

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

FACULTAD DE INGENIERIA

EXPOSICION DEL METODO DE KANI  
Y DE METODOS APROXIMADOS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER  
EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A  
JOSE LUIS CERVANTES CUEVAS



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
EXAMENES PROFESIONALES  
60-1-240

Al Pasante señor JOSE LUIS CERVANTES CUEVAS,  
P r e s e n t e .

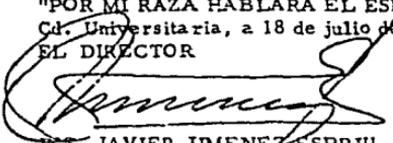
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor Ing. Jorge Sandoval García, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"EXPOSICION DEL METODO DE KANI Y DE METODOS  
APROXIMADOS"

- I. Consideraciones sobre el análisis estructural
- II. Exposición del metodo de Kani
- III. Métodos aproximados
- IV. Aplicaciones y comparación de resultados
- V. Conclusiones

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria, a 18 de julio de 1978  
EL DIRECTOR

  
INS. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

  
JJE/OBLH/ser

# I N D I C E

	OBJETIVO: DE LA TESIS	Pág.
CAPITULO I.-	CONSIDERACIONES SOBRE EL ANALISIS ESTRUCTURAL	1
	1.1 Antecedentes Históricos	1
	1.2 Objetivo del Análisis	6
	1.3 Método General de Flexibilidades	8
	1.4 Método General de Rigideces	10
CAPITULO II.-	EXPOSICION DEL METODO DE KANI	13
	II.1 Estructuras sin desplazamientos lineales de los nudos	15
	II.2 Estructuras con desplazamientos lineales - de los nudos: cargas verticales, cargas horizontales, columnas de diferentes altura en un mismo piso, columnas articuladas - en los apoyos	20
	II.3 Comprobación de resultados: Estructuras - sin desplazamientos lineales de los nudos, estructuras con desplazamientos lineales - de los nudos	28
CAPITULO III.-	METODOS APROXIMADOS	33
	III.1 Método del Factor	34
	III.2 Método de Bowman	36
CAPITULO IV.-	APLICACIONES Y COMPARACION DE RESULTADOS	39
CAPITULO V.-	CONCLUSIONES	85

## PROPOSITO DE LA TESIS

El objetivo de esta tesis, como se indica en el título, es la descripción detallada del método de Gaspar Kani y de algunos métodos -- aproximados de análisis, con el fin de comparar los resultados que éstos -- proporcionan con los obtenidos por aquel. También se describen de manera general los métodos de Flexibilidades y Rigideces y se incluye un capítulo de ejemplos resueltos.

El trabajo lo dedico muy especialmente a los compañeros de la materia "Análisis I" ya que en él se incluye gran parte del material que se contempla en dicha materia, a excepción del método de Cross pues en su lugar se ha incluido precisamente el método de Kani.

## CAPITULO 1.- CONSIDERACIONES SOBRE EL ANALISIS ESTRUCTURAL

### 1.1 ANTECEDENTES HISTORICOS

El principio de la historia se señala más o menos indefinida hacia el año 3400 A.C., teniendo como escenario los valles del Nilo, del-Eufrates y Tigris; siendo muy oscuros algunos de los períodos hasta el nacimiento de Cristo.

En Egipto tienen lugar 3 períodos: "El Antiguo Reino" que duró de 3400 a 2431 A.C., "El Reino Medio" que duró hasta 1788 A.C. y "El Nuevo Reino" o "Imperio" a partir de éste la historia Egipcia es muy completa.

La ingeniería estructural se encuentra existiendo ya desde el tiempo del "Viejo Reino" pero como arte, no como ciencia. No existen registros de consideración racional, ya sea en cuanto a la resistencia de miembros estructurales o al comportamiento de materiales estructurales. Al parecer los constructores se guiaban por reglas empíricas pasadas de generación en generación, y rara vez se agregaban conocimientos nuevos. A pesar de ello, las estructuras antiguas son una fuente de constante admiración.

El primer ingeniero estructural en la historia parece haber sido - Imhotep, constructor de la pirámide de Sakkora en Egipto hacia el año 3000 A.C.

Durante este período se erigieron estructuras admirables tales como las pirámides de Gizegh. Cabe hacer notar que los únicos elementos estructurales usados fueron la viga y la columna.

Aparte de la Egipcia, las civilizaciones Asiria y Persa desarrollaron, durante estos siglos antiguos, sus propios métodos de construcción, pero la mayor parte de las estructuras que erigieron no resistieron el embate del tiempo como lo hicieron las egipcias.

Se sabe que para el año 600 A.C. la construcción pesada se había practicado por siglos en todo el mundo civilizado antiguo, sin embargo no se había desarrollado un método racional de diseño aún para una viga simple.

En un principio no es la historia del análisis estructural lo que presenta interés, sino más bien la historia de las ciencias físicas en general. De ahí que vale la pena mencionar tan sólo a Aristóteles, a quien no se puede olvidar siempre que se habla de la historia del Análisis Estructural o de la Mecánica, por haber escrito en más de veinticinco campos distintos del conocimiento humano; y a Arquímedes que fue sin duda el más grande de los griegos. Su tratado "sobre el Equilibrio" establece a Arquímedes como el fundador de la estática; y aún cuando sus escritos ignoran sus innumerables invenciones mecánicas, tales como: la catapulta, la bomba espiral y sus famosas combinaciones de poleas; cabe decir que fue un gran ingeniero que cerró la era dorada de los griegos.

Posteriormente los romanos desarrollaron una gran habilidad en la construcción de puentes, ya que al desarrollarse el imperio se hacía necesario el movimiento de tropas rápidamente. Además desarrollaron el arco de mampostería semicircular verdadero, que utilizaron en puentes y acueductos. La caída del Imperio Romano de occidente hacia 476 D.C. marca el fin del período antiguo.

El período medioeval tiene lugar de 477 a 1492 y en él no tienen lugar descubrimiento trascendental alguno que haga progresar la ciencia estructural. Sin embargo, cabe mencionar que en el año 565 A.C., con la construcción de la iglesia de San Sofía en Constantinopla la cúpula estructural alcanzó su cúspide.

Terminado el período medioeval tiene lugar el advenimiento de los grandes ingenieros que hacen progresar la ciencia estructural: El primero de ellos fue Leonardo da Vinci ( 1452-1519 ) a quien se atribuye el haber sido el primero en enunciar la ley de la palanca e introducir el concepto de momento de una fuerza.

Posteriores a Leonardo hubo hombres famosos tales como Andre Palladio ( 1518-1580 ), que fue el primero en usar armaduras. Simon Stevin ( 1548-1620 ), que introdujo el triángulo de fuerzas. Galileo Galilei ( 1564-1642 ), fue el primero en estudiar la resistencia de los sólidos a la

rotura, originando así la mecánica de materiales. Robert Hooke (1635 -- 1703), creador de la ley que lleva su nombre en 1660, pero que no fue aplicada a problemas de ingeniería sino hasta 1620 por E. Mariotte. Sir Isaac Newton (1642-1727), que con la publicación de su "principia" estableció sus leyes del movimiento, la ley de la gravitación universal y el cálculo infinitesimal. James Bernoulli (1654-1705) recibe el crédito de haber sido el primero en suponer que una sección plana de una viga permanece plana durante la flexión, pero no dió importancia a la posición de la superficie neutra. Johan Bernoulli (1667-1748) hermano de James, enunció el principio de velocidades virtuales, que es la base de los métodos más generalmente aplicables para determinar las deflexiones elásticas. Daniel Bernoulli (1700-1782) hijo de Johan, se interesó en la determinación de la curva elástica a la vibración en barras flexionadas, teniendo éxito, pues obtuvo la ecuación diferencial para las vibraciones transversales de una barra. Leonhard Euler (1707-1783) contribuyó con su método del mínimo trabajo y sus estudios sobre pandeo en columnas. Charles A. Coulomb (1736-1806) y Navier son considerados los fundadores de la ciencia de la mecánica de materiales. En 1776 Coulomb publicó el primer análisis correcto de los esfuerzos de las fibras en una viga flexionada, con sección transversal rectangular. Supuso correctamente la posición de la superficie neutra y aplicó la Ley de Hooke a las fibras, desarrolló el equilibrio de fuerzas externas en la sección transversal y calculó bien los esfuerzos. Además sugirió la existencia de un estado plástico. Louis Marie Henri Navier (1785-1836) distinguido ingeniero francés, le corresponde el mérito de haber desarrollado la primera teoría general de sólidos elásticos así como el primer tratamiento sistemático de la teoría de las estructuras. Presentó un tratamiento concienzudo de la resistencia y deflexión en vigas de cualquier sección transversal, considerando también arcos, columnas bajo carga excéntrica, puentes y otros problemas. Lamé (1795-1870) y Clapeyron (1794-1864) colaboraron para deducir el importante principio de la igualdad del trabajo externo e interno en una estructura sujeta a esfuerzos. Squire Whipple (1804-1888) ingeniero de Estados Unidos presentó, mediante la publicación de su tratado "Construcción de puentes", el primer análisis racional de las armaduras de juntas. Barre de Saint-Venant (1797- -- 1886) presentó un trabajo en el que se trataba la torsión y en lo concerniente a la flexión consideró, por primera vez, correctamente los esfuerzos de corte en secciones transversales de vigas, discutiendo también problemas de impacto y vibración.

Hasta este momento la historia de las estructuras había visto na-

cer las bases para el establecimiento de una teoría propiamente dicha: Se había desarrollado el método para la determinación de esfuerzos en armaduras simples, la acción de la viga simple había sido determinada y analizada completamente y se había iniciado la teoría de la acción de la columna; estaban pues establecidas las bases para que en el período, que muchos autores llaman moderno, tuviera lugar un sorprendente desarrollo de la teoría estructural llevándola hasta el punto en que la conocemos hoy en día.

Los hombres que con su esfuerzo y dedicación han hecho posible este desarrollo fueron numerosos, por lo cual sólo se mencionan algunos de ellos.

William John M. Rankine (1820-1872) publicó en 1858 su manual de Mecánica Aplicada, en el cual estableció la fórmula de la columna que lleva su nombre. James Clerk Maxwell (1830-1879) profesor de la Universidad de Cambridge, hizo el primer gran aporte al análisis estructural indeterminado al presentar el primer método sistematizado de análisis para estructuras indeterminadas. En él estableció su teorema de deflexiones recíprocas. Pero por la brevedad de su exposición; no fue sino hasta que este mismo teorema fue publicado, en forma generalizada, por el italiano E. Betti, cuando éste fue ampliamente conocido con el nombre de "Teorema Recíproco de Maxwell-Betti". Posteriormente Maxwell publicó su diagrama de esfuerzos para armaduras, que fue desarrollado posteriormente por Cremona dando como resultado lo que hoy conocemos como el diagrama de Maxwell-Cremona. Carl Culmann (1821-1881) debido a su libro publicado en 1886, la estática gráfica se convirtió en un medio efectivo de análisis estructural. Otto Mohr (1835-1918) sin conocimiento de los trabajos hechos previamente por Maxwell, presentó una derivación más simple y más extensa para la solución de estructuras indeterminadas. En 1887 publicó su Diagrama de Correcciones para usarse con el Método Semigráfico, de la determinación de deflexiones en estructuras articuladas, anunciada por Williot en 1877. A. Castigliano (1847-1884) un principio básico de análisis estructural indeterminado se deriva de sus dos teoremas de mínimo trabajo, publicados en 1873 y 1876 respectivamente.

En esta segunda mitad del siglo XIX hubo muchos otros nombres importantes, aparte de los ya mencionados, tales como: Muller-Breslau (1851-1925), Claxton Fidler, G.A. Maney de la Universidad de Minnesota, Engesser (1848-1931), Wholer (1819-1914), A Foppl (1854-1924) -

Jouraski (1821-1891), Bauschinger (1833-1893), Von Tetmajer (1850 -- 1905), Vasinsky (1856-1899) etc.; pero quizás la contribución más grande en los últimos años fue hecha por Hardy Cross (1885 ..... ) que en 1924 empezó a enseñar su método de distribución de momentos en la Universidad de Illinois y que ha revolucionado en alto grado al análisis de marcos continuos.

Estos hombres y sus contemporáneos hicieron un tremendo trabajo al recopilar, desarrollar y exponer las teorías de resistencia de materiales y análisis estructural, prácticamente en la misma forma que las conocemos ahora.

Por último, es necesario mencionar algunos avances importantes que tuvieron lugar de 1900 a la fecha en la ingeniería de estructuras :

1. La publicación de un gran número de libros excelentes, que tratan de la elasticidad, plasticidad, pandeo, placas, membranas y vibraciones.
2. El desarrollo del método de distribución de momentos, y el relacionado con él pero generalizado procedimiento de relajamiento.
3. El renovado interés en la resistencia de rotura, ello ya había preocupado a Da Vinci y Galileo, y el comportamiento plástico de las estructuras y elementos estructurales.
4. La aplicación de la teoría de la probabilidad y estadística a la reevaluación de la probabilidad de fallo o de quedar fuera de servicio, y la comparación de estas ideas con el coeficiente de seguridad clásico.
5. La reciente aparición de los calculadores analógicos y digitales.
6. El conocimiento más profundo del comportamiento del concreto armado y el desarrollo de materiales estructurales perfeccionados-aceros, aluminios, plásticos, concretos, maderas mejoradas, laminados y materiales cerámicos.

## 1.2 OBJETIVO DEL ANALISIS.

Los pasos de todo proyecto de ingeniería se pueden definir como: planeación, análisis, dimensionamiento y construcción. La planeación comprende la consideración de diversas circunstancias y requisitos que afectan la disposición general y las dimensiones de la estructura y traen como consecuencia la elección del tipo apropiado de estructura, tomando en consideración la función que ha de desempeñar. El análisis, que es la parte fundamental en esta tesis, incluye toda la labor de evaluación de fuerzas axiales, de corte y momentos causados por cualquier acción que ha de resistir la estructura. Posteriormente viene el dimensionamiento de todos los elementos y juntas, que han de ser adecuados para resistir las solicitaciones. Finalmente la construcción es la realización física del proyecto de ingeniería.

El criterio seguido en el análisis estructural en los métodos que aquí se exponen, es el criterio del llamado análisis elástico, esto es, se consideran que todos los elementos estructurales se comportan elásticamente. Este criterio se basa en un conjunto de teorías, ensayos de piezas reales, de modelos y experiencia práctica. Para la mayoría de las estructuras de ingeniería la costumbre es proyectar tomando como base las intensidades de cargas admisibles, las cuales no deben ser superadas por las cargas de servicio, lo cual nos proporciona un margen de seguridad contra la falla. La elección de este margen depende del grado de incertidumbre con respecto a las cargas, el análisis, los materiales, el proyecto, la construcción y las consecuencias de la falla.

Hay una tendencia creciente actualmente, al proyectar estructuras, a basar el proyecto en la carga de falla misma. Esta tendencia responde al nombre de análisis a la rotula o análisis plástico.

Cabe aclarar que el análisis es un medio para lograr un fin y no un fin en sí mismo. Por lo cual la labor del ingeniero proyectista es la de diseñar y no simplemente analizar.

En términos generales pueden ser clasificadas las estructuras en 2 grandes grupos: estructuras determinadas y estructuras indeterminadas. Una estructura determinada es aquella para la cual las componentes de reacción y fuerzas internas pueden evaluarse completamente por medio de las ecuaciones de equilibrio.

ciones que nos da la estática, que son 3 para el caso de estructuras en 2 dimensiones. Si no es posible evaluar las componentes de reacción y fuerzas, con las ecuaciones de condición disponibles, se tendrá entonces una estructura indeterminada y su grado de indeterminación estará dado por el número de reacciones y fuerzas en exceso del número de ecuaciones de condición.

Una estructura es estable cuando lo es para cualquier sistema concebible de cargas y se puede decir en forma gruesa que es inestable cuando el número de reacciones es menor que el número de ecuaciones de condición.

El objetivo de los diferentes métodos de análisis existentes, es el de evaluar los elementos mecánicos en las estructuras. Estos métodos pueden ser clasificados en 2 grupos fundamentalmente: métodos exactos, y métodos aproximados. Los métodos exactos como su nombre lo indica, son exactos desde el punto de vista analítico o matemático y con ellos se pueden obtener buenos resultados, pero tienen la desventaja de que al aumentar el grado de indeterminación de las estructuras, aumenta el número de ecuaciones simultáneas por resolver en el mismo grado. Como ejemplo de estos métodos podemos mencionar el método de flexibilidades y el método de rigideces. Este inconveniente puede resolverse con los métodos iterativos que se caracterizan fundamentalmente por su carácter numérico para dar los mismos resultados que los métodos exactos. Como ejemplo de métodos iterativos podemos mencionar el método de Cross y el método de Gaspar Kani. Los métodos aproximados, como su nombre lo indica, proporcionan resultados aproximados que pueden ser muy útiles en estudios preliminares o cuando se proyectan estructuras de poca importancia o partes secundarias de estructuras importantes. Como ejemplo de ellos podemos mencionar el método del factor, el método del pórtico simple, el método de análisis por entrepiso y algunos otros.

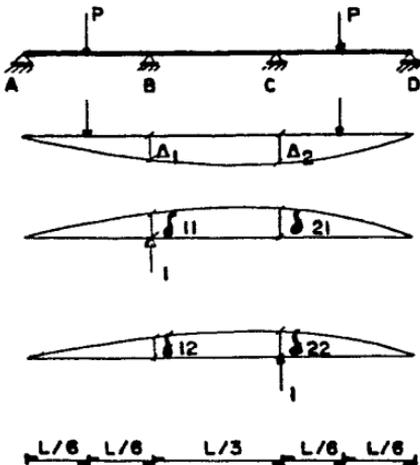
Cabe aclarar que con el advenimiento de los computadores digitales la tendencia actual es hacia el uso de los métodos exactos, debidos a la forma compacta de su presentación y a la facilidad con la que las operaciones algebraicas matriciales se pueden programar para la computadora. Sin embargo no todos los problemas son adecuados para resolverse con la computadora ni todos los estructuristas tienen acceso a un centro de cálculo electrónico.

En esta tesis se describen muy brevemente, en este primer capítulo, los métodos generales de fuerzas y desplazamientos. Posteriormente, y este es el objetivo fundamental de la tesis, en el capítulo II se describe el método de Kani. En el Capítulo III se exponen muy brevemente 2 métodos aproximados de uso común, con el objeto de comparar los resultados que proporcionan con los obtenidos por el método de Kani en los ejemplos de aplicación del Capítulo IV.

### 1.3.- METODO GENERAL DE FLEXIBILIDADES.

Como ya se dijo éste es uno de los métodos exactos, también se le conoce como método de las fuerzas, ya que en él las incógnitas son -- fuerzas. Es debido a Maxwell, Mohr y Muller-Breslau quienes lo fueron -- desarrollando paulatinamente y fue el último de ellos quien lo presentó en su forma más completa.

