Universidad Nacional Autónoma de México
FACULTAD DE INGENIERIA

INTERACCION TRIDIMENSIONAL DE MUROS Y MARCOS DE CONCRETO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

I N G E N I E R O   C I V I L

P R E S E N T A

JORGE A. CABALLERO MALDONADO

FEBRERO DE 1979

FACULTAD DE INGENIERIA
EXAMENES PROFESIONALES
60-1-10

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA

Al Pasante señor JORGE A. CABALLERO MALDONADO,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted a continuación el tema que aprobado por esta Dirección propuso el Profesor M. I. Gustavo Rafael Aranda Hernández, para que lo desarrolle como tesis en su Examen Profesional de Ingeniero CIVIL.

"INTERACCION TRIDIMENSIONAL DE MUROS Y MARCOS DE CONCRETO"

1. Introducción.
2. Interacción tridimensional de muros y marcos. Método exacto.
3. Interacción tridimensional de muros y marcos. Método aproximado.
4. Aplicaciones.
5. Conclusiones.
6. Reconocimiento.
7. Bibliografía

Ruego a usted se sirva tomar debida nota de que en cumplimiento de lo especificado por la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito indispensable para sustentar Examen Profesional; así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis, el título del trabajo realizado.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 11 de enero de 1979
EL DIRECTOR

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU

JJE/OBLH/ser

INDICE

1. INTRODUCCION.

La interacción entre muros de cortante y marcos es un caso especial de indeterminación, en la que básicamente dos elementos diferentes están unidos para producir una sola estructura.

Si se considera que únicamente el marco toma toda la carga lateral, se desarrollarán momentos en las columnas y vigas, para resistir la fuerza cortante total en cada piso, y al estar resistiendo toda esta carga lateral los marcos se flexionarán, como se muestra en la fig 1.1 .

Si se considera que un muro de cortante resiste toda la carga lateral, se desarrollarán momentos en cada piso iguales al momento de volteo de ese nivel, y su forma flexionada será la de una viga en voladizo, como se muestra en la fig 1.2 .

Cuando una estructura está compuesta por muros y marcos, el cortante exterior será resistido por ambos, por medio de su rigidez de entrepiso y cada uno procurará evitar que el otro adopte su forma libre natural de flexionarse.

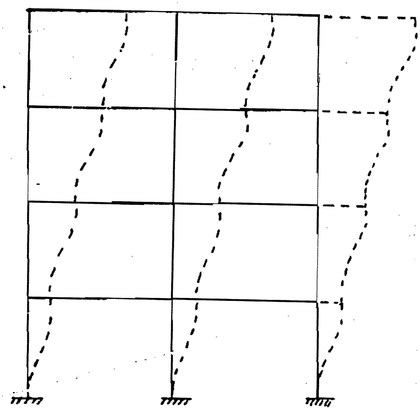


fig 1.1

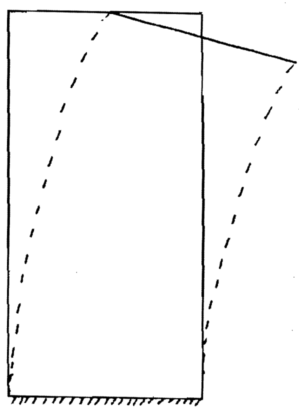


fig 1.2

En el presente trabajo se pretende analizar el comportamiento de estructuras formadas a base de marcos y muros de cortante ante cargas laterales. El análisis se basa en considerar el comportamiento de la estructura en forma tridimensional, para lo cual se presentan dos métodos de análisis, uno es exacto (método de rigideces) y el otro es aproximado.

El análisis sísmico de edificios consiste en : obtener las fuerzas laterales que representan la acción sísmica sobre el edificio; distribuir estas fuerzas entre los elementos resistentes y determinar los elementos mecánicos que se generan en los miembros de cada elemento resistente. Las fuerzas sísmicas se determinan con los criterios señalados en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (ref 12).

Independientemente de cómo se determinen las fuerzas sísmicas provocadas por un temblor, se deberá cuantificar cuál es la fuerza que le corresponde a cada uno de los elementos resistentes del edificio, como son los marcos, los muros, o una combinación de ellos.

El objeto de este trabajo es presentar procedimientos pa ra efectuar lo descrito anteriormente. En el segundo capítulo se plantea el análisis estructural de marcos tridimensionales, por medio del método de rigideces; para las aplicaciones prácticas del método se requiere del uso de un programa de computadora (refs 24 y 25). En el capítulo tercero se presenta un método aproximado de análisis tridimensional, que toma en cuenta la interacción de muros y marcos. En el cuarto se presentan dos ejemplos utilizando ambos métodos; en ese capítulo se hace un resumén y una comparación de resultados.

