

D-120

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**

---



**LINEAS DE INFLUENCIA DE MOMENTOS**  
**HIPERESTATICOS DEBIDOS AL PREESFUERZO**

**TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**  
**INGENIERO CIVIL**

**P r e s e n t a n**

**LUIS ROCHA MARTHEN**  
**JULIO ROBERTO HASFURA BUENAGA**

**MEXICO, D. F.**

**1979**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

INTRODUCCION	I
1.- PRINCIPIOS DEL CONCRETO PREESFORZADO	1
1.1 Comportamiento y análisis del concreto preesforzado	4
1.2 Sistemas de preesfuerzo	7
1.3 Dispositivos de anclaje	12
1.4 Pérdidas de preesfuerzo	18
2.- MOMENTOS HIPERESTATICOS DE PREESFUERZO	34
3.- PRINCIPIO DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA	49
3.1 Principio de Muller-Breslau	51
3.2 Línea de influencia de una viga con extremos fijos	60
4.- LINEAS DE INFLUENCIA DE MOMENTOS HIPERESTATICOS DEBIDOS AL PREESFUERZO	68
4.1 Ejemplos de aplicación	71
CONCLUSIONES	83
RECONOCIMIENTO	85
BIBLIOGRAFIA	86

## I N T R O D U C C I O N

El empleo de elementos de concreto preesforzado en las obras civiles, ha cobrado gran auge en los últimos años debido a la economía que representa con respecto a otros materiales, como por ejemplo el concreto reforzado, para determinado tipo de obras tales como edificios, puentes y en general estructuras de grandes claros.

En las estructuras continuas la acción del preesfuerzo genera efectos hiperestáticos que influyen en la resistencia del elemento. En esta tesis se presenta un método basado en las propiedades de la línea de influencia que permite valorar dicho efecto. También, se presentan los métodos tradicionales de análisis con el objeto de comparar dichos resultados con los obtenidos por el método de la línea de influencia.

Se presentan en los dos primeros capítulos los principios generales del concreto preesforzado como lo son; tipos y pérdidas de preesfuerzo, métodos de anclaje y el efecto del preesfuerzo en las estructuras continuas. En los capítulos siguientes se ven los fundamentos de las líneas de influencia con algunos ejemplos representativos, desarrollando también un método para la obtención de los momentos hiperestáticos debidos al preesfuerzo basado en los conceptos de la línea de influencia.

## 1.- PRINCIPIOS DEL CONCRETO PREESFORZADO.

Para poder explicar el principio en que se basa el preesfuerzo, vamos a considerar una viga hecha a base de bloques de concreto de 0.24 m de altura, por 0.14 m de ancho y 1.05 m de longitud como el que se muestra en la figura 1.

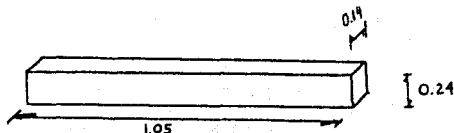


Fig.1.- Bloque de concreto.

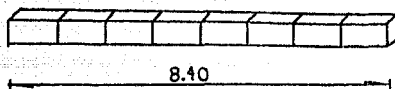


Fig.2.- Viga hecha a base de bloques.

El ensamble de estas piezas forma una viga de 8.40 m. de claro, ( Fig. 2 ), sin ninguna resistencia a la flexión. En particular, será imposible apoyar la viga en sus extremos ya que aparecería una flecha bastante grande por flexión debida a su peso propio, que provocaría la separación de las juntas.

Ahora supongamos que sometemos a la viga a una carga uniformemente repartida, como sabemos que la viga no es capaz de resistir esfuerzos debidos a flexión, tenemos que otorgar la resistencia necesaria sometiéndola a fuerzas previas, es decir, a un preesfuerzo, el cual vamos a determinar mas adelante.

Cabe señalar, que vamos a tener dos estados :

a) El estado Primario, en donde la viga no está sujeta a ninguna carga externa.

b) El estado de Carga, que como su nombre lo indica es la etapa donde aplicamos la carga, en este caso, una carga uniformemente repartida.

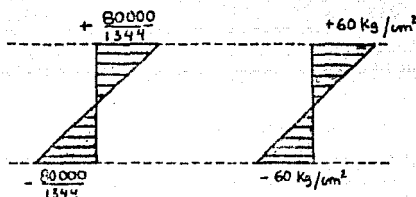
Supongamos que esta carga es de 100 Kg/m. El momento al centro del claro será :

$$M = \frac{w l^2}{8} = \frac{100 \cdot (8)^2}{8} = 800 \text{ Kg-m} = 80,000 \text{ Kg-cm}$$

El módulo de sección será :

$$S = \frac{14 \times 24^2}{6} = 1344 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, los esfuerzos resultantes serán :



pero este diagrama es imposible, ya que hemos supuesto que la viga no tiene ninguna resistencia a la flexión y que por lo tanto, van a existir esfuerzos de tracción que permitan que se abran las juntas.

Estamos pues, en presencia de una viga que en uno de sus estados, el de Carga, no resista; mientras que en el otro, Primario, esa resistencia es grande ya que no está sometida a ningún esfuerzo, aunque en esta etapa pueda resistir esfuerzos de compresión, supongamos que hasta de 120 Kg/cm<sup>2</sup>.

Como vemos, podemos utilizar el exceso de resistencia en la etapa primaria para compensar la insuficiencia de resistencia en la etapa de carga, pero es pre-

cisamente la función de preesforzar el elemento, por ejemplo, supongamos que por un procedimiento cualquiera, sometamos a la viga a un esfuerzo de compresión de  $60 \text{ Kg/cm}^2$ , que corresponde a aplicar una fuerza en el centro de gravedad de la sección transversal de ;  $60 \times 14 \times 24 = 20,000 \text{ Kg}$ . (Fig.- 3).

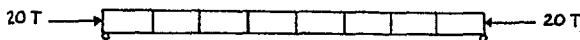
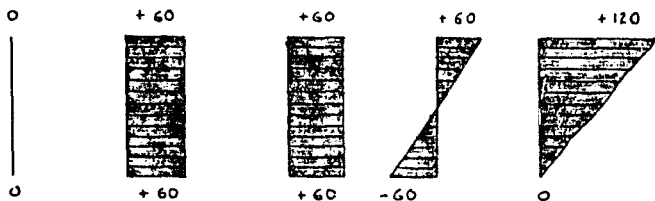


Fig.3. Fuerza Normal aplicada a la viga.

En estas condiciones los esfuerzos resultantes están representados por los diagramas lineales siguientes :



Etapa + Preesfuerzo = Total de + Carga = Total en la  
 primaria la etapa repartida etapa de Car  
 (1) (2) (3) (4) (5)  
 ga.

Los esfuerzos totales en las dos etapas de carga, están representados por los diagramas (3) y (5), de la fig. anterior, estando comprendidos los valores dentro de los límites que hemos supuesto para el concreto. (  $0 - 120 \text{ Kg/m}^2$  )

## 1.1 COMPORTAMIENTO Y ANALISIS DEL CONCRETO PREESFORZADO

El análisis del preesfuerzo en una trabe, se puede realizar en dos formas:

- A) Método Directo
- B) Método Interno

a continuación explicaremos cada uno de ellos:

### A) Método Directo:

Este método considera al preesfuerzo como una soli citación exterior aplicada a la trabe como lo serían las car gas externas ( peso propio, cargas vivas).

Dichas sollicitaciones serían esfuerzos en los ancla jes (debidos a fuerzas y momentos) y esfuerzos a lo largo del cable (si es curvo). (ver Fig.1.a)

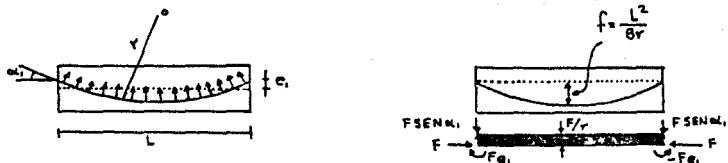


Fig.1.a.-Efecto del preesfuerzo en una trabe.

De acuerdo con la figura 1.a el momento flexionante

debido al preesfuerzo, en una sección  $x$  sería:

$$M_x = Fe_1 - xF \text{sen} \alpha + \frac{F}{r} \frac{x^2}{2} = F \left( e_1 - x \text{sen} \alpha + \frac{x^2}{2r} \right) \quad \text{----(1)}$$

$$V_x = -F \text{sen} \alpha + \frac{F}{r} x = -F \left( \text{sen} \alpha + \frac{x}{r} \right) \quad \text{----(2)}$$

dado que los valores del ángulo  $\alpha$  son relativamente pequeños, se considerará que  $F \approx F \cos \alpha$ .

Si el preesfuerzo hubiera sido rectilíneo, solo los efectos del anclaje habrían intervenido ya que  $\frac{F}{r} = 0$ .



Ahora vamos a obtener los esfuerzos que se generan en una viga isostática cuando el cable es recto, mediante los dos ejemplos siguientes :

1) Cable concéntrico

Considérese una viga simplemente apoyada (fig.4) - con la característica de que el cable coincide con el centro de gravedad de la sección transversal:

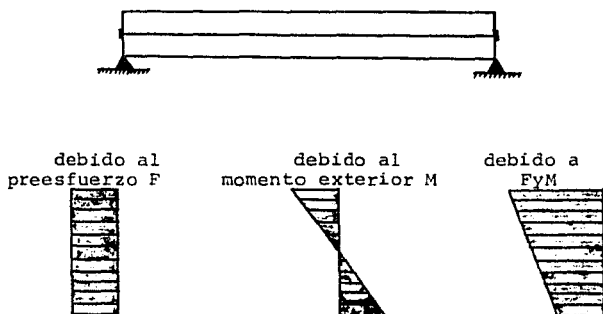


Fig.4.- Viga simplemente apoyada

b) Diagramas de esfuerzo.

Como se ve en los diagramas de esfuerzos (Fig.4b), - debido al preesfuerzo  $F$ , se producirá un esfuerzo uniforme - de  $\frac{F}{A}$  a través de la sección con un área  $A$ . Si  $M$  es el momento que producen las fuerzas externas, el esfuerzo que produce en cualquier punto de la sección está dado por:

$$f = \frac{My}{I}$$

donde " $y$ " es la distancia del eje centroidal a la fibra deseada, e " $I$ " es el momento de inercia de la sección transversal.

Así , la distribución de los esfuerzos resultantes está dada por :

$$f = \frac{F}{A} \pm \frac{MY}{I}$$

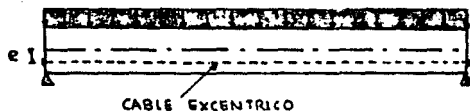
2) Cable excéntrico;

Debido al preesfuerzo excéntrico, el concreto está sujeto a un momento y a una carga axial directa, por consiguiente, el momento será igual a  $F \cdot e$  , y los esfuerzos debidos a este momento serán:

$$f_1 = \frac{Fey}{I}$$

donde "e" es la distancia del centro de gravedad de la sección a la posición del cable. En consecuencia, la distribución resultante de los esfuerzos está dada por:

$$f = \frac{F}{A} \pm \frac{Fey}{I} \pm \frac{My}{I}$$

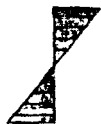


DEBIDA A LA CARGA DIRECTA



$$\frac{F}{A}$$

DEBIDO A LA EXCENRICIDAD e



$$\frac{F \cdot e}{I} y$$

DEBIDO AL MOMENTO EXTERIOR M



$$\frac{M}{I} y$$

DEBIDO AL PREESFUERZO EXCÉNTRICO Y A M.

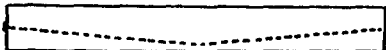


$$\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{I} y \pm \frac{M}{I} y$$

Fig.5.- Viga con cable excéntrico.

b) Diagramas de esfuerzos

Cuando los cables son curvos, es mejor considerar al concreto como un cuerpo libre separado de los cables. Por ejemplo, considérese una viga cuyo cable está doblado en la mitad del claro :



Consideremos además que tenemos un dobléz - agudo repentino, que no hay pérdidas de fricción a lo largo del cable, y que la desviación producida por el dobléz resulta pequeña, comparada con la longitud del elemento. Considerando al elemento como cuerpo libre, se tiene una fuerza vertical hacia arriba en el centro del claro y las fuerzas de preesfuerzo aplicadas en los extremos de la viga, como se muestra en la siguiente figura :



de esta forma se ve que debido al dobléz en el centro del claro del cable, se genera una fuerza ascendente que ayuda a equilibrar la carga externa actuante.

#### b) Método Interno :

En este método, la trabe está sujeta a la acción del cable, es decir, que en cada sección a lo largo de la viga, por ejemplo en la sección A de la figura 2.a, se genera

un esfuerzo de compresión  $F$  y que va a estar aplicado en el punto donde el cable o alambre pasa por dicha sección  $A$ .

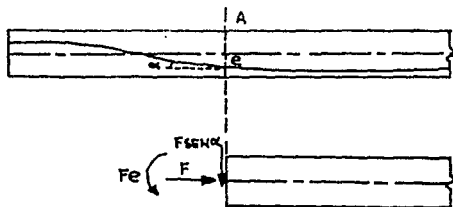


Fig. 2a

De acuerdo con la figura 2.a, la acción del cable sobre el concreto equivale en cada sección a la suma de las acciones -- internas siguientes :

- Una fuerza normal aplicada en el centro de gravedad - igual a ;  $F \cos \alpha$
- Un momento flexionante igual a ;  $F.e$  -----(3)
- Una fuerza cortante igual a ;  $-F \sin \alpha$  -----(4)

Suponiendo que  $\sin \alpha = \tan \alpha$ , se demuestra que las ecuaciones (1) y (2) son iguales a las (3) y (4); (basta con probar que la parábola pasa por tres puntos dados)

## 1.2. SISTEMAS DE PREESFUERZO

Se ha visto que el preesfuerzo del concreto consiste en aplicar una fuerza a la estructura con el objeto de inducir compresión (y preferentemente también momentos flexionantes) para que se desarrollen esfuerzos favorables en la estructura. A continuación se mencionan varias formas de producir tal esfuerzo :

a) Por tensado longitudinal del acero:

a.1- Alargamiento del acero debido a una fuerza axial directa aplicada en uno o ambos extremos del cable.

a.2- Alargamiento del cable producido por una fuerza --

directa axial, aplicada entre extremos anclados.

a.3-Alargamiento por desplazamiento transversal del acero anclado en sus extremos.

a.4-Alargamiento debido al anclaje de los extremos de una barra de acero mientras esta caliente.

b) Por la aplicación de una fuerza de compresión directa entre una estructura y sus soportes.

c) Permitiendo deformación de una estructura estáticamente indeterminada, ya sea por la rotación o el desplazamiento relativo de un punto con respecto a los restantes.

d) Ahogando una sección de acero deformada en concreto y manteniéndola en ese estado de deformación, hasta que el concreto haya endurecido.

e) Por el uso de cementos expansivos.