Para exponer brevemente este método es conveniente ilustrarlo -- con la viga de la Fig. 1.3.1., que como se ve se trata de una estructura -- indeterminada al 2o. grado.



La mecánica del método consiste en dejar a la estructura en una condición de estabilidad y determinación, esto se consigue anulando redundantes. El sistema de cargas real deformará la estructura dando lugar a las deflexiones  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  en la dirección de las redundantes  $R_B$  y  $R_C$ . Si se quita ahora el sistema real de cargas y en el lugar correspondiente a cada una de las redundantes, se aplican cargas unitarias, éstas deformarán a la estructura dando lugar a las deflexiones mostradas. Se aplican cargas unitarias debido a que las reacciones  $R_B$  y  $R_C$  son desconocidas, pero en virtud del principio de superposición, las deflexiones causadas por  $R_B$  y  $R_C$  serán  $R_B$  y  $R_C$

Fig. 1.3.1

veces respectivamente, las deflexiones causadas por una carga unitaria.

Del análisis de la Fig. se ve que el desplazamiento neto en B y C vale cero, luego las ecuaciones de condición para la coherencia geométrica de la estructura son :

$$\Delta_1 + \delta_{11} R_1 + \delta_{12} R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + \delta_{21} R_1 + \delta_{22} R_2 = 0$$

Para establecer dicho sistema de ecuaciones es necesario evaluar los desplazamientos, lo cual se puede lograr si aplicamos conjuntamente el principio del trabajo virtual y el teorema recíproco de Maxwell - Betti, entre otras técnicas.

En la figura 1.3.2 se muestran los diagramas de momentos causados por los sistemas que se aplican a la estructura, el diagrama (M) es real y los (m) son virtuales.

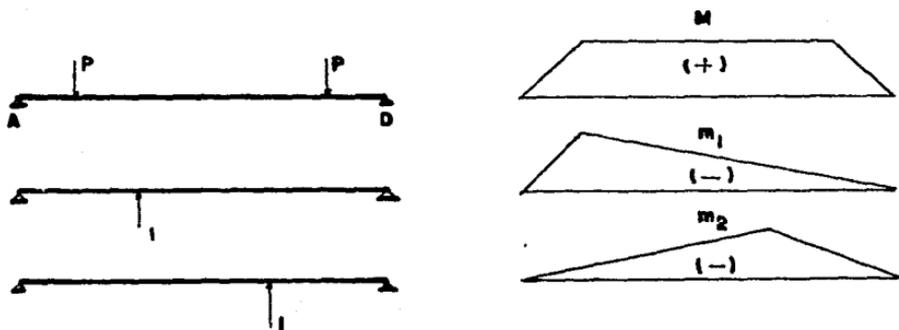


Fig. 1.3.2

Recordando las expresiones para la energía de deformación interna, en nuestro caso tenemos

$$1 \times \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

es decir, el trabajo virtual interno efectuado por la carga de una tonelada, al actuar en la dirección del desplazamiento causado por el sistema real, es igual a la energía de deformación interna. Esta energía la podemos obtener integrando los diagramas de momentos causados tanto por el sistema real como por el virtual. Para obtener los desplazamientos  $\delta$  tenemos

$$1 \times \delta = \int_0^L \frac{mm}{EI} dx$$

hacemos lo mismo que en el caso anterior, considerando los diagramas ( $m$ ) una vez como reales y otra como virtuales para obtener  $\delta_{11}$  y  $\delta_{22}$ , e intercambiándolos para obtener  $\delta_{12}$  y  $\delta_{21}$ . Obtenidos los desplazamientos solo resta substituirlos en el sistema de ecuaciones de condición para obtener el valor de las reacciones redundantes  $R_B$  y  $R_C$ .

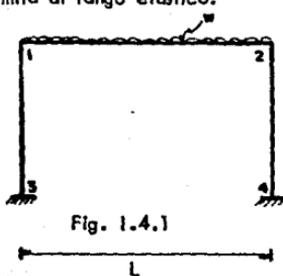
#### 1.4.- METODO GENERAL DE RIGIDECES.

Este es otro de los llamados métodos exactos y es el nombre genérico de varios métodos que se vinieron desarrollando paulatinamente desde finales del siglo pasado, tales métodos son: El método de pendiente-deflexión, debido casi esencialmente a Mohr. El método de Cross y el método de Gaspar Kani.

Para aplicar este método en la solución de una estructura hiperestática, se necesita determinar primero las componentes de desplazamientos que se desconocen, por esta razón también se le conoce como método de los desplazamientos, ya que son estos las incógnitas del problema. Por cada uno de ellos tendremos una ecuación de equilibrio, en función de las fuerzas externas conocidas y de las internas no conocidas, las cuales, en virtud de las relaciones esfuerzo deformación del material, se pueden expresar en función de los desplazamientos. Se forma así un sistema de ecuaciones, una por cada despla

zamiento, cuya solución nos permite conocer el valor de éstos; los desplazamientos a su vez nos permiten calcular el valor de las fuerzas internas.

El análisis, como todos los métodos tratados en esta tesis, se limita al rango elástico.



Para el desarrollo del método considera mos el marco de la fig. 1.4.1, el cual tie ne tres grados de libertad: dos giros y un desplazamiento horizontal del cabezal.

Para la solución de la estructura se fijan lineal y angularmente los nudos como se muestra en la figura 1.4.2 (a), para posteriormente permitir su giro en (b) y (c) y su desplazamiento en (d). Se calculan los momentos de empotramiento debido al sistema de cargas en (a), debido a los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en (b) y (c) y debido al desplazamiento de  $\Delta$  en (d).

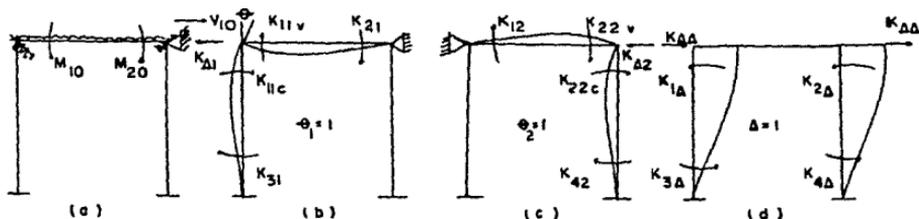


Fig. 1.4.2

Se tiene calculadas, en tablas, momentos de empotramiento para diferentes condiciones de carga. Como se verá en el próximo capítulo los momentos  $k_{11}$  y  $k_{22}$  debidos a los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente son iguales a  $4EI_i/L_i$ , en virtud de la definición de rigidez absoluta. Los  $k_{21}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{31}$  y  $k_{42}$  valen  $2EI_i/L_i$ , recordando que el factor de transporte para obtener el momento inducido en el extremo fijo, cuando se hace girar el otro extremo vale  $1/2$ .  $1/2 \times 4EI_i/L_i = 2EI_i/L_i$ .  $k_{\Delta 1}$ ,  $k_{1\Delta}$ ,  $k_{\Delta 2}$ ,  $k_{2\Delta}$ ,  $k_{3\Delta}$  y  $k_{4\Delta}$  son iguales al cortante causado por los momentos  $k_{ij}$  del miembro respectivo e iguales a  $6EI_i/L_i^2$ . Los  $k_{\Delta\Delta}$  son los cortantes causados por los momentos  $k_{i\Delta}$  y valen  $12EI_i/L_i^3$ .

Calculados los momentos y cortantes de la estructura para las cuatro condiciones, (a), (b) (c) y (d), se substituyen en las ecuaciones de equilibrio. Estas deben de estar igualadas a cero ya que tanto los momentos en los nudos como el desplazamiento del cabezal deben de estar equilibrados y por lo tanto su valor neto es cero. Estas ecuaciones son :

$$M_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 + k_{1\Delta}\Delta = 0$$

$$M_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + k_{2\Delta}\Delta = 0$$

$$V_{10} + k_{\Delta 1}\theta_1 + k_{\Delta 2}\theta_2 = k_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

cuya solución nos da el valor de los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  y del desplazamiento  $\Delta$ , los cuales nos sirven para calcular los momentos reales en los diferentes miembros del marco. Estos momentos son

$$M_{31} = k_{31}\theta_1 + k_{3\Delta}\Delta$$

$$M_{13} = k_{11c}\theta_1 + k_{1\Delta}\Delta$$

$$M_{12} = M_{10} + k_{11v}\theta_1 + k_{12}\theta_2$$

$$M_{21} = M_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22v}\theta_2$$

$$M_{24} = k_{22c}\theta_2 + k_{2\Delta}\Delta$$

$$M_{42} = k_{42}\theta_2 + k_{4\Delta}\Delta$$

con lo cual quedan determinados todos los momentos del marco.

Como ya se dijo al principio, tanto el método de flexibilidad como el de rigideces proporcionan buenos resultados, pero tienen el inconveniente de aumentar los sistemas de ecuaciones simultáneas por resolver en el mismo grado en que aumenta la indeterminación de las estructuras, por lo cual su aplicación para solución manual, se aplica sólo a estructuras con un grado de indeterminación no mayor de tres.

## CAPITULO II.- EXPOSICION DEL METODO DE KANI

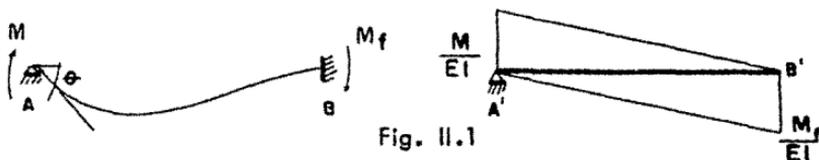
El método de Gaspar Kani es un método iterativo, con una rapidez satisfactoria de convergencia en el resultado final, por lo que ha tenido aceptación sobre otros métodos de aproximaciones sucesivas. El objetivo fundamental del método es la evaluación de los momentos flexionantes finales en los extremos de los elementos que forman el conjunto estructural, no considerándose efectos de fza. normal ni fza. cortante. Su aplicación se extiende a las estructuras con nudos fijos o nudos desplazables.

Las ventajas principales del método, con respecto a otros, es la de considerar simultáneamente el efecto de las fuerzas horizontales, tales como viento o empuje sísmico, pues son éstas las que provocan el desplazamiento de los nudos. Otra ventaja consiste en la eliminación automática de los errores pues estos desaparecen al efectuar las sucesivas iteraciones.

Antes de entrar en la exposición del método es conveniente recordar algunos conceptos que serán básicos en el desarrollo posterior.

**Principio de superposición.** Si las fuerzas y desplazamientos en todos los puntos de una estructura son proporcionales a las cargas que las causan, entonces las fuerzas y desplazamientos totales, resultantes de la aplicación de varias cargas, serán la suma de fuerzas y desplazamientos causados por estas cargas cuando se aplican separadamente.

**Rigidez absoluta ( K ).** Es el valor del momento, aplicado en el extremo simplemente apoyado de un miembro, para producir en éste una rotación de un radian, siendo el extremo alejado simplemente apoyado restringido o fijo. En la Fig. II.1 se calcula por medio de la viga conjugada



El cortante en A' será el giro aplicado  $\theta$  en la viga real, si -- consideramos que  $M_f = 1/2M$  como más adelante se demostrará

$$\theta_A = (M L/2 - M_f L/2) / EI = ML/4EI \quad \therefore M = \frac{4EI\theta}{L}$$

si  $\theta = 1$  radian y  $M = K$

$$K = \frac{4EI}{L}$$

Si se tiene una disposición como la de la fig. 11.2 con el extremo alejado simplemente apoyado, la rigidez en A será nuevamente el corte en A' de la viga conjugada.

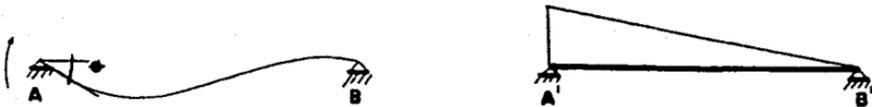


Fig. 11.2

$$\theta_1 = \frac{M}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2L}{3} \cdot \frac{1}{L} = \frac{ML}{3EI} \quad \therefore M = \frac{3EI\theta}{L}$$

y la rigidez absoluta será, si  $\theta = 1$  radian

$$K = \frac{3EI}{L}$$

Para los momentos inducidos en los extremos de un miembro prismático fijo en uno o ambos extremos, cuando uno de los extremos se des--plaza una distancia  $\Delta$  con respecto al otro se tiene, fig. 11.3

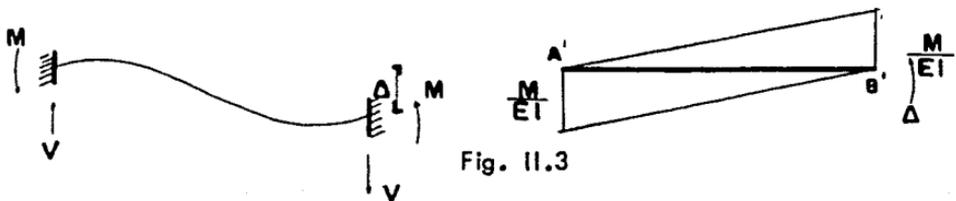


Fig. 11.3

Los momentos en la viga real son las reacciones de los apoyos. - En B', de la viga conjugada, sólo se puede cumplir  $\sum M = 0$  aplicando un momento externo

$$\Delta = \frac{M}{EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3} \cdot \cdot \cdot \quad M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Factor de transporte. Es el factor por el cual debe multiplicarse el momento en el extremo girado para obtener el momento inducido en el extremo fijo. En la fig. II.1 la suma de momentos en A' nos da

$$\frac{M}{EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3} - \frac{M_F}{EI} \frac{L}{2} \frac{2}{3} L = 0$$

$$M_F = \frac{M}{2}$$

## II.1 ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTOS LINEALES DE LOS NUDOS

El objeto del cálculo estático de una estructura es obtener el equilibrio de la misma, cuando al cargar sus distintos elementos, giran y se desplazan sus nudos.

Conocidos los momentos queda terminado el cálculo, pues los de más valores estáticos pueden determinarse a partir de estos momentos.

Se considerará en esta exposición como momento positivo la acción de barra sobre nudo que hace girar a éste en el sentido de las manecillas del reloj.

Las características de una barra en una estructura estarán dadas por el momento de inercia de su sección y por su longitud. La relación de estos dos valores  $K = I/L$  será el coeficiente de rigidez.

En esta primera secuela de cálculo se supone que los nudos son indesplazables.

Para la deducción de las fórmulas partiremos de aislar un elemento cualquiera de un pórtico fig. II.1.1, el cual debido a las sollicitaciones externas, puede girar en sus extremos. La deformación total del elemento la podemos expresar como superposición de efectos en las tres etapas siguientes:

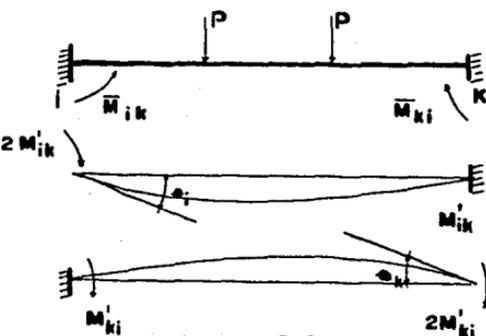


Fig. II.1.1

1. La barra ik se deforma bajo la acción de las cargas externas.
2. El extremo i gira con un ángulo  $\theta_i$  mientras que k no gira, designaremos a i como el extremo contiguo por ser i el punto de interés.
3. El extremo k gira con un ángulo  $\theta_k$ , mientras que i no gira, designaremos a k como el extremo alejado de la barra.

El valor total del momento en cada extremo será igual a la suma de las tres etapas consideradas. Por ejemplo, para el extremo i será:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2 M'_{ik} + M'_{ki} \quad (II.1)$$

$\bar{M}_{ik}$  debido a la carga exterior (momento de empotramiento perfecto en el extremo de la barra).

$M'_{ik}$  debido al giro del propio extremo i, éste es proporcional al giro  $\theta_i$ ; y a la rigidez K de la barra y se designará como influencia de giro del extremo i, su valor es

$$M'_{ik} = 2EK\theta_i$$

donde E es el módulo de elasticidad del material.  $M'_{ki}$  debido al giro del extremo k de la barra. Como éste, es el momento inducido en i, su valor será 1/2 del valor del momento en k y se designará como influencia del giro del otro extremo.

El procedimiento consiste en calcular separadamente cada uno de

estos valores, en lugar de calcular directamente el momento total, de lo cual se deriva precisamente la ventaja del método.

Las sucesivas variaciones del momento en cada nudo, se obtienen por la reiteración de una misma operación, por una sucesión arbitraria de un nudo a otro, de la estructura. Para ilustrar el procedimiento se calcularán los momentos en los extremos de las barras del marco de la fig. — 11.1.2 en la cual se han indicado las cargas externas y el valor de las rigideces  $K$  de cada barra.

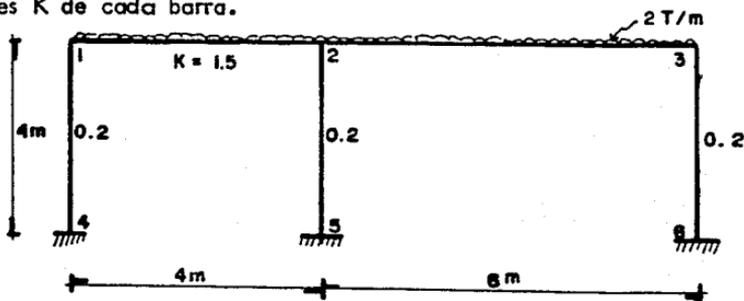


Fig. 11.1.2

Se adoptará en esta expresión el tipo de esquema de la figura — 11.1.3, que permite escribir los sucesivos valores en los extremos de cada barra.

Los valores de los momentos de empotramiento para las cargas externas se toman de las fórmulas de los manuales corrientes y se anotan en los extremos de las barras correspondientes, sobre los ejes de las mismas.

En seguida anotamos los momentos de sujeción, en el centro del círculo de cada nudo, éstos son iguales a la suma algebraica de los momentos de empotramiento que concurren en el nudo, por lo tanto, para el nudo 2 se tendrá

$$\bar{M}_2 = + 2.67 - 6.00 = -3.33$$

Si consideramos un nudo de la estructura, al equilibrarlo se tiene,

$$\sum_{(i)} M_{ik} = 0 \text{ y substituyendo la ecuación ( 11.1 )}$$

$$\sum_{(i)} \bar{M}_{ik} + 2 \sum M'_{ik} + \sum M'_{ki} = 0$$

$$\frac{\bar{M}_i + \sum M'_{ki}}{-2} = \sum M'_{ik} \quad (11.2)$$

la cual nos dice que la suma del momento total de sujeción  $\bar{M}_i$ , más la suma de los momentos debidos al giro del extremo opuesto, todo dividido entre (-2) es igual a la suma de los momentos en el propio extremo considerado o de interés i.