Es importante hacer notar que el método aproximado puede aplicarse cuando los edificios se encuentran sometidos a otras cargas laterales distintas a las sísmicas, tales como viento.

Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones.

2. INTERACCION TRIDIMENSIONAL DE MUROS Y MARCOS. METODO EXACTO.

2.1 Introducción.

El método de rigideces ha sido usado por muchos años y con el desarrollo de las calculadoras digitales ha adquirido bastante aceptabilidad. La ecuación básica expresa el momento en el extremo de un miembro como la superposición de los momentos debidos a las cargas externas que actúan sobre el miembro con los extremos restringidos y aquéllos causados por los desplazamientos finales.

Para aplicar el método de las rigideces, o de los desplazamientos, en la solución de una estructura hiperestática se necesitan determinar primero las componentes independientes de los desplazamientos (lineales y angulares) que se desconocen, estos desplazamientos se consideran las incógnitas del problema.

Por cada componente de desplazamiento desconocida se establece una ecuación de equilibrio en función de las fuerzas externas conocidas y de las fuerzas internas desconocidas, las cuales están expresadas en términos de los desplazamientos. Se forma un sistema de ecuaciones cuyo número es igual al número de componentes de desplazamientos desconocidos. La solución del sistema de ecuaciones permite conocer los valores de los desplazamientos, con los cuales se pueden calcular las fuerzas internas.

Para el propósito de esta discusión se considera un elemento viga, restringido en sus extremos, con momento de inercia constante (fig 2.1). Los extremos del miembro serán denominados por las letras i y j. Para el caso de vigas la deformación axial se desprecia, las otras acciones son mostradas en la fig 2.2 .

De la deformación de la viga, fig 2.2(b), se obtienen las siguientes relaciones

$$\phi_i=\theta_i-\Psi \qquad 2.1a$$

$$\phi_j=\theta_j-\Psi \qquad 2.1b$$

siendo $\phi_{i,j}$= giro en el extremo i,j; $\theta_{i,j}$= rotación en el extremo i,j; $\Psi=(\delta_2-\delta_1)/L$, desplazamiento del miembro.

De la fig 2.2 se tiene que $\overline{M}_{ij}$ y $\overline{M}_{ji}$= momentos de empotramiento; S_i= rigidez rotacional del extremo i; t_i= momento

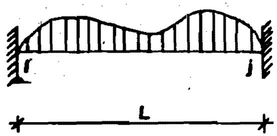


fig. 2.1 SISTEMA DE CARGA

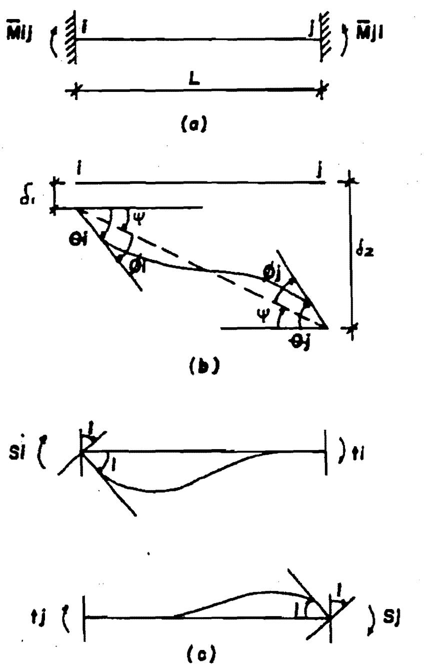


fig. 2.2 DEFORMACION DEL MIEMBRO

de transporte, es el momento en el extremo j causado por una rotación unitaria en el extremo i; S_j= rigidez rotacional en el extremo j; t_j= momento de transporte en el extremo i causado por una rotación unitaria en el extremo j; δ_1 y δ_2= --- traslación relativa de los extremos i y j, respectivamente.

Para la obtención de los coeficientes de rigidez rotacional, la estructura restringida debe ser analizada por la aplicación de valores unitarios de los desplazamientos en las juntas, como se indica en la fig 2.2(c). Se tiene que para un miembro prismático $S_i=S_j= \frac{4EI}{L}$; y $t_i=t_j= \frac{2EI}{L}$.

