UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

AMPLIFICACION DE ONDAS RAYLEIGH POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A

HUGO DIEGO CUADROS ABAD

MEXICO, D. F. 1979

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-1-283

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Al Pasante señor HUGO DIEGO CUADROS ABAD,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Dr. Luis Esteva, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"AMPLIFICACION DE ONDAS RAYLEIGH POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO"

1. Introducción y objetivos. Antecedentes
2. Conceptos básicos de la teoría del elemento finito
3. Planteamiento del problema. Propagación de onda. Condiciones de frontera.
4. Casos por analizar
5. Análisis y resultados
6. Conclusiones y recomendaciones

Apéndices. Programa de computadora. Diagrama de flujo. Instructivos.

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 19 de septiembre de 1978
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBM/ser

AMPLIFICACION DE ONDAS RAYLEIGH POR EL METODO

DEL ELEMENTO FINITO

1. INTRODUCCION Y OBJETIVOS. ANTECEDENTES

2. CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DEL ELEMENTO FINITO PARA UN ESTADO DE DEFORMACION PLANA.

2.1 Conceptos Generales

2.2 Formulación Directa de las Características del Elemento Finito Triangular.

2.2.1 Función de desplazamientos

2.2.2 Deformaciones

2.2.3 Esfuerzos

2.2.4 Matriz de rigidez. Fuerzas nodales equivalentes

2.2.5 Fuerzas de cuerpo

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. PROPAGACION DE ONDA. CONDICIONES DE FRONTERA.

3.1 Ecuación de Equilibrio Dinámico.

3.2 Solución de la Ecuación de Equilibrio Dinámico.

3.3 Propagación de Ondas

3.3.1 Medio elástico, infinito, homogéneo e isótropo

3.3.2 Solución de las ecuaciones de movimiento. Ondas de compresión y ondas de cortante

3.3.3 Ondas en un semiespacio elástico. Ondas de Rayleigh

3.4 Condiciones de Frontera.

4. CASOS POR ANALIZAR

4.1 Promontorios

4.2 Depresiones

5. RESULTADOS

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

APENDICE.

1. INTRODUCCION Y OBJETIVOS. ANTECEDENTES.

Esta tesis es producto de una investigación realizada en el Instituto de Ingeniería, en la cual tuve la oportunidad de participar como becario de dicha institución, bajo la supervisión del Dr. Luis Esteva M.

La influencia que la topografía tiene en la respuesta sísmica, ha sido reconocida por mucho tiempo, debido a daños causados por sismos en zonas de topografía accidentada. Los intentos por predecir por medios teóricos dicha influencia data de los últimos años.

La ref (1) presenta una revisión crítica de la literatura existente sobre el tema en cuestión, donde también se proponen estudios enfocados a predecir la influencia de las condiciones locales en las características de los movimientos sísmicos.

Diversos modelos analíticos han sido empleados (ref 1,2) para la obtención de la respuesta sísmica ante diversos tipos de solicitación. La mayor parte de dichos modelos consideran únicamente ondas de cuerpo incidiendo en la vecindad de irregularidades topográficas.

En este trabajo se presenta la influencia que tienen ciertos accidentes topográficos en el movimiento sísmico para el caso de ondas superficiales de Rayleigh, mostrando los parámetros que hacen importante tal influencia.

En la solución del problema se utilizó la teoría del elemento finito. Esta ofrece algunas ventajas sobre otros métodos a pesar de ciertos inconvenientes. Entre las ventajas puede mencionarse la posibilidad de considerar, mediante análisis de respuesta -- paso a paso, el comportamiento no lineal de los materiales incluidos en la zona finita estudiada. Dentro de los problemas en la implantación del método, se encuentran principalmente la formulación de las condiciones de frontera y el tamaño del modelo seleccionado; asimismo, el tamaño de los elementos de dicho modelo fija un límite superior a la frecuencia de excitación, al impedir que se propaguen frecuencias altas.

Es importante que en los lugares donde el movimiento sísmico esté afectado significativamente por las condiciones topográficas locales, se tome en cuenta tal influencia en los espectros de diseño sísmico.

2. CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DEL ELEMENTO FINITO PARA UN ESTADO DE DEFORMACION PLANA.

2.1 Conceptos Generales.

Las principales hipótesis (ref 3) en las que se apoya la teoría del elemento finito con base en una formulación de desplazamientos, son las siguientes:

a) Se idealiza el medio continuo en subdominios interconectados por puntos nodales. La forma de tales subdominios es, — dentro de ciertos lineamientos, arbitraria.

b) Se selecciona un conjunto de funciones para definir únicamente el estado de desplazamientos dentro de cada " elemento finito ", en términos de los desplazamientos nodales. Estos últimos serán las incógnitas básicas del problema.

c) Las funciones de desplazamiento definirán ahora el estado de deformación dentro del elemento en términos de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material nos definirán el estado de esfuerzos a través del elemento y por lo tanto también en sus fronteras.

Claramente el grado de aproximación en la respuesta así - obtenida, dependerá del tamaño y la forma de los elementos empleados, así como también de la función de desplazamientos escogida.

Puede demostrarse (ref 3) que el método del elemento finito es equivalente a la minimización de la energía potencial total del sistema, en términos del campo de desplazamiento prescrito. -- Si la selección de dicho campo es adecuada, entonces se obtiene — convergencia al resultado correcto.

Las funciones de desplazamientos que se escojan deben representar en la forma más aproximada posible a la verdadera distribución de tales desplazamientos; por ello su selección debe cumplir con los siguientes requerimientos:

a) La. deformación de un elemento debe ser nula cuando los desplazamientos nodales son causados por un desplazamiento de cuerpo rígido.

b) Si los desplazamientos nodales son compatibles con una condición de deformación constante, tal deformación será obtenida.

Claramente, a medida que los elementos son más pequeños,- las condiciones de deformación constante prevalecerán en ellos. Si dichas condiciones existen, es más deseable para una buena aproximación que el tamaño del elemento pueda reproducirlas exactamente. Es posible formular funciones que satisfagan la primera condición, pero que al mismo tiempo requieran de una variación de deformación a través del elemento, cuando los desplazamientos nodales en realidad son compatibles con una solución de deformación constante. Tales funciones, en general, no lograrán una buena convergencia, y - no pueden, aún en el límite, representar la " verdadera " distribución de deformación.

c) Las deformaciones en las fronteras entre elementos deben ser finitas. Este criterio implica una estricta continuidad - de los desplazamientos entre elementos.

2.2 Formulación Directa de las Características del Elemento Finito Triangular.

En esta sección se presenta la formulación de la teoría del elemento finito triangular (ref 3) para un estado de deformación plana, con base en la Teoría de la Elasticidad.

2.2.1 Función de desplazamientos. La figura 2.1 muestra el elemento triangular considerado, con nodos i,j,m, numerados en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Los desplazamientos de los nodos tienen dos componentes únicamente, y pueden expresarse en forma matricial:

$$\left\{\delta_i\right\} = \left\{\begin{matrix} u_i \\ v_i \end{matrix}\right\} \tag{2.1}$$

Considerando todo el elemento:

$$\left\{\delta\right\}^e = \left\{\begin{matrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{matrix}\right\} \tag{2.2}$$

En cada lado del elemento hay solamente dos nodos, y la posible variación del desplazamiento es lineal. Los desplazamientos en cualquier punto del elemento deben ser definidos por los desplazamientos desconocidos en los nodos i,j,m. La forma más simple de representar los desplazamientos en cualquier punto es por medio de dos polinomios lineales:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \tag{2.3}$$

Las seis constantes α pueden evaluarse en términos de las coordenadas y los desplazamientos nodales, resolviendo los dos conjuntos de tres ecuaciones simultáneas que surgen de las ecuaciones 2.3. Se llega a las siguientes expresiones (ref. 3):

$$u = \frac{1}{2\Delta}\Big\{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)\,u_m\Big\} \tag{2.4}$$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\Big\{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)\,v_m\Big\} \tag{2.5}$$

en donde:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \tag{2.6}$$

con los otros coeficientes obtenidos por una permutación cíclica de subíndices en el orden i, j, m, y donde

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2(\text{Area del triángulo}) \tag{2.7}$$

Los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento, dados por las ecuaciones 2.4 y 2.5, pueden expresarse por el vector columna $\{f\}$ como sigue:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = f\{(x,y)\} = [N]\{\delta\}^e = [IN_i' \;\; IN_j' \;\; IN_m']\{\delta\}^e \tag{2.8}$$

donde:

$I =$ es una matriz identidad de 2 por 2. y

$N_i' = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta$, etc, que es una función de posición.

A la matriz $[N]$ se le denomina función de forma.

La función de desplazamiento escogida garantiza automáticamente la continuidad de desplazamientos en elementos adyacentes, porque los desplazamientos varían linealmente a lo largo de cualquier lado del triángulo y, con un desplazamiento idéntico impuesto en los nodos, ocurrirán desplazamientos iguales a lo largo de los bordes de dos elementos.

2.2.2 Deformaciones. Para el caso de deformación plana la deformación total en cualquier punto de un elemento puede definirse por sus tres componentes que contribuyen al trabajo interno (ref 4).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

Usando las ecuaciones (2.4) ó (2.8) se tiene:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i'}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j'}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_m'}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i'}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j'}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_m'}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i'}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i'}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j'}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j'}{\partial x} & \dfrac{\partial N_m'}{\partial y} & \dfrac{\partial N_m'}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e \tag{2.11}$$

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left[B \right] \left\{ \delta \right\}^{e} \qquad (2.12)$$

Puede verse que la matriz $\left[B \right]$ es independiente de la posi ción, y por lo tanto las deformaciones son constantes a través del elemento. Obviamente, se satisface el criterio de deformación — constante mencionado en la sección 2.1

2.2.3 Esfuerzos. Si se supone un comportamiento lineal e lástico general y un material isótropo, la relación entre esfuerzos y deformaciones estará dada por la siguiente expresión:

$$\left\{ \sigma \right\} = \left[D \right] \left[\left\{ \varepsilon \right\} - \left\{ \varepsilon_o \right\} \right] + \left\{ \sigma_o \right\} \qquad (2.13)$$

en donde:

$\left[D \right]$: matriz de elasticidad, que contiene las propie dades del material

$\left\{ \varepsilon_o \right\}$: deformaciones iniciales

$\left\{ \sigma_o \right\}$: esfuerzos residuales

Para el caso particular que nos ocupa -deformación plana-, solamente tres componentes de esfuerzo deben ser consideradas:

$$\left\{ \sigma \right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

y la matriz $\left[D \right]$ puede obtenerse de las relaciones usuales esfuerzo-deformación para materiales isótropos (ref 4) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \end{aligned} \qquad (2.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{E}(1+\nu)\tau_{xy}$$

Eliminando σ_z y resolviendo para los tres esfuerzos restantes, se puede obtener (ref 3):

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde:

E: módulo de Young

ν: relación de Poisson.

2.2.4 Matriz de rigidez.

Designemos por:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix}$$

al vector de fuerzas nodales, que deben ser estáticamente equivalentes a los esfuerzos en la frontera y las cargas distribuidas en un elemento. Cada una de las fuerzas $\{F_i\}$ debe contener el mismo número de componentes que los correspondientes desplazamientos nodales $\{\delta_i\}$; dichas fuerzas deben ordenarse en las direcciones correspondientes.

Las cargas distribuidas $\{P\}$ se definen como aquellas que actúan en un volumen unitario de material dentro del elemento.

En el caso particular de deformación plana, las fuerzas nodales son, por ejemplo:

$$\left\{F_i\right\} = \left\{\begin{matrix} U_i \\ V_i \end{matrix}\right\}$$

con componentes U y V correspondientes a las direcciones de los desplazamientos u y v respectivamente; la carga distribuida es:

$$\left\{p\right\} = \left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\}$$ en donde X y Y son las componentes de las fuerzas de cuerpo

Para hacer que las fuerzas nodales sean estáticamente equivalentes a los esfuerzos de frontera y las fuerzas de cuerpo, el procedimiento más simple es imponer un desplazamiento nodal arbitrario (virtual), e igualar el trabajo externo e interno realizado por las fuerzas y los esfuerzos durante dicho desplazamiento.

Sea un desplazamiento virtual $d\left\{\delta\right\}^e$ aplicado en los nodos. De aquí resulta de las ecuaciones (2.8) y (2.12):

$$\begin{aligned} d\left\{f\right\} &= \left[\, N \,\right] d\left\{\delta\right\}^e \\ d\left\{\varepsilon\right\} &= \left[\, B \,\right] d\left\{\delta\right\}^e \end{aligned} \qquad (2.16)$$

El trabajo hecho por las fuerzas nodales es igual a la suma de los productos de las componentes de las fuerzas individuales y sus correspondientes desplazamientos, que en lenguaje matricial se expresa como:

$$\left(d\left\{\delta\right\}^e\right)^T \cdot \left\{F\right\}^e \qquad (2.17)$$

De manera similar, el trabajo interno por unidad de volumen hecho por los esfuerzos y las fuerzas de cuerpo es:

$$d\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} - d\{f\}^T\{P\} \tag{2.18}$$

$$\left(d\{\delta\}^e\right)^T\left(\left[B\right]^T\{\sigma\} - \left[N\right]^T\{P\}\right) \tag{2.19}$$

Igualando el trabajo externo con el trabajo interno total integrado sobre el volumen, se obtiene:

$$\left(d\{\delta\}^e\right)^T\{F\}^e = \left(d\{\delta\}^e\right)^T\left(\int[B]^T\{\sigma\}d(vol) - \int[N]^T\{P\}d(vol)\right)$$

Sustituyendo las expresiones (2.12) y (2.13) se tiene:

$$\{F\}^e = \left(\int[B]^T[D][B]\,d(vol)\right)\{\delta\}^e - \int[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}\,d(vol) +$$

$$+\int[B]^T\{\sigma_0\}\,d(vol) - \int[N]^T\{P\}\,d(vol) \tag{2.20}$$

Por otra parte, se tiene para cualquier elemento estructural la siguiente relación:

$$\{F\}^e = [K]^e\{\delta\}^e + \{F\}^e_p + \{F\}^e_{\varepsilon_0}$$

en donde:

$\{F\}^e_p$ representa las fuerzas nodales requeridas para balancear cualquier carga distribuida actuando sobre el elemento

$\{F\}^e_{\varepsilon_0}$ Fuerzas nodales requeridas para balancear cualquier deformación inicial, tales como las debidas a cambios de temperatura

$[K]^e$ Matriz de rigidez del elemento

Puede verse que las expresiones (2.21) y (2.20) son correspondientes. Por tanto:

$$[K]^e = \int [B]^T [D] [B] \, d(vol) \tag{2.22}$$

$$\{F\}^e_p = \int [N]^T \{P\} \, d(vol) \tag{2.23}$$

$$\{F\}^e_{\varepsilon_o} = -\int [B]^T [D] \{\varepsilon_o\} \, d(vol) \tag{2.24}$$

$$\{F\}^e_{\sigma_o} = \int [B]^T \{\sigma_o\} \, d(vol) \tag{2.25}$$

Esta última expresión se debe a esfuerzos iniciales al comienzo del análisis.

Una vez que se han determinado los desplazamientos nodales, los esfuerzos en cualquier punto del elemento pueden obtenerse por medio de la siguiente expresión:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{\delta\}^e - [D] \{\varepsilon_o\} + \{\sigma_o\} \tag{2.26}$$

La expresión (2.22) se puede expresar en la siguiente forma:

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] \, t \, dx \, dy \tag{2.27}$$

donde t es el espesor del elemento. Si dicho espesor es constante, entonces:

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] \, t \, \Delta \tag{2.28}$$

donde Δ es el área del triángulo ya definida en la expresión (2.7).

La matriz $[B]$ definida por la ecuación (2.11) puede escribirse como:

$$[B]^e = [B_i \quad B_j \quad B_m], \text{ con } [B_i] = \begin{Bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{Bmatrix} / 2\Delta \qquad (2.29)$$

Ahora la matriz de rigidez puede escribirse en la siguiente forma:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

en donde

$[K_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] \, t \, \Delta$, que es una matriz de 2 por 2.

2.2.5 Fuerzas de cuerpo

De la expresión (2.23) se tiene:

$$\{F\}^e_p = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx\, dy$$

para cada nodo se tiene

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i \, dx\, dy \qquad (2.31)$$

$$\left\{F_i\right\}_p = -\left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\} \int a_i dx \; dy/2\,\Delta = -\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} a_i \;/2$$

$$\left\{F_i\right\}_p = -\left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\} \Delta/3 = \left\{F_i\right\}_p = \left\{F_m\right\}_p$$

$$\left\{F\right\}_p^e = -\left\{\begin{matrix} x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{matrix}\right\} \Delta/3 \qquad (2.32)$$

Para llegar a esta expresión, es importante hacer notar que el origen de coordenadas se tomó en el centroide del elemento.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. PROPAGACION DE ONDA. CONDICIONES DE FRONTERA.

