115

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS DE CASCARONES CILINDRICOS DELGADOS DE CONCRETO

TESIS

Que para obtener el Título de

INGENIERO CIVIL

presenta

JOSE ABDEL MARTINEZ HERNANDEZ

México, D. F. 1982

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-I-113

Universidad Nacional
Autónoma

Al Pasante señor JOSE ABDEL MARTINEZ HERNANDEZ,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Gustavo Rafael Aranda Hernández, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"ANALISIS DE CASCARONES CILINDRICOS DELGADOS DE CONCRETO"

Prólogo.
1. Introducción.
2. Teoría de membrana.
3. Teoría de flexión.
4. Métodos alternativos.
5. Aplicaciones.
6. Conclusiones.
7. Referencias.
Apéndice I.
Tablas.
Figuras.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 15 de enero de 1962
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBH/ser

ANALISIS DE CASCARONES CILINDRICOS DELGADOS DE CONCRETO

PROLOGO

1. INTRODUCCION

2. TEORIA DE MEMBRANA

2.1 Hipótesis.
2.2 Ecuaciones de equilibrio.
2.3 Deformaciones de membrana.

3. TEORIA DE FLEXION

3.1 Cascarones cerrados.
3.1.1 Fuerzas y momentos actuantes.
3.1.2 Relaciones desplazamiento-deformación.
3.1.3 Relaciones esfuerzo-deformación.
3.1.4 Solución de la ecuación de compatibilidad.
3.2 Cascarones abiertos.
3.2.1 Ecuaciones de equilibrio.
3.2.2 Relaciones desplazamiento-deformación.
3.2.3 Solución de la ecuación de compatibilidad para carga simétrica.
3.2.4 Funciones complementarias en forma tabular.
3.2.5 Integración particular para carga uniforme.

4. METODOS ALTERNATIVOS

4.1 Método de la viga.
4.2 Método del elemento finito.
4.2.1 Representación de la superficie.
4.2.2 Principio de los desplazamientos virtuales.
4.2.3 Matrices de fuerza nodal y de rigidez para un elemento.
4.2.4 Desarrollo de los desplazamientos -Caso de coordenadas cartesianas en cascarones de poca curvatura-.
4.2.5 Sistema total de ecuaciones.

5. APLICACIONES

6. CONCLUSIONES

7. REFERENCIAS

APENDICE I

TABLAS

FIGURAS

ANALISIS DE CASCARONES CILINDRICOS DELGADOS DE CONCRETO

PROLOGO

1. INTRODUCCION

2. TEORIA DE MEMBRANA

2.1 Hipótesis.
2.2 Ecuaciones de equilibrio.
2.3 Deformaciones de membrana.

3. TEORIA DE FLEXION

3.1 Cascarones cerrados.
 3.1.1 Fuerzas y momentos actuantes.
 3.1.2 Relaciones desplazamiento-deformación.
 3.1.3 Relaciones esfuerzo-deformación.
 3.1.4 Solución de la ecuación de compatibilidad.
3.2 Cascarones abiertos.
 3.2.1 Ecuaciones de equilibrio.
 3.2.2 Relaciones desplazamiento-deformación.
 3.2.3 Solución de la ecuación de compatibilidad para carga simétrica.
 3.2.4 Funciones complementarias en forma tabular.
 3.2.5 Integración particular para carga uniforme.

4. METODOS ALTERNATIVOS

4.1 Método de la viga.
4.2 Método del elemento finito.
 4.2.1 Representación de la superficie.
 4.2.2 Principio de los desplazamientos virtuales.
 4.2.3 Matrices de fuerza nodal y de rigidez para un elemento.
 4.2.4 Desarrollo de los desplazamientos -Caso de coordenadas cartesianas en cascarones de poca curvatura-.
 4.2.5 Sistema total de ecuaciones.

5. APLICACIONES

6. CONCLUSIONES

7. REFERENCIAS

APENDICE I

TABLAS

FIGURAS

PROLOGO

El propósito de mi tesis, es discutir diferentes métodos de análisis de cascarones delgados de concreto, con el fin de que sirvan de base para el diseño de los mismos, ya que muchas estructuras como son techos, tanques y silos, son comunes en la Ingeniería. Además, puede ser una guía de estudio en la facultad, debido a que existe poca bibliografía en Español y es muy poco lo que se estudia en los cursos semestrales de la sección de estructuras.

Los cascarones delgados de concreto se usan comúnmente en techos ya que con ello se cubren grandes claros, teniendo una impresionante estética y además son de construcción económica. En algunos casos los tres factores son importantes, pero generalmente uno o dos son los predominantes.

Los cascarones delgados para grandes claros están limitados por el alto costo de la cimbra utilizada. Cuando la cimbra puede usarse en repetidas ocasiones el costo se reduce sustancialmente. Una limitación más es la falta de experiencia de Ingenieros, particularmente en el análisis de fallas por pandeo, grandes deflexiones y flujo plástico.

En el primer capítulo de la tesis se da la definición de cascarón y los tipos de cascarones existentes, en el segundo capítulo se estudia la teoría de membrana de estas estructuras. En el capítulo tres se estudia la teoría de flexión, en el cuatro se discuten métodos aproximados para cascarones cilíndricos. En el capítulo cinco se dan una serie de ejemplos comparándolos con diferentes métodos. En el capítulo seis se dan las conclusiones de los diferentes métodos utilizados.

1. INTRODUCCION

Los cascarones delgados se definen como losas curvas o plegadas cuyo espesor es pequeño en comparación con las otras dimensiones, se pueden clasificar de diferentes maneras, pero la más común es por el tipo de curvatura, existiendo los cascarones de curvatura simple, doble positiva y doble negativa. Los cascarones de curvatura simple son superficies desarrolladas o desplegables y, generalmente son cónicos o cilíndricos; los cascarones de curvatura doble positiva tienen dos curvaturas en la misma dirección, por lo general tienen la apariencia de un domo o cúpula; los cascarones de curvatura doble negativa tienen sus curvaturas en direcciones opuestas, generalmente tienen la apariencia de una silla de montar o placa alabeada.

En esta tesis solo se estudiarán los cascarones de curvatura simple y específicamente los cascarones cilíndricos.

Los cascarones cilíndricos se clasifican en cascarones cerrados y abiertos. Los cascarones cerrados son aquellos cuya generatriz se apoya en una superficie cilíndrica cerrada con ella misma, de tal manera que forma un tubo. Si su generatriz no es cerrada sobre sí misma, entonces es un cascarón cilíndrico circular abierto.

Los cascarones abiertos a su vez se clasifican en cortos, largos e intermedios, dependiendo de la relación radio-longitud (r/L). En los cascarones cortos la relación r/L es mayor que 2.0, en los largos su relación es menor que 0.6 y entre estos valores se encuentran los cascarones intermedios.

2. TEORIA DE MEMBRANA

2.1 Hipótesis.

El análisis matemático de cascarones delgados se basa en las siguientes suposiciones:

1. El material es homogéneo, isótropo y linealmente elástico. Si bien ninguna de estas suposiciones es correcta para el concreto, las pruebas han indicado que, bajo cargas de servicio, su comportamiento se puede suponer de esa manera.

2. Sólo existen deflexiones pequeñas, lo cual esencialmente requiere que las deflexiones bajo cargas de servicio sean suficientemente pequeñas [illegible]

los cambios en la geometría no alteren el equilibrio estático. La medida usual para la validez de esta teoría es que el desplazamiento radial del cascarón sea pequeño en comparación con su espesor.

3. Se considera que las cargas actúan estáticamente.

El espesor de un cascarón delgado se indica por t y siempre es pequeño en comparación con su radio de curvatura r. La teoría de cascarones delgados se usa cuando la relación r/t es menor que 30.

La superficie que bisecta al cascarón se llama superficie media, en donde por conveniencia se alojan los ejes ortogonales, con lo cual se define todo punto de la superficie media (fig 2.1).

En la acción de membrana se supone que el cascarón es incapaz de soportar cualquier momento flexionante y que las cargas externas son trasmitidas solamente por fuerzas internas normales y cortantes inducidas en la superficie del cascarón. Es conveniente definir la acción de fuerzas en el contorno de un elemento de cascarón como fuerzas por unidad de longitud denominados esfuerzos (fig 2.1).

2.2 Ecuaciones de equilibrio.

Al examinar un cascarón cilíndrico se supone que la generatriz es horizontal y paralela al eje X. Un elemento de esta superficie estará limitado por dos generatrices adyacentes y dos secciones transversales normales al eje X, la posición de cualquier punto queda definida por las coordenadas X y Rϕ, donde el ángulo ϕ se mide desde un eje vertical fijo como se ve en la fig 2.2 y R es el radio del cascarón.

Si se toma un elemento diferencial de cascarón cilíndrico, como el de la fig 2.2, sobre el lado AD actúa el esfuerzo normal N_x en la dirección X, en el lado BC su valor se incrementa a $N_x + (\partial N_x/\partial x)dx$; en el lado AB, en la dirección Y, actúa el esfuerzo normal $N\phi$ y su valor se incrementa en el lado DC a $N_\phi + (\partial N_\phi/\partial \phi)d\phi$. El esfuerzo cortante $N_{\phi x}$ actúa paralelo al lado AB (dirección X) y aumenta su valor en el lado DC a $N_{\phi x} + (\partial N_{\phi x}/\partial \phi)d\phi$; de manera similar, los esfuerzos cortantes en los lados AD y BC son $N_{x\phi}$ y $N_{x\phi} + (\partial N_{x\phi}/\partial x)dx$, respectivamente.

El elemento ABCD está en equilibrio bajo la acción de estos esfuerzos y las cargas externas que se apliquen.

Al resolver el equilibrio en la dirección positiva de X, se tiene que la fuerza total en el lado BC es igual al valor del esfuerzo normal multiplicado por la longitud del lado, es decir,

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)Rd\phi$$

De manera similar, la fuerza total en el lado AD en dirección positiva de X es

$$-N_x R d\phi$$

El esfuerzo cortante $N_{\phi x}$, en los lados AB y CD, tiene componente de fuerza en la dirección de X, dadas por $-N_{\phi x}dx$ en el lado AB y en el lado DC $\left(N_{\phi x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi}d\phi\right)dx$.

La componente de fuerza por carga externa en dirección X, es simplemente

$$X' \cdot dx d\phi$$

donde X' = carga externa por unidad de área en dirección X

Si se suman estas fuerzas y se iguala esa suma con cero, se obtiene la ecuación de equilibrio en dirección X:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)Rd\phi - N_x R d\phi + \left(N_{\phi x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi}d\phi\right)dx - N_{\phi x}dx + X'Rdxd\phi = 0$$

Al reducir términos y dividir entre $Rdxd\phi$ se obtiene:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{R\partial \phi} + X' = 0$$

De manera similar, el equilibrio en la dirección Y está dado por:

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi}}{R\partial \phi} + Y' = 0$$

donde Y' = carga externa por unidad de área en dirección Y

Para obtener la ecuación de equilibrio en la dirección Z, se observa que el esfuerzo cortante $N_{x\phi}$ no tiene resultante de fuerza en esta dirección. Esto se puede observar en la fig 2.3a al moverse la componente de $N_{x\phi}$ desde D hasta A.

En el lado AB la componente de N_ϕ en la dirección Z es $N_\phi dx$ sen $\frac{d\phi}{2}$, como se observa en la fig 2.3b. El equilibrio en la dirección Z es

$$N_\phi + Z'R = 0$$

donde Z' = carga externa por unidad de área en la dirección Z

Tomando momentos alrededor del eje Z, se obtiene

$$N_{x\phi}Rdxd\phi - N_{\phi x}Rdxd\phi = 0$$

lo cual al dividir entre $Rdxd\phi$, conduce a

$$N_{x\phi} = N_{\phi x}$$

Como se observa con esta última ecuación, las ecuaciones de equilibrio se pueden reducir a:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{R\partial \phi} + X' = 0$$

$$\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi}}{R\partial \phi} + Y' = 0$$

$$\frac{N_{\phi}}{R} + Z' = 0$$

Estas ecuaciones se resuelven de la siguiente manera:

$$N_{\phi} = -RZ' \qquad 2.1$$

$$N_{\phi x} = -\int\left(Y' + \frac{\partial N_{\phi}}{R\partial \phi}\right)dx + f_1(\phi) \qquad 2.2$$

$$N_x = -\int\left(X' + \frac{\partial N_{\phi x}}{R\partial \phi}\right)dx + f_2(\phi) \qquad 2.3$$

donde f_1 y f_2 son determinadas con las condiciones de frontera.

2.3 Deformaciones de Membrana.

Debido a los esfuerzos de membrana, la superficie media se extiende pero no gira. Las deformaciones de la superficie media son ϵ_x y ϵ_y en las direcciones X y Y, respectivamente; existe además la deformación por cortante ϵ_{xy} en el plano XY debido al esfuerzo $N_{x\phi}$.

Si se considera un material isótropo, homogéneo y linealmente elástico, además el esfuerzo en la dirección z se desprecia porque el cascarón es delgado, la ley de Hooke conduce a (ref 1)

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E$$

$$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E$$

$$\epsilon_{xy} = 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E$$

o

$$\sigma_x = \frac{E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = \frac{E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)}{1 - \nu^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E\epsilon_{xy}}{2(1 + \nu)}$$

Estos esfuerzos, al integrar sobre el espesor del cascarón, se obtienen

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \qquad a$$

$$N_y = \frac{Et}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \qquad b$$

$$N_x = \frac{Et}{2(1+\nu)}\epsilon_{xy} \qquad c$$

Además de las relaciones deformación unitaria-desplazamiento, considerando un régimen de deformaciones pequeñas, se obtiene (ref 2)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{R\partial\phi} - \frac{w}{R}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{R\partial\phi} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Al hacer estas sustituciones en las ecs a, b y c, se obtienen los des plazamientos u, v y w en las direcciones X, Y y Z, respectivamente

$$u = \frac{1}{Et}\int(N_x - \nu N_\phi)dx + f_3(\phi)$$

$$v = -\int\frac{\partial u}{R\partial\phi}dx + \frac{2(1+\nu)}{Et}\int N_{x\phi}dx + f_4(\phi)$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial\phi} - \frac{R}{Et}(N_\phi - \nu N_x)$$

donde f_3 y f_4 se determinan con las condiciones de frontera.

3. TEORIA DE FLEXION

3.1 Cascarones cerrados.

3.1.1 <u>Fuerzas y momentos actuantes</u>. Debido a la simetría que existe en los cascarones cilíndricos cerrados, el número de esfuerzos es considerablemente reducido. En este caso las deformaciones son simétricas con respecto al eje X (el de rotación), lo cual implica que los esfuerzos cortantes N_{xy} y N_{yx} deben desaparecer, ya que ellos no producen distorsión; los momentos torsionantes M_{xy} y M_{yx} también producen distorsión y son despreciables (fig 3.1).

Debido al eje simétrico, para una sección normal al eje de rotación, los esfuerzos N_y y M_y no varían con Y y son función de X, de tal modo que el esfuerzo cortante Q_y, asociado con M_y, es nulo. Cabe señalar que los esfuerzos de flexión, también como en el caso de los esfuerzos de membrana, son fuerzas y momentos por unidad de longitud.

Postulada tal simetría, los esfuerzos resultantes son los siguientes cinco: N_x, N_y, M_x, M_y y Q_x, como se muestra en la fig 3.1. Además, estos esfuerzos no varían con respecto a Y, pero sí con respecto a X.

En cascarones con simetría axial, es conveniente cambiar de notación para los esfuerzos N_y y M_y de la siguiente manera: Como $Y=R\phi$, entonces los puntos en la superficie del cascarón serán igualmente definidos por las coordenadas X y ϕ; siguiendo esta notación, Y es remplazado por ϕ, N_ϕ sustituye a N_y y M_y se remplaza por M_ϕ como se muestra en la fig 3.2.

El eje de simetría se considera cargado con la presión radial que actúa en la dirección del eje Z. De este modo, las componentes de las cargas externas serán:

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = p \text{ (presión)}$$

Si se considera un elemento ABCD de radio R y lados dx, $Rd\phi$ como se ve en la fig 3.3, cuando solamente actúa la presión radial p en el cilindro, los esfuerzos resultantes son N_x, N_ϕ, M_x, M_ϕ y Q_x.

Estos esfuerzos son función de X, por lo mismo solamente existirá la derivada con respecto a X en las ecuaciones de equilibrio como se observa en la fig 3.3.

