T-45

U.N.A.M.

Facultad de Ingeniería

Movimiento Sísmico en Depósitos Aluviales Ante Incidencia de Ondas Planas S H

T E S I S

Que para obtener el título de :

INGENIERO CIVIL

p r e s e n t a :

JORGE ALFREDO ESQUIVEL AVILA

México, D. F. 1979

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-1-318

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

Al Pasante señor JORGE ALFREDO ESQUIVEL AVILA
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Francisco José Sánchez Sesma, para que lo desarrolle como tesis en su Exímen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"MOVIMIENTO SISMICO EN DEPOSITOS ALUVIALES ANTE INCIDENCIA DE ONDAS PLANAS SH"

1. Introducción
2. Ondas sísmicas
3. Influencia de las condiciones locales
4. Formulación del problema
5. Procedimiento numérico
6. Resultados
7. Conclusiones
8. Referencias
9. Tablas
10. Figuras
11. Apéndices

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Exímen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 17 de noviembre de 1978.
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBLH/mdr.-

RESUMEN

RESUMEN

Se hace una introducción a las ondas sísmicas. El problema se enmarca dentro de un contexto general en Ingeniería Sísmica discutiendo la influencia de las condiciones locales y la importancia de su estudio.

Se presenta un método para calcular la difracción de ondas planas SH por depósitos aluviales cilíndricos de secciones arbitrarias. El depósito constituye una inclusión elástica en un semiespacio también elástico. El problema se formula en términos de un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie con sus trayectorias de integración fuera de la frontera evitando las singularidades. Se hace una discretización empleando fuentes lineales. Al imponer condiciones de frontera se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve minimizando el error cuadrático. Se presentan resultados numéricos de espectros de amplificación para geometrías diferentes. La concordancia con las soluciones analíticas es excelente. La comparación con otro método numérico da resultados satisfactorios.

1. INTRODUCCION

El estudio de la sismicidad en la superficie de la corteza terrestre permite construir mapas de regionalización sísmica en los que se asignan a cada región probabilidades de ocurrencia de sísmos con magnitudes dadas. Esto a su vez permite formular criterios para definir espectros de diseño. Cuando la información para estos estudios en esas zonas sea bastante detallada se podrán trazar mapas de microrregionalización (20). Entre los datos necesarios para un estudio de esta índole se requieren conocer las leyes de amplificación en el movimiento del terreno ante la incidencia de diferentes tipos de ondas sísmicas. En sitios donde se construyan obras como complejos hidroeléctricos o plantas de energía nuclear esto es de gran importancia.

En este trabajo se pretende resolver un problema muy específico dentro de ese contexto general. El escrito está basado en buena parte en un trabajo sobre el mismo tema (30).

El origen de los temblores a gran escala está relacionado con la tectónica de placas. Esta teoría intenta explicar el origen de esos movimientos usando un modelo cinemático que trata de representar la mecánica de la corteza terrestre (14). La idea se basa en que la corteza de la tierra, o más especificamente la litósfera está dividida en placas (fig 1). Estas se deslizan horizontalmente sobre una capa de material más blando llamada astenósfera (fig 2) que en parte esta fundida. Los diferentes tipos de movimientos relativos entre las placas (fig 2) dan lugar a grandes concentraciones de deformaciones en sus bordes, generándose esfuerzos. Al superar estos a los que puede soportar la roca, se produce la falla liberándose entonces grandes cantidades de energía en forma de calor y de movimiento (ondas sísmicas), provocando sacudidas en ciertas zonas de la superficie de la tierra.

De la fuente al sitio de registro, las ondas sísmicas sufren múltiples reflexiones y refracciones provocadas por irregularidades geológicas. Cerca de la superficie del terreno estas se hacen más severas (fig 3). Así las condiciones locales (topografía, suelo superficial en el sitio y geología local) pueden influir en las características del movimiento y deben de considerarse en los análisis de riesgo sísmico.

Informes de los daños concentrados (13, 23, 37) después de temblores han permitido concluir que, en ocasiones, las condiciones locales modifican el movimiento de manera desfavorable para las construcciones. Movimientos en sitios relativamente cercanos pero de topografía y/o geología disímiles presentan diferencias notables durante temblores (9, 26) aunque otras características relativas a la posición de la fuente sean similares.

La construcción de estructuras importantes y la necesidad de contar con parámetros de diseño confiables ha reforzado el interés en el estudio del problema. El asunto ha sido abordado en la literatura como un problema de difracción de ondas elásticas. En algunas ocasiones el empleo del modelo unidimensional de ondas de corte da resultados aceptables (43). Especialmente en sitios donde la estratificación sea prácticamente horizontal. Este no es siempre el caso por lo que debe recurrirse a modelos que tomen en cuenta la naturaleza espacial del fenómeno. Es decir, estos modelos deben ser bi o tridimensionales. La mayoría de las investigaciones se han ocupado sólo del problema en dos dimensiones con excitación armónica (1, 2, 4, 5, 27-31, 35-38, 41, 42, 46-48). Existen soluciones analíticas cerradas para depósitos aluviales de secciones transversales semicircular (41) y semielíptica (48), con incidencia de ondas armónicas SH. Planteando el problema con ecuaciones integrales se han podido obtener resultados para cañones de formas arbitrarias (38, 46),se podrían obtener resultados para depósitos usando la linealidad involucrada. Para dos medios con interfase irregular y para ondas SH se empleó un método que supone periodicidad de la irregularidad en el espacio para discretizar así las integrales que resultan de las condiciones de frontera (1). El método esta restringido por la hipótesis de Rayleigh, es decir, a pendientes pequeñas. Se han hecho análisis de elemento finito empleando ondas de corte con dirección de propagación vertical (37). Utilizando las llamadas fronteras activas eficientes (2) adaptadas a un análisis de elemento finito se han podido calcular desplazamientos en depósitos aluviales con ondas planas SH. En el Apéndice C se da una explicación más detallada de este método. Fórmulas de carácter empírico (22) han sido utilizadas debido a la complejidad del problema.

En este escrito se presenta un método para resolver el problema de difracción de ondas SH planas por depósitos de aluvión cilíndricos con secciones de forma arbitraria. El depósito constituye una inclusión elástica en la superficie de un semiespacio también elástico (fig 7). Representando a las ondas difractadas por potenciales de capa simple y cumpliendo condiciones de fontera libre en la superficie, se llega a un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie con sus trayectorias de integración fuera de la frontera consiguiendo así núcleos regulares. La discretización se hace empleando soluciones para fuentes lineales. Al imponer condiciones de frontera en la interfase, se obtiene un sistema de ecuaciones que se resuelve empleando el método de los cuadrados mínimos. Este método es aplicable y tiende a la solución única si se cumplen ciertos requisitos, que se comentan en el Apéndice B, entre otros el de que las funciones elementales empleadas para formar la solución constituyan una base completa, esto se podría demostrar usando la teoría de Herrera (12).

El método presentado en este trabajo ha sido usado en problemas de difracción de ondas elásticas por cañones (35, 36) y túneles (31) de formas arbitrarias ante incidencia de ondas SH. Para ondas P o SV sólo se han obtenido resultados para cañones con secciones transversales irregulares (29). Están en proceso las extensiones del método a irregularidades como cordilleras (33) en un semiespacio y túneles con recubrimiento (32) cuando la excitación está dada por ondas SH. Se espera tener un modelo, basado en este método, que sirva para analizar la interacción entre muros de retención (o bien presas) suelo y relleno (o agua) para ondas incidentes P o SV. En problemas de elastostática plana el método se ha usado con éxito (34). La idea es similar a la propuesta por Copley (6) y de manera simplificada ha sido aplicada por De Mey (7) en la solución del problema interior de Laplace. Un método análogo ha sido propuesto en elastostática por Heise (11).

Se presenta una introducción a las ondas sísmicas: tipos de ondas y algunas soluciones generales. En el Capítulo 2 se discute la influencia de las condiciones locales en el movimiento sísmico de un sitio.

Se comparan los desplazamientos en la superficie de un depósito simicircular obtenidos con el método presentado contra la solución exacta (41). Lo mismo se hace con las amplitudes de los desplazamientos de manera gráfica para un depósito semielíptico. Resultados para depósitos de secciones senoidal y triangular también se presentan. Para esta última geometría se hace una comparación con la solución obtenida con el método de las fronteras activas eficientes.

En los apéndices se resúmen: el método de los cuadrados mínimos, el método de las fronteras activas eficientes y la teoría del modelo unidimensional.

2. ONDAS SISMICAS

Cuando se genera un movimiento sísmico, una parte de la energía se libera en forma de ondas. Considerando plana a la superficie de la tierra, es decir, despreciando la curvatura en vista de que las dimensiones de interés son pequeñas en comparación con el radio de la tierra, y bajo la hipótesis de que los esfuerzos alcanzados en el medio por la acción del movimiento permiten aplicar la teoría de la elasticidad lineal; la perturbación se representará como un tren de ondas en un semiespacio elástico, lineal, homogéneo e isotrópico. La homogeneidad e isotropía se adoptan por sencillez.

En un medio continuo, elástico, isotrópico y homogéneo, la ecuación que gobierna el movimiento de las partículas del continuo, en coordenadas de espacio y tiempo en función de los desplazamientos, está dada por (16)

$$\mu \nabla^2 \underset{\sim}{\delta} + (\lambda+\mu) \text{ grad div } \underset{\sim}{\delta} + \rho \underset{\sim}{B} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underset{\sim}{\delta}) \qquad (2.1)$$

donde $\underset{\sim}{\delta}$ = vector de desplazamientos, $\underset{\sim}{B}$ = vector de fuerzas de cuerpo, ρ = densidad del medio, ∇^2 = operador de Laplace, t = tiempo y λ, μ = constantes elásticas del medio o constantes de Lamé.

En la ecuación anterior $\underset{\sim}{\delta}$ se ha considerado como función continua y derivable en el continuo, además se han aceptado desplazamientos pequeños, por tanto el problema se trata en forma lineal.

2.1 *Ondas de cuerpo*

En 1830 Poisson demostró que en un medio elástico lineal se propagan dos tipos de ondas con velocidades diferentes (15), años después (1849) Stokes encontró la correspondencia de esos tipos de ondas con movimientos irrotacional y equivoluminal respectivamente (15). Esto se comprueba aplicando a la ec 2.1 primero la divergencia y luego el rotacional, omitiendo fuerzas de cuerpo, se llega a

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2 (\text{div } \underset{\sim}{\delta}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{div } \underset{\sim}{\delta}) \tag{2.2}$$

$$\mu\nabla^2 (\text{rot } \underset{\sim}{\delta}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \underset{\sim}{\delta}) \tag{2.3}$$

que son ecuaciones que representan dos tipos de perturbaciones. La expresión 2.2 es un movimiento irrotacional o dilatacional que viaja con velocidad $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ a través del medio, mientras que la ecuación 2.3 es un movimiento equivoluminal o rotacional con velocidad $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$. En vista de que λ, μ y ρ son constantes positivas, se concluye que $\alpha > \beta$. A las ondas que viajan más rápido (α) se les llama primarias o P, son las que aparecen primero en el registro de un sismo. A las que tienen velocidad β se les nombra secundarias o S. Las ondas P producen sólo cambios de volúmen en las partículas del medio que equivalen a estados de esfuerzos normales, por eso también se les llama de compresión. Las ondas S cambian la forma de las partículas generando esfuerzos tangenciales, de aquí el nombre de ondas de corte. La dilatación y la distorsión producidas en las partículas del medio se aprecian en las figs 6a y 6b respectivamente. En fluidos ($\mu=0$) no existen ondas de corte.