3.1 Ecuación de Equilibrio Dinámico.

La respuesta a cierta excitación sísmica es un problema - de tipo dinámico, y por tanto, debe ser tratado como tal. La ecuación que nos representa el comportamiento del " medio discretizado " ante una solicitación determinada es la siguiente:

$$\left[K\right]\left\{\delta\right\}+\left[C\right]\frac{\partial}{\partial t}\left\{\delta\right\}+\left[M\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\delta\right\}=\left\{F(t)\right\} \qquad (3.1)$$

en donde:

$\left\{\delta\right\}$ es el vector desplazamiento

$\left\{F(t)\right\}$ es el vector de excitación.

$\left[M\right]$ es la matriz de masas, que es una matriz diagonal, debido a que la masa se concentró en los puntos nodales

$\left[K\right]$ es la matriz de rigidez estática

$\left[C\right]$ es la matriz de amortiguamiento que contiene los coeficientes para los amortiguadores* sobre la frontera.

Para el caso de la matriz de masas, la masa de cada elemento se concentró en sus vértices en partes iguales, y por tanto la matriz para el elemento es:

* Las condiciones de frontera se presentarán más adelante

$$[m]^e = \frac{\rho t \Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

en donde:

ρ : densidad de masa

t : espesor del elemento

Δ : área del elemento

3.2 Solución de la Ecuación de Equilibrio Dinámico para Excitación Armónica.

La solución de la ecuación diferencial (3.1) puede encontrarse por el método de respuesta compleja. Sea el vector fuerza de excitación siguiente:

$$\{F(t)\} = \{F_o\} e^{iwt} \tag{3.3}$$

en donde $\{F_o\}$ es independiente del tiempo, y w es la frecuencia de excitación. Puede verse que dicho vector es una solicitación de tipo periódica.

La respuesta puede expresarse como:

$$\{\delta\} = \{\delta_o\} e^{iwt} \tag{3.4}$$

$$\{\dot{\delta}\} = iw \{\delta_o\} e^{iwt} \tag{3.5}$$

$$\left\{\ddot{\delta}\right\} = -w^2\left\{\delta_o\right\} e^{iwt} \qquad (3.6)$$

Sustituyendo estas tres últimas ecuaciones en la expresión (3.1), resulta:

$$\left[K\right]\left\{\delta_o\right\}e^{iwt} + iw\left[C\right]\left\{\delta_o\right\}e^{iwt} - w^2\left[M\right]\left\{\delta_o\right\}e^{iwt} +$$
$$- \left\{F_o\right\}e^{iwt} = 0 \qquad (3.7)$$

Puede verse que la expresión (3.7) es independiente del tiempo. Simplificando y reagrupando queda:

$$\left(\left[K\right] + iw\left[C\right] - w^2\left[M\right]\right)\left\{\delta_o\right\} = \left\{F_o\right\} \qquad (3.8)$$

En general las expresiones $\left\{F_o\right\}$ y $\left\{\delta_o\right\}$ serán complejas, y la ecuación (3.8) debe ser tratada como un conjunto de dos ecuaciones: una que resulta de igualar las partes reales, y para la otra las partes imaginarias. Así, si:

$$\left\{F_o\right\} = \left\{\bar{F}_o\right\} + i\left\{\bar{\bar{F}}_o\right\} \qquad (3.9)$$

$$\left\{\delta_o\right\} = \left\{\bar{\delta}_o\right\} + i\left\{\bar{\bar{\delta}}_o\right\} \qquad (3.10)$$

resulta que al igualar las partes reales e imaginarias de la ecuación (3.8) tenemos dos ecuaciones simultáneas, escritas como una sola en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} [K]-w^2[M] & -w[C] \\ w[C] & [K]-w^2[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_o \\ \bar{\bar{\delta}}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_o \\ \bar{\bar{F}}_o \end{Bmatrix} \begin{matrix} (3.11a) \\ (3.11b) \end{matrix}$$

Las ecuaciones (3.11) forman un sistema en el que todas las cantidades son reales, y del cual puede determinarse la respuesta a cualquier excitación periódica por solución directa.

Puede verse que el problema se hizo independiente del tiempo, y la solución de la ecuación (3.11) da una posible forma de respuesta de la estructura ante una excitación con determinada frecuencia w .

3.3 Propagación de Ondas.

Se presenta en esta sección la formulación de las ecuaciones que rigen el movimiento de ondas dentro de un medio continuo elástico infinito, homogéneo, isótropo y sin viscosidad, y el movimiento de ondas en un semiespacio elástico, que es el caso de las ondas de Rayleigh. (ref 4 y 5)

3.3.1 Medio elástico, infinito, homogéneo e isótropo. Para derivar las ecuaciones del movimiento para un medio elástico, es necesario examinar el equilibrio de un elemento diferencial, tal como se muestra en la fig 3.1

Consideremos primero la variación de las fuerzas en caras opuestas del elemento. Los esfuerzos en cada cara se representan-mediante vectores ortogonales. Los vectores continuos actúan en las caras visibles y los punteados sobre las caras ocultas. Establezcamos el equilibrio del elemento. En la dirección X se tiene:

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y\,\Delta z - \sigma_x\,\Delta y\,\Delta z + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\Delta y)\,\Delta x\Delta z$$
$$-\tau_{xy}\,\Delta x\,\Delta z + (\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\Delta z)\Delta x\Delta y - \tau_{xz}\,\Delta x\,\Delta y = 0$$

Ecuaciones similares pueden escribirse para la dirección "Y" y la dirección "Z". Despreciando las fuerzas de cuerpo, y aplicando la segunda ley de Newton en la dirección X, se tiene:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \rho(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)\frac{\partial u^2}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

Se pueden obtener expresiones similares a esta última, correspondientes a las direcciones "Z" y "Y". Entonces, las tres ecuaciones del movimiento en términos de los esfuerzos pueden escribirse:

$$\frac{\rho\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (3.13a)$$

$$\frac{\rho\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (3.13b)$$

$$\frac{\rho\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (3.13c)$$

en donde V y W son los desplazamientos correspondientes a las direcciones "Y" y "Z" respectivamente. Para expresar los términos derechos de estas ecuaciones en función de los desplazamientos, se pueden emplear las siguientes relaciones para un medio con tinuo elástico (ref 4):

$$\sigma_x = \lambda\bar{\varepsilon} + 2G\,\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = G\,\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda\bar{\varepsilon} + 2G\,\varepsilon_y \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = G\,\gamma_{yz} \qquad (3.14)$$

$$\sigma_z = \lambda\bar{\varepsilon} + 2G\,\varepsilon_z \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = G\,\gamma_{zx}$$

en donde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

ν relación de Poisson

λ, G constantes de Lamé

$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ dilatación cúbica.

También se requieren las siguientes relaciones que nos dan las deformaciones y rotaciones en términos de los desplazamientos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad 2\bar{w}_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\bar{w}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (3.15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\bar{w}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

donde $\bar{w}$ es la rotación alrededor de cada eje. Combinando las expresiones apropiadas de las ecuaciones (3.14) y (3.15) con la ecuación (3.13a) se tiene:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial x} + G\,\nabla^2 u \qquad (3.16)$$

Similarmente

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial y} + G\,\nabla^2 v \qquad (3.17)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial z} + G\nabla^2 w \qquad (3.18)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano en coordenadas cartesianas, definido como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3.3.2 Solución de las ecuaciones de movimiento. Pueden obtenerse dos soluciones para las ecuaciones del movimiento vistas en la sección anterior. Una solución describe la propagación de una onda que produce cambio de volumen únicamente (irrotacional), mientras que la otra describe la propagación de una onda de rotación pura, manteniendo constante el volumen. La primera solución puede obtenerse diferenciando las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18) con respecto a X, Y, Z respectivamente y sumando las tres expresiones entre sí, de esta operación resulta:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\ \nabla^2 \bar{\varepsilon} \qquad (3.19)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon} \qquad (3.20)$$

donde v_p = velocidad de propagación de onda

En el caso de ondas planas, y suponiendo que todas las partículas se mueven paralelas a la dirección de propagación de onda (ondas longitudinales), entonces solamente se tiene un desplazamiento en función del eje en el cual se propaga la onda.

Si se toma el eje X en la dirección de propagación de la onda, entonces $v = w = 0$ y u es una función de X solamente. De la ecuación (3.20) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.21)$$

Esta ecuación suele denominarse como ecuación unidimensional de onda.

Puede demostrarse que cualquier función del tipo $f(x+v_p t)$ y $f(x-v_p t)$ es solución de la ecuación (3.21). La solución general de la ecuación del movimiento puede expresarse como:

$$u = f(x + v_p t) + f_1(x - v_p t) \qquad (3.22)$$

La ecuación anterior tiene una interpretación física muy simple, y puede explicarse de la siguiente forma. Considérese la función $f_1(x-v_p t)$. Para un instante determinado t, este término es una función de X solamente, y puede representarse por una cierta curva. Después de un intervalo de tiempo Δt, el argumento de la función f_1 se convierte en $x - v_p(t + \Delta t)$. Dicha función permanecerá inalterada debido a que simultáneamente con el incremento de t en Δt, las abscisas se incrementan en Δx igual a $v_p t \Delta t$. Esto significa que la misma curva construída para el momento t es válida para el instante $t + \Delta t$, si ésta se desplaza en la dirección X la cantidad $\Delta x = v_p \Delta t$. De lo anterior se desprende que la función f_1 representa una onda que viaja en el sentido del eje X con velocidad constante v_p. De la misma forma puede demostrarse que la función f representa a una onda que viaja en la dirección contraria. Así, la solución general de la ecuación representa a dos ondas que viajan en direcciones opuestas, ambas con velocidad constante v_p

Puede obtenerse otra solución de las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18), correspondiente a ondas de distorsión. Operando dichas ecuaciones puede llegarse a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{w}_x \qquad (3.23)$$

donde:

$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ velocidad de propagación de ondas de distorsión.

Expresiones similares pueden obtenerse para $\bar{w}$ y $\bar{w}_z$.

Para el caso particular de ondas planas en donde el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de las ondas, puede obtenerse, para el caso de propagación en dirección del eje X, la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (3.24)$$

en donde v es el desplazamiento perpendicular al eje X.

La solución de esta ecuación tiene la misma forma e interpretación que la de la ecuación (3.21)

Del análisis presentado puede verse que en un medio elas tico infinito se pueden propagar dos tipos de ondas que viajan con diferentes velocidades. Estas ondas son conocidas por los siguientes términos:

1) Onda de dilatación (onda primaria, onda P, onda compresional, onda irrotacional) y
2) Onda de distorsión (onda secundaria, onda S, onda de cortante)

3.3.3 Ondas en un semiespacio elástico. Ondas de Rayleigh. En la sección 3.2 se vió que en un medio elástico homogéneo infinito se pueden propagar dos tipos de ondas - ondas de dilatación y ondas de distorsión -. En un semiespacio elástico es posible encontrar otras soluciones para las ecuaciones de movimiento, que corresponden a ondas cuyo movimiento se confina a una zona cercana a la frontera del semiespacio. Una de estas ondas fue primeramente estudiada por Lord Rayleigh (1885), y más tarde fue descrita en detalle por Lamb (1904). La onda elástica descrita por estos investigadores es conocida como " Onda Rayleigh " y se confina a la vecindad de la superficie de un semiespacio. La influencia de la onda Rayleigh decrece rápidamente con la profundidad.

Una onda con las características mencionadas puede obtenerse por las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18) imponiendo las condiciones de frontera apropiadas para el caso de una superficie libre. Defínase la superficie del semiespacio por el plano X - Y con el eje Z en dirección positiva hacia el interior del medio, tal como se muestra en la fig 3.2

Para una onda plana que viaja en la dirección X, los desplazamientos serán independientes de la dirección Y. Los desplaza mientos en las direcciones X y Z denotadas por u y v respectivamente, pueden expresarse en términos de dos funciones potenciales φ y ψ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad y \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La dilatación $\bar{\varepsilon}$ de la onda definida por u y w es:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \nabla^2 \varphi$$

y la rotación $2\bar{w}_y$ en el plano X-Z es:

$$2\bar{w}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \nabla^2 \psi$$

Las funciones de potencial φ y ψ deben escogerse de tal manera que φ se asocie con la dilatación del medio y ψ con la rotación.

Sustituyendo u y w en las ecuaciones (3.16) y (3.18) tenemos:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) + \rho \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = (\lambda + 2G)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \varphi + G\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 \psi\right) \qquad (3.25)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) - \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = (\lambda + 2G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 \varphi\right) - G\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 \psi\right) \qquad (3.26)$$

Estas últimas ecuaciones se satisfacen si:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \varphi = v_p^2 \nabla^2 \varphi \qquad (3.27)$$

y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho}\right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi \qquad (3.28)$$

Suponiendo una solución para una onda senoidal que viaja en la dirección positiva de X, las expresiones para φ y ψ pueden escribirse:

$$\varphi = F(Z) \exp\left[i(\omega t - Nx)\right] \qquad (3.29)$$

$$\psi = G(Z) \exp\left[i(\omega t - Nx)\right] \qquad (3.30)$$

Las funciones F(Z) y G(Z) describen la variación en amplitud de la onda como una función de la profundidad, y N es el número de onda definido por:

$$N = \frac{2\pi}{L_R}$$

donde L_R es la longitud de onda de Rayleigh.

Ahora, sustituyendo las expresiones para φ y ψ en las ecuaciones (3.27) y (3.28) se tiene:

$$-\frac{\omega^2}{v_p^2} F(Z) = -N^2 F(Z) + F''(Z) \qquad (3.31)$$

$$-\frac{\omega^2}{v_s^2}G(Z) = -N^2G(Z) + G''(Z) \tag{3.32}$$

De estas expresiones se obtiene:

$$F''(Z) - \left(N^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2}\right) F(Z) = 0 \tag{3.33}$$

$$G''(Z) - \left(N^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2}\right) G(Z) = 0 \tag{3.34}$$

donde F'' (Z) y G'' (Z) son derivadas con respecto a Z.
Ahora, tomando:

$$q^2 = \left(N^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2}\right) \tag{3.35}$$

$$s^2 = \left(N^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2}\right) \tag{3.36}$$

Las ecuaciones (3.33) y (3.34) pueden reescribirse como:

$$F''(Z) - q^2F(Z) = 0 \tag{3.37}$$

$$G''(Z) - s^2G(Z) = 0 \tag{3.38}$$

Las soluciones de estas ecuaciones pueden expresarse en la forma

$$F(Z) = A_1 \exp(-qz) + B_1 \exp(qz) \qquad (3.39)$$

$$G(Z) = A_2 \exp(-sz) + B_2 \exp(sz) \qquad (3.40)$$

Una solución que permita que la amplitud de la onda tienda al infinito con la profundidad no puede aceptarse; por tanto:

$$B_1 = B_2 = 0$$

y las ecuaciones (3.29) y (3.30) se transforman en:

$$\Phi = A_1 \exp\left[-qz + i(\omega t - Nx)\right] \qquad (3.41)$$

$$\Psi = A_2 \exp\left[-sz + i(\omega t - Nx)\right] \qquad (3.42)$$

Las condiciones de frontera en la superficie implican la no existencia de esfuerzos, es decir, σ_z y $\tau_{xy} = 0$ para $Z = 0$. Entonces:

$$\sigma_z = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G\,\varepsilon_z = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

y

$$\tau_{zx} = G\,\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

Empleando las definiciones de u y v y las soluciones para φ y ψ de las ecuaciones (3.41) y (3.42), estas últimas — expresiones para condiciones de frontera, pueden escribirse como:

$$\sigma_{z/z=0} = A_1\left[(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2\right] - 2iA_2GNs = 0 \qquad (3.43)$$

$$\tau_{zx/z=0} = 2iA_1Nq + A_2(s^2 + N^2) = 0 \qquad (3.44)$$

De aquí, reagrupando términos se obtiene

$$\frac{A_1}{A_2}\,\frac{(\lambda + 2G)\,q^2 - \lambda N^2}{2iGNs} - 1 = 0 \qquad (3.45)$$

y

$$\frac{A_1}{A_2}\,\frac{2qiN}{(s^2 + N^2)} + 1 = 0 \qquad (3.46)$$

Sumando estas dos ecuaciones, tenemos

$$\frac{(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2}{2iGNs} = -\frac{2qiN}{s^2 + N^2}$$

$$\left[(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2\right](s^2 + N^2) = 4qGsN^2$$

Elevando al cuadrado ambos lados, e introduciendo los valores de q y s dados por las ecuaciones (3.35) y (3.36) respecpara Φ y Ψ de las ecuaciones (3.41) y (3.42), estas últimas expresiones para condiciones de frontera, pueden escribirse como:

$$\sigma_{z/z=0} = A_1\left[(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2\right] - 2iA_2GNs = 0 \qquad (3.43)$$

$$\tau_{zx/z=0} = 2iA_1Nq + A_2(s^2 + N^2) = 0 \qquad (3.44)$$

De aquí, reagrupando términos se obtiene

$$\frac{A_1}{A_2}\,\frac{(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2}{2iGNs} - 1 = 0 \qquad (3.45)$$

y

$$\frac{A_1}{A_2}\,\frac{2qiN}{(s^2 + N^2)} + 1 = 0 \qquad (3.46)$$

Sumando estas dos ecuaciones, tenemos

$$\frac{(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2}{2iGNs} = -\frac{2qiN}{s^2 + N^2}$$

$$\left[(\lambda + 2G)q^2 - \lambda N^2\right](s^2 + N^2) = 4qGsN^2$$

Elevando al cuadrado ambos lados, e introduciendo los valores de q y s dados por las ecuaciones (3.35) y (3.36) respectivamente, se obtiene

$$16G^2N^4(N^2-\frac{\omega^2}{v_p^2})\ (N^2-\frac{\omega^2}{v_s^2}) = \left[(\lambda+\ 2G)(N^2-\frac{\omega^2}{v_p^2})\ -\lambda N^2\right]^2\left[N^2+(N^2-\frac{\omega^2}{v_s^2})\right]^2$$

Dividiendo entre G^2N^8, se obtiene

$$16(1-\frac{\omega^2}{v_p^2N^2})\ (1-\frac{\omega^2}{v_s^2N^2})\ \left[2-(\frac{\lambda+2G}{G})(\frac{\omega^2}{v_p^2N^2})\right]^2(2-\frac{\omega^2}{v_s^2N^2}) \qquad (3.47)$$

Sean las siguientes relaciones:

$$\frac{\omega^2}{v_p^2N^2} = \frac{v_r^2}{v_p^2} = \alpha^2\ K^2 \qquad (3.48)$$

$$\frac{\omega^2}{v_s^2N^2} = \frac{v_r^2}{v_s^2} = K^2 \qquad (3.49)$$

$$\frac{\lambda+\ 2G}{G} = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \qquad (3.50)$$

donde v_r es la velocidad de la onda de Rayleigh.

