(i,1) - Kt(i,1) \phi(i+1,1) - \frac{8}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - \\
 & - \frac{8}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + \frac{16}{L(i)} \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \eta(i) + \frac{1}{256} r(i) L(i)^2 + \frac{1}{256} r(i+1) L(i)^2 + \\
 & + \frac{13}{384} t(i) L(i)^2 = \frac{1}{24} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots\dots (A1-58)
 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación que utilizaremos para formar la matriz cuando se presente una contratrabe con dos nudos continuos.

Caso 2.- Contratrabe con un nudo continuo y el otro articulado

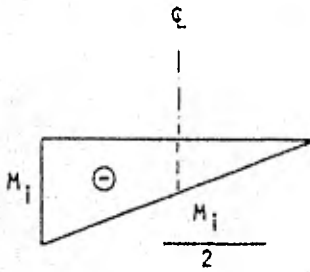
Procederemos de igual forma que en la deducción de la fórmula para - el Caso 1 .



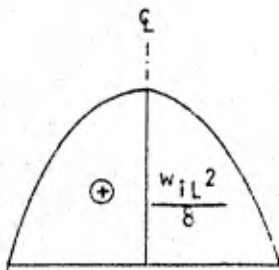
Sistema de cargas en la viga real



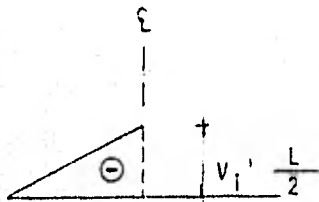
Desplazamientos en la viga real



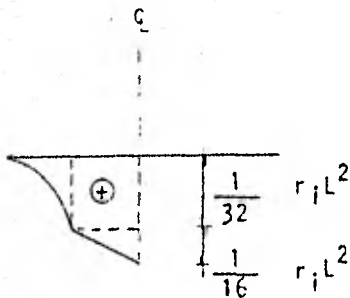
a) Diagrama de momentos debidos al momento en el extremo  $i$



b) Diagrama de momentos debido a la carga  $w_i$

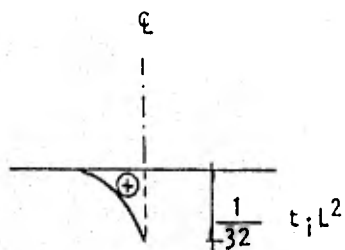


c) Diagrama de momentos debido a  $V_i'$

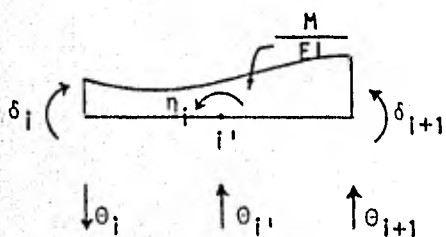


d) Diagrama de momentos debido a la reacción  $r_i$





c) Diagrama de momentos debido a la --  
reacción  $t_i$



Sistema de cargas en la viga conju-  
gada

Tomando momentos con respecto al punto  $i'$  :

$$\begin{aligned}
 \delta_i - \delta_{i+1} &= \frac{1}{EI} \left( M_i - \frac{M_i}{2} \right) \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} \frac{M_i}{2} \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{L}{2} - \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{a)} \\
 &- \frac{2}{3} \frac{w_i L^2}{8} \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \frac{L}{2} \frac{1}{EI} + \frac{1}{2} V_{i'} \frac{L}{2} \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \frac{L}{2} \frac{1}{EI} - \\
 &\quad \underbrace{\hspace{5em}}_{b)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c)} \\
 &- \frac{1}{3} \frac{L}{4} \frac{1}{32} r_i L^2 \left( -\frac{L}{4} + \frac{1}{4} \frac{L}{4} \right) \frac{1}{EI} - \frac{L}{4} \frac{1}{32} r_i L^2 \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{1}{EI} - \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{d)} \\
 &- \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{1}{16} r_i L^2 \frac{1}{3} \frac{L}{4} \frac{1}{EI} - \frac{1}{3} \frac{L}{4} \frac{1}{32} t_i L^2 \frac{1}{4} \frac{L}{4} \frac{1}{EI} - \theta_i \frac{L}{2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{5em}}_{d)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{e)}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones ( 3-9 ) y ( A1-56 ) y simplificando tenemos :

$$\eta_i = -\frac{3}{32} \phi_i L + \frac{11}{16} \delta_i + \frac{5}{16} \delta_{i+1} + \frac{1}{192} \frac{w_i L^4}{EI} - \frac{37}{98304 EI} r_i L^4 - \frac{1}{256 EI} t_i L^4 - \frac{91}{98304 EI} r_{i+1} L^4 \quad \dots ( A1-59 )$$