Ampliaremos un poco más algunos de los incisos anteriores :

a.1- El alargamiento del acero por medio de fuerzas axiales directas, las cuales se aplican a la estructura por medio de gatos colocados en las juntas, es el modo más usual de preesforzar. Como dato histórico, entre las dos guerras mundiales, éste método fué ampliamente usado para preesforzar arcos.

c) Como un ejemplo de éste inciso-Desplazamiento de un punto de una estructura estáticamente indeterminada-podemos considerar la viga continua que se muestra en la figura 7a; el diagrama de momentos flexionante de ésta estructura, bajo carga uniformemente distribuida, es de la forma mostrada en la figura 7b, si ahora, se permite un desplazamiento del apoyo central, se producirá el momento flexionante adicional, figura 7c, el cual ajustará el diagrama de momentos flexionantes a el mostrado en la figura 7d, donde se observa que el momento negativo en el apoyo se ha reducido y que el máximo momento positivo se ha incrementado.

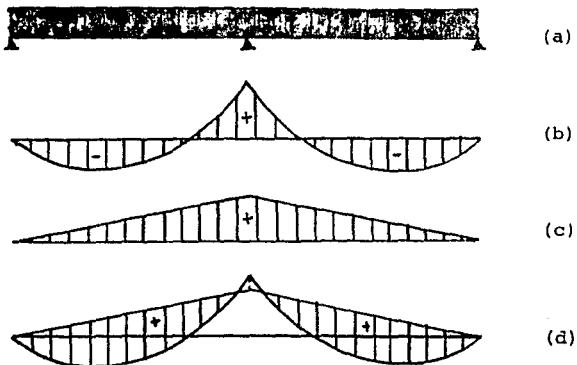


Fig. 7.- Viga estáticamente indeterminada.

e) El uso de cementos expansivos, es un intento de invertir el proceso de contracción, de tal manera, que el preesfuerzo se genera en el concreto por la restricción que los contrafuertes o soportes imponen a la expansión del concreto. Se han llevado a cabo experimentos en la producción de tales cementos, pero hasta el momento la tecnología no es lo suficientemente avanzada para resultar de gran valor práctico.

Se hizo notar, en los párrafos anteriores, que el modo más usual de preesforzar el concreto es por medio del tensado longitudinal del acero. Los métodos de tensado caen dentro de los dos siguientes tipos :

a) Pretensado ; esto significa tensar los cables de acero, antes de que el concreto se coloque en el molde.

Básicamente, un ciclo completo en una cama de colado comprende cinco pasos :

1.- Los cables se colocan en la cama en la forma previamente especificada, son tensados a la carga máxima y anclados a cada extremo de la cama, de tal forma que la carga se mantenga.

2.- Se montan los moldes, barras de refuerzo, mallas de alambre, etc. alrededor de los cables.

3.- Se coloca el concreto y se permite su curado. En muchos casos se acelera el curado con el uso de vapor y otros métodos.

4.- Cuando el concreto alcanza la resistencia especificada,  $f'_{ci}$ , ( $f'_{ci}$  = esfuerzo de compresión en el concreto al momento del preesfuerzo inicial ), se libera la carga de los cables. Como ahora los cables están adheridos al concreto, no se pueden mover independientemente de él, y al tratar de volver a su posición original, su carga se transfiere al concreto por adherencia. Esta carga es la fuerza de preesfuerzo en el miembro de concreto.

5.- Se cortan los cables en los extremos de cada miembro de concreto preesforzado, llevándolos a una área de almacenaje, para poder utilizar de nuevo la cama de colado.

b) Postensado: este sistema de preesfuerzo consiste en colar primero el elemento y una vez que haya endurecido se tensa el cable al esfuerzo requerido. La operación completa comprende seis pasos basicamente :

1.- Se monta el cable en una manguera metálica flexible ( con el objeto de evitar su adherencia con el concreto ), y se colocan los anclajes en los extremos del cable.

2.- Se coloca el cable en el molde y es sujetado en la misma forma que una barra de refuerzo, para darle la forma requerida. Se colocan también las barras de refuerzo, mallas, etc.

3.- Se cuela el concreto y se permite su curado hasta la resistencia requerida para poder tensar el cable

4.- Se tensan los cables con gatos hidráulicos y se ajustan los anclajes para sostener la carga en ellos.

5.- Se rellena el espacio alrededor de los cables con una lechada de cemento inyectado a presión.

6.- Los anclajes son cubiertos con un recubrimiento protectorio.

En este caso tanto los gatos como los anclajes se apoyan en el propio miembro por preesforzar, y son estas reacciones ( de las anclas ) las que constituyen las fuerzas de preesfuerzo.

Es importante hacer notar que cualquier forma de anclaje funciona bajo el principio de fricción. La fuerza de anclaje es balanceada en los extremos del cable por ciertas reacciones que actúan a lo largo de la línea central de los alambres, solo así, es posible crear esta fricción por las presiones laterales en el alambre con el medio que lo rodea.

El anclaje puede ser de diferentes formas, dependiendo de la forma en que se crean éstas presiones laterales, es decir, - las fuerzas de fricción. La forma del anclaje y el tamaño de los cables son los que fijan el diseño de los gatos.

La decisión de usar un miembro postensado en lugar de uno pretensado, está influenciada por tantas condiciones distintas que no hay reglas que puedan ser aplicadas para determinar la línea divisoria más económica entre los dos métodos.

Cuando el miembro es muy grande para ser transportado de una planta de colado al sitio de trabajo, es obvio que debe ser fabricado en el lugar de trabajo, por lo tanto el miembro será postensado. Cuando el tamaño del miembro está dentro de las limitaciones de transporte, se deberán incluir los siguientes factores para comparar el costo de los dos métodos:

1.- Capacidad de las camas de colado.- en miembros de claro largo, es importante el uso de canales con trayectorias para equilibrar el peso muerto. Si en la planta, no se cuentan con facilidades para colocar suficientes cables, entonces un diseño de postensado o una combinación de Pretensado-Postensado es indicada.

2.- Sección transversal del miembro.- la sección transversal de un miembro postensado es más eficiente que la de un miembro pretensado para la misma carga, ya que el alma del miembro pretensado es más ancha con el fin de poder acomodar los cables curvos.



### 1.3.-DISPOSITIVOS DE ANCLAJE :

Estos dispositivos varían dependiendo del tipo de preesfuerzo que se utilice. Para el concreto pretensado, se utiliza generalmente el principio de cuña, el de fricción o una combinación de ambos. Aquí los cables se sujetan en los muertos de anclaje por medio de mordazas existiendo además anclajes para uno, dos y para un haz de cables, Fig. 8.

Para el sistema postensado, han sido utilizados diferentes sistemas de anclaje. Entre los más comunes en México se encuentran:

#### Sistema Freyssinet :

Para cables formados por alambres, éste sistema emplea cilindros y cuñas de concreto. El interior de los cilindros es cónico, de tal manera, que los alambres quedan sujetos por medio de una cuña cónica estriada, que se introduce en el cilindro mediante presión. Este método es de origen francés.

#### Sistema BBW

Es de origen suizo, y fué el primero en el que se utilizó un anclaje a base de botones en los extremos de los alambres, en forma de cabezas de remache, apoyados directamente sobre un elemento de anclaje de acero, que a su vez descansa sobre una placa de distribución, también de acero, ahogado en el concreto. En vigas tensadas por un solo lado, pueden usarse anclajes a base de placas.

#### Sistema Prescon :

Desarrollado en E.U.A., es muy semejante al an -

terior; difiere de este únicamente en el ajuste del preesfuerzo, que se logra por medio de placas de acero en lugar de la rosca empleada en el sistema Suizo.

#### Sistema VSL

Desarrollado en Suiza, éste sistema se basa en el principio de cuña y fricción. Los tendones quedan anclados en un elemento de anclaje con perforaciones cónicas para cada alambre.

#### Sistema CCL

Es de origen inglés, al igual que Freyssinet, utiliza el principio de cuña y fricción, pero anclando individualmente cada cable por medio de un sistema de cuñas y cilindros.

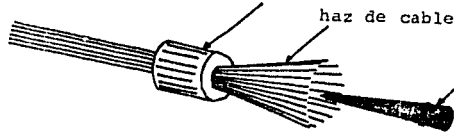
#### Sistema Ramza

Es de patente mexicana; se basa en la extrusión en frío de un casquillo metálico en torno del cable por anclar. La sujeción se logra con la incrustación, entre el casquillo y el acero de preesfuerzo, de un material de mayor dureza que ambos, el cual se coloca de manera que al realizarse la extrusión se obtiene una liga mecánica.

Estos sistemas se muestran en la figura 8a.

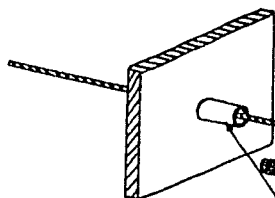
cono de anclaje  
haz de cables

cuña anclada por medio  
de disparo.



cuñas móviles dentadas  
en dos piezas.

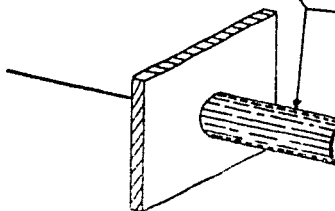
cable



conos fijos

cuñas móviles dentadas en dos  
piezas

cable.



cono de anclaje fijo.

alambres

cuña móvil lisa

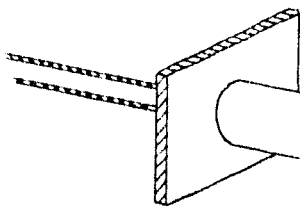
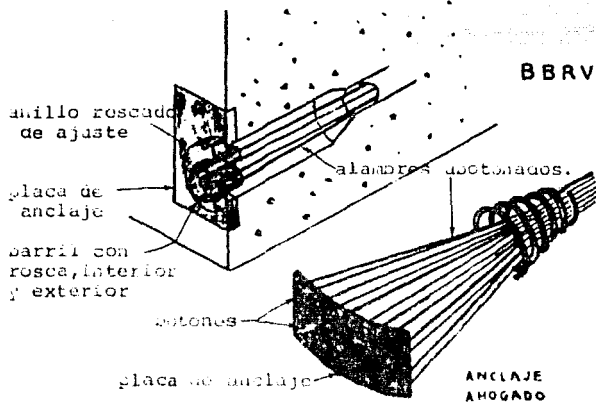
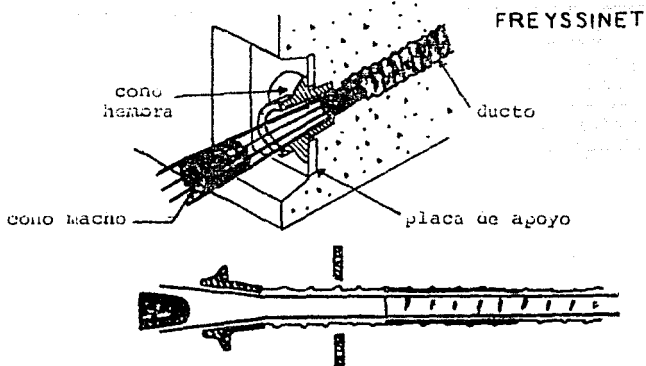
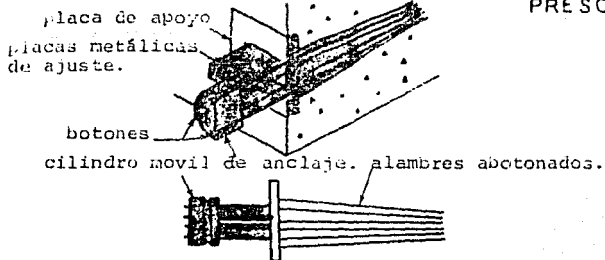


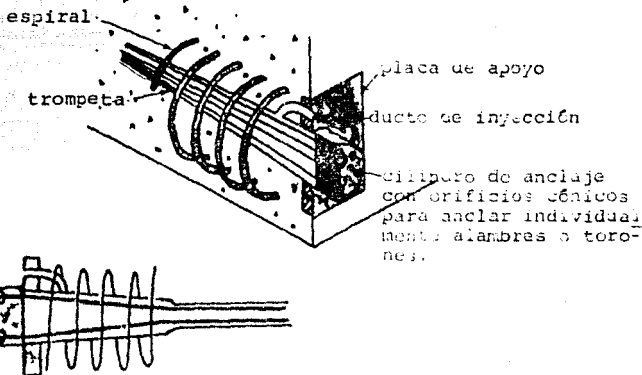
Fig.8.- Dispositivos de anclaje.



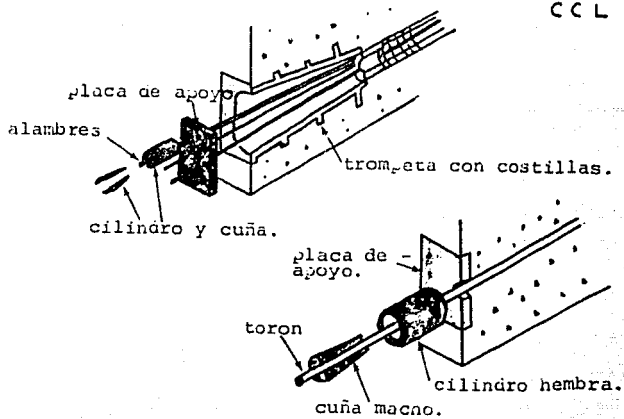
## PRESCON



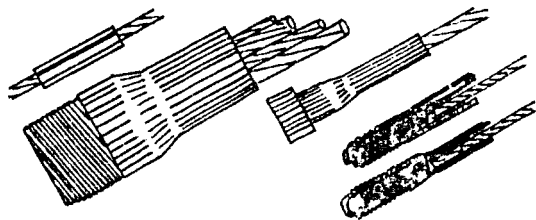
## VSL



CCL



RAMZA.



#### 1.4.- PERDIDAS DE PREESFUERZO.

Debido a las propiedades de los materiales que se emplean para la construcción de elementos de concreto preesforzado, existen pérdidas de preesfuerzo. Estas pérdidas las podemos dividir en dos grupos .

##### a) Pérdidas instantáneas de Preesfuerzo.

a1.- Contracción elástica del Concreto.

a2.- Pérdida por Anclaje.

a3.- Fricción.

##### b) Pérdidas diferidas :

b1.- Flujo Plástico en el Concreto.

b2.- Contracción del concreto.

b3.- Relajamiento del acero de Preesfuerzo

en los siguientes párrafos se explicará cada una de ellas

##### a) Pérdidas instantáneas :

##### a.1) Contracción elástica del Concreto:

Consideremos primero al concreto pretensado;

Cuando el preesfuerzo se transfiere al concreto, el miembro se acorta y el acero preesforzado se acorta junto con él. Por lo tanto, existe una pérdida de preesfuerzo en el cable. Si consideramos unicamente la contracción del concreto producida por el preesfuerzo, tenemos que el acortamiento unitario  $S$ , será igual a :

$$S = \frac{f_c}{E_c} = \frac{F_0}{A_0 E_c}$$

en donde  $F_0$  es el esfuerzo total inmediatamente después de la transferencia, esto es, después de que ha ocurrido el acortamiento. La pérdida de preesfuerzo en el acero es, - por lo tanto :

$$\Delta f_s = E_s S = \frac{E_s F_0}{A_c E_c} = \frac{n F_0}{A_c}$$

el valor de  $F_0$  puede no conocerse exactamente, pero no es necesaria la exactitud en la estimación de dicho valor, por que la pérdida debida a este acortamiento es un pequeño porcentaje del preesfuerzo total, por consiguiente, un error de un pequeño porcentaje en la estimación no tendrá significación práctica. Sin embargo, puesto que el valor del preesfuerzo inicial  $F_i$  es usualmente conocido, puede obtenerse una solución teórica, por medio de la teoría elástica, usando el método de la sección transformada, con  $A_t = A_c + nA_s$ , tenemos:

$$S = \frac{F_i}{A_c E_c + A_s E_s}$$

$$\Delta f_s = E_s S = \frac{E_s F_i}{A_c E_c + A_s E_s} = \frac{n F_i}{A_c + n A_s}$$

$$\Delta f_s = \frac{n F_i}{A_t}$$

Esta última es la expresión que nos sirve para calcular las pérdidas de preesfuerzo en el sistema Pretenso.