La ecuación (3.47) puede reescribirse:

$$16(1-\alpha^2K^2)(\ 1-K^2) = (2-\frac{1}{\alpha^2}\alpha^2K^2)^2(2-K^2)^2 \qquad (3.51)$$

Después de hacer operaciones y reagrupar términos, se obtiene:

$$K^6-8\ K^4+(\ 24-16\alpha^2)K^2+\ 16(\alpha^2-1) = 0 \qquad (3.52)$$

Esta ecuación (3.52) puede considerarse como una ecuación cúbica en K^2, y diferentes soluciones reales pueden obtenerse para valores dados de ν. La cantidad K representa una relación entre la velocidad de la onda de superficie, y la velocidad de la onda de cortante, y es independiente de la frecuencia de excitación de la onda.

Las relaciones de $\frac{V_r}{V_s}$ y $\frac{V_p}{V_s}$ pueden determinarse de la ecuación (3.52), para diferentes valores de ν. En la figura 3.3 se presentan dichas relaciones, como una función de ν.

Hasta ahora se ha obtenido la relación que existe entre la velocidad de ondas Rayleigh y ondas de cortante. Obtengamos ahora los desplazamientos u y w en términos de las expresiones conocidas:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -A_1 iN\exp\left[-qz + i(\omega t - Nx)\right]$$

$$- A_2 s\exp\left[-sz + i(\omega t - Nx)\right] \qquad (3.53)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -A\ iN\exp\left[-qz + i(\omega t - Nx)\right]$$

$$+ A\ iN\exp\left[-sz + i(\omega t - Nx)\right] \qquad (3.54)$$

Sustituyendo algunas expresiones ya conocidas, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$u = A_1 Ni\left\{-\exp\left[-\frac{q}{N}(zN)\right] + \frac{\frac{2qs}{NN}}{\frac{s^2}{N^2}+1}\exp\left[-\frac{s}{N}(zN)\right]\right\}\exp i(\omega t - Nx) \qquad (3.55)$$

$$w = A_1 N\frac{\frac{2q}{N}}{\frac{s^2}{N^2}+1}\exp\left[-\frac{s}{N}(zN)\right] - \frac{q}{N}\exp\left[-\frac{q}{N}(zN)\right]\exp i(\omega t - Nx) \qquad (3.56)$$

El significado de la presencia de "i" en la expresión — (3.55) y su ausencia en la expresión para w, es que la componente del desplazamiento u está defasada 90° con respecto a la componente del desplazamiento w.

Ahora, de las ecuaciones (3.55) y (3.56) la variación de u y w con respecto a la profundidad puede expresarse como:

$$U(z) = -\exp\left[-\frac{q}{N}(zN)\right] + \frac{\frac{2qs}{NN}}{\frac{s^2}{N^2}+1}\exp\left[-\frac{s}{N}(zN)\right] \quad (3.57)$$

$$W(z) = \frac{\frac{2q}{N}}{\frac{s^2}{N^2}+1}\exp\left[-\frac{s}{N}(zN)\right] - \frac{q}{N}\exp\left[-\frac{q}{N}(zN)\right] \quad (3.58)$$

Las funciones $U(z)$ y $W(z)$ representan las variaciones — espaciales de los desplazamientos u y w, y pueden evaluarse— en términos del número de onda N para cualquier valor dado de la— relación de Poisson ν. Por ejemplo, si $\nu = 1/4$, entonces:

$$U(z) = -\exp\left[-0.8475(zN)\right] + 0.5773\exp\left[-0.3933(zN)\right] \quad (3.59)$$

$$W(z) = -0.8475\exp\left[-0.8475(zN)\right] + 1.4679\exp\left[-0.3933(zN)\right] \quad (3.60)$$

Las expresiones (3.55) y (3.56) pueden expresarse en la - siguiente forma:

$$u = A_1 N i U(z)\exp i(\omega t - Nx) \quad (3.61)$$

$$w = A_1 N\, W(z)\exp i(\omega t - Nx) \quad (3.62)$$

La figura 3.4 muestra diferentes curvas para U(z) y W(z) contra la profundidad en longitudes de onda (L_R), para las relaciones de Poisson de 0.25, 0.33, 0.40 y 0.50

Sistema de ondas en la superficie del semiespacio. En los párrafos anteriores se han determinado expresiones para las velocidades de tres tipos de ondas que pueden ocurrir en un semiespacio elástico. Conociendo tales velocidades, se puede fácilmente predecir el orden en que dichas ondas arrivarán a un punto, debido a una perturbación en otro punto. Además de predecir el orden de llegada de las ondas a lo largo de la superficie, Lamb (1904) describió en detalle el movimiento de la superficie que ocurre a grandes distancias de un punto perturbador en la superficie de un medio ideal.

Bajo las condiciones consideradas por Lamb, una perturbación se difunde en la forma de un sistema de ondas anulares. La forma inicial de tal sistema dependerá del impulso perturbador; si este impulso es de corta duración, se desarrolla el sistema de ondas que se muestra en la fig 3.5

Este sistema tiene tres puntos característicos, que corresponden al arrivo de las diferentes ondas. Puede verse que las ondas Rayleigh son las que tienen mayor influencia en el movimiento del terreno, cuando la fuente perturbadora se localiza en la superficie y produce un impulso de corta duración; de allí la importancia del presente trabajo.

Combinando las componentes vertical y horizontal del movimiento de la partícula en los puntos 1 , se encuentra que la forma de tal movimiento es elíptico y retrógrado, tal como se muestra en la fig 3.4c.

La mayoría de los registros sísmicos son más complejos - que el de la fig 3.4, debido a la variación de la teoría para un - semiespacio elástico ideal y las condiciones reales de la tierra. Algunas de las variaciones que pueden mencionarse son las siguientes: estratificación, no homogeneidad de los materiales, la curvatura de la superficie de la tierra, etc.

3.4 Condiciones de Frontera.

La imposibilidad de representar mediante un conjunto de elementos finitos ordinarios un espacio semi-infinito, conduce a la necesidad de representar una región limitada de dicho espacio; y - de adoptar condiciones de frontera que logren la continuidad del - medio, permitiendo la absorción y transmisión de energía debido a diversos tipos de ondas incidentes y reflejadas; es decir, se deben formular condiciones de frontera tales que además de permitir el paso de las perturbaciones que llegan de la región exterior, - no reflejen las ondas que abandonan la región interior del modelo. Dichas condiciones dependen del tipo y dirección de propagación de las ondas en cada punto de la frontera, y por ello, para poder formularlas es necesario conocer tal información, bajo suposiciones - admisibles.

Existen diversos métodos que formulan condiciones de frontera (ref 6 - 11). Algunos de ellos enuncian dichas condiciones - en forma exacta, pero tienen el inconveniente de un alto grado de dificultad en su implantación, que los convierte en métodos antieconómicos aunque muy " precisos "; por el contrario existen métodos aproximados con los que se obtienen precisión y costo razonables, de ahí la ventaja de ser utilizados. En este trabajo se presenta la formulación de las condicones de frontera mediante el cri terio utilizado por Ruiz y Esteva en la ref 12 .Dicha formulación establece las condiciones de frontera de manera exacta para las ondas incidentes, y sólo en forma aproximada las que corresponden a las ondas de salida. Esto último obedece a que se desconocen el tipo y dirección de propagación de las ondas de salida.

En la figura 3.6 puede apreciarse un modelo de elementos finitos que se adoptó para representar una región vecina a la irregularidad topográfica, que en este caso es un promontorio. Se supuso un tren de ondas de Rayleigh incidiendo sobre la frontera A (ver fig 3.6). En este caso, es aceptable suponer que la mayor parte de la energía incidente sobre la frontera izquierda (A), saldrá por la frontera derecha (C) bajo el mismo tipo de ondas y misma dirección de propagación. Con base en lo anterior se establecen las condiciones de frontera que sean capaces de absorber tales ondas, y puede aceptarse que la aproximación de dichas fronteras es razonable.

Considérese una frontera plana sobre la cual incide un sistema de ondas " conocido ", y un sistema desconocido abandona la región. Debido a dichas ondas, se desarrollan en la frontera ciertos esfuerzos que pueden valuarse a partir del campo de desplazamientos y velocidades en la frontera. Considérense σ_i y τ_i los esfuerzos normal y tangencial sobre la frontera causados por el sistema de ondas incidentes. Además, sean los esfuerzos σ_s y τ_s los correspondientes a sistema de ondas que abandona a la región. Defínanse los ejes X y Z como en la figura 3.7, y sean u y w los desplazamientos paralelos a cada uno de ellos.

Los esfuerzos σ_s y τ_s pueden valuarse en términos de las velocidades de los puntos de la frontera si se admiten las siguientes hipótesis:

a) σ_s es provocado por ondas planas longitudinales que viajan paralelas al eje X.

b) τ_s es debido a ondas planas transversales que viajan también en la dirección del eje X.

Aboquemos nuestra atención al esfuerzo σ_s. Este es debido a una onda de compresión, y se tiene una función de desplazamiento dada por la expresión (3.2 2). Dicha onda viaja en la dirección positiva del eje X; por tanto se tiene únicamente el segundo término de tal expresión:

$$u_s = f_1 (x - v_p t)$$

De la ecuación (3.14) se tiene:

$$\sigma_s = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_s}{\partial x} \qquad (3.63)$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x-v_p t)}{\partial x} = \frac{df_1(x-v_p t)}{d\,(x-v_p t)} \frac{d(x-v_p t)}{dx} = \frac{df_1(x-v_p t)}{d(x-v_p t)}$$

Además:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{f_1(x-v_p t)}{\partial t} = \frac{df_1(x-v_p t)}{d(x-v_p t)} \frac{d(x-v_p t)}{dt} = \frac{-df_1(x-v_p t)}{d(x-v_p t)} v_p$$

Combinando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{-1}{v_p} \frac{\partial u_s}{\partial t} = - \frac{\dot{u}_s}{v_p} \qquad (3.64)$$

Sustituyendo la ecuación (3.64) en la expresión (3.63)

$$\sigma_s = -(\lambda + 2G)\frac{\dot{u}_s}{v_p} \qquad (3.65)$$

Pero:

$$v_p^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}$$

Por lo tanto

$$\sigma_s = -\rho\, v_p\, \dot{u}_s \qquad (3.66)$$

Desígnese con u y u_i a los desplazamientos total e incidente respectivamente en un punto localizado en la frontera. Entonces:

$$u_i = u + u_s \qquad u_s = u - u_i$$

$$\dot{u}_s = \dot{u} - \dot{u}_i$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.66)

$$\sigma_s = -\rho\, v_p\, (\dot{u} - \dot{u}_i) \qquad (3.67)$$

Sean σ_i y τ_i los esfuerzos causados por las ondas inciden tes.

El esfuerzo resultante en la frontera estará dado por la siguiente expresión:

$$\sigma_T = \sigma_i + \sigma_s = \sigma_i + \rho\, v_p \dot{u}_i - \rho\, v_p \dot{u} = \sigma_i + \sigma_i^* - \rho\, v_p \dot{u} \qquad (3.68)$$

Analicemos esta expresión, apoyándonos en la figura 3.8 El término σ_i es el esfuerzo para la onda de entrada. Se calcula por medio de las relaciones esfuerzo-deformación, a partir de los desplazamientos que corresponden a la onda en cuestión, como si no existiera frontera.

El término σ_i^* es un esfuerzo de entrada, calculado como si la onda fuera unidimensional e incidiera normalmente a la frontera.

El tercer y último término es físicamente equivalente a un amortiguador viscoso, que actúa paralelamente al eje X, y cuya constante de disipación es ρv_p .

Para el caso de las condiciones de frontera referidas a esfuerzos tangenciales, puede llegarse, mediante un razonamiento análogo, a la siguiente expresión:

$$\tau = \tau_i + \rho\, v_s\, \dot{w}_i - \rho\, v_s\, \dot{w} = \tau_i + \tau_i^* - \rho\, v_s\, \dot{w} \qquad (3.69)$$

en donde v_s es la velocidad de propagación de ondas transversales, y está dada por la expresión siguiente (vista en la sección 3.3.2):

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

La interpretación de la ecuación (3.69) es similar al caso de esfuerzos normales. En la figura 3.8 se representan las condiciones de frontera expresadas por tal ecuación.

En ciertos casos es posible suponer que la mayor parte de la energía que sale por una frontera está asociada con ondas de ti po y dirección de propagación conocidos. En tal caso las ecuaciones (3.68) y (3.69) se modifican en la siguiente forma:

$$\sigma = \sigma_i + a\rho v_p \dot{u}_i - a\rho v_p \dot{u} \qquad (3.70)$$

$$\tau = \tau_i + b\rho v_s \dot{w}_i - b\rho v_s \dot{w} \qquad (3.71)$$

En estas expresiones a y b son parámetros adimensionales que pueden depender o no de la frecuencia y la profundidad, de acuerdo con el tipo de ondas. Para el caso de ondas de Rayleigh, ondas P y ondas S en un medio homogéneo, dichos parámetros fueron estudiados por Lysmer y Kuhlemeyer (ref 8). Para valuarlos, estos autores adoptaron como criterio la razón de energía reflejada a la incidente. Dichos autores obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 3.9 y 3.10 para ondas P y S respectivamente. Puede verse que la razón de energía depende únicamente del ángulo de incidencia de tales ondas, así como de la relación de Poisson del medio. Una razón de energía unitaria corresponde a una reflexión perfecta mientras que una relación igual a cero corresponde a una absorción completa.

De las figuras 3.9 y 3.10 puede apreciarse que para valores de $a = b = 1$ se obtiene la máxima absorción. La absorción no puede ser perfecta para todo el rango de valores de ángulos de incidencia. Se observa que dicha absorción es casi total para valores de $\theta > 30°$, mientras que para $\theta < 30°$ el comportamiento de la frontera viscosa es pobre.

La energía que llega a una frontera es proporcional al seno del ángulo de incidencia de la onda, y por lo tanto las ondas -

que incidan con un ángulo pequeño, poseerán una energía despreciable en comparación con la de otras ondas con un ángulo de incidencia mayor. La formulación propuesta por Lysmer y Kuhlemeyer para valores de a = b = 1, es eficiente en un 95% y 98.5% para ondas S y P respectivamente.

Para el caso de ondas Rayleigh los parámetros a y b varían con la profundidad y con la frecuencia de excitación; fueron determinados por Lysmer y Kuhlemeyer, y están dados por las siguientes expresiones:

$$a(Nz) = \frac{n}{s}\left[1 - (1 - 2s)\frac{W'(Nz)}{U(Nz)}\right] \qquad (3.72)$$

$$b(Nz) = -n\left[1 + \frac{U'(Nz)}{W(Nz)}\right] \qquad (3.73)$$

donde:

$n = \frac{v_r}{v_s} = \frac{1}{K}$, donde K es la constante dada por la ecuación (3.49). Si ν (Módulo de Poisson) es igual a 1/4, entonces n=1.08766

$s^2 = \frac{1}{\alpha^2}$, constante elástica $= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, dada por la ecuación (3.50).

N = número de onda, es decir, relación entre frecuencia de oscilación y velocidad de propagación.

U(Nz) = variación del desplazamiento horizontal con la profundidad de una onda Rayleigh en medio homogéneo. Está dada por la ecuación (3.57)

W(Nz) = variación del desplazamiento vertical, dada por la ecuación (3.58)

$U'(Nz) = \frac{dU}{dz}$

$W'(Nz) = \frac{dW}{dz}$

La variación de a y b con Nz se muestra en la figura 3.11 Reconociendo que el significado físico de la variable Nz es 2 por profundidad/ Longitud de onda, puede verse que para profundidades mayores que la mitad de la longitud de onda, los parámetros " a " y " b " se aproximan a valores constantes. En el punto donde el desplazamiento horizontal es nulo, el parámetro " a " tiende a infinito, lo que concuerda con el hecho físico de que se requiere un amortiguador de viscosidad infinita para fijar dicho punto.