Los momentos finales M_{ij} y M_{ji} pueden ser expresados como la suma de los momentos debido a la carga lateral en el miembro y de los momentos inducidos por los giros $(\theta_i-\Psi)$ y $(\theta_j-\Psi)$ en los extremos i y j, respectivamente. Por lo que se tiene que

$$M_{ij}= S_i(\Theta_i-\Psi) + t_j(\Theta_j-\Psi) + \overline{M}_{ij} \qquad 2.2a$$

$$M_{ji}= S_j(\Theta_j-\Psi) + t_i(\Theta_i-\Psi) + \overline{M}_{ji} \qquad 2.2b$$

Cuando el miembro tiene rigidez constante EI, la ecuación de pendiente-deformación queda :

$$M_{ij} = \frac{EI}{L}(4\theta_i + 2\theta_j - 6\Psi) + \bar{M}_{ij} \qquad 2.3a$$

$$M_{ji} = \frac{EI}{L}(2\theta_i + 4\theta_j - 6\Psi) + \bar{M}_{ji} \qquad 2.3b$$

Las juntas en un marco están sujetas a fuerzas iguales y opuestas a las fuerzas que actúan en los extremos de los miembros que concurren en una junta dada. El número de ecuaciones de equilibrio requeridas es igual al grado de indeterminación cinemática en cada nudo, de esta manera se obtendrá un sistema de ecuaciones simultáneas, del cual se podrán determinar los desplazamientos de las juntas. Una vez establecidos los desplazamientos en las juntas, su sustitución en las ecuaciones de pendiente-deformación dará los momentos finales, y por lo tanto los momentos flexionantes y otras fuerzas restringidas pueden ser determinadas por simple estática.

Las ecuaciones 2.3 pueden escribirse en forma matricial como

$$\{F\} + [S]\{D\} = \{0\} \qquad 2.4a$$

$$\text{o} \qquad [S]\{D\} = -\{F\} \qquad 2.4b$$

siendo {F}= vector de cargas actuantes sobre la estructura;

$[S]$= matriz de rigidez; $\{D\}$= vector de desplazamientos de la estructura.

En un caso general, si el número de restricciones introducidas es n, el orden de $\{D\}$, $[S]$ y $\{F\}$ es $n\times 1$, $n\times n$ y $n\times 1$, respectivamente. La matriz de rigideces $[S]$ es una matriz cuadrada y simétrica, los elementos de la matriz de rigideces de una estructura son obtenidos por la suma directa de coeficientes de rigidez en los extremos de los miembros, asociados a los mismos grados de libertad que se hayan supuesto.

2.2 Rigidez de miembros individuales.

a) Rigidez de vigas. La rigidez de una viga se obtiene en términos de las coordenadas de deformación, como se muestra en la fig 2.3 . En este caso la ec 2.4b queda :

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & t_j \\ t_i & S_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \qquad 2.5a$$

de donde $S_i = \frac{2EI}{L}\left(\frac{2+\beta}{1+2\beta}\right)$ 2.5b

$$t_i = t_j = \frac{2EI}{L}\left(\frac{1-\beta}{1+2\beta}\right) \qquad 2.5c$$

$$\beta = \frac{6EI}{L^2 A_c G} \qquad 2.5d$$

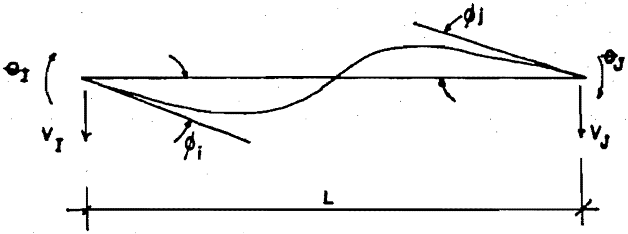


fig. 2.3 DEFORMACIONES DE LA VIGA

siendo M_i= momento en el extremo i; M_j= momento en el extremo j; $S_{i,j}$= coeficiente de rigidez, considerando el efecto de cortante en la sección, en el extremo i,j; $t_{i,j}$= momento de transporte, considerando cortante; β= factor de flexibilidad a cortante; A_c= área efectiva de cortante; G= módulo de elasticidad a cortante; E= módulo de elasticidad; I= momento de inercia de la sección; L= longitud del miembro.

Además, de la fig 2.3 se tiene que por continuidad :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 1/L & & -1/L \\ \hdashline & 1/L & 1 & -1/L \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_I \\ V_I \\ \theta_J \\ V_J \end{Bmatrix} \qquad 2.6$$

las ecs 2.5a y 2.6 se pueden escribir como

$$F_b = s_b \phi_b \qquad 2.7$$

$$\phi_b = a_b r_b \qquad 2.8$$

siendo a_b= matriz de continuidad; r_b= desplazamientos. A par

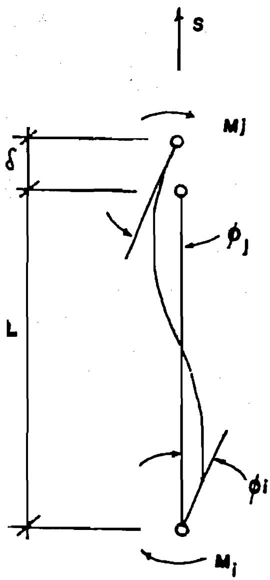


fig. 2.4 DEFORMACION A FLEXION DEL MIEMBRO

tir de estas dos ecuaciones la matriz de rigidez de la viga S_b puede expresarse como

$$S_b = a_b^T s_b a_b \qquad 2.9$$

b) Rigidez de columnas. La rigidez de columnas es derivada de la misma forma, considerando además la deformación axial de la columna. En términos de las coordenadas de deformación, mostradas en la fig 2.4, la rigidez de la columna puede definirse como sigue :

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & t_j & \\ t_i & S_j & \\ & & S_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{Bmatrix} \qquad 2.10$$

en donde $S_d = \frac{AE}{L}$

siendo A= área de la sección transversal; E= módulo de elasticidad; L= longitud de la columna. Los otros términos son los mismos que se indicaron anteriormente.