Al resolver el equilibrio con respecto a X, se obtiene:

$$(N_x + \frac{dN_x}{dx}dx) R d\phi - N_x R d\phi + X' R dx d\phi = 0$$

$$\frac{dN_x}{dx} = 0$$

Si se integra esta ecuación se deduce que N_x debe ser igual a una constante arbitraria, la cual será tomada como cero, así es que

$$N_x = cte = 0 \qquad 3.1$$

Si se resuelve el equilibrio en la dirección Z, se encuentra que:

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\phi}{R} + p = 0 \qquad 3.2$$

Tomando momentos alrededor del eje Y y si se conservan solamente tér minos de primer orden

$$(M_x + \frac{dM_x}{dx}dx)Rd\phi - M_x Rd\phi - Q_x Rdxd\phi = 0$$

lo cual se reduce a

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \qquad 3.3$$

Puede verse que las ecuaciones del equilibrio estático son tres, de 3.1 a 3.3, y que son insuficientes para determinar los cinco esfuerzos resultantes, por lo tanto, para resolver el problema se necesitan dos ecuaciones adicionales, que se derivan de la relación existente entre los esfuerzos resultantes y las deformaciones de la superficie media como se verá en una sección posterior.

3.1.2 <u>Relaciones desplazamiento-deformación</u>. La superficie DEF' en una distancia z desde la superficie media se conoce como la superficie z (fig 3.3). Las deformaciones en X y en Y de la superficie z, son:

$$\epsilon_x = \epsilon_1 - z\chi_1$$

$$\epsilon_y = \epsilon_2 - z\chi_2$$

donde ϵ_1, ϵ_2 son las deformaciones por alargamiento y $z\chi_1$, $z\chi_2$ las deformaciones por cambio de curvatura. Que para el caso de cascarones cerrados se reduce a

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - z\frac{d^2 w}{dx^2} \qquad 3.4a$$

$$\epsilon_y = -\omega/r_y \qquad 3.4b$$

3.1.3 Relaciones esfuerzo-deformación. Como el material del cascarón se supone homogéneo, isótropo y perfectamente elástico, se puede aplicar la Ley de Hooke. Debido a que el cascarón es delgado se supone que el esfuerzo σ_z en la dirección z puede despreciarse y que solamente los esfuerzos σ_x y σ_y son importantes. De este modo, la Ley de Hooke queda:

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E$$

$$\epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E$$

En la cual E es el módulo de elasticidad y ν es la relación de Poisson. Al resolver para σ_x y σ_y entre estas dos ecuaciones se encuentra que

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)/(1 - \nu^2)$$

$$\sigma_y = E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)/(1 - \nu^2)$$

Si en la fig 3.3 se considera que la longitud de la superficie media es unitaria, entonces la longitud de la superficie z será $AB = (1 - z/r_y)$. Si ahora se considera un elemento dz de la sección transversal como se muestra en la fig 3.3 su área sombreada AB será $(1 - z/r_y)dz$ y de este modo la fuerza en la dirección x de este elemento será

$(1 - z/r_y)dz\sigma_x$.

El esfuerzo axial N_x, que es la fuerza por unidad de longitud, se obtiene como

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} (1 - z/r_y)\sigma_x \, dz$$

Al sustituir σ_x se obtiene

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} E(1 - z/r_y)(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)dz/(1 - \nu^2)$$

$$N_x = Et(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2)/(1 - \nu^2) \qquad 3.5$$

De manera similar, se obtiene

$$N_\phi = Et(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)/(1 - \nu^2) \qquad 3.6$$

Si se considera el esfuerzo de flexión M_x se tendrá que el momento alrededor de la superficie neutra será $(1 - z/r_y)z\sigma_x dz$.

De esta manera, el momento total sobre el espesor del cascarón, el cual es el momento por unidad de longitud o el esfuerzo de flexión, resulta

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} (1 - z/r_y)z\sigma_x \, dz$$

al integrarse esta ecuación se obtiene

$$M_x = -D(\chi_1 + \nu\chi_2) \qquad 3.7$$

donde $D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$ es conocida como la rigidez a la flexión del cascarón; de igual manera para el esfuerzo M_ϕ, se demuestra que está dado por

$$M_\phi = -D(\chi_2 + \nu\chi_1) \qquad 3.8$$

Además, $\chi_1 = \frac{d^2w}{dy^2}$ y $\chi_2 =$ [illegible]

En resumen, al sustituir los valores de [illegible], ϵ_1, ϵ_2, [illegible] y χ_2, las siguientes ecuaciones para los esfuerzos quedan como función de los desplazamientos de la superficie media:

$$N_x = Et(\frac{du}{dx} - \nu\frac{w}{a})/(1 - \nu^2) \qquad 3.9$$

$$N_\phi = tE(-\frac{w}{a} + \nu\frac{du}{dx})/(1 - \nu^2) \qquad 3.10$$

$$M_x = -D\frac{d^2w}{dx^2} \qquad 3.11$$

$$M_\phi = -\nu D\frac{d^2w}{dx^2} \qquad 3.12$$

Estas ecuaciones esfuerzo-desplazamiento con las de equilibrio proporcionan siete ecuaciones que al relacionarse con los cinco esfuerzos N_x, N_ϕ, M_x, M_ϕ y Q_x y los dos desplazamientos u y w, conducen a la solución del problema.

Para resolver este problema se selecciona uno de los desplazamientos para obtener una ecuación diferencial ordinaria. Esta ecuación diferencial se llama ecuación de compatibilidad. En este caso particular la deflexión radial w, será seleccionada como la variable dependiente y se halla de la siguiente manera.

Al diferenciar la ec 3.3 con respecto a x, se obtiene

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} - \frac{dQ_x}{dx} = 0$$

al añadir la ec 3.2 se elimina $\frac{dQ_x}{dx}$ y queda

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{N_\phi}{R} + p = 0 \qquad 3.13$$

Al sustituir el valor cero de N_x de la ec 3.1 en la ec 3.7, se obtiene

$$\frac{du}{dx} = [illegible]$$

Al sustituir este valor en la ec 3.1

$$N_\phi = -Etw/R \qquad 3.14$$

De nuevo, al diferenciar la ec 3.11 dos veces con respecto a x da

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = -D\frac{d^4w}{dx^4} \qquad 3.15$$

Al sustituir el valor de $\frac{d^2M_x}{dx^2}$ y N_ϕ de las ecs 3.15 y 3.14 respectivamente, en la ec 3.13, se obtiene:

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} + 4\beta^4\omega = p/D \qquad 3.16$$

donde $\beta^4 = \frac{Et}{4DR^2}$ o $\beta^4 = 3(1 - \nu^2)/(R^2t^2)$.

3.1.4 <u>Solución de la ecuación de compatibilidad</u>. Como la ec 3.16 es una ecuación diferencial lineal ordinaria de cuarto orden, con coeficientes constantes, la solución consiste de una integral particular y una función complementaria. La complementaria es la solución de la ecuación homogénea, obtenida por igualación a cero del segundo miembro de la ec 3.16, es decir:

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} + 4\beta^4\omega = 0 \qquad 3.17$$

si se supone que

$$\omega = \Sigma A_m e^{mx} \qquad 3.18$$

es la solución, en la cual A_m es una constante arbitraria. Al sustituir esto en la ec 3.17, se obtiene

$$\Sigma A_m(m^4 + 4\beta^4)e^{mx} = 0$$

que se satisface si

$$m^4 + 4\beta^4 = 0$$

las raíces de esta ecuación se obtienen como

$$m = \pm(1 \pm i)\beta$$

al sustituir este valor en la ec 3.18 la solución para ω corresponderá a:

$$\omega = A_1 e^{\beta(1+i)x} + A_2 e^{\beta(1-i)x} + A_3 e^{-\beta(1+i)x} + A_4 e^{-\beta(1-i)x}$$

Donde A_1 a A_4 son constantes arbitrarias complejas. La ecuación anterior puede reducirse, al sustituir

$$\cos\beta x = (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})/2$$

y $\quad \text{sen}\, \beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i$

a la forma

$$\omega = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \,\text{sen}\, \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \,\text{sen}\, \beta x) \qquad 3.19a$$

en la cual C_1 a C_4 son constantes reales arbitrarias. Esta ecuación requiere de la función complementaria f(x), que es función de la carga aplicada, por lo mismo la ecuación queda finalmente como

$$\omega = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \,\text{sen}\, \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \,\text{sen}\, \beta x) + f(x) \qquad 3.19b$$

Una vez determinado ω en esta forma, los esfuerzos resultantes son obtenidos por diferenciación como sigue:

$$N_\phi = -Et\omega/R$$

$$M_x = -Dd^2\omega/dx^2$$

$$M_\phi = \nu M_x$$

$$Q_x = -Dd^3\omega/dx^3$$

Las constantes C_1 a C_4 son elegidas para satisfacer las condiciones de frontera del problema particular considerado.

3.2 Cascarones abiertos.

3.2.1 <u>Ecuaciones de equilibrio.</u> Si bien es relativamente fácil establecer las ecuaciones gobernantes en este problema, la solución no es fácil y de las teorías propuestas, todas demandan hipótesis simplificadoras para obtener la solución. Las más simples son las establecidas en la teoría de Scherer (ref 3) que establece las siguientes hipótesis:

(a) La relación de Poisson tiene un valor nulo

$$\nu = 0 \qquad (1)$$

(b) La flexión longitudinal M_x es pequeña en comparación con la flexión transversal M_ϕ y de este modo M_x puede despreciarse, es decir

$$M_x = 0 \qquad \text{(ii)}$$

(c) Los esfuerzos $M_{x\phi}$ y $M_{\phi x}$ son pequeños en comparación con M_ϕ y por lo mismo pueden despreciarse, es decir

$$M_{x\phi} = M_{\phi x} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

(d) La deformación dominante es en la dirección longitudinal (dirección X), llamada ϵ_1, despreciándose así a ϵ_2 y ϵ_{12}, es decir

$$\epsilon_2 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

$$\epsilon_{12} = 0 \qquad \text{(v)}$$

De este modo los esfuerzos resultantes son N_x, N_ϕ, $N_{x\phi}$, $N_{\phi x}$, M_ϕ y Q_ϕ como se ve en la fig 3.4, al tomar momentos alrededor del eje Y, Q_x desaparece ya que M_x es cero. Las hipótesis de Schorer son justificables ya que se han comparado con teorías mucho más rigurosas, dando resultados adecuados (ref 4).

El equilibrio en la dirección X, si se considera un elemento diferencial con lados dx y $Rd\phi$, es el siguiente (fig 3.4)

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)Rd\phi - N_x R d\phi + \left(N_{\phi x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi}d\phi\right)dx - N_{\phi x}dx + X' R dx d\phi = 0$$

que al dividir por $Rdxd\phi$ conduce a

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{R\,\partial \phi} + X' = 0 \qquad 3.20$$

De manera similar, en la dirección $Rd\phi$ y al despreciar términos de segundo orden resulta:

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\phi}{R\partial\phi} + Y' = 0 \qquad 3.21$$

Al resolver el equilibrio en la dirección Z, se observará que aparte de Q_ϕ; N_ϕ tiene una componente en esta dirección, como se ve en la fig 3.5, así que la ecuación completa es como sigue:

$$(Q_\phi + \frac{\partial Q_\phi}{\partial\phi}d\phi)\cos\frac{d\phi}{2}dx - Q_\phi dx\cos\frac{d\phi}{2} + 2N_\phi dx\,\mathrm{sen}\,\frac{d\phi}{2} + Z'Rdxd\phi = 0$$

como $d\phi$ tiende a cero, la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial Q_\phi}{R\partial\phi} + \frac{N_\phi}{R} + Z' = 0 \qquad 3.22$$

Al tomar momentos respecto del eje X, se obtiene:

$$(M_\phi + \frac{\partial M_\phi}{\partial\phi}d\phi)dx - M_\phi dx - Q_\phi Rdxd\phi = 0$$

que se reduce a

$$\frac{\partial M_\phi}{R\partial\phi} - Q_\phi = 0 \qquad 3.23$$

Al tomar momentos alrededor de Z, se obtiene que

$$N_{\phi x} = N_{x\phi} \qquad 3.24$$

De este modo se tienen cinco ecuaciones de equilibrio y seis esfuerzos M_ϕ, N_ϕ, Q_ϕ, N_x, $N_{x\phi}$ y $N_{\phi x}$. Deben obtenerse ecuaciones adicionales que contengan deformaciones, curvaturas y desplazamientos para llegar a la solución; sin embargo, antes de proceder con esto, se establecerán relaciones entre N_ϕ y N_x por eliminación entre las ecs 3.20 a 3.24.

Al eliminar Q_ϕ entre las ecs 3.22 y 3.23 se encuentra que

$$\frac{\partial^2 M_\phi}{R^2\partial\phi^2} + \frac{N_\phi}{R} + Z' = 0 \qquad 3.25$$

Al eliminar $N_{x\phi}$ y $N_{\phi x}$ entre las ecs 3.20, 3.21 y 3.24 se tendrá que

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_\phi}{R^2\partial\phi^2} + \frac{\partial X'}{\partial x} - \frac{\partial Y'}{R\partial\phi} = 0 \qquad 3.26$$

Al eliminar N_ϕ entre las ecs 3.25 y 3.26 la ecuación resultante es

$$\frac{\partial^4 M_\phi}{R^4 \partial\phi^4} + \frac{\partial^2 N_x}{R\ \partial x^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{R\partial\phi}\right) - \frac{\partial^2 Z}{R^2 \partial\phi^2} = 0 \qquad 3.27$$

Al considerar las ecuaciones de deformación y desplazamientos de curvaturas se demostrará que M_ϕ y N_x se expresan como funciones del desplazamiento radial w, con lo cual la ec 3.27 se expresa como una ecuación diferencial parcial de w.

3.2.2 <u>Relaciones desplazamiento-deformación</u>. Todo punto de la superficie media del cascarón diferencial sufrirá desplazamientos u, v y w en las direcciones X,Y,Z respectivamente.

La deformación ϵ_1 de la superficie media en la dirección X se deriva exactamente de la misma manera que en el caso del cascarón cerrado, resultando igual que la ec 3.4a excepto que du/dx corresponde a $\partial u/\partial x$ dado que u es función de X y ϕ; así se tendrá que:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad 3.28$$

La deformación ϵ_2 en la dirección $Rd\phi$ se obtiene de la siguiente manera. Si un elemento $BC = Rd\phi$ de la sección normal del eje X se desplaza una cantidad v en la dirección $Rd\phi$, tal que B se mueve a B' como se muestra en la fig 3.6a, entonces el punto adyacente C se desplazará una cantidad $v + (\partial v/\partial\phi)d\phi$ al punto C'. Así la deformación del elemento en la dirección $Rd\phi$, debido al desplazamiento, es $(B'C' - BC) = \partial v/(R\partial\phi)$. Sin embargo, debido al desplazamiento w, la deformación del elemento BC en la dirección $Rd\phi$ será como en el caso del cascarón cerrado, llamada w/R como se muestra en la fig 3.6b. De este modo, la deformación total ϵ_2 en la dirección $Rd\phi$, debido a los desplazamientos υ y ω, será

$$\epsilon_2 = \frac{\partial \upsilon}{R\partial\phi} - \frac{\omega}{R} \qquad 3.29$$

Por otra parte, se debe considerar la deformación por cortante; la fig 3.7 muestra un elemento de cascarón en el plano XY con su deformación por cortante.

Si A sufre un desplazamiento u, entonces el punto adyacente D se desplazará a D' en una cantidad $u + \frac{\partial u}{\partial \phi}d\phi$ y de este modo, el cambio en el ángulo en A será:

$$\frac{DD'}{AD} = \frac{\partial u}{R\partial\phi}$$

Si A sufre un desplazamiento υ, el punto adyacente B sufrirá un desplazamiento $\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}dx$ hasta B' y el cambio del ángulo en A será $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$.

La deformación por cortante ϵ_{12}, es el cambio total en el ángulo en A debido a los desplazamientos u y υ, es decir

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial u}{R\partial\phi} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \qquad 3.30$$

Se examinará el cambio de curvatura de la superficie media en la dirección Y. Al considerar un elemento BC de la superficie media de longitud $Rd\phi$, antes de que ocurra la flexión, el radio de curvatura será R, después de la flexión se moverá a la posición B'C' de tal manera que el nuevo radio de curvatura será r_y', y el ángulo formado por los puntos B' y C' será $d\phi'$ como se ve en la fig 3.8.