Si a esta ecuación la ponemos en forma implícita y con notación de índices nos quedará :

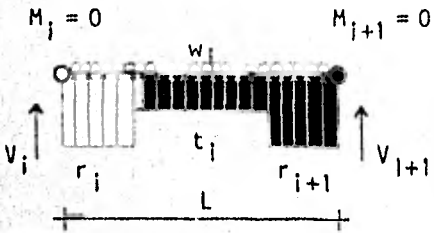
$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} Kt(i,1) \phi(i,1) - 11 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - 5 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + \\ & 16 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \eta(i) + \frac{37}{6144} r(i) L(i)^2 + \frac{1}{16} t(i) L(i)^2 + \\ & + \frac{91}{6144} r(i+1) L(i)^2 = \frac{1}{12} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots ( A1-60 ) \end{aligned}$$

Esta será la ecuación correspondiente a una contratrabe con el nudo izquierdo continuo y el derecho articulado. En forma semejante a este desarrollo se obtuvo que para una contratrabe con el nudo izquierdo articulado y el derecho continuo la ecuación es :

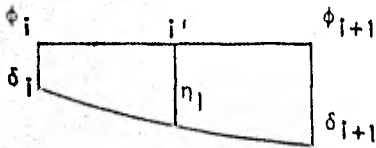
$$\begin{aligned} & -\frac{3}{2} Kt(i,1) \phi(i+1,1) - 11 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) - 5 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) + \\ & + 16 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \eta(i) + \frac{37}{6144} r(i+1,1) L(i)^2 + \frac{1}{16} t(i) L(i)^2 + \\ & + \frac{91}{6144} r(i) L(i)^2 = \frac{1}{12} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots ( A1-61 ) \end{aligned}$$

### Caso 3.- Contratrabe con los dos nudos articulados

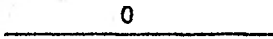
Para tratar este caso procederemos de la misma manera que los casos anteriores solo que ahora nótese que no existen momentos en los extremos.



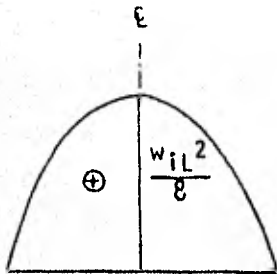
Sistema de cargas en la viga real



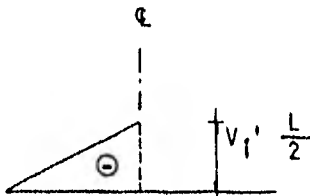
Desplazamientos en la viga real



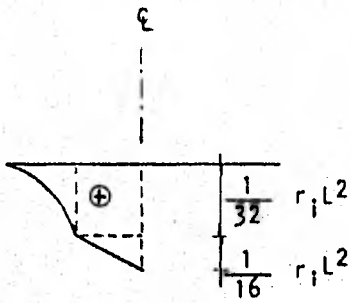
a) No existen momentos en los extremos



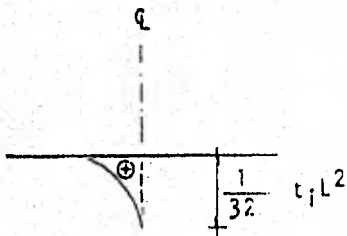
b) Diagrama de momentos debido a la carga  $w_i$