El miembro de la izquierda de la ecuación (11.2) se reparte proporcionalmente a las rigideces de todas las barras que concurren al nudo. Se simplifica la operación anterior si se introducen los factores de giro o coeficientes de repartición, que se obtienen repartiendo proporcionalmente a las rigideces de todas las barras que concurren al nudo el coeficiente (-1/2)

En la fig. 11.1.3 se ha anotado estos factores de giro alrededor del círculo en cada nudo.

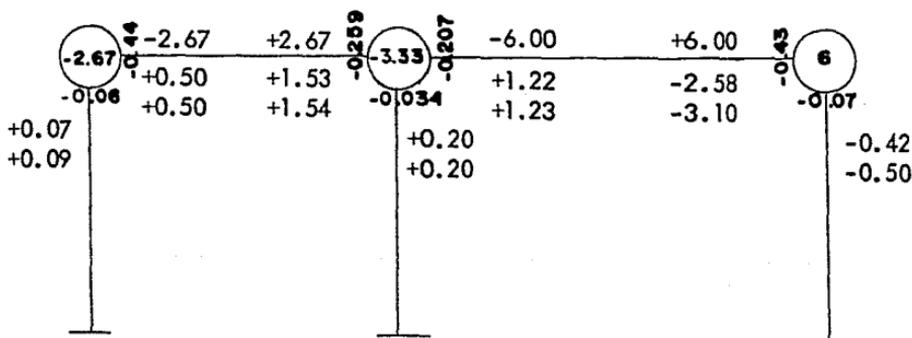


Fig. 11.1.3

Por lo tanto la marcha a seguir será: se suman a los momentos de sujeción de cada nudo, los momentos de los extremos opuestos de las barras que concurren en él, se multiplica esta suma por los factores de giro de cada barra y se obtienen las influencias de giro sobre el momento en el

extremo de cada barra.

Reiterando esta operación en cada nudo, en una marcha arbitraria, se pueden hallar los valores sucesivos debidos a los giros en los extremos opuestos de las barras que concurren en él. Esta operación se repite hasta que los valores converjan. Cabe aclarar que los primitivos valores, cuando todavía no conocemos ninguno, se pueden suponer iguales a cero. Para nuestro ejemplo, de la fig. 11.1.3, sólo fueron necesarias dos iteraciones; en la fig. 11.1.4 se hace el cálculo de los momentos definitivos de acuerdo con la ecuación ( 11.1 ).

	-2.07	+2.67	-6.00	+6.00	
	+0.50	+1.54	+1.23	-3.10	
+0.07	+1.04	+2.04	+0.20 -1.87	-1.27	-0.50
+0.07	-0.13	+6.25	+0.20 -6.64	+1.03	-0.50
+0.14			+0.40		-1.00
+0.07			+0.20		-0.50
+0.07			+0.20		-0.50

Fig. 11.1.4

Obsérvese que en cada nudo la suma de momentos es igual a cero, en la fig. 11.1.5 se ha trazado el diagrama de momentos respectivo.

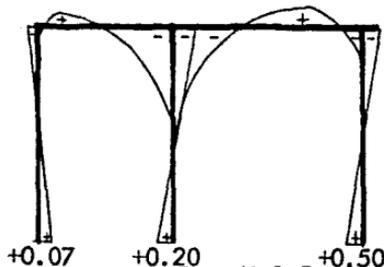


Fig. 11.1.5

Al resolver ejemplos en el capítulo IV se verá la secuencia detallada del procedimiento.

## 11.2 ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS LINEALES DE LOS NUDOS

Si los nudos de una estructura durante su deformación, además de girar se desplazan de su posición, puede descomponerse su deformación en cuatro etapas, las tres ya consideradas en el inciso anterior y una cuarta debida al desplazamiento  $\delta$  del extremo  $i$  de la barra, ver figura 11.2.1.

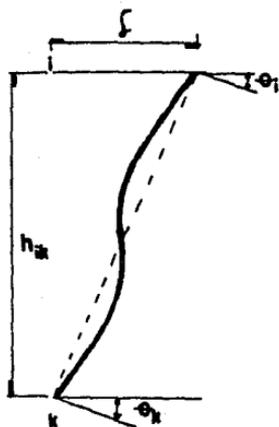


Fig. 11.2.1

La deformación total la podemos describir así:

1. La barra  $i-k$  se deforma sin girar sus extremos ni desplazarse (empotramiento perfecto).
2. El extremo  $i$  gira un ángulo  $\theta_i$ , sin girar el otro extremo ni desplazarse ninguno de los dos.
3. El extremo  $k$  gira un ángulo  $\theta_k$ , sin girar el extremo  $i$  ni desplazarse ninguno de los dos.
4. Los extremos  $i-k$  se desplazan entre ellos una distancia  $\delta$ , sin que ninguno de los dos experimente un nuevo giro.

El momento total en el extremo de la barra lo podemos expresar mediante la siguiente suma

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} \quad (11.3)$$

$M''_{ik}$  es la influencia del desplazamiento en cada una de las barras convergentes en el nudo. En nuestro caso solo consideraremos barras de sección constante y en ellas  $M''_{ik} = M''_{ki}$

La regla operatoria para el cálculo de las influencias del giro de los nudos la obtendremos igual que en el caso anterior. Considerando el equilibrio de un nudo se tiene:

$$\sum_{(i)} M_{ik} = 0$$

utilizando la ecuación ( 11.3 ) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} \bar{M}_{ik} + 2 \sum_{(i)} M'_{ik} + \sum_{(i)} M'_{ki} + \sum_{(i)} M''_{ik} &= 0 \\ -2 \sum_{(i)} M'_{ik} &= \bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik}) \end{aligned} \quad ( 11.4 )$$

en la ecuación anterior  $\bar{M}_i = \sum_{(i)} \bar{M}_{ik}$

## CARGAS VERTICALES

Se consideran primeramente pórticos de varios pisos con columnas verticales para el caso de que solo actúan fuerzas verticales sobre los elementos que forman el conjunto estructural.

Si se cortan todas las columnas de un piso ( r ) en una estructura, en sentido horizontal, debe verificarse que la suma de todas las fuerzas cortantes que actúan sobre las columnas de este piso sea igual a cero, ver la figura 11.2.2.

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = 0$$

El valor del esfuerzo cortante en una columna i-k cualquiera del piso, y suponiendo para este 1er. caso que todas son de la misma longitud, es igual a:

$$Q_{ik} = - \frac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}} \quad ( 11.4a )$$

si sustituimos en la ecuación anterior la ( 11.3 ) obtenemos sumando en todo el piso

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = - \frac{1}{h_{ik}} \sum_{(r)} ( 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} + 2M'_{ki} + M'_{ik} + M''_{ki} ) = 0$$

$$\sum_{(r)} M''_{ik} = -\frac{3}{2} \sum_{(r)} (M'_{ik} + M'_{ki}) \quad (11.5)$$

La ecuación anterior nos dice que la suma de las influencias de los desplazamientos de las columnas de un piso  $r$  sobre los momentos, puede obtenerse mediante las influencias de los giros de los extremos de las columnas en el mismo piso. La repartición de este valor en las distintas columnas del piso se hará distribuyendo proporcionalmente al coeficiente de rigidez  $K$  de las mismas al valor  $-3/2$ , obteniendo así los factores de corrimiento, análogamente a como se obtuvieron los factores de giro en el inciso anterior.

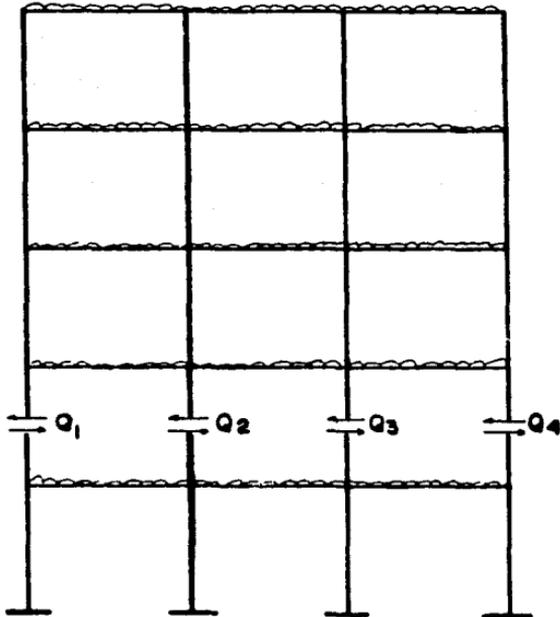


Fig. 11.2.2

No se debe olvidar que todas las barras son de sección constante y que todas las columnas en el piso tienen la misma longitud.

El procedimiento de cálculo, para este primer caso, consiste en aplicar reiteradamente las ecuaciones 11.4 y 11.5, es decir, mediante las influencias de los giros se obtienen las de los desplazamientos y con éstos otra vez las de los giros, y así sucesivamente hasta obtener la aproximación deseada. Finalmente con la ecuación ( 11.3 ) calculamos los momentos totales.

### CARGAS HORIZONTALES

Ahora veremos el caso en el que actúan fuerzas horizontales en los nudos o fuera de ellos. Existirán ahora además de los momentos de sujeción fuerzas horizontales de fijación que impiden el desplazamiento de los nudos, como los momentos impiden el giro de los mismos.

Efectuando un corte horizontal en todas las columnas de un piso ( r ) como en el caso anterior, podemos establecer la condición de equilibrio, ver figura 11.2.2 considerando que actúan fuerzas horizontales

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = \sum_{i=1}^t \bar{H}_i$$

la suma de fuerzas cortantes de un piso r es ahora igual a la suma de todas las fuerzas horizontales  $\bar{H}$  que actúan sobre ese piso. Esta suma de fuerzas  $\bar{H}$  de fijación se designará como fuerza cortante  $Q_r$ .

$$\sum_{(r)} Q_{ik} = Q_r$$

Si ahora usamos la ecuación 11.3 y la sustituimos nuevamente en la ( 11.4a ), tomando en cuenta que todas las columnas del piso tienen la misma longitud  $h_r$  podemos escribir

$$Q_r h_r = \sum_{(r)} [3(M'_{ik} + M''_{ik}) + 2 M''_{ik}]$$

de aquí la suma de las influencias del desplazamiento en todas las columnas del piso ( r ) será

$$\sum_{(r)} M''_{ik} = -\frac{3}{2} \left[ \frac{Q_r h r}{3} + \sum_{(r)} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right] \quad (11.6)$$

En la ecuación anterior el valor  $Q_r h r / 3$  es conocido como el momento de piso  $\bar{M}_r$  y es igual al tercio de la fuerza cortante de piso  $Q_r$  por la altura del mismo.

Los factores de giro y corrimiento son iguales que para el caso de cargas verticales solamente, la única diferencia entre el presente caso y el anterior es que al calcular la suma de las influencias de los giros en los extremos de las columnas hay que agregar el momento de piso  $\bar{M}_r$  a dicha suma para obtener las influencias del desplazamiento, ecuación 11.6.

El procedimiento de cálculo es pues análogo al anterior, se aplican reiteradamente las ecuaciones 11.4 y 11.6 tomando en cuenta desde la primera iteración la existencia del momento de piso  $\bar{M}_r$ . Para obtener esto hay que calcular previamente la fuerza cortante de piso  $Q_r$ , que como se dijo anteriormente es igual a la suma de fuerzas horizontales que actúan por encima del piso considerado.

Los valores  $\bar{M}_r$ , que se calculan previamente a las iteraciones, se colocan en cuadros a la izquierda de cada piso de la estructura.

Cabe mencionar que al calcular las influencias del desplazamiento de los nudos, estas influencias aumentan en proporción al número de pisos de la estructura, y al número de nudos por cada piso.

Las ecuaciones 11.4 y 11.6 pueden ser presentadas así:

$$M''_{ik} = Y_{ik} \left[ \bar{M}_r + \sum_{(r)} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right] \quad (11.7)$$

$$M'_{ik} = \mu_{ik} \left[ M_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik}) \right] \quad (11.8)$$

en donde  $Y_{ik} = -\frac{3}{2} \frac{K_{ik}}{\sum_{(r)} K_{ik}}$  y  $\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{K_{ik}}{\sum_{(i)} K_{ik}}$

las cuales nos dan directamente, en cada columna y en cada nudo la in-

fluencia del desplazamiento y del giro del nudo contiguo respectivamente. En 11.7  $Y_{ik}$  es el factor de corrimiento de la barra  $i-k$ , en 11.8  $M_{ik}$  es el coeficiente de giro en el extremo  $i$  de la barra  $i-k$ .

Finalmente los momentos totales se calculan con la ecuación -- ( 11.3 ), como en el caso anterior.

### COLUMNAS DE DIFERENTE ALTURA EN UN MISMO PISO

Si en un piso  $r$  de una estructura existen columnas de diferente longitud, esto no modifica el valor de los factores de giro ni la influencia de los giros, pero si el valor de la influencia del desplazamiento.

Sea  $h_r$  un valor ficticio igual a la longitud de las columnas que aparecen en mayor número. Recordando la ecuación de equilibrio

$$Q_r = \sum_{(r)} Q_{ik} = - \frac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}}$$

substituyendo en ésta la ecuación 11.3, pero sin substituir esta vez  $h_r$  por  $h_{ik}$ , ya que ahora las columnas pueden ser de diferente longitud y multiplicando la ecuación final por  $h_r$  tenemos

$$\sum_{(r)} M''_{ik} \frac{h_r}{h_{ik}} = - \frac{3}{2} \left[ \frac{Q_r h_r}{3} + \sum_{(r)} (M'_{ik} + M'_{ki}) \frac{h_r}{h_{ik}} \right]$$

si llamamos factor de reducción  $C_{ik}$  al valor  $h_r/h_{ik}$  e introducimos el momento de piso  $\bar{M}_r$ , ya definido anteriormente, transformaremos la ecuación anterior así:

$$\sum_{(r)} C_{ik} M''_{ik} = - \frac{3}{2} \left[ \bar{M}_r + \sum_{(r)} (M'_{ik} + M'_{ki}) C_{ik} \right]$$

podemos expresar el valor del factor de corrimiento como sigue:

$$Y_{ik} = \frac{- \frac{3}{2} C_{ik} K_{ik}}{\sum_{(r)} C_{ik}^2 K_{ik}} \quad ( 11.9 )$$

y la ecuación anterior la podemos escribir así:

$$M''_{ik} = Y_{ik} \left[ \bar{M}_r + \sum_{(r)} (M'_{ik} + M'_{ki}) C_{ik} \right] \quad (11.10)$$

la ecuación 11.10 expresa el valor del momento total, debido al desplazamiento en cada columna.

Para el presente caso hay que tener en cuenta las modificaciones introducidas: se calculan los factores de reducción "c" y los factores de -corrimento, éstos últimos con la ecuación 11.9, y se colocan ambos a la izquierda de las columnas en el esquema de cálculo. Las influencias de los giros y desplazamientos se calculan con las ecuaciones 11.8 y 11.10 y los momentos totales con la ecuación 11.3 como en los casos anteriores.

### COLUMNAS ARTICULADAS EN LOS APOYOS

Recordando que una columna articulada en su base que tiene un coeficiente de rigidez  $K$  y una longitud  $h$ , se comporta igual que otra que tiene una rigidez  $K' = 3/4 K$  y una longitud  $h' = 3/2h$ . Se pueden pues -substituir las columnas articuladas por otras empotradas, teniendo en cuenta los valores anotados.

Así pues se calculan los momentos de empotramiento en los extremos de todas las barras de la estructura, substituyendo para aquellas que están articuladas los valores de la rigidez  $K$  y la longitud  $h$  por los dados arriba.

Con estos valores se calculan los factores de giro y los de corrimento mediante la fórmula siguiente:

$$Y_{ik} = \frac{-\frac{3}{2} C_{ik} K_{ik}}{\sum_{(r)} m C_{ik}^2 k_{ik}} \quad (11.11)$$

en la fórmula anterior ( $C_{ik} = \frac{h_r}{h_{ik}}$  y  $m = \frac{3}{4}$ )

Para ilustrar lo dicho en estos últimos dos incisos vamos a obtener los factores de corrimento en la estructura de la figura 11.2.3.

Como se ve se trata de un marco cuyos coeficientes de rigidez se indican en la parte central de las columnas, las cuales son todas de la misma longitud pero las 2 de la derecha se han considerado articuladas en la base. Al substituir las longitudes de las columnas articuladas por las correspondientes considerándolas como si estuvieran empotradas, tendremos columnas articuladas y de diferente altura en un mismo piso, para ilustrar los dos casos.

Cabe recordar antes de continuar, que la obtención de los factores de corrimiento y por consiguiente las influencias debidas al desplazamiento horizontal de las columnas de acuerdo a la ecuación 11.10, es lo único que varía de los 2 casos tratados en estos últimos dos incisos con respecto a todos los demás.

Continuando con el ejemplo se tiene:

Escojemos como altura de piso  $h_r = 4.0$  y en las 2 columnas articuladas se hacen las substituciones

$$K' = \frac{3}{4} K = \frac{3}{4} 0.3 = 0.225 \quad h' = \frac{3}{2} h = \frac{3}{2} 4.0 = 6$$

Ahora podremos obtener  $C_{ik}$  para todas las columnas, para las dos de la izquierda se tiene

$$C_{ik} = \frac{h_r}{h_{ik}} = \frac{4.0}{4.0} = 1.0$$

para las dos de la derecha tomando en cuenta las substituciones hechas:

$$C_{ik} = \frac{4.0}{6.0} = 0.67$$

estos valores se anotan a la izquierda de las columnas en la figura 11.2.3.

Como siguiente paso, y éste es el más importante, obtenemos los factores de corrimiento de acuerdo a la ecuación 11.11 para las 2 columnas a la izquierda se tiene:

$$Y_{ik} = \frac{-\frac{3}{2} (1 \times 0.2)}{2(1^2 \times 0.2) + 2(\frac{3}{4} \times 0.67^2 \times 0.3)} = \frac{-0.30}{0.602} = 0.498$$

para los 2 de la derecha

$$Y_{ik} = \frac{-\frac{3}{2} (0.67)(0.3)}{0.602} = \frac{-0.301}{0.602} = 0.50$$

es importante observar que  $m = 1$  para las 2 columnas de la izquierda y  $m = 3/4$  para las dos columnas en las cuales se hizo la substitución. Todos los valores encontrados aparecen a la izquierda de las columnas en la figura 11.2.3 y como ya se anotó las demás operaciones, esto es, la obtención de los factores de giro, los momentos de piso y la secuencia iterativa de cálculo es análoga a los casos tratados anteriormente.