Ahora, el giro angular en B' debido al desplazamiento ω es $\alpha = \frac{\partial \omega}{R\partial\phi}$ y el giro angular en el punto adyacente C' será $\beta = \frac{\partial \omega}{R\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial \omega}{R\partial\phi}d\phi$.

Por geometría, el ángulo $d\phi'$ es

$$d\phi' = d\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial \omega}{R\partial\phi}d\phi \qquad 3.31$$

Antes de la flexión, la longitud del elemento DC es $ds = Rd\phi$ y de esto se obtiene que $\frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds}$. Después de la flexión, se tendrá $ds = r'_y d\phi'$, de esto resulta que $\frac{1}{r'_y} = \frac{d\phi'}{ds}$ y el cambio de curvatura χ_2 en la dirección Y es

$$\chi_2 = \frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y}$$

$$\chi_2 = \frac{d\phi'}{ds} - \frac{d\phi}{ds}$$

al sustituir $d\phi$ de la ec 3.31 se tendrá

$$\chi_2 = \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial\phi^2} \qquad 3.32$$

Como se supuso que M_x es despreciable comparado con M_ϕ implica que χ_1 se desprecia en comparación con χ_2.

Al introducir la primera suposición de Schorer ($\nu = 0$) en las ecs 3.5 y 3.8 se tendrá $N_x = Et\epsilon_1$ y $M_\phi = -D\chi_2$.

Al sustituir el valor de ϵ_1 y χ_2 de las ecs 3.28 y 3.32 se obtiene

$$N_x = Et\frac{\partial u}{\partial x} \qquad 3.33$$

$$M_\phi = -EI\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial\phi^2} \qquad 3.34$$

donde $I = t^3/12$

3.2.3 <u>Solución de la ecuación de compatibilidad para carga simétrica</u>. Si se usan las suposiciones de Schorer (iv) y (v), en las ecs 3.29 y 3.30 se obtiene

$$\frac{\partial v}{R\,\partial\phi} = \frac{w}{R}$$

$$\frac{\partial u}{R\,\partial\phi} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 3.35$$

Al eliminar v entre estas ecuaciones se tendrá

$$\frac{\partial^2 u}{R^2 \partial\phi^2} = -\frac{\partial w}{R\,\partial x}$$

y de la ec 3.33 al usar la ecuación anterior se obtiene

$$-\frac{\partial^4 N_x}{R^3\,\partial\phi^2\,\partial x^2} = -\frac{Et\,\partial^4 w}{R^2\,\partial x^4} \qquad 3.36$$

En así como N_x y N_ϕ quedan en función de w únicamente.

Al diferenciar la ec 3.27 dos veces con respecto a ϕ quedará

$$\frac{\partial^6 M_\phi}{R^6\,\partial\phi^6} + \frac{\partial^4 N_x}{R^3\,\partial\phi^2\,\partial x^2} + \frac{1}{R^3}\left(\frac{\partial^3 X}{\partial x\,\partial\phi^2} - \frac{\partial^3 Y}{R\,\partial\phi^3}\right) + \frac{\partial^4 Z}{R^4\,\partial\phi^4} = C$$

y al sustituir a M_ϕ y N_x de las ecs 3.34 y 3.36 la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial^8 w}{\partial\phi^8} + \frac{tR^6\,\partial^4 w}{I\,\partial x^4} + \frac{R^4}{EI}\left(\frac{\partial^4 Z}{\partial\phi^4} - \frac{\partial^3 Y}{\partial\phi^3}\right) + \frac{R^5\,\partial^3 X}{EI\,\partial x\,\partial\phi^2} \qquad 3.37$$

Esta es una forma modificada de la ecuación de Schorer y la solución como ecuación diferencial parcial es muy tediosa. Sin embargo, en cascarones abiertos del tipo mostrado en la fig 3.10, en la cual la rigidez transversal implica que la deflexión en las orillas es despreciable, la ecuación se reduce a una ecuación diferencial ordinaria que es mucho más sencillo de resolver. Detalles de esta reducción se dan de la siguiente manera.

Los cascarones cilíndricos abiertos como estructuras de techos normalmente se apoyan en las orillas y por lo mismo la deflexión radial w desaparece y bajo carga uniforme tendrá su valor máximo en el centro. Si se toma el origen en el centro del cascarón, la deflexión se puede considerar como

$$w = W\cos kx \qquad 3.38$$

donde $k = \pi/L$

en la cual W es sólo función de ϕ. Se puede observar que esta forma para w satisface las condiciones de frontera en la dirección X, ya que w desaparece para $X = \pm L/2$ y es máxima en el centro.

Al considerar la ec 3.38 con el miembro derecho igualado a cero para determinar la función complementaria, se tendrá

$$\frac{\partial^8 \omega}{\partial \phi^8} + \frac{tR^6 \partial^4 \omega}{I \partial x^4} = 0$$

Al sustituir la solución dada para ω de la ec 3.33 en la ecuación anterior y al reducir términos se obtiene

$$\frac{d^8 W}{d\phi^8} + G^8 W = 0 \qquad 3.39$$

donde $G^8 = \frac{tR^6}{I}k^4$

La ec 3.39 se resuelve si se supone que

$$W = A_M e^{M\phi} \qquad 3.40$$

donde A_M es una constante cualquiera.

Al sustituir el valor de W en la ec 3.39, se tendrá

$$M^8 + G^8 = 0$$

La solución de esta ecuación es

$$M = \pm(\alpha \pm \beta i) \quad y \quad (\beta \pm \alpha i) \qquad 3.41$$

donde $\alpha = 0.9238795325\ G$

y $\qquad \beta = 0.3826834324\ G$

Cada una de las ocho raíces dadas por la ec 3.41 deben tener una constante arbitraria asociada con ella y así la forma final para W, dada por la ec 3.40 es

$$W = A_1 e^{(\alpha + \beta i)\phi} + A_2 e^{(\alpha - \beta i)\phi} + A_3 e^{(-\alpha - \beta i)\phi} + A_4 e^{(-\alpha + \beta i)\phi}$$
$$+ A_5 e^{(\beta + \alpha i)\phi} + A_6 e^{(\beta - \alpha i)\phi} + A_7 e^{(-\beta - \alpha i)\phi} + A_8 e^{(-\beta + \alpha i)\phi} \qquad 3.42$$

en donde A_1 a A_8 son constantes arbitrarias complejas.

Al usar las relaciones existentes entre las funciones exponenciales y las funciones hiperbólicas trigonométricas, la ec 3.42 se reduce a

$$W = 2\left[\begin{array}{l} a\cos\beta\phi\cosh\alpha\phi - b\,\mathrm{sen}\,\beta\phi\,\mathrm{senh}\,\alpha\phi \\ c\cos\alpha\phi\cosh\beta\phi - d\,\mathrm{sen}\,\alpha\phi\,\mathrm{senh}\,\beta\phi \\ e\cos\beta\phi\,\mathrm{senh}\,\alpha\phi - f\,\mathrm{sen}\,\beta\phi\cosh\alpha\phi \\ g\cos\alpha\phi\,\mathrm{senh}\,\beta\phi - h\,\mathrm{sen}\,\alpha\phi\cosh\beta\phi \end{array}\right] \qquad 3.43$$

donde a, b, c, d, e, f, g y h son constantes reales.

Si el cascarón abierto se carga simétricamente en la dirección X, la ec 3.43 para W se simplifica considerablemente. Como el cascarón se carga simétricamente alrededor de X, entonces la deflexión radial w debe también ser simétrica alrededor del eje X y de este modo W también es simétrica alrededor del eje X.

Esto implica que W debe tener valores idénticos en los arcos positivo y negativo de ϕ, en otras palabras, si se sustituye a $+\phi$, o $-\phi$ en la ec 3.43 los valores de W deben ser iguales, de este modo las constantes e, f, g y h son cero y la solución queda:

$$W = 2\left[\begin{array}{l} a\cos\beta\phi\cosh\alpha\phi - b\,\mathrm{sen}\,\beta\phi\,\mathrm{senh}\,\alpha\phi \\ c\cos\alpha\phi\cosh\beta\phi - d\,\mathrm{sen}\,\alpha\phi\,\mathrm{senh}\,\beta\phi \end{array}\right] \qquad 3.44$$

La solución para la deflexión radial w se obtiene usando el valor de W en la ec 3.30, la solución es para la función complementaria y faltaría añadir la integral particular, que es función de las componentes externas de carga X, Y, Z que se examinarán más tarde.

Las funciones complementarias de los esfuerzos y los otros desplazamientos serán:

$$M_\phi = -EI\frac{d^2w}{a^2\,d\phi^2}\cos kx \qquad 3.45a$$

$$Q_\phi = -EI\frac{d^3w}{a^3\,d\phi^3}\cos kx \qquad 3.45b$$

$$N_\phi = \frac{EId^4W}{R^3d\phi^4}\cos kx \qquad 3.45c$$

$$N_{\phi x} = -\frac{EId^5W}{R^4kd\phi^5}\operatorname{sen} kx \qquad 3.45d$$

$$N_x = -\frac{EId^6W}{R^5k^2d\phi^6}\cos kx \qquad 3.45e$$

$$u = -\frac{Id^6W}{R^5k^3td\phi^6}\operatorname{sen} kx \qquad 3.46a$$

$$v = -\frac{Id^7W}{R^6k^4td\phi^7}\cos kx \qquad 3.46b$$

3.2.4 Funciones complementarias en forma tabular. Las funciones complementarias para los esfuerzos y desplazamientos se encontraron diferenciando a w con respecto a ϕ varias veces, en números pares o impares, de acuerdo con las ecs 3.45 y 3.46. De este hecho se generan dos tipos de funciones -un tipo cuando la derivada es de orden par y el otro cuando es de orden impar-.

Es así como las funciones complementarias de los esfuerzos y los desplazamientos se pueden tabular. Las derivadas de orden par se encuentran en la tabla I y las de orden impar en la tabla II.

3.2.5 Integración particular para carga uniforme. Se supondrá por simplicidad que la carga vertical uniforme p por unidad de área actúa en la sección transversal como se muestra en la fig. 3.7a.

Sin embargo, en la dirección X se supuso que w (ec 3.33) es función de cos kx y por lo mismo se supondrá que la carga aplicada p será también función de cos kx, esta distribución se muestra en la fig 3.7b en la [illegible] de área, será $= p \cos kx$, donde $p = 4q/\pi$.

Al resolver en las direcciones de los ejes coordenados se tendrá

$$X' = 0$$

$$Y' = p \operatorname{sen} \phi \cos kx$$

$$Z' = p \cos \phi \cos kx$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 3.37 se tendrá

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \phi^8} + \frac{tR^6 \partial^4 w}{I \partial x^4} = \frac{2R^4}{EI} p \cos \phi \cos kx \qquad 3.47$$

Una integral particular de la ec 3.47 se obtiene al suponer

$$w = C\, p \cos \phi \cos kx$$

que si se sustituye en la ec 3.47 conduce a

$$C = \frac{2R^4}{EI}(1 + tR^6 k^4/I)^{-1}$$

Evaluada esta constante, se obtienen las demás incógnitas, a saber:

$$N_\phi = (CEI/R^3 - R)\, p \cos \phi \cos kx$$

$$Q_\phi = -(EI/R^3)\, C\, p \operatorname{sen} \phi \cos kx$$

$$M_\phi = (EI/R^2)\, C\, p \cos \phi \cos kx$$

$$N_x = Jp/(Rk^2) \cos \phi \cos kx$$

$$N_{x\phi} = (Jp/k) \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} kx$$

$$u = Jp/(ERtk^3) \cos \phi \operatorname{sen} kx$$

$$v = -Jp/(ER^2tk^4) \operatorname{sen} \phi \cos kx$$

donde $J = (EIC/R^4 - 2)$

4. MÉTODOS ALTERNATIVOS

4.1 Método de la viga.

El diseño de cascarones cilíndricos se puede hacer de manera simplificada de acuerdo con lo establecido en el manual de ASCE (ref 5), donde se dan coeficientes para el cálculo de cascarones con diferentes relaciones r/t y L/r; sin embargo, cuando no existen estas relaciones se debe hacer uso de fórmulas, lo cual requiere de la solución de 4 ecuaciones simultáneas.

El "método de la viga" de Lundgren (ref 6), el cual sólo contiene como incógnitas [illegible] y el análisis general del arco, se usa con suficiente precisión tanto en cascarones de curvatura simple como en cascarones múltiples.

Las suposiciones del método de la viga, además de las usuales de la fórmula de flexión, son:

1. Todos los puntos en una sección transversal tienen la misma deflexión vertical y deflexión horizontal nula.

2. No hay cortante radial, ni esfuerzo radial de flexión, tampoco torsionantes en la sección transversal.

Las suposiciones hechas constituyen las limitaciones del método y cuando estas suposiciones no son ciertas con la acción del cascarón, este método no se puede aplicar.

En el método se hacen dos cálculos: el cálculo de la viga y del arco.

En el cálculo de la viga, los esfuerzos longitudinales y los esfuerzos cortantes de membrana se calculan con la fórmula de la flexión y cortante en vigas (fig 4.1).

El cálculo del arco es un poco más complicado. Se toma un elemento de longitud dx de un cascarón y se consideran las fuerzas que actúan en direcciones transversales, como son: carga externa, esfuerzos cortantes de membrana y, en el caso de cascarones múltiples, los momentos y fuerzas de orilla (fig 4.2). El apoyo vertical para el arco es la componente vertical del esfuerzo cortante diferencial dV, w/lb, más que la reacción en la base como es usual en arcos. Estos esfuerzos que actúan tangentes al arco producen momentos transversales, como los producidos por cargas externas.

Lundgren da fórmulas derivadas para los momentos transversales fi nales causados por carga uniformemente distribuida sobre la proyección horizontal de un cascarón sencillo. Las siguientes ecuaciones son desarrolladas por James Chinn (ref 7) y son exactas en cuanto las hipótesis supuestas en el método sean exactas.

Ecuaciones para las deformaciones y fuerzas.