Por el teorema de Helmholtz (16) las ecs 2.2 y 2.3 admiten como solución cualquier campo vectorial $\underset{\sim}{\delta}$ continuo expresado como la combinación de dos potenciales, uno escalar ϕ y otro vectorial $\underset{\sim}{\Psi}$, en la forma

$$\underline{\delta} = \text{grad}\,\phi + \text{rot}\,\underline{\Psi} \tag{2.4}$$

con la condición div $\underline{\Psi} = 0$

Operando con las ecs 2.2 y 2.3, estas se pueden escribir en función de los potenciales como

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

$$\nabla^2\underline{\Psi} = \frac{1}{\beta^2}\,\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

Encontrando funciones ϕ y $\underline{\Psi}$ que satisfagan las ecuaciones diferenciales 2.5 y 2.6 y que cumplan con las condiciones iniciales y de frontera impuestas por un problema específico, este quedará resuelto.

Una solución de tipo general en coordenadas cartesianas para ondas de dilatación o compresión es

$$\phi = A \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y} + \frac{z}{c_z} \mp t \right)\right] \tag{2.7}$$

que representa ondas planas armónicas; donde A = amplitud de la onda, ω = frecuencia circular y c_x, c_y, c_z son velocidades aparentes a lo largo de los ejes coordenados X, Y, Z respectivamente. El signo positivo en t indica ondas que se alejan del origen del sistema de referencia, el signo negativo representa lo contrario. La representación del movimiento sísmico por ondas planas es buena para distancias epicentrales grandes (20), sin embargo tienen el inconveniente de no cumplir con la condición de radiación (39), es decir, no se atenúan con la distancia.

Para ondas rotacionales o de cortante la solución es semejante a la ec 2.7. Al plano de movimiento de las ondas de corte se le llama plano de polarización, de esta manera hay ondas SH (polarizadas en un plano horizontal) y ondas SV (polarizadas en un plano vertical). En la fig 5 se muestra un frente de onda plana con estas dos componentes.

En coordenadas esféricas y habiendo simetría esférica, los potenciales tienen la siguiente forma

$$\phi = \frac{1}{R}\left[F_1(R-\alpha t) + F_2(R+\alpha t)\right] \tag{2.8}$$

donde F_1, F_2 son funciones cualesquiera, y $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Si las funciones F_1, F_2 son periódicas, la ecuación 2.8 produce un tren de ondas esféricas infinito que se alejan y se acercan de un centro común para cada instante t.

Cuando exista simetría axial será provechoso usar coordenadas cilíndricas. Esta simplificación da lugar a que el potencial $\underline{\Psi}$ para ondas de corte se transforme en un potencial escalar ψ (10). Tomando al eje Z como eje de simetría; los potenciales, para ondas armónicas, pueden escribirse como

$$\phi = \left[A_1 H_o^{(1)}(k_1 r) + A_2 H_o^{(2)}(k_1 r)\right] e^{-ikz}\, e^{i\omega t} \tag{2.9}$$

$$\psi = \left[B_1 H_1^{(1)}(k_2 r) + B_2 H_1^{(2)}(k_2 r)\right] e^{-ikz}\, e^{i\omega t} \tag{2.10}$$

donde A_1, A_2, B_1, B_2 son constantes; $H_o^{(1)}$, $H_o^{(2)}$, $H_1^{(1)}$, $H_1^{(2)}$ son funciones de Hankel de orden cero y uno (sub-índices) y de primera y segunda especie (super-índices);

$k_1 = \sqrt{k_\alpha^2-k^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\beta^2-k^2}$, $k_\alpha = \omega/\alpha$, $k_\beta = \omega/\beta$, $k = \omega/c$, c = velocidad de la onda en la dirección Z y r = coordenada radial. Para $|c|>\alpha>\beta$, k_1 y k_2 resultan ser reales y positivas.

Cada término de las ecs 2.9 y 2.10 representa una onda cónica que viaja con una velocidad c sobre el eje Z. Esto se aprecia si expresamos a las funciones de Hankel mediante desarrollos asintó ticos para argumentos grandes (39),

$$\begin{aligned} H_o^{(1)}(k_1 r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}}\, e^{i(k_1 r-\pi/4)} \\ H_o^{(2)}(k_1 r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}}\, e^{-i(k_1 r-\pi/4)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$H_1^{(1)}(k_2r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 r}}\, e^{i(k_2r-3\pi/4)}$$
$$(2.11)$$
$$H_1^{(2)}(k_2r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 r}}\, e^{-i(k_2r-3\pi/4)}$$

En efecto, el segundo término de la ec 2.9 se puede escribir como

$$\frac{A_5}{\sqrt{r}}\, e^{-i(kz+k_1r-\omega t)} \qquad (2.12)$$

donde A_5 = constante.

Si c>0, la expresión anterior representa a una onda de compresión que viaja en las direcciones positivas de r y Z con velocidades ω/k_1 y ω/k = c respectivamente. El segundo término de la ec 2.9 es una onda que se propaga en las direcciones positiva de Z y negativa de r. Si c fuera negativa las direcciones de propagación girarían 180°. Cuando los argumentos de las funciones de Hankel son pequeños el frente de onda tiende a hacerse más agudo hacia el eje Z, tomando una forma parecida a la de un cono (fig 4). Para las ondas de corte la interpretación física de los términos de la ec 2.10 es similar.

Hasta aquí se han presentado sólo algunas soluciones para las ecs 2.5 y 2.6, catálogos más amplios se encuentran en las refs 10, 19 y 45.

2.2 *Ondas de superficie*

En un medio elástico lineal, además de las ondas de cuerpo, pueden existir ondas que se propaguen sobre la superficie libre de un semiespacio. En 1885 Rayleigh (15) lo demostró. Para estas ondas los movimientos se atenúan rápidamente con la profundidad. Omitiendo fuerzas de cuerpo, la solución de Rayleigh para ondas armónicas se da para los potenciales, en coordenadas cartesianas x-y, como

$$\phi = Ae^{-k_{R_1}y}\, e^{-k_R(x-c_r t)} \qquad (2.13)$$

$$\psi = Be^{-k_{R_2}y}\, e^{-k_R(x-c_Rt)} \qquad (2.14)$$

donde c_R = velocidad de las ondas Rayleigh, $k_{R_1} = \sqrt{k_\alpha^2 - k_R^2}$,

$k_{R_2} = \sqrt{k_\beta^2 - k_R^2}$, $k_R = \omega/c_R$

Imponiendo la condición de esfuerzo nulo en la superficie libre del semiespacio, se obtiene una ecuación de tercer grado en c_R, que da valores reales para la condición $0<c_R<\beta<\alpha$. Las ecuaciones para los desplazamientos que resultan, sólo dan valores distintos de cero en las componentes sobre los ejes X y Y, por tanto el problema es bidimensional. La forma de estas ecuaciones describe un movimiento sobre una elipse en sentido retrógrado, como se ilustra en la fig 6d. La relación de desplazamientos vertical a horizontal, cuando $\lambda=\mu$, está cerca de 1.5. Al darse a conocer este resultado, por primera vez, poca gente lo aceptó debido a que la experiencia en registros de temblores indicaba una preponderancia del movimiento horizontal sobre el vertical. En 1911, Love (15) aclaró esta aparente incongruencia, demostrando que durante un sismo pueden generarse ondas SH en la superficie libre de un estrato apoyado continuamente sobre un semiespacio. Tomando el origen de coordenadas en la interfase de los dos medios, con el eje X en la dirección de propagación y el eje Y vertical hacia abajo y suponiendo ondas planas armónicas, el movimiento sobre el eje Z es de la forma

$$w_1 = Ae^{-ik_{L_1}y}\, e^{-ik_L(x-c_Lt)} \qquad (2.15)$$

$$w_2 = [\, Be^{ik_{L_2}y} + Ce^{-ik_{L_2}y}]\, e^{-ik_L(x-c_Lt)} \qquad (2.16)$$

donde w_1 y w_2 son los desplazamientos en el semiespacio y en el estrato respectivamente;

$k_{L_1} = \sqrt{k_{\beta_1}^2 - k_L^2}$, $k_{L_2} = \sqrt{k_{\beta_2}^2 - k_L^2}$, $k_{\beta_1} = \omega/\beta_1$, $k_{\beta_2} = \omega/\beta_2$,

$k_L = \omega/c_L$; β_1 y β_2 son las velocidades de onda de corte en el semiespacio y en el estrato respectivamente; c_L es la velocidad de las ondas de Love; A, B, C son constantes que se valúan imponiendo condiciones de frontera en la interfase. Aplicando condiciones de continuidad en desplazamientos y esfuerzos, entre el estrato y el semiespacio, se obtiene una ecuación trascendente en k_{L_2} que tiene solución real siempre que $\beta_2<c_L<\beta_1$. De esta manera, cuando se tengan velocidades $\beta_2>\beta_1$, no habrá ondas de Love durante un sismo. Esto es poco frecuente ya que por lo general los estratos y valles existentes son de material menos denso y rígido que el del terreno sobre el que se apoyan. El movimiento provocado por una onda de Love se ilustra en la fig 6c.

3. INFLUENCIA DE LAS CONDICIONES LOCALES

El movimiento sísmico del terreno en un sitio está determinado por diversos factores agrupados en características del mecanismo de falla, trayectoria de las ondas y condiciones locales. Cada uno de estos factores tiene mayor o menor influencia sobre los otros en el movimiento del terreno para cada evento sísmico en particular.

En algunos casos las características asociadas al mecanismo de falla, como la cantidad de energía liberada y la geometría y orientación de la falla son las que determinan en gran parte el movimiento sobre el terreno. Los sitios cercanos al foco serían uno de esos casos.

La influencia de las características del mecanismo generador y de la trayectoria de las ondas sobre el movimiento del terreno se ha manifestado en el análisis de registros, hechos en estaciones cercanas entre si situadas en terrenos con condiciones locales semejantes, de eventos originados en una fuente o fuentes proximas (9,26). Sin embargo el número de estudios de este tipo es limitado por la escasez de información.

La incertidumbre que hay acerca de los mecanismos de falla ha originado dudas en la cuantificación de estos factores como, por ejemplo, las diversas correlaciones entre las características de la fuente y los valores medidos en la estación de registro.