De la fig 2.5 se obtendrá la matriz de continuidad, la-

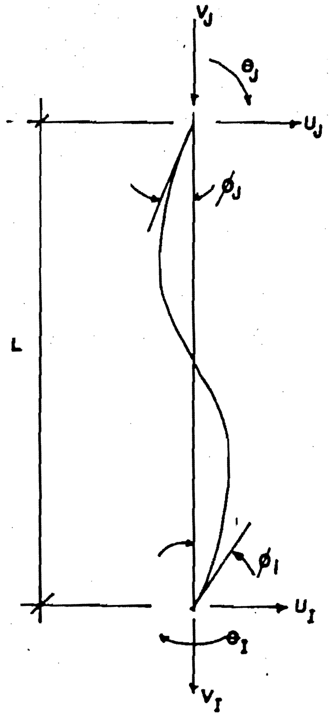


fig. 2.5 DEFORMACIONES DE LA COLUMNA

cual está dada por las deformaciones y desplazamientos del - marco, como sigue :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 1/L & & -1/L & & \\ \hline & 1/L & 1 & -1/L & & \\ \hline & & & & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_I \\ U_I \\ \theta_J \\ U_J \\ V_I \\ V_J \end{Bmatrix} \qquad 2.11$$

Las ecs 2.10 y 2.11 pueden escribirse de la siguiente - manera :

$$F_c = s_c \phi_c \qquad 2.12$$

$$\phi_c = a_c r_c \qquad 2.13$$

A partir de estas dos ecuaciones, la matriz de rigidez para una columna S_c está dada por

$$S_c = a_c^T \; s_c \; a_c \qquad 2.14$$

En caso de tomar en cuenta el efecto del nudo rígido -- sobre la estructura, es decir, si se considera la contribu-- ción de la junta a los desplazamientos en vigas y columnas - (como se muestra en la fig 2.6), la matriz de continuidad --

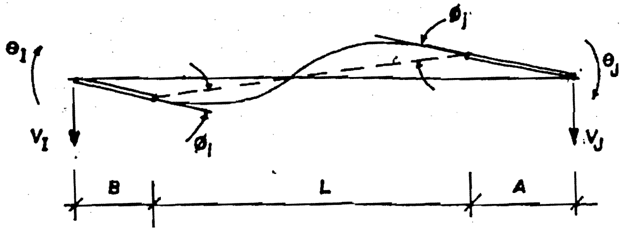


fig. 2.6 DEFORMACIONES DE LA VIGA Y DESPLAZAMIENTOS DE LAS JUNTAS

para la viga es igual con :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1+\frac{B}{L} & \frac{1}{L} & \frac{A}{L} & -\frac{1}{L} \\ \hline \frac{B}{L} & \frac{1}{L} & 1+\frac{A}{L} & -\frac{1}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_I \\ V_I \\ \theta_J \\ V_J \end{Bmatrix} \qquad 2.15$$

y para la columna :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1+\frac{B}{L} & \frac{1}{L} & \frac{A}{L} & -\frac{1}{L} & & \\ \hline \frac{B}{L} & \frac{1}{L} & 1+\frac{A}{L} & -\frac{1}{L} & & \\ \hline & & & & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_I \\ U_I \\ \theta_J \\ U_J \\ V_I \\ V_J \end{Bmatrix} \qquad 2.16$$

siendo A=B= tamaño de la junta, el cual representa el ancho de la columna, o bien, el peralte de la viga.

c) rigidez de muros. La rigidez de una columna común, al incluir deformación a flexión y cortante ec 2.10, puede emplearse para obtener los elementos mecánicos de un muro. Cada grado de libertad rotacional es transformado en dos desplazamientos verticales de las juntas adyacentes. La matriz