El autor (James Chinn) obtuvo las siguientes ecuaciones al usar el cuerpo libre de la fig 4.3, F_v es la suma de fuerzas verticales, F_h la suma de fuerzas horizontales y M el momento alrededor de la intersección de F_v y el arco del cascarón.

$$(Et^3/12)\,\theta_{CE} = \int_0^{\phi_k} MRd\phi \qquad \text{a}$$

$$(Et^3/12)(\Delta_h)_{CE} = \int_0^{\phi_k} MRyd\phi \qquad \text{b}$$

Propiedades de la sección (fig 4.3a)

$$\bar{y} = \frac{R \text{ sen } \phi_k}{\phi_k} \qquad 4.1$$

$$I = R^3\Big[\phi_k + (\text{sen } \phi_k)(\cos \phi_k - 2\frac{\text{sen } \phi_k}{\phi_k}) \qquad 4.2$$

$$Q = 2R^2(\text{ sen } \phi - \frac{\phi}{\phi_k}\text{sen } \phi_k)\Big] \qquad 4.3$$

Carga muerta (fig 4.3b)

$$F_v = pR(\phi_k - \phi) \qquad 4.4$$

$$M = pR^2\Big[\cos \phi - \cos \phi_k + (\text{sen } \phi)(\phi - \phi_k)\Big] \qquad 4.5$$

$$\frac{Et}{12}\theta_{CE} = pR^3 \; 2 \text{ sen } \phi_k - \phi\,(\cos \phi_k + 1) \qquad 4.6$$

$$\frac{Et}{12}(\Delta_h)_{CE} = pR^4\Big[\frac{\phi}{4} + \frac{3}{8}\text{sen } 2\phi_k + \text{sen } \phi_k - 2\frac{\text{sen } \phi_k}{\phi_k}\Big] \qquad 4.7$$

Carga uniforme (fig 4.3c)

$$F_v = pR(\text{ sen } \phi_k - \text{sen } \phi) \qquad 4.8$$

$$M = \frac{pR^2}{2}(\text{sen } \phi_k - \text{sen } \phi)$$

$$= \frac{pR^2}{2}(\text{sen}^2 \phi_k - 2\text{sen } \phi_k \text{ sen } \phi + \text{sen}^2 \phi) \qquad 4.9$$

$$\frac{Et^3}{12}\theta_{CE} = \frac{wR^3}{2}\left[\phi_k \operatorname{sen}^2\phi_k + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2\phi_k - 2\operatorname{sen}\phi_k + \frac{\phi_k}{2}\right] \qquad 4.10$$

$$\frac{Et^3}{12}(\Delta_h)_{CE} = \frac{wR^4}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi_k}{\phi_k}\left(2 - \frac{3}{2}\cos\phi_k\right) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\phi_k - \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{2}\right] \qquad 4.11$$

Cortante diferencial (fig 4.3d)

$$P_v = \frac{wR^3}{I}\left[\frac{\phi_k - \phi}{2} + \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2\phi_k + \operatorname{sen} 2\phi) - \left(\frac{\operatorname{sen}\phi_k}{\phi_k}\right)(\operatorname{sen}\phi_k - \operatorname{sen}\phi + \phi\cos\phi)\right] \qquad 4.12$$

$$P_h = \frac{wR^3}{I}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi_k + \operatorname{sen}^2\phi}{2} + \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{\phi_k}(\cos\phi_k - \cos\phi - \phi\operatorname{sen}\phi)\right] \qquad 4.13$$

$$M = \frac{wR^4}{I}\left[\cos\phi - \cos\phi_k + \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{2\phi_k}\phi - \frac{\phi}{2}(\operatorname{sen}\phi_k + \operatorname{sen}\phi) + \frac{\phi\operatorname{sen}\phi}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2\phi_k}{2}\cos\phi - \frac{\operatorname{sen} 2\phi_k}{4}\operatorname{sen}\phi + \frac{\operatorname{sen}^2\phi_k}{\phi_k}\operatorname{sen}\phi + \frac{\operatorname{sen} 2\phi_k}{2\phi_k}\cos\phi - \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{\phi_k}\right] \qquad 4.14$$

$$\frac{Et^3}{12}\theta_{CE} = \frac{wR^5}{I}\left[\frac{\operatorname{sen}\phi_k}{2} - \phi_k\left(\cos\phi_k + \frac{1}{2}\right) - \frac{\phi_k^2\operatorname{sen}\phi_k}{3} + \frac{\operatorname{sen}^3\phi_k}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2\phi_k}{\phi_k} + \frac{\operatorname{sen} 2\phi_k}{4}(\cos\phi_k - 1)\right] \qquad 4.15$$

$$\frac{Et}{12}(\Delta_h)_{CE} = \frac{wR^6}{I}\left[\frac{3}{8}\phi_k + \frac{17}{16}\operatorname{sen} 2\phi_k + \frac{7}{12}\phi_k\operatorname{sen}^2\phi_k + \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2\phi_k}{\phi_k}\left(2.5 - \frac{\cos\phi_k}{2} + \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{\phi_k}\right)\right] \qquad 4.16$$

H en el centro elástico (fig 4.3e)

$$M = H_{CE}R\left(\cos\phi - \frac{\operatorname{sen}\phi_k}{\phi_k}\right) \qquad 4.17$$

$$\frac{Et^3}{12}\theta_{CE} = 0 \qquad 4.18$$

$$\frac{Et^3}{12}(\Delta_h)_{CE} = \frac{1}{2}H_{CE} \qquad 4.19$$

M en el centro elástico (fig 4.3f)

$$\frac{Et^3}{12}\theta_{CE} = R\phi_k M \qquad 4.20$$

$$\frac{Et^3}{12}(\Delta_h)_{CE} = 0 \qquad 4.21$$

El procedimiento para resolver la acción del arco es: sumar las ecs 4.6, 4.10, 4.15 y 4.20 para obtener el momento M_{CE}, luego sumar las ecs 4.7, 4.11, 4.16 y 4.19 con lo cual se obtiene H_{CE}.

Con los valores de M_{CE} y H_{CE}, se pueden obtener los esfuerzos $M\phi$ y

N_ϕ sumando las ecuaciones para los M y para las F respectivamente.

4.2 Método del elemento finito.

4.2.1 <u>Representación de la superficie.</u> El método general del elemento finito es tratado a fondo en otras partes (ref 8,9), es por esto que la discusión se hará sólo a cascarones delgados de poca curvatura. El primer paso del método es dividir la superficie media en elementos de área, se ha encontrado que los elementos triangulares y/o los rectangulares son convenientes de usar (fig 4.4). A continuación se seleccionan puntos en las fronteras del elemento llamados nudos. Estos nudos son tomados como los puntos de esquina de los elementos, pero se pueden seleccionar nudos adicionales a lo largo de las fronteras de los elementos, por ejemplo en los puntos medios.

4.2.2 <u>Principio de los desplazamientos virtuales.</u> Las ecuaciones que relacionan los parámetros de desplazamiento y cargas externas aplicadas se obtienen por aplicación del Principio de Desplazamientos Virtuales. En lo que sigue, se desarrollará la matriz general por desplazamiento virtual para un cascarón delgado, elástico y después se especificará para un cascarón de poca curvatura (ref 11). El desarrollo supone que la deformación cortante transversal es despreciable, y se definen $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ como (fig 4.

$$\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}\}$$

$$\bar{\epsilon} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}\}$$

donde $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ vectores de esfuerzo y deformación, respectivamente.

Para el caso elástico lineal

$$\tilde{\sigma} = \tilde{D}(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^{o})$$

y cuando el material es isótropo $\tilde{D}$ queda:

$$\tilde{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \end{bmatrix}$$

El principio de desplazamientos virtuales establece que la siguiente ecuación debe satisfacerse para cualquier variación de los desplazamientos, es decir:

$$\int_V \tilde{\sigma}^T d\tilde{\epsilon}\, dV = \int_V \tilde{b}^{*T} \Delta\tilde{u}^{*}\, dV + \int_S \tilde{p}^{*T} \Delta\tilde{u}^{*}\, dS$$

donde $\tilde{u}^{*}$ = la matriz de desplazamientos en un punto

$\tilde{b}^{*}$ = las fuerzas de cuerpo

$\tilde{p}^{*}$ = las fuerzas de superficie

$d\tilde{\epsilon}$ = la diferencial de la matriz de deformación

Si se trabaja con fuerzas externas por unidad de área, A, de la superficie media, es decir, se expresa el miembro derecho de la ecuación anterior como:

$$\int_V \tilde{b}^{*T} \Delta\tilde{u}^{*}\, dV + \int_S \tilde{p}^{*T} \Delta\tilde{u}^{*}\, dS = \int_A \tilde{p}^{T} \Delta\tilde{u}\, dA \qquad 4.22$$

en la cual $\tilde{u} = (u, v, w)$ y $\tilde{p} = (p_1, p_2, p_n)$ contienen los desplazamientos de la superficie media y las componentes de la intensidad de fuerzas referidos al marco local en (ξ_1, ξ_2, ζ) fig 4.4. Si se toma a $dV = dA d\zeta$, luego al hacer un desarrollo lineal para ϵ

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{e} + \zeta \tilde{k}$$

al integrar con respecto a ζ, en el primer miembro de la ecuación del Principio de Desplazamiento Virtual, conduce a:

$$\int_V \tilde{\sigma}^T \, d\tilde{\varepsilon} \, dV = \int_A \left[\tilde{N}^T \, d\tilde{e} + \tilde{M}^T \, d\tilde{k} \right] dA \qquad 4.23$$

donde $\tilde{N} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_{12})$

$\tilde{M} = (\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_{12})$

Los valores $\tilde{N}$ y $\tilde{M}$ son los esfuerzos resultantes y esfuerzos de flexión, respectivamente (fig 4.5).

Se puede interpretar a los elementos $\tilde{e}$ y $\tilde{k}$, como las medidas de deformación por alargamiento y flexión, respectivamente. Para el caso elástico lineal

$$\tilde{N} = t\tilde{D}(\tilde{e} - \tilde{e}^{o}) \qquad 4.24a$$

$$\tilde{M} = \frac{t^3}{12}\tilde{D}(\tilde{k} - \tilde{k}^{o}) \qquad 4.24b$$

en donde $\tilde{e}^{o} = \frac{1}{t} \int \tilde{\varepsilon}^{o} d\zeta$

$\tilde{k}^{o} = \frac{12}{t^3} \int \zeta \tilde{\varepsilon}^{o} d\zeta$

Si se usan las ecs 4.22 y 4.23, el principio de desplazamiento virtual toma la forma:

$$\int_A (\tilde{N}^T d\tilde{e} + \tilde{M}^T d\tilde{k}) dA = \int_A \tilde{P}^T \Delta u \, dA \qquad 4.25$$

Las expresiones apropiadas para las medidas de deformación en términos de la superficie media de traslación (u, v, w) y rotación (β_1, β_2) son las siguientes:

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - w\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad 4.26a$$

$$e_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad 4.26b$$

$$e_{12} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - 2w\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad 4.26c$$

$$\beta_1 \simeq -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\beta_2 \simeq -\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$k_1 \simeq -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

$$k_2 \simeq -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

y

$$k_{12} \simeq -2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \qquad 4.27$$

4.2.3 Matrices de fuerza nodal y de rigidez para un elemento. La fig 4.6 muestra la notación para el elemento n, donde n_i $(i = 1,2,3,4)$ son los nudos del elemento y a_n, b_n las dimensiones proyectadas en el plano. Las matrices de traslación y rotación para el nudo j se escriben como $\tilde{u}_j$, $\tilde{\beta}_j$ respectivamente; donde $\tilde{u}_j = \{u\ ,\ v\ ,\omega\}_j$ y $\beta_j = \{\beta_1, \beta_2\}_j$

Lo anterior define a la matriz de desplazamientos para el nudo j o sea

$$\tilde{U}_j = \left\{\begin{array}{c} u_j \\ \hline \beta_j \end{array}\right\}$$

La matriz de desplazamientos para el elemento n será:

$$\tilde{U}_{E,n} = \left\{\begin{array}{c} \tilde{U}_{n,1} \\ \tilde{U}_{n,2} \\ \tilde{U}_{n,3} \\ \tilde{U}_{n,4} \end{array}\right\} \qquad 4.28$$

En el método de deplazamientos del elemento finito, se empieza introduciendo un desarrollo para los desplazamientos $(u\ ,\ v\ ,\omega)$ del elemento en función de un conjunto de parámetros, lo que conduce a:

$$\tilde{u} = \tilde{A}_n \tilde{\alpha}_n \qquad 4.29$$

En donde $\tilde{\alpha}_n$ contiene los parámetros para el elemento n, y $\tilde{A}_n$ depende sólo de las coordenadas locales $\bar{X}$, $\bar{Y}$. Luego se determinan las expresiones para las deformaciones en función de $\tilde{a}_n$, si se usan las relaciones desplazamientos-deformaciones el resultado se escribe como:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{B}_s\tilde{a}_n \quad \text{y} \quad \breve{k} = \tilde{B}_b\tilde{a}_n$$

Al sustituir la ecuación anterior en la ec 4.25, la contribución del elemento n está dada por:

$$\int_{A_n} \tilde{N}^T d(\tilde{B}_s\breve{a}_n) + \tilde{M}^T d(\tilde{B}_b\tilde{a}_n)\, dA = \Delta a_n^T \left[\int_{A_n} (\tilde{B}_s^T \tilde{N} + \tilde{B}_b^T \tilde{M})\, dA\right] \qquad 4.30a$$

y

$$\int_{A_n} \tilde{p}^T \Delta\tilde{u}\, dA = \Delta a_n^T \int_{A_n} \tilde{\Lambda}_n^T \bar{p}\, dA \qquad 4.30b$$

Si se supone que el material es elástico lineal, conduce a sustituir $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{k}$ en la ec 4.24, lo cual lleva a:

$$\tilde{N} = t\tilde{D}\tilde{B}_s\tilde{a}_n - t\tilde{D}\tilde{\varepsilon}^c \qquad 4.31a$$

y

$$\tilde{M} = \frac{t^3}{12}\tilde{D}\tilde{B}_b\tilde{a}_n - \frac{t^3}{12}\tilde{D}\tilde{k} \qquad 4.31b$$

Una vez que $\tilde{a}_n$ se conoce, se determinan $\tilde{N}$ y $\tilde{M}$ en cualquier punto dentro del elemento si se usan las ecs 4.31. Si se sustituyen las ecs 4.30 y 4.31 en la ec 4.25, al transferir los términos contenidos en la deformación inicial en el miembro derecho y se expresa el principio de trabajo virtual, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{n_E} \Delta\tilde{a}_n^T \tilde{K}_n\tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{n_E} \tilde{a}_n^T \tilde{P}_n$$

en la cual n_E = número de elementos y

$$\tilde{K}_n = \int_{A_n} (t\tilde{B}_s^T\tilde{D}\tilde{B}_s + \frac{t^3}{12}\tilde{B}_b^T\tilde{D}\tilde{B}_b)\, dA \qquad 4.32a$$

$$\tilde{P}_n = \int_{A_n} (\tilde{\Lambda}_n^T\tilde{p} + t\tilde{B}_s^T\tilde{D}\tilde{\varepsilon}^c + \frac{t^3}{12}\tilde{B}_b^T\tilde{D}\tilde{k})\, dA \qquad 4.32b$$

Si se relacionan $\tilde{a}_n$ y $\breve{U}_{E,n}$ se necesita usar la ec 4.29, y se escribe a continuación

$$\tilde{U}_{E,n} = \tilde{C}_n\,\bar{a}_n$$

el orden $\tilde{\alpha}_n$ debe de ser igual o mayor que $\tilde{U}_{E,n}$ que para este caso es de (20X1). Al suponer que $\tilde{C}_n$ es cuadrada y no singular, se puede escribir que

$$\tilde{\alpha}_n = \tilde{C}_n^{-1}\, \tilde{U}_{E,n} \qquad 4.33$$

Al sustituir $\tilde{\alpha}_n$ en la ecuación anterior, la forma final del principio de los desplazamientos virtuales es:

$$\sum_{n=1}^{n_E} \Delta\, \tilde{U}^T_{E,n}\, \tilde{K}_{E,n}\, \tilde{U}_{E,n} = \sum_{n=1}^{n_E} \Delta\, \tilde{U}^T_{E,n}\, \tilde{P}_{E,n} \qquad 4.34$$

donde
$$\tilde{K}_{E,n} = \tilde{C}_n^{-1,T}\, \tilde{K}_n\, \tilde{C}_n^{-1} \qquad 4.35a$$

y
$$\tilde{P}_{E,n} = \tilde{C}_n^{-1,T}\, \tilde{P}_n \qquad 4.35b$$

donde $\tilde{K}_{E,n}$ y $\tilde{P}_{E,n}$ son las matrices de rigideces y fuerzas nodales respectivamente.

4.2.4 <u>Desarrollo de los desplazamientos -Caso de coordenadas cartesianas en cascarones de poca curvatura-</u> . El paso crítico en el método de desplazamiento del elemento finito es la selección del desarrollo de la función de desplazamientos, es decir, la forma de $\tilde{A}_n$. Para aplicar las ecs 4.35, se requieren 20 parámetros de desplazamientos. También para que el método converja, los desarrollos de los desplazamientos incluirán: (1) Todos los posibles desplazamientos de cuerpo rígido, y (2) Todos los estados de deformación uniforme. Zienkiewicz (ref 1[illegible]) demostró que las condiciones anteriores son suficientes para que el método converja hacia la solución real. La compatibilidad de desplazamiento total es completamente difícil de satisfacer para un elemento de cascarón a flexión.

Los desarrollos de desplazamientos usados en este estudio son:

$$u = a_1 + a_2\bar{X} + a_3\bar{Y} + a_4\bar{X}\bar{Y} \qquad 4.36a$$

$$v = a_5 + a_6\bar{X} + a_7\bar{Y} + a_8\bar{X}\bar{Y} \qquad 4.36b$$

$$\omega = a_9 + a_{10}\bar{X} + a_{11}\bar{Y} + a_{12}\bar{X}^2 + a_{13}\bar{X}\bar{Y} +$$
$$+ a_{14}\bar{Y}^2 + a_{15}\bar{X}^3 + a_{16}\bar{X}^2\bar{Y} +$$
$$+ a_{17}\bar{X}\bar{Y}^2 + a_{18}\bar{Y}^3 + a_{19}\bar{X}^3\bar{Y} + a_{20}\bar{X}\bar{Y}^3 \qquad 4.37$$

En la cual $\bar{X}$, $\bar{Y}$ son coordenadas locales (fig 4.6). Las ecs 4.36 han sido usadas para esfuerzos planos y la ec 4.37 para flexión de elementos planos rectangulares.