Desde la fuente, las ondas sísmicas generadas sufren importantes y diversos cambios debidos a la heterogeneidad y discontinuidad del medio que son más pronunciados cerca de la superficie libre (fig 3) esto determina el tipo de ondas incidentes sobre el terreno y por tanto la respuesta de este. Interpretaciones de los daños concentrados debidos a temblores (13, 23, 37), análisis de registros (13, 18) y mediciones experimentales (8), han permitido concluir que las condiciones locales, es decir, la geología local, las irregularidades en la topografía del lugar o en la geometría de los estratos inmediatamente abajo de la superficie libre, modifican sustancialmente la respuesta del terreno. No obstante, el problema se ha atacado con modelos simplistas como el de la viga de cortante que supone excitación vertical de ondas planas de corte sobre un semiespacio elástico lineal e isotrópico con estratos horizontales apoyados sobre una base rígida.

Se sabe que el contenido de ondas de corte en la perturbación no es siempre predominante (25). A distancias epicentrales grandes y poca profundidad del foco, las ondas de superficie llegan en mayor proporción (9). La incidencia aproximadamente vertical se alcanza cuando existen focos profundos y la rigidéz del suelo va disminuyendo en los estratos superiores. En casos excepcionales se ha visto una buena concordancia entre la teoría unidimensional y las mediciones de los instrumentos (25). Esto está limitado y en general esa teoría da resultados erróneos. De aquí la necesidad de trabajar con modelos en dos y tres dimensiones. Los planteamientos hechos así han considerado el problema como uno de difracción de ondas por irregularidades (cañones, cordilleras, depósitos de materiales distintos) en la superficie de un semiespacio elástico, excitado con ondas planas armónicas. Así se ha concluido que la topografía local modifica el movimiento del terreno apreciablemente cuando la longitud de la onda incidente es comparable con la dimensión característica de la irregularidad (42). Si la superficie libre es sensiblemente horizontal, los suelos blandos cerca de la superficie causan amplificaciones mayores en el movimiento que los suelos duros (26). Las soluciones analíticas que se han desarrollado sólo tratan irregularidades de geometrías sencillas (41, 42, 47, 48). Con otros métodos se han obtenido resultados procediendo numéricamente. Usando diferencias finitas (4) y elementos finitos (2) se ha estudiado la influencia de las condiciones locales. Soluciones dadas en forma de ecuaciones integrales permiten resolver problemas con irregularidades de formas arbitrarias (29-31, 35, 36, 38, 46). Estos modelos han permitido definir características básicas del fenómeno.

Los modelos tridimensionales existentes permiten resolver el problema discretizando el medio con elementos finitos. Tienen dificultades en la modelación correcta de las condiciones de frontera entre el continuo finito para análisis y el resto de la tierra. Para poder obtener resultados confiables se hace necesario, en ocasiones, una discretización más fina, lo que demanda el uso de calculadoras de gran capacidad.

4. FORMULACION DEL PROBLEMA

Sean u_1 y u_2 los desplazamientos en la dirección z en el semiespacio y el depósito, respectivamente. En la propagación de ondas elásticas SH, los desplazamientos satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta_j^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \, , \; j = 1,2 \qquad (4.1)$$

donde $\beta_j = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ = velocidad de propagación de ondas de cortante en el medio j, j = 1,2 se refiere al semiespacio y al depósito respectivamente (fig 7), μ_j = módulo de elasticidad en cortante, ρ_j = densidad del medio y t = tiempo.
Para ondas armónicas de la forma u exp $(i\omega t)$, la ec 4.1 se transforma en la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + k_j^2 u_j = 0 \, , \; j = 1,2 \qquad (4.2)$$

donde $k_j = \omega/\beta_j$, j = 1,2 y ω = frecuencia circular.

Considérese una onda plana de amplitud unitaria que asciende hacia la superficie del semiespacio elástico

$$u^{(i)} = \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y}\right) \qquad (4.3)$$

donde $c_x = \beta_1/\text{sen}\ \gamma$, $c_y = \beta_1/\cos\gamma$, γ = ángulo de incidencia (fig 8). Para que existan condiciones de frontera libre en la superficie del semiespacio, se deberá tener una onda reflejada dada por

$$u^{(r)} = \exp i\omega\left(t - \frac{x}{c_x} - \frac{y}{c_y}\right) \qquad (4.4)$$

Así, la solución de campo libre (en ausencia de la irregularidad) $u^{(0)} = u^{(i)} + u^{(r)}$ se puede escribir como

$$u^{(0)} = 2\cos\left(\frac{\omega y}{c_y}\right) \exp i\omega\left(t - \frac{x}{c_x}\right) \qquad (4.5)$$

Considérese ahora el problema de determinar los desplazamientos tomando en cuenta el depósito aluvial. La solución para el exterior del depósito está dada por

$$u_1 = u^{(0)} + u^{(d)} \qquad (4.6)$$

donde $u^{(d)}$ es la contribución de las ondas difractadas por el depósito.

En el depósito, los desplazamientos u_2 serán los debidos a las ondas refractadas.

Supóngase que tanto $u^{(d)}$ como u_2 se pueden escribir como potenciales de capa simple (44) sobre las curvas C_1 y C_2 (fig 9) definidas en el semiespacio y en un *semiespacio aluvial* respectivamente, así

$$u^{(d)}(P) = \int_{C_1} f_1(Q)\, G_1(P,Q)\, dS_Q \qquad (4.7)$$

donde $Q \in C_1$, $P \in E \cup \partial E$ (fig 9b) y

$$u_2(P) = \int_{C_2} f_2(Q)\, G_2(P,Q)\, dS_Q \qquad (4.8)$$

donde $Q \in C_2$, $P \in R \cup \partial E$ (fig 9c), $f_1(Q)$ y $f_2(Q)$ son funciones desconocidas que se determinarán recurriendo a condiciones de frontera, G_1 y G_2 son las funciones de Green, es decir, satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2 \right) G_j(P,Q) = -\delta\,(|\bar{r} - \bar{r}_o|),\ j = 1,2 \qquad (4.9)$$

con la condición en la superficie libre

$$\frac{\partial G_j}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0\ ,\ j = 1,2 \qquad (4.10)$$

donde $\delta\,(\cdot)$ = delta de Dirac, $\bar{r}$ = vector de posición del punto P y $\bar{r}_o$ = vector de posición del punto Q.

Las funciones de Green están dadas por (19)

$$G_j(P,Q) = \frac{i}{4}\ \{ H_o^{(2)}(k_j r_1) + H_o^{(2)}(k_j r_2) \}\ ,\ j = 1,2 \qquad (4.11)$$

donde $H_o^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de segunda especie y de orden cero, $r_1 = [(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{1/2}$ es la distancia del punto Q (x_o, y_o) al punto P (x, y) y $r_2 = [(x-x_o)^2 + (y+y_o)^2]^{1/2}$ es la distancia del punto P al punto imagen de Q, de coordenadas (x_o, $-y_o$). Las funciones de Hankel en la ec 4.11 representan ondas cilíndricas SH que se propagan hacia el infinito con velocidad β_j y cumplen con la condición de radiación (39). La expresión 4.11 representa el desplazamiento en el punto P debido a una fuente lineal en el punto Q (10).

De las ecs 4.5 y 4.10 podemos decir que tanto u_1 como u_2 satisfacen la condición de frontera libre. Así, las condiciones por satisfacer son de continuidad en la interfase ∂E, que se cumplen si

$$u_1 = u_2 \qquad (4.12)$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \qquad (4.13)$$

donde n = normal a la frontera ∂E (fig 9a).

De las ecs 4.6 y 4.7 el desplazamiento en el semiespacio se puede escribir como

$$u_1(P) = u^{(0)}(P) + \int_{C_1} f_1(Q)\ G_1(P,Q)\ dS_Q \qquad (4.14)$$

donde $P \in E \cup \partial E$.

Sustituyendo las ecs 4.8 y 4.14 en las ecs 4.12 y 4.13, se obtiene

$$\int_{C_1} f_1(Q)\ G_1(P,Q)\ dS_Q - \int_{C_2} f_2(Q)\ G_2(P,Q)\ dS_Q = -\ u^{(0)}(P), \quad (4.15)$$

$$\int_{C_1} f_1(Q)\frac{\partial G_1(P,Q)}{\partial n}\ dS_Q - \alpha \int_{C_2} f_2(Q)\frac{\partial G_2(P,Q)}{\partial n}\ dS_Q = -\ \frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n}; \quad (4.16)$$

$$P \in \partial E$$

donde n = vector normal a la frontera en el punto P, y $\alpha = \mu_2/\mu_1$.

Las expresiones 4.15 y 4.16 forman un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie en las funciones incógnitas $f_1(Q)$ y $f_2(Q)$ (40).

Un procedimiento eficiente para resolver el sistema complejo dado por 4.16 es el método de los cuadrados mínimos (ver Apéndice B), es decir, hacer que

$$\min \left\{ \int_{\partial E} \left(\mid u_1 - u_2 \mid^2 + f \mid \frac{\partial u_1}{\partial n} - \alpha \frac{\partial u_2}{\partial n} \mid^2 \right) dS_P \right\} \quad (4.17)$$

el error cuadrático sea un mínimo, aquí f = factor de normalización.

5. PROCEDIMIENTO NUMERICO

Asígnense a $f_j(Q)$, $j = 1,2$ las formas

$$f_1(Q) = \sum_{m=1}^{M} a_m \ \delta(|Q-Q_m|) \quad , Q, \ Q_m \ \varepsilon \ C_1 \tag{5.1}$$

$$f_2(Q) = \sum_{n=1}^{N} b_n \ \delta(|Q-Q_n|) \quad , Q, \ Q_n \ \varepsilon \ C_2 \tag{5.2}$$

donde M y N son los números de fuentes de magnitudes a_m y b_n en los puntos $Q_m \ \varepsilon \ C_1$ y $Q_n \ \varepsilon \ C_2$, respectivamente (fig 10).

Sustituyendo las ecs 5.1 y 5.2 en las ecs 4.14 y 4.8 se llega a

$$u_1(P) = u^{(0)}(P) + \sum_{m=1}^{M} a_m \ G_1(P,Q_m) \quad , \ P \ \varepsilon \ E \tag{5.3}$$

$$u_2(P) = \sum_{n=1}^{N} b_n \ G_2 \ (P,Q_n) \quad , \ P \ \varepsilon \ R \tag{5.4}$$

de manera análoga se discretizan las ecs 4.15 y 4.16, que impuestas en L puntos de la interfase se obtiene

$$\sum_{m=1}^{M} a_m \ G_1(P_\ell,Q_m) - \sum_{n=1}^{N} b_n \ G_2(P_\ell,Q_n) = - u^{(0)}(P_\ell), \ell=1,2,\ldots,L \tag{5.5}$$

$$\sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial G_1(P_\ell,Q_m)}{\partial n_{P_\ell}} - \alpha \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{\partial G_2(P_\ell,Q_n)}{\partial n_{P_\ell}} = - \frac{\partial u^{(0)}(P_\ell)}{\partial n_{P_\ell}}, \ell=1,2,\ldots,L \quad (5.6)$$

Las ecs 5.5 y 5.6 constituyen un sistema de 2L ecuaciones lineales con M+N incógnitas. Este sistema, que en general será rectangular (2L>M+N) por conveniencia,se resolverá a partir de la condición dada por la ec 4.17 .