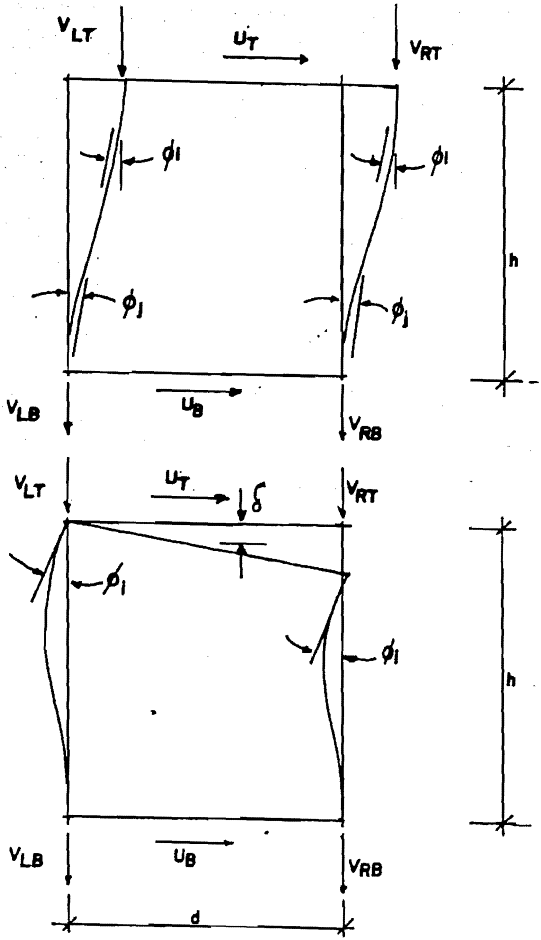


fig. 2.7 DEFORMACIONES DEL MURO TIPICO Y DESPLAZAMIENTOS DE LA JUNTA

de transformación de deformación-desplazamiento está dada por

$$\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\\ \delta\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} & & \\ \hline \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & & & -\frac{1}{d} & \frac{1}{d}\\ \hline & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right]\begin{Bmatrix}U_B\\ U_T\\ V_{LB}\\ V_{RB}\\ V_{LT}\\ V_{RT}\end{Bmatrix} \qquad 2.17a$$

$$\text{o} \qquad \phi_p = a_p r_p \qquad 2.17b$$

Las deformaciones del miembro y los desplazamientos de la junta están mostrados en la fig 2.7 .

A partir de las ecuaciones 2.10 y 2.17, se obtiene la - matriz de rigidez del muro, la cual está dada por :

$$S_p = a_p^T \, s_p \, a_p \qquad 2.18$$

d) Rigidez de diagonales (contravientos). Al calcular la rigidez de marcos contraventeados es necesario considerar las deformaciones longitudinales de esos miembros. En diago

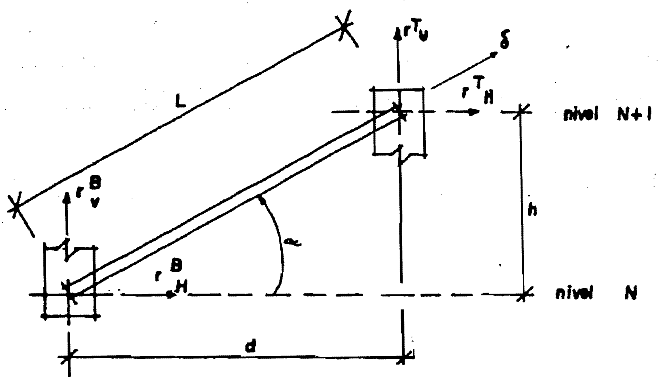


fig. 2.8 DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN EL PLANO DE LA DIAGONAL.

nales la rigidez se define como

$$S = \frac{E\,A}{L}\delta \qquad 2.19a$$

$$\text{o} \quad S = s_d \delta \qquad 2.19b$$

siendo δ= desplazamiento de la diagonal, el cual está dado - por los desplazamientos horizontal y vertical, como se muestra en la fig 2.8, por lo tanto se tiene que

$$\delta = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_V^T \\ r_H^T \\ r_V^B \\ r_H^B \end{Bmatrix} \qquad 2.20a$$

$$\text{o} \quad \phi_d = a_d r_d \qquad 2.20b$$

La rigidez de la diagonal está dada por

$$S_d = a_d^T\, s_d\, a_d \qquad 2.21$$

2.3 <u>Matriz de rigidez para la estructura completa.</u>

En la ec 2.4 [S] es la matriz de rigidez de la estructu ra completa, la cual representa las diversas componentes de las acciones en las juntas para mantener la estructura restringida cuando está sujeta a la aplicación de valores unitarios de los desplazamientos en las juntas.

Una vez que la matriz de rigidez ha sido desarrollada para cada miembro, los elementos de la matriz deben ser identificados con respecto a los grados de libertad de los marcos ordenados apropiadamente, para obtener la matriz total de rigideces de la estructura por medio de la suma de los coeficientes de rigidez de cada miembro, asociados al mismo grado de libertad.