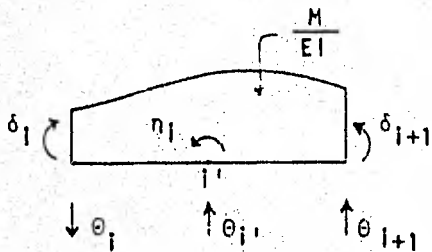
c) Diagrama de momentos debido a  $V_i$



d) Diagrama de momentos debido a la reacción  $r_i$



e) Diagrama de momentos debido a la reacción  $t_i$



Sistema de cargas en la viga conjugada

Tomando momentos con respecto al punto  $i'$  tenemos :

$$\begin{aligned} \eta_i - \delta_i = & -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{w_i L^2}{8} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_i' \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} - \\ & - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{32} r_i L^2 \left( \frac{L}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{4} \right) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{32} r_i L^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{16} r_i L^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{EI} - \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{32} t_i L^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{EI} - \\ & - \theta_i \cdot \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación ( A1-56 ) y simplificando tenemos :

$$\eta_i = \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_{i+1}}{2} + \frac{5}{384} \frac{w_i L^4}{EI} - \frac{23}{12288} \frac{r_i L^4}{EI} - \frac{19}{2048} \frac{t_i L^4}{EI} - \frac{23}{12288} \frac{r_{i+1} L^4}{EI}$$

Si a esta ecuación la ponemos en forma implícita y con notación de índices nos quedará :

$$\begin{aligned} & -\frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + 2 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \eta(i) + \\ & + \frac{23}{6144} r(i) L(i)^2 + \frac{19}{1024} t(i) L(i)^2 + \frac{23}{6144} r(i+1) L(i)^2 = \\ & = \frac{5}{192} w(i) L(i)^2 \end{aligned} \quad \dots (A1-62)$$

Esta ecuación es la que usaremos cuando se trate de una contratrabe con los dos nudos articulados.

1.5.- Resumen de ecuaciones de equilibrio considerando la sustitución de los niveles superiores del marco por cargas concentradas.

A continuación se presenta el total de ecuaciones de equilibrio obtenidas en el capítulo III, tal y como se codificaron en el programa de computadora, apreciándose las modificaciones debidas a las cargas concentradas en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas cortantes de la crujía ( $i=1$  e  $i>1$ ) y equilibrio de fuerzas verticales.

Ecuación de equilibrio de momentos en los nudos de la superestructura ( $J>1$ )

$$\begin{aligned}
 & C(i-1, j) K_t(i-1, j) \phi(i-1, j) + 2K_n(i, j) \phi(i, j) + C(i+1, j) K_t(i, j) \phi(i+1, j) + \\
 & + C(i, j-1) K_c(i, j-1) \phi(i, j-1) + C(i, j+1) K_c(i, j) \phi(i, j+1) - \\
 & - 6 \frac{D(i-1, j) K_t(i-1, j)}{L(i-1)} \delta(i-1) + 6 \left( \frac{D(i-1, j) K_t(i-1, j)}{L(i-1)} - \frac{D(i+1, j) K_t(i, j)}{L(i)} \right) \delta(i) + \\
 & + 6 \frac{D(i+1, j) K_t(i, j)}{L(i)} \delta(i+1) = \frac{A(i-1, j) w(i-1, j) L(i-1)^2}{12} - \frac{A(i+1, j) w(i, j) L(i)^2}{12}
 \end{aligned}$$

... ( 3-27 )

La definición de los términos está dada en la parte donde se hizo la deducción de esta ecuación.

Ecuación de equilibrio de momentos en los nudos de cimentación ( $J=1$ )

$$\begin{aligned}
 & C(i-1, 1) K_t(i-1, 1) \phi(i-1, 1) + 2K_n(i, 1) \phi(i, 1) + C(i+1, 1) K_t(i, 1) \phi(i+1, 1) + \\
 & + C(i, 2) K_c(i, 1) \phi(i, 2) - 6 \frac{D(i-1, 1) K_t(i-1, 1)}{L(i-1)} \delta(i-1) + \\
 & + 6 \left( \frac{D(i-1, 1) K_t(i-1, 1)}{L(i-1)} - \frac{D(i+1, 1) K_t(i, 1)}{L(i)} \right) \delta(i) + 6 \frac{D(i+1, 1) K_t(i, 1)}{L(i)} \delta(i+1) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F(i-1,1) \frac{13}{3072} L(i-1)^2 r(i-1) + \frac{67}{3072} (E(i-1,1) L(i-1)^2 - E(i+1,1) L(i)^2) r(i) - \\
& - F(i+1,1) \frac{13}{3072} L(i)^2 r(i+1) + A(i-1,1) \frac{11}{192} L(i-1)^2 \epsilon(i-1) - \\
& - A(i+1,1) \frac{11}{192} L(i)^2 \epsilon(i) = \frac{A(i-1,1) w(i-1,1) L(i-1)^2 - A(i+1,1) w(i,1) L(i)^2}{12} \\
& \dots (3-30)
\end{aligned}$$

La definición de los términos está dada en la parte donde se hizo la deducción de esta ecuación.