El sistema dado por las ecs 5.5 y 5.6 se escribe en una representación matricial como

$$(A)\ \{x\} = \{b\} \quad (5.7)$$

Al aplicar la ec 4.17 a las formas discretas ya descritas, se llega a

$$(A)^*(W)\ (A)\ \{x\} = (A)^*(W)\ \{b\} \quad (5.8)$$

como se demuestra en el Apéndice B. Aquí * denota el hermítico y (W) es una matriz de normalización, en general hermitiana.

Si el conjunto de funciones de las ecs 5.1 y 5.2 involucradas en las ecs 5.5 y 5.6 forman una base completa en el espacio de soluciones para este sistema (ecs 5.5 y 5.6), entonces al aplicar el método de los cuadrados mínimos se obtendrá un resultado que hará que las ecs 5.3 y 5.4 tiendan a las únicas soluciones no triviales de las ecs 4.2 respectivamente para el problema en cuestión, haciendo que M y N sean suficientemente grandes (17).

El sistema de ecuaciones escrito en 5.8 es cuadrado de orden M+N. La nueva matriz de coeficientes es hermitiana por construcción y definida positiva (21). Estas propiedades permiten aplicar un método de eliminación Gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones complejo.

Una vez conocidos los valores de a_m, m = 1,2,...,M,y b_n,n = 1,2,....,N, las ecs 5.3 y 5.4 permiten calcular los desplazamientos en cualquier punto de las regiones E y R respectivamente, y de sus fronteras.

6. RESULTADOS

La formulación numérica del método presentado se implantó en un programa de calculadora en lenguaje FORTRAN, el empleo de este queda a disposición del interesado.

A fin de comprobar la bondad del método, se calcularon los desplazamientos en la superficie libre de un depósito de sección semicircular para diferentes ángulos de incidencia y frecuencias normalizadas

$$\eta = \frac{ka}{\pi} = \frac{2a}{\lambda} \tag{6.1}$$

donde λ = longitud de las ondas incidentes, a = radio del depósito. El significado físico de η es la relación entre el ancho del depósito a la longitud de la onda incidente.

En las tablas 1 y 2 se muestran las partes real e imaginaria de los desplazamientos en 5 puntos de la superficie para ondas con ángulos de incidencia $\gamma = 0°$, $60°$ y frecuencias normalizadas $\eta = 0.5, 1.0$. Se aprecia que al aumentar el número de fuentes, desde 10 hasta 40, la solución converge y tiende a la única distinta de la trivial, obtenida por Trifunac (41) y que también se muestra. La mitad del número de fuentes empleadas se colocaron dentro de R. Las propiedades de los materiales se eligieron $\beta_1/\beta_2 = 2.0$ y $\rho_1/\rho_2 = 1.5$. Las formas adoptadas para las curvas C_1 y C_2 fueron circunferencias cuyos radios son $0.8a$ y $1.2a$ respectivamente. El número de puntos colocados en la frontera varió de 20 a 30.

Para un depósito de sección semielíptica de profundidad $2a$ se obtuvieron los desplazamientos mostrados en la fig 11. Se puede apreciar una concordancia excelente con la solución exacta (48). Superponiendo las gráficas correspondientes en la escala usada (fig 11) la diferencia no es apreciable.

En las figs 12-15 se exhiben espectros de amplitudes en la superficie libre en $|x/a| \leq 1.5$, para depósitos de secciones triangular con taludes a 45° y senoidal de profundidad a, para ángulos de incidencia $\gamma = 0°, 60°$ y frecuencias $\eta = 0.5, 1.0$. Para los cálculos, el vértice inferior del triángulo se suavizó con un segmento de circunferencia tangente a los bordes. En estos ejemplos se usaron 39 puntos en ∂E para $\eta = 0.5$ y 59 para $\eta = 1.0$. En ambos casos se emplearon 30 fuentes colocadas en curvas C_1 y C_2 con formas similares a la del depósito.

Con las mismas propiedades de materiales se calcularon los desplazamientos en la superficie del depósito triangular para incidencia vertical y $\eta = 0.25, 0.5$ usando el método presentado y un análisis de elementos finitos incluyendo las fronteras activas eficientes (Apéndice C). El dominio finito empleado en este análisis se muestra en la fig 16, donde también aparecen las soluciones obtenidas con los dos métodos.

La pendiente de los taludes de los depósitos influye en la respuesta del terreno como se ilustra en la fig 17. Ahí se presentan las amplitudes de los desplazamientos en la superficie de depósitos sinusoidales de diferentes profundidades ante incidencia vertical de ondas de longitud $\lambda = 5h$, donde h = profundidad. Las curvas C_1 y C_2 elegidas en los ejemplos anteriores tienen la forma del depósito correspondiente.

En las figs 11-15 se muestra, junto a los resultados obtenidos con el método expuesto, la solución a que se llega empleando el modelo unidimensional. Como se observa; los resultados difieren notablemente, esto se debe a la imposibilidad del modelo unidimensional de reproducir la interferencia lateral, o la influencia de la pendiente de los taludes del valle o depósito aluvial (fig 17).

Los resultados a que se ha llegado dejan ver grandes variaciones de las amplitudes en distancias cortas, con diferencias que llegan a un orden de magnitud. Al incrementarse la frecuencia el patrón de respuesta es más complicado, es decir, la variación de las amplitudes sufre cambios más grandes. El ángulo de incidencia influye sensiblemente en la respuesta a medida que la frecuencia crece. El rango de parámetros estudiado es limitado, pero permitieron llegar a observaciones similares a las hechas por otros autores (41, 48).

El uso de ondas planas en la solución de campo libre no es la forma más correcta de reproducir el fenómeno. Se podrían usar otros tipos de ondas que cumplieran con la condición de radiación y se obtendrían resultados más realistas.

Un estudio paramétrico de las propiedades de los materiales del semiespacio y el depósito ha sido realizado por Trifunac (41) para depósitos de sección semicircular. Son de esperarse resultados similares para otras geometrias empleando el método propuesto.

La respuesta ante ondas P o SV de depósitos no ha sido publicada, pero se espera obtener resultados que permitan hacer conclu ciones semejantes.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método para resolver la difracción de ondas SH por depósitos aluviales cilíndricos de formas arbitrarias. El método se basa en la formulación del problema por un sistema de ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie con núcleos regulares. La trayectoria de integración es llevada fuera de la frontera para evitar las singularidades de la función de Green y así lograr los núcleos regulares cosa que no sucedería si se utilizara la teoría clásica de las ecuaciones integrales (40). La discretización con fuentes lineales simplifica el tratamiento numérico. Al emplear el método de los cuadrados mínimos se logra que la solución sea estable. Si se demuestra que el conjunto de funciones para formar la solución es completo se podría asegurar que el método de los cuadrados mínimos converge uniformemente a la única solución distinta de la trivial (17).

Aparentemente la elección de las curvas C_1 y C_2 de manera que tengan la forma de la frontera está cercana a la óptima. Sin embargo el asunto merece un estudio más a fondo.

Dentro del rango de parámetros estudiado se pudo observar que la concordancia lograda a partir del método expuesto con las soluciones analíticas (41, 48) fué excelente. Se han comparado los resultados con los de otro método numérico (2) y estos han sido satisfactorios.

Se han hecho algunas aplicaciones del método a problemas relacionados (29-31, 34-36), otras están en proceso (32-33).

El uso de este método en un contexto más general permitirá calcular funciones de transferencia para poder obtener la respuesta de medios con alguna irregularidad específica dada la respuesta del medio sin irregularidades ante una cierta excitación.

El entendimiento de las leyes de amplificación del movimiento sísmico en un lugar es sólo una parte de un problema más complejo que consiste en conocer con un cierto nivel de confianza la sismicidad en un lugar y diseñar espectros que cubran eficientemente las aceleraciones máximas en lugares de interés.

RECONOCIMIENTOS

Se agradece a F J Sánchez-Sesma su valiosa ayuda y continua orientación en el desarrollo de este trabajo. También a G R Aranda la revisión crítica del Apéndice C y las facilidades y ayuda en el uso del programa de calculadora para el análisis de elementos finitos con fronteras activas eficientes.

8. REFERENCIAS

1. Aki, K y Larner, K L, "Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves", *J Geophys Res*, 75 (1970), 933-954

2. Aranda, G R y Ayala, G A, "Modelo numérico eficiente de aplicación en estudios de amplificación dinámica", presentado en la *Conferencia Centro Americana de Ingeniería Sísmica*, San Salvador, El Salvador (ene 1978)

3. Ayala, G A y Aranda, G R, "Boundary Conditions in soil amplifications studies", Contributions of Institute of Engineering to the Sixth World Conference on Earthquake Engineering, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, E-22, México, D F (ene 1977)

4. Boore, D M, "A note on the effect of simple topography on seismic SH-waves", *Bull Seism Soc Am*, 62 (1972), 275-284

5. Bouchon, M, "Effect of topography on surface motion", *Bull Seism Soc Am*, 63 (1973), 715-732

6. Copley, L G, "Integral equation method for radiation from vibrating surfaces", *J Acoust Soc Am*, 41 (1967), 807-816

7. De Mey, G, "Integral equations for potential problems with the source function not located on the boundary", *J Compu-*

ters & Structures, 8, 1 (1978), 113-115

8. Davis, L L y West, L R, "Observed effects of topography on ground motion", *Bull Seism Soc Am*, 63 (1973), 283-298

9. Esteva, L, "Microzoning: models and reality", Contributions of Institute of Engineering to the Sixth World Conference on Earthquake Engineering, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, E-22, México, D F (ene 1977)

10. Ewing, W M, Jardetzky, W S y Press, F, *Elastic waves in layered media*, McGraw-Hill Book Co, Nueva York (1957)

11. Heise, U, "Numerical properties of integral equations in which the given boundary values and the sought solutions are defined on different curves", *J Computers & Structures*, 8, 2 (1978), 199-205

12. Herrera, I y Sabina, F J, "Conectivity as an alternative to boundary integral equations. Construction of bases", *Proc Natl Acad Sci*, USA 75, (1978), 2059-2063

13. Hudson, D E, "Local distribution of strong earthquake motion", *Bull Seism Soc Am*, 62 (1972), 1765-1786

14. Le Pichon,X, Francheteau, J y Bonnin, J, *Plate tectonics, Developments in Geotectonics 6*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam (1973)

15. Love, A E H, *Some problems of Geodynamics*, Dover Publications, Inc, Nueva York (1967)

16. Malvern, L, *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1969)

17. Mikhlin, S G, *Variational methods in mathematical physics*, Pergamon Press Ltd, Oxford (1964)

18. Moraz, B, "A study of earthquake response spectra for different geological conditions", *Bull Seism Soc Am*, 66 (1976), 915-935