Los desplazamientos de traslación (u, v, ω) son compatibles a lo largo de las fronteras del elemento pero la compatibilidad de la pendiente en la frontera no se satisface. Estos desarrollos satisfacen exactamente los requerimientos de convergencia para el caso de placas planas. Los desarrollos para u, v, no contienen todos los términos de desplazamientos de cuerpo rígido para el caso curvo; ya que se despreció la torsión debida a la curvatura; se ha demostrado que la simplificación anterior es permisible, es decir la solución convergirá habitualmente hacia la solución verdadera.

Para determinar $\bar{K}_n$ y $\bar{F}_n$, se juntan $\bar{K}_n$, $\bar{F}_r$, $\bar{F}_t$ y luego se realizan las multiplicaciones e integraciones necesarias. Por conveniencia no usa el subíndice n. La forma de [illegible] las ecs 4.36 y 4.37 es como sigue:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \vdots & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & \vdots & [illegible] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

donde [illegible]

Al determinar $\tilde{e}$ y $\tilde{\kappa}$ de las ecs 4.26 y 4.27 y si se expresa la matriz resultante en forma particionada como:

$$\tilde{e} = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{B}_{n,I} & \tilde{B}_{s,II} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} a_I \\ a_{II} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\kappa} = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{O} & \tilde{B}_{b,II} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} a_I \\ a_{II} \end{Bmatrix}$$

debido a que $w = \tilde{A}_{II}\tilde{a}_{II}$ se puede escribir

$$\tilde{B}_{s,II} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} A_{II} \\ -\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} A_{II} \\ -2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} A_{II} \end{bmatrix}$$

La forma particionada de $\tilde{K}$ y $\tilde{P}$ de la ec 4.32 es como sigue

$$\tilde{K} = \int_{A_n} \left[\begin{array}{c:c} t\tilde{B}_{n,I}^T \tilde{D}\tilde{B}_{n,I} & t\tilde{B}_{s,I}^T \tilde{D}\tilde{B}_{s,II} \\ \hdashline \text{simétrica} & t\tilde{B}_{s,II}^T \tilde{D}\tilde{B}_{s,II} + \frac{t^3}{12}\tilde{B}_{b,II}^T \tilde{D}\tilde{B}_{b,II} \end{array}\right] dA$$

y

$$\tilde{P} = \int_{A_n} \left[\begin{array}{c} \tilde{A}_I^T \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} + t\,\tilde{B}_{n,I}^T \tilde{D}\,\tilde{e}^c \\ \hdashline \tilde{A}_{II}^T p_n + t\,\tilde{B}_{s,II}^T \tilde{D}\,\tilde{e}^c + \frac{t^3}{12}\tilde{B}_{b,II}^T \tilde{D}\,\tilde{\kappa}^c \end{array}\right] dA$$

Se observa que los términos que contienen $\tilde{B}_{s,II}$ son los debidos a la curvatura. Al final se dá la matriz $\tilde{K}_n$ de segundo orden para un cascarón isótropo de espesor constante (apéndice I).

Una vez realizado lo anterior se determina $\tilde{C}$ ensamblando la matriz $\tilde{U}_E$; para ello es conveniente introducir primero u para cada nudo, luego v, finalmente, w, β_1, β_2 para que la inversión sea más fácil. Esto conduce a la matriz cuasidiagonal $\tilde{C}'$,

$$\tilde{C}' = \begin{bmatrix} C'_1 & 0 & 0 \\ 0 & C'_1 & 0 \\ 0 & 0 & C'_2 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida $\tilde{C}'^{-1}$ se obtiene $\tilde{C}^{-1}$ por intercambio de columnas.

4.2.5 Sistema total de ecuaciones. La ec 4.34 se debe satisfacer para toda variación de los desplazamientos nodales. Una secuencia para reducir la ec 4.34 es desarrollar las matrices de desplazamientos nodales de cada elemento, $\tilde{U}_{E,n}$ en términos de la matriz de desplazamientos del nudo $\tilde{U}_j$ y luego igualar los coeficientes de $\tilde{U}_j$ en ambos lados.

De esta manera

$$\tilde{U}_{E,n} = \left\{ \tilde{U}_{n_i} \right\} \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Si se particiona $\tilde{K}_{E,n}$ y $\tilde{P}_{E,n}$ de acuerdo con la partición de $\tilde{U}_{E,n}$ se obtiene

$$\tilde{P}_{E,n} = \left\{ \tilde{P}_{n,i} \right\} \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\tilde{K}_{E,n} = \left[\tilde{k}_{n,ij} \right]$$

Con esta notación la ec 4.34 se escribe como sigue:

$$\Delta \tilde{U}^T_{E,n} \tilde{P}_{E,n} = \sum_{i=1}^{4} \Delta \tilde{U}^T_{n_i} \tilde{P}_{n,i} \qquad 4.35$$

y

$$\Delta \tilde{U}^T_{E,n} \tilde{K}_{E,n} \tilde{U}_{E,n} = \sum_{i=1}^{4} \Delta \tilde{U}^T_{n_i} \left(\sum_{j=1}^{4} \tilde{k}_{n,ij} \tilde{U}_{n_j} \right) \qquad 4.36$$

Si se hace n_N como el número total de nudos y se define $\tilde{\mathcal{U}}$ como la matriz de desplazamientos totales, es decir:

$$\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ \tilde{U}_1,\ \tilde{U}_2,\ \ldots,\ \tilde{U}_{n_N} \right\} \qquad (5 n_N \times 1)$$

Se puede expresar, ahora, la ec 4.34 como

$$\Delta \tilde{\mathcal{U}}^T \tilde{K} \tilde{\mathcal{U}} = \Delta \tilde{\mathcal{U}}^T \tilde{P}$$

Al introducir el requisito que la ecuación anterior sea satisfecha para cualquier $\Delta\tilde{u}$, el sistema de ecuaciones conduce a:

$$\tilde{K}\, u = \tilde{P} \qquad 4.39$$

Si se ensambla $\tilde{K}$ y $\tilde{P}$ en forma particionada, al trabajar con elementos sucesivos, las contribuciones para el elemento serán directamente de la ec 4.38, (fig 4.7b)

en $\tilde{P}$ $\tilde{P}_{n,i}$ en el renglón n_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

en $\tilde{K}$ $\tilde{k}_{n,ij}$ en el renglón n_i, columna n_j

El paso final es introducir las condiciones de frontera en la ec 4.39.

Una vez que $\tilde{u}$ se conoce, se ensambla $U_{B,n}$ y determina $\tilde{a}_n$ si se usa la ec 4.33. Los momentos y esfuerzos resultantes se evalúan al aplicar la ec 4.31. Esta operación se realiza para cada elemento.

5. APLICACIONES

Ejemplo 1. Tanque cilíndrico vertical lleno con líquido.

Considérese un tanque cilíndrico, lleno con líquido de densidad ρ (fig 5.1). La presión es la debida a la carga hidrostática. Calcular los esfuerzos resultantes de membrana y flexión. El tanque se construirá de concreto reforzado con las siguientes dimensiones.

Altura del tanque	$L = 1[illegible],30$ m
Radio del tanque	$R = 9{,}14$ m
Espesor del tanque	$t = 0{,}30$ m
Relación de Poisson	$\nu = 0{,}0$

SOLUCION

La presión es $\rho(L - x)$ y las fuerzas externas son

$$X' = 0 \quad Y' = 0 \quad Z' = -\rho(L - x)$$

De la ec 2.1 se obtiene

$$N_\phi = \rho(L - X)R$$

Si se sustituye el valor anterior de N_ϕ en la ec 2.2 conduce a

$$N_{\phi x} = C_1$$

Al sustituir el valor de $N_{\phi x}$ en la ec 2.3 se obtiene

$$N_x = -\frac{\partial C_1}{R\partial\phi} + C_2 \qquad 5.1$$

Para obtener las constantes C_1 y C_2 se utilizan las condiciones de frontera como sigue:

en $\quad x = 0 \quad N_{\phi x} = 0$

y como $N_{\phi x} = C_1$ por lo tanto $C_1 = 0$

en $\quad x = L \quad N_x = 0$

y con la ec 5.1 se obtiene $C_2 = 0$

En consecuencia, los esfuerzos resultantes de membrana son

$$N_\phi = \rho R(L - X) \qquad 5.2$$

$$N_{\phi x} = 0 \qquad 5.3$$

$$N_x = 0 \qquad 5.4$$

Con la teoría de flexión se obtiene

$$w = -\rho R^2 L(1 - x/L - \theta - (1 - 1/\beta L)\phi)/Et$$

$$M_x = \frac{\rho L}{2\beta}(-\phi + (1 - 1/\beta L)\theta)$$

$$M_\phi = \nu M_x = 0$$

$$N_\phi = \rho RL(1 - x/L - \theta - (1 - 1/\beta L)\phi)$$

$$Q_x = \frac{\rho L}{2\beta}(-2\theta + (\theta + \phi)/\beta L)$$

donde ρ = densidad del líquido

$$\theta = e^{-\beta x} \cos \beta x$$

$\phi = e^{-\beta x} \operatorname{sen} \beta x$

Como todos los esfuerzos están en función de ρ, $e^{-\beta x}$, $\cos \beta x$, θ, $\operatorname{sen} \beta x$, y ϕ se puede hacer uso de tablas como sigue:

$$\beta^4 = \frac{3(1 - [illegible])}{([illegible].14)^2 ([illegible])^2} \; ; \; \beta = 0.79[illegible]$$

x(m)	βx	$e^{-\beta x}$	θ	ϕ	+
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	1.58956	0.20402	-0.003[illegible]	[illegible].20[illegible]	0.70456
4	3.17912	0.04162	-0.04159	-0.00156	0.82447
6	4.76870	0.00849	0.00048	-0.00848	0.76955
8	6.35824	0.00173	0.00173	0.00013	0.56099
10	7.94780	0.00035	-0.00003	0.00035	0.45326
15	11.92170	0.00001	0.00001	0.00000	0.18033
18.3	14.54463	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

+ $1 - x/L - \theta - (1 - 1/\beta L)\phi$

x(m)	++	ω	N_x	N_ϕ	N_ϕ +++
0	[illegible]	0.0	13.46938	0.0	167.262
2	-0.20754	1077.14841	-3.00634	117.8500	148.982
4	-0.03717	1266.42580	-0.53645	137.9022	130.702
6	0.00892	1038.87622	0.12975	113.6671	112.422
8	0.00148	[illegible]57.63193	0.02142	[illegible]	94.142
10	-0.00038	692.92833	-0.00554	75.8127	75.862
15	0.00001	[illegible]	[illegible]	[illegible].1617	30.162
18.3	-0.00000	[illegible]	-[illegible].00001	-0.0000	[illegible]

++ $(-\phi + (1 - 1/\beta L)\theta)$

+++ Teoría de membrana

Se observa que la solución de membrana para N_ϕ (ec [illegible]) está contenida en los dos primeros términos de la solución por flexión, a demás al comparar los valores de N_ϕ con ambas teorías, se ve que la teoría de membrana da valores altos en la base del tanque y se aproximan a la teoría de la flexión conforme aumenta su altura (fig 5.4)

Ejemplo 2. Cascarón cilíndrico circular abierto.

a. Cascarón largo. (Comparación del método de la viga y la teoría de flexión).

Un cascarón se construirá de concreto reforzado, apoyado en sus bordes por diafragmas rígidos, como se ve en la fig 5.2. Calcular los esfuerzos si las dimensiones del cascarón son las siguientes:

Longitud del cascarón	$L = 36.58$ m
Radio del cascarón	$R = 9.14$ m
Espesor del cascarón	$t = 0.0762$ m
Angulo medio del cascarón	$\phi_k = 40^0$

Las condiciones de carga son las siguientes:

Carga muerta	176 Kg/m^2
Carga viva	68 Kg/m^2
Carga total	$q = 244$ Kg/m^2

-SOLUCION-

.. Para utilizar la teoría de flexión primero se obtendrán las constantes del cascarón, luego se hará una tabla con las funciones de ϕ, enseguida se obtendrán las funciones complementarias con las condiciones de frontera y se agregarán las integrales particulares para obtener las constantes a, b, c y d. Por último, una vez obtenidas las constantes se determinarán los esfuerzos.

+ Constantes del cascarón

$$G = tR^6k^4/I$$

$$G = 4.0001$$

$$\alpha = 0.92388\ G \qquad \beta = 0.38268\ G$$

$$\alpha = 3.6956 \qquad \beta = 1.5308$$

+ Funciones de ϕ

ϕ	$\cos\beta\phi\ \cosh\alpha\phi$	$\operatorname{sen}\beta\phi\ \operatorname{senh}\alpha\phi$	$\cos\alpha\phi\ \cosh\beta\phi$	$\operatorname{sen}\alpha\phi\ \operatorname{senh}\beta\phi$
0°	1.0	0.0	1.0	0.0
10°	1.172211755	0.18233324517	0.8277[illegible]544	0.162541749
20°	1.681665447	0.85496179490	0.317[illegible]1785	0.[illegible]36198775
30°	2.458537726	2.43532099200	-0.476[illegible]061[illegible]	0.[illegible]31736797
40°	3.194078010	5.7510[illegible]3600	-1.[illegible]7755[illegible]	0.6[illegible]3766143

ϕ	$\cos\beta\phi\ \operatorname{senh}\alpha\phi$	$\operatorname{sen}\beta\phi\ \cosh\alpha\phi$	$\cos\alpha\phi\ \operatorname{senh}\beta\phi$	$\operatorname{sen}\alpha\phi\ \cosh\beta\phi$
0°	0.0	0.0	0.0	0.0
10°	0.666166825	0.3[illegible]0051235	0.216043822	0.622788897
20°	1.444769490	0.995148816	0.155[illegible]17471	1.101303450
30°	2.358075192	2.539074476	-0.31706[illegible]74	1.[illegible]0[illegible]55674
40°	3.157610535	5.817458006	-1.[illegible]6840658	0.[illegible]6666296[illegible]

+ **Funciones complementarias**

Las funciones complementarias de las **esfuerzos se obtienen con las tablas anteriores y las** tablas I y II, quedando **en función de las constantes a,b,** c y d. Con las condiciones **de frontera se resolverán estas funciones.**

Las condiciones de frontera son:

$M_\phi = 0$ [illegible] $= 0$ [illegible] $=$ [illegible] [illegible] $=$ [illegible] en $\phi = \pm$[illegible]

$$M_\phi = -\frac{2EI}{R^2}\cos kx(-28.93a - 101.208b + 7.849c + 23.322d)$$

$$N_\phi = \frac{2EI}{R^3}\cos kx(-1472.424a - 817.772b + 175.063c - 352.692d)$$

$$Q_\phi = -\frac{2EI}{R^3}\cos kx(-266.662a - 329.210b + 85.496c + 24.628d)$$

$$N_{x\phi} = -\frac{2EI}{kR^4}\operatorname{sen} kx(-6741.892a - 707.866b - 686.684c - 1245.974d)$$

A estas funciones complementarias deben añadírseles las integrales particulares que se obtienen como sigue:

+ Integrales particulares

$$C = \frac{2R^4}{EI(1 + tR^6k^4/I)}$$

$$C = 0.21293/EI \approx 0$$

$$J = -2$$

$$M_\phi = 0$$

$$Q_\phi = 0$$

$$N_\phi = -(4/\pi)1708.402 \cos kx$$

$$N_{x\phi} = -(4/\pi)3652.424 \operatorname{sen} kx$$

+ Solución de las constantes a, b, c y d

Al sumar las funciones complementarias y las integrales particulares se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} -28.93\text{[illegible]}26 & -1\text{[illegible]} & 7.84973 & 23.32242 \\ -1472.424 & -\text{[illegible]}17.77174 & 175.063 & -3\text{[illegible]}92 \\ -266.6624 & -\text{[illegible]}10\text{[illegible]} & 85.4\text{[illegible]} & 24.62766 \\ -6741.\text{[illegible]} & -7\text{[illegible]} & -68\text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{[illegible]}.0 \\ 652226.7F \\ 0.0 \\ -1\text{[illegible]}2456\text{[illegible]}.4F \end{bmatrix}$$

donde $F = 4/(\pi EI)$

La solución de este sistema es

$$a = \text{[illegible]}13.71\text{[illegible]}927\ F$$

$$b = -1\text{[illegible]}.\text{[illegible]}75732\ F$$

$$c = -\ 227.646574\ F$$

$$d = -\ 3343.737305\ F$$

+ Determinación de los esfuerzos

[illegible] vez obtenidas las [illegible] tes a, b, c y d los esfuerzos se determinan con ayuda de las tablas I y II, de la siguiente manera:

ϕ	M_ϕ (kg-m/m) cos kx	N_ϕ (kg/m) cos kx	[illegible] $_\phi$ (kg/m) sen kx	[illegible] (kg/m) [illegible]	[illegible] cos kx
0°	-1908.76523	-47[illegible].59797	0.0	0.0	-60200.0
10°	-1647.08772	-42[illegible]3.31[illegible]2	-[illegible].49178	314.30151	-55501.8
20°	- 991.37821	-2839.94731	-14356.5[illegible]	469.31[illegible]37	-31576.9
30°	- 297.19817	- 956.26[illegible]9	-14610.6123	351.66875	[illegible]8472.3
40°	0.0	0.0	[illegible]	0.0	1[illegible]2171.3

.. Al utilizar el método de la viga se tiene

+ Cálculo de la viga

$$\bar{y} = \frac{[illegible]\ \phi_k}{\phi_k}$$

$$\bar{y} = [illegible]$$

$$I = R^3\left(\phi_k + [illegible]\ \phi_k\left(\cos\phi_k - [illegible]\frac{\operatorname{sen}\phi_k}{\phi_k}\right)\right)$$

$$I = [illegible]$$

$$I = [illegible]$$

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible]_x = [illegible]$$

para $\phi = [illegible]$, [illegible] $= -$ [illegible]

para $\phi = 40°$, [illegible] $=$ [illegible]

Para el esfuerzo cortante [illegible] se requiere construir la siguiente tabla

ϕ	$\omega(m^2)$
0°	0.0
10°	2.16389
20°	3.44623
30°	2.99227
40°	0.0

+ Cálculo del arco

De la ec 4.6 $\quad \frac{Et}{12}\theta_{CE} = 9807.[illegible]5565$

De la ec 4.15 $\quad \frac{Et}{12}\theta_{CE} = 4611.21174$

De la ec 4.20 $\quad \frac{Et}{12}\theta_{CE} = 6.3809\ M_{CE}$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

$$M_{CE} = 814.403 \text{ kg-m/m}$$

De la ec 4.7 $\quad \frac{Et}{12}\Delta_{h_{CE}} = 5403.21979$

De la ec 4.16 $\quad \frac{Et}{12}\Delta_{h_{CE}} = 2772.39496$

De la ec 4.19 $\quad \frac{Et}{12}\Delta_{h_{CE}} = [illegible]\ H_{CE}$

Al resolver para H_{CE} se obtiene

$$H_{CE} = 1\,002.527 \text{ kg/m}$$

Una vez obtenidos los valores anteriores, el momento M_{ϕ} se calcula por intervalos de 10° con las ecs 4.5, 4.14 y 4.17; el esfuerzo N_{ϕ} se calcula con las ecs 4.4, 4.12, 4.13 y H_{CE}.

Los valores de los esfuerzos resultantes se tabulan de la siguiente manera:

ϕ	N_x (kg/m)	$N_{x\phi}$ (kg/m)	M_ϕ (kg-m/m)	N_ϕ (kg/m)
0°	-71 [illegible]16.[illegible]6[illegible]	0.0	-[illegible]3.4542[illegible]57	-[illegible]93.4[illegible]
10°	-5[illegible] 123.3[illegible]5	-11 [illegible]	11.[illegible]	-2796.1591
20°	-17 203.455	-1[illegible].[illegible]911	170.[illegible]945	-1491.[illegible]26
[illegible]	[illegible]13.[illegible]	[illegible].[illegible]476	75.297505	[illegible]51.[illegible]
40°	140 3[illegible]6.[illegible]00	0.0	-60[illegible].[illegible]69[illegible]	100[illegible].[illegible]

Como [illegible] observa [illegible] las [illegible] 5.[illegible] a [illegible] los esfuerzos N_x [illegible] $N_{x\phi}$ por el método de la viga, para un cascarón largo, dan resultados [illegible]ximados comparados [illegible] teoría [illegible]. Para el esfuerzo N_x en $\phi = 0^\circ$ la [illegible] de 1[illegible].[illegible]% y en $\phi = 40^\circ$ de un 26.9[illegible]%, [illegible] el esfuerzo $N_{x\phi}$, el error máximo es de [illegible]% y [illegible] en $\phi = 1[illegible]^\circ$. [illegible] esfuerzo M_ϕ [illegible] valores mucho más [illegible] la teoría de la viga (el error máximo [illegible] de 7[illegible]%) [illegible] el esfuerzo N_ϕ dá valores [illegible] en la teoría de la viga.

Ejemplo [illegible]. [illegible] cilíndrico circular abierto.

b. Cascarón corto. (Comparación de [illegible] teoría de [illegible])

Un cascarón corto [illegible] construirá [illegible] concreto reforzado, [illegible] sus bordes por diafragmas rígidos, como se ve [illegible]. Las dimensiones del cascarón son las [illegible]:

Longitud del cascarón [illegible]

Radio del cascarón [illegible] = [illegible].1[illegible]

Espesor del cascarón t = 0.[illegible]

Angulo [illegible] del cascarón ϕ_k = 4[illegible]$^\circ$

Las condiciones de carga son las siguientes:

Carga muerta $176 \ kg/m^2$

Carga viva $\underline{68 \ kg/m^2}$

Carga total $q = 244 \ kg/m^2$

-SOLUCION-

.. Al utilizar la teoría de membrana se obtiene

con $X' = 0$

$Y' = q \ sen \ \phi$

$Z' = q \ cos \ \phi$

$N_\phi = -Rq \ cos \ \phi$

$N_{x\phi} = -2qx \ sen \ \phi + C_1$

como en $x = \pm L/2, \quad N_{x\phi} = 0$

quiere decir que $C_1 = 0$

por lo mismo $N_{x\phi} = -2qx \ sen \ \phi$

ahora $N_x = \frac{qx^2}{R} \ cos \ \phi + C_2$

de nuevo $x = \pm L/2, \quad N_x = 0$

y $C_2 = -\frac{qL^2}{4R} cos \ \phi$

de esta manera $N_x = \frac{q \ cos \ \phi}{R}(x^2 - L^2/4)$

Para comparar con la teoría de flexión, si en vez de q se escribe p cos kx en donde $p = 4q/\pi$ se obtiene

$N_\phi = -R(4/\pi)q \ cos \ kx \ cos \ \phi$

$N_x = -([illegible]/\pi)q \ cos \ kx \ cos \ \phi$ [illegible]

$N_{x\phi} = -([illegible]/\pi)q \ sen \ kx \ sen \ \phi$

Al sustituir los valores del radio, longitud y carga se obtienen los siguientes valores:

$$M_{\phi} = -[illegible],[illegible] \cos kx \cos \phi$$

$$M_{x\phi} = -[illegible].[illegible]3 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \phi$$

$$M_{x} = -[illegible],[illegible] \cos kx \cos \phi$$

[illegible]ra encontrar los esfuerzos por flexión se procede [illegible] el ejemplo anterior y por simplicidad solo [illegible] los resultados

ϕ	N_x(kg/m) cos kx	N_{ϕ} ([illegible]) cos kx	$N_{x\phi}$(kg/m) cos kx	M_{ϕ} ([illegible]) cos kx	$M_{x\phi}$ ([illegible]) sen kx
0°	-[illegible].[illegible]7	[illegible]	.0	-2678.[illegible]	[illegible]
10°	83.093	0.61[illegible]	-[illegible].4[illegible]	-2621.[illegible]	-[illegible]1.[illegible]4
20°	-93.203	-11.47[illegible]	-[illegible].[illegible]	-2[illegible]1.[illegible]	11[illegible].4[illegible]
30°	-1571.501	-1[illegible].[illegible]	[illegible].4[illegible]	[illegible]	-1[illegible].[illegible]
40°	8[illegible]27.19[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Los esfuerzos de [illegible]

ϕ	M_{ϕ} ([illegible]) cos kx	$M_{x\phi}$ ([illegible])	[illegible] $_x$
0°	-[illegible]34.[illegible]	[illegible]	[illegible]
10°	-[illegible]7[illegible].3[illegible]	-1[illegible]	-[illegible]
20°	-[illegible]	[illegible].1[illegible]	-[illegible]1
30°	-[illegible]	[illegible]1.31	-[illegible]
40°	-[illegible]	[illegible]	-[illegible]

En las figs 5.9 [illegible].11 se [illegible] el esfuerzo N_{ϕ}, para un cascarón corto, con la teoría de [illegible] da valores aproximados a los de la teoría de flexión [illegible] de 6%), para el esfuerzo N_x da v[illegible] eras 2.[illegible] y los [illegible] no , para el esfuerzo $N_{\phi x}$ dá valores aproximados en los primeros 10° y despues ya no.

Ejemplo 4. Análisis de un cascarón cilíndrico cerrado.

(Método del elemento finito)

En la fig 5.3 se ilustra la estructura analizada y la idealización de elementos finitos que se empleó. Se muestra una malla de 10x10 elementos, pero los análisis se realizaron también para mallas de 4x4, 6x6, 8x8, 10x10 y 16x16, con el objeto de estudiar la aproximación del método del elemento finito. En las figs 5.12 a 5.19 se presentan los desplazamientos y esfuerzos resultantes a lo largo de las líneas DC y AD, respectivamente. Los resultados se presentan solo para las mallas de 4x4 y 16x16. Se puede observar que en la medida que se refine la malla, la solución numérica concuerda más con la analítica. [illegible] la relación de tiempos totales de computadora para obtener la solución. Los resultados se obtuvieron en forma adimensional para la carga P, con el fin de lograr mayor utilidad en las curvas de respuesta.

Como se puede observar en la fig 5.12, en el punto C para el desplazamiento w, el error es de [illegible]% para la malla de 4x4 y de 7.2% para la malla de 16x16 [illegible] despreciable [illegible] en el punto D. [illegible] (fig 5.13) el error máximo, que es en el punto C, es de 16.[illegible]% para la malla de 4x4 y para la malla de 16x16 no hay error. El error para el esfuerzo M_{ϕ}, en el punto C, (fig 5.14) es de [illegible].7% para la malla de 4x4 y de 0.41% para la malla de 16x16 y un decremento [illegible] hasta llegar a cero en el punto D. Para el esfuerzo [illegible] en el punto C (fig 5.15) el error es 45.05% para la malla de 4x4 y de [illegible]% para la malla de 16x16. Para el lado [illegible] los porcentajes de error son similares a los errores del lado DC.

6. CONCLUSIONES

Una vez hecho el análisis de los capítulos primeros y de los ejemplos estudiados a cerca de los cascarones delgados de concreto se concluye lo siguiente:

1. Existe una discrepancia, que a veces se acentúa, entre las teorías de membrana y flexión en los cascarones abiertos cortos; considerando por ende que el análisis de tales cascarones es con la teoría de flexión y como un diseño preliminar con la teoría de membrana.

2. En los cascarones cilíndricos circulares abiertos largos los resultados del método de la viga y la teoría de flexión son parecidos, por lo tanto considerando que para un diseño preliminar el método de la viga es aceptable.

3. En los cascarones cilíndricos circulares cerrados la teoría de membrana se encuentra contenida en la teoría de flexión y además da valores aproximados por esto se concluye que la teoría de membrana se puede utilizar para un diseño preliminar.

4. En los cascarones cilíndricos cerrados, como se vió en el último ejemplo, el método del elemento finito da valores muy aproximados y por lo mismo para el diseño final se puede utilizar este método.

7. REFERENCIAS

1. Gibson, J. E., Linear elastic theory of thin shells, 1a. ed., Pergamon Press, New York, 1966.

2. Timoshenko, S., and Goodier, J. N., Theory of elasticity, 2a. ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

3. Scorer, H., "Line load action on thin cylindrical shells", Proceedings of the ASCE, Vol 61, No. 3, pp. 281-316, 1935.

4. Gibson, J. E., The design of cylindrical shell roofs, 2a. ed., D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1961.

5. Design of cylindrical concrete shell roofs, ASCE "Manuals of Engineering Practice", Vol. 31, New York, 1952.

6. Lundgren, H., Cylindrical shells, V. I., The Danish Technical Press, Copenhagen, pp. 63-74, 1949.

7. Chinn, J., "Cylindrical shell analysis simplified by beam method" J. ACI, Vol. 30, pp. 11[illegible]3, May, 1959.

8. Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics" Stress Analysis, O. C. Zienkiewicz, and G. S. Holister, ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapter 7, 1964.

9. Argyris, J. H., Recent advances in matrix methods of structural analysis, Pergamon Press, Inc., New York, 1964.

10. Bazely, G., Cheung, Y., Irons, B., and Zienkiewicz, O., "Triangular elements in plate bending -Conforming and nonconforming solutions", Proceedings, Conference on matrix methods in structural mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, Oct.,

1965.

11. Connor, J. J., and Brebbia, C., "Stiffness matrix for shallow rec tangular shell element", Journal of the engineering mechanics di . vision, ASCE, Vol. [illegible], No. EM5, Proc. Paper 5[illegible], Oct., 1967.

APENDICE I

La matriz de rigideces para un elemento rectangular de un cascarón de espesor constante y material isótropo se da a continuación:

Notación

$$A = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$B = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$C = -(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2$$

y a,b = dimensiones proyectadas en las direcciones $\bar{X}, \bar{Y}$, respectivamente.

$$\tilde{K} = \frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \text{simétrica} & & \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} & & \\ \tilde{K}_{31} & \tilde{K}_{32} & \tilde{K}_{33} & \\ \tilde{K}_{41} & \tilde{K}_{42} & \tilde{K}_{43} & \tilde{K}_{44} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & ab & & & \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)ab & \text{simétrica} & \\ 0 & \frac{ab^2}{2} & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{a^2b}{2} & \frac{ab}{3}\left(\frac{1-\nu}{2}\right)a^2 + b^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)ab & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{a^2b}{2} & 0 \\ 0 & ab & 0 & \frac{ab^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2b}{2} & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{ab^2}{2} & \left(\frac{1+\nu}{2}\right)\frac{a^2b^2}{4} & 0 \\ 0 & Aab & Cab & C\frac{a^2b}{2} + A\frac{ab^2}{2} & 0 \\ 0 & A\frac{a^2b}{2} & C\frac{a^2b}{2} & C\frac{a^3b}{3} + A\frac{a^2b^2}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1-}{2}ab & & & & \\ 0 & ab & & & \\ \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\frac{ab^2}{2} & \frac{a^2b}{2} & \frac{a^3b}{3} + \frac{ab^3}{3}\left(\frac{1-\nu}{2}\right) & \text{simétrica} & \\ Cab & Bab & C\frac{ab^2}{2} + B\frac{a^2b}{2} & Dab & \\ C\frac{a^2b}{2} & B\frac{a^2b}{2} & C\frac{a^2b^2}{4} + B\frac{a^3b}{3} & D\frac{a^2b}{2} & D\frac{a^3b}{3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & A\frac{ab^2}{2} & C\frac{ab^2}{2} & C\frac{a^2b^2}{4} + A\frac{ab^3}{3} & 0 \\ 0 & A\frac{a^3b}{3} & C\frac{a^3b}{3} & C\frac{a^4b}{4} + A\frac{a^3b^2}{6} & 0 \\ 0 & A\frac{a^2b^2}{4} & C\frac{a^2b^2}{4} & C\frac{a^3b^2}{6} + A\frac{a^2b^3}{6} & 0 \\ 0 & A\frac{ab^3}{3} & C\frac{ab^3}{3} & C\frac{a^2b^3}{6} + A\frac{ab^4}{4} & 0 \\ 0 & A\frac{a^4b}{4} & C\frac{a^4b}{4} & C\frac{a^5b}{5} + A\frac{a^4b^2}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{32} = \begin{bmatrix} C\frac{ab^2}{2} & B\frac{ab^2}{2} & C\frac{ab^3}{3} + B\frac{a^2b^2}{4} & D\frac{ab^2}{2} & D\frac{a^2b^2}{4} \\ C\frac{a^3b}{3} & B\frac{a^3b}{3} & C\frac{a^3b^2}{6} + B\frac{a^4b}{4} & D\frac{a^3b}{3} & D\frac{a^4b}{4} \\ C\frac{a^2b^2}{4} & B\frac{a^2b^2}{4} & C\frac{a^2b^3}{6} + B\frac{a^3b^2}{6} & D\frac{a^2b^2}{4} & D\frac{a^3b^2}{6} \\ C\frac{ab^3}{3} & B\frac{ab^3}{3} & C\frac{ab^4}{4} + B\frac{a^2b^3}{6} & D\frac{ab^3}{3} & D\frac{a^2b^3}{6} \\ C\frac{a^4b}{4} & B\frac{a^4b}{4} & C\frac{a^4b^2}{8} + B\frac{a^5b}{5} & D\frac{a^4b}{4} & D\frac{a^5b}{5} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{33} = \begin{bmatrix} D\frac{ab^3}{3} & & & & \\ D\frac{a^3b^2}{6} & D\frac{a^5b}{5} + \frac{t^2}{3}ab & & & \\ D\frac{a^2b^3}{6} & D\frac{a^4b^2}{8} & D\frac{a^3b^3}{9} + \frac{t^2}{6}(1-\nu)ab & \text{simétrica} & \\ D\frac{ab^4}{4} & D\frac{a^3b^3}{9} + \frac{t^2}{3}ab & D\frac{a^2b^4}{8} & D\frac{ab^5}{5} + \frac{t^2}{3}ab & \\ D\frac{a^4b^2}{8} & D\frac{a^6b}{6} + t^2\frac{a^2b}{2} & D\frac{a^5b^2}{10} & D\frac{a^4b^3}{12} + t^2\frac{a^2b}{2} & D\frac{a^7b}{7} + t^2 a^3b \end{bmatrix}$$