Para el Postensado el problema es diferente. Si tenemos solamente un cable simple en un miembro Postensado, el concreto se acorta, mientras se aplica el gato al cable, contra él mismo. Puesto que la fuerza en el cable se mide una vez que ha sucedido el acortamiento elástico del concreto, no es necesario tener en cuenta la pérdida en el preesfuerzo debida a ese acortamiento.



Anora, si tenemos varios cables, éstos son esforzados en sucesión, entonces el preesfuerzo se aplica gradualmente al concreto, aumenta el acortamiento del concreto a medida que se tensa cada cable, y la pérdida de preesfuerzo, debida al acortamiento elástico, varía en los cables.

El cable que es tensado primero, sufrirá la máxima pérdida debido al acortamiento elástico del concreto por la aplicación subsecuente de preesfuerzo de todos los otros cables. Por otra parte el cable que es tensado al último no sufrirá pérdida alguna, ya que todo ese acortamiento habrá tenido lugar cuando se mida el preesfuerzo en el último cable. El cálculo de tales pérdidas puede hacerse muy complicado, pero para todos los fines prácticos es suficientemente exacto determinar la pérdida para el primer cable y emplear la mitad de ese valor para la pérdida promedio de todos los cables.

#### a.2) Pérdidas por Anclaje :

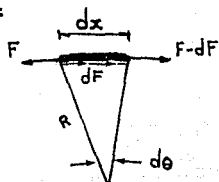
Para la mayoría de los sistemas de Postensado, cuando un cable se tensa a su resistencia total, se retira el gato y el preesfuerzo se transfiere al anclaje. Los accesorios de anclaje que están sujetos a esfuerzos en esa transferencia tenderán a deformarse, permitiendo así que el cable se afloje ligeramente. Las cuñas de fricción empleadas para sostener los alambres, se deslizarán una distancia pequeña antes de que los alambres sean amordazados firmemente. La magnitud de este deslizamiento depende del tipo de cuña y del esfuerzo en los alambres. Una fórmula general para calcular la pérdida de preesfuerzo debida a la deformación  $\Delta_a$  de anclaje es :

$$\Delta f_s = \frac{\Delta a E_s}{L}$$

a.3) Fricción :

La teoría básica de la pérdida por fricción de un cable alrededor de una curva, es bien conocida en Física. En su forma simple se puede deducir como sigue:

Consideremos una longitud infinitesimal  $dx$  de un cable presforzado cuyo centroide sigue el arco de un círculo de radio  $R$  :



$df$  = pérdida por fricción

por lo tanto, el cambio en el ángulo del cable a medida que va alrededor de esa longitud  $dx$  es :

$$d\theta = \frac{dx}{R}$$

para esa longitud infinitesimal  $dx$ , el esfuerzo en el cable puede considerarse constante e igual a  $F$  ; Entonces la componente normal de presión producida por el esfuerzo  $F$  al doblarse un ángulo  $d\theta$  está dada por :

$$N = Fd\theta = \frac{Fdx}{R}$$



PRESION NORMAL  $N$   
DEBIDA AL PREESFUERZO  $F$

la magnitud de la pérdida por fricción  $dF$  alrededor de la longitud  $dx$ , está dada por la presión multiplicada por un coeficiente de fricción  $\mu$ , así :

$$\begin{aligned}dF &= -\mu N \\dF &= -\mu \frac{F dx}{R} \\dF &= -\mu F d\theta \\ \frac{dF}{F} &= -\mu d\theta\end{aligned}$$

integrando esta última expresión se tiene :

$$\begin{aligned}\int \frac{dF}{F} &= - \int \mu d\theta \\ \ln F &= -\mu \theta\end{aligned}$$

sustituyendo los límites  $F_1$  y  $F_2$ , se tiene la fórmula de la fricción :

$$F_2 = F_1 e^{-\mu \theta} = F_1 e^{-\frac{\mu l}{R}}$$

Para los casos en los que los cables tengan una sucesión de curvas de radios variables, es necesario aplicar esta fórmula a las diferentes secciones, con el objeto de obtener la pérdida total.

La ecuación anterior también se puede aplicar al cálculo de la pérdida por fricción debida al efecto de longitud, sustituyendo la pérdida  $kl$  por  $\mu\theta$  se tiene :

$$F_2 = F_1 e^{-KL}$$

Para calcular la pérdida total debida al efecto de curvatura y al de longitud, pueden combinarse las dos fórmulas anteriores, quedando :

$$F_2 = F_1 e^{-\mu\theta - KL}$$

donde :

$F_1$  es la tensión en el anclaje.

$\mu$  coeficiente de fricción.

$\theta$  suma de desviaciones angulares en radianes entre el anclaje y el punto considerado.

$k$  coeficiente rectilíneo.

$L$  distancia al punto considerado.

b) Pérdidas Diferidas.

b1, b2 ) Pérdida por deformación plástica y contracción del Concreto :

Primero consideremos la deformación plástica :

Puesto que la magnitud de esta deformación varía

de uno a cinco veces la del acortamiento elástico, obviamente es un problema importante. Además, aunque la pérdida debida a la contracción elástica del concreto se pueda equilibrar para los miembros postensados, no se puede compensar fácilmente la pérdida debida a la deformación plástica. No es posible sobretensar los cables excesivamente con el objeto de no permitir tal pérdida, ya que esto significaría esfuerzos muy altos en el acero que podrían acercarse a su límite de fluencia.

La deformación plástica es una de las principales fuentes de pérdida, y más seria si el preesfuerzo en el acero es bajo y la compresión en el concreto es alta.

Suponiendo un preesfuerzo en el concreto de  $70.3 \text{ kg/cm}^2$ , para  $E_c = 350,550 \text{ kg/cm}^2$ ;  $E_s = 2,109,300 \text{ kg/cm}^2$  y una deformación plástica igual al doble de la deformación elástica, la pérdida de preesfuerzo en el acero debida a la deformación plástica en el concreto es :

$$\Delta f_s = 2 \frac{f_c \cdot E_s}{E_c} = 2n f_c = 2 \times 6 \times 70.3$$

$$\Delta f_s = 843.7 \text{ kg/cm}^2$$

que para un preesfuerzo inicial de  $10,546 \text{ kg/cm}^2$  en el acero, hay una pérdida de  $843.7/10546 = 8\%$ .

La contracción del concreto varía ampliamente. Para el concreto Preesforzado ordinario parece ser cierto un valor promedio, según T.Y.Lin, de deformación por contracción de  $0.0003$ . La pérdida correspondiente del preesfuerzo en ac-

cero con valor de  $E_s = 2,109,300 \text{ kg/cm}^2$  está dada por :

$$\Delta fs = S_s E_s = 0.0003 \times 2109300 = 632.7 \text{ kg/cm}^2$$

para un esfuerzo inicial del acero de  $10,546 \text{ kg/cm}^2$ , esto significaría una pérdida del 6%.

La magnitud de la contracción varía grandemente - con la proximidad del concreto al agua y el tiempo de aplicación del preesfuerzo.

### b3.- Relajamiento del acero de Preesfuerzo :

El relajamiento del acero de preesfuerzo o deformación plástica, es la pérdida de sus esfuerzos cuando es - preesforzado y mantenido en una deformación constante por un período de tiempo. Algunas veces se mide por el alargamiento, cuando se mantiene bajo un esfuerzo constante durante cierto tiempo. Este método es el que comúnmente se emplea. El relajamiento varía con la composición y tratamiento de cada acero; por consiguiente, pueden determinarse valores exactos solamente por pruebas de cada caso individual.

Las características aproximadas de esfuerzo —relajamiento, sin embargo, se conocen para la mayoría de aceros de preesfuerzo en el mercado. Lo mejor para el Ingeniero, es conocer las características de deformación plástica de su acero y tomar las precauciones ordinarias para disminuir al mínimo la deformación plástica en el acero.

Analizaremos ahora otro tipo de pérdidas de preesfuerzo como lo es la debida a la flexión del miembro :

Quando un miembro se flexiona, pueden aparecer cam

bios posteriores en el preesfuerzo; puede haber, ya sea una pérdida o una ganancia en el preesfuerzo, dependiendo de la dirección de la flexión y de la localización del cable. Si hay varios cables y están colocados en diferentes niveles, podrá variar en ellos el cambio del preesfuerzo, por lo que puede ser conveniente considerar solamente el centroide de todos los cables para conseguir un valor promedio de dicho cambio en el preesfuerzo.

Este cambio del preesfuerzo dependerá del tipo de preesforzado; ya sea postensado o pretensado.

Consideremos una viga simplemente apoyada en donde el cable está adherido al concreto, ya sea por pretensado o por lechadeo después del postensado, (Fig. 9.). Antes de aplicar cualquier carga, la viga tiene una contraflecha como se muestra. Al aplicar una carga externa a la viga, ésta se flexiona hacia abajo, dicha carga, produce un momento flexionante en la viga el cual cambia los esfuerzos unitarios y por consiguiente las deformaciones unitarias en el cable. El esfuerzo en el cable al centro del claro cambia bastante, pero no así el del extremo, puesto que no varía el momento en ese punto.

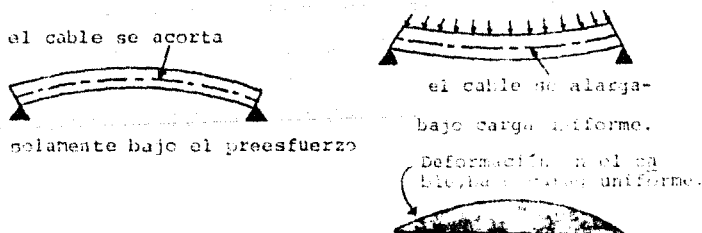


Fig. 9.- variación de deformación en cable con adherencia.

Si el preesfuerzo del acero, se considera como fuerza aplicada en los extremos, el cambio en esfuerzo a lo largo de la longitud no se considera como un cambio en el preesfuerzo.

Después de que el cable se ha adherido al concreto, estos forman una sola sección, y cualquier cambio en el esfuerzo debido a flexión de la sección se puede calcular fácilmente por el método de la sección transformada. Por consiguiente, es conveniente decir que el preesfuerzo no cambia como resultado de la flexión de una viga después de la adherencia del acero al concreto, aunque el esfuerzo en el cable sí cambie.

Para vigas postensadas, la flexión del miembro afectará al preesfuerzo en el cable. Refiriéndonos a la figura 10, - supongamos que los cables se tensan uno por uno y que la viga obtiene gradualmente una contraflecha hacia arriba a medida que se van tensando más cables :

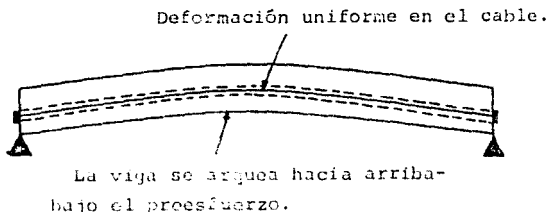


Fig.10.- Viga Preesforzada.

los cables que se tensaron primero, perderán algo de su preesfuerzo provocado por esta flexión, además de la pérdida del --- acortamiento elástico del concreto debido a la precompresión axial. En general estas pérdidas serán pequeñas y pueden despreciarse, pero cuando la contraflecha es apreciable, puede ser



deseable retensar los cables después de completar el primer ciclo de tensado, o admitir tales pérdidas en el diseño.

**EJEMPLO :**

Una viga de concreto , con una sección transversal de 20.3cm por 45.7 cm, es preesforzada con un cable sin adherencia en su tercio inferior, Fig 11., con un preesfuerzo inicial total de 65,232 kg. Calcular la pérdida de preesfuerzo en el cable - debido al arqueado de la viga bajo la acción del preesfuerzo, despreciando el peso propio de la viga.

$E_s = 2,109,300 \text{ kg/cm}^2$  ;  $E_c = 281,240 \text{ kg/cm}^2$ .

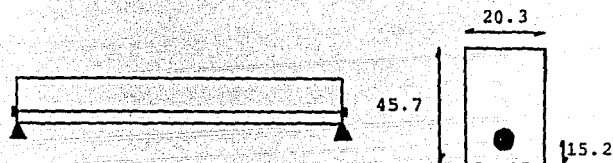


Fig. 11.- Viga preesforzada.

Solución :

Debido al preesfuerzo excéntrico, la viga está bajo un momento flexionante uniforme de:

$$65232 \times 7.6 = 495,763.2 \text{ kg-cm}$$

el esfuerzo en las fibras del concreto en el nivel del cable - debido a esta fricción es:

$$f = \frac{My}{I} = \frac{495763.2 \times 7.6}{\frac{20.3(45.7)^3}{12}} = 23.4 \text{ kg/cm}^2$$

la deformación unitaria por compresión a lo largo del nivel del cable consecuentemente es :

$$\epsilon = \frac{f}{E_c} = \frac{23.40}{281240} = 0.000083$$

la pérdida de preesfuerzo en el acero es :

$$0.000083 \times 2,109,300 = 176 \text{ Kg/cm}^2$$

Sin embargo, si la viga queda solamente bajo la acción del preesfuerzo, la deformación plástica del concreto tenderá a incrementar la contraflecha y resultará una pérdida adicional de preesfuerzo. Por otra parte, si se mide el preesfuerzo en el cable después de que la viga se arqueó, no necesita considerarse esta pérdida debida a la flexión.