19. Morse, P M y Feshbach, H, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo (1953)

20. Newmark, N M y Rosenblueth, E, *Fundamentals of earthquake engineering*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N J (1971)

21. Noble, B, *Aplied linear algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1969)

22. Okamoto, S, *Introduction to earthquake engineering*, University of Tokyo Press (1973)

23. Poceski, A, "The ground effects of the Skopje July 26, 1973 earthquake", *Bull Seism Soc Am*, 59 (1969), 1-22

24. Roesset, J M y Whitman, R V, "Theoretical back ground for soil amplification studies", Rep R69-15, *Dep. Civ Eng*, *M I T*, Cambridge (1969)

25. Rosenblueth, B, "Soil and rock mechanics in earthquake engineering", en *Rock dynamics and geophysical aspects*, G W Borm, ed, *Proc DMSR 77*, *Vol 3*, Karlsruhe, Alemania (sep 5-16, 1977), 3-62

26. Ruiz, S E, "Influencia de las condiciones locales en las características de los sísmos", *Instituto de Ingeniería*, *UNAM*, 387 (1977)

27. Ruiz, S E y Esteva, L, "Efecto de la topografía en los movimientos del suelo provocados por ondas planas P y SV", en *Evaluación del riesgo-efectos locales, etapa I*, Instituto de Ingeniería, UNAM, México (mar 1978)

28. Sabina, F J, Herrera, I e England, R, "Theory of connectivity: aplications to scattering of seismic waves. I. SH wave motion", *Proc of the 2th Int Conf on Microzonation*, *Vol II*, San Francisco, Cal (Nov 26-Dic 1, 1978), 813-824

29. Sánchez-Sesma, F J, "Ground motion amplification due to canyons of arbitrary shape", *Proc of the 2th Int Conf on Microzonation*, *Vol II*, San Francisco, Cal (Nov 26-Dic 1, 1978), 729-738

30. Sánchez-Sesma, F J, y Esquivel, J A, "Ground Motion on alluvial valleys under incident plane SH waves", sometido para su posible publicación en el *Bulletin of the Seismological Society of America* (1978); presentado en el *Twelfth International Symposium on Mathematical Geophysics*, Caracas, Venezuela (Ago 14-24, 1978)

31. Sánchez-Sesma, F J, y Esquivel, J A, Difracción de ondas

SH por túneles", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, México (Nov 1978)

32. Sánchez-Sesma, F J, y Esquivel, J A, "Difracción de ondas SH por túneles con recubrimiento", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, México, en proceso

33. Sánchez-Sesma, F J, y Esquivel, J A, "Movimiento sísmico en cordilleras ante incidencia de ondas planas SH", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, México, en proceso

34. Sánchez-Sesma, F J, Esquivel, J A y Palencia, V J, "Una solución numérica de la ecuación de Laplace", memorias del *XIII Congreso nacional de Matemáticas*, Puebla, Pue (Nov 1978) (en prensa)

35. Sánchez-Sesma, F J y Rosenblueth, E, "Movimiento del terreno en depresiones bidimensionales de forma arbitraria ante incidencia de ondas SH planas", en *Evaluación del riesgo-efectos locales, etapa 1*, Instituto de Ingeniería, UNAM (1978), *Ingeniería Sísmica* (en prensa)

36. Sánchez-Sesma, F J y Rosenblueth, E, "Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves", sometido para su posible publicación en *Int J Earthq Engrg Structl Dyn* (1978)

37. Seed, BH, Idriss, M I y Dezfulian, H, "Relationships between soil conditions and bulding damage in the Caracas earthquake of July 29, 1967", *Rep EERC 70-2, Earthq Engrg Res Center, University of California*, Berkeley (1970)

38. Sills, L B, "Scatering of horizontally polarized shear waves by surface irregularities", *Geophys J Roy Astr Soc, 54* (1978), 319-348

39. Sommerfeld, A, *Partial differential equations in physics*, Academic Press, Inc, Nueva York (1949)

40. Tricomi, F J, *Integral equations*, Interscience Publishers, Inc, Nueva York (1957)

41. Trifunac, M D, "Surface motion of a semi-cylindrical allu-

vial valley for incident plane SH-waves", *Bull Seism Soc Am*, 61 (1971), 1755-1770

42. Trifunac, M D, "Scattering of plane SH-waves by a semi-cylindrical canyon", *Int J Earthq Engng Structl Dyn*, 1 (1973), 267-281

43. Tsai, N C, "Influence of local geology on earthquake ground motion", *Earthq Eng Res Lab California, Institute of Technology*, Pasadena (1969)

44. Ursell, F, "On the exterior problems of acoustics", *Proc Camb Phil Soc*, 74 (1973), 117-125

45. White, J E, *Seismic waves: radiation, transmission, and attenuation*, Mc Graw-Hill Book Co, Nueva York (1965)

46. Wong, H L y Jennings, P C, "Effects of canyon topography on strong ground motion", *Bull Seism Soc Am*, 65, 5 (1975), 1239-1257

47. Wong, H L y Trifunac, M D, "Scattering of plane SH waves by a semielliptical canyon", *Int J Earthq Engng Structl Dyn*, 3 (1974), 157-169

48. Wong, H L y Trifunac, M D, "Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves", *Bull Seism Soc Am*, 64, 5 (1974), 1389-1408

$\eta = 0.50 \qquad \gamma = 0.00$

x/A	M+N = 10		20		40		EXACTA	
-1.50	2.51740	0.44418	2.63792	0.26835	2.64354	0.23499	2.64598	0.22907
-0.50	0.41363	-1.75535	0.47932	-1.93878	0.49238	-1.93503	0.49476	-1.93391
0.00	-0.50140	-3.06954	-1.13766	-3.36825	-1.12221	-3.35800	-1.12101	-3.35702

$\eta = 0.50 \qquad \gamma = 60.00$

x/A	M+N = 10		20		40		EXACTA	
-1.50	-0.18567	2.11381	-0.02121	2.18573	-0.04130	2.22933	-0.04786	2.24289
-0.50	1.50291	1.34976	1.91198	2.24055	1.84655	2.23157	1.82760	2.23090
0.00	-1.29085	-2.88474	-1.16893	-3.30488	-1.13173	-3.34796	-1.12101	-3.35702
0.50	-3.45420	-3.99500	-3.97428	-5.03558	-3.92610	-5.04639	-3.90959	-5.05055
1.50	-1.22224	0.13552	-1.58554	0.33224	-1.61351	0.34767	-1.61882	0.35060

Tabla 1. Comparación de los desplazamientos en puntos de la superficie libre de un depósito con sección semicircular, para ángulos de incidencia $\gamma = 0°, 60°$ y frecuencia normalizada $\eta = 0.5$

$\eta = 1.00$ $\gamma = 0.00$

X/A	M+N = 10		20		40		EXACTA	
-1.50	2.40785	-0.12015	2.65178	-0.40585	2.69800	-0.38358	2.70021	-0.37559
-0.50	-0.35850	0.05865	-1.14590	-1.16154	-1.17215	-1.36471	-1.15422	-1.37283
0.00	-4.56906	-0.25142	-3.44268	1.07773	-3.38333	1.36321	-3.40990	1.37184

$\eta = 1.00$ $\gamma = 60.00$

X/A	M+N = 10		20		40		EXACTA	
-1.50	-1.39374	-0.91381	-1.12391	-0.55490	-1.01348	-0.56602	-1.01822	-0.56662
-0.50	1.20146	-1.89302	3.31789	-2.02326	3.47016	-1.63594	3.41995	-1.61985
0.00	-2.86046	0.63126	-3.43897	1.30142	-3.42274	1.37293	-3.40990	1.37184
0.50	1.55232	1.78512	1.04548	2.19135	0.83455	1.75997	0.86421	1.74011
1.50	-1.00250	0.35123	-1.17474	1.11978	-1.27677	1.26445	-1.28454	1.25965

Tabla 2. Comparación de los desplazamientos en puntos de la superficie libre de un depósito con sección semicircular, para ángulos de incidencia $\gamma = 0°, 60°$ y frecuencia normalizada $\eta = 1.0$

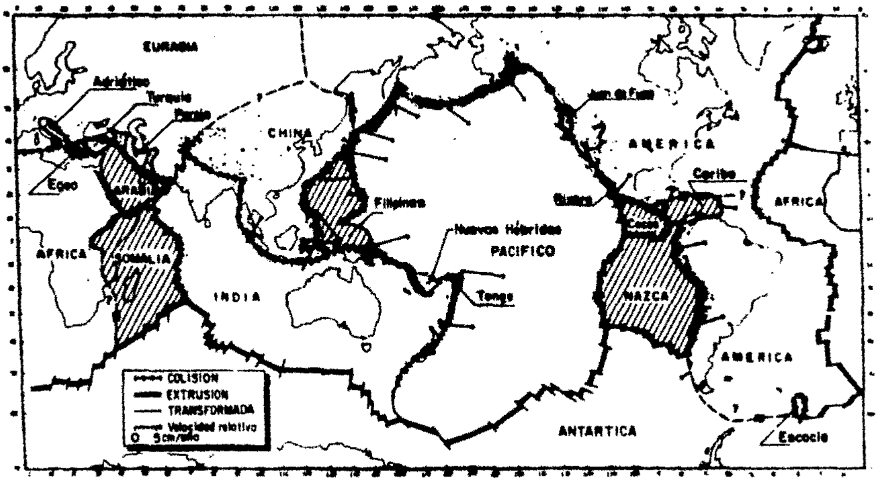


Fig 1. Configuración actual de las placas litosféricas y sismicidad en el mundo (1969). Las flechas indican la dirección de movimientos de las placas (Le Pichon et al, 1973)

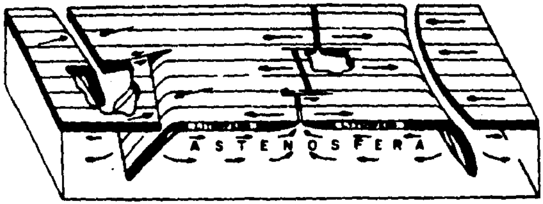


Fig 2. Diagrama esquemático de la tectónica de placas en un plano de la tierra. Las flechas indican la dirección de movimientos de las placas (Le Pichon et al, 1973)