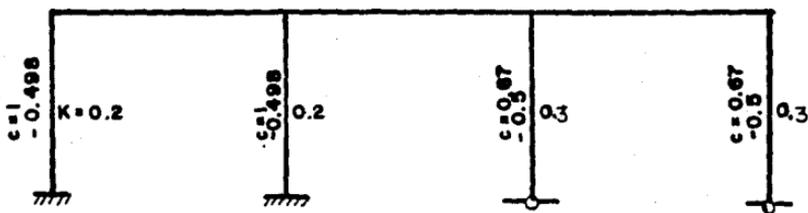


Fig. 11.2.3

### 11.3 COMPROBACION DE RESULTADOS

Este método ofrece una comprobación automática del mismo, pues con excepción de los valores fundamentales lo demás se comprueba al efectuar las iteraciones.

Los valores fundamentales o sea, el coeficiente de rigidez, momentos de sujeción, y momentos de los pisos, no hay otra forma de comprobarlos que mediante el repaso por otra persona de los mismos, o de la misma persona con gran cuidado. Pero hay un sistema de comprobación de los momentos definitivos con los valores primitivos del cálculo.

Esta comprobación será adecuada cuando en ninguna parte de la estructura exista un desequilibrio o deformación que sea incompatible con el estado de equilibrio de la misma.

## ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTOS LINEALES DE LOS NUDOS

Cuando se trata de este caso, para comprobar resultados bastará verificar las dos siguientes condiciones.

I. En cada nudo la suma de momentos definitivos debe ser igual a cero.

$$\sum_{(i)} M_{ik} = 0$$

II. En cada nudo la condición de deformación normal se da cuando todas las barras rígidamente unidas giran en un mismo ángulo.

Los ángulos de giro se calculan con la siguiente expresión:

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ik}^{\circ} + \frac{M_{ik}}{3 E K_{ik}} - \frac{M_{ki}}{6 E K_{ik}}$$

dicha expresión se obtiene al descomponer en 3 partes el giro total del extremo de una barra que converge a un nudo, como se muestra en la fig. 11.3.1.

El primer término es el valor del ángulo producido por la carga exterior a la viga i-k simplemente apoyada, como se muestra en la fase (a). En el capítulo de ejemplos de aplicación se obtendrá el valor de dicha ángulo para diferentes condiciones de carga.

El segundo término es el valor del giro producido por el momento resultante en el extremo i, que es igual al momento existente  $M_{ik}$  entre la rigidez absoluta del miembro i-k, o sea  $3EI/L$ , por tratarse de un miembro simplemente apoyado, fase (b).

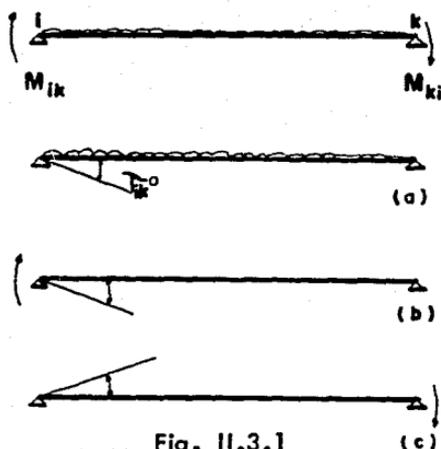


Fig. 11.3.1

El tercer término es el giro debido al momento inducido en el extremo  $i$  por el momento existente en el extremo  $k$ , dicho giro es nuevamente el momento entre la rigidez absoluta del miembro, fase (c) en la figura 11.3.1.

Si se multiplica toda la expresión anterior por  $3E$ , resulta otra más cómoda de manejar, esto es

$$T_{ik} = T_{ik}^o + \frac{M_{ik}}{K_{ik}} - \frac{M_{ki}}{2K_{ik}} \quad (11.12)$$

ilustrará en el capítulo de ejemplos.

El procedimiento de cálculo se -

## ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS LINEALES DE LOS NUDOS

Para el caso de desplazamientos lineal de los nudos, además de las condiciones I y II del inciso pasado, se deben cumplir dos más, una de equilibrio y otra de deformación.

1a. Si se hace un corte horizontal por todas las columnas de un piso, la suma de fuerzas horizontales exteriores por encima de ese piso, debe ser igual a la suma de fuerzas cortantes de todas las columnas del piso.

Si la carga horizontal exterior actúa en los nudos de la estructura, dicho corte se puede hacer a cualquier altura del piso. Pero si la carga actúa directamente sobre las columnas, el corte se debe hacer en el punto de cortante igual a cero después de considerar a la columna como viga libremente apoyada.

$$\sum_i^r H_i = -\sum_{(r)} Q_{ik}$$

$$-h_r \sum_i^r H_i = \sum_{(r)} (M_{ik} + M_{ki})$$

donde  $h_r$  es la altura del piso (  $r$  ) y  $H_i$  las cargas horizontales exteriores por encima del piso considerado. Pero la expresión anterior es para el caso de que todas las columnas en el piso sean de la misma altura. Si no es así se debe usar la expresión siguiente:

$$-h_r \sum_i^r H_i = \sum_{(r)} (M_{ik} + M_{ki}) \frac{h_r}{h_{jk}}$$

en la cual  $h_{jk}$  es como siempre la altura de cada columna.

IIa. El desplazamiento  $\delta$  entre los extremos de todas las columnas del piso debe ser igual.

La comprobación de los ángulos de giro de las barras horizontales se efectúa igual que para el caso de nudos fijos, pero para comprobar el giro de las columnas es necesario determinar primero el desplazamiento transversal  $\delta$  de las mismas.

Si llamamos  $D_{ik}$  al ángulo de desplazamientos transversal  $\delta/h$  - multiplicado por  $3E$  ( al principio se multiplica toda la expresión inicial por  $3E$  para obtener la ecuación 11.12 ), encontramos que éste se puede obtener de las influencias de desplazamiento y vale

$$D_{ik} = - \frac{M''_{ik}}{2K_{ik}}$$

así, los ángulos de giro en los extremos de las columnas serán iguales a

$$T_{ik} = D_{ik} + T_{ik}^{\bullet} + \frac{M_{ik}}{K_{ik}} - \frac{M_{ik}}{2k_{ik}} \quad ( 11.13 )$$

esta expresión se diferencia de la ( 11.12 ) únicamente en que se agregó - el término  $D_{ik}$ .

Así pues, la condición Ila queda comprobada al ser igual el valor  $D_{ik}$  para todas las columnas de un mismo piso, pero siempre y cuando tengan éstas la misma longitud. De no ser así, o sea que las columnas -- sean de diferente longitud, los valores  $D_{ik}$   $h_{ik}$  deben de ser iguales.

En el siguiente capítulo se verán algunos ejemplos de aplicación.

### CAPITULO III.- METODOS APROXIMADOS

El estudio de una estructura estáticamente determinada depende de las propiedades elásticas de sus elementos: de ahí la diferencia respecto de las estructuras estáticamente indeterminadas, en las cuales el análisis de fuerzas si depende de las propiedades elásticas de sus elementos.

Las propiedades elásticas más importantes son el módulo de elasticidad, el área de la sección, el momento de inercia de la sección y la longitud del elemento. Si se conocen todas estas propiedades puede llevarse a cabo un estudio de los llamados "exactos", los cuales proporcionan un grado de precisión del orden del que proporcionan los análisis estáticos en estructuras determinadas. Pero muchas veces no es posible debido a que se carece de los conocimientos necesarios para llevar a cabo un estudio estáticamente indeterminado, o el tiempo requerido para realizarlo puede ser tan grande que haya que abandonarlo. Otras veces las consideraciones económicas pueden ser determinantes para llevar a cabo un estudio aproximado.

Generalmente se llevan a cabo estudios aproximados cuando se calculan estructuras de poca importancia, o partes secundarias de estructuras importantes o al realizar un análisis preliminar.

Existen varios métodos aproximados de análisis indeterminado en todos ellos se hacen hipótesis que simplifican el cálculo de la siguiente manera: si en la estructura por resolver hay  $n$  componentes de fuerza independientes, más que de ecuaciones de la estática independientes, la estructura es estáticamente indeterminada de grado  $n$ . Por lo tanto habrá que hacer  $n$  hipótesis, cada una de las cuales dé lugar a una ecuación o relación, para que sea posible resolver aproximadamente con base en la estática solamente.

En esta tesis se describen a continuación dos métodos aproximados el método del factor y el método de Bowman.

### III.1 METODO DEL FACTOR

Este es un método para estudiar los pórticos de edificios sometidos a cargas laterales y depende de ciertas hipótesis que se hacen, referentes al comportamiento elástico de la estructura y que hacen posible un estudio aproximado de las deformaciones angulares del pórtico.

Aunque está basado en el método de las deformaciones angulares, conocido como método de pendiente - deflexión, es posible formular una serie de pasos sencillos que hacen posible su aplicación sin el conocimiento de los principios de la elasticidad en que se basa dicho método.

Los pasos se pueden enumerar como sigue:

- a) En cada nudo se calcula el factor  $v$  de las vigas como  $v = \sum k_c / \sum k$ , donde  $\sum k_c$  representa los valores  $k$  de las columnas que se encuentran en el nudo y  $\sum k$  la suma de los valores  $k$  de todos los elementos que concurren en él. El valor  $K$  es como siempre  $1/L$ . Se escribe  $v$  en cada extremo de las vigas contiguas al nudo donde se haya calculado.
- b) En cada nudo se calcula el factor  $c$  de las columnas como  $c = 1 - v$  y se escribe en cada extremo de las columnas junto al nudo.
- c) A cada número obtenido en a y b se le suma la mitad del correspondiente al extremo opuesto del elemento y cada una de estas sumas se multiplica por el valor  $k$  de cada elemento. Estos productos se llaman factores de momento de columna  $P_{ik}$  o de la Viga  $V_{ik}$  y son los valores relativos aproximados de los momentos.
- d) La suma de los momentos extremos en las columnas de un piso determinado, son iguales al cortante horizontal total en el piso multiplicado por la altura del mismo. Por lo tanto los factores de momento en cada columna se pueden transformar en momentos en los extremos de las columnas por proporción directa, en cada piso, esto equivale a decir que

$$M_{ik} = AP_{ik} \quad (III.1)$$

siendo  $M_{ik}$  los momentos reales en los extremos de las columnas.  $A$  tiene el mismo valor para todas las columnas de un piso. Podemos expresar

sar la suma de los momentos en los extremos de las columnas en el piso ( r ) por

$$\sum_{(r)} M_{ik} = A \sum_{(r)} P_{ik} \quad (III.2)$$

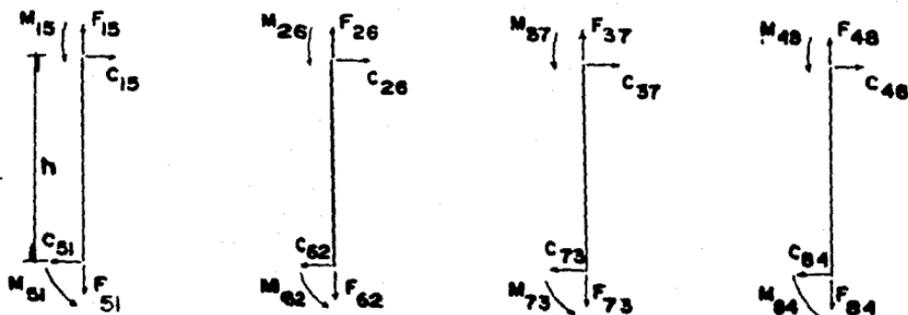


Fig. III.1.1 Columnas aisladas de un piso ( r )

Si consideramos el equilibrio elástico de todas las fuerzas que actúan sobre las columnas de un piso ( r ) ver figura III.1.1, tomando momentos con respecto a la base de la columna derecha, se tiene.

$$( C_{15} + C_{26} + C_{37} + C_{48} ) h = M_{15} + M_{26} + M_{37} + M_{48} + M_{51} + M_{62} + M_{73} + M_{84}$$

La suma de cortantes  $C_{ik}$  es igual al cortante total H en el piso, por tanto podemos escribir

$$\sum_{(r)} M_{ik} = Hh$$

y de la ecuación ( III.2 ) se tiene

$$A = \frac{Hh}{\sum_{(r)} P_{ik}} \quad (III.3)$$

Así pues, para cada piso se determina A por medio de III.3 y luego se pueden hallar los momentos en los extremos de las columnas por medio de la ecuación III.1 esto es, se multiplica A por cada factor de momento de columna  $P_{ik}$ .

Finalmente para encontrar los momentos en las vigas se distribuye la suma de los momentos en las columnas en cada nudo, proporcionalmente al valor del factor de momento de cada viga  $V_{ik}$ .

$$M_{viga} = \sum_{(i)} M_{columnas} \frac{V_{ik}}{\sum_{(i)} V_{ik}}$$

En el siguiente capítulo serán resueltos varios ejemplos con este método para comparar los resultados con los obtenidos por al método de Kani.

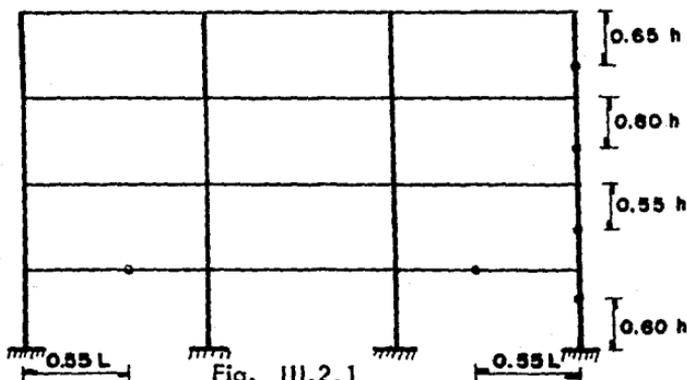
### III.2 METODO DE BOWMAN

Este es también un método aproximado muy útil en análisis preliminares de estructuras sujetos a cargas laterales. Fue propuesto como resultado del estudio de un gran número de marcos resueltos por métodos exactos.

El método se basa en las siguientes hipótesis:

1. Los puntos de inflexión en las trabes exteriores se encuentran a 0.55 de su claro, a partir de su extremo exterior. En trabes interiores— los puntos de inflexión se encuentran al centro del claro, excepto en la — crujía central cuando el número de crujías es impar, o en las dos centrales si es par. En estas crujías la posición del punto de inflexión en las trabes está forzada por condiciones de simetría y equilibrio.
2. Los puntos de inflexión en las columnas del primer entrepiso— se encuentran a 0.60 de la altura a partir de la base. En marcos de dos o más, tres o más, cuatro o más entrepisos respectivamente, se encuentran a 0.65, 0.60 y 0.55 de la altura correspondiente a partir del extremo supe—

rior. En edificios de cinco o más entrepisos, los puntos de inflexión en columnas para las cuales no se ha especificado la posición, se encuentran al centro de su altura, ver figura III.2.1.



3. La fuerza cortante en cada entrepiso se distribuye de la siguiente manera.

Primer entrepiso:

Una fuerza cortante igual a

$$Q_c = \frac{N - 0.5}{N + 1} Q$$

se distribuye directamente entre las columnas proporcionalmente a sus rigideces. La fuerza cortante  $Q_t = Q - Q_c$  se distribuye entre las crujeas proporcionalmente a la rigidez de la trabe que la limita en la parte superior. La cortante de cada crujea se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que la limitan.

En pisos superiores:

una fuerza cortante

$$Q_c = \frac{N - 2}{N + 1} Q$$

se distribuye directamente entre las columnas, la cortante  $Q_f = Q - Q_c$  se distribuye entre las crujeas como se hizo para la planta baja.

En las expresiones anteriores

$Q_c$  = fuerza cortante total en un entrepiso

$Q$  = fuerza cortante del entrepiso ( es igual a la fuerza exterior  $H$  que actúa sobre el entrepiso considerado ).

$N$  = número de crujeas del marco en el entrepiso considerado.

El procedimiento completo se puede enumerar como sigue:

a) Calcular la fuerza cortante en cada columna de acuerdo a la hipótesis 3.

b) Determinar momentos en los extremos de las columnas haciendo el producto de su fuerza cortante por la distancia del extremo al punto de inflexión.

c) Determinar momentos en los extremos de las trabes empezando por las exteriores, en las cuales el momento es la suma algebraica de los momentos de los otros miembros que concurren al nudo. Los momentos en los extremos interiores los podemos determinar por estática, ya que para cada miembro conocemos un momento y las distancias al punto de inflexión del mismo.

## CAPITULO IV.- EJEMPLOS Y COMPROBACION DE RESULTADOS.

EJEMPLO 1. Primeramente será resuelto un marco relativamente sencillo, en el cual se supondrá que no hay desplazamiento horizontal en los nudos.

Para mostrar la mecánica del método se resolverá el ejemplo, paso por paso, efectuando los cálculos detalladamente. La estructura se muestra en la figura IV.1, en ella se han marcado: Las rigideces "K" de las barras en el centro de cada una de ellas, además se indican los valores -- de las cargas exteriores y las longitudes de todos los elementos que forman el marco.

No hay que olvidar la convención de signos adoptada, es decir, se considerarán acciones de barra sobre nudo y serán positivas cuando hagan girar a éste en el sentido de las agujas del reloj.

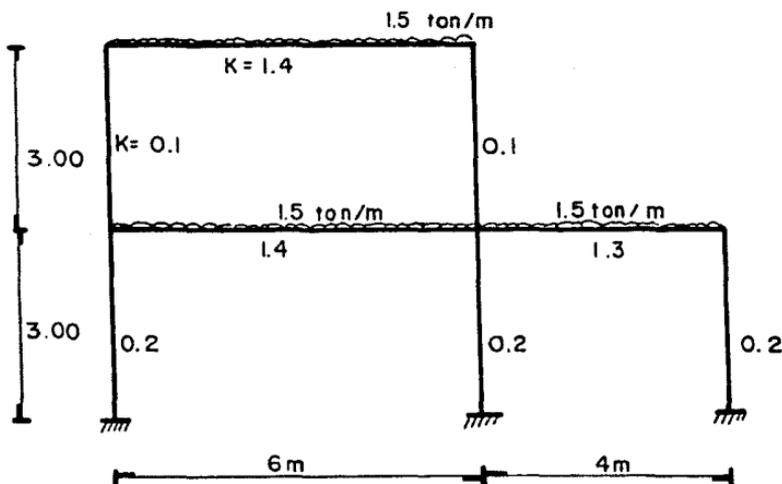


Fig. IV.1

Como primer paso calculamos los momentos de empotramiento perfecto para todas las barras.

$$M_{12} = - \frac{wL^2}{12} = - \frac{1.5 \times 36}{12} = - 4.5 \text{ Ton-m} \quad M_{21} = + 4.5$$

$$M_{34} = - 4.5 \quad M_{43} = + 4.5 \quad M_{4.5} = - \frac{1.5 \times 16}{12} = - 2 \quad M_{s4} = + 2$$

dichos valores se anotan en los extremos de todas las barras como se indica en la figura IV.2.