El ensamble de la matriz de rigidez completa de una estructura depende únicamente de la forma en que los miembros están conectados, y no de la geometría del sistema, por lo tanto la rigidez del marco queda

$$S= A_i^T S_i A_i \qquad 2.22$$

lo cual también se puede escribir como

$$
\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & \\ \cdots & & & \\ \cdots & S_{ij} & \cdots & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & S_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_N \end{bmatrix}
$$

Una vez que se ha obtenido la matriz de rigideces de la estructura completa, se sustituye esta en la ec 2.4 para obtener los desplazamientos y elementos mecánicos de la estructura.

2.4 Análisis tridimensional de edificios.

La técnica que ha sido desarrollada para el análisis de sistemas estructurales planos puede ser extendida fácilmente a estructuras tridimensionales.

El método de rigideces es una herramienta muy poderosa en el análisis tridimensional de marcos cuando es utilizado por medio de las calculadoras electrónicas. Se pueden analizar estructuras simples o complejas con relativa rapidez.

El análisis de un marco tridimensional por el método de rigideces difiere del análisis de un marco plano, únicamente en el ensamble de las matrices que se usan.

De acuerdo con el análisis de un marco plano, el primer paso en este método es calcular la matriz de rigidez de la estructura completa $[S_c]$, la cual representa una suma de las matrices de rigideces de los elementos individuales del sistema estructural bajo estudio.

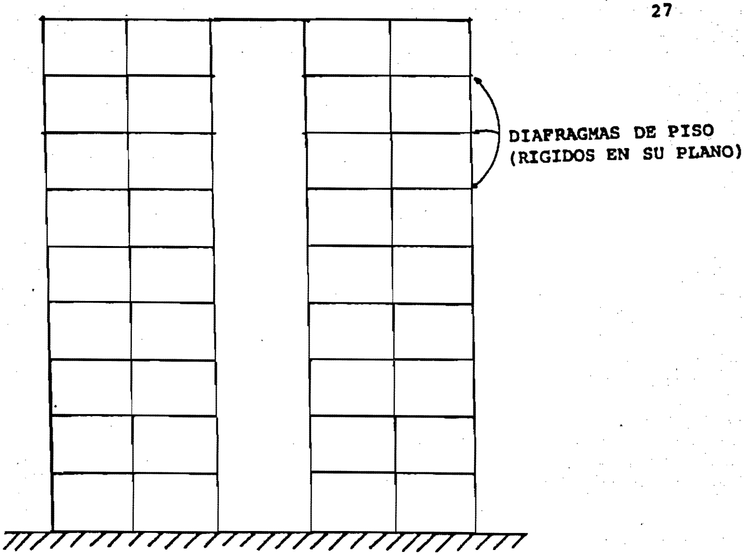
2.5 Programa general de análisis de edificios.

Existen muchos programas para calculadora con los cuales se puede efectuar el análisis de sistemas estructurales, varios de estos programas pueden ser usados para el análisis de edificios (refs 3, 16, 24, 25). El programa para el análisis de edificios que se usó en este trabajo es el ETABS (ref 25), el cual fue desarrollado en la Universidad de California en Berkeley. El programa ETABS es un procedimiento desarrollado para el análisis estructural de edificios formados por marcos y muros de cortante, los cuales están sujetos a carga estática y sísmica. El edificio es idealizado por un sistema de marcos y muros de cortante independientes, los cuales están interconectados por diafragmas de piso, que son rígidos en su plano.

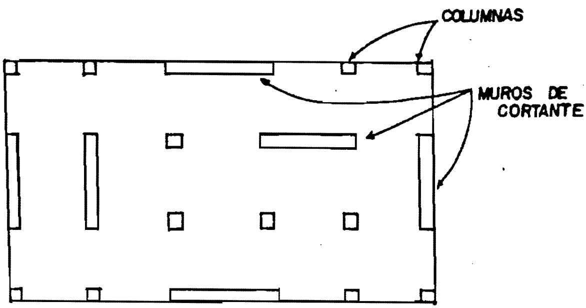
En el programa se aceptan los siguientes elementos estructurales : columnas, en las cuales se toma en cuenta la deformación a flexión, cortante y axial; vigas, que no necesariamente deben ser prismáticas, en las cuales se considera la deformación a flexión y cortante, y se desprecian la flexión alrededor del eje vertical y las deformaciones axiales; muros, que pueden ser de dos tipos : uno incluye deformaciones por flexión y otro toma en cuenta solo deformaciones por cortante; diagonales, en las que únicamente se consideran deformaciones axiales.

Los edificios por analizar pueden ser asimétricos y no forzosamente rectangulares, por lo que se acepta la posibilidad de tener marcos y muros localizados arbitrariamente (fig 2.9).