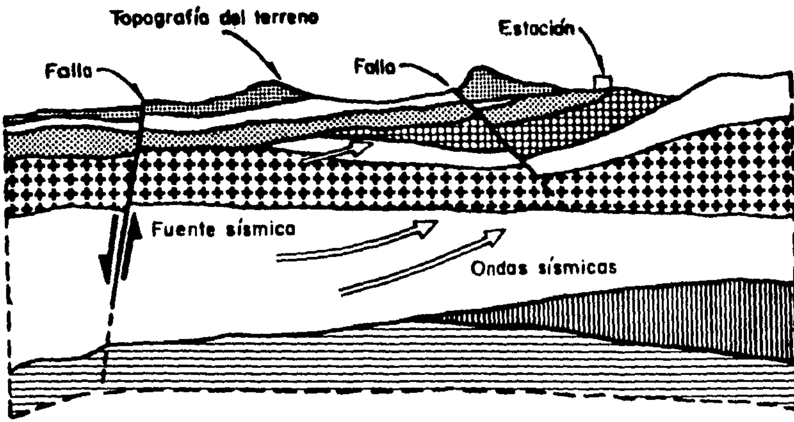


Fig 3. Corte geológico típico

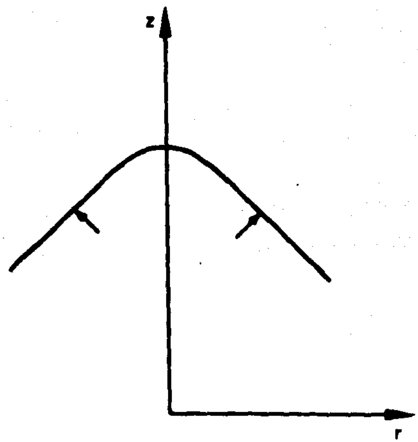


Fig 4. Frente de una onda cónica

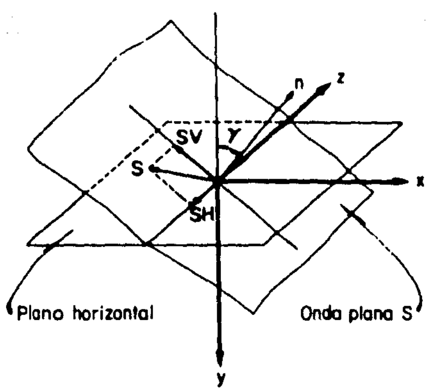


Fig 5. Frente de una onda plana de corte S y sus componentes horizontal SH y vertical SV

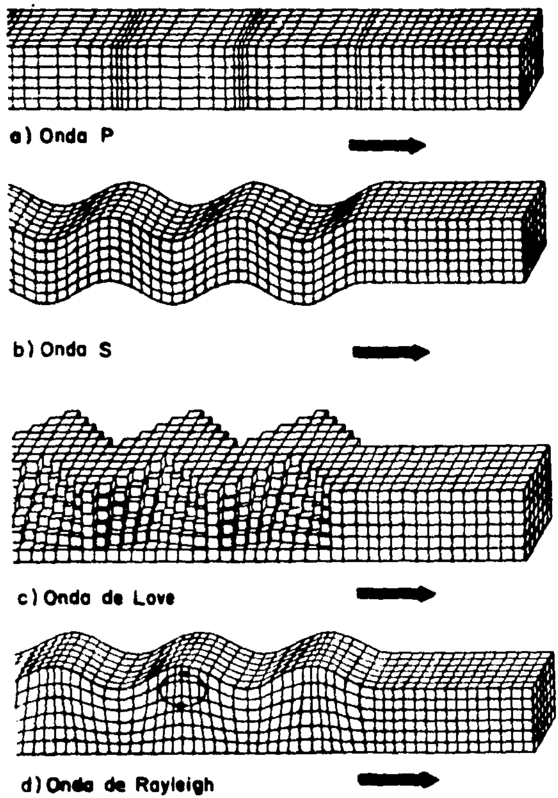


Fig 6. Diagrama esquemático de cuatro tipos de ondas sismicas. (a) onda de compresión. (b) onda de cortante. (c) onda de Love. (d) onda de Rayleigh. La flecha gruesa indica la dirección de propagación

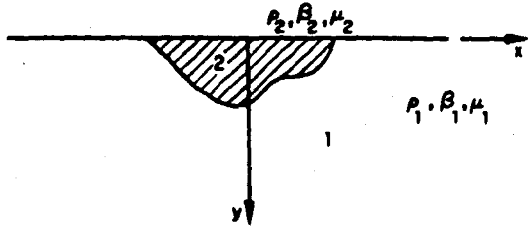


Fig 7. Semiespacio y depósito aluvial

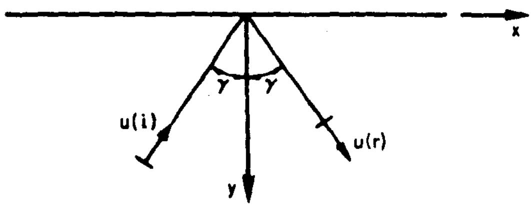


Fig 8. Ondas SH incidente y reflejada, solución de campo libre

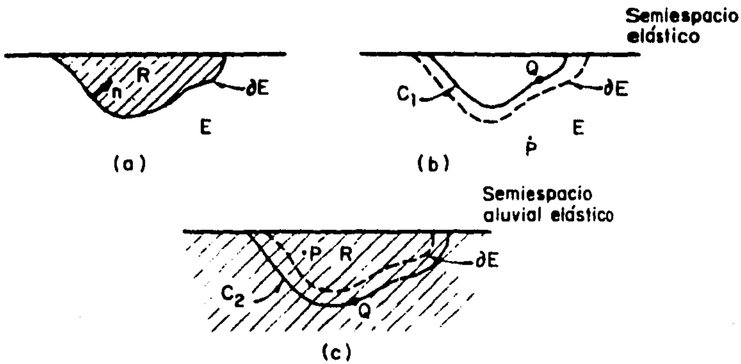
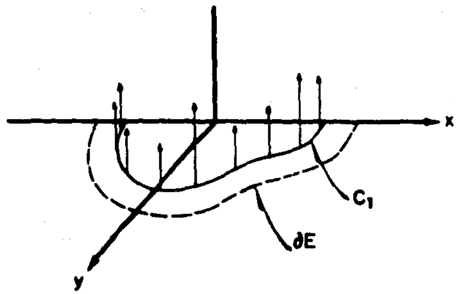
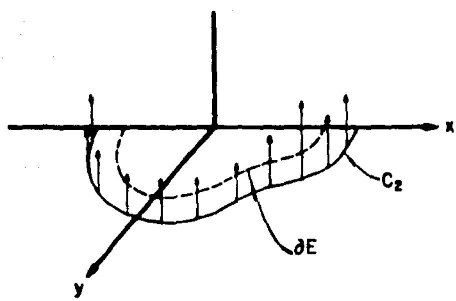


Fig 9. Definición de las regiones y curvas



(a)



(b)

Fig 10. Diagrama de la distribución y amplitudes de las fuentes. (a) fuentes sobre C_1. (b) fuentes sobre C_2

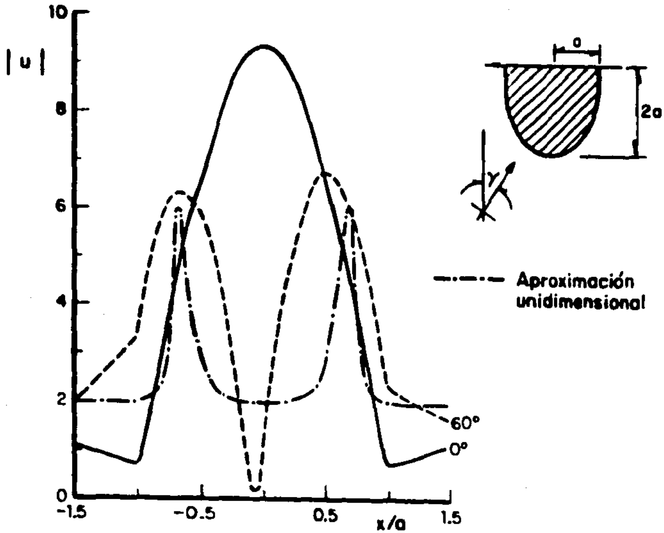


Fig 11. Amplitudes de los desplazamientos en la superficie libre para un depósito semieliptico

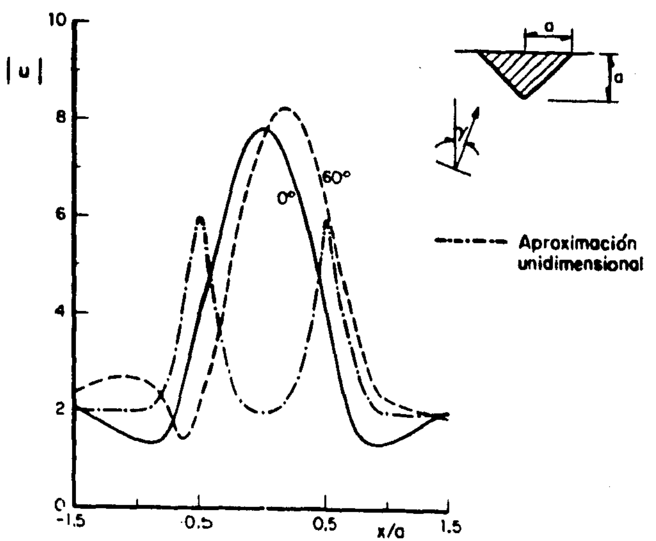


Fig 12. Amplitudes de los desplazamientos sobre la superficie libre para un depósito triangular con $\eta = 0.5$ y $\gamma = 0°, 60°$

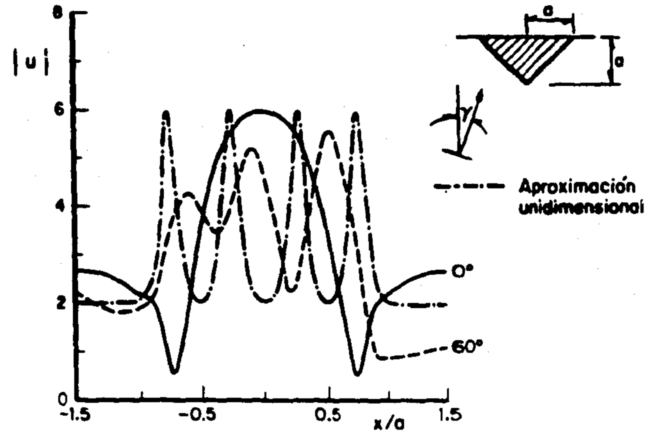


Fig 13. Amplitudes de los desplazamientos sobre la superficie libre para un depósito triangular con $\eta = 1.0$ y $\gamma = 0°, 60°$