A continuación obtenemos los momentos de sujeción que se anotan en los centros de los círculos de cada nudo, en el presente caso todos son iguales a los de empotramiento excepto en el nudo 4 que vale

$$\bar{M}_4 = 4.50 - 2.00 = + 2.50$$

Las ecuaciones que se usarán en el presente caso serán la 11.1 y la 11.2, recordando la 11.2 es

$$- 2 \sum_{(i)} M'_{ik} = \bar{M}_i + \sum_{(i)} M'_{ki} \quad (11.2)$$

La cual sugiere que hay que repartir  $- 1/2$  proporcionalmente a la rigidez de las barras que concurren en cada nudo, por ejemplo para el nudo 1 se tiene

$$\mu_{1-3} = - \frac{1}{2} \frac{0.1}{1.5} = - 0.033 \quad \mu_{1-2} = - \frac{1}{2} \frac{1.4}{1.5} = - 0.467$$

y en el nudo 4

$$\mu_{4-3} = - \frac{1}{2} \frac{1.4}{3.0} = - 0.233 \quad \mu_{4-2} = - \frac{1}{2} \frac{0.1}{3.0} = - 0.017$$

$$\mu_{4-5} = - \frac{1}{2} \frac{1.3}{3.0} = - 0.217 \quad \mu_{4-8} = - \frac{1}{2} \frac{0.2}{3.0} = - 0.033$$

de igual manera se obtienen los factores de giro en todos los nudos restantes de la estructura.

A continuación realizamos la primera iteración empezando en el nudo 2, por el más descompensado. El valor a repartir será igual al momento de empotramiento, por valer cero todas las influencias de los giros - en esta primera iteración, ver figura IV.2.

$$4.50 (- 0.467) = - 2.10$$

$$4.50 (- 0.033) = - 0.15$$

de igual manera se realiza la primera iteración en todos los nudos, tomando en cuenta las influencias de los giros en los lugares donde ya existan, recordando que la marcha es arbitraria.

La 2a. iteración de las influencias de los giros para el nudo 4 - es  $2.50 + 2.05 - 0.25 - 0.56 = 3.74$ .

Y repartiendo se tiene

$$3.74 (- 0.233) = - 0.87$$

$$3.74 (- 0.017) = - 0.06$$

$$3.74 (- 0.217) = - 0.81$$

$$3.74 (- 0.033) = - 0.12$$

La 4a. iteración para el nudo 5 es

$$2.00 - 0.83) = 1.17$$

$$1.17 (- 0.433) = - 0.51$$

$$1.17 (- 0.067) = - 0.08$$

Se puede observar que ya en la 4a. iteración los valores convergen, es decir, no varían con respecto a la iteración anterior.

Posteriormente se realizan las sumas, de acuerdo a la ecuación II.1, éstas se efectúan en la figura IV.3, y sólo se anotan los valores que se van a sumar en cada extremo de las barras, o sea, el momento de empotramiento, la contribución del giro en el extremo contiguo y la suma de éste y la del extremo opuesto de acuerdo a la ecuación IV.1, que es

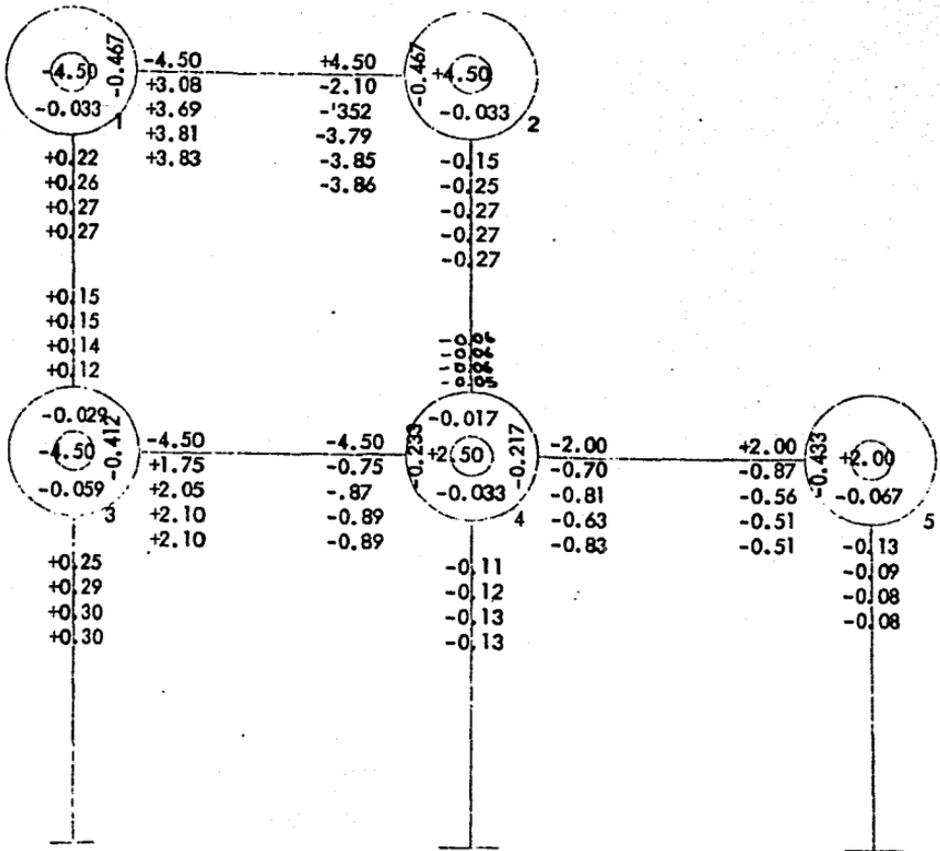


Fig. IV.2 Ejemplo 1

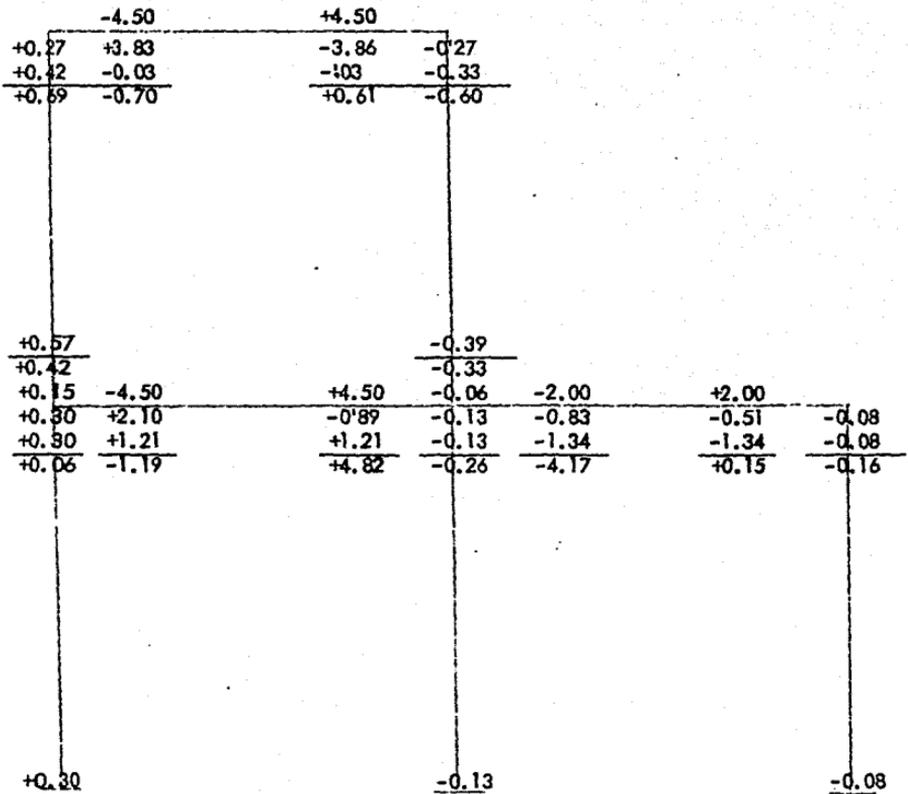


Fig. IV.3 Obtención de Momentos Totales, Ejemplo 1

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2 M'_{ik} + M'_{ki} \quad (11.1)$$

Por ejemplo, en el extremo 1-2 el momento vale

$$- 4.50 + 2.83 - 0.03 = - 0.70 \quad \text{Ton-m}$$

en el extremo 2-1 el momento vale

$$4.50 - 3.86 - 0.03 = + 0.61 \quad \text{Ton-m}$$

en el 3-1 vale

$$+ 0.15 + 0.42 = 0.57$$

de igual manera se obtienen los momentos en todos los extremos de todas las barras de la estructura, como se indica en la figura IV.3, obsérvese -- que se ha tratado de realizar la suma de la manera más práctica posible.

Finalmente se lleva a cabo la comprobación de resultados de -- acuerdo al inciso 11.3. Si recordamos basta que se comprueben 2 condiciones, por no haber considerado desplazamiento lateral de la estructura, estas son :

1. En cada nudo la suma de momentos debe ser igual a cero,

$$(i) \quad M_{ik} = 0$$

por ejemplo en el nudo 1 se tiene

$$+ 0.69 - 0.70 = - 0.01 \approx 0$$

en el nudo 4 se tiene

$$- 0.39 + 4.82 - 0.26 - 4.17 = 0.00$$

en la figura IV.3 se pueden llevar a cabo todas las comprobaciones, y se puede observar que todos los nudos cumplen con esta primera condición.

2. En cada nudo, todas las barras deben girar en el mismo ángulo, estos ángulos de giro se obtienen con la ecuación 11.12.

$$\tau_{ik} = \tau_{ik}^{\circ} + \frac{M_{ik}}{K_{ik}} - \frac{M_{ki}}{2K_{ik}} \quad (11.12)$$

de esta ecuación sólo desconocemos el primer término. De la tabla de giros de la figura IV.4 podemos ver que para nuestro caso, carga uniformemente repartida, el giro es  $\tau_{ik}^{\circ} = wL^2/8k$ . Como ejemplo se obtiene para los extremos 1-2 y 5-4.

$$\tau_{1-2}^{\circ} = \frac{wL^2}{8k} = \frac{1.5 \times 36}{8 \times 1.4} = + 4.82$$

$$\tau_{5-4}^{\circ} = - \frac{wL^2}{8k} = - \frac{1.5 \times 16}{8 \times 1.3} = - 2.31$$

estos valores se anotan en el 2o. renglón de las sumas de la figura IV.5, - en el primero se anotaron los momentos definitivos. También se anota en el tercer renglón de las vigas, o segundo de las columnas ya que en ellas no hay giro debido a carga exterior,  $M_{ik}/K_{ik}$  que multiplicado por  $-1/2$  se coloca en los extremos opuestos. Finalmente la suma de estas tres cantidades o dos en columnas nos da el valor del giro, que debe ser igual para todas las barras que concurren en un nudo. No se debe olvidar que estos valores de los giros resultan multiplicados por 3E y son positivos si giran en el sentido de las agujas del reloj.

En la figura IV.5 se han llevado a cabo todas las sumas y se puede ver que hay pequeñas diferencias entre los giros de las barras que concurren a un mismo nudo, pero por no pasar de 8 céntimas están dentro de lo aceptable. Como ejemplo se obtiene el giro de la barra 4-5.

$$\tau_{4-5}^{\circ} = \frac{wL^2}{8K} = \frac{1.5 \times 16}{8 \times 1.3} = 2.31$$

a continuación se obtiene  $M_{ik}/K_{ik}$

TABLA DE GIROS

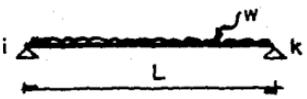
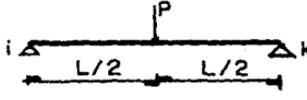
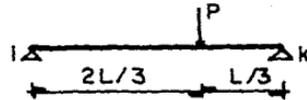
	$T_{ik}^{\circ} = - T_{ki}^{\circ} = \frac{wL^2}{8K}$
	$T_{ik}^{\circ} = - T_{ki}^{\circ} = \frac{3PL}{16K}$
	$T_{ik}^{\circ} = \frac{4 PL}{27 K} \quad T_{ki}^{\circ} = - \frac{5 PL}{27 K}$

Fig. IV.4

$$\frac{4-5}{K_{4-5}} = \frac{-4.17}{1.3} = - 3.20$$

ahora obtenemos  $- M_{ki}/2 K_{ik}$  de acuerdo a la ecuación II.12.

$$- \frac{0.15}{2 \times 1.3} = - 0.05$$

la suma de estas tres cantidades nos da el valor total del giro

$$2.31 - 3.20 - 0.05 = - 0.94$$

De igual manera se obtienen los giros de todos los extremos como se indica en la figura IV.5.

**EJEMPLO 2.** Ahora será resuelto el mismo ejemplo para suponiendo los nudos desplazables en sentido horizontal, recordemos que no hay cargas laterales.

Los coeficientes de repartición, los momentos de empotramiento - en los extremos de las barras así como los momentos de desequilibrio conservan el mismo valor. La primera iteración de las influencias de los giros es exactamente la misma, ya que los valores de las influencias del desplazamiento valen cero.

Se anotan los factores de corrimiento en el lado izquierdo y al centro de cada columna como sigue, ver la figura IV.6.

$$\text{Piso Superior} - \frac{3}{2} \left( \frac{0.1}{0.2} \right) = - 0.75$$

$$\text{Piso Inferior} - \frac{3}{2} \left( \frac{0.2}{0.6} \right) = - 0.50$$

Ahora ya podemos realizar la primera iteración de las influencias del desplazamiento, para el entrepiso superior y de acuerdo a la ecuación II.5, se tiene

$$0.22 + 0.12 - 0.15 - 0.05 = 0.14$$

	-0.70		+0.61				
<u>+0.69</u>	+4.82		-4.82	<u>-0.60</u>			
<u>+6.90</u>	-0.50		+0.25	<u>-6.00</u>			
<u>-2.85</u>	-0.21		+0.43	<u>+1.95</u>			
<u>+4.05</u>	+4.11		-4.14	<u>-4.05</u>			
<u>+2.25</u>				<u>-0.90</u>			
<u>+5.70</u>				<u>-3.90</u>			
<u>-3.45</u>				<u>+3.00</u>			
<u>+0.57</u>	-1.19		+4.82	<u>-0.39</u>	-4.17	+0.15	
<u>+0.60</u>	+4.82		-4.82	<u>-0.26</u>	+2.31	-2.31	<u>-0.16</u>
<u>+3.00</u>	-0.85		+0.42	<u>-1.30</u>	-3.20	+1.60	<u>-0.80</u>
<u>-0.75</u>	-1.72		+3.44	<u>+0.32</u>	-0.05	+0.11	<u>+0.20</u>
<u>+2.25</u>	+2.25		-0.96	<u>-0.98</u>	-0.94	-0.60	<u>-0.60</u>
<u>0.00</u>			<u>0.00</u>			<u>0.00</u>	
<u>+1.50</u>			<u>+0.65</u>			<u>-0.40</u>	
<u>-1.50</u>			<u>+0.65</u>			<u>+0.40</u>	
<u>+0.30</u>			<u>-0.13</u>			<u>-0.08</u>	

Fig. IV.5 Comprobación de Resultados, Ejemplo 1.

valor que repartimos entre los factores de corrimiento de las columnas, que para el presente caso son iguales

$$0.14 (-0.75) = -0.10$$

-0.10 se coloca a la derecha y al centro de las columnas. De igual forma lo hacemos para el entrepiso inferior

$$0.25 - 0.11 - 0.13 = 0.01$$

repartiendo  $0.01 (-0.50) = -0.01$

En seguida calculamos otra vez las influencias de los giros, pero ahora sí tomando en cuenta las influencias del desplazamiento de la iteración anterior, de acuerdo a la ecuación 11.4, para el nudo 1 tenemos

$$4.50 - 0.05 + 3.00 - 0.10 = 7.43$$

repartiendo

$$7.43 (-0.467) = -3.47$$

$$7.43 (-0.033) = -0.24$$

Y en el nudo 4 tenemos.

$$2.50 + 2.10 - 0.24 - 0.56 - 0.10 - 0.01 = 3.69$$

$$3.69 (-0.233) = -0.86$$

$$3.69 (-0.017) = -0.06$$

$$3.69 (-0.217) = -0.80$$

$$3.69 (-0.033) = -0.12$$

Al terminar esta 2a. iteración de las influencias de los giros en todos los nudos realizamos otra vez la de los desplazamientos, luego otra vez la de los giros, y así sucesivamente hasta obtener la aproximación deseada. En el presente ejemplo se llegó hasta la 5a. iteración, en la cual todos los valores convergieron.

El siguiente paso es la obtención de los momentos definitivos, — que se realiza en la figura IV-7 y es igual que en el ejemplo 1, excepto —



en las columnas, donde hay que agregar el término correspondiente al desplazamiento de acuerdo a la ecuación 11.3. Por ejemplo el momento del extremo 1-2 es la suma de : 0.27 que es la influencia del giro en el extremo contiguo y 0.35 que es a su vez la suma de la influencia del giro en el extremo contiguo y opuesto y la del desplazamiento. De igual forma se obtienen los momentos definitivos para toda la estructura, como se muestra en la figura IV-7.

Aquí es importante observar las diferencias en los momentos obtenidos entre este ejemplo y el anterior, en el cual no se consideró desplazamiento lateral. Dichas diferencias nos llevan a la conclusión de que no se debe despreciar dicho desplazamiento, ya que pueden llegar a cambiar de signo los momentos en los extremos de las columnas.

Finalmente en la figura IV.8 se lleva a cabo la comprobación de resultados, la cual es análoga a la del ejemplo 1, con la diferencia de que a las sumas en las columnas hay que agregar el término  $D_{ik} = - M_{ik} / 2K_{ik}$ , que es el giro debido al desplazamiento lateral de la estructura. Por ejemplo en el extremo 4-7 sumamos  $M_{ki}/K_{ik} = - 0.29/0.2 = - 1.45$  con  $- M_{ki}/2K_{ki} = - 0.17/2 \times 0.2 = + 0.42$  y con  $D_{ik} = - (0.05)/2 \times 0.2 = + 0.12$ , que da  $- 0.91$ , que es el giro del extremo 4-5. De igual forma se obtienen los giros de todos los extremos recordando que deben ser iguales cuando estos concurren en un mismo nudo, se debe observar en la fig IV.8 que el término que primero se obtiene es  $D_{ik}$ .

**EJEMPLO 3.** Ahora será resuelto un marco un poco más considerable en cuanto a tamaño y a cargas consideradas. De la misma forma que en el ejemplo 1, primeramente se considerará que no hay desplazamiento horizontal de los nudos.

En la figura IV.9 se muestra el marco. En él se han marcado las rigideces  $K$  de las barras en el centro de cada una de ellas, además se indican los valores de las cargas exteriores y las longitudes correspondientes de todos los elementos que forman el marco.