Ecuación de equilibrio de fuerzas cortantes en la primera cruzfa (  $i=1$  )

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{NQ} \{ 2 C(1,j) B(2,j) + C(2,j) C(1,j) \} Kt(1,j) \phi(1,j) + \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(1,j) C(2,j) + \\
& + 2 C(2,j) B(1,j) \} Kt(1,j) \phi(2,j) - \frac{6}{L(1)} \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(1,j) D(2,j) + \\
& + C(2,j) D(1,j) \} Kt(1,j) \delta(1) + \frac{6}{L(1)} \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(1,j) D(2,j) + \\
& + C(2,j) D(1,j) \} Kt(1,j) \delta(2) - \frac{L(1)^2}{3072} ( 672 + 67 C(1,1) E(2,1) - \\
& - 13 C(2,1) F(1,1) ) r(1) - \frac{L(1)^2}{3072} ( 96 + 13 C(1,1) F(2,1) - \\
& - 67 C(2,1) E(1,1) ) r(2) - \frac{L(1)^2}{192} ( 48 + 11 C(1,1) A(2,1) - \\
& - 11 C(2,1) A(1,1) ) \epsilon(1) = - \frac{L(1)^2}{2} \sum_{j=1}^{NQ} w(1,j) + \frac{L(1)^2}{12} ( C(2,1) A(1,1) - \\
& - C(1,1) A(2,1) ) w(1,1) + \frac{L(1)^2}{12} \sum_{K=2}^{NQ} \{ C(2,K) A(1,K) - C(1,K) A(2,K) \} w(1,K) - \\
& - P(1) L(1) \\
& \dots (3-32A)
\end{aligned}$$

La definición de los términos está dada en la parte donde se hizo la deducción de esta ecuación.

Excepto los siguientes :

$P(1)$  es la carga concentrada en le eje de la columna (1)

$L(1)$  es la longitud de la crujfa (1).

Ecuación de equilibrio de fuerzas cortantes en la crujfa  $i$  ( $i > 1$ )

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{NQ} \{ 2 B(i+1,j) C(i,j) + C(i+1,j) C(i,j) \} Kt(i,j) \phi(i,j) + \\
 & + \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(i,j) C(i+1,j) + 2 C(i+1,j) B(i,j) \} Kt(i,j) \phi(i+1,j) - \\
 & - 6 \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(i,j) D(i+1,j) + C(i+1,j) D(i,j) \} \frac{Kt(i,j)}{L(i)} \delta(i) + \\
 & + 6 \sum_{j=1}^{NQ} \{ C(i,j) D(i+1,j) + C(i+1,j) D(i,j) \} \frac{Kt(i,j)}{L(i)} \delta(i+1) - \frac{L(i) L(i)}{4} r(i) - \\
 & - \frac{L(i)}{4} \sum_{K=2}^{i-1} \{ L(K-1) + L(K) \} r(K) - \left\{ \frac{L(i-1) L(i)}{4} + \right. \\
 & + \left. \frac{672 + 67 E(i+1,1) C(i,1) - 13 F(i,1) C(i+1,1) L(i)^2}{3072} \right\} r(i) - \\
 & - \frac{L(i)^2}{3072} \{ 96 + 13 F(i+1,1) C(i,1) - 67 E(i,1) C(i+1,1) \} r(i+1) - \\
 & - \frac{L(i)}{2} \sum_{K=1}^{i-1} L(K) t(K) - \frac{L(i)^2}{192} \{ 48 + 11 A(i+1,1) C(i,1) - \\
 & - 11 A(i,1) C(i+1,1) \} t(i) = -L(i) \sum_{K=1}^{i-1} L(K) \sum_{j=1}^{NQ} w(K,j) - \frac{L(i)^2}{2} \sum_{j=1}^{NQ} w(i,j) - \\
 & - \frac{L(i)^2}{12} \sum_{i=1}^{NQ} \{ C(i,j) A(i+1,j) - C(i+1,j) A(i,j) \} w(i,j) - L(i) \sum_{K=1}^i P(K) \\
 & \dots (3-37A)
 \end{aligned}$$



La definición de los términos está dada en la parte donde se hizo la deducción de esta ecuación.