Con el fin de ver la aplicación de los conceptos anteriores (pérdidas instantáneas y pérdidas diferidas) se presenta el siguiente ejemplo :

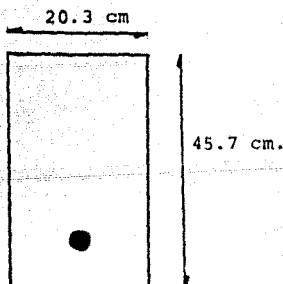
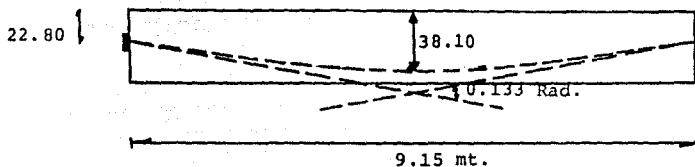
Una viga de concreto postensado con un cable de 24 alambres paralelos ( con un área total de acero =  $7.09 \text{ cm}^2$  ) está tensado con dos alambres a una vez. El esfuerzo de los gatos se va a medir con manómetro. Los alambres se van a esforzar desde un extremo, hasta un valor de  $f_1$ , para vencer la pérdida por fricción, relevándolos hasta un valor  $f_2$  para que se obtuviera un preesfuerzo inicial de  $8436 \text{ kg/cm}^2$  inmediatamente después del anclaje.

a) Calcular  $f_1$  y  $f_2$ .

b) calcular el esfuerzo final en el cable en el acero

después de que han aparecido todas las pérdidas. Supongase que:

- coeficiente de fricción  $\mu = 0.6$  entre acero y concreto-  
,  $K = 0.001$  para el efecto de longitud.
- deformación del anclaje y deslizamiento de los alambres  
estimado en 0.127 cm por extremo.  $E_s = 2,109,300 \text{ kg/cm}^2$
- $E_c = 281,240 \text{ kg/cm}^2$ . Despreciar el acortamiento del a-  
cero debido a la flexión de la viga
- coeficiente de deformación plástica del concreto = 2.2
- contracción del concreto = 0.0002
- deformación plástica del acero = 3% del esfuerzo inicial  
del acero.



1) Porcentaje de pérdida de presfuerzo por fricción dado por.

$$\text{Efecto de Longitud} = KL = 9.15 \times 0.0032 = 0.03$$

$$\text{Efecto de Curvatura} = \mu\theta = 0.6 \times 0.133 = 0.08$$

$$\text{TOTAL} = 0.11$$

por consiguiente es necesario tensar el acero a :

$$f_1 = \frac{8437}{(1 - 0.11)} = 9491 \text{ Kg /cm}^2$$

en un extremo con el objeto de vencer la fricción y obtener un esfuerzo de  $8436 \text{ kg/cm}^2$  en el extremo sin gatos. - Nótese que si la pérdida por fricción fuera de más del 30 por ciento sería deseable aplicar :

$$F_2 = F_1 e^{-\mu\theta - KL}$$

2) El deslizamiento del anclaje de 0.127 cm, aparece solamente en un extremo, puesto que el extremo sin gato tendría su deslizamiento antes de eliminar el gato. La pérdida en deformación unitaria está dada por :

$$\frac{0.127}{914.4} = 0.00014$$

y la pérdida del esfuerzo es:

$$0.00014 \times 2\ 109\ 300 = 295 \text{ kg/cm}^2$$

por lo tanto, tensando los cables a  $f_1 = 9491 \text{ kg/cm}^2$  y bajándolo después a  $f_2 = 8732 \text{ kg/cm}^2$  para anclarlo, el esfuerzo mínimo después del anclaje será de :

$$8732 - 295 = 8437 \text{ kg/cm}^2$$

este esfuerzo mínimo aparecerá en ambos extremos de la viga.

3) Puesto que los alambres se tensan por pares el primer par perderá algo de esfuerzo debido al acortamiento elástico del concreto bajo la acción de los 11 pares subsecuentes, la magnitud será aproximadamente :

$$\frac{11}{12} \times 8437 \times 1.20 \times 2 \ 109 \ 300 = 478 \text{ kg/cm}^2$$

$$281 \ 240 \times 45.7 \times 20.3$$

la pérdida promedio para todos los alambres será :

$$\frac{478}{2} = 239 \text{ kg/cm}^2$$

4) El esfuerzo total en el acero es muy cercano a  $65376 \text{ Kg/cm}^2$ , para el cual el acortamiento elástico del concreto vale :

$$\frac{65376}{281 \ 240 \times 45.7 \times 20.3} = 0.00025$$

la deformación plástica del concreto =  $(2.2 - 1)0.00025$  que es igual a  $0.0003$ , la cual corresponde a un esfuerzo de :

$$0.0003 \times 2 \ 109 \ 300 = 633 \text{ kg/cm}^2 \text{ en el acero}$$

5) La pérdida de presfuerzo en el acero, para una contracción de  $0.0002$  es :

$$0.0002 \times 2\ 109\ 300 = 422 \text{ kg/cm}^2$$

6) La deformación plástica en el acero a 3% de 8437 = 253 kg/cm<sup>2</sup>

La pérdida total se puede resumir :

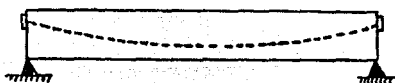
CAUSA	pérdida	% de pérdida
Acortamiento elástico	239 kg/cm <sup>2</sup>	3
Deformación plástica del concreto	633 "	7
Contracción del concreto	422 "	5
Deformación plástica del acero	253 "	3
TOTAL	1547 kg/cm <sup>2</sup>	18%

## 2.- MOMENTOS HIPERESTATICOS DE PREESFUERZO.

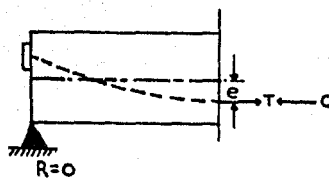
Examinemos primero, la diferencia entre una viga - continua de concreto preesforzado y una viga simplemente - apoyada. Debido a la aplicación del preesfuerzo, los momentos - en una viga continua se afectan directamente por el prees - fuerzo e indirectamente por las reacciones del apoyo induci - das por la flexión de la viga. En una viga simple, no hay reac - ciones de los apoyos inducidos por el preesfuerzo.

Considérese una viga simplemente apoyada, como la - quo se muestra en la figura 12; sin importar cuánto se prees - fuerce la viga, solo los esfuerzos internos serán afectados - por el preesfuerzo.

Fig.- 12



a) Viga simplemente apoyada.



b) Parte de la viga como cuerpo libre.

Las reacciones en los apoyos, determinadas por es - tática, dependerán únicamente de las cargas muerta y viva que - actuen sobre el elemento, sin verse afectadas por el prees - fuerzo. Ahora, sin carga externa de ningún tipo sobre la vi - ga, sin importar cuánto se preesfuerce, las reacciones serán - nulas, y, por lo tanto, el momento exterior también lo será.

Sin momentos exteriores sobre la viga, el momento interno resistente también será nulo, y, por consiguiente, la línea de preesfuerzo, debe coincidir con la línea T en el acero ( que es la línea que coincide con el centro de gravedad de los cables ) como se ilustra en la figura b.

Siendo conocida la línea de preesfuerzo en el concreto, el momento en éste, en cualquier dirección se puede determinar por :

$$M = T e = C e$$

Ahora, consideremos una viga continua de concreto preesforzado, ( Fig.13a). Cuando se aplica el preesfuerzo la viga se flexiona y se deflexiona, la flexión puede ser tal - que tienda a deflexionar la viga alejándola de alguno de sus apoyos, como en (b); Si se impide la deflexión en estos apoyos, como en (c), las reacciones deben ejercerse sobre la viga - para mantenerla apoyada. De este modo es como se inducen las reacciones cuando se preesfuerza una viga continua. Dichas - reacciones inducidas producen momentos en la viga, como en (d) para resistirlos, la línea de preesfuerzo en el concreto - ( la llamaremos C ) debe quedar a una distancia  $e^*$  de la línea T ( como se indica en (e) ), tal, que el momento resistente interno sea igual al momento externo M debido a las - reacciones, esto es :

$$e^* = \frac{M}{T}$$

Como un resumen de lo anteriormente dicho, podemos decir lo siguiente :

Bajo la acción del preesfuerzo la viga se deforma. Si dicha viga es isostática, se deformará libremente. Pero - si se trata de una viga hiperestática, va a encontrar ciertas restricciones para hacerlo, provocando en los apoyos - reacciones debidas al preesfuerzo. Dichas reacciones se les llamará hiperestáticas y los momentos debidos a estas reacciones serán llamados momentos hiperestáticos de preesfuerzo.





a.- VIGA CONTINUA.



b.- FLEXION DE LA VIGA JAJO EL PREESFUERZO SI NO ESTA SOSTENIDA POR EL APOYO.



c.- REACCIONES EJERCIDAS PARA SOSTENER A LA VIGA EN SU SITIO.



d.- DIAGRAMA DE MOMENTOS



e.- DESVIACION DE LA LINEA E CON RESPECTO A LA LINEA T, DEBIDA AL MOMENTO EN (d).

El efecto producido por las reacciones hiperestáticas, deberá agregarse a la acción isostática del cable.

Para aclarar los conceptos antes mencionados se presentan los siguientes ejemplos :

EJEMPLO 1:

1) Consideremos una viga simplemente apoyada, figura 14., con un preesfuerzo  $F$  horizontal y con una excentricidad constante  $e_1$  a todo lo largo de la viga :

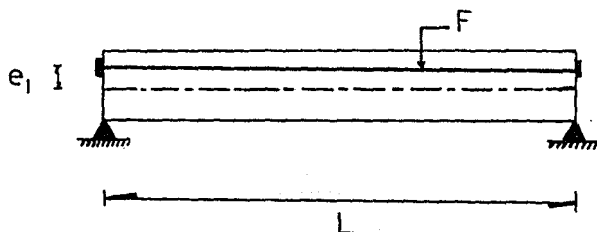


Fig. 14 .- Viga simplemente apoyada.

Calculamos la flecha al centro del claro debido al preesfuerzo, usando el método de la viga conjugada : (figura 15)

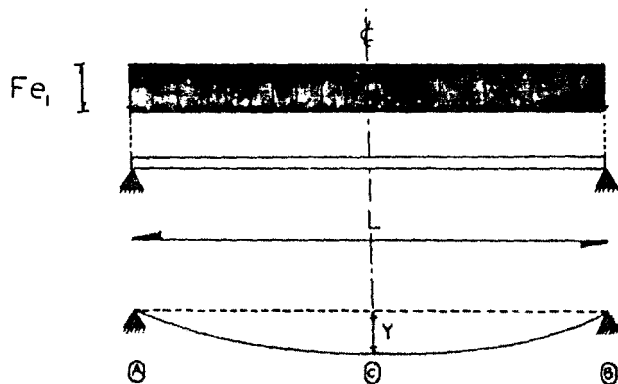


Fig. 15.- Viga Conjugada.

El momento al centro del claro de la viga con -  
jugada será :

$$M = \frac{F e_1 L}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{F e_1 L}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{F e_1 L^2}{8}$$

por lo tanto, la flecha será :

$$y = \frac{F e_1 L^2}{8EI}$$

Si la viga de la figura 14, la apoyamos también -  
en c, la viga será hiperestática y por lo tanto la flecha -  
en el punto c, debe ser nula. Para nulificar la flecha al -  
centro, el apoyo c debe provocar una reacción hiperestática  
de preesfuerzo que anule la flecha obtenida anteriormente -  
esto es :

$$\frac{R_h c L^3}{48EI} = \frac{F e_1 L^2}{8EI} \quad \text{----- (1)}$$

el primer miembro representa la flecha al centro del claro  
que produce una carga concentrada en dicho punto en una -  
viga simplemente apoyada.

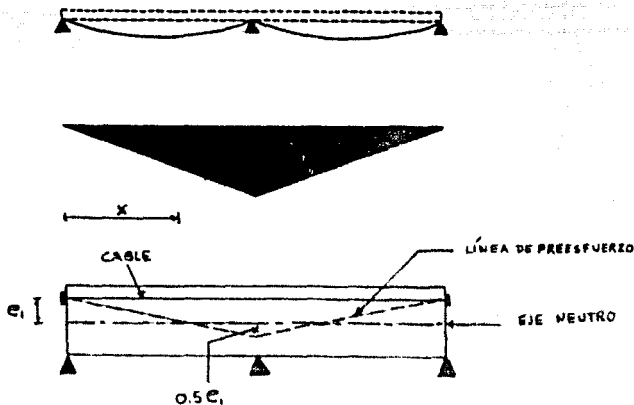


Fig. 16.- Viga hiperestática.

de la ecuación (1) se tiene :

$$\frac{Rh_c L^3}{48 EI} = \frac{Fe_1 l^3}{8 EI}$$

de donde :

$$Rh_c = \frac{6 Fe_1}{L}$$

por simetría y por suma de fuerzas verticales :

$$Rh_a = Rh_b = - \frac{3Fe_1}{L}$$

por lo tanto, analizando una sección cualquiera  $x$ , siendo  $0 \leq x \leq L/2$ , tendremos, además del efecto isostático del cable, las acciones hiperestáticas de :

$$Mh_x = - Rh_a x$$

$$Vh_x = - Rh_a$$

de donde el momento total debido al preesfuerzo será :

$$M_x = Fe_1 + Mh_x$$

$$M_x = Fe_1 + \frac{-3Fe_1}{L} x$$

$$M_x = Fe_1 \left( 1 - \frac{3x}{L} \right)$$

por lo tanto, la línea de preesfuerzo tiene una excentricidad igual a :

$$e^*_x = \frac{M_x}{F} = e_1 \left( 1 - \frac{3x}{L} \right)$$

al centro :

$$e^*_x = e_1 \left( 1 - \frac{3L}{2L} \right)$$

$$e^*_x = - 0.5 e_1$$

resultando  $e^*$  una línea quebrada como se indica en la figura 16, que es la línea del preesfuerzo.

Comparando los resultados obtenidos con los de la viga isostática, se pueden hacer las siguientes conclusiones :

1.- La línea de preesfuerzo  $C$  no coincide con el tendón o cable equivalente, debido al momento hiperestático de preesfuerzo.

2.- Los esfuerzos provocados por el preesfuerzo en el concreto, serán debidos a la excentricidad  $e$  de la línea de preesfuerzo y NO a la excentricidad  $e_1$  del cable; es decir, que en una estructura hiperestática, el preesfuerzo no pasa donde se coloca el cable.

3.- En una estructura hiperestática deberá considerarse el conjunto de la misma y no podrá considerarse una sección aislada como se hace en una trabe isostática.

Como se vió en el capítulo 2 " Principios del Concreto Preesforzado ", se puede considerar al preesfuerzo en dos formas : Método Interno, y Método Directo.

Ambos métodos podrán utilizarse para calcular las reacciones hiperestáticas debidas al preesfuerzo como se ilustra a continuación :

Ejemplo 2 :

a) Considérese una viga continua como la de la figura 17, de la cual queremos obtener el diagrama de momentos finales por el método interno.

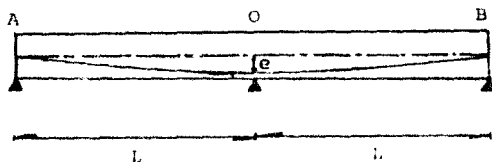


Fig.- 17 . Viga Continua.

Suponemos que  $e = -\frac{L^2}{2r}$ ; Usando el método del trabajo virtual se tiene:

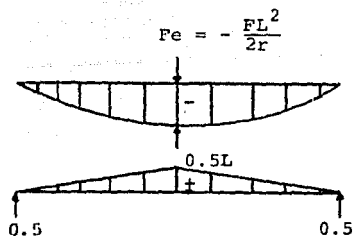


Diagrama de momentos del estado "0".