En el análisis las condiciones de carga son ocho : tres verticales, dos horizontales, dos espectrales y una con integración paso a paso del sismo. Las cargas estáticas se pueden combinar con las solicitaciones del sismo lateral. Así -



a) ELEVACION



b) PLANTA

fig. 2.9 EDIFICIO FORMADO POR MARCOS Y MUROS mismo, se pueden evaluar las frecuencias y formas modales -- del edificio, las cuales pueden calcularse independientemente de las condiciones de carga o en combinación con ellas.

En la formulación básica los marcos y muros se consideran como subestructuras, lo que minimiza el trabajo de preparación de datos y reduce significativamente el tiempo de cálculo, ya que en lugar de tenerse varios marcos planos se tiene una subestructura compuesta por un marco tridimensional, el cual está constituido por elementos estructurales que, si son semejantes, se pueden generar a través de una opción del programa.

Este programa facilita el análisis de marcos tridimensionales en los que exista completa compatibilidad de desplazamientos en los elementos y como una particularidad del mismo se puede realizar también el análisis de marcos planos.

2.6 Idealización estructural.

Se supone que los pisos son rígidos en su propio plano. Las cargas laterales actúan en el nivel de piso, por lo tanto, son transferidas a las columnas y a los muros de cortan-

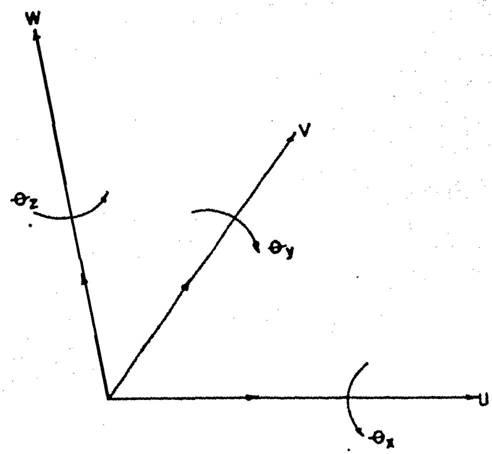


fig. 2.10 GRADOS DE LIBERTÁDDE LA JUNTA

te a través de los diafragmas de piso. Cada nivel de piso -- tiene tres grados de libertad,: dos traslaciones en planta - X y Y y una rotación alrededor del eje vertical.

Cada marco es tratado como una subestructura independiente. La matriz de rigideces de la estructura completa está formada bajo la suposición de que todos los marcos están conectados en cada nivel por un diafragma, el cual es rígido en su propio plano. Cada junta tiene seis grados de libertad, es decir, desplazamiento y rotación en cada uno de sus ejes (fig 2.10).

Las columnas deben ser prismáticas, y en ellas se consideran las deformaciones por fuerza axial y cortante. Las vigas no necesariamente deben ser prismáticas, pero si deben - ser simétricas con respecto a su plano medio vertical. La deformación por cortante puede ser considerada por una modificación apropiada de los factores de rigidez.

Los elementos muro pueden ser de dos tipos : muros que trabajan a flexión y cortante, y muros que trabajan a cortante únicamente.

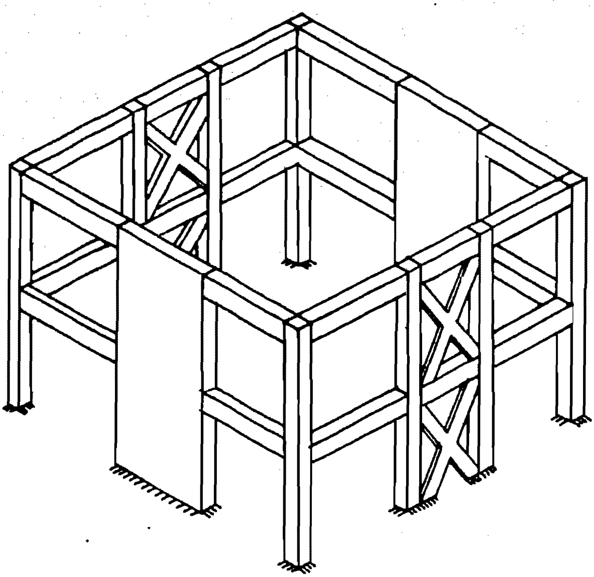


fig. 2.11 MARCO TIPICO

En la fig 2.11 se muestra un edificio típico constituido de un solo marco tridimensional; el cual está compuesto - de vigas, columnas, diagonales y muros.

2.7 Rigidez lateral de marcos.

Las suposiciones descritas anteriormente permiten que - cada marco o muro sea tratado como una subestructura separada. La única conexión es a través de los desplazamientos comunes en los niveles de piso. El primer paso para el desarrollo de la rigidez del edificio completo es a partir de la rigidez lateral de cada marco, la cual se obtiene mediante la rigidez individual de los miembros.