Apliquemos los principios anteriores a las fronteras A, B y C de la figura 3.6.

Frontera A

Los esfuerzos σ_i y τ_i corresponden a las ondas incidentes de Rayleigh, para X = 0 y Z variable. De las ecuaciones (3.61) y (3.62) y considerando amplitud unitaria, se tiene:

$$u_i = i\, U(Nz) \exp i(\omega t - Nx)$$
$$w_i = W(Nz) \exp i(\omega t - Nx)$$

De las ecuaciones (3.14), considerando que $\varepsilon_y = 0$, se tiene:

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2G)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau = G(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = N\ U(Nz)\ \exp\ i(\omega t - Nx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = iNU'(Nz)\ \exp\ i(\omega t - Nx)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\ iNW(Nz)\ \exp\ i(\omega t - Nx)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = N\ W'(Nz)\ \exp\ i(\omega t - Nx)$$

Sustituyendo estas derivadas parciales en las expresiones para los esfuerzos, se tiene:

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)NU(Nz)\exp i(\omega t - Nx) + \lambda NW'(Nz)\exp i(\omega t - Nx)$$

Introduciendo $X = 0$, y reagrupando términos, se tiene:

$$\sigma_i = \sigma_x = N\left[(\lambda + 2G)U(Nz) + \lambda W'(Nz)\right]\exp i\omega t \qquad (3.74)$$

Para el esfuerzo cortante, se tiene:

$$\tau_i = G(\ iNU'(Nz)\exp i(\omega t - Nx) - iNW(Nz)\exp i(\omega t - Nx)$$

Para x=0 resulta:

$$\tau_i = iGN\left[U'(Nz) - W(Nz)\right]\exp i\omega t \qquad (3.75)$$

El esfuerzo σ_z se omitió, debido a que sobre esta frontera no actúa tal esfuerzo.

Para las ondas de salida, se adoptaron en este caso los valores de a = 1, b = 1, en las ecuaciones (3.70) y (3.71) quedando las siguientes expresiones:

$$\sigma = \sigma_i - \rho v_p \dot{u}_i + \rho v_p \dot{u} \qquad (3.76)$$

y

$$\tau = \tau_i - \rho v_s \dot{w}_i + \rho v_s \dot{w} \qquad (3.77)$$

Los cambios de signo que presentan estas expresiones con respecto a las ecuaciones (3.70) y (3.71), se deben a que estos esfuerzos (donde intervienen a y b) se están refiriendo al sistema de ejes de la figura 3.6 .

Los esfuerzos positivos para σ y τ corresponden a los mostrados en la figura 3.12 .

Interesa ahora determinar el sentido de las fuerzas externas que hay que aplicar en la frontera (ver fig 3.13) para representar las ondas de llegada, con el criterio de que las bases de los amortiguadores permanecen fijas.

Se tomarán positivas las fuerzas externas Fx y Fy, cuando tienen el sentido positivo de los ejes X y Y respectivamente.

Analicemos la ecuación (3.76). El término σ_i puede expresarse como:

$$\sigma_i = (+ a_R \varrho v_p \dot{u}_{iR}) \tag{3.78}$$

que es equivalente a la expresión (3.74), donde a_R está dado por la expresión (3.72)

Puede apreciarse que para $a\dot{u}_{iR}$ positiva se tiene esfuerzo σ_i positivo (ver fig 3.12), y por lo tanto se tiene Fx negativa. Entonces

$$F_{x1} = (-a_R \varrho v_p \dot{u}_{iR}) \text{ AREA} \tag{3.79}$$

Por otra parte, analicemos el término $- \varrho v_p \dot{u}_{iR} = \sigma_i^*$ Para $\dot{u}_{iR}$ positiva se tiene esfuerzo σ_i^* negativo, y por tanto Fx positiva; por tanto:

$$F_{x2} = (-\varrho v_p \dot{u}_{iR}) \text{ AREA} \tag{3.80}$$

Se tiene entonces una fuerza total Fx igual a:

$$F_x = F_{x1} + F_{x2} = (- a_R \varrho v_p \dot{u}_{iR} - \varrho v_p \dot{u}_{iR}) \text{ AREA} \tag{3.81}$$

que también puede expresarse como:

$$F_x = -\Big[N\big[(\lambda + 2G)U(Nz) + \lambda W'(Nz)\big] \exp i\omega t + \varrho v_p \dot{u}_{iR} \Big] \text{ AREA} \tag{3.82}$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial \dot{u}_{iR}}{\partial t} = -\omega\, U(Nz)\, \exp i(\omega t - Nx)$$

$$\left.\frac{\partial \dot{u}_{iR}}{\partial t}\right|_{x=0} = -\omega\, U(Nz)\, \exp i\omega t$$

La expresión (3.82) toma la siguiente forma:

$$F_x = \left[-N'(\lambda+2G)U(Nz) - N\lambda W'(Nz) + \rho\, v_p \omega\, U(Nz)\right] \exp i\omega t \quad \text{AREA} \qquad (3.83)$$

Debido a que el movimiento se hizo independiente del tiempo, tal como se ve en la ecuación (3.8), entonces la fuerza de excitación está dada por la siguiente expresión:

$$F_x = -\left[N(\lambda+2G)U(Nz) + N\lambda W'(Nz) - \rho\, v_p \omega U(Nz)\right] \text{AREA} \qquad (3.84)$$

ó

$$F_x = \left[a_R \rho\, v_p + \rho\, v_p\right] \omega\, U(Nz) \quad \text{AREA} \qquad (3.85)$$

El término $\rho\, v_p \dot{u}$ de la ecuación (3.76) se omitió en estas dos últimas ecuaciones, debido a que éste formará parte del término donde aparece la matriz de amortiguamiento en la ecuación (3.8).

Mediante un razonamiento análogo puede llegar a valuarsele la fuerza Fz.

De la expresión (3.77) τ_i puede expresarse como:

$$\tau_i = b_R \rho\, v_s\, \dot{w}_{iR} \qquad (3.87)$$

Puede apreciarse que para $b_R\dot{w}_{iR}$ positiva se tiene esfuerzo positivo (ver fig 3.12), y por tanto Fz negativa. Entonces:

$$F_{z1} = -\, b_R \rho v_s \, \dot{w}_{iR} \text{ AREA} \tag{3.88}$$

Para el término $-\rho v_s \dot{w}_{iR}$ se tiene que para $\dot{w}_{iR}$ positiva el esfuerzo es negativo, y por lo tanto la fuerza es positiva.

$$F_{z2} = -\rho v_s \, \dot{w}_{iR} \text{ AREA} \tag{3.89}$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial w_{iR}}{\partial t} = i\omega W(Nz)$$

Entonces

$$F_z = F_{z1} + F_{z2} = i\left[-b_R \rho v_s - \rho v_s\right] W(Nz) \text{ AREA}\,\omega \tag{3.90}$$

ó

$$F_z = \left[-\, iGNU(Nz) + W(Nz) - i\omega\, W(Nz)\, \rho\, v_s\right] \text{AREA} \tag{3.91}$$

Así, la condición de frontera en este caso equivale a aplicar las fuerzas Fx y Fz en cada uno de los puntos nodales, y colocar dos amortiguadores perpendiculares entre sí: uno en la dirección del eje X cuya constante de disipación es ρv_p , y otro en la dirección Z con constante ρv_s .

<u>Frontera B</u>

En este caso los esfuerzos σ_i y τ_i corresponden a ondas -

incidentes de Rayleigh, pero ahora sus valores son para $Z = Z_0$ y - X variable.

Para el esfuerzo normal a la frontera, se tiene:

$$\sigma_i = (\lambda + 2G)\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_i = (\lambda + 2G)NW'(Nz_0)\exp i(\omega t - Nx) + \lambda NU(Nz_0)\exp i(\omega t - Nx)$$

$$\sigma_i = N\left[(\lambda + 2G)W'(Nz_0) + \lambda U(Nz_0)\right]\exp i(-Nx + \omega t)$$

Haciéndolo independiente del tiempo:

$$\sigma_i = N\left[(\lambda + 2G)W'(Nz_0) + \lambda U(Nz_0)\right]\exp i(-Nx) \qquad (3.92)$$

El esfuerzo cortante se encuentra de la misma forma que - el de la frontera A . Aplicando las condiciones para la fronte- ra en cuestión, la ecuación (3.75) queda:

$$\tau_i = iGN\left[U'(Nz_0) - W(Nz_0)\right]\exp i(-Nx) \qquad (3.93)$$

Para las ondas de salida se tomaron a = 1, b = 1.

En este caso, las expresiones (3.69) y (3.70) tienen signos correctos pues el sentido del eje corresponde a la dirección- de propagación de las ondas de salida. (ver fig 3.6)

$$\sigma = \sigma_i + \rho v_p \dot{w}_{iR} - \rho v_p \dot{w}$$

$$\tau = \tau_i + \rho v_s \dot{u}_{iR} - \rho v_s \dot{u}$$

Sustituyendo los valores de las velocidades:

$$\sigma = N\left[(\lambda + 2G)W'(Nz_0) + \lambda U(Nz_0)\right]\exp i(-Nx) + i\rho v_p \omega W(Nz_0)\exp i(-Nx) \qquad (3.94)$$

$$\tau = iGN\left[U'(Nz_0) - W(Nz_0)\right] \exp i(-Nx)$$

$$-\omega\rho v_s\, U(Nz_0) \exp i(-Nx) \qquad (3.95)$$

El esfuerzo σ_i es igual a:

$$\sigma_i = a_R \rho v_p \dot{w}_{iR} AREA$$

Para $a_R \dot{w}_{iR}$ positiva se tiene σ_i positivo y por tanto Fz es positivo. Entonces

$$F_{z1} = a_R \rho v_p \dot{w}_{iR} AREA$$

El término $\rho v_p \dot{w}_{iR} = \sigma_i^*$ también nos da fuerza positiva:

$$F_z = (a_R \rho v_p \dot{w}_{iR} + \rho v_p \dot{w}_{iR})\, AREA \qquad (3.96)$$

Pero:

$$w_{iR} = i\omega W(Nz_0) \exp(-Nx)i$$

$$F_z = i(1 + a_R)\rho v_p \omega W(Nz_0) \exp(-Nx) i AREA \qquad (3.97)$$

Expresado en términos de la ecuación (3.81), queda:

$$F_z = \Big[N\left[(\lambda+2G)W'(Nz_0) + \lambda U(Nz_0)\right] \exp i(-Nx)$$

$$+ i\rho v_p \omega W(Nz_0) \exp i(-Nx) \Big] AREA \qquad (3.98)$$

Aboquemos nuestra atención a Fx. El esfuerzo τ_i puede expresarse de la siguiente forma:

$$\tau_i = b_R \rho v_s \dot{u}_{iR}$$

Para $b_R\dot{u}_{iR}$ positiva se tiene τ_i positivo y por tanto Fx es positiva. Entonces.

$$F_{x1} = b_R \rho v_s \dot{u}_{iR} \text{ AREA} \tag{3.99}$$

El término $\rho v_s \dot{u}_{iR} = \tau_i^*$ nos da fuerza positiva

$$F_x = (b_R \rho v_s u_{iR} + \rho v_s u_{iR}) \text{ AREA} \tag{3.100}$$

Pero:

$$\dot{u}_{iR} = -\omega U(Nz_o) \exp(-Nx)$$

Entonces:

$$F_x = -(b_R + 1) \rho v_s \omega U(Nz_o) \exp(-Nx) \text{ AREA} \tag{3.101}$$

Esta última expresión también puede escribirse como:

$$F_x = \Big[iGN\,(U'(Nz_o) - W(Nz_o) \quad \exp i(-Nx) \; -$$

$$- \omega \rho v_s U(Nz_o) \exp i(-Nx) \Big] \text{ AREA} \tag{3.102}$$

Las fuerzas Fx y Fz se aplicarán en todos los puntos nodales de la frontera, colocándose en esta última dos amortiguadores: uno en la dirección del eje X con constante ρv_s, y otro en la dirección del eje Z con constante ρv_p.

Frontera C

En este caso σ_i y τ_i son nulos. La condición de frontera es equivalente a considerar un conjunto de amortiguadores que absorban un sistema de ondas Rayleigh. Las constantes de absorción de tales amortiguadores son: en la dirección del eje X $a_R \rho v_p$ y en la dirección del eje Z, $b_R \rho v_s$. Los valores de a_R y b_R se valúan de acuerdo con las expresiones (3.72) y (3.73), según la formulación de Lysmer y Kuhlemeyer.

4. CASOS POR ANALIZAR.

Las configuraciones analizadas se presentan en la fig 4.1 Para la forma de tales accidentes topográficos (promontorio y depresión) se adoptó una función senoidal. Se supuso un material homogéneo, isótropo, linealmente elástico y con módulo de Poisson igual a 1/4. Se seleccionaron dimensiones totales grandes en comparación con las de la irregularidad, a fin de minimizar el error que las condiciones de frontera introducen en la solución.

En cada caso analizado, se supuso un tren de ondas de Rayleigh propagándose de izquierda a derecha, bajo condiciones de deformación plana.

Para fijar un límite superior en la frecuencia de excitación, con el fin de evitar que se propaguen altas frecuencias a través del modelo, se procedió a excitar dicho modelo sin irregularidad topográfica con diferentes frecuencias. Teóricamente no debe existir amplificación ni reducción del movimiento en todo punto del modelo. Los resultados obtenidos pueden verse en la figura 4.2 . En estas gráficas se presentan las amplificaciones normalizadas respecto al movimiento que se tendría si no existiera accidente topográfico, que en este caso deben ser unitarias. Se aprecia que el modelo se comporta mal para un rango de longitudes de onda mayores a un cierto valor que debe tomarse como límite, de acuerdo a la aproximación que se desee. Esta longitud de onda mínima de excitación se tomó igual a 350 m, que corresponde aproximadamente a 12 veces la longitud máxima del elemento finito empleado

4.1 Promontorios.

Se analizan tres promontorios con relaciones h/L_1 (ver fig 4.1) de 0.7, 0.5 y 0.3 respectivamente. Para cada valor de h/L_1 - se hizo variar la relación de la longitud de onda λ a ancho de- la base $2L_1$ del accidente topográfico, tomándose los valores de - 50, 5 y 2.5 . Este último valor fue el mínimo aceptable, con λ = 350 m. Las figuras 4.3 a 4.8 muestran las amplificaciones normalizadas respecto al movimiento que se tendría si no existiera promontorio, y corresponden a los puntos localizados a lo largo de la superficie del modelo considerado. Los resultados obtenidos para- la relación $\lambda/2L_1$= 50 se omiten, en virtud de que el movimiento - del terreno prácticamente no se afecta por la irregularidad topo - gráfica. La gráfica correspondiente a este último caso, corresponde a una recta horizontal, con ordenada al origen unitaria.

4.2 Depresiones.

El análisis fue prácticamente el mismo que para el caso - anterior. Las relaciones Z/L_1(ver fig 4.1) fueron 0.7, 0.5 y 0.3. Se tomaron valores de $\lambda/2L_1$ iguales a 10, 5 y 2.5 . Las figuras - 4.9 a 4.16 presentan los resultados obtenidos.

5. RESULTADOS.

De los análisis hechos se puede observar lo siguiente:

A. Promontorios.

a) Las amplificaciones máximas en todos los casos analizados se presentan en la cima, y son sensibles a la relación entre longitud de onda y ancho de la base del accidente topográfico.

b) De todos los casos analizados para cada promontorio, la máxima amplificación se presentó cuando la longitud de onda era comparable con el doble del ancho de la base del mismo ($4L_1$).

c) En general puede apreciarse una franca reducción del movimiento horizontal en los puntos localizados cerca del pie izquierdo del promontorio.

d) Entre mayor es la relación h/L_1, el efecto del accidente topográfico cobra mayor importancia, reflejándose en los valores de la amplificación.

e) En general se aprecia una influencia mayor al movimiento de las ondas incidentes del lado en que dichas ondas inciden, (izquierdo en nuestro caso).

B. Depresiones.

a) En todos los casos analizados ocurre una reducción del movimiento horizontal en el sitio más profundo de la depresión (sima), y es sensible a la relación λ/L_1 .

b) Para cada depresión, la reducción máxima tuvo lugar cuando la longitud de onda λ era comparable con el doble del an--

cho de dicha irregularidad ($4L_1$).

c) Para todos los casos se aprecia una amplificación -- máxima del movimiento horizontal en los puntos localizados cerca del borde izquierdo de la depresión (del lado donde inciden las ondas).

d) Entre mayor es la relación Z/L_1, el accidente topo-- gráfico influye más en el movimiento, reflejándose en los valo-- res de la amplificación.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Del estudio con elementos finitos se deduce que las irregularidades topográficas alteran significativamente las ondas sísmicas y que el fenómeno es sensible, entre otras variables, a la relación entre la longitud de onda λ y las dimensiones de la irregularidad.

Debido a que este trabajo prácticamente no tiene precedentes, los resultados obtenidos no pueden compararse con estudios anteriores, y por ello conviene calibrar la precisión de sus resultados, comparándolos con los de otros modelos que no se vean afectados por las aproximaciones introducidas para representar las condiciones de frontera.