Diagrama de momentos del estado "1".

la ecuación de compatibilidad es:

$$\Delta_{01} + x \Delta_{11} = 0$$

donde, multiplicando los diagramas se tiene:

$$\Delta_{01} = 2 \left( \frac{5}{12} \right) (L) \left( -\frac{FL^2}{2r} \right) (0.5L) = -\frac{5FL^4}{24rEI}$$

$$\Delta_{11} = 2 \left( \frac{1}{3} \right) (L) (0.5L) (0.5L) = \frac{L^3}{6EI}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación de compatibilidad se tiene:

$$\frac{-10FL^4}{48rEI} + \frac{xL^3}{6EI} = 0$$

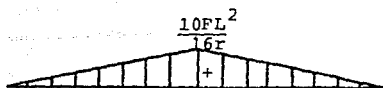
de donde:

$$x = \frac{10FL}{8r}$$

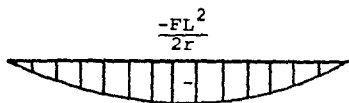
por lo tanto, las reacciones serán:



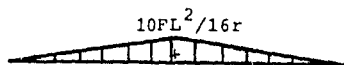
por lo tanto, el diagrama de momentos hiperestáticos debidos al preesfuerzo será el que produzcan dichas reacciones, esto es :



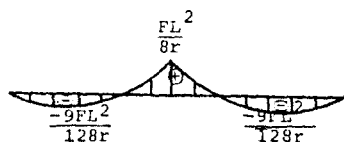
y los momentos finales serán el resultado de sumar los momentos isostáticos más los hiperestáticos. esto es :



Momentos Isostáticos



Momentos Hiperestáticos



Momentos Finales.

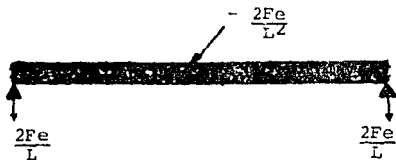
#### b) Método Directo :

Como se dijo en el Capítulo 2, en este método se considera al preesfuerzo como una sollicitación externa, es decir, como una carga uniformemente repartida a lo largo de la viga, dicha carga está dada por :

$$q = \frac{F}{r} = -\frac{2F_0}{r^2}$$

Usando el trabajo virtual, se tienen los siguientes estados :

EDO. 0 :



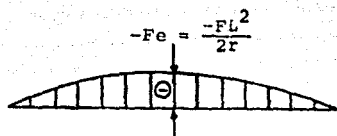
EDO 1 :



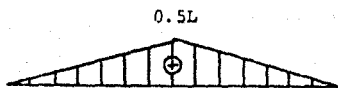
Los diagramas de momentos de los dos estados son:

$$0 \leq x \leq L$$

$$M(x) = -\frac{2Fe}{L}x + \frac{2Fe}{L^2}(x^2)(1/2)$$



EDO 0



EDO 1

Multiplicando los diagramas se tiene :

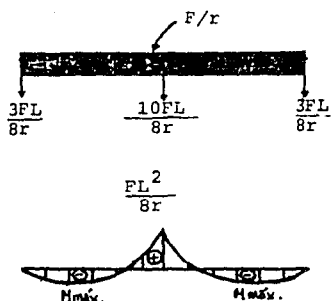
$$\Delta_{01} = -\frac{5FL^4}{24EI} \quad \text{y} \quad \Delta_{11} = -\frac{L^3}{6EI}$$



como la ecuación de compatibilidad es la misma que la anterior la reacción  $X$  también lo será, por lo que :

$$X = \frac{10FL}{8r}$$

Las reacciones y el diagrama de momentos finales serán:



$$M = -\left(\frac{3FL}{8r}\right) X + \frac{F X^2}{r 2} \quad 0 \leq X \leq L$$

para:

$$X=0, M=0$$

$$X=L, M = \frac{FL^2}{8r}$$

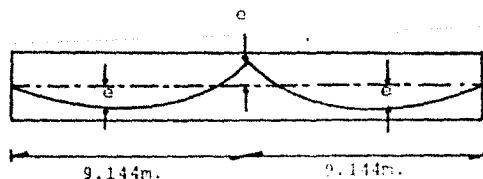
$$X = \frac{3}{8} L, M = M_{\text{máx.}} = -\frac{9FL^2}{128r}$$

Como vemos dan los mismos resultados por el método interno y por el método directo.

#### EJEMPLO 2 :

Considere la viga continua que se muestra en la figura I, de la cual se quiere obtener el diagrama de momentos finales empleando primero el método interno y después el método directo, con el fin de comparar los resultados obtenidos por ambos métodos.

Fig. I.:



$$e = 0.1524 \text{ m.}$$

Por el método interno se tiene :

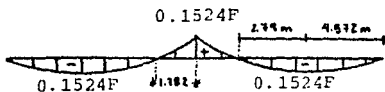


Diagrama de momentos del EDO "0"

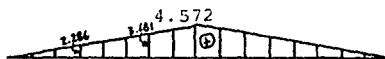


Diagrama de momentos del EDO "1".

multiplicando los diagramas :

$$\begin{aligned} \Delta_{01} &= \frac{10}{12} (4.57) (-0.1524) (2.286F) + \frac{2}{12} (2.79) (-0.1524F) \\ &\quad ( 5(2.286) + (3) (3.681) ) + \frac{1}{6} (1.782) (0.1524F) ( \\ &\quad ( 3.681 + 3(4.572) ) ) \\ &= -1.32735F - 1.59257F + 0.787436F \\ &= \frac{-2.1325F}{EI} \end{aligned}$$

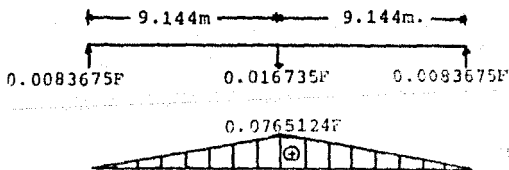
$$\Delta_{11} = \frac{2}{3} (9.144) (4.572)^2 = \frac{127.4258}{EI}$$

de donde :

$$X ( 127.4258 ) = 2.1325 F$$

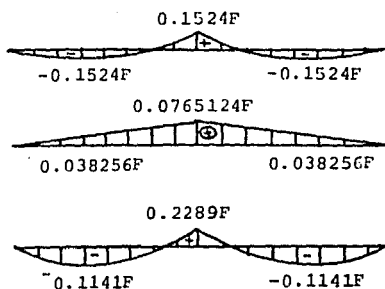
$$X = 0.016735 F.$$

por lo que las reacciones y el diagrama de momentos hiperestáticos debidos al preesfuerzo serán :



momentos hiperestáticos.

los momentos finales serán :



Momentos Isostáticos

+

Momentos Hiperestáticos

=

Momentos Finales.

Método Directo ;

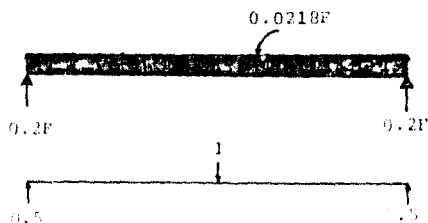
La carga uniformemente repartida esta dada por :

$$\frac{F}{l} \text{ donde } r = \frac{L^2}{8e} ;$$

$$w = \frac{F}{r} = \frac{F}{\frac{(9.14527) L}{8(0.2286)}} = 0.0218 F.$$



por el método del trabajo virtual se tienen los siguientes estados :



EDO "0"

EDO "1"

la ecuación de compatibilidad es :

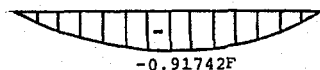
$$\Delta_{01} + x \Delta_{11} = 0$$

Obtenemos los diagramas de momentos de los dos estados:

para el estado "0"

$$0 \leq x \leq 9.144$$

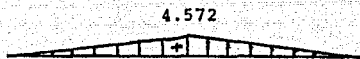
$$M(x) = -0.2 F x + \frac{0.0218Fx^2}{2} ; X=0, M=0 ; X=9.144, M=0.91742F$$



para el estado "1" :

$$0 \leq x \leq 9.144$$

$$M(x) = 0.5 X^2 ; X=0, M=0 ; X=9.144, M=4.572.$$



multiplicando los diagramas , tenemos :

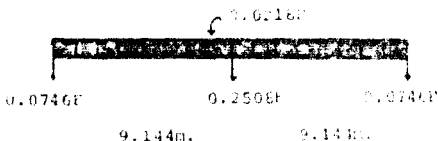
$$\Delta_{01} = \frac{10}{12} (9.144) (0.91742F) (4.572) = \frac{-31.96166511F}{EI}$$

$$\Delta_{11} = \frac{2}{3} (9.144) (4.572)^2 = \frac{127.4258097}{EI}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación de compatibilidad, se tiene:

$$x = \frac{\Delta_{01}}{\Delta_{11}} = \frac{-31.96166511F}{127.4258097} = 0.2506 F$$

por lo que las reacciones serán :



el diagrama de momentos finales será :

$$0 \leq x \leq 9.144$$

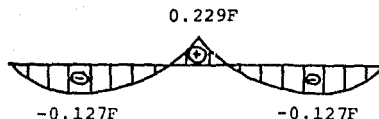
$$M(x) = -0.0746Fx + \frac{0.0218F x^2}{2}$$

para  $X=0$  ,  $M=0$

$$X=9.144 \text{ , } M=0.229 F$$

$$X=3.422 \text{ , } M=M_{\text{máx.}} = -0.127 F$$

$$X=6.844 \text{ , } M=0$$



Comparando estos resultados con los obtenidos por el método Interno vemos que son practicamente los mismos.

La diferencia es debida a la aproximación numérica del calculo.

### 3.- PRINCIPIOS DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA

En el diseño de un gran número de estructuras es necesario estudiar los efectos producidos por cargas colocadas en varias posiciones. Esto se puede hacer en forma conveniente por medio de diagramas que muestren el efecto de una carga que se mueve a lo largo de la estructura. Tales diagramas se denominan comúnmente líneas de influencia. Así, una línea de influencia es un diagrama que muestra la variación de una función ( cortante , momento , etc. ) para una sección dada, debido a una carga unitaria que se mueve a lo largo de la estructura. Entonces, una línea de influencia para una sección particular se puede construir colocando una carga unitaria sobre varios puntos de la estructura y determinando, para cada una de éstas posiciones de la carga unitaria, el valor de la función en una sección particular de la estructura . Debe observarse que mientras que un diagrama de cortante o momento, muestra la variación en cortante o momento a lo largo de la estructura debida a una posición particular de la carga, una línea de influencia para cortante o momento, muestra la variación en cortante o momento en una sección particular de la estructura - debido a una carga unitaria colocada en cualquier lugar a lo largo de ella.

Las líneas de influencia sirven dos propósitos fundamentales. Pueden ser usadas cualitativamente para indicar las partes de la estructura que deberían ser cargadas para obtener la máxima sollicitación. En este caso no es ne-

cesario calcular ninguna ordenada de la línea de influencia. Por otra parte, las líneas de influencia se pueden usar en un sentido cuantitativo para obtener los valores de una función particular, resultado de algún patrón de carga.

Si los valores de una acción A son graficados como ordenadas de los puntos de aplicación de una carga unitaria, obtenemos la línea de influencia de la acción A. Usaremos la letra griega  $\eta$  para representar la ordenada de influencia ( o coeficiente de influencia ) de cualquier acción debido a una carga concentrada que se mueve a lo largo del miembro de que se trate. Los efectos de otro tipo de carga tales como los debidos al preesfuerzo, los estudiaremos mas adelante.

Ilustraremos ahora el uso de la línea de influencia. El valor de una acción A debido a un sistema de cargas concentrada  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  ( Fig A ) puede ser obtenido de las ordenadas de influencia como :

$$A = \eta_1 P_1 + \eta_2 P_2 + \dots + \eta_n P_n$$

o :

$$A = \sum_{i=1}^n \eta_i P_i \quad ( 3.1 )$$

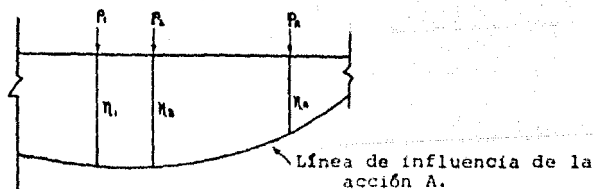
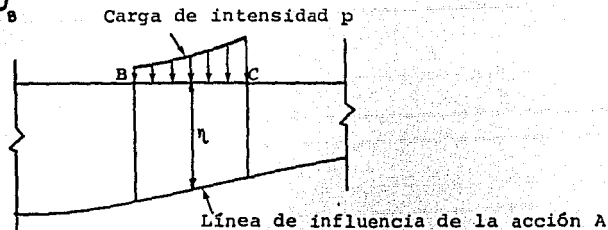


Fig.- A . Línea de influencia de la acción A

El valor de la acción A debida a una carga transversal distribuida de intensidad p sobre una longitud  $\overline{BC}$  es :

$$A = \int_B^C \eta p \cdot dx$$



Para una carga uniforme de intensidad q ;

$$A = q \int_B^C \eta dx$$

el valor de la integral en ésta última ecuación, es el área bajo la línea de influencia entre B y C.

#### Principio de Müller-Breslau

Un medio efectivo de visualizar la forma de una línea de influencia para cualquier estructura-ya sea simple o continua- resulta de un principio establecido por H. Müller-Breslau. Este principio establece lo siguiente :

" Si una función cualquiera-tal como momento, cortante, reacción o esfuerzo-produce libremente una pequeña deformación  $\Delta$  en una sección para la que la línea de influencia se desea , los desplazamientos de la elástica de la estructura representan las ordenadas de influencia multiplicadas por  $\Delta$  ".

En otras palabras, si se produce una deformación unitaria correspondiente a la función que se está considerando, la



-lástica de la estructura resultante es la línea de influencia a alguna escala.

Consideremos una viga cargada en equilibrio, como en la figura B1. Quitémosle el apoyo en  $b$  y sustituyamos su efecto por la correspondiente reacción  $R_b$ , como se ve en la figura B2. Si ahora se sujeta a la estructura a una carga dirigida hacia abajo en  $b$ , tal que la deflexión en  $b$  sea igual a la unidad, la viga tomará la forma de la figura B3.

Como la estructura original es determinada estáticamente, el hecho de liberar una restricción, hace que la estructura se convierta en un mecanismo, y entonces la fuerza  $F$  requerida para producir el desplazamiento (Fig B3) es cero. Sin embargo, el liberar una fuerza restrictiva en una estructura indeterminada estáticamente conduce a otra estructura estable, de tal forma que generalmente la fuerza  $F$  no es igual a cero.

Aplicando el teorema de Betti a los dos sistemas de fuerza de las figuras B2 y B3, podemos escribir :

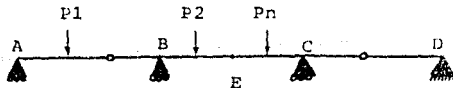
$$\eta_1 P_1 + \eta_2 P_2 + \dots + \eta_n P_n - 1 x R_b = F \times 0$$

Esta ecuación expresa el hecho de que el trabajo virtual externo desarrollado por el sistema de fuerzas de la fig. B2 durante el desplazamiento del sistema de B3, es el mismo que el trabajo virtual externo hecho por el sistema de la fig. B3 durante el desplazamiento del sistema en B2. Esta cantidad debe ser cero, por que no existe deflexión alguna en  $b$  en la fig. B2.