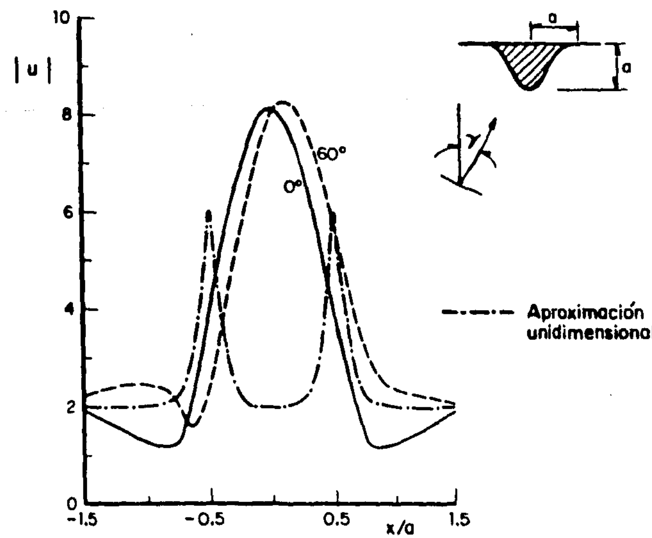


Fig 14. Amplitudes de los desplazamientos sobre la superficie libre para un depósito senoidal con $\eta = 0.5$ y $\gamma = 0°, 60°$

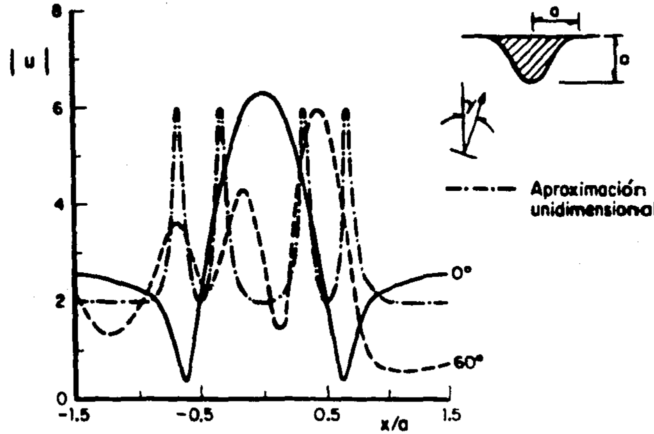


Fig 15. Amplitudes de los desplazamientos sobre la superficie libre para un depósito senoidal con η = 1.0 y γ = 0°, 60°

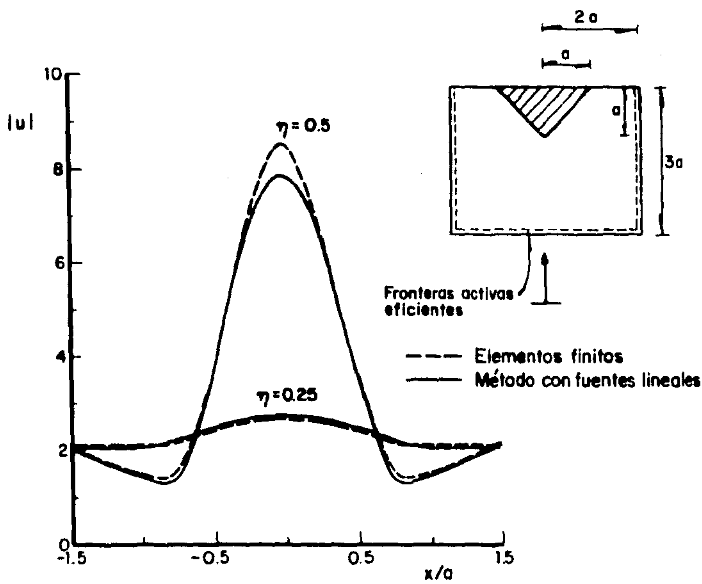


Fig 16. Comparación de las amplitudes obtenidas usando el método presentado y el análisis de elemento finito con las fronteras activas eficientes (Aranda y Ayala, 1978). Depósito triangular, incidencia vertical y η = 0.25, 0.5

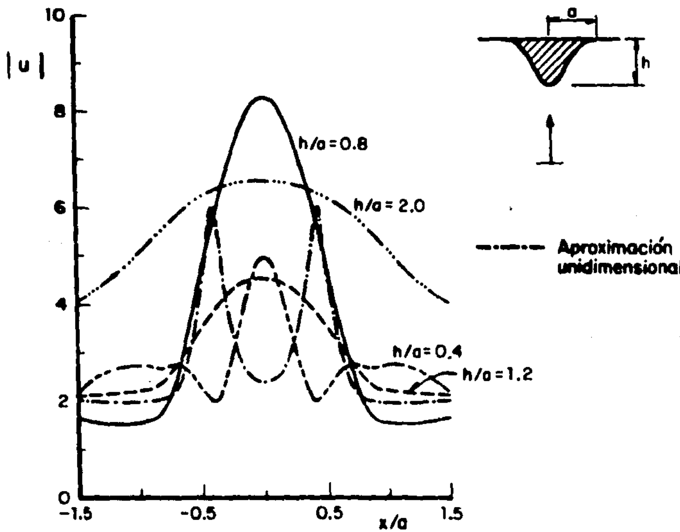


Fig 17. Amplificaciones de desplazamientos en la superficie libre de un depósito con sección senoidal con $\lambda = 5h$ para $h/a = 0.4, 0.8, 1.2, 2.0$

APENDICE A. NOTACION

En este escrito se emplean los siguientes símbolos:

(A)	= matriz de coeficientes
$(A)^{+}$	= matriz independiente del ángulo de incidencia para las ondas reflejadas
$(A)^{++}$	= matriz independiente del ángulo de incidencia para las ondas incidentes
a_m	= magnitud de la fuente m en C_1
a	= semiancho del depósito aluvial
$\underset{\sim}{B}$	= vector de fuerzas de cuerpo
$\{b\}$	= vector de términos independientes
b_n	= magnitud de la fuente n en C_2
(C_{ad})	= matriz de amortiguamiento viscoso para las ondas incidentes
$(C_{ab}), (C_{ef})$	= matrices de amortiguamiento viscoso para las ondas reflejadas
C_1	= curva definida en E
C_2	= curva definida en R
c	= velocidad de propagación de una onda sísmica
c_x	= velocidad aparente en el eje X
c_y	= velocidad aparente en el eje Y
c_z	= velocidad aparente en el eje Z
c_L	= velocidad de la onda de Love
c_R	= velocidad de la onda de Rayleigh
E	= semiespacio, error o residuo
e	= base de los logaritmos naturales
F	= función prescrita en H
F_1, F_2	= funciones cualesquiera en coordenadas esféricas
f_j	= función desconocida en el medio j, j=1,2
f	= factor de normalización
$f(t)$	= función forzante
G_j	= función de Green en el medio j, j=1,2
H	= espacio complejo

$H_o^{(1)}$, $H_1^{(1)}$	=	funciones de Hankel de primera especie y ordenes cero y uno
$H_o^{(2)}$, $H_1^{(2)}$	=	funciones de Hankel de segunda especie y ordenes cero y uno
h	=	profundidad del depósito aluvial
i	=	$\sqrt{-1}$, unidad imaginaria
(K)	=	matriz de rigideces del medio discretizado
k	=	número de onda
k_α	=	ω/α = número de onda de compresión
k_β	=	ω/β = número de onda de corte
k_{β_j}	=	k_j = número de onda de cortante en el medio j, j=1,2
k_L	=	ω/c_L = número de onda de Love
k_{L_1}	=	$(k_{\beta_1}^2 - k_L^2)^{1/2}$
k_{L_2}	=	$(k_{\beta_2} - k_L^2)^{1/2}$
k_R	=	ω/c_R = número de onda de Rayleigh
k_{R_1}	=	$(k_\alpha^2 - k^2)^{1/2}$
k_{R_2}	=	$(k_\beta^2 - k^2)^{1/2}$
k_1	=	$(k_\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ en las ondas cónicas
k_2	=	$(k_\beta^2 - k^2)^{1/2}$ en las ondas cónicas
L	=	número de puntos en ∂E
(M)	=	matriz de masas del medio discretizado
M	=	número de fuentes en C_1
N	=	número de fuentes en C_2
n	=	normal en ∂E
P	=	punto en ∂E o en R o en E
Q	=	punto sobre C_1 o C_2
Q_m, Q_n	=	puntos de localización de las fuentes m, n sobre las curvas C_1, C_2 respectivamente
R	=	región que comprende el depósito aluvial, coordena radial en coordenadas esféricas
r	=	coordenada radial en coordenadas cilíndricas
$\bar{r}$	=	vector de posición del punto P (x,y)

$\bar{r}_o$ = vector de posición del punto Q (x_o, y_o)

r_1 = distancia del punto P (x,y) al punto Q (x_o, y_o)

r_2 = distancia del punto P (x,y) al punto Q $(x_o, -y_o)$

T = operador lineal contenido en H

t = tiempo

u = desplazamiento del punto P

$u^{(i)}$ = desplazamiento de una onda incidente

$u^{(r)}$ = desplazamiento de una onda reflejada

$u^{(o)}$ = desplazamiento de campo libre

$u^{(d)}$ = desplazamiento debido a las ondas difractadas

u_M = desplazamiento aproximado

u_j = desplazamiento en el medio j, j=1,2

$\dot{\underset{\sim}{U}}$ = vector de velocidades en un punto del medio discretizado

$\underset{\sim}{V}$ = vector de desplazamientos en el medio discretizado

$\dot{\underset{\sim}{V}}, \dot{\underset{\sim}{V}}^+, \dot{\underset{\sim}{V}}^-, \dot{\underset{\sim}{V}}_E, \dot{\underset{\sim}{V}}_{CL}$ = vectores de velocidades en el medio discretizado

$\ddot{\underset{\sim}{V}}$ = vector de aceleraciones en el medio discretizado

(W) = matriz de normalización

w_j = desplazamiento en el medio j, j=1,2, debido a ondas Love

$\{x\}$ = vector de incógnitas

x, y, z = coordenadas cartesianas sobre los ejes X, Y, Z respectivamente

$\alpha = \mu_2/\mu_1$, $\sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$ = velocidad de ondas de compresión

$\beta_j = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ = velocidad de ondas de corte en el medio j, j=1,2

γ = ángulo de incidencia

$\underset{\sim}{\delta}$ = vector de desplazamientos

$\delta(\cdot)$ = delta de Dirac

$\eta = ka/\pi$ = frecuencia normalizada

λ = longitud de onda

μ_j = módulo de elasticidad de cortante en el medio j, j=1,2

ν = viscosidad

ρ_j = densidad del medio j, j=1,2

$\underset{\sim}{\sigma}$	=	vector de esfuerzos en un punto del medio discretizado
ϕ	=	potencial escalar para ondas de compresión
ϕ_m	=	constante m
$\underset{\sim}{\Psi}$	=	potencial vectorial para ondas de cortante
Ψ_m	=	función m de la sucesión $\{\Psi_m\}$ definida en Ω
ψ	=	potencial escalar para ondas de corte
ω	=	frecuencia circular
∂E	=	interfase entre R y E
∇^2	=	operador de Laplace

APENDICE B. METODO DE LOS CUADRADOS MINIMOS

Se quiere hallar u = x, solución de la ecuación

$$Tx = F \tag{B.1}$$

donde T es un operador lineal, x es la incógnita y F una función prescrita. T y F están contenidos en un espacio complejo H.