RECONOCIMIENTOS

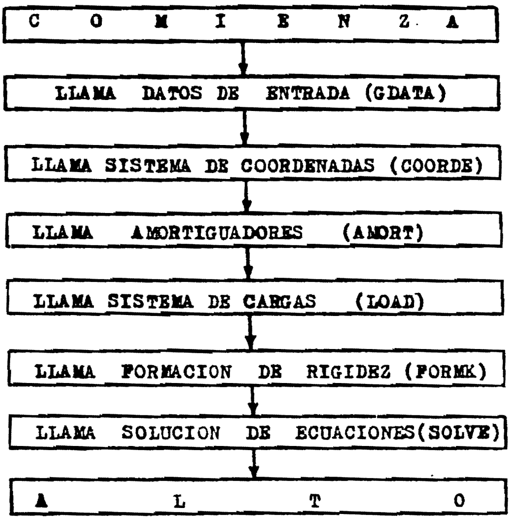
Deseo hacer patente mi reconocimiento al Dr. Luis Esteva M. por la dirección y revisión de este trabajo. Agradezco a Sonia Ruiz por su valiosa ayuda en la realización del mismo; a Rafael Aranda, a Gustavo Ayala y Alejandro Reyes, por sus preciados comentarios. Asimismo, a Laura M. González A. por la transcripción mecanográfica del manuscrito.

APENDICE. PROGRAMA DE COMPUTADORA. DIAGRAMA DE FLUJO.

El programa y las técnicas de programación que aquí se presentan se basan en el programa FESS (Finite Element Solution Swansea) (ref 3), pero a un nivel elemental. Es un programa que efectúa un análisis lineal de deformación plana, escrito en Fortran IV.

La estructuración de este programa es a base de subrutinas, controladas por un programa maestro, cuya función es llamarlas en el orden apropiado. Se presenta el diagrama de bloques, una breve explicación de las subrutinas y el listado del programa.

DIAGRAMA DE BLOQUES



SUBRUTINAS

A.1 Datos de Entrada.

A.1.1 Subrutina GDATA. Esta subrutina tiene por objeto leer la mayor parte de los datos necesarios para el funcionamiento del programa. Ellos son:

OMEGA	:	Frecuencia de excitación
NP	:	Número de puntos nodales
NE	:	Número de elementos
NB	:	Número de nodos restringidos
NLD	:	Número de casos para diferentes cargas
NDF	:	Número de grados de libertad por nodo
NMAT	:	Número de diferentes tipos de material
NEST	:	Número de estratos
NNA	:	Número de nodos en la frontera A (ver fig 3.6)
NAB	:	Número de nodos en la frontera B
NBAND	:	Ancho de banda de la matriz de rigidez
ORT(N,1)	:	Módulo de Young del material N
ORT(N,2)	:	Módulo de Poisson del material N
RO(N)	:	Densidad volumétrica del material N
VP(N)	:	Velocidad de ondas P en el material N
VS(N)	:	Velocidad de ondas S en el material N
ALT	:	Dimensión vertical del modelo
ESP(N)	:	Longitud del lado vertical del elemento
H(N)	:	Longitud del lado horizontal del elemento
NBC	:	Número de nodos restringidos
NFIX	:	Tipo de condición de frontera. Se da como combinaciones de 0 y 1 para cada grado de libertad, donde 0 denota libertad y 1 restricción

A.1.2 Subrutina COORDE. Tiene como función generar las coordenadas de la totalidad de los puntos nodales.

A.1.3 Conexiones del elemento. Se utilizó otro programa de computadora (ref 13) para generar las diferentes mallas estudiadas. El proceso de generación de dichas mallas es el siguiente:

a) Se colocan estratégicamente una serie de puntos dentro del área de estudio. Dichos puntos se numeran adecuadamente, con el fin de tener un ancho de banda mínimo, y lograr que el tiempo y costo de cómputo sean también mínimos.

b) Se generan las coordenadas de los puntos escogidos, utilizando la subrutina COORDE.

c) Con la información anterior se alimenta al programa, el cual generará la malla óptima para la distribución de puntos dada. La información que nos proporciona consiste en la distribución de todos los elementos, así como sus conexiones. Estas últimas se representan por:

NOP(N,I), en donde N es el número del elemento, e I la identificación de la conexión (1,2 ó 3).

A.1.4 Subrutina LOAD. Su función es formular el vector de cargas, con base en las ecuaciones obtenidas. Las operaciones básicas que realiza son:

a) Hace un arreglo de cargas nulas, RI(J).

b) Calcula las fuerzas externas para cada uno de los puntos nodales localizados en las fronteras A y B. Estas fuerzas son R(1) y R(2) correspondientes a las direcciones de los ejes X y Z respectivamente; y finalmente

c) Ensambla las fuerzas en el arreglo general de cargas.

A.1.5 Subrutina AMORT. En esta subrutina se generan las constantes de los amortiguadores colocados en las fronteras del modelo. El proceso consiste en:

a) Hacer un arreglo vectorial nulo T(JJ).

b) Calcular las constantes de amortiguamiento del nodo; y

c) Ensamblar dichas constantes en el arreglo vectorial.

A.2 Generación de la Matriz de Rigidez.

A.2.1 Subrutina STIFT2. Calcula la matriz de rigidez del elemento. Las operaciones básicas que realiza son:

a) Referir el elemento a un sistema local de coordenadas.
b) Construir la matriz deformación-desplazamiento B.
c) Construir la matriz esfuerzo-deformación D.
d) Realizar la multiplicación matricial $B^T D B$.
e) Integrar sobre el área los términos del producto matricial; y
f) Referir los resultados al sistema general de coordenadas.

Los nombres de las variables correspondientes a las matrices anteriores, en el programa son:

$$B = A$$
$$D = ESTIFM$$
$$B^T D B = ESTIF$$

A.2.2 Subrutina FORMK. Las funciones básicas de esta subrutina son ensamblar las matrices de rigidez y de masas de todo el modelo, y efectuar operaciones entre esta dos matrices y la de amortiguamiento, para plantear los sistemas de ecuaciones a resolver. Estas matrices se trabajan en forma de banda. El proceso de operación es el siguiente:

a) Inicializa con el arreglo matricial nulo SK.
b) Llama a la matriz de rigidez del elemento, y la ensambla en el arreglo SK.
c) Ensambla la matriz de masas S.
d) Forma la matriz $SK - w^2 S + iwT = SKI$ (ver ec. 3.8)
e) Establece condiciones de frontera.

A.3. Solución del Sistema de Ecuaciones.

A.3.1 Subrutina SOLVE. Sus funciones son resolver el sistema de ecuaciones (para obtener desplazamientos) y relacionar los desplazamientos obtenidos con los de la solución de campo libre, para calcular las amplitudes normalizadas. El método de solución empleado es el de Gauss-Jordan.