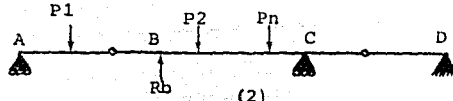
La ecuación anterior puede ser escrita :

$$R_b = \sum_{(n)} \eta_i P_i$$

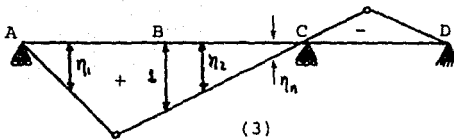
Comparando esta ecuación con la 3.1, podemos ver que la línea deformada de la figura B3 es la línea de influencia de



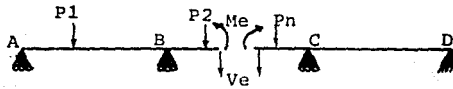
(1)



(2)

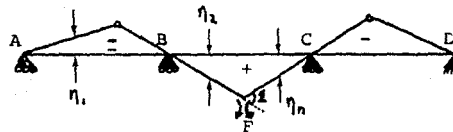


(3)



(4)

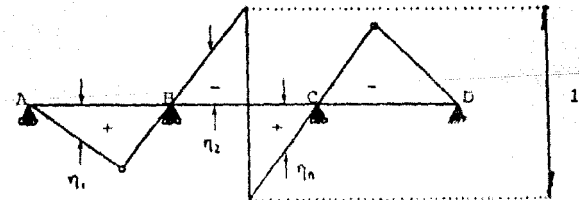
fig: B



(5)



(6)



(7)

la reacción  $R_b$ . Esto demuestra que la línea de influencia de la reacción  $R_b$  se puede obtener liberando su efecto, esto es quitando el apoyo en  $B$ , e introduciendo un desplazamiento unitario en ese punto.

Usando simple estática, podemos fácilmente checar - que la ordenada de la línea obtenida en cualquier punto, es - igual a la reacción  $R_b$  si una carga unitaria se coloca en - ese punto de la viga.

Usemos ahora el principio de Müller-Breslau para el caso de la línea de influencia del momento flexionante en - cualquier sección  $e$ . Introducimos una articulación en  $e$  liberando así el momento en esa sección. Entonces aplicamos dos pares iguales y de sentido contrario  $F$  tales que produzcan - una rotación relativa unitaria de los extremos de la viga - que concurren en  $e$  ( Fig. B5 ). Con el objeto de probar que la línea deformada en este caso es la línea de influencia del momento flexionante en  $e$ , se corta la viga de la figura B1- en la sección  $e$  y se introducen dos pares de fuerzas iguales y opuestas  $M_e$  y  $V_e$  para mantener el equilibrio ( Fig. B4 ) . Aplicando el teorema de Betti a los sistemas de las figuras- B4 y B5 , podemos escribir :

$$\eta_1 P_1 + \eta_2 P_2 + \dots + \eta_n P_n - 1 \times M_e = F \times 0$$

ó:

$$M_e = \sum_{i=1}^n \eta_i P_i$$

Esto demuestra que la línea deformada de la fig. B5- es la línea de influencia para el momento flexionante en  $e$ .

La línea de influencia para el cortante en la sección  $e$  se puede obtener introduciendo un desplazamiento unitario -

relativo sin rotación relativa de los dos extremos de la viga que concurren en  $e^*$  ( Fig B7 ). Esto se lleva a cabo introduciendo en  $e^*$  un mecanismo ficticio tal como el mostrado en la figura B6 y aplicando dos fuerzas verticales iguales y opuestas  $F$ . Con este mecanismo, los dos extremos de  $e^*$  permanecen paralelos tal como se ve en la Fig. B7.

Aplicando nuevamente la ley de Betti a los sistemas en B4 y B7 , podemos escribir :

$$\eta_1 P_1 + \eta_2 P_2 + \dots + \eta_n P_n - 1 \times V_e = F \times 0$$

6 :

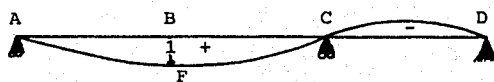
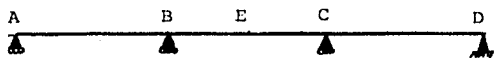
$$V_e = \sum_{i=1}^n \eta_i P_i$$

lo que demuestra que la línea deformada de la fig. B7, es la línea de influencia del cortante en  $e^*$ .

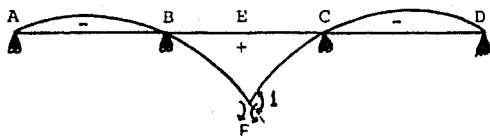
Todas las líneas de influencia consideradas hasta aquí están compuestas de segmentos de líneas rectas. Este es el caso de líneas de influencia en estructuras estáticamente determinadas. Así, una ordenada y la forma de la línea de influencia conocidas, son suficientes para dibujarla. Esa ordenada se puede calcular a partir de consideraciones de estática o de la geometría de la línea de influencia.

Las líneas de influencia en estructuras estáticamente indeterminadas están compuestas de curvas, y por lo tanto deben calcularse varias ordenadas. En la fig. B8 se usa el principio de Müller-Breslau para obtener la forma general de las líneas de influencia para una reacción ; - momento flexionante y cortante en una sección de una viga

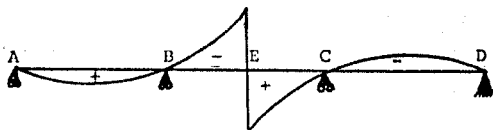
continua .



Línea de influencia para  $R_b$ .



Línea de influencia de  $M_e$



Línea de Influencia de  $V_e$ .

\* \* Fig.- B8. Línea de influencia de una viga continua

El procedimiento anterior involucra una escala particular, aunque ( especialmente para la línea de influencia del momento ) puede ser bastante imperfecta, - por que es muy sensible, con respecto a ligeros cambios en la pendiente de la línea deformada en la sección en la que se introduce la deformación. Se puede obtener una mejor escala para tales líneas de influencia por la combinación de dos métodos más sencillos, como se ilustra en la fig. C1.

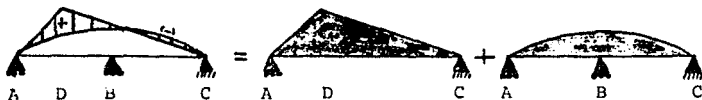
En esa figura se obtiene la línea de influencia para el momento en D por dos distintas formas. En (1) se dibuja primero una línea de influencia del momento en D en una viga soportada en A y C. Las ordenadas de esta línea se pueden obtener de la geometría o calculando el momento debido a una carga unitaria. Entonces, se introduce una corrección debida al efecto del apoyo B, y esta línea curva se superpone a la línea de influencia simple. La altura de la línea curva se obtiene a partir del hecho de que la ordenada resultante en B debe ser igual a cero, ya que el momento en D debido a una carga en el apoyo B es cero. Ahora lo único incierto es la forma exacta de la línea curva de corrección.

En la fig. C2, se dibuja primero un diagrama de influencia de una viga simple, y luego se introduce la corrección para tomar en cuenta el efecto del apoyo A que había sido despreciado. El patrón de corrección es superpuesto de tal manera que la ordenada de influencia resultante en A sea igual a cero, ya que cuan-

do se coloca una carga ahí, el momento en D es igual a cero.

Se podría obtener la misma línea de influencia quitando otros apoyos de la viga ( hasta dejarla como una estructura isostática ) y después tomando en cuenta el efecto de la restricción liberada. En cierto modo, el procedimiento se asemeja al de la obtención de elementos mecánicos por el método de flexibilidades en el que se analiza una estructura primaria quitándole las redundantes a la estructura original.

(1)

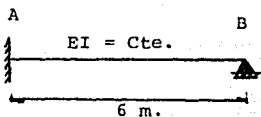


(2)



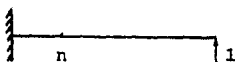
Fig.-C. Combinación de métodos.

Ilustraremos con un ejemplo la aplicación del principio de Müller-Breslau :

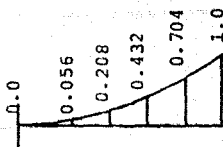
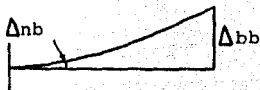
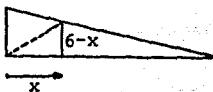


Se pide encontrar la línea de influencia para la reacción en B.

1.- Sustituimos  $X_b$  por una fuerza con dirección hacia arriba, tal como se muestra :



6 Ton-m.



Línea de influencia de  $X_b$ .

2) El diagrama de momentos producidos por esta fuerza, se muestra en b

3) Aplicando el segundo teorema de Area-momento se tiene que:

$$\begin{aligned} EI\Delta_{nb} &= 6 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{3} + (6-x) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \\ &= 2x^2 + x^2 - \frac{x^3}{6} \\ &= x^2 (3 - x/6) \end{aligned}$$

para  $x = 6$  m.

$$EI\Delta_{bb} = 6^2 (3 - 6/6) = 72$$

$$\Delta_{bb} = \frac{72}{EI}$$

Si hacemos  $EI = 72$  de tal manera que  $\Delta_{bb} = 1$  podemos obtener todos los coeficientes de influencia y así trazar la línea correspondiente

$$X_b = \frac{x^2 (3 - x/6)}{72}$$



LINEA DE INFLUENCIA DE UNA  
VIGA CON EXTREMOS FIJOS.

Vamos a utilizar el principio de Muller-Breslau para encontrar las líneas de influencia de los momentos de empotramiento de una viga con extremos fijos. De aquí aplicando las ecuaciones de la estática, se pueden determinar las líneas de influencia para reacción, cortante y momento flexionante en cualquier sección.

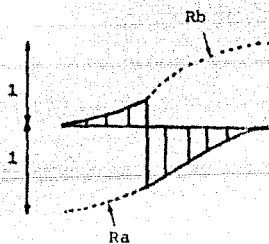
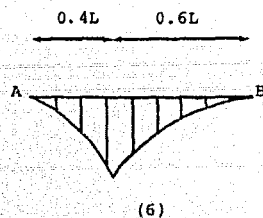
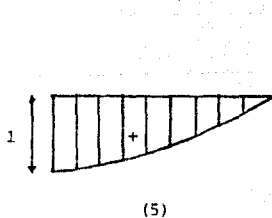
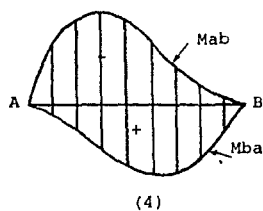
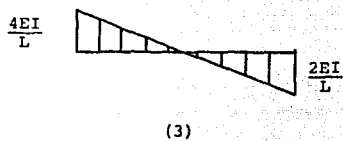
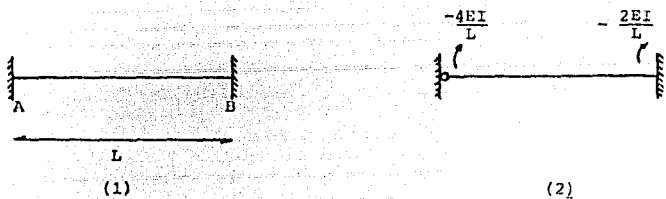
Para encontrar la línea de influencia del momento de empotramiento  $M_{ab}$  de la viga mostrada en la figura D1, introducimos una articulación en A y ahí mismo aplicamos un momento tal que produzca una rotación unitaria en ese mismo punto. Este momento deberá ser igual en magnitud a la rigidez angular  $K_{ab}$  del extremo A. El momento correspondiente en el extremo B es  $t \cdot C_{ab} \cdot K_{ab}$ , donde  $C_{ab}$  y  $t$  son el factor de transporte y el momento de transporte respectivamente. La línea deformada correspondiente al diagrama de momentos flexionantes de la figura D3. es la línea de influencia requerida.

Cuando la viga tiene rigidez a la flexión  $EI$  constante y longitud  $L$ , los momentos en A y B son  $-\frac{4EI}{L}$  y  $-\frac{2EI}{L}$  respectivamente.

La superposición de la deflexión causada por un momento extremo  $-\frac{4EI}{L}$  en A ( con momento cero en B ) y de las deflexiones causadas por un momento igual a  $-\frac{2EI}{L}$  en B ( con momento cero en A ) nos da la línea de influencia requerida. Esto se ilustra en la tabla 1.

Como la viga es simétrica, las ordenadas de influencia del momento de empotramiento  $M_{ba}$  pueden ser ob-

Fig. D.- Viga con extremos fijos.



(7)

-tenidas a partir de las del momento  $M_{ab}$  invirtiéndoles el signo y el orden. Esto se ilustra en la tabla 2.

Las líneas de influencia de los dos momentos de empotramiento están dibujadas en la figura D4.

Distancias del extremo izquierdo.	.1L	.2L	.3L	.4L	.5L	.6L	.7L	.8L	.9L	FACTOR
Deflexión debida al momento de Emp. en A ( $-4EI/L$ ).	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	L
Deflexión debida al momento de Emp. en B ( $-2EI/L$ ).	.033	.064	.091	.112	.125	.128	.119	.096	.057	$L_i$
Ordenada de Influencia de $M_{ab}$ .	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	L
	.081	.128	.147	.144	.125	.096	.068	.032	.009	

Tabla 1. Cálculo de las ordenadas de influencia de  $M_{ab}$ \*

Distancia desde el extremo izquierdo	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L	FACTOR
Ordenada de Influencia para $M_{ba}$	.009	.032	.06	.096	.125	.144	.147	.128	.081	L

Tabla 2. Ordenadas de la línea de influencia para el momento de empotramiento  $M_{ba}$ \*

\* Las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de empotramiento son :

$$M_{ab} = \frac{x(L-x)^2}{L^2} \quad \text{y} \quad M_{ba} = \frac{x^2(L-x)}{L^2}$$

donde  $x$  es la distancia a partir de A.

La reacción  $R_a$  puede ser expresada como:

$$\eta_{ra} = \eta_{ras} - \frac{1}{L} (\eta_{Mab} + \eta_{Mba})$$

Donde  $\eta$  es la ordenada de influencia de la acción - indicada por el subíndice . La línea de influencia de  $R_{as}$  es una línea recta con ordenada 1 en A y cero en B. El cálculo de las ordenadas de influencia para la reacción  $R_a$  es desarrollado en la tabla 3., y la línea de influencia se dibujó en la figura D5.

Distancia desde el extremo Iz.	0	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L
$\eta_{Ras}$	1.0	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
$-\eta_{MabL}$	0	0.081	0.128	0.147	0.144	0.125	0.096	0.063	0.032	0.009
$-\eta_{MbaL}$	0	-0.009	-0.032	-0.063	-0.096	-0.125	-0.144	-0.147	-0.128	-0.081
Ordenada de Influencia de $R_a$ .	1.0	0.972	0.896	0.784	0.648	0.5	0.352	0.216	0.104	0.028

Tabla 3. Ordenadas de la línea de influencia de  $R_a$ .

En forma similar, la ordenada de influencia para el momento flexionante en cualquier sección a una distancia  $x$  del extremo izquierdo está dada por :

$$\eta_m = \eta_{ms} + \frac{(L-x)}{L} \eta_{Mab} - \frac{x}{L} \eta_{Mba}$$

donde  $\eta_m$  y  $\eta_{ms}$  son las ordenadas de influencia del momento flexionante en la sección para una viga con extremos fijos y simplemente apoyada respectivamente. Las ordenadas  $\eta_m$  para una sección  $x = 0.4L$  se calculan en la tabla 4 y se dibujaron en la figura D6.