Excepto los siguientes :

$\sum_{K=1}^i P(K)$  es la suma de las cargas concentradas a la izquierda de la cruzía (i)

$L(i)$  es la longitud de la cruzía (i)

Ecuaciones de desplazamiento al centro de la cruzía i .

Caso I.- Trabe con los dos apoyos continuos :

$$\begin{aligned} & Kt(i,1) \phi(i,1) - Kt(i,1) \phi(i+1,1) - \frac{8}{L(i)} Kt(i,1) \delta(i) - \frac{8}{L(i)} Kt(i,1) \delta(i+1) + \\ & + \frac{16}{L(i)} Kt(i,1) \eta(i) + \frac{1}{256} r(i) L(i)^2 + \frac{1}{256} r(i+1) L(i)^2 + \\ & + \frac{13}{384} t(i) L(i)^2 = \frac{1}{24} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-38) \end{aligned}$$

Caso II.- Trabe con un nudo continuo y el otro articulado :

a.-) Nudo izquierdo continuo y el derecho articulado

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} Kt(i,1) \phi(i,1) - \frac{11}{L(i)} Kt(i,1) \delta(i) - \frac{5}{L(i)} Kt(i,1) \delta(i+1) + \\ & + \frac{16}{L(i)} Kt(i,1) \eta(i) + \frac{37}{6144} r(i) L(i)^2 + \frac{1}{16} t(i) L(i)^2 + \\ & + \frac{91}{6144} r(i+1) L(i)^2 = \frac{1}{12} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-39) \end{aligned}$$

b.-) Nudo izquierdo articulado y el derecho continuo

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{2} Kt(i,1) \phi(i+1,1) - \frac{11}{L(i)} Kt(i,1) \delta(i+1) - \frac{5}{L(i)} Kt(i,1) \delta(i) + \\ & + \frac{16}{L(i)} Kt(i,1) \eta(i) + \frac{37}{6144} r(i+1) L(i)^2 + \frac{1}{16} t(i) L(i)^2 + \\ & + \frac{91}{6144} r(i) L(i)^2 = \frac{1}{12} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-40) \end{aligned}$$

Caso III.- Trabe con ambos nudos articulados

$$\begin{aligned} & -\frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i) - \frac{Kt(i,1)}{L(i)} \delta(i+1) + 2 \frac{Kt(i,1)}{L(i)} n(i) + \frac{23}{6144} r(i) L(i)^2 + \\ & + \frac{19}{1024} t(i) L(i)^2 + \frac{23}{6144} r(i+1) L(i)^2 = \frac{5}{192} w(i,1) L(i)^2 \quad \dots (3-41) \end{aligned}$$

Ecuación de equilibrio de fuerzas verticales

$$\begin{aligned} & r(1) L(1) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} t(i) L(i) + \sum_{i=2}^{N-1} \{ L(i-1) + L(i) \} r(i) + \\ & + r(N) L(N-1) = 4 \sum_{i=1}^{N-1} L(i) \sum_{j=1}^{NQ} w(i,j) + 4 \sum_{i=1}^N P(i) \quad \dots (3-42A) \end{aligned}$$

de donde :

$\sum_{i=1}^N P(i)$  es la suma de todas las cargas concentradas

$N$  es el número de ejes de columnas en el marco

B I B L I O G R A F I A

REFERENCIA (1) .-

Luthe R. , Análisis Estructural, Capítulo 5, Representaciones y Servicios de Ingeniería, México, D.F. 1971.

REFERENCIA (2) .-

Zeevaert L. , Foundation Engineering For Difficult Subsoil Conditions, - Cap. II y IV, Ed. Van Nostrand Reinhold, 1973.

REFERENCIA (3) .-

Revista de Ingeniería, Organo Oficial de la Facultad de Ingeniería, -- pp 56-64, Número 3, 1979, Vol. XLIX, Nueva Epoca, U.N.A.M.