LISTADO DEL PROGRAMA.

```
C
C       PROGRAMA PRINCIPAL
FILE    1=RIGT,UNIT=DISK,SAVE=30,RECORD=840,BLOCKING=1
       1,AREA=1*28

FILE    10=MALLA,UNIT=DISK,SAVE=30,RECORD=800

        COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
       1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
        COMMON/CERO/TI(900),R1(900)
        COMMON/UNO/SKI(900,35)
        COMMON/DOS/ORT(4,2)
        COMMON/TRES/S(900),T(900),VP(2),VS(2),ZETA(2)
       1,NBC(25),NFIX(25),RO(6),ALT(6),H(6),ESP(6)
        COMMON/CLMAT/LMAT(1, 900),IMAT( 900)
        COMMON/CMAT/NMAT1(900),NMAT2(900)
        COMMON/CONN/NOP(769,4)
        COMMON/COORD/CORD(475,2)
C
        COMPLEX SKI,TI,R1,AK
        NCN=4
        READ(5,1)NPROB

        DO 400 NPR=1,NPROB
C
        NNE=714
        NE=NNE
        DO 800 IJ=1,4
  800   READ(10=IJ)(NOP(J,IJ),J=1,NNE)
        READ(10=5)(IMAT(J),J=1,NNE)
    2   FORMAT(16I5)
C                LEE GEOMETIA Y PROPIEDADES
C
        CALL GDATA (NE)
        CALL COORDE
C
C
        NSZF=NP*NDF
        DO 200 LI=1,NLD
C                LEE CARGAS
C                FORMA Y RESUELVE ECUACIONES SIMULTANEAS
C
        CALL AMORT
        CALL LOAD
        CALL FORMK (NE)
        CALL SOLVE
  200   CONTINUE
  400   CONTINUE
    1   FORMAT (9I5)
C
        LOCK 9

        LOCK 10
        LOCK 12

        CALL EXIT
        END
```

```
      SUBROUTINE GDATA (NE)
C        ESTA LEE LAS PROPIEDADES BASICAS GEOMETRICAS
C
      COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
     1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
      COMMON/DOS/ORT(4,2)
      COMMON/TRES/S(900),T(900),VP(2),VS(2),ZETA(2)
     1,NBC(25),NFIX(25),RO(6),ALT(6),H(6),ESP(6)
      INTEGER A,B
      COMPLEX SKI,TI,R1,AK
      READ(5,7)TITU
      WRITE(6,100)TITU

      READ (5,10) OMEGA
      READ(5,1)NP,NE,NB,NLD,NDF,NMAT,I1,NEST,NNA,NAB,NBAND
      WRITE(6,1)NP,NE,NB,NLD,NDF,NMAT,I1,NEST,NNA,NAB,NBAND
C
C          LEE Y ESCRIBE DATOS DE MATERIALES
C
      READ(5,8)(N,(ORT(N,I),I=1,2),N=1,NMAT)
      WRITE(6,108)
      WRITE(6,8)(N,(ORT(N,I),I=1,2),N=1,NMAT)
C
      READ(5,9) (N,RO(N),VP(N),VS(N),ALT(N),ESP(N),H(N),N=1,NMAT)
    9 FORMAT(I10,1F10.3,F20.1,4F10.3)
      WRITE(6,19)(N,RO(N),VP(N),VS(N),ESP(N),H(N),N=1,NMAT)
   19 FORMAT(I10,5F10.3)
C
C          ESCRIBE DATOS DE ENTRADA
C
      WRITE (6,95)
      WRITE (6,10) OMEGA
      WRITE(6,104)
      WRITE(6,4)(NBC(I),NFIX(I),I=1,NB)
    1 FORMAT(11I5)
    4 FORMAT(2I5)
    7 FORMAT(12A6)
    8 FORMAT(I10,2F10.2)
   10 FORMAT (F10.4)
   95 FORMAT (/,"FREC.DE EXCITACION")
  100 FORMAT(1H1,12A6)
  104 FORMAT(25H0 CONDICIONES DE FRONTERA)
  108 FORMAT (/,"PROPIEDADESDE LOS MATERIALES",/)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE LOAD
C
C         ESTA FORMULA EL VECTOR DE CARGAS
C
      COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
     1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
      COMMON/CERO/TI(900),R1(900)
      COMMON/DOS/ORT(4,2)
      COMMON/TRES/S(900),T(900),VP(2),VS(2),ZETA(2)
     1,NBC(25),NFIX(25),RO(6),ALT(6),H(6),ESP(6)
      COMMON/COORD/CORD(475,2)
      DIMENSION R(3),L(2),NQ(60)
      REAL KA,KZ,KX,NU,LAMBDA,NES ,L
      COMPLEX SKI,TI,R1,R
C
      READ(5,1)NPC
C     ARREGLO DE CARGAS NULAS
C
      DO 160 J=1,NSZF
  160 R1(J)=CMPLX(0.,0.)
      WRITE(6,109)
      NU=1.08766
      ESE=0.577
      ESE2=ESE*ESE
      VR=VS(2)/NU
      NES=NU/ESE
      ZG=VS(2)*VS(2)*RO(2)
      LAMBDA=2.*ZG*ORT(2,2)/(1.-2.*ORT(2,2))
      CTE=LAMBDA+2.*ZG
      KA=OMEGA/VR
      CO=RO(2)*VP(2)*OMEGA*ESP(2)
      CO1=RO(2)*VS(2)*OMEGA*ESP(2)
      READ(5,2)(NQ(J),J=1,NPC)
    2 FORMAT (14I5)
      DO 200 I=1,NPC
```

```
      IF(Z.EQ.ALT(2))GO TO 90
      Z=ALT(2)-CORD(NO(I),2)
      KZ=KA*Z
      AAA=-.8475*KZ
      BBB=-.3933*KZ
      F=-EXP(AAA)+.5773*EXP(BBB)
      G=-.8475*EXP(AAA)+1.4679*EXP(BBB)
      FP=.8475*EXP(AAA)-.22705*EXP(BBB)
      GP=.7182*EXP(AAA)-.5773*EXP(BBB)
      B=NU*(1.+(-1.)*(FP/G))
      A=NES*(1.-(1.-2.*ESE2)*(-1.)*(GP/F))
      PXA=-CO*F
      PX=PXA*A
      FXRA=PX+PXA
      PYA=-CO1*G
      PY=PYA*B
      FYIA=PYA+PY
      IF(Z.EQ.0..OR.Z.EQ.ALT(2))FXRA=FXRA*.5
      IF(Z.EQ.0..OR.Z.EQ.ALT(2))FYIA=FYIA*.5
      R(1)=CMPLX(FXRA,0.)
      R(2)=CMPLX(0.,FYIA)
      IF(Z.LT.ALT(2))GO TO 100
   90 X=CORD(NO(I),1)
      KX=KA*X
      SKX= SIN(KX)
      CKX=COS(KX)
      CO2=CO1*F
      CO3=CO*G
      TXR=PY*SKX
      TXAR=-CO2*CKX
      FXRB=TXR+TXAR
      TXI=PY*CKX
      TXAI=CO2*SKX
      FXIB=TXI+TXAI
      CONST=(CTE*GP+LAMBDA*F)*KA*ESP(2)
      TYR=-CONST*CKX
      TYAR=-CO3*SKX
      TYRB=TYR+TYAR
      TYI= CONST*SKX
      TYAI=-CO3*CKX
      TYIB=TYI+TYAI
      IF(NO(I).EQ.1)GO TO 95
      R(1)=CMPLX(FXRB,FXIB)
      R(2)=CMPLX(TYRB,TYIB)
      IF(NO(I).EQ.NO(NPC))R(1)=R(1)*.5
      IF(NO(I).EQ.NO(NPC))R(2)=R(2)*.5
      GO TO 100
   95 FXRB=FXRB*.5
      FXIB=FXIB*.5
      TYRB=TYRB*.5
      TYIB=TYIB*.5
      R(1)=R(1)+CMPLX(FXRB,FXIB)
      R(2)=R(2)+CMPLX(TYRB,TYIB)
  100 WRITE(6,3)NO(I),(R(K),K=1,2)
      DO 170 K=1,2
      IC=(NO(I)-1)*2+K
  170 R1(IC)=R(K)+R1(IC)
  200 CONTINUE
    1 FORMAT (I5)
    3 FORMAT (I10,4F15.4)
  109 FORMAT(/,*CARGAS*,/)
      RETURN
      END


      SUBROUTINE STIFT2(N,ESTIF,SS)
C
C       CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDECES DEL ELEMENTO
C
C     N NUM.ELEMENTOS
C     I,J,K CONECCIONES DE ELEMENTOS
C     AJ,BJ,AK,BK    COORDENADAS LOCALES DEL TRIANGULO
C     A(3,6)         MATRIZ DE DEF-DESPLAZAMIENTOS
C     ESTIFM(12,12)  MATRIZ ESFUERZO-DEFORMACION
C     B(3,9)         MATRIZ ESF.SUSTITUCION HACIA ATRAS
      COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
     1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
      COMMON/DOS/ORT(4,2)
      COMMON/TRES/S(900),T(900),VP(2),VS(2),ZETA(2)
     1,NBC(25),NFIX(25),PC(6),ALT(6),R(6),ESP(6)
      COMMON/CONN/NOP(762,4)
      COMMON/COORD/CORD(475,2)
      COMMON/CLMAT/LMAT(1, 900),IMAT( 900)
      DIMENSION ESTIF(12,12),A(3,6),B(3,9),SS(6)
      COMPLEX SKI,TI,TI,AP
```

```
C        DETERMINACION DE CC. ENTRE ELEMENTOS
      I=NOP(N,1)
      J=NOP(N,2)
      K=NOP(N,3)
      L=IMAT(N)
C
C        SISTEMA COORDENADAS LOCAL
C
      AJ=CORD(J,1)-CORD(I,1)
      DK=CORD(K,1)-CORD(I,1)
      BJ=CORD(J,2)-CORD(I,2)
      BK=CORD(K,2)-CORD(I,2)
      AREA=(AJ*BK-DK*BJ)*0.5
      IF(AREA.LE.0.)GO TO 220
C
C        FORMACION MATRIZ DEF.-DESPLAZAMIENTOS
C
      A(1,1)=BJ-BK
      A(1,2)=0.
      A(1,3)=BK
      A(1,4)=0.
      A(1,5)=-BJ
      A(1,6)=0.
      A(2,1)=0.
      A(2,2)=DK-AJ
      A(2,3)=0.
      A(2,4)=-DK
      A(2,5)=0.
      A(2,6)=AJ
      A(3,1)=DK-AJ
      A(3,2)=BJ-BK
      A(3,3)=-DK
      A(3,4)=BK
      A(3,5)=AJ
      A(3,6)=-BJ
C
C       FORMACION MATRIZ ESF-DEFORMACION

      COMM=ORT(L,1)/((1.+ORT(L,2))*(1.-ORT(L,2)*2.)*AREA)
      ESTIF(1,1)=COMM*(1.-ORT(L,2))
      ESTIF(1,2)=COMM*ORT(L,2)
      ESTIF(1,3)=0.
      ESTIF(2,1)=ESTIF(1,2)
      ESTIF(2,2)=ESTIF(1,1)
      ESTIF(2,3)=0.
      ESTIF(3,1)=0.
      ESTIF(3,2)=0.
      ESTIF(3,3)=ORT(L,1)/(2.*(1+ORT(L,2))*AREA)
C
C        B ES LA MATRIZ DE ESF.SUST.HACIA ATRAS
C
      DO 205 I=1,3
      DO 205 J=1,6
      B(I,J)=0.
      DO 205 K=1,3
  205 B(I,J)=B(I,J)+ESTIF(I,K)/2.*A(K,J)
C
C
C        ESTIF ES LA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
C
      DO 210 I=1,6
      DO 210 J=1,6
      ESTIF(I,J)=0.
      DO 210 K=1,3
  210 ESTIF(I,J)= ESTIF(I,J)+B(K,I)/2.*A(K,J)
      DO 200 I=1,6
  200 SS(I)=AREA*RO(1)/3
      RETURN
C
C       SALIDA POR ERROR
C
  220 WRITE(6,100)N
  100 FORMAT(/,"ELEMENTO",I4,"TIENE AREA NULA O NEGATIVA",/,"FIN")
      CALL EXIT
      END
```

```
C
      SUBROUTINE FORMK (NE)
C
C        FORMA MATRIZ DE RIGIDECES EN FORMA TRIANGULAR SUP.
C
      COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
     1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
      COMMON/CERO/TI(900),RI(900)
      COMMON/UNO/SKI(900,35)
      COMMON/DOS/ORT(4,2)
      COMMON/TRES/S(900),T(900),VP(2),VS(2),ZETA(2)
     1,NBC(25),NFIX(25),RO(6),ALT(6),H(6),ESP(6)
      COMMON/CLMAT/LMAT(1, 900),IMAT( 900)
      COMMON/CONN/NOP(769,4)
      DIMENSION SK(900,35)
      DIMENSION ESTIF(12,12),SS(6)
      COMPLEX SKI,TI,RI,AK
C
C        ANCHO DE BANDA Y NUM. DE ECUACIONES
C
C
C         MATRIZ DE RIGIDECES CERO
C
      DO 300 N=1,NSZF
      S(N)=0.
      DO 300 M=1,NBAND
  300 SK(N,M)=0.
C
C        EXPLORA LA MATRIZD E RIGIDECES
C
      DO 400 N=1,NE
      CALL STIF12(N,ESTIF,SS)
C         REGRESA ESTIF CONC MATRIZ DE RIGIDECES
C
C         GUARDA ESTIF EN SK
C
C         PRIMERAS FILAS
C
      DO 350 JJ=1,NCN
      NROWB=(NOP(N,JJ  )-1)*NDF
      IF(NROWB)350,305,305
  305 DO 350 J=1,NDF
      NROWB=NROWB+1
      I=(JJ-1)*NDF+J
      S(NROWB)=S(NROWB)+SS(I)
C
C         DESPUES COLUMNAS
C
C
      DO 330 KK=1,NCN
      NCOLB=(NOP(N,KK)-1)*NDF
      DO 320 K=1,NDF
      L=(KK-1)*NDF+K
      NCOL=NCOLB+K+1-NROWB
C
C
C
      IF(NCOL)320,320,310
  310 SK(NROWB,NCOL)=SK(NROWB,NCOL)+ESTIF(I,L)
  320 CONTINUE
  330 CONTINUE
  350 CONTINUE
  400 CONTINUE
      DO 401 I=1,NBAND
  401 WRITE(1)(SK(J,I),J=1,NSZF)
      WRITE(1)(S(L),L=1,NSZF)
      LOCK 1
      WRITE(6,24)
   24 FORMAT(" MATRIZ M ")
      WRITE(6,25) (S(I),I=1,2*NP)
   25 FORMAT (6F15.4)
C   FORMACION DE   K=W2M   (REAL)
      DO 460 I=1,NSZF
  460 SK(I,1)=SK(I,1)-S(I)*OMEGA*OMEGA
      DO 470 I=1,NSZF
      DO 470 J=1,NBAND
  470 SKI(I,J)=CMPLX      (SK(I,J),0.)
C  FORMACION DE   K=W2M+INC
      DO 461 I=1,NSZF
  461 SKI(I,1)=SKI(I,1)+TI(I)
C     C   PONE CONDICIONES DE FRONTERA
      DO 500 N=1,NB
      NX=10**(NDF-1)
```

```
      NROWB=(I-1)*NDF
C        EXAMINA CADA GRADO DE LIBERTAD
      DO 490 N=1,NDF
      NROWB=NROWB+1
      ICON=NFIX(N)/NX
      IF(ICON)450,450,420
  420 SKI(NROWB,1)=CMPLX(1.,0.)
      DO 430 J=2,NBAND
      SKI(NROWB,J)=CMPLX(0.,0.)
      NR=NROWB+1-J
      IF(NR)430,430,425
  425 SKI(NR,J)=CMPLX(0.,0.)
  430 CONTINUE
      NFIX(N)=NFIX(N)-NX*ICON
  450 NX=NX/10
  490 CONTINUE
  500 CONTINUE
C
      RETURN
      END


C
C

      SUBROUTINE AMORT
      COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
     1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
      COMMON/CERO/TI(900),R1(900)
      COMMON/DOS/ORT(4,2)
      COMMON/TRES/S(900),T(900),VP(2),VS(2),ZETA(2)
     1,NBC(25),NFIX(25),RO(6),ALT(6),E(6),ESP(6)
      COMMON/CMAT/NMAT1(900),NMAT2(900)
      COMMON/COORD/CORD(475,2)
      DIMENSION NOAPOR(65),           G(2)  ,L(2)
      REAL L
      COMPLEX SKI,TI,R1,AK
      DO 5 JJ=1,2*NP
    5 T(JJ)=0.
      READ(5,2)(NOAMOR(I),I=1,NNA)
      READ(5,2)(NOAPOR(NNA+I),I=1,NAB)
      F=OMEGA*1.08766/VS(1)
   94 FORMAT(F10.5)
      G(1)=VS(1)*VS(1)*RO(1)
      G(2)=VS(2)*VS(2)*RO(2)
      RELG=G(2)/G(1)
      F2=F*F
C
      L(1)=2.*G(1)*ORT(1,2)/(1.-2.*ORT(1,2))
      L(2)=2.*G(2)*ORT(2,2)/(1.-2.*ORT(2,2))
      ZK=OMEGA/VS(1)
      ZK2=ZK*ZK
      ZKP=OMEGA/VS(2)
      ZKP2=ZKP*ZKP
      SP=SQRT(F2-ZKP2)
      U=SQRT(F2-ZK2)
      ACHE12=OMEGA*OMEGA/(VP(1)*VP(1))
      ACHE22=OMEGA*OMEGA/(VP(2)*VP(2))
      FSUBU=F2-ACHE12
      FSUBUP=F2-ACHE22
      FS1=SQRT(FSUBU)
      H=ALT(1)
      CHFS1H=COSH(FS1*H)
      SHFS1H=SINH(FS1*H)
      CHSH=COSH(U*H)
      SHSH=SINH(U*H)
      X=RELG*(ZKP2/F2)-2.*(RELG-1.)
      Y=W+(ZK2/F2)
      W=2.*(RELG-1.)
      ZZZ=X-(ZK2/F2)
      BEE=F/FS1
      CEE=SQRT(FSUBUP)/F
      WA=W*CEE
      ZKASP=ZK2
      ZKAA=ZK2
      AA=SQRT(FSUBUP/FSUBU)
      YA=AA*ZKAA/F2+WA*BEE
      ZA=-ZKAA*BEE/F2+X  *BEE
      PAS=2.*X*SHFS1H/BEE+2.*YA*CHFS1H/BEE-(2.-ZK2/F2)*CHSH*WA
     *-(2.-ZK2/F2)*F/U*ZZZ*SHSH
      ETA=-2.*SP*W*SHFS1H/(BEE*F)-2.*ZA*CHFS1H/BEE+(2.-ZK2/F2)*X*CHSH
     *+(2.-ZK2/F2)*SP/U*SHSH*Y
```

```
      AP=PAS/ETA
      A=F2/ZK2*(WA+X*AP)
      P=F2/ZKASP*(X   +SP*W*AP/F)
      B=F2*F/(U*ZK2)*(ZZZ+SP*AP*Y/F)
      Q=F2/ZKAA*(YA+ZA*AP)
      WRITE(6,26)
   26 FORMAT (/,"DIAG MATRIZ AMORT POR OMEGA" )
      DO 9  J=1,NNA
      IF(J.LE.9)GO TO 7
      ZZ=ALT(2)-CORD(NOAMOR(J),2)
      Z=ALT(1)-ZZ
      CHFS1Z=COSH(FS1*Z)
      SHFS1Z=SINH(FS1*Z)
      EFUPZ=EXP(SQRT(FSUBUP)*Z)
      ESPZ=EXP(SP*Z)
      CHSZ=COSH(U*Z)
      SHSZ=SINH(U*Z)
      F1=P*CHFS1Z+Q*SHFS1Z-U*(A*SHSZ+B*CHSZ)/F
      G1=-FS1/F*(P*SHFS1Z+Q*CHFS1Z)+(A*CHSZ+B*SHSZ)
      F11=EFUPZ-SP*AP*ESPZ/F
      G11=-SQRT(FSUBUP)/F*EFUPZ+AP*ESPZ
      F1P=FS1*(P*SHFS1Z+Q*CHFS1Z)-(U*U/F)*(A*CHSZ+B*SHSZ)
      G1P=-FS1*FS1/F*(P*CHFS1Z+Q*SHFS1Z)+(A*SHSZ+B*CHSZ) *U
      F11P=SQRT(FSUBUP)*EFUPZ-SP*AP*SP*ESPZ/F
      G11P=-FSUBUP /F*EFUPZ+AP*SP*ESPZ
      IF(ZZ.GT.180.)GO TO 290
      AM1=VP(1)*F/OMEGA+L(1)*G1P/(OMEGA*RC(1)*VP(1)*F1)
      BM1=VS(1)*F/OMEGA-VS(1)*F1P/(OMEGA*G1)
      II=2*NOAMOR(J)-1
      T (II)=RO(NMAT2(NOAMOR(J)))*VP(NMAT2(NOAMOR(J)))*AM1*
     .ESP(NMAT2(NOAMOR(J)))*OMEGA
      T  (II+1)=RO(NMAT2(NOAMOR(J)))*VS(NMAT2(NOAMOR(J)))*BM1*
     .ESP(NMAT2(NOAMOR(J)))*OMEGA
      GO TO 1111
  290 CONTINUE
      AM2=VP(2)*F/OMEGA+L(2)*G11P/(OMEGA*FO(2)*VP(2)*F11)
      BM2=VS(2)*F/OMEGA-VS(2)*F11P /(OMEGA*G11)
      II=2*NOAMOR(J)-1
      T  (II)=RO(NMAT2(NOAMOR(J)))*VP(NMAT2(NOAMOR(J)))*AM2*
     .ESP(NMAT2(NOAMOR(J)))*OMEGA
      T  (II+1)=RO(NMAT2(NOAMOR(J)))*VS(NMAT2(NOAMOR(J)))*BM2*
     .ESP(NMAT2(NOAMOR(J)))*OMEGA
      GO TO 1111
    7 II=(2*NOAMOR(J))-1
      T(II)=RO(NMAT2(NOAMOR(J)))*VP(NMAT2(NOAMOR(J)))*  ESP(NMAT2(NOAMOR
     1(J)))*OMEGA
      T(II+1)=RO(NMAT2(NOAMOR(J)))*VS(NMAT2(NOAMOR(J)))*ESP(NMAT2(NOAMOR
     2(J)))*OMEGA
 1111 CONTINUE
      TI(II)=CMPLX(0.,T(II))
      TI(II+1)=CMPLX(0.,T(II+1))
      WRITE(6,29)NOAMOR(J),TI(II),TI(II+1)
    9 CONTINUE
C AMORTIGUADORES DE LA BASE
      DO 16  I=NNA+1,NNA+NAB
      II=2*(NOAMOR(I))-1
      T(II)=RO(NMAT2(NOAMOR(I)))*VS(NMAT2(NOAMOR(I)))*  ESP(NMAT2(NOAMOR (J
     4(I)))*OMEGA
      T(II+1)=RO(NMAT2(NOAMOR(I)))*VP(NMAT2(NOAMOR(I)))*  ESP(NMAT2(NOAM OR(
     4OR(I)))*OMEGA
      TI(II)=CMPLX(0.,T(II))
      TI(II+1)=CMPLX(0.,T(II+1))
      WRITE(6,29)NOAMOR(I),TI(II),TI(II+1)
   16 CONTINUE
C AMORTIGUADORES DE LAS ESQUINAS
      TI(1)=TI(1)*.5
      TI(2)=TI(2)*.5
      TI(19)=TI(19)*.5
      TI(20)=TI(20)*.5
      TI(795)=TI(795)*0.5
      TI(796)=TI(796)*0.5
      TI(NP*2)=TI(NP*2)*.5
      TI(NP*2-1)=TI(NP*2-1)*.5

    2 FORMAT (16I5)
  100 FORMAT(I5)
   29 FORMAT(I10,4F20.2)
  150 FORMAT (/,10E12.5)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE COORDE
      COMMON/COORD/XORD(475),YORD(475)
      COMMON/CMAT/NMAT1(900),NMAT2(900)
      DIMENSION CORD(475,2),CORDN(2),CORINC(2),CORDV(2)
      M=1
   50 READ(5,1000)N,CORDN(1),CORDN(2),K,NMA11,NMA22,NPN
      IF(K.EQ.0)GO TO 450
      NM=(N-M)/K
      DO 100 I=1,2
  100 CORINC(I)=(CORDN(I)-CORDV(I))/NM
      NM=NM-1
C
      DO 400 I=1,NM
      M=M+K
      DO 200 J=1,2
  200 CORD(M,J)=CORD(M-K,J)+CORINC(J)
      XORD(M)=CORD(M,1)
      YORD(M)=CORD(M,2)
      IF(NMA11.EQ.0)NMA11=1
      IF(NMA22.EQ.0)NMA22=1
      NMAT1(M)=NMA11
      NMAT2(M)=NMA22
  400 CONTINUE
  450 DO 500 I=1,2
      CORDV(I)=CORDN(I)
  500 CORD(N,I)=CORDN(I)
      M=N
      XORD(N)=CORD(N,1)
      YORD(N)=CORD(N,2)
      IF(NMA11.EQ.0)NMA11=1
      IF(NMA22.EQ.0)NMA22=1
      NMAT1(N)=NMA11
      NMAT2(N)=NMA22
      IF(N.NE.NPN)GO TO 50
      DO 101 I=1,NPN
  101 WRITE(6,1000)I,CORD(I,1),CORD(I,2)
 1000 FORMAT(I5,2F10.3,4I5)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SOLVE
C
C        RESUELVE SIST.ECUACIONES
C
      COMMON/CONTR/TITU(12),NP,    NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,LI,NT4
     1,NNA,NAB,NBAND,NEST,OMEGA
      COMMON/CERO/TI(900),PI(900)
      COMMON/UNO/SKI(900,35)
      COMMON/COS/ORT(4,2)
      DIMENSION SQT(900),AK(900,35)
      COMPLEX SKI,TI,PI,AK,C
C
      READ(5,1400)IND
 1400 FORMAT(I5)
      IF(IND.EQ.0) GO TO 415
      CTE1=0.42
      CTE2=0.62
      GO TO 416
  415 CTE1=2.0
      CTE2=2.0
  416 CONTINUE
      DO 417 J=1,NSZF
      DO 417 I=1,NBAND
  417 AK(J,I)=SKI(J,I)
C
C        REDUCCION DE MATRIZ
      DO 300 N=1,NSZF
      I=N
      DO 290 L=2,NBAND
      I=I+1
      IF(REAL(AK(N,L)).EQ.0..AND.AIMAG(AK(N,L)).EQ.0.)GO TO 290
  240 C=AK(N,L)/AK(N,1)
      J=0
      DO 270 K=L,NBAND
      J=J+1
      IF(REAL(AK(N,K)).EQ.0..AND.AIMAG(AK(N,K)).EQ.0.)GO TO 270
  260 AK(I,J)=AK(I,J)-C*AK(N,K)
  270 CONTINUE
  280 AK(N,L)=C
C        VECTOR CARGA C/ECUACION
      PI(I)=PI(I)-C*PI(N)
  290 CONTINUE
```

```
  300 R1(N)=R1(N)/AK(N,1)
C           SUST.HACIA ATRAS
      N=NSZF
  350 N=N-1
      IF(N)500,500,360
  360 L=N
      DO 400 K=2,NBAND
      L=L+1
      IF(REAL(AK(N,K)).EQ.0..AND.AIMAG(AK(N,K)).EQ.0.)GO TO 400
  370 R1(N)=R1(N)-AK(N,K)*R1(L)
  400 CONTINUE
      GO TO 350
  500 WRITE (6,1508)
      WRITE(6,1509)
      WRITE(6,1507) (R1(I),I=1,NSZF)
      WRITE(6,1511)
      DO 401 I=1,NSZF
      SQT(I)=SQRT(((REAL(R1(I))*REAL(R1(I)))+ (AIMAG(R1(I))*AIMAG(R1(I))
     1)))
      IF(I.LT.19)GO TO 399
      KK=(-1)**I
      IF(KK.LT.0) COCIEN=SQT(I)/CTE1
      IF(KK.GT.0) COCIEN=SQT(I)/CTE2
  399 N=(I+1)/2
  401 WRITE(6,1510)N,SQT(I),COCIEN
 1507 FORMAT (2X,4E16.8)
 1508 FORMAT (/,"SOLUCION VECTOR DESPLAZAMIENTOS")
 1509 FORMAT(/,"DESPL HORIZ REAL",5X,"HORIZ IMAG",7X,"VERT REAL",8X,
     1"VERT IMAG")
 1510 FORMAT(2X,I5,E16.8,F20.5)
 1511 FORMAT("MODULO DE LOS VECTORES DESPLAZAMIENTO")
      RETURN
      END
```

REFERENCIAS.