Distancias desde el extremo izquierdo.	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L	Factor
$\eta_{Ms}$	0.06	0.12	0.18	0.24	0.20	0.16	0.12	0.08	0.04	L
$0.6\eta_{Mab}$	-0.049	-0.077	-0.088	-0.086	-0.075	-0.058	-0.038	-0.019	-0.005	L
$-0.4\eta_{Mba}$	-0.004	-0.013	-0.025	-0.038	-0.05	-0.358	-0.059	-0.051	-0.032	L
Ordenadas de influencia para : $M (x=0.4L)$ .	0.007	0.030	0.067	0.116	0.075	0.044	0.023	0.010	0.003	L

Tabla 4. Ordenadas de la línea de influencia para

$$M (x = 0.4L)$$

Las ordenadas de influencia  $\eta_v$  para el cortante en cualquier sección pueden ser calculadas a partir de la ecuación:

$$\eta_v = \eta_{vs} - \frac{1}{L} (\eta_{Mab} + \eta_{Mba})$$

donde  $\eta_{vs}$  es la ordenada de influencia para el cortante en la misma sección en una viga simplemente apoyada. La línea de influencia para cortante en una sección  $x=0.4L$  se muestra en la figura D7. Se puede ver que ésta línea de influencia puede ser formada por partes de la línea de influencia para  $R_a$  y  $R_b$ .

Podríamos ampliar el estudio de las líneas de influencia al caso de los marcos planos u otros, pero hemos considerado que de acuerdo con los objetivos que se persiguen en ésta Tesis es suficiente con suspender dicho estudio aquí, aunque en el capítulo 4 mencionaremos algunas propiedades de las líneas de influencia de momentos hiperestáticos debidos al preesfuerzo.

EJEMPLO A.- Aplicando el principio de Muller-Breslau, calcular las ordenadas , a intervalos de 0.75 m., de la línea de influencia para el momento en el punto medio del claro BC para la viga mostrada en la Fig.2. El momento de inercia es constante.

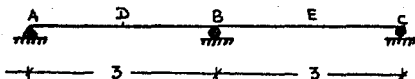


Fig.2.- Viga continua simétrica.

Eliminando la capacidad de la viga para resistir momento mediante una articulación y aplicando un par unitario en el punto "E", se tiene la siguiente deflexión :

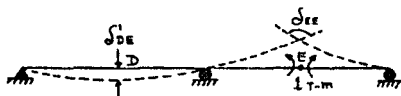


Fig.2.1.- Deflexión causada por el par unitario.

La viga conjugada cargada se muestra en la figura 2.2, con las magnitudes de las ordenadas en las secciones requeridas, indicadas en Ton-m.

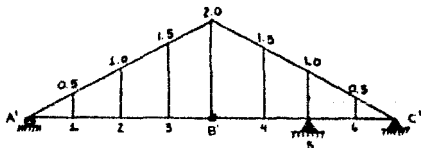


Fig.2.2.- Viga conjugada cargada.

La suma de los cortantes en la viga conjugada a la derecha e izquierda del apoyo en 5, será igual a la reacción en este mismo punto, y será también el valor relativo del ángulo  $\phi$  de la figura Z.1.

$$R_5 = 2x\frac{3}{2} + 2x\frac{3}{2}x\frac{2}{1.5} = 8 \text{ hacia arriba}$$

las otras dos reacciones son:

$$R_A = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = 1 \text{ hacia arriba}$$

$$R_C = 6 - 1 - 8 = 3 \text{ hacia abajo}$$

Los momentos se calculan como sigue:

$$M_1 = 1x0.75 - 0.5 \times \frac{0.75}{2} \times \frac{0.75}{3} = +0.703$$

$$M_2 = 1x1.5 - 1 \times \frac{1.5}{2} \times \frac{1.5}{3} = +1.123$$

$$M_3 = 1x2.25 - 1.5 \times \frac{2.25}{2} \times \frac{2.25}{3} = +0.985$$

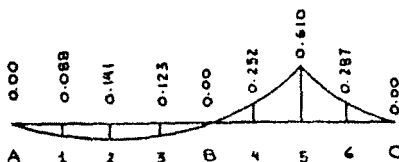
$$M_B = 0$$

$$M_4 = -2x0.75 - 0.5x\frac{0.75}{2} \times \frac{2}{3} \times 0.75 - 1.5x0.75 \times \frac{0.75}{2} = -2.018$$

$$M_5 = -2 \times 1.5 - 1x\frac{1.5}{2} \times \frac{2}{3} \times 1.5 - 1x1.5x0.75 = -4.876$$

$$M_6 = -3x0.75 - 0.5x\frac{0.75}{2} \times \frac{0.75}{3} = -2.297$$

El valor de la ordenada de la línea de influencia en cada una de las secciones indicadas arriba se calcula dividiendo cada momento por  $\phi = 8$ . La línea de influencia resultante es:





4.- LINEAS DE INFLUENCIA DE MOMENTOS HIPERESTATICOS  
DEBIDOS AL PREESFUERZO.

Para resolver el problema de las líneas de influencia de momentos hiperestáticos debidos al preesfuerzo, empezaremos por definir el coeficiente de influencia de preesfuerzo. Este, se puede definir para cualquier acción pero es más útil para el momento flexionante, de modo que usaremos la siguiente definición: el coeficiente de influencia del momento debido al preesfuerzo en una sección "j",  $\eta_{mp}$ , se define como el momento hiperestático en una sección "i" debido a una fuerza de preesfuerzo unitaria aplicada a una excentricidad unitaria sobre un elemento de longitud también unitaria en la sección "j" (ver Fig.4.1).

el coeficiente de influencia del preesfuerzo depende exclusivamente de la geometría de la estructura de concreto y no del perfil del cable o del valor de la fuerza de preesfuerzo. Entonces, el uso de éstos coeficientes nos ayuda a tomar en cuenta la variación en la fuerza de preesfuerzo a lo largo del cable y permiten una rápida estimación del efecto de preesfuerzo cuando el perfil del cable se cambia durante el diseño. El momento hiperestático en cualquier sección es :

$$M_h = \int P \cdot e \cdot \eta_{mp} \, dx \quad \text{-----} \quad (1)$$

donde la integración se efectúa sobre la longitud de todos los miembros de la estructura. La evaluación de ésta integral es similar a la determinación de cualquier esfuerzo debido a una carga transversal de intensidad  $P_e$  a partir de su línea de influencia ( Capítulo 3 ) .

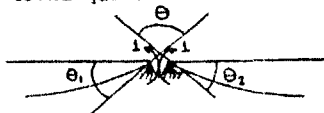
Para evitar el laborioso trabajo de calcular la línea de influencia del momento hiperestático de preesfuerzo a partir de su definición, mostraremos un método que facilita su obtención.

Consideremos la viga ABCD de la Figura 4.2a con el diagrama de momentos  $M_0$  debidos al preesfuerzo mostrado en la Figura 4.2b. Si aplicamos el método del Trabajo Virtual para obtener el momento en "B" debido a ese diagrama de momentos, tenemos - que hacer un corte en el apoyo "B" y aplicar un par virtual unitario en cada extremo de viga que concurre a ese nudo como se ve en la Figura 4.2c. El diagrama de momentos  $m$  que produce ese estado de carga virtual se muestra en la Figura 4.2d. Ahora el momento en "B" lo podemos encontrar por compatibilidad de deformaciones, así:

$$\int m \frac{M_0}{EI} dx + M_B \int m \frac{m}{EI} dx = 0$$

de donde  $M_B = - \frac{\int \frac{m M_0}{EI} dx}{\int \frac{m^2}{EI} dx}$  ----- (2)

El término  $\int m \frac{M_0}{EI} dx$ , es el giro relativo en el extremo "B" de la viga debido al diagrama de momentos  $M_0$ . El término  $\int \frac{m^2}{EI} dx$  es siempre constante para una viga de geometría dada y lo llamaremos  $H$ . Representa el giro relativo en "B" debido al diagrama de momentos virtual de la Figura 4.2d. Si llamamos  $r_1$  y  $r_2$  a las rigideces angulares de las barras que concurren en el nudo "B" se tiene que :



$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

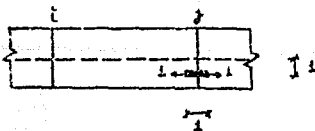


Fig. 4.1 .Definición de coeficiente de influencia



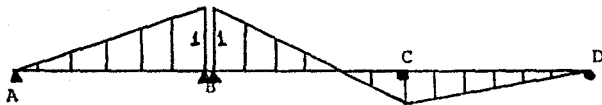
(a) Viga continua



(b) Diagrama de momentos  $M_0$  debido al preesfuerzo



(c) Par virtual unitario aplicado en "B"



(d) Diagrama de momentos  $m$  debido al par unitario



(e) Elástica producida por el par unitario

Fig. 4.2.-

entonces 
$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Como H es una constante, podemos introducirla en la integral del numerador de la expresión (2) y nos queda que:

$$M_B = - \int Pe \frac{m}{HEI} dx$$

Comparando ésta última expresión con la ecuación (1) podemos concluir que :

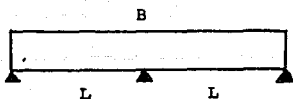
$$\eta_{mp} = - \frac{m}{HEI}$$

m es el diagrama de momentos que produciría la elástica que se dibuja en 4.2e . Si en lugar de aplicar pares unitarios en los extremos que concurren en "B" hacemos que  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 1$ , la elástica generada es la misma que tendríamos aplicando el principio de Müller - Breslau para encontrar la línea de influencia del momento flexionante en "B" . En éste caso ,  $H=1$  ya que  $\theta_1 + \theta_2 = H = 1$  y entonces :

$$\eta_{mp} = - \frac{m}{EI}$$

A continuación se ejemplifican los conceptos anteriores con cuatro casos diferentes.

EJEMPLO 1 : Viga continua simétrica.



Separando la viga y aplicando un momento unitario en " B ":



Esta deflexión es causada por el siguiente diagrama de momentos:



Sabemos que :

$$M_B = \frac{\int M_0 \frac{m}{EI} dx}{\int \frac{m^2}{E^2 I} dx}$$

Valuamos  $\int \frac{m^2}{EI} dx$ , por el método del trabajo virtual :

$$H = \int \frac{m^2}{EI} dx = 2 \left( \frac{1}{3} (L) (1)^2 \right) = \frac{2L}{3EI}$$

Ya que H es una constante,valuamos  $\frac{m}{HEI}$

sección	0.2L	0.4L	0.6L	0.8L	L	1.2L	1.4L	1.6L	1.8L	2L	factor
$\frac{m}{HEI}$	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.2	0.9	0.6	0.3	0	$-\frac{1}{L}$

Como  $M_0 = P \cdot e$ , suponemos la posición del siguiente-cable :

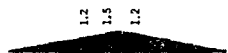


sección	0.2L	0.4L	0.6L	0.8L	L	1.2L	1.4L	1.6L	1.8L	2L	factor
$P \cdot e$	+0.2	+0.3	+0.2	0	-0.35	0	+0.2	+0.3	+0.2	0	Ph

Ahora efectuamos el producto de  $M_0 \cdot \frac{m}{HEI}$ , para obtener el momento hiperestático en B por el método del trabajo virtual:



Edo. "0"



Edo. "1"

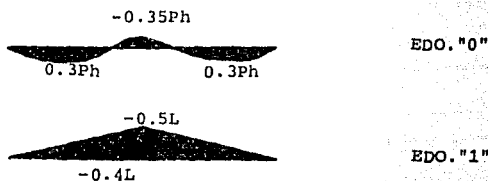
$$M_B = \int M_0 \frac{m}{HEI} dx = \frac{2}{3} (0.8L) (1.2) \frac{1}{L} (+0.3) Ph + \frac{2}{12} (0.2L) (-0.35 Ph) \left( \frac{3}{L} (1.2) + 5 (1.5) \right)$$

$$M_B = 0.0625 Ph$$



Resolvemos ahora la misma viga, con la misma posición del cable por el método interno:

Tendremos los siguientes estados (Aplicando trabajo virtual):



La ecuación de compatibilidad es;  $\Delta_{01} + \chi \Delta_{11} = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{01} &= \frac{2}{3} (0.8L) (-0.4L) (-0.3Ph) + \frac{2}{12} (0.2L) (0.35Ph) (3(-0.4L) - 5(\frac{L}{2})) \\ &= \frac{0.020833 PhL^2}{EI} \end{aligned}$$

$$\Delta_{11} = \frac{2}{3} (L) (-0.5L)^2 = \frac{0.16666L^3}{EI}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad:

$$\chi = - \frac{Ph}{8L}$$

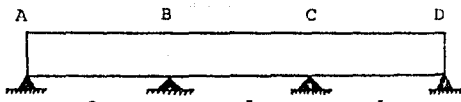
de donde el momento hiperestático resulta:

$$M_D = 0.0625 Ph$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo por el método de la línea de influencia.

En los ejemplos siguientes se seguirá la misma secuela de cálculo para encontrar el momento hiperestático debido al -  
pressfuerzo por los dos caminos.