Una solución aproximada se puede construir como

$$u_M = \sum_{m=1}^{M} \phi_m \Psi_m \tag{B.2}$$

donde ϕ_m son constantes desconocidas y $\{\Psi_M\}$ es una sucesión de funciones definidas en un dominio Ω con ciertas condiciones por cumplir, que se comentarán más adelante.

Sustituyendo la ec B.2 en la B.1, se obtiene

$$\sum_{m=1}^{M} \phi_m \left(T\Psi_m\right) = F \tag{B.3}$$

que se puede escribir, aplicando B.3 a L puntos en Ω, como

$$A_{\ell,m}\, \phi_m = F_\ell \tag{B.4}$$

$$\ell = 1,2,\ldots,L$$
$$m = 1,2,\ldots,M$$

donde $A_{\ell,m} = \left(T\Psi_m\right)_\ell$

Se llama a E el residuo o error que existe en B.4. Se resolverá este sistema rectangular complejo de manera que $|E|^2$ sea mínimo, esto es

$$\min\{\,|E|^2\} = \min\{\,|A_{\ell,m}\,\phi_m - F_\ell|^2\} \tag{B.5}$$

Se sabe que

$$|E|^2 = \left(\overline{A}_{\ell,k}\,\overline{\phi}_k - \overline{F}_\ell\right)\left(A_{\ell,m}\,\phi_m - F_\ell\right) \tag{B.6}$$

donde la testa indica el complejo conjugado. Desarrollando B.6 se obtiene

$$|E|^2 = \phi_k^* A_{k,\ell}^* A_{\ell,m} \phi_m - F^* A_{\ell,m} \phi_m - \phi_k^* A_{k,\ell}^* F_\ell + |F|^2 \qquad (B.7)$$

aquí * indica el hermítico, es decir, el traspuesto del complejo conjugado.

Para conseguir B.5 se aplica a B.7 la condición

$$\frac{\partial |E|^2}{\partial \phi_k^*} = 0 \qquad (B.8)$$

obteniéndose

$$A_{k,\ell}^* A_{\ell,m} \phi_m = A_{k,\ell}^* F_\ell \qquad (B.9)$$

que es la condición buscada.

La sucesión $T\{\Psi_m\}$ debe ser completa, esto es, que para cualquier u y un número $\varepsilon>0$ dado, es posible encontrar un entero positivo M y constantes ϕ_m, $m = 1,2,\dots,M$, tales que

$$|Tu - Tu_M| < \varepsilon \qquad (B.10)$$

Esto es equivalente a que $\{\Psi_M\}$ sea una base completa y el operador T sea definido positivo, acotado por abajo y tenga inverso, esto es, que exista T^{-1} y la solución de la ec B.1 sea única y distinta de la trivial; entonces al aplicar el método de los cuadrados mínimos se demuestra que $Tu_m \to F$ cuando $M \to \infty$, es decir, el método converge a la única solución (17), $u_M \to u$ cuando $M \to \infty$.

APENDICE C. FRONTERAS ACTIVAS EFICIENTES

En la determinación de la respuesta sísmica en depósitos de suelo con modelos numéricos que representan al medio, con elementos finitos por ejemplo, se tiene el problema de definir adecuadamente las fronteras del dominio de análisis, pues se pretende evitar o minimizar la reflexión artificial que se genera en ellas por el paso de las ondas.

Se han desarrollado condiciones de frontera, con base en la teoría unidimensional de ondas de corte, que permiten el paso libre de las ondas, tanto las que salen del dominio en estudio como las que entran en él. Esta formulación se ha designado como *fronteras activas* (3) y está limitada a incidencia de ondas planas en dirección normal a las fronteras activas.

El incluir ondas con direcciones de propagación cualesquiera da lugar a nuevas condiciones de frontera, a estas se les llama *fronteras activas eficientes* (2). El establecimiento de estas fronteras se hace partiendo de la ecuación

$$\underset{\sim}{\sigma} = (A)\ \dot{\underset{\sim}{U}} \qquad (C.1)$$

donde $\underset{\sim}{\sigma}$ = vector de esfuerzos en el punto considerado, (A) = matriz que depende de las propiedades del material y del ángulo de incidencia de las ondas y $\dot{\underset{\sim}{U}}$ = vector de velocidades.

La manera de incluir eficientemente el ángulo de incidencia es aproximando a la matriz (A) de la ec C.1 con matrices independientes de ese ángulo: $(A)^{+}$ para las ondas que salen del dominio finito de análisis y $(A)^{++}$ para las ondas que penetran en él. Estas matrices se obtienen minimizando el error derivado de esa aproximación con el método de los cuadrados mínimos. Las condiciones así encontradas se dan, para ondas de cuerpo y de superficie, como restricciones en los esfuerzos normales y tangenciales en las fronteras ficticias, tanto para ondas incidentes como para ondas que se alejan.

Los desarrollos de estas expresiones se pueden consultar en el trabajo de Aranda y Ayala (2), del cual este Apéndice es un extracto.

Aplicando las ideas expuestas a un análisis de elemento finito, este se hace a partir de la ecuación de equilibrio dinámico

$$(M)\ddot{\underset{\sim}{V}} + (K)\underset{\sim}{V} = (C_{ad})\dot{\underset{\sim}{V}}^{+} - (C_{ab})\dot{\underset{\sim}{V}}^{-} \tag{C.2}$$

donde (M) = matriz de masas; (K) = matriz de rigideces; $\ddot{\underset{\sim}{V}}$, $\underset{\sim}{V}$ = vectores de aceleraciones y de desplazamientos, respectivamente; (C_{ad}), (C_{ab}) = matrices de amortiguamiento viscoso obtenidas de la inclusión de las condiciones en las fronteras activas eficientes; $\dot{\underset{\sim}{V}}^{+}$, $\dot{\underset{\sim}{V}}^{-}$ = vectores de velocidades en las fronteras ficticias. (C_{ad}) y $\dot{\underset{\sim}{V}}^{+}$ están asociados con ondas que inciden en el dominio, mientras que (C_{ab}) y $\dot{\underset{\sim}{V}}^{-}$ se refieren a ondas que salen de ese dominio.

Para incluir la perturbación producida por las irregularidades topográficas se añade a $\dot{\underset{\sim}{V}}^{-}$ un vector $\dot{\underset{\sim}{V}}_E$ de características desconocidas, que se expresa como

$$\dot{\underset{\sim}{V}}_E = \dot{\underset{\sim}{V}} - \dot{\underset{\sim}{V}}_{CL} \tag{C.3}$$

donde $\dot{\underset{\sim}{V}}$ = vector de velocidades y $\dot{\underset{\sim}{V}}_{CL}$ = vector de velocidades debidas al campo libre (en un medio homogéneo sin irregularidades topográficas). Finalmente la ec C.2 se escribe como

$$(M)\ddot{\underset{\sim}{V}} + (C_{ef})\dot{\underset{\sim}{V}} + (K)\underset{\sim}{V} = (C_{ad})\dot{\underset{\sim}{V}}^{+} - (C_{ab})\dot{\underset{\sim}{V}}^{-} + (C_{ef})\dot{\underset{\sim}{V}}_{CL} \tag{C.4}$$

donde (C_{ef}) se obtiene como (C_{ad}) y (C_{ab}) de las condiciones en las fronteras ficticias.

A partir de la ec C.4 es posible conocer el campo de desplazamientos en el dominio finito analizado, procediendo numéricamente e implementando dicha ecuación a un programa de calculadora.

El modelo es aplicable a problemas en dos y tres dimensiones, en medios elásticos o en otros materiales con relaciones constitutivas conocidas.

APENDICE D. MODELO UNIDIMENSIONAL

En el modelo de viga de cortante, el depósito aluvial queda representado por un estrato de espesor uniforme apoyado sobre un semiespacio elástico. Sólo se consideran ondas de corte con dirección de propagación vertical.

La ecuación de equilibrio dinámico en el modelo unidimensional es (24)

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial x^2} + f\ (t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{D.1}$$

donde $u = u(x,t)$ = desplazamiento en el medio, $f(t)$ = función forzante, μ = módulo de elasticidad al corte, ν = viscosidad del medio, ρ = densidad del medio, t = tiempo y x = coordenada de espacio.

Si el movimiento es armónico, el desplazamiento está dado por

$$u = g(x)\ e^{i\omega t} \tag{D.2}$$

donde ω = frecuencia circular de la excitación.

Sustituyendo a la ec D.2 en la D.1, sin considerar viscosidad, se obtiene

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + k^2 g(x) = 0 \tag{D.3}$$

donde $k = \omega/\beta$, $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ = velocidad de ondas de corte.

Resolviendo la ec D.3 y sustituyendo la solución en D.2, se obtiene

$$u(x,t) = Ae^{i(kx+\omega t)} + Be^{-i(kx-\omega t)} \tag{D.4}$$

A, B son constantes y se determinan a partir de condiciones de frontera. El primer término de la ec D.4 representa a una onda incidente de amplitud A, el segundo término es la onda reflejada de amplitud B.

Considérese un estrato de espesor uniforme = h, apoyado sobre un semiespacio. Las propiedades de los materiales en el semiespacio y en el estrato son G_1, ρ_1 y G_2, ρ_2 respectivamente. Entonces por D.4 los desplazamientos en los dos medios serán

$$u_1 = A_1 e^{i(k_1 x + \omega t)} + B_1 e^{-i(k_1 x - \omega t)} \quad \text{(D.5)}$$

$$u_2 = A_2 e^{i(k_2 x + \omega t)} + B_2 e^{-i(k_2 x - \omega t)} \quad \text{(D.6)}$$

donde x = coordenada espacial, medida desde la superficie libre del estrato hacia abajo; $k_j = \omega/\beta_j$, $\beta_j = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$, j = 1,2 referidos al semiespacio y al estrato respectivamente.

Cumpliendo condiciones de frontera en la interfase, y en la superficie libre, es decir, haciendo

$$u_1 = u_2 \,, \quad \text{(D.7)}$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \qquad \text{en } x = h \quad \text{(D.8)}$$

$$\text{y} \quad \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \qquad \text{en } x = 0 \quad \text{(D.9)}$$

se obtiene

$$u_2 = \frac{2e^{ik_1 h} \cos(k_2 x)}{\cos(k_2 h) + i(\alpha\beta_1/\beta_2)\,\mathrm{sen}(k_2 h)}\, e^{i\omega t} \quad \text{(D.10)}$$

donde $\alpha = \mu_2/\mu_1$. Interesará el valor de la amplitud en la superficie libre, este es

$$|u_2| = 2\left[\cos^2(k_2 h) + (\alpha\beta_1/\beta_2)^2\,\mathrm{sen}^2(k_2 h)\right]^{-1/2} \quad \text{(D.11)}$$

Cuando las irregularidades son sensiblemente horizontales y las ondas inciden verticalmente, el análisis unidimensional dará buenos resultados. Pero, si las pendientes son pronunciadas y la profundidad del depósito es comparable con su ancho, la interferencia lateral será significativa y esto hace a la ec D.11 inválida.