1. RUIZ,S, "Influencia de las Condiciones Locales en las Características de los Sismos", Informe 387 Instituto de Ingeniería, UNAM, México (1977).
2. FACCIOLI,E, Y RESENDIZ,D, "Soil Dynamics Behavior Including Liquefaction", Informe E-15 Instituto de Ingeniería, (1975).
3. ZIENKIEWICZ,OC, "The Finite Element Method in Engineering -- Science ", Mc Graw Hill, London (1971).
4. TIMOSHENKO,S, and GOODIER,J,N, " Theory of Elasticity " 2nd ed., Mc Graw Hill (1951)
5. RICHART, HALL, " Vibration of Soils and Foundations ", Prentice Hall Inc. , Englewood Cliffs, N S (1970).
6. ZAMORANO,F, " Interacción Suelo-Agua-Cortina en Presas durante Sismo ", Tesis doctoral, México,D.F., UNAM, (1977).
7. SMITH,W D, " A Nonreflecting Boundary for Wave Propagation - Problems ", Journal of the Computation Physics, Vol 15, No.- 4, August 1974.
8. LYSMER, y KUHLEMEYER, " Finite Dynamic Model for Infinita Media ", Journal of the Engng. Mech. Div., EM4 (1969), p.p. -- 859 - 875.
9. WEEKS, VALLIAPAN, IAN K, " A Unified Boundary for Finite Dynamic Models "
10. ARANDA,R, " Formulación Numérica del Problema de Propagación de Ondas " , Tesis de maestría, DESFI, (1977).
11. AYALA,G, y ARANDA,R, " Fronteras Activas en Dinámica de Suelos ", IV Congresos Nacional de Ingeniería Sísmica, México,- (1975).
12. ESTEVA,L, y RUIZ,S, " Amplificación de Ondas de Rayleigh ",- Publicación 16 de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, Septiembre-diciembre 1976.

13. FREDERICK, C O, WONG, Y C, EDGE, F W, " Two Dimensional Automatic Mesh Generation for Structural Analysis ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, p.p. 133 - 144 (1970).

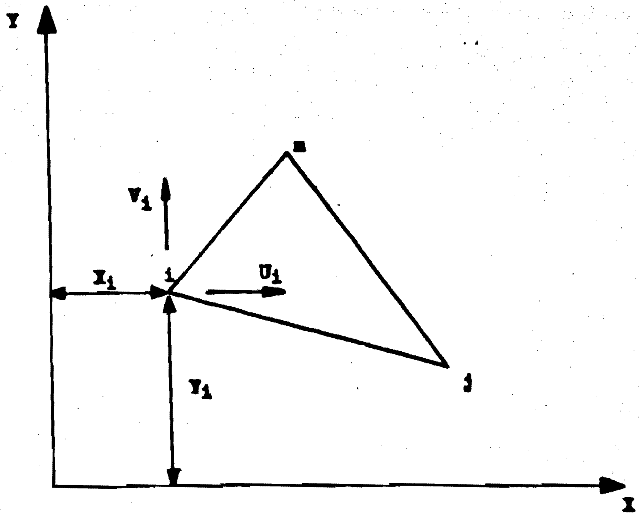


Fig. 2-1. Elemento finito triangular.

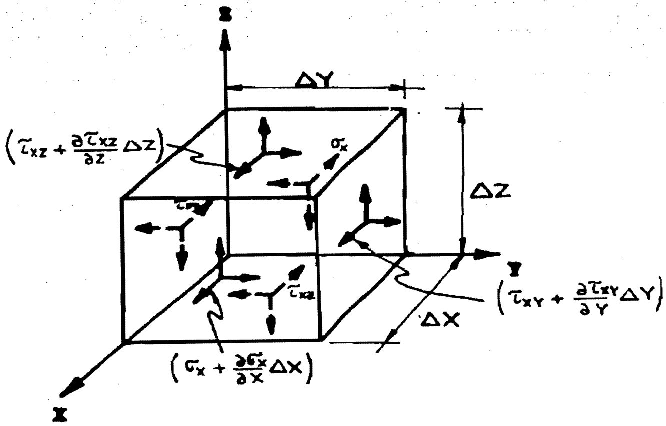


Fig. 3.1. Esfuerzos en un elemento diferencial de un medio elástico infinito.

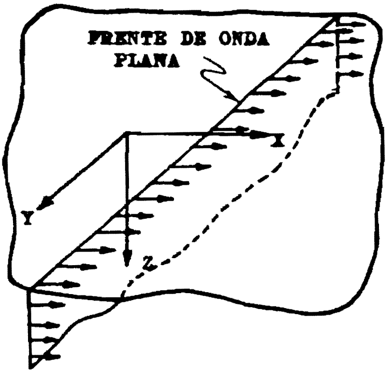


Fig 3.2 . Convención de coordenadas para el semiespacio elástico.

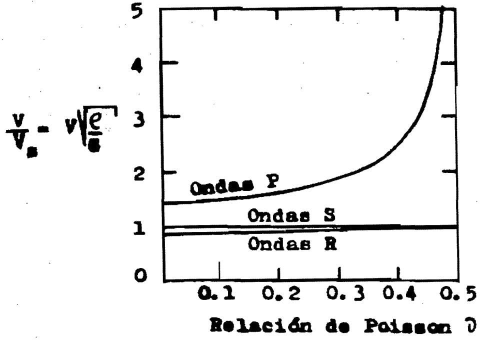


Fig. 3.3 Relación entre ν y las velocidades de propagación de ondas P,S y R.

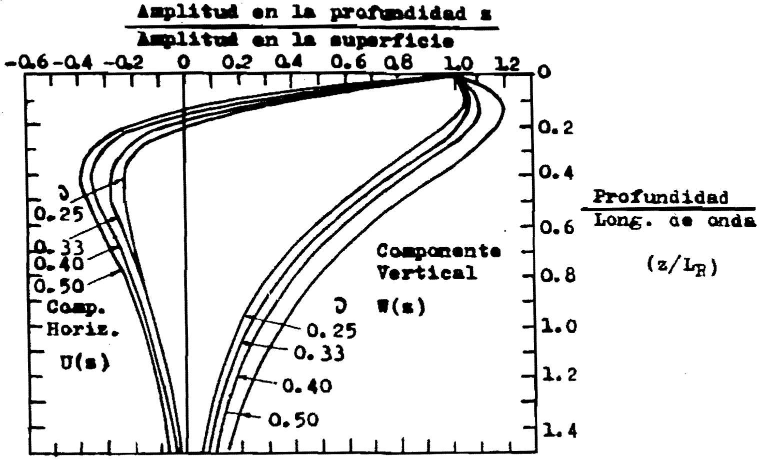


Fig. 3.4 Relación de amplitud contra profundidad adimensional para onda Rayleigh.

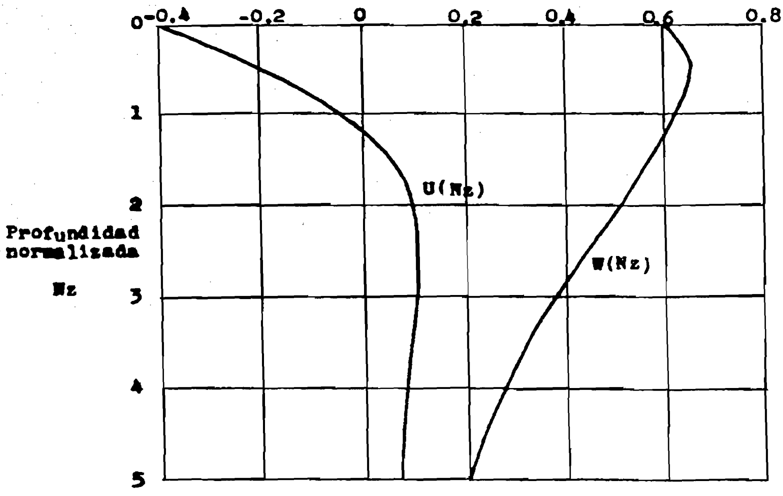


Fig. 3.4a Las funciones U(Nz) y W(Nz) para relación de Poisson igual a 0.25

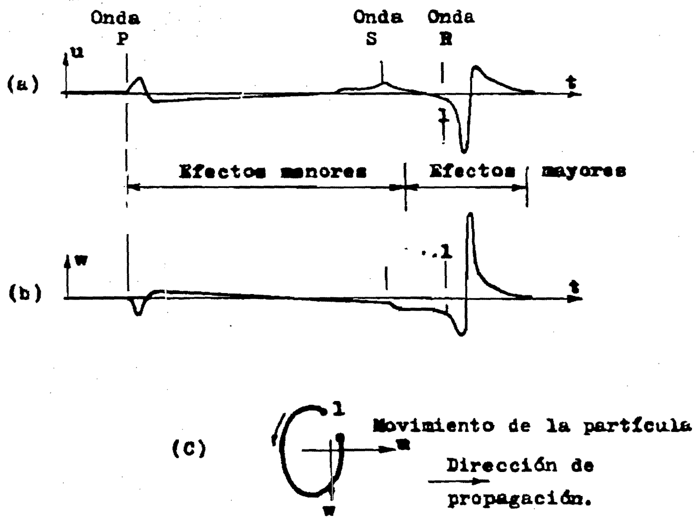


Fig. 3.5 Sistema de ondas en la superficie de un medio ideal, debido a una perturbación.

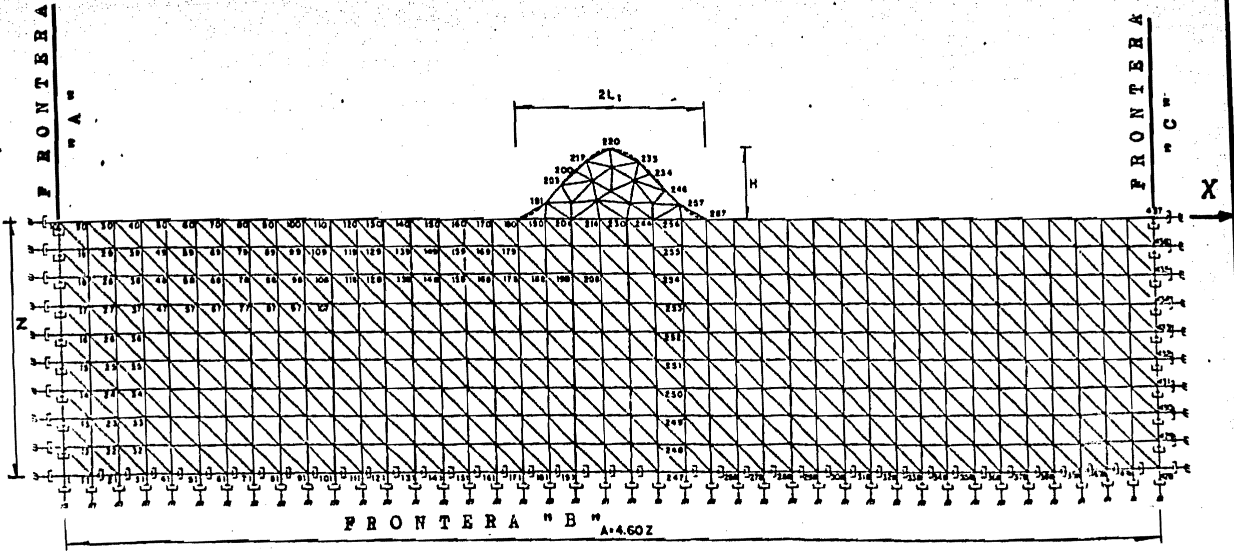


Fig 3.6 Modelo numérico

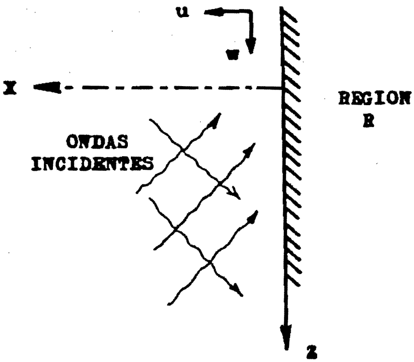


Fig. 3.7 Frontera de la región

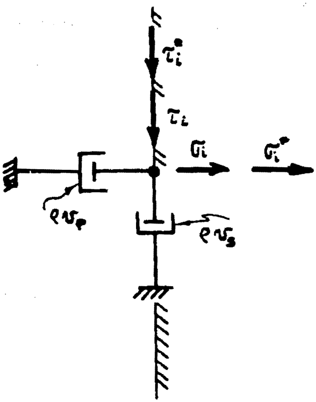


Fig. 3.8 Condiciones de frontera

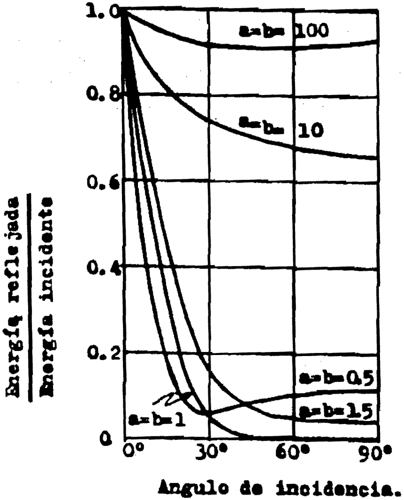


Fig. 3.9 Razón de energía para onda P incidente.

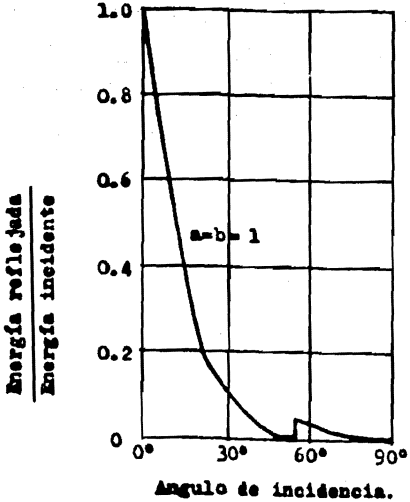


Fig. 3.10 Razón de energía para onda S incidente.

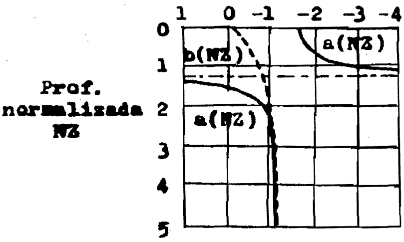


Fig.3.11 Las funciones a y b.

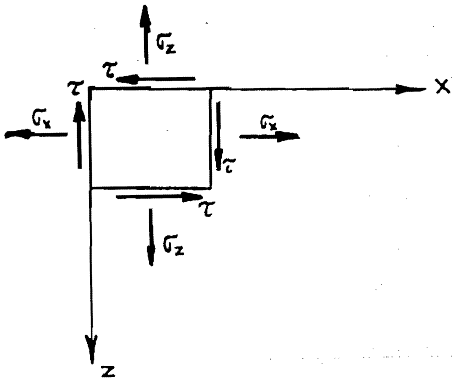


Fig. 3.12 Esfuerzos positivos.

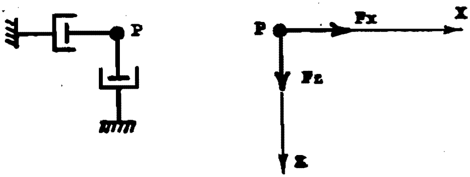


Fig. 3.13 Fuerzas externas sobre la frontera "A".