EJEMPLO 2 : Viga continua de tres claros iguales

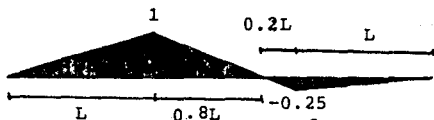


Aplicamos un momento en "B" unitario :



Esta deflexión es causada por el siguiente diagrama de

momentos :



Valuando la constante  $H = \int \frac{m^2}{EI} dx$  :

$$H = \frac{1}{3} (L) (1) + \frac{1}{3} (0.8L) (1) + \frac{1}{3} (0.2L) (-0.25)^2 + \frac{1}{3} (L) (-0.25)^2$$

$$H = \frac{0.625L}{EI}$$

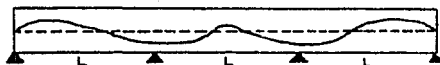
Ahora obtenemos el termino  $\frac{m}{HEI}$ , anotando los valores en

la siguiente tabla :

SECCION	m/HEI	FACTOR
0.2L	0.32	-1/L
0.4L	0.64	"
0.6L	0.96	"
0.8L	1.28	"
1.0L	1.6	"
1.2L	1.2	"
1.4L	0.8	"
1.6L	0.4	"
1.8L	0.0	"
2.0L	-0.4	"
2.2L	-0.32	"
2.4L	-0.24	"
2.6L	-0.16	"
2.8L	-0.08	"
3.0L	0.0	"



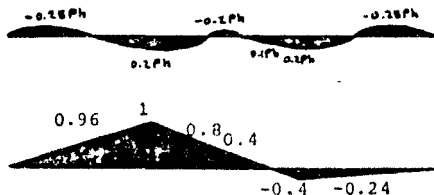
Suponemos el siguiente trazo de cable:



Las excentricidades están anotadas en la siguiente tabla:

SECCION	P.e	FACTOR
0.2L	-0.2	Ph
0.4L	-0.2	"
0.6L	0.0	"
0.8L	0.1	"
1.0L	0.2	"
1.2L	0.1	"
1.4L	0.0	"
1.6L	0.0	"
1.8L	0.1	"
2.0L	0.2	"
2.2L	0.1	"
2.4L	0.0	"
2.6L	-0.2	"
2.8L	-0.2	"
3.0L	0.0	"

Obtenemos  $M_B$ , multiplicando los diagramas de  $M_0$  y  $\frac{-m}{HEI}$ :



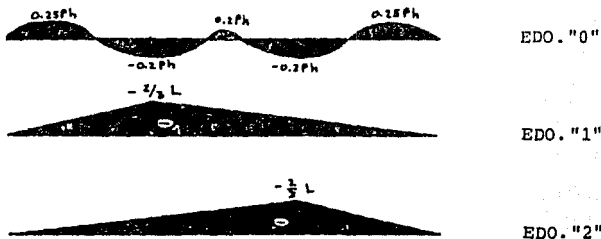
$$M_0 = Pe$$

$$-\frac{m}{HEI}$$

De donde se obtiene que el momento hiperestático debido al preesfuerzo es:

$$M_B = 0.067Ph$$

Resolviéndolo por el método interno, y aplicando trabajo virtual, se tienen los siguientes estados :



De donde la ecuación de compatibilidad es :

$$\Delta_{01} + X\Delta_{11} + Y\Delta_{21} = 0$$

$$\Delta_{02} + X\Delta_{12} + Y\Delta_{22} = 0$$

Efectuando la multiplicación de los diagramas de los tres estados, se obtiene :

$$\Delta_{01} = \frac{0.055333PhL^2}{EI} ; \quad \Delta_{02} = \Delta_{01}$$

$$\Delta_{11} = \frac{4L^3}{9EI} ; \quad \Delta_{22} = \Delta_{11}$$

$$\Delta_{21} = \frac{0.38888L^3}{EI} ; \quad \Delta_{12} = \Delta_{21}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad, los valores resultantes son :

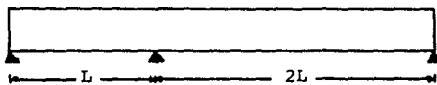
$$X = -0.067 \frac{Ph}{L} ; \quad Y = -0.067 \frac{Ph}{L}$$

Obtenidos estos valores podemos por simple estática evaluar el momento en el apoyo "B", por lo tanto :

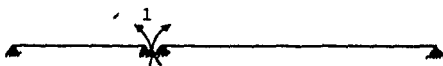
$$M_B = 0.067Ph$$

Comparando los resultados obtenidos por el método de la línea de influencia y por el método interno, vemos que son los mismos.

EJEMPLO 3 : Viga continua no simétrica



Aplicando un momento unitario en el punto "B" :



Esta deflexión es causada por el siguiente diagrama de momentos :



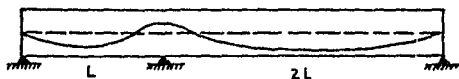
Valuamos  $H = \int \frac{m^2}{EI} dx$  , por multiplicación de diagramas:

$$H = \frac{1}{3} (L) (1) + \frac{1}{3} (2L) (1) = \frac{L}{E \cdot I}$$

Ahora obtenemos  $\frac{m}{HEI}$  , cuyos valores estan condensados - en la siguiente tabla :

SECCION	$\frac{m}{HEI}$	FACTOR
0.2L	0.2	-1/L
0.4L	0.4	"
0.6L	0.6	"
0.8L	0.8	"
1.0L	1.0	"
1.2L	0.9	"
1.4L	0.8	"
1.6L	0.7	"
1.8L	0.6	"
2.0L	0.5	"
2.2L	0.4	"
2.4L	0.3	"
2.6L	0.2	"
2.8L	0.1	"
3.0L	0.0	"

Suponemos el siguiente trazo de cable;



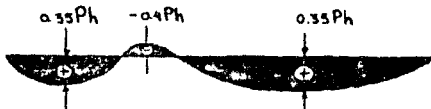
Las excentricidades son las siguientes :

SECCION	P.e	FACTOR
0.2L	0.2	Ph
0.4L	0.35	"
0.6L	0.2	"
0.8L	0.0	"
1.0L	-0.4	"
1.2L	0.0	"
1.4L	0.1	"
1.6L	0.2	"
1.8L	0.3	"
2.0L	0.35	"
2.2L	0.35	"
2.4L	0.3	"
2.6L	0.2	"
2.8L	0.1	"
3.0L	0.0	"

Multiplicando ésta tabla y la tabla de  $\frac{m}{HEI}$  ; por medio de la tabla de multiplicación de áreas :



$$-\frac{m}{HEI}$$

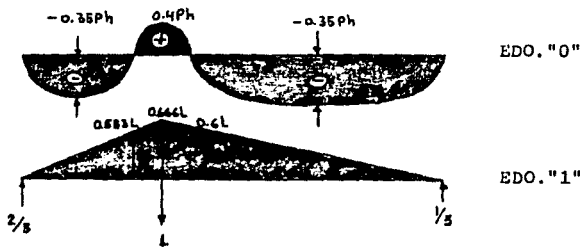


$$P.e$$

$$M_B = \frac{1}{3}(0.8L) \left(\frac{0.8}{L}\right) (0.35Ph) + \frac{1}{12}(0.2L) (-0.4Ph) \left( \frac{3(0.8)}{L} + \frac{5}{L} + \frac{3(0.9)}{L} + \frac{5}{L} \right) + \frac{1}{3}(1.8L) \left(\frac{0.9}{L}\right) (0.35Ph)$$

De donde  $M_B = 0.163Ph$

Aplicando el método interno tendremos los siguientes estados (aplicando el trabajo virtual):



La ecuación de compatibilidad de deformaciones es:

$$\Delta_{01} + \Delta_{11}(X) = 0$$

Multiplicando los respectivos diagramas obtenemos:

$$\Delta_{01} = \frac{-0.108666 L^2}{EI}$$

$$\Delta_{11} = \frac{0.444444L^3}{EI}$$

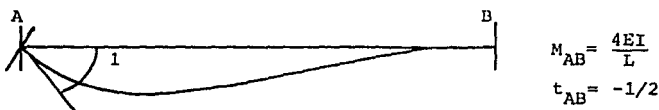
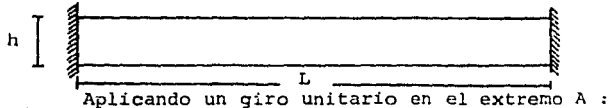
Sustituyendo  $\Delta_{11}$  y  $\Delta_{01}$ , en la ecuación de compatibilidad se tiene:

$$X = \frac{0.2445}{L}$$

Por simple estática calculamos las otras reacciones y obtenemos el momento hiperestático debido al preesfuerzo. Que como vemos da el mismo resultado que el anterior, esto es:

$$M_B = 0.163Ph$$

## EJEMPLO 4 : Viga doblemente empotrada



Entonces el diagrama de momentos resultante es :

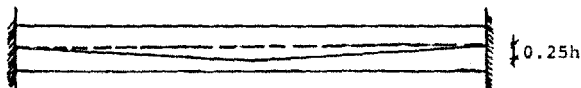


$$\text{Como } \theta_A = 1 \Rightarrow H = \int \frac{m^2 dx}{EI} = 1 \quad \therefore \gamma_{mp} = -\frac{m}{EI}$$

tabulando estas ordenadas se tiene :

SECCION	$\frac{m}{E \cdot I}$	FACTOR
0.0L	4.0	1/L
0.1L	3.4	"
0.2L	2.8	"
0.3L	2.2	"
0.4L	1.6	"
0.5L	1.0	"
0.6L	0.4	"
0.7L	-0.2	"
0.8L	-0.8	"
0.9L	-1.4	"
1.0L	-2.0	"

Suponemos el siguiente trazo de cable:

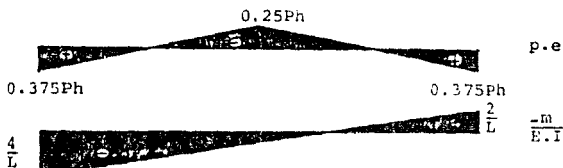


Las excentricidades están anotadas en la siguiente-  
tabla :

SECCION	P.e	FACTOR
0.0L	0.375	Ph
0.1L	0.250	"
0.2L	0.125	"
0.3L	0.000	"
0.4L	-0.125	"
0.5L	-0.250	"
0.6L	-0.125	"
0.7L	0.000	"
0.8L	0.125	"
0.9L	0.250	"
1.0L	0.375	"

Evaluamos la integral  $M_A = \int Pe \frac{-m}{E-I} dx$ , que es la que nos da el momento hiperestático debido al presfuerzo.

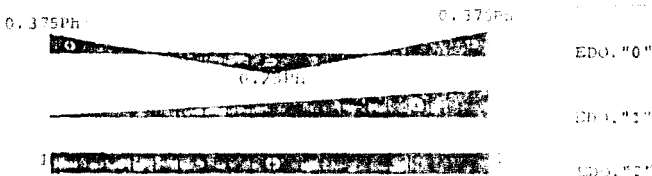
Multiplicando los diagramas de p.e y  $\frac{m}{E-I}$  se tiene :



$$M_A = \left[ \frac{1}{6} (0.3L) (0.375) \left( \frac{-2.2}{L} - \frac{B}{L} \right) + \frac{1}{6} (0.2) (0.25) (2+2.2) (L/L) + \frac{1}{6} (0.17) (L) (1) (0.0375+0.5) (1/L) + \frac{1}{6} (0.03L) (-0.375) \left( \frac{0.2}{L} \right) + \frac{1}{6} (0.3L) (0.375) (0.2+4.0) \left( \frac{1}{L} \right) \right] Ph$$

$$M_A = -0.062 Ph$$

Ahora, obtenemos el momento hiperestático por el método interno, usando el trabajo virtual se tiene:



La ecuación de compatibilidad de deformaciones es:

$$\Delta_{01} + R_A \Delta_{11} + M_A \Delta_{21} = 0$$

$$\Delta_{02} + R_A \Delta_{12} + M_A \Delta_{22} = 0$$

Multiplicando los diagramas para obtener las deltas y sustituyendo en la ecuación de compatibilidad se tiene que:

$$M_A = -0.062 Ph$$

que como vemos es el mismo resultado obtenido por el método de la línea de influencia.



## CONCLUSIONES

Hemos visto que para diseñar elementos postensados en estructuras continuas es necesario evaluar las redundantes para encontrar la posición de la línea de preesfuerzo. Este trabajo requiere la aplicación de alguno de los métodos tradicionales de Análisis Estructural que generalmente implican la solución de ecuaciones simultáneas de compatibilidad de deformaciones o en el caso de métodos iterativos la repetición sistemática de un proceso como por ejemplo el método de Cross.

Si tomamos en cuenta que para el diseño de tales elementos en la práctica, es necesario proponer varios perfiles del cable hasta encontrar la posición óptima para las restricciones particulares de cada problema, nos damos cuenta que se trata de un trabajo muy laborioso.

El método de análisis que se ha propuesto en esta tesis, basado en el uso de las propiedades de las líneas de influencia, minimiza el trabajo ya que conocida la línea de influencia del elemento solo se requiere valuar la integral  $\int P_e \eta_{mp} dx$ .

Analicemos el caso particular de una viga continua de tres claros. Utilizando el método interno (supuesto ya el trazo del cable) necesitamos conocer el valor de las dos reacciones interiores para poder obtener el valor del momento hiperestático. Por el método del trabajo virtual esto requiere la solución de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Ahora, con la línea de influencia, como ya di-

jimos solo valuamos la  $\int Pe \eta_{mp} dx$ . El grado de hiperestaticidad de la viga analizada es  $n = 2$ . Si ahora aumentamos el grado de hiperestaticidad a  $n = 3$  también aumentan las dificultades para obtener el momento hiperestático deseado por el método interno. En cambio, si disponemos de la línea de influencia de momentos hiperestáticos, nuevamente solo será necesario resolver la integral  $\int Pe \eta_{mp} dx$ .

Como acabamos de ver mientras mayor sea el grado de hiperestaticidad de la estructura en cuestión mayor será la ventaja de emplear éste método.

Resumiendo, se puede decir lo siguiente:

- 1.- El método de la línea de influencia no implica la solución de sistemas de ecuaciones ni de procesos iterativos.
- 2.- Mientras mayor es el grado de hiperestaticidad de la estructura, el método de la línea de influencia es más eficiente que los otros métodos de análisis ya que ocupa menos tiempo en obtener la solución.

Quedará como motivo de un nuevo trabajo, la obtención de tablas de líneas de influencia de momentos hiperestáticos debidos al preesfuerzo de distintos elementos, como las que ya existen para el caso de cargas verticales.

## RECONOCIMIENTO

Deseamos hacer patente nuestro agradecimiento al Ing. Julio Dany Ríos por la elaboración del método que se propone en el capítulo cuatro, así como por sus atinados consejos y ayuda.

Asimismo, se agradece a la Lic. en Pedagogía Andrefina Terrés de Richerard por la revisión del manuscrito de ésta tesis.

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- T.Y. LIN "DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO PREESFORZADO"  
C.E.C.S.A. , 1969
- 2.- J. STERLING "ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS"  
KINNEY C.E.C.S.A. , 1976
- 3.- CHARLES HEAD NORRIS "ANÁLISIS ESTRUCTURAL"  
SENOLUTKU AND 3ª Edición,  
JHON BENSON WILBUR Mc Graw-Hill  
1976
- 4.- M. ALBIGES, "ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT"  
Y. LE BOURDELLE ET DES TRAVAUX PUBLICS "  
Octubre , 1964
- 5.- J. MARIA RIOBOO, "PRINCIPIOS DEL CONCRETO PREESFORZADO"  
FRANCISCO ROBLES Artículo de la revista de  
Ingeniería.
- 6.- J. LUIS CAMBA C. "CURSO SOBRE PREFABRICACION Y PREESFUERZO  
DE ESTRUCTURAS"  
Centro de Educación  
Continua, 1972
- 7.- Y. GUYON "CONSTRUCTIONS EN BETON PRECONTRAIT"  
(COURS CHEBAP)  
EYROLLES, PARIS.  
1968
- 8.- Y. GUYON "BETON PRECONTRAIT, ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE"  
3ª Edición, EYROLLES, PARIS
- 9.- PAUL W. ABELES " AN INTRODUCTION TO PRESTRESSED CONCRETE "  
Vol.1, London 1964
- 10.- PAUL W. ABELES " AN INTRODUCTION TO PRESTRESSED CONCRETE "  
Vol.2, London 1964
- 11.- KACHATURIAN AND " PRESTRESSED CONCRETE "  
GURFINKEL Mc Graw-Hill Book Company
- 12.- H. KENT PRESTON " MODERN PRESTRESSED CONCRETE "  
AND N.J. SOLLENBERGER New York, Mc Graw-Hill
- 13.- JAMES MICHALOS AND " ANALISIS ESTRUCTURAL "  
EDWARD N. WILSON New York, McMillan Company 1965
- 14.- CHI AND BIBERSTEIN " THEORY OF PRESTRESSED CONCRETE "  
Prentice Hall International, INC.  
London.