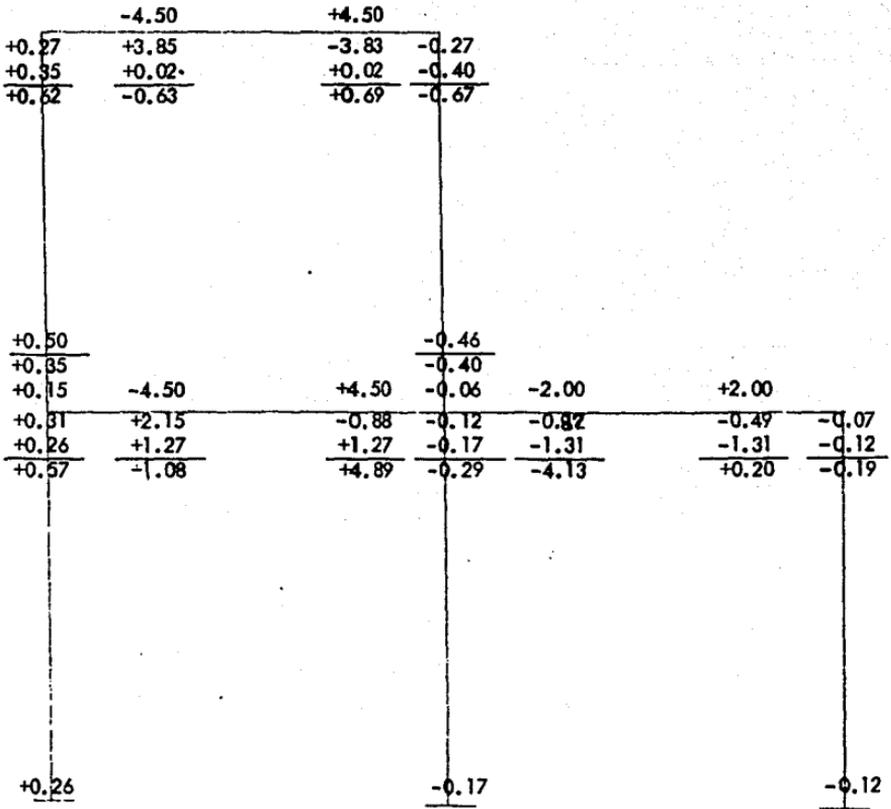


Fig. IV.7 Obtención de Momentos Totales, Ejemplo 2



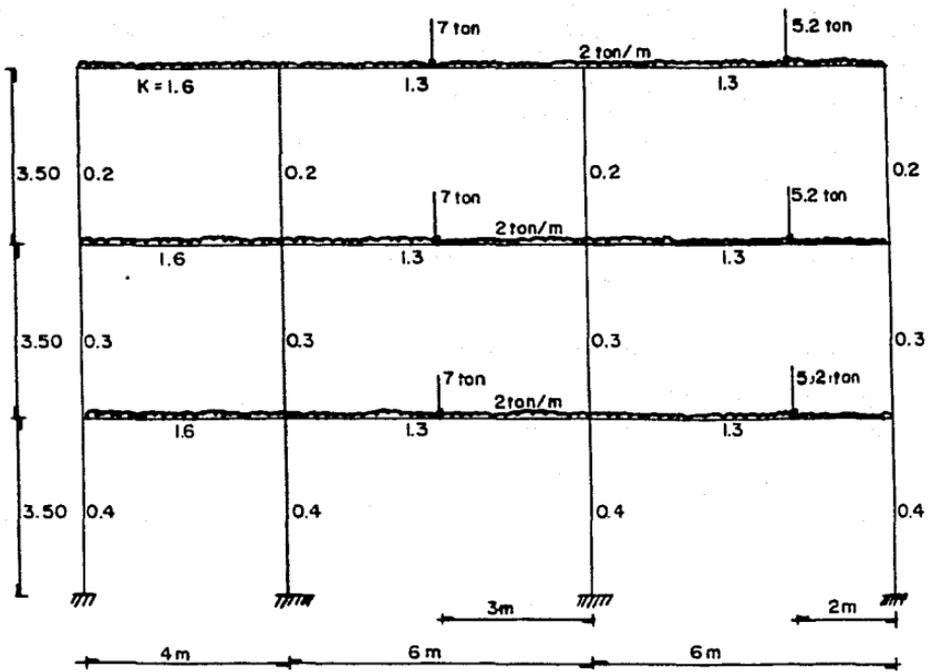


Fig. IV-9

Primeramente calculamos los momentos de empotramiento para todas las barras, por ejemplo para las 1-2, 5-6 y 9-10 dichos momentos son

$$\text{en el extremo izquierdo } M_{1-2} = - \frac{wL^2}{12} = - \frac{2 \times 16}{12} = - 2.67 \text{ Ton-m}$$

$$\text{en el extremo derecho } M_{2-1} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2 \times 16}{12} = 2.67 \text{ Ton-m}$$

de igual manera se obtienen los momentos de empotramiento en todas las barras y se anotan en los extremos de las mismas, ver figura IV.10.

A continuación obtenemos los momentos de sujeción que se anotan en los centros de los círculos de cada nudo, por ejemplo para el nudo 2 éste vale

$$\bar{M}_2 = + 2.67 - 11.15 = - 8.58$$

Las ecuaciones de trabajo para el presente caso serán la 11.1 y la 11.2, si recordamos la 11.2, ésta es

$$-2 \sum_{(i)} M'_{ik} = \bar{M}_i + \sum_{(i)} M'_{ki} \quad (11.2)$$

Lo cual quiere decir que tenemos que repartir el valor  $-\frac{1}{2}$  proporcionalmente a todas las barras que concurren en el nudo, para obtener los factores de giro. Por ejemplo en el nudo 10 se tiene :

$$\mu_{10-9} = - \frac{1}{2} \frac{1.6}{3.6} = - 0.222 \quad \mu_{10-6} = - \frac{1}{2} \frac{0.3}{3.6} = - 0.042$$

$$\mu_{10-11} = - \frac{1}{2} \frac{1.3}{3.6} = - 0.180 \quad \mu_{10-14} = - \frac{1}{2} \frac{0.4}{3.6} = - 0.055$$

La aplicación de la ecuación (11.2) en sucesivas interacciones, - esto es, al momento de sujeción en cada nudo se suman los momentos flexores de los extremos opuestos de las barras que concurren en él. Esta su-

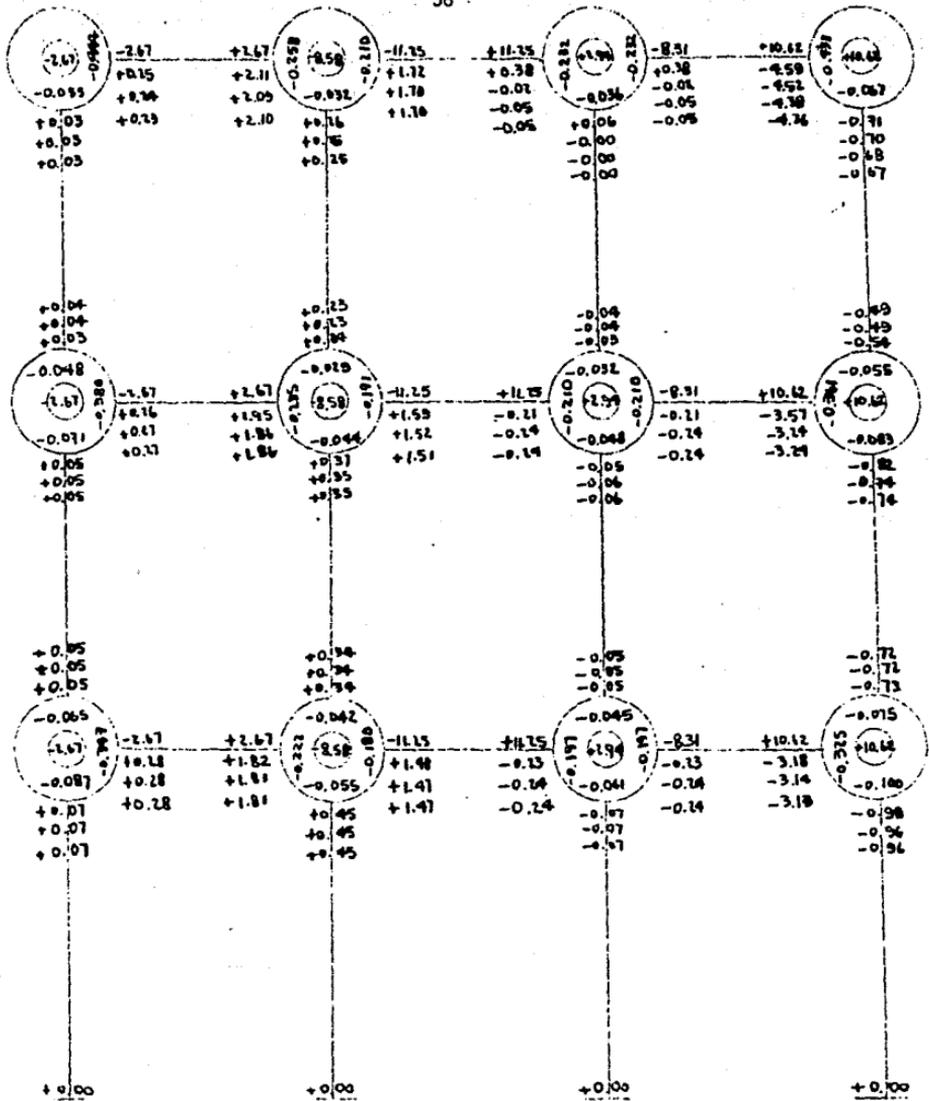


Fig. IV.10 Ejemplo 3

ma se multiplica por los factores de giro de cada barra, y los resultados -- son las influencias de los giros sobre el momento flector en el extremo de cada barra. Reiterando esta operación en los sucesivos nudos en una marcha arbitraria se puede llegar a la aproximación deseada.

En la fig. IV.10 se ha llegado hasta la 3a. iteración, en la -- cual los valores convergen. Se empezó la primera iteración en el nudo 4, por ser el más descompensado, y en él se supuso que las influencias de los extremos opuestos valen cero por ser la primera iteración.

$$+ 10.62 + 0.00 + 0.00 = 10.62$$

y repartiendo se tiene

$$M_{4-3} = 10.62 (-0.433) = - 4.59$$

$$M_{4-8} = 10.62 (-0.067) = - 0.71$$

La 3a. iteración en el nudo 10 llegando del 6 fue como sigue :

$$- 8.58 + 0.35 - 0.24 + 0.28 = 9.19$$

y repartiendo

$$M_{10-19} = - 8.19 (- 0.222) = 1.81$$

$$M_{10-6} = - 8.19 (- 0.042) = 0.34$$

$$M_{10-11} = - 8.19 (- 0.180) = 1.47$$

obsérvese que en los pies de las columnas este giro vale cero.

Como ya se dijo la marcha en los distintos nudos es arbitraria pero aquí se siguió 4-3-2-1-6-8-7-5-10-12-9 y 11.

Ahora usando la ecuación 11.1 obtenemos los momentos definitivos

$$M_{ijk} = \bar{M}_{ijk} + 2 M'_{ik} + M'_{ki} \quad (11.1)$$

En la figura IV.11 se ha llevado a cabo esta suma, en ella solo aparecen los valores que van a ser sumados en cada barra : el momento de empotramiento, la influencia del giro en el extremo contiguo y la suma

algebraica de los giros en los extremos contiguo y opuesto, según la ecuación (11.1).

Finalmente llevamos a cabo la comprobación de los resultados. - Si recordamos el inciso 11.3 para el presente caso basta que se comprueben las 2 siguientes condiciones :

$$a) \sum_{(i)} M_{ik} = 0$$

si observamos la Figura IV.11 esta condición se cumple con un error máximo de 5 centésimas, lo cual es aceptable.

$$b) T_{ik} = T_{ik}^{\circ} + \frac{M_{ik}}{K_{ik}} - \frac{M_{ki}}{2 K_{ik}}$$

En la figura IV.12 se ha llevado a cabo la comprobación de esta condición, en ella se anotaron en los extremos de las barras y por la parte superior los momentos definitivos, los giros debidos a las cargas exteriores -  $T_{ik}$ , por ejemplo, para 1-2 vale ( Ver Tabla Fig. IV.4 ).

$$T_{1-2}^{\circ} = - T_{2-1}^{\circ} = \frac{wL^2}{8K} = \frac{2 \times 16}{8 \times 1.6} = 2.5$$

esto se puede comprobar por medio de la viga conjugada y es positivo si - gira en el sentido de las manecillas del reloj. También se anotó, tercer - renglón en vigas y segunda en columnas,  $M_{ik}/K_{ik}$ , que multiplicado por - 1/2 y afectado de signo contrario, se coloca en los extremos opuestos.

Finalmente la suma de estas tres cantidades, o dos en columnas, nos da el valor del giro que debe de ser igual para todos los elementos -- que concurren a un nudo. Cabe mencionar que las diferencias observadas - están dentro de lo aceptable.

EJEMPLO 4. En este ejemplo se resolverá la misma estructura - del ejemplo 3 por ahora con cargar laterales adicionadas a las ya existentes, una carga de 2 ton, concentrada en cada nudo, actuando de izquier-

	-1.67	+2.67	-11.25	+11.25	-0.31	+12.62		
+0.03	+0.23	+2.10	+0.75	+1.70	-0.05	-0.00	-0.05	-4.36
+0.07	+1.33	+2.33	+0.40	+1.65	+1.65	-0.04	-4.41	-4.81
+0.10	-0.8	+3.10	+0.73	-3.20	+11.25	-0.04	-11.77	+1.05
								-1.03
+0.11			+0.71			-0.08		-1.65
+0.07			+0.98			-0.04		-1.10
+0.04	-2.67	+2.67	+0.73	-11.25	+11.25	-0.04	-8.31	+10.61
+0.05	+0.11	+1.86	+0.25	+1.51	-0.24	-0.06	-0.24	-3.24
+0.10	+2.13	+1.13	+0.59	+1.27	+1.27	-0.11	-3.98	-3.48
+0.15	-0.27	+6.66	+1.04	-8.47	+12.28	-0.17	-11.05	+3.90
								-2.10
+0.15			+1.33			-0.18		-2.39
+0.10			+0.65			-0.11		-1.44
+0.05	-2.67	+2.67	+0.24	-11.25	+11.25	-0.05	-8.31	+10.61
+0.07	+0.18	+1.91	+0.45	+1.97	-0.24	-0.07	-0.24	-3.13
+0.07	+2.08	+2.08	+0.45	+1.23	+1.23	-0.07	-3.37	-3.37
+0.14	-0.30	+6.33	+0.90	-8.55	+12.28	-0.14	-11.91	+4.11
								-1.72
14.97			+0.43			-0.07		-0.96

Fig. IV.11 Cálculo de momentos definitivos. Ejemplo 3



da a derecha. Se ha escogido 2 ton. para facilidad de cálculo.

Estas cargas laterales pueden ser debidas a sismo o a viento y su disposición depende de la estructuración. También dan lugar a desplazamientos lineales de los nudos y su evaluación se contempla en el inciso -- 11.2.

Nuestras ecuaciones de trabajo serán la 11.4 y la 11.6, los momentos definitivos se obtendrán con la 11.3. Los factores de giro, los momentos de mpotramiento y los momentos de fijación se obtienen igual que en el ejemplo 3. Los factores de corrimiento se obtienen repartiendo  $-3/4$  entre las columnas de un mismo piso proporcionalmente a la rigidez K de las barras y se anotan a la izquierda de cada columna, como se indica en la figura IV.13. Posteriormente obtenemos los momentos de piso, que para el piso intermedio vale

$$M_{11} = \frac{Q_2 h_2}{3} = \frac{4 \times 3.5}{3} = 4.67$$

4.67 se anota a la izquierda encerrado en un recuadro.

El proceso de cálculo es análogo al del ejemplo 3, sólo que ahora al calcular la influencia del desplazamiento debe agregarse en los extremos de las columnas el momento de piso  $\bar{M}_r$ .

Al iniciar el proceso iterativo, como no conocemos ningún valor aproximado de las influencias de los giros, calculamos únicamente las influencias del desplazamiento, multiplicando los momentos de los pisos por el correspondiente factor de corrimiento. Por ejemplo, para el piso intermedio este vale.

$$4.67 (- 0.375) = - 1.75$$

realizada la primera iteración de los desplazamientos realizamos la primera de los giros, y así sucesivamente hasta obtener la aproximación adecuada. En el presente caso ésta aproximación se obtuvo en la 4a. iteración. Como ejemplo realizamos la iteración No. 4 del nudo 11.

$$+ 2.94 + 1.98 + 0.01 - 1.81 - 1.94 - 2.83 = - 1.65$$

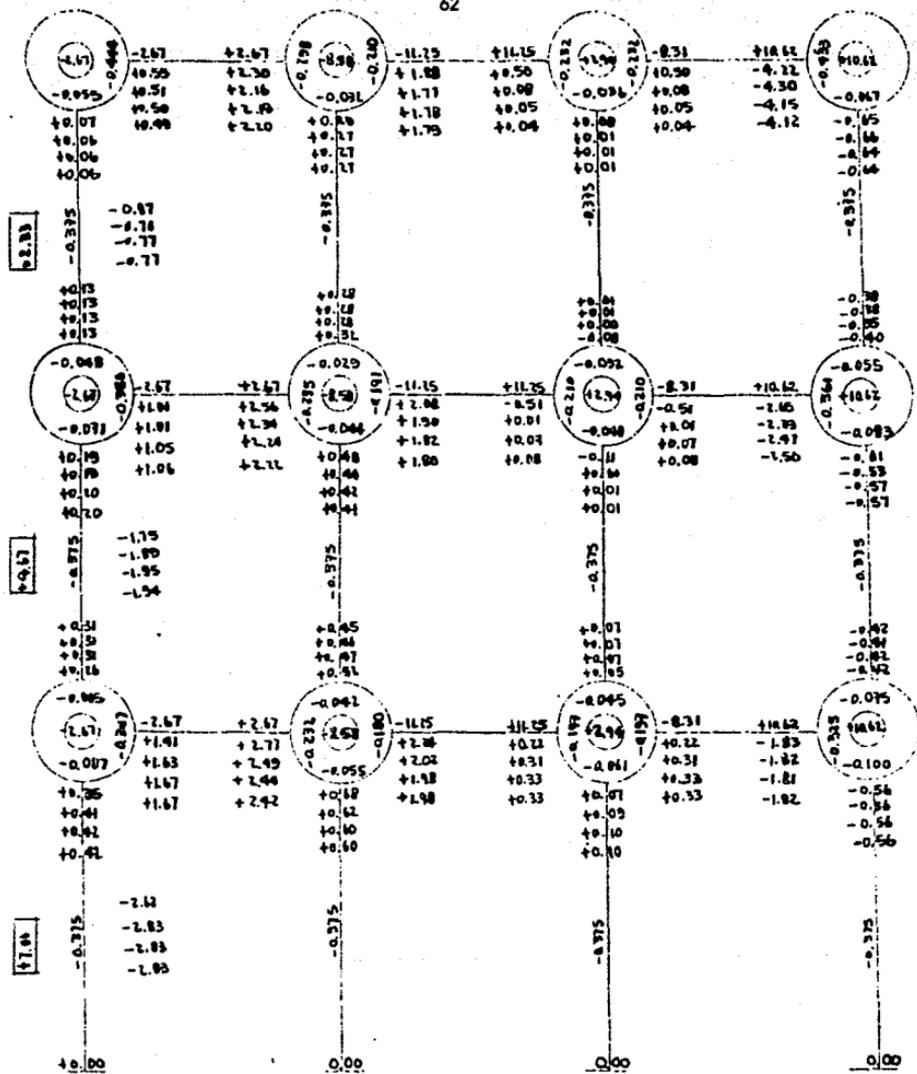


Fig. IV.13 Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}
 - 1.65 (- 0.197) &= 0.33 \\
 - 1.65 (- 0.045) &= 0.07 \\
 - 1.65 (- 0.197) &= 0.33 \\
 - 1.65 (- 0.061) &= 0.10
 \end{aligned}$$

El siguiente paso es la obtención de los momentos definitivos, éstos se obtienen en la figura IV. 14 análogamente a como se hizo en el ejemplo 3 sólo que ahora se agrega además la influencia del desplazamiento, que sólo existe para las columnas en el presente caso.