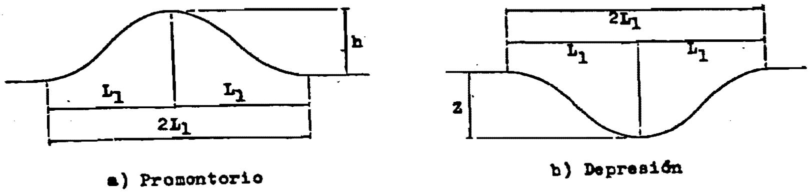


Fig. 4.1 Configuraciones analizadas

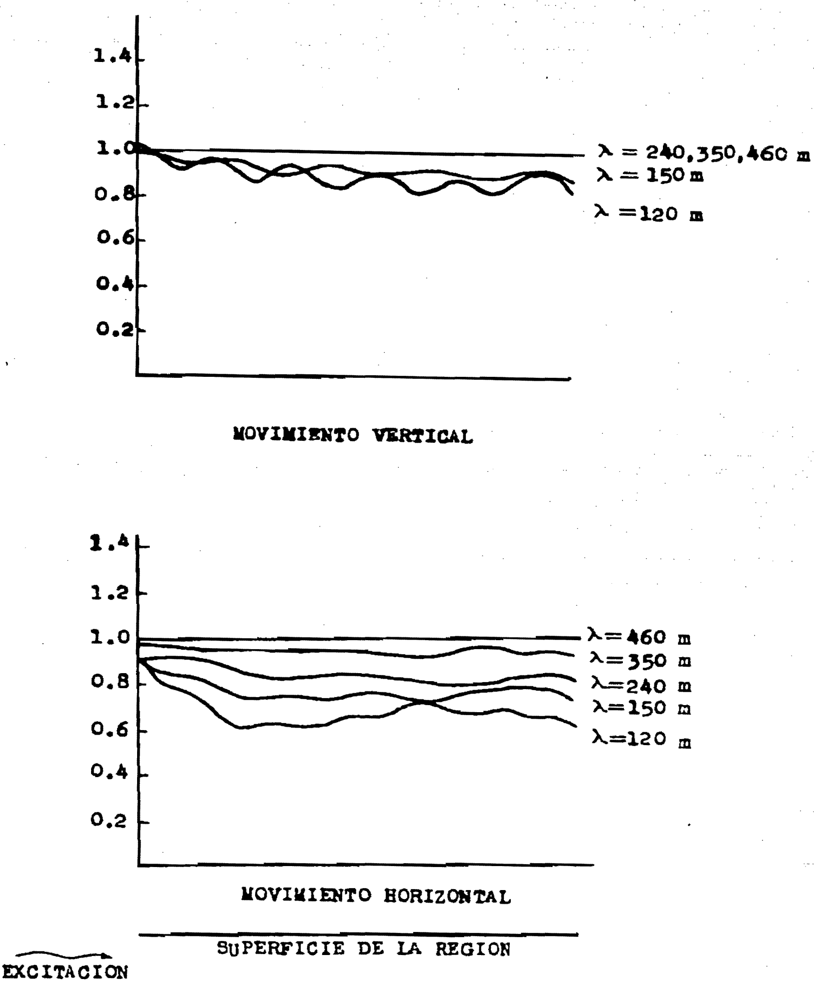


Fig. 4.2 Incidencia de ondas de Rayleigh ante un modelo carente de irregularidad topográfica.

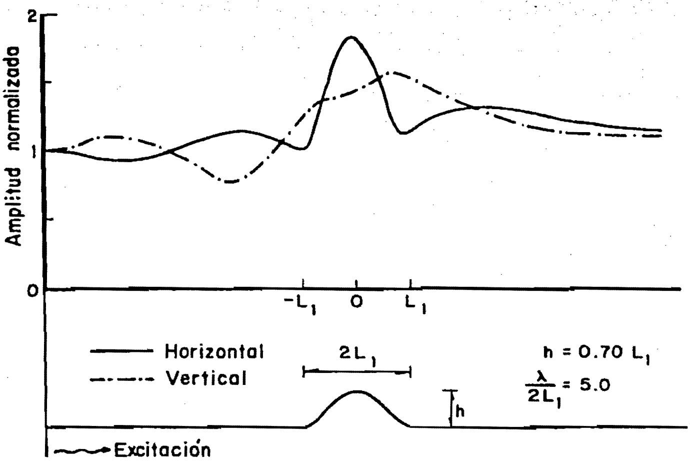

2
1
0
Amplitud normalizada
-L1
0
L1
Horizontal
Vertical
2L1
h = 0.70 L1
λ/2L1 = 5.0
h
Excitación

Fig 4.3

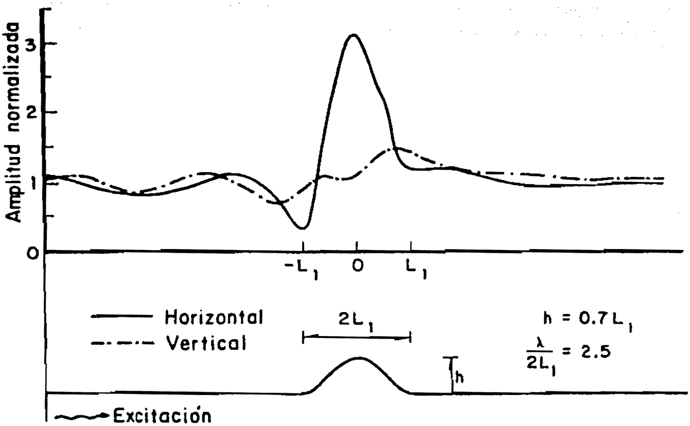
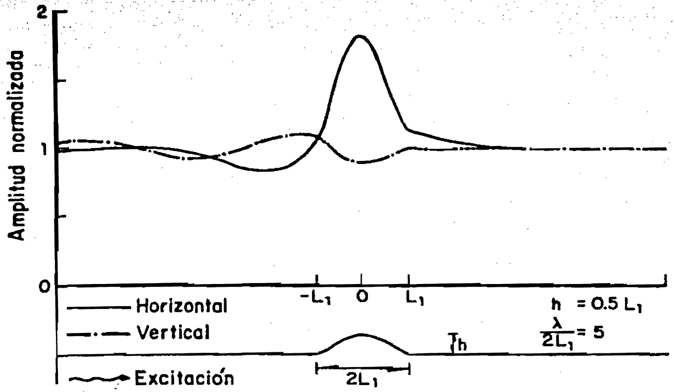
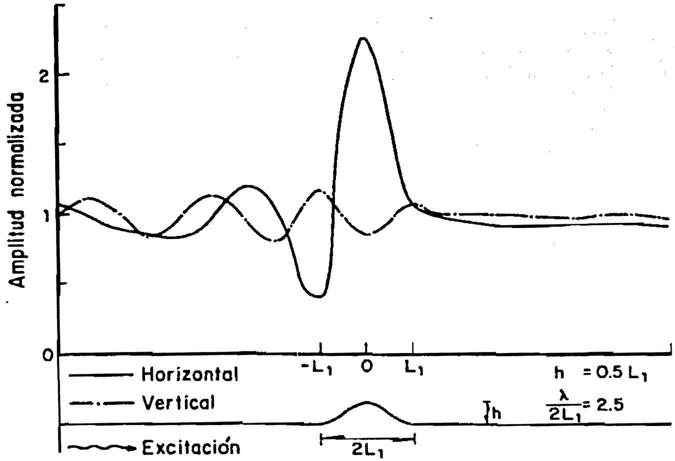

3
2
1
0
Amplitud normalizada
-L1
0
L1
Horizontal
Vertical
2L1
h = 0.7L1
λ/2L1 = 2.5
h
Excitación

Fig 4.4



2
1
0
Amplitud normalizada
-L1
0
L1
Horizontal
Vertical
Excitación
h = 0.5 L1
λ/2L1 = 5
h
2L1

Fig 4.5



2
1
0
Amplitud normalizada
-L1
0
L1
Horizontal
Vertical
Excitación
h = 0.5 L1
λ/2L1 = 2.5
h
2L1

Fig 4.6

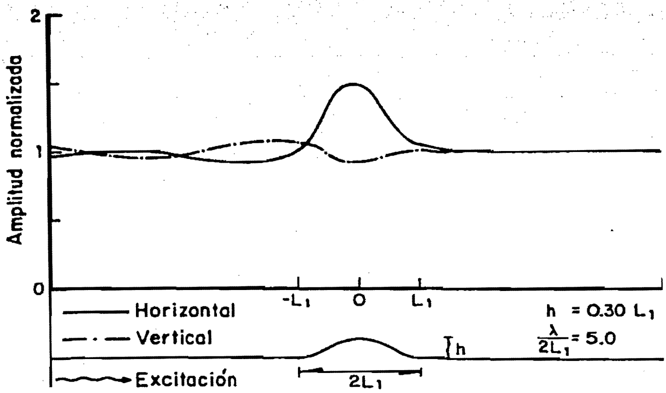

Amplitud normalizada
2
1
0
-L1
O
L1
Horizontal
Vertical
Excitación
h = 0.30 L1
λ/2L1 = 5.0
h
2L1

Fig 4.7

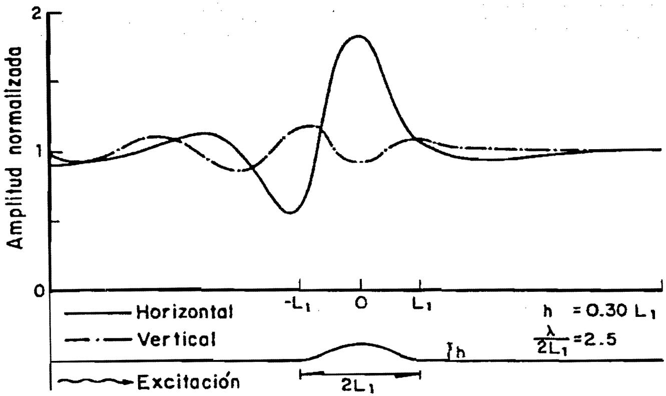

Amplitud normalizada
2
1
0
-L1
O
L1
Horizontal
Vertical
Excitación
h = 0.30 L1
λ/2L1 = 2.5
h
2L1

Fig 4.8

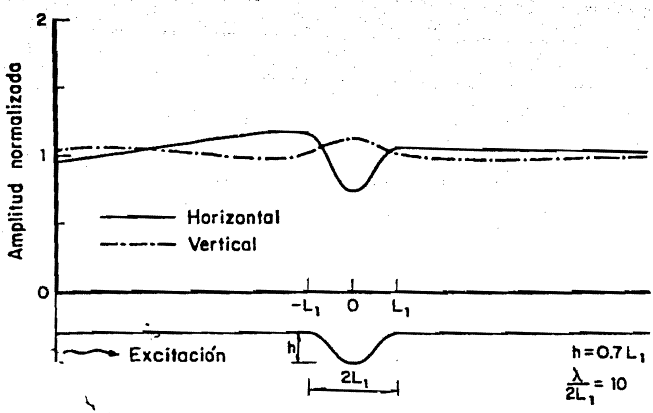


Fig 4.9

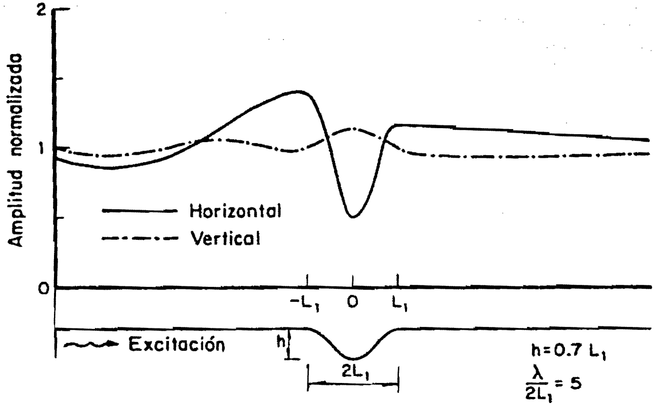


Fig 4.10

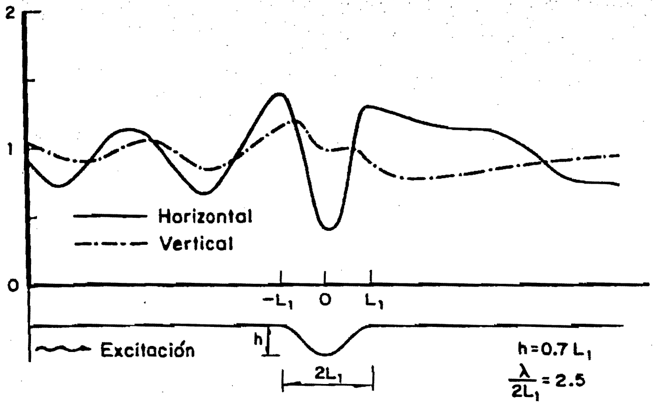


Fig 4.11

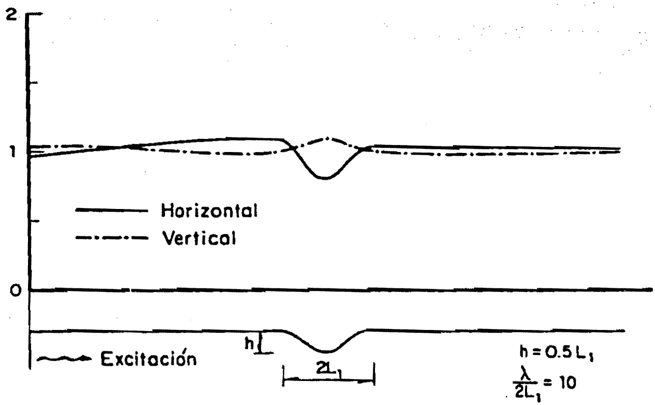


Fig 4.12

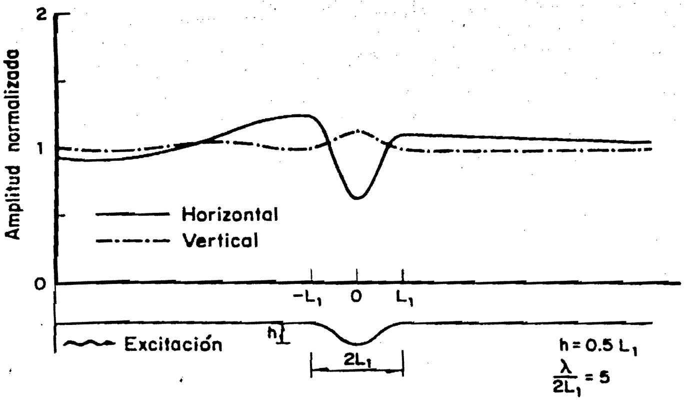


Fig 4.13

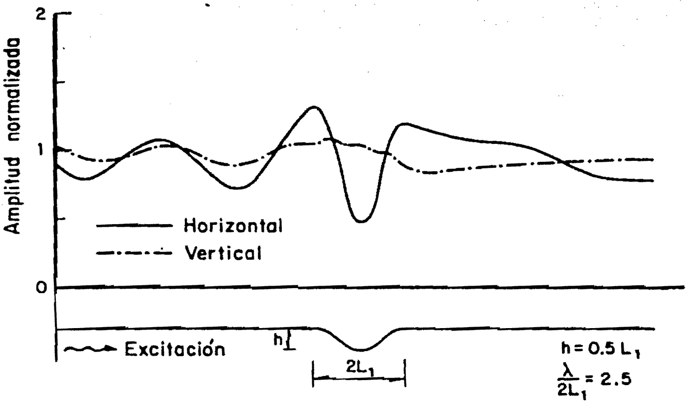


Fig 4.14

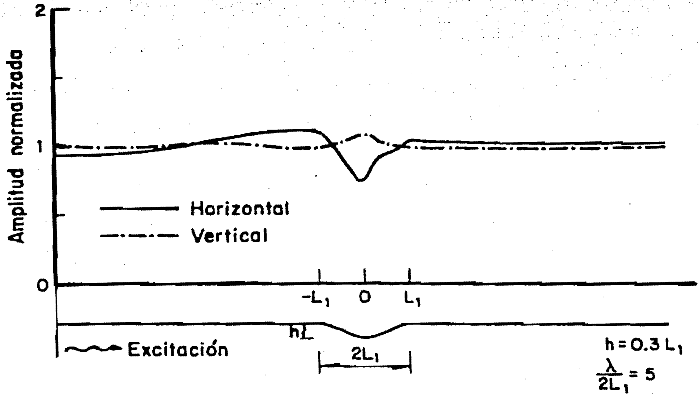


Fig 4.15

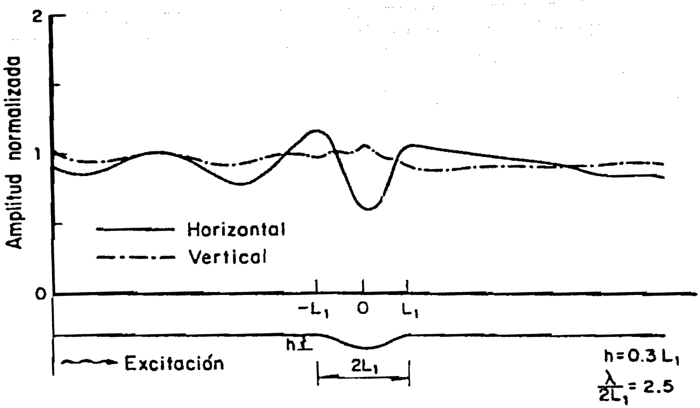


Fig 4.16