$$K_{41} = \begin{bmatrix} 0 & A\frac{a^3b^2}{6} & C\frac{a^3b^2}{6} & C\frac{a^4b^2}{8} + A\frac{a^3b^3}{9} & 0 \\ 0 & A\frac{a^2b^3}{6} & C\frac{a^2b^3}{6} & C\frac{a^2b^4}{8} + A\frac{a^3b^3}{9} & 0 \\ 0 & A\frac{a\,b^4}{4} & C\frac{a\,b^4}{4} & C\frac{a^2b^4}{8} + A\frac{a\,b^5}{5} & 0 \\ 0 & A\frac{a^4b^2}{8} & C\frac{a^4b^2}{8} & C\frac{a^5b^2}{10} + A\frac{a^4b^3}{12} & 0 \\ 0 & A\frac{a^2b^4}{8} & C\frac{a^2b^4}{8} & C\frac{a^3b^4}{12} + A\frac{a^2b^5}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{42} = \begin{bmatrix} C\frac{a^3b^2}{6} & B\frac{a^3b^2}{6} & C\frac{a^3b^3}{9} + B\frac{a^4b^2}{8} & D\frac{a^3b^2}{6} & D\frac{a^4b^2}{8} \\ C\frac{a^2b^3}{6} & B\frac{a^2b^3}{6} & C\frac{a^2b^4}{8} + B\frac{a^3b^3}{9} & D\frac{a^2b^3}{6} & D\frac{a^3b^3}{9} \\ C\frac{a\,b^4}{4} & B\frac{a\,b^4}{4} & C\frac{a\,b^5}{5} + B\frac{a^2b^4}{8} & D\frac{a\,b^4}{4} & D\frac{a^2b^4}{8} \\ C\frac{a^4b^2}{8} & B\frac{a^4b^2}{8} & C\frac{a^4b^3}{12} + B\frac{a^5b^2}{10} & D\frac{a^4b^2}{8} & D\frac{a^5b^2}{10} \\ C\frac{a^2b^4}{8} & B\frac{a^2b^4}{8} & C\frac{a^2b^5}{10} + B\frac{a^3b^4}{12} & D\frac{a^2b^4}{8} & D\frac{a^3b^4}{12} \end{bmatrix}$$

$$K_{43} = \begin{bmatrix} D\frac{a^3b^3}{9} & D\frac{a^5b^2}{10} + \frac{t^2}{6}ab^2 & D\frac{a^4b^3}{12} + \frac{t^2}{6}(1-\nu)a^2b & D\frac{a^3b^4}{12} + \frac{t^2}{6}ab^2 & D\frac{a^6b^2}{12} + \frac{t^2}{4}a^2b^2 \\ D\frac{a^2b^4}{8} & D\frac{a^4b^3}{12} + \frac{t^2}{6}a^2b & D\frac{a^3b^4}{12} + \frac{t^2}{6}(1-\nu)ab^2 & D\frac{a^2b^5}{12} + \frac{t^2}{6}a^2b & D\frac{a^5b^3}{15} + \frac{t^2}{3}a^2b \\ D\frac{ab^5}{5} & D\frac{a^3b^4}{12} + \frac{t^2}{2}ab^2 & D\frac{a^2b^5}{10} & D\frac{ab^6}{6} + \frac{t^2}{2}ab^2 & D\frac{a^4b^4}{16} + \frac{3t^2}{4}a^2b^2 \\ D\frac{a^4b^3}{12} & D\frac{a^6b^2}{12} + \frac{t^2}{4}a^2b^2 & D\frac{a^5b^3}{15} + \frac{t^2}{6}(1-\nu)a^3b & D\frac{a^4b^4}{16} + \frac{t^2}{4}a^2b^2 & D\frac{a^7b^2}{14} + \frac{t^2}{2}a^3b^2 \\ D\frac{a^2b^5}{10} & D\frac{a^4b^4}{16} + \frac{t^2}{4}a^2b^3 & D\frac{a^3b^5}{15} + \frac{t^2}{6}(1-\nu)ab^3 & D\frac{a^2b^6}{12} + \frac{t^2}{4}a^2b^2 & D\frac{a^5b^4}{20} + \frac{t^2}{2}a^3b^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{44} = (C_{ij})$$

$$C_{11} = D\frac{a^5b^3}{15} + \frac{t^2}{9}ab(b^2 + 2(1-\nu)a^2)$$

$$C_{21} = D\frac{a^4b^4}{16} + \frac{t^2}{12}a^2b^2(2-\nu)$$

$$C_{22} = D\frac{a^3b^5}{15} + \frac{t^2}{9}ab(a^2 + (1-\nu)2b^2)$$

$$C_{31} = D\frac{a^3b^5}{15} + \frac{t^2}{3}ab^3$$

$$C_{32} = D\frac{a^2b^6}{12} + \frac{t^2}{4}a^2b^2$$

$$C_{33} = D\frac{ab^7}{7} + t^2ab^3$$

$$C_{41} = D\frac{a^6b^3}{18} + \frac{t^2}{2}a^2b(\frac{b^2}{3} + \frac{1}{2}(1-\nu)a^2)$$

$$C_{42} = D\frac{a^5b^4}{20} + \frac{t^2}{6}a^3b^2$$

$$C_{43} = D\frac{a^4b^5}{20} + \frac{t}{2}a^2b^3$$

$$C_{44} = D\frac{a^7b^3}{21} + t^2a^3b\left(\frac{b^2}{3} + \frac{3}{10}a^2(1-\nu)\right)$$

$$C_{51} = D\frac{a^4b^5}{20} + \frac{t^2}{6}a^2b^3$$

$$C_{52} = D\frac{a^3b^6}{18} + \frac{t^2}{2}ab^2\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{2}(1-\nu)\right)$$

$$C_{53} = D\frac{a^2b^7}{14} + \frac{t^2}{2}a^2b^3$$

$$C_{54} = D\frac{a^5b^5}{25} + \frac{t^2}{6}(1+\nu)a^3b^3$$

$$C_{55} = D\frac{a^3b^7}{21} + t^2ab^3\left(\frac{a^2}{3} + \frac{3(1-\nu)}{10}b^2\right)$$

La inversión de la matriz cuasidiagonal C' conduce a

$$(C_1')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/a & 0 & 1/a & 0 \\ -1/b & 1/b & 0 & 0 \\ 1/(ab) & -1/(ab) & -1/(ab) & 1/(ab) \end{bmatrix}$$

$$(C_2')^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-3}{a^2} & 0 & \frac{3}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{ab} & \frac{1}{ab} & \frac{1}{ab} & \frac{-1}{ab} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} & 0 & 0 & 1/a & 0 & \frac{-1}{a} & 0 \\
\frac{-3}{b^2} & \frac{3}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/b & 1/b & 0 & 0 \\
\frac{2}{a^3} & 0 & \frac{-2}{a^3} & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{a^2b} & \frac{-3}{a^2b} & \frac{-3}{a^2b} & \frac{3}{a^2b} & \frac{-2}{ab} & \frac{2}{ab} & \frac{-1}{ab} & \frac{1}{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{b^2a} & \frac{-3}{ab^2} & \frac{-3}{ab^2} & \frac{3}{ab^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{ab} & \frac{-1}{ab} & \frac{2}{ab} & \frac{1}{ab} \\
\frac{2}{b^3} & \frac{-2}{b^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\
\frac{-2}{a^3b} & \frac{2}{a^3b} & \frac{2}{a^3b} & \frac{-2}{a^3b} & \frac{1}{a^2b} & \frac{-1}{a^2b} & \frac{1}{a^2b} & \frac{-1}{a^2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-2}{ab^3} & \frac{2}{ab^3} & \frac{2}{ab^3} & \frac{-2}{ab^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ab^2} & \frac{1}{ab^2} & \frac{-1}{ab^2} & \frac{-1}{ab^2}
\end{bmatrix}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\left[\begin{matrix} (a \ldots)\cos\beta\phi \ldots a\phi - \ldots \beta\phi \ldots a\phi \\ (\ldots)\ldots a\phi \ldots \beta\phi - \ldots a\phi \ldots \beta\phi \end{matrix}\right]$					
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ϕ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ϕ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ω	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\left[\begin{matrix} \ldots \beta\phi \ldots a\phi \ldots a\phi \\ \ldots a\phi \ldots \beta\phi \ldots a\phi \ldots \beta\phi \end{matrix}\right]$					
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ϕ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ϕ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
θ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ψ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

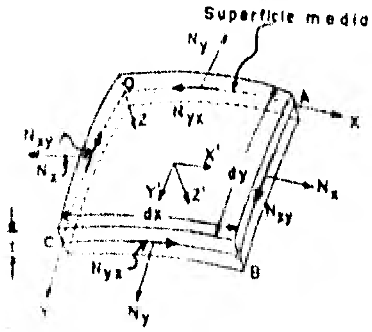


Fig 2.1 Esfuerzos de membrana

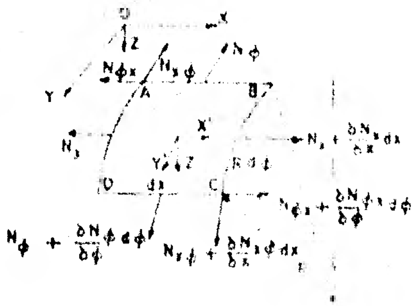


Fig 2.2 Esfuerzos de membrana en cascarones cilíndricos

Fig 2.3 Componentes de los esfuerzos en la dirección Z

Fig 2.4 Esfuerzos resultantes en cascarones cilíndricos cerrados

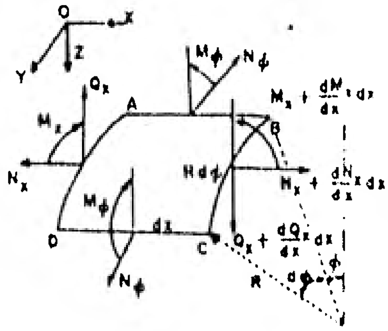


Fig 3.2 Esfuerzos en cascarones cilíndricos cerrados.

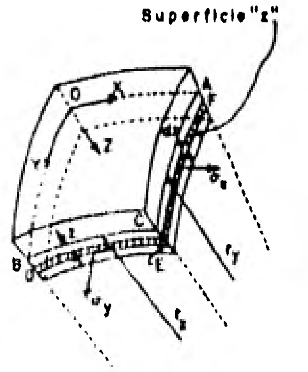


Fig 3.3 Esfuerzos en un elemento de cascarón

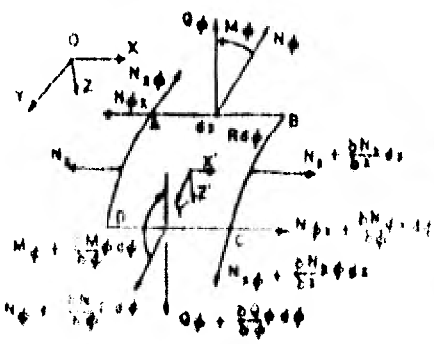


Fig 3.4 Esfuerzos resultantes en un cascarón cilíndrico abierto

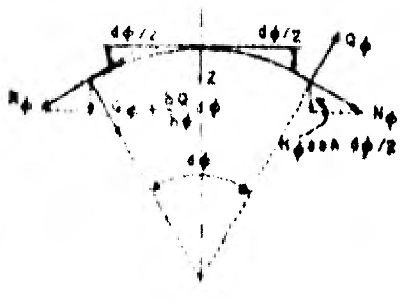


Fig 3.5 Componente de los esfuerzos en la dirección Z

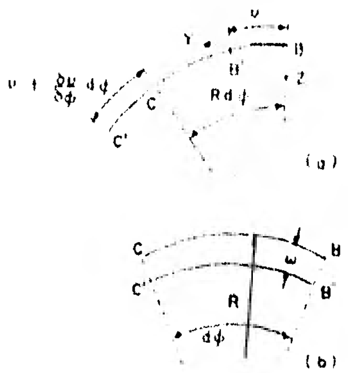


Fig 3.6 Desplazamiento de la superficie medio en dirección Y

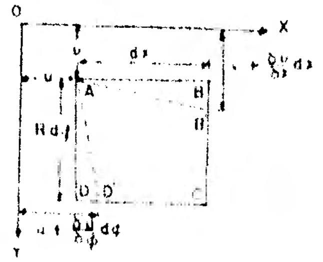


Fig 3.7 Desplazamiento por cortante

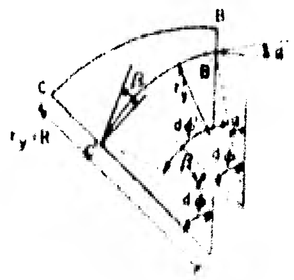


Fig 3.8 Cambio de curvatura de la superficie media

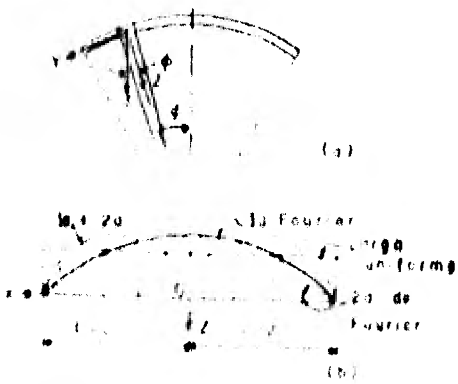


Fig 3.9 Carga uniforme

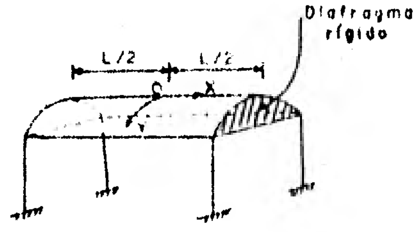


Fig 3.10 Cascarón cilíndrico abierto

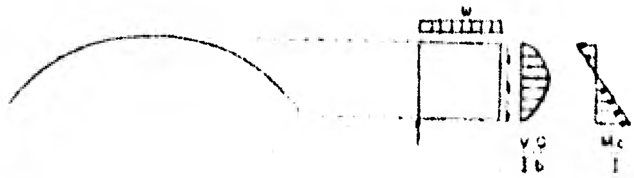


Fig 4.1 Distribución de esfuerzos de flexión y cortante

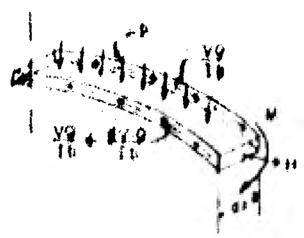


Fig 4.2 Fuerzas en el arco.