Finalmente obtenemos los giros, en la figura IV.15, para la comprobación de resultados. Esta comprobación es también análoga a la del ejemplo 3, con la diferencia de que ahora se agrega el giro  $D_{ik}$  debido al desplazamiento en los extremos de las columnas de acuerdo a la ecuación II.13, ésto es

$$T_{ik} = D_{ik} + T_{ik}^o + \frac{M_{ik}}{K_{jk}} - \frac{M_{ki}}{2K_{ik}} \quad (II.13)$$

Si recordamos  $D_{ik} = - \frac{M_{ik}}{2K_{jk}}$  y sólo se aplica a los extremos de las columnas, ya que son los únicos que giran a causa del desplazamiento lateral.





Los ejemplos 5 y 6 se han resuelto para carga lateral uniformemente distribuida. La estructura del ejemplo 5 se muestra en la figura IV.16, en realidad es la misma estructura del ejemplo 3 pero en ella se han variado las alturas de los entrepisos y se conservan los coeficientes de rigidez K. La del ejemplo b se muestra en la figura IV.23 y se ha resuelto para las mismas cargas de la del ejemplo 5 pero en ella se han variado los coeficientes de rigidez K de las columnas hasta quedar aproximadamente iguales a los de las vigas.

El proceso de cálculo es análogo al del ejemplo 4 con la diferencia de que ahora no hay carga vertical, ésto se ha hecho con el objeto de comparar los resultados proporcionados por el método de Kani en los ejemplos 5 y 6, como se muestra en las páginas que siguen, con los obtenidos por el método del factor y el método de Bowman.

También se han llevado a cabo las comprobaciones correspondientes en las soluciones por Kani, figuras IV.19 y IV.26, en ellas se puede ver que las soluciones Kani son aceptables ya que las diferencias en los giros, entre barras que concurren en un mismo nudo, no pasan de 6 centésimas.

En cambio los resultados obtenidos con el método del factor, figuras IX-21 y IV-28 y el método de Bowman, figuras IX-22 y IV-29, no son buenos; ya que se pueden observar diferencias hasta del 50%, notándose incluso que no varió la solución por el método del factor al variar la rigidez de las columnas en el ejemplo 6.

Como ya se dijo el proceso de cálculo por el método de Kani es análogo al de los ejemplos anteriores, por lo tanto vamos a ver la solución del ejemplo 5 por el método del factor y el método de Bowman.

En las figuras IV.20 y IV.21 de muestra la solución del ejemplo 5 por el método del factor, dicha solución se ha llevado a cabo como sigue: Como punto número 1 se obtienen los factores "v" de las vigas, de acuerdo a lo dicho en el inciso I del capítulo III, en todos los nudos; como la suma de los coeficientes  $K_c$  de las columnas que concurren a dicho nudo entre la suma de los K de todos los elementos que concurren en el nudo, por ejemplo para el nudo 10 se tiene

$$\frac{0.3 + 0.4}{0.3 + 0.4 + 1.6 + 1.3} = 0.194$$

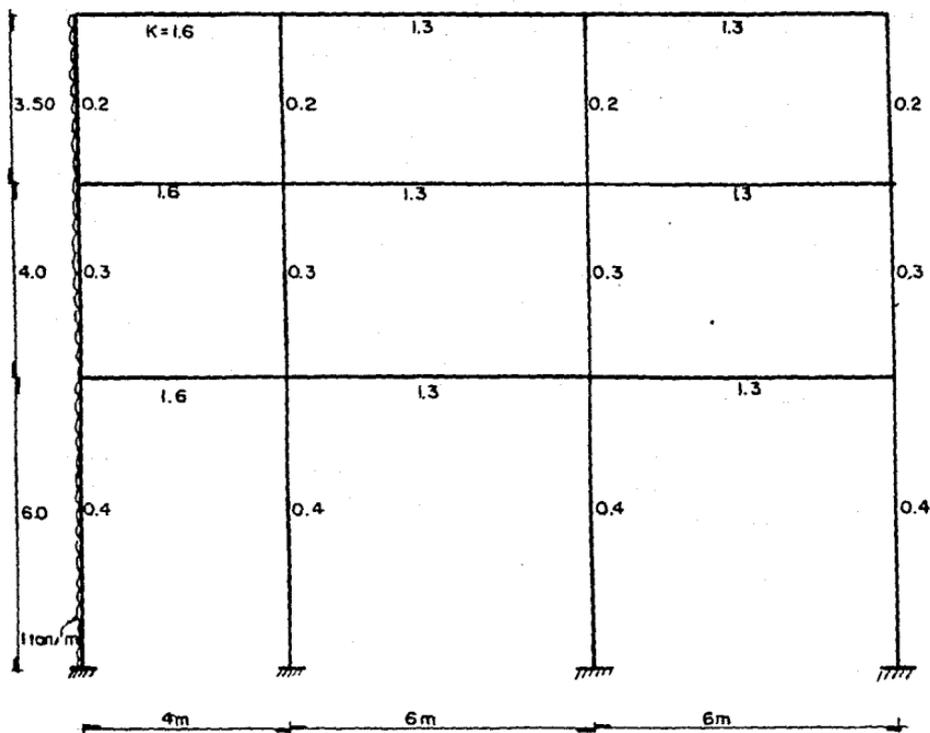


Fig. IV.16 Ejemplo 5.

0.194 se anota como primer término de la suma que se va a efectuar en las dos vigas que concurren al nudo 1o.

Como siguiente paso se obtienen los factores "c" de las columnas para todos los nudos, como  $C = 1 - v$ , en el nudo 1o. se tiene

$$1 - 0.194 = 0.806.$$

que se coloca en los extremos de las columnas del nudo 1o.

A cada uno de los números obtenidos en los pasos anteriores, en cada extremo de todos los elementos de la estructura, se le suma la mitad del correspondiente al extremo opuesto del elemento, como se indica en la figura IV-20. Posteriormente todas estas sumas se multiplican por el correspondiente coeficiente K del elemento. Por ejemplo en los extremos superior e inferior de la columna entre los nudos 6 y 10 tenemos

$$1.256 \times 0.3 = 0.377$$

$$1.232 \times 0.3 = 0.370$$

dichos valores son en realidad los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de todos los elementos de la estructura.

Por la estática, la suma de los momentos extremos de las columnas en un piso determinado, es igual al cortante horizontal total en el piso multiplicado por la altura. Por lo tanto los valores encontrados en el paso anterior en los extremos de las columnas " $P_{ik}$ ", se pueden transformar en momentos por proporción directa en cada piso, en otras palabras.

$$(r) \quad M_{ik} = A \sum_{(r)} P_{ik} \quad (11.2)$$

y por otro lado

$$A = \frac{Hh}{\sum_{(r)} P_{ik}} \quad (11.3)$$

Así el valor de A para el entrepiso superior es

$$A = \frac{1.75 \text{ Ton} \times 3.50 \text{ m}}{0.241 + 0.254 + 0.264 + 0.272 + 0.261 + 0.270 + 0.231 + 0.245} = 3.00$$

3 se multiplica por todos los valores " $P_{ik}$ " del entrepiso superior para obtener los momentos en los extremos de las columnas de dicho entrepiso. En la figura IV-21 se ha realizado la operación anterior para los 3 entrepisos de la estructura.

Finalmente la suma de momentos en los extremos de las vigas en cada nudo, es igual por la estática, a la suma de los momentos en los extremos de las columnas que se obtuvieron en el paso anterior, en otras palabras, la suma de momentos de las columnas que concurren a un nudo se reparten entre las vigas que concurren a dicho nudo en proporción a su coeficiente de viga  $V_{jk}$ , como ejemplo en el nudo 10 se tiene :  
 Momentos en las columnas = 2.96 - 7.90 = - 10.86. (10)

$$\frac{10.86}{0.553 + 0.390} = 11.52$$

$$M_{10-9} = 11.52 (0.553) = 6.37 \text{ ton-m}$$

$$M_{10-11} = 11.52 (0.390) = 4.49 \text{ ton-m}$$

En la figura IV-21 se han obtenido los momentos definitivos por el método del factor para toda la estructura, en ella sólo aparecen 2 valores en cada extremo; el factor de viga o de columna, según el caso y el momento definitivo.

Ahora se resuelve el ejemplo 5 por el método de Bowman. En la figura IV-22 se muestra dicha solución y se llevó a cabo de acuerdo a lo dicho en el inciso III.2, como sigue :

En el entrepiso inferior y de acuerdo a la ecuación III-4 se distribuye entre las columnas y proporcionalmente a sus rigideces la fuerza cortante.

$$Q_c = \frac{13 - 0.5}{3 + 1} (10.50) = 6.56$$

no hay que olvidar que en entresijos superiores se distribuye la fuerza  $Q_c$  derivada de la ecuación III.5

$$6.56 \frac{0.4}{1.6} = 1.64$$

1.64 se coloca a la altura del punto de inflexión de todas las columnas -- del entresijo inferior, por tener todas el mismo valor de K. A continuación se distribuye la fuerza  $Q_f = Q - Q_c$  entre las crujeas del entresijo proporcionalmente a la rigidez de la trabe que la limita en la parte superior y -- la cortante de cada cruja se distribuye a su vez por partes iguales entre -- las 2 columnas que la limitan, para el entresijo inferior se tiene

$$Q_f = 10.50 - 6.56 = 3.94$$

para la cruja de la izquierda

$$(3.94) \frac{1.6}{1.6 + 1.3 + 1.3} = 1.50 \quad 1.50 \div 2 = 0.75$$

0.75 se coloca después del valor obtenido en el paso anterior y se suman, -- esta suma es la cortante del entresijo que corresponde a cada columna; -- hay que observar que en las columnas centrales que colindan con 2 crujeas -- los valores a sumar son 3.

A continuación se multiplica la fuerza cortante de cada columna por su distancia al nudo superior e inferior para obtener el momento definitivo correspondiente, como se muestra en la figura IV.22.

Finalmente los momentos de las vigas se obtienen como se hizo -- con el método del factor, o sea, la suma de momentos de las columnas -- que concurren en un nudo se distribuyen entre las vigas que llegan a dicho nudo proporcionalmente a sus coeficientes de rigidez K, pero teniendo en cuenta las distancias a los puntos de inflexión excepto para los nudos exteriores, por ejemplo para el nudo 12 que es exterior se tiene

$$\sum_{(12)} \text{Momentos en las columnas} = 5.40 + 1.57 = 6.97$$

pero en el nudo 11 se tiene, ver en la fig. IV.22 las distancias a los - - puntos de inflexión

$$M_{11-12} = \frac{6.97}{3.3} (6.33) = 5.70 \text{ ton-m}$$

posteriormente obtenemos el momento desconocido del nudo 11 el  $M_{11-10}$

$$M_{11-10} = 5.70 - 2.59 - 6.86 = - 3.75 \text{ ton-m.}$$

pero de acuerdo a los resultados obtenidos con el método de Kani en los - ejemplos 5 y 6, los momentos en las vigas cuando sólo hay carga lateral - en la estructura son siempre positivos por lo tanto

$$M_{11-12} = 3.75 \text{ ton-m}$$

De igual modo se obtienen los momentos en todos los elementos - de la estructura, como se muestra en la figura IV.22.

Las hojas que siguen muestran la solución de los ejemplos 5 y 6 - por los tres métodos como ya se mencionó al inicio del ejemplo 5.

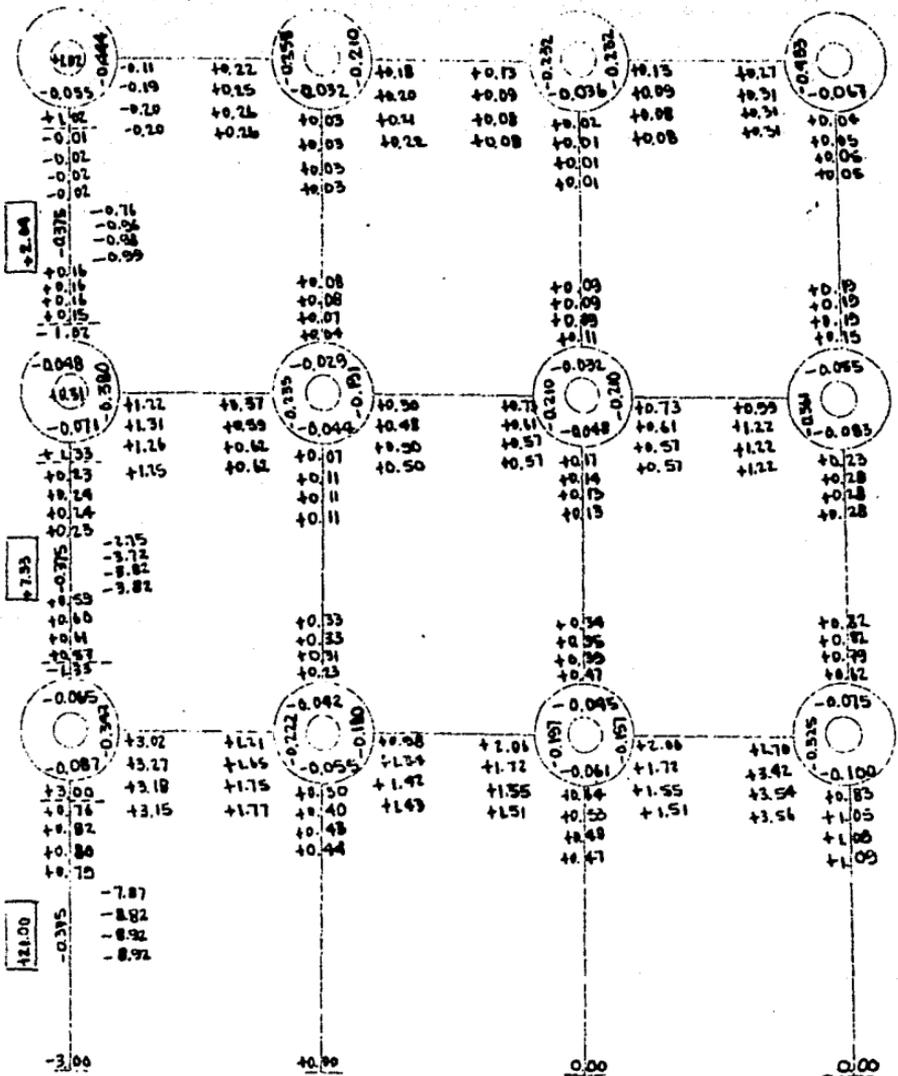


Fig. IV.17 Ejemplo 5, Método de Kani.

+1.02	-0.20	+0.16	+0.03	+0.22	+0.08	+0.01	+0.08	+0.31	+0.05
-0.02	+0.06	+0.06	-0.08	+0.30	+0.30	-0.06	+0.39	+0.39	-0.75
-0.05	-0.14	+0.31	-0.05	+0.52	+0.38	-0.08	+0.97	+0.70	-0.30
+0.15									
-1.71									
-0.95			-0.80			-0.80			-0.56
+0.16			-0.08			-0.08			-0.75
-1.02			+0.08			+0.08			+0.18
+1.03	+1.15	+0.62	+0.11	+0.50	+0.53	+0.13	+0.57	+1.11	+0.18
+0.23	+1.87	+1.87	-3.58	+1.07	+1.07	-3.56	+1.79	+1.79	-2.72
-3.00	+3.12	+2.49	-3.27	+1.97	+1.64	-3.71	+2.36	+3.01	-2.44
-1.94									
-3.74									
-3.08			-3.05			-3.01			-1.90
+0.55			-3.38			-3.35			-2.12
-1.33			+0.33			+0.34			+0.02
+3.00	+3.15	+1.77	+0.44	+1.45	+1.51	+0.47	+1.51	+3.56	+1.05
+0.79	+4.92	+4.92	-8.48	+2.94	+2.44	-8.45	+5.07	+5.07	-7.23
-6.13	+8.07	+6.63	-8.04	+4.37	+4.45	-7.98	+6.58	+8.65	-6.34
-4.34									
-11.13									
-8.13									
-3.00			-8.48			-8.45			-1.83

Fig. IV.18 Momentos Definitivos Ejemplo 5, Método de Kani.

	-0.14	+0.52	+0.52	+0.38	+0.97	+0.70		
+0.15	-0.09	+0.04	-0.05	+0.40	-0.10	-0.09	+0.36	-0.18
+1.47	-0.18	+0.20	+1.47	-0.14	+0.19	+1.47	-0.27	+0.64
-7.64	-0.19	+0.24	-4.15	+0.16	+0.09	-4.44	+0.00	+0.36
+0.75			+2.00			+2.00		+1.40
+0.27			+0.22			+0.03		+0.81
-0.17								
+1.21								
-8.55			+0.59			+0.68		+1.02
-0.77			-4.00			-4.00		-1.80
+7.66			+2.11			+2.22		+1.75
+2.47			+2.47			+2.47		+1.47
-1.71			-2.47			-2.47		-1.47
	+5.12		+2.49	+1.57		+1.64	+2.36	+3.01
-1.44	+1.75		-0.97	-3.27	+1.21	-0.60	-3.22	+1.81
+6.57	-0.78		+1.34	-1.57	-0.65	+1.25	-16.57	-1.15
-6.67	+1.17		+0.89	-10.90	+0.58	+0.66	+10.73	+0.66
-4.80			+5.08			+5.01		+1.41
+6.13			+0.55			+0.65		+1.40
+1.15								
+2.98								
-11.46			+1.65			+1.70		+4.88
+2.90			-10.17			-10.05		-6.95
+6.67			+5.95			+5.24		+4.06
+6.57			+6.57			+6.57		+6.37
-5.14	+8.04		-5.05	+4.57		-5.57		-1.90
-4.34	+5.04		-1.92	-8.04	+3.36	-1.68	-7.98	+5.06
+10.15	-2.09		+4.18	+11.15	-1.71	+3.42	+11.15	-3.32
-11.25	+2.95		+1.66	-10.10	+1.65	+1.74	-19.95	+1.74
-10.06				+10.60			+10.56	+4.11
+13.91			+1.65				+1.76	+4.12
+2.96								+4.08
0.00			0.00			0.00		0.00
-27.82			-11.70			-24.12		-19.57
+5.42			+10.05			+9.97		+8.02
+11.15			+11.15			+11.15		+11.15
-11.15			-8.48			-8.45		-7.85

Fig. IV.19 Comprobación de Resultados Ejemplo 5, Método de Kani.



0.559 -8.15	0.479 -1.14	0.313 -1.58	0.550 -1.14	0.141 -0.71	0.154 -0.76
	0.641 +9.82	0.553 +4.37	0.498 +3.34	0.498 +3.34	0.219 +0.76
	0.571 -1.90	0.370 -2.94	0.553 +2.48	0.553 +2.48	0.190 +0.49
0.551 -8.40	0.371 -1.90	0.390 +4.40	0.373 -2.02	0.373 -2.02	0.129 +0.33
	0.515 -1.10	-0.402 +4.35	0.295 +1.32	0.295 +1.32	0.153 +0.35
0.553 -8.44	0.341 -1.90	0.565 +5.94	0.304 +1.44	0.304 +1.44	0.118 +0.46
	0.593 +2.38	0.503 +2.38	0.789 +2.10	0.789 +2.10	0.194 +0.73
0.510 -8.06	0.440 -0.94	0.303 -1.41	0.314 -2.12	0.314 -2.12	0.145 -0.73

Fig. IV.21 Momentos Definitivos Ejemplo 5, Métodos del Factor.

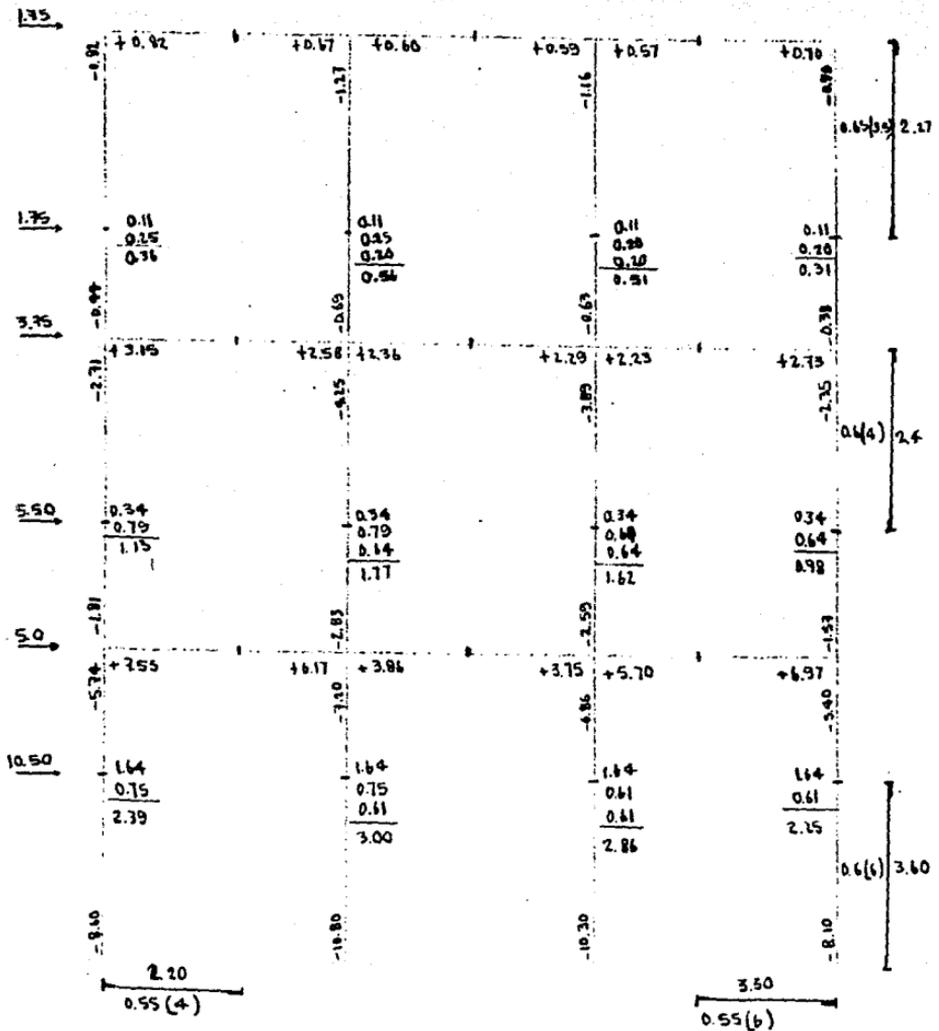


Fig. IV.22 Solución Ejemplo 5, Método de Bowman.

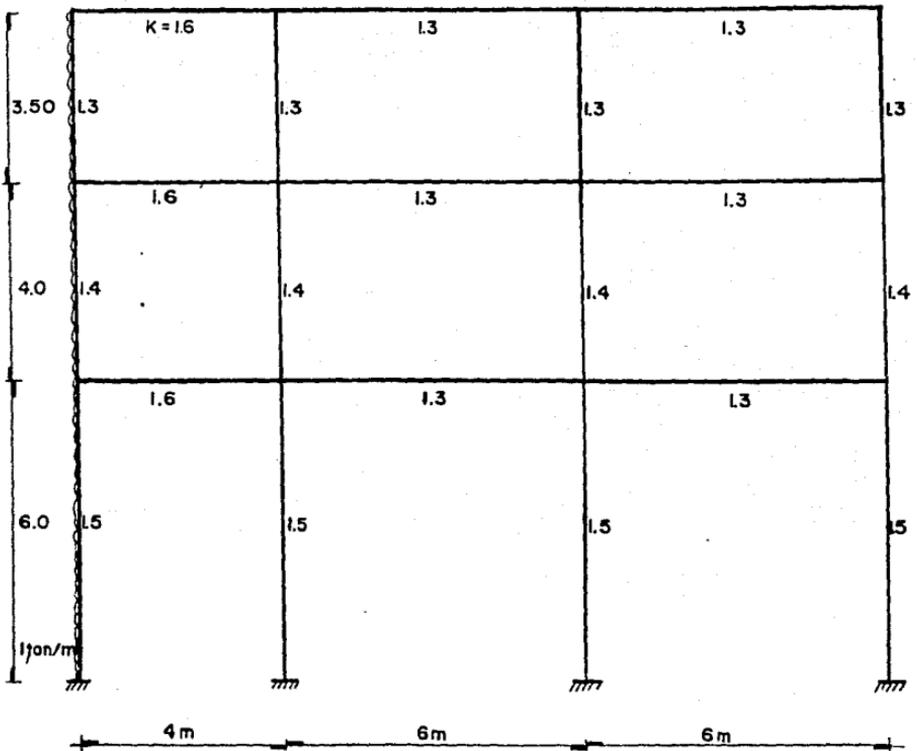


Fig. IV.23 Ejemplo 6.





-0.17	+0.26	+0.52	+0.58	+0.53	+0.60	+0.72	-0.72
+0.84	+0.16	-0.08	-1.13	+0.45	-0.22	-1.16	+0.46
-1.18	-0.16	+0.32	+0.84	-0.20	+0.41	+0.34	-0.17
-0.21	0.00	+0.24	-0.87	+0.25	+0.19	-0.80	+0.19
+0.54			+0.27			+0.23	+0.19
-0.01			+0.24			+0.18	+0.32
+1.04							
-1.08			+0.75		+0.81		+1.04
+0.10			-0.54		-0.47		-0.07
+1.10			+0.43		+0.84		+0.27
+0.84			+0.84		+0.84		+0.84
-1.41	+2.01	+2.69	-0.70	+1.59	+2.06	-0.61	+2.33
-1.45	+1.88	-0.94	-4.03	+1.53	-0.76	-9.30	+1.79
+2.51	-0.84	+1.68	+2.51	-0.75	-11.58	+2.51	-0.97
-1.48	+1.04		-2.88		+0.82	-2.71	+1.95
-1.48		+0.74	+1.11	+0.74		+1.02	+0.82
+1.13			+0.74				+1.06
+1.03					+0.82		+1.05
+2.76							
-2.77			+1.73		+1.82		+2.76
+0.59			-2.77		-2.04		-0.53
+1.48			+1.44		+1.95		+0.88
+2.51			+2.51		+2.51		+1.51
-3.18	+6.68	+6.10	-3.11	+4.60	+4.73	-2.86	+5.63
-3.64	+4.17	-2.08	-3.64	+3.53	-1.74	-7.44	+4.35
+3.69	-1.90	+3.81	+3.69	-1.82	+3.69	+3.69	-2.46
-3.00	+2.77	+1.73	-5.09	+1.71	+1.87	-4.36	+1.87
-2.37			+3.12			+3.09	
+3.94			+1.72			+1.82	
+2.76							+2.76
0.00			0.00		0.00		0.00
-7.84			-6.74		-6.74		-5.55
+1.19			+2.95		+2.48		+1.84
+3.00			+3.69		+3.69		+3.69
-11.82			-9.74		-9.74		-8.25

Fig. IV.26 Comprobación de Resultados. Ejemplo 6, Método de Kani.

$1.184 = 1.5 + 0.684$ $\frac{1.000}{0.178}$ $1.118 = 1.6 + 1.767$	$0.770 = 1.4 + 0.560$ $\frac{0.178}{0.318}$ $0.356$ $0.181$ $0.542 = 1.4 + 0.769$ $1.345 = 1.4 =$	$1.091 = 1.3 + 0.859$ $\frac{0.184}{0.655}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$0.853 = 1.6 + 0.539$ $\frac{0.272}{0.309}$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$0.633 = 1.3 + 0.487$ $\frac{0.184}{0.353}$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$0.856 = 1.3 =$ $\frac{0.166}{0.166}$ $0.333$ $0.250$ $0.389 = 1.3 + 0.758$
$1.284 = 1.5 + 0.854$ $\frac{1.000}{0.500}$ $0.544$ $0.181$ $0.764 = 1.6 + 1.430$	$0.710 = 1.4 + 0.710$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$1.075 = 1.4 + 0.710$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$0.518$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$1.185 = 1.3 + 0.918$ $\frac{0.184}{0.353}$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$0.861 = 1.3 + 0.642$ $\frac{0.166}{0.166}$ $0.333$ $0.250$ $0.389 = 1.3 + 0.758$
$1.500 = 1.5 + 0.000$ $\frac{0.500}{0.500}$ $0.500$ $0.763 = 1.3 + 0.992$	$1.040 = 1.4 + 0.710$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$1.040 = 1.4 + 0.710$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$0.518$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$1.080 = 1.3 + 0.717$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$0.861 = 1.3 + 0.642$ $\frac{0.166}{0.166}$ $0.333$ $0.250$ $0.389 = 1.3 + 0.758$
$1.455 = 1.5 + 0.975$ $\frac{1.000}{0.500}$ $0.517$ $0.134$ $0.872 = 1.3 + 1.134$	$1.040 = 1.4 + 0.710$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$1.040 = 1.4 + 0.710$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$0.518$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$1.080 = 1.3 + 0.717$ $\frac{0.150}{0.210}$ $0.312$ $0.316$ $0.448 = 1.3 + 0.307$ $1.274 = 1.4 =$	$0.861 = 1.3 + 0.642$ $\frac{0.166}{0.166}$ $0.333$ $0.250$ $0.389 = 1.3 + 0.758$
$1.236 = 1.5 + 1.854$	$1.215 = 1.5 + 0.810$ $\frac{0.500}{0.310}$ $0.310$ $0.310$	$1.215 = 1.5 + 0.810$ $\frac{0.500}{0.310}$ $0.310$ $0.310$	$0.518$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$1.185 = 1.3 + 0.918$ $\frac{0.184}{0.353}$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$0.861 = 1.3 + 0.642$ $\frac{0.166}{0.166}$ $0.333$ $0.250$ $0.389 = 1.3 + 0.758$
$1.000$ $0.150$ $1.155 = 1.5 + 1.732$	$0.310$ $0.162$ $0.472 = 1.4 + 0.661$	$0.310$ $0.162$ $0.472 = 1.4 + 0.661$	$0.518$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$1.185 = 1.3 + 0.918$ $\frac{0.184}{0.353}$ $0.309$ $0.476 = 1.3 + 0.617$	$0.861 = 1.3 + 0.642$ $\frac{0.166}{0.166}$ $0.333$ $0.250$ $0.389 = 1.3 + 0.758$

Fig. IV.27 Solución Ejemplo 6, Método del Factor.



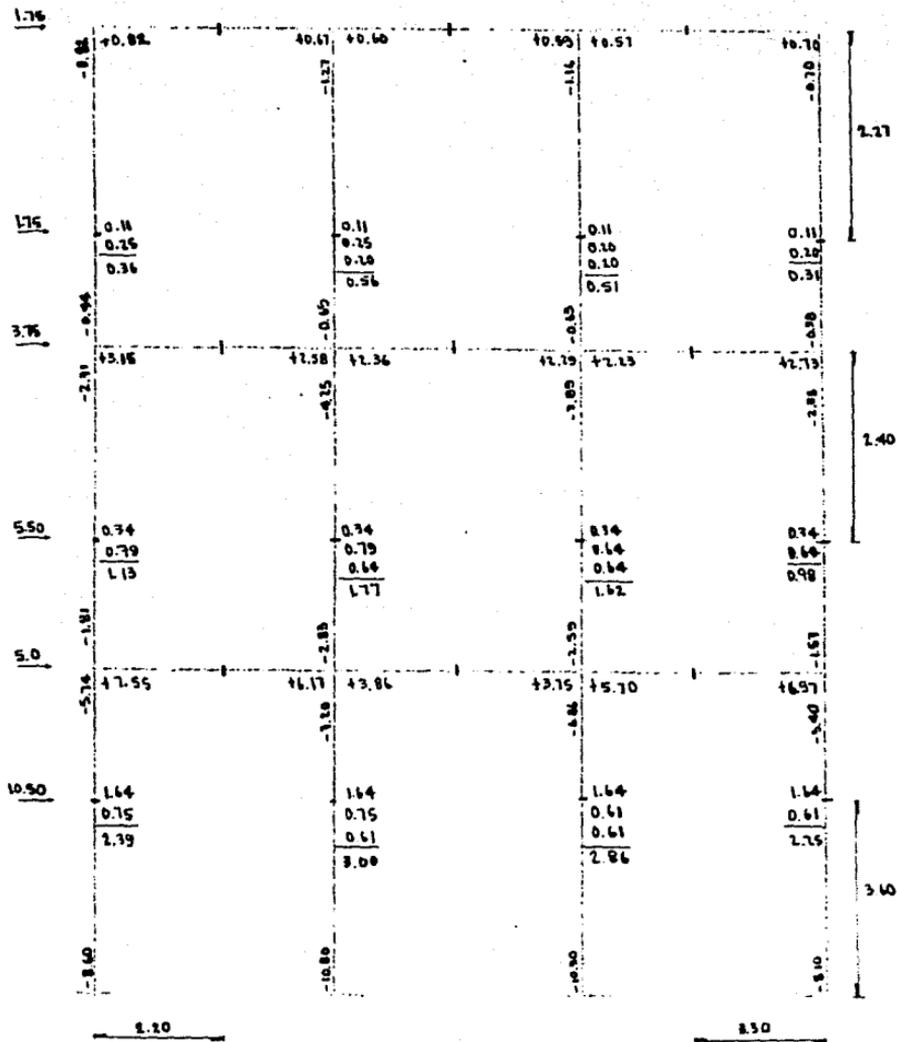


Fig. IV-29 Solución Método de Bowman.

## CAPITULO V.- CONCLUSION.

Como ya se dijo al principio de esta tesis, el análisis estructural es un medio para lograr un fin - no el fin mismo - pero constituye - - uno de los principales problemas en un proyecto de diseño estructural, por lo cual se le debe dar la importancia que requiere.

Para establecer una conclusión se debe fijar la atención a lo que ya se propuso al principio; la comparación entre las soluciones dadas por Kani y las proporcionadas por los métodos del factor y Bowman.

En los ejemplos 5 y 6 se resolvió una estructura sujeta a cargas laterales exclusivamente, para llevar a cabo dicha comparación, y de ambos casos se pueden establecer los siguientes puntos :

1. En ambos ejemplos los métodos aproximados dieron errores - hasta del 50% en ambos sentidos, y aquí se deben cuantificar los errores máximos y de ninguna manera un error promedio.

2. Al variar los coeficientes de rigidez  $K$  de un ejemplo a - - otro; en el ejemplo 6 dichos coeficientes eran casi iguales entre trabes y columnas; la solución por el método del factor no varió. Cabe aclarar - que en el caso de ser dichos coeficientes mayores en las columnas que en las trabes, el método de Kani no converge rápido, llegándose al extremo de tener que realizar hasta 10 ó más iteraciones en el caso de que dichos coeficientes  $K$  guarden entre si la relación del ejemplo 5 pero a la inversa, esto es, de que en las trabes sean del orden de 0.3 y en las columnas del orden de 1.4, afortunadamente dicho caso casi no se presenta en la - - práctica.

3. Los resultados por el método de Kani fueron todos comprobados con el método del inciso 11-3 y fueron todos satisfactorios.

4. Al resolver los ejemplos 1 y 2 con el método de Kani, pero considerando en el 1 que no había desplazamiento lateral de la estructura, se vió que dicha consideración puede llevar a errores bastante considerables en los momentos de las columnas.

Por lo anterior se concluye que los métodos aproximados, por la poca bondad de los resultados que proporcionan, deben ser empleados sólo al realizar análisis preliminares o al resolver estructuras de probada poca importancia. Ya que al incluirseles en el análisis de una estructura importante, los errores que acarrear pueden ser tan grandes que no alcancen a ser compensados por los factores de seguridad implícitos en las fórmulas de diseño.

Por otro lado dichos errores tienen su razón de ser ya que al partir de suposiciones inexactas, que introducen las hipótesis que se hacen, se tiene que llegar lógicamente a resultados inexactos.

También es importante llevar a cabo la comprobación de resultados para trabajador sobre valores seguros. Esto duplica casi el tiempo empleado, pero vale la pena ya que como se vió en el inciso correspondiente el equilibrio de los nudos de una estructura no implica la bondad de los valores que hacen posible dicho equilibrio, ya que éstos se pueden forzar como en los métodos aproximados.

Por último es recomendable para un calculista, como una buena herramienta de trabajo, un programa de computadora que además de proporcionar los resultados por Kani lleve a cabo la comprobación de los mismos.