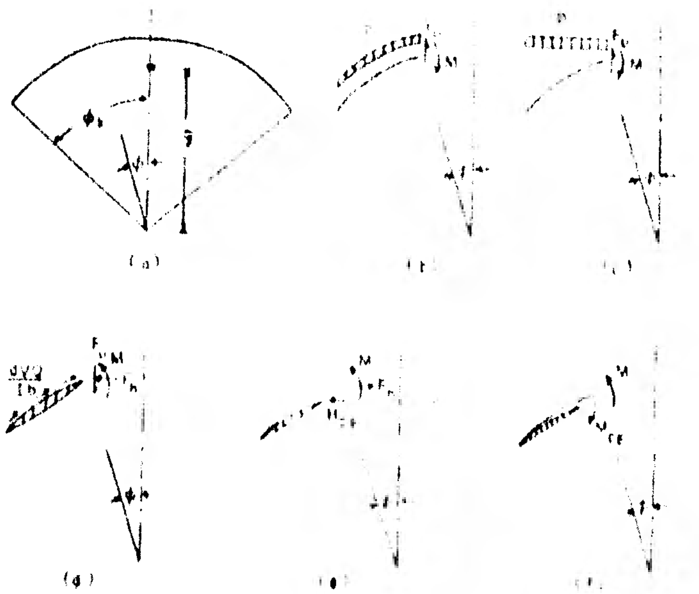


Fig 4.3 Propiedades de [illegible] transversal y [illegible] de [illegible]

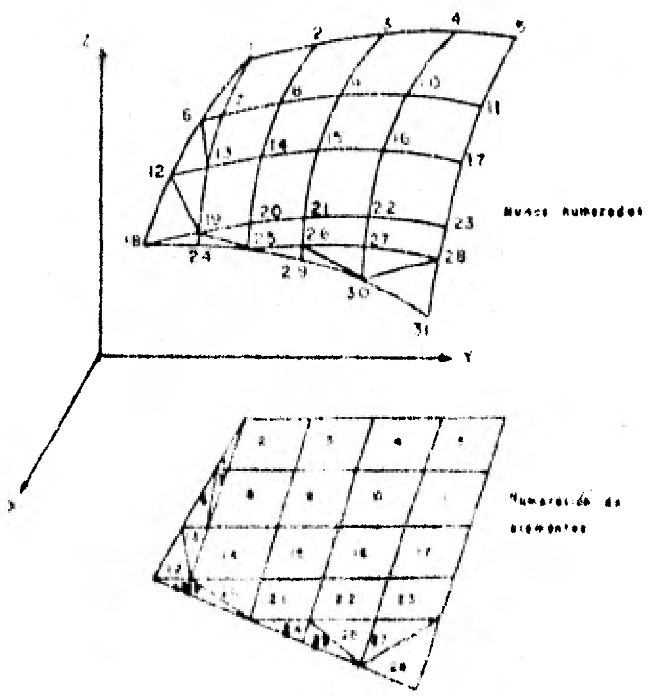


Fig 4.4 Representación del elemento finito

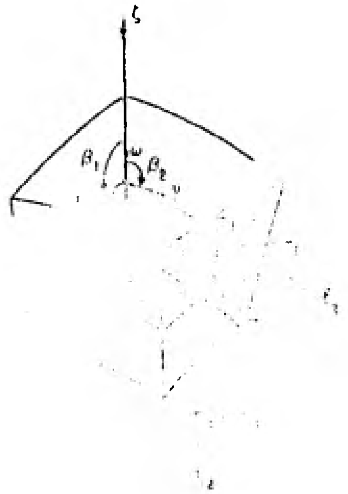


Fig 4.5 Notación para esfuerzos y desplazamientos

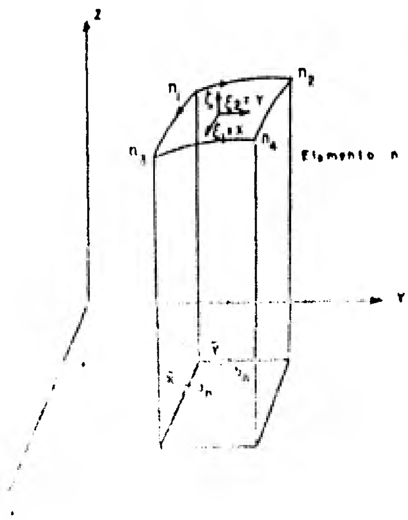


Fig 4.6 Notación de un elemento - Caso cartesiano -

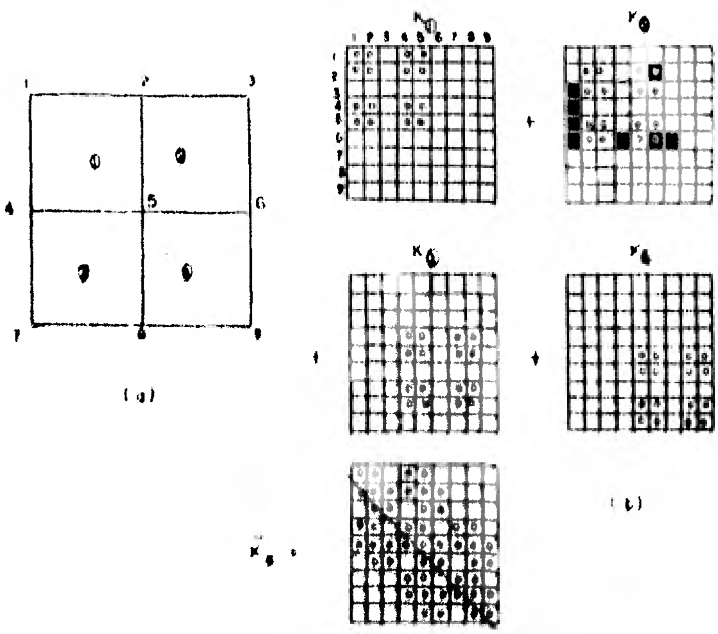


Fig 4.7 Ensamble de la matriz K global

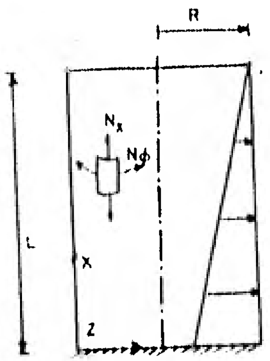


Fig 5.1 Tanque cilíndrico

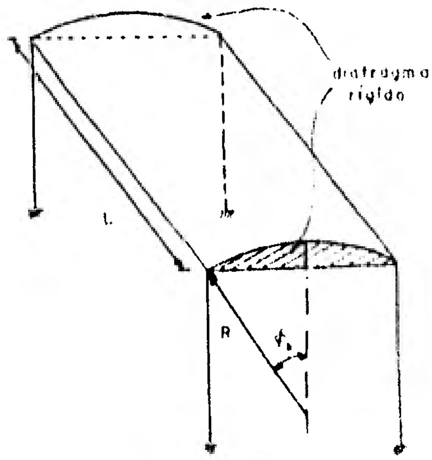
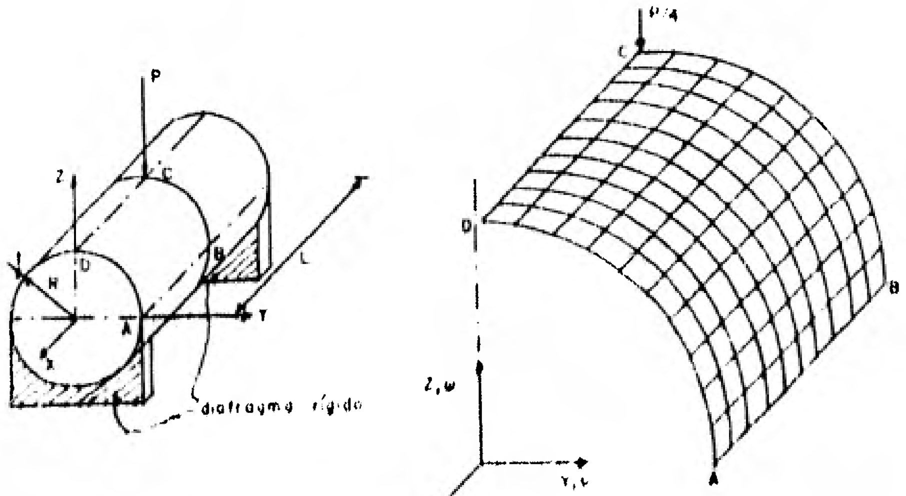


Fig 5.2 Cascarón abierto



malla	tiempo de solución*
[illegible]	1.00 seg
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

* [illegible]

Fig 5.3 Cascarón cerrado
(Método del elemento finito)

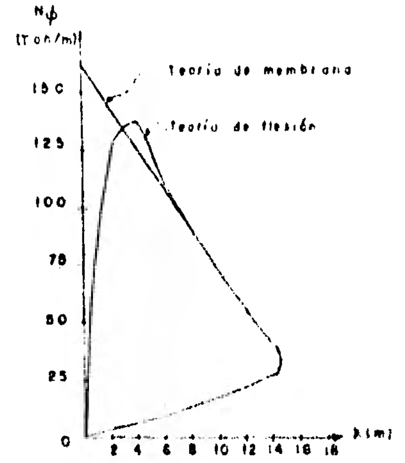


Fig 54 Esfuerzo N_ϕ en un tanque cilíndrico

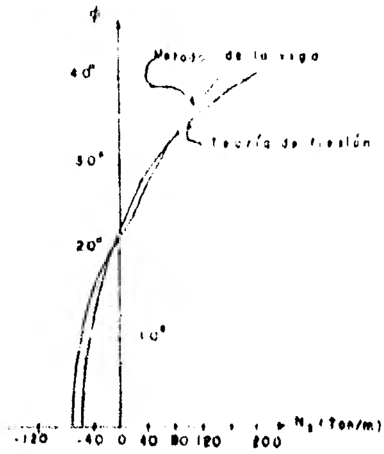


Fig 55 Esfuerzo N_x de un cascarón cilíndrico circular largo

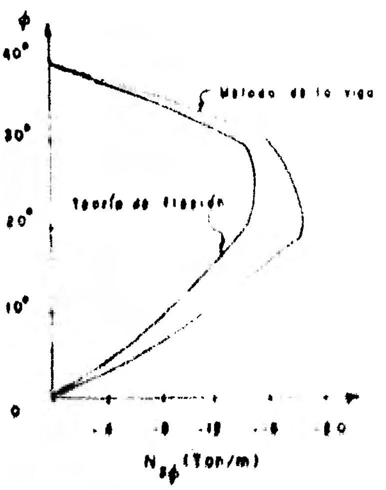


Fig 56 Esfuerzo $N_{x\phi}$ de un cascarón cilíndrico circular largo

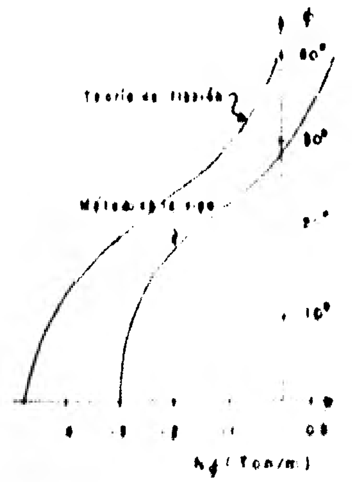


Fig 57 Esfuerzo N_ϕ de un cascarón cilíndrico circular abierto largo

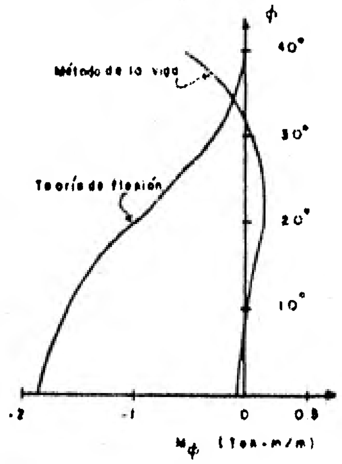


Fig 5.8 Esfuerzo M_ϕ de un cascarón largo

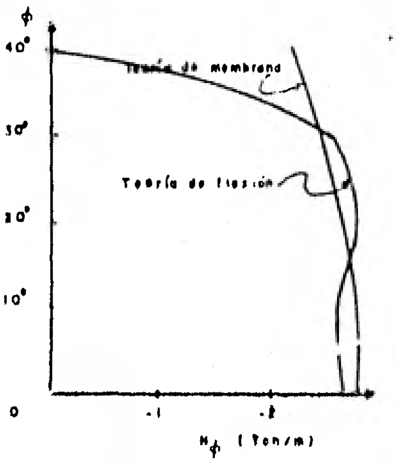


Fig 5.9 Esfuerzo N_ϕ de un cascarón corto.

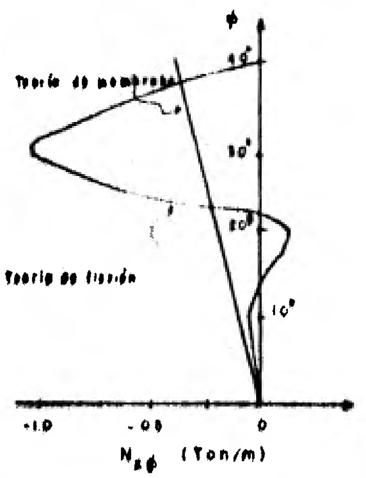


Fig 5.10 Esfuerzo $N_{x\phi}$ de un cascarón corto

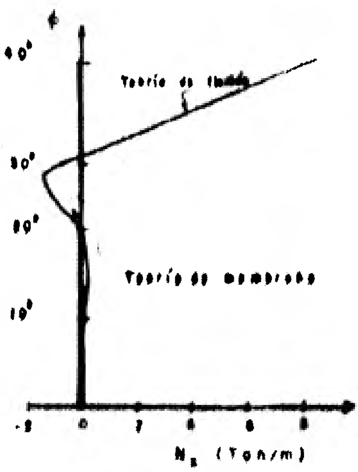


Fig 5.11 Esfuerzo N_x de un cascarón corto

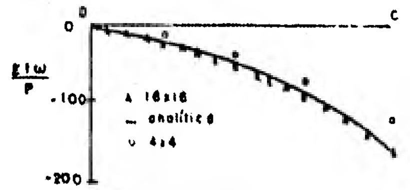


Fig 5.12 Desplazamiento ω de un cascarón cerrado

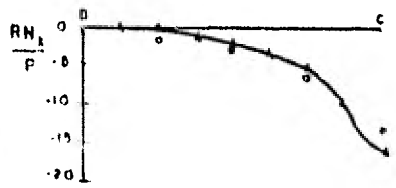


Fig 5.13 Esfuerzo N_x de un cascarón cerrado.

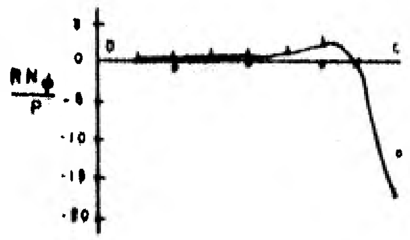


Fig 5.14 Esfuerzo N_ϕ de un cascarón cerrado

Fig 5.15 Esfuerzo M_ϕ de un cascarón cerrado

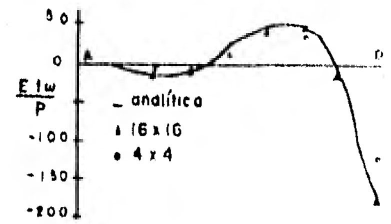


Fig 5.16 Desplazamiento w de un cascarón cerrado

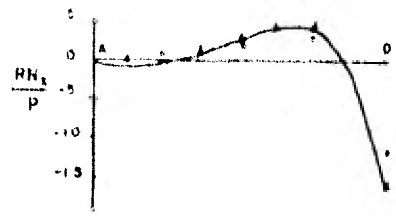


Fig 5.17 Esfuerzo N_x de un cascarón cerrado

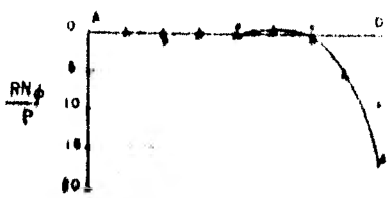


Fig 5.18 Esfuerzo N_ϕ de un cascarón cerrado

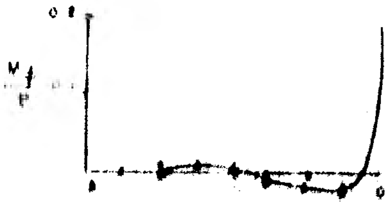


Fig 5.19 Esfuerzo M_ϕ de un cascarón cerrado