En base a las deformaciones mostradas en la fig 2.12, - la rigidez de una columna puede ser definida como sigue

$$\begin{Bmatrix} M_T \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ S \\ M_{jx} \\ M_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_T & & & & & \\ & S_a^* & & S_c^* & & \\ & & S_b^* & & S_d^* & \\ & & & A & & \\ & S_c^* & & S_a^* & & \\ & & S_d^* & & S_b^* & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_T \\ \phi_{ix} \\ \phi_{iy} \\ \delta \\ \phi_{jx} \\ \phi_{jy} \end{Bmatrix} \qquad 2.23a$$

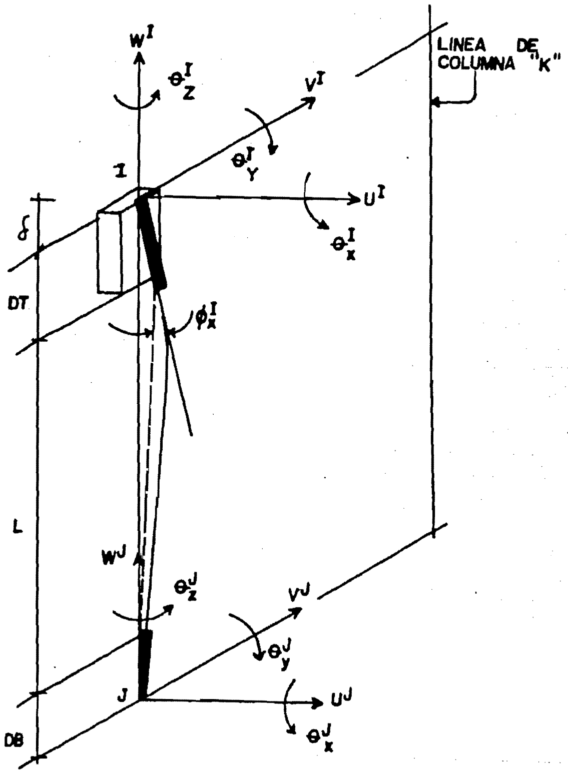


fig. 2.12 DEFORMACION DE LA COLUMNA PARA EL EXTREMO I Y DESPLAZAMIENTOS DE LA JUNTA.

en donde, M_T= momento torsionante; M_{ix}= momento flexionante en el extremo i, sentido X; M_{iy}= momento flexionante en el -extremo j, sentido Y; S= deformación axial; M_{jx}= momento ---flexionante en el extremo j, sentido X; M_{jy}= momento flexionante en el extremo j, sentido Y; S_T= rigidez torsional; S^*_a= S^*_b= factor de rigidez; S^*_c=S^*_d= momento de transporte; A= factor de flexibilidad; siendo

$$S_T = \frac{G\ Jt}{L} \qquad 2.23b$$

$$S^*_a = \frac{2\ E\ Ixx}{L} \frac{(2 + \beta)}{(1 + 2\beta)} \qquad 2.23c$$

$$S^*_b = \frac{2\ E\ Iyy}{L} \frac{(2 + \beta)}{(1 + 2\beta)} \qquad 2.23d$$

$$S^*_c = \frac{2\ E\ Ixx}{L} \frac{(1 - \beta)}{(1 + 2\beta)} \qquad 2.23e$$

$$S^*_d = \frac{2\ E\ Iyy}{L} \frac{(1 - \beta)}{(1 + 2\beta)} \qquad 2.23f$$

$$A = \frac{E\ A}{L} \qquad 2.23g$$

$$\beta = \frac{6\ E\ I}{L\ A_c\ G} \qquad 2.23h$$

Con el método directo de rigidez se desarrollará una --transformación entre el miembro y sus desplazamientos fina--

les como se muestra en la fig 2.12. La transformación está - dada como sigue

$$
\begin{Bmatrix} \phi_T \\ \phi_{ix} \\ \phi_{iy} \\ \delta \\ \phi_{jx} \\ \phi_{jy} \end{Bmatrix} =
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
 & & 1 & & & & & & -1 & & & \\
 & \frac{1}{L} & & 1+\frac{DT}{L} & & & & -\frac{1}{L} & & \frac{DB}{L} & & \\
-\frac{1}{L} & & & & 1+\frac{DT}{L} & & \frac{1}{L} & & & & \frac{DB}{L} & \\
 & & & & & 1 & & & & & & -1 \\
 & \frac{1}{L} & & \frac{DT}{L} & & & & -\frac{1}{L} & & 1+\frac{DB}{L} & & \\
-\frac{1}{L} & & & & \frac{DT}{L} & & \frac{1}{L} & & & & 1+\frac{DB}{L} &
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \\ \theta_Z^I \\ \theta_X^I \\ \theta_Y^I \\ W^I \\ U^J \\ V^J \\ \theta_Z^J \\ \theta_X^J \\ \theta_Y^J \\ W^J \end{Bmatrix} \qquad 2.24
$$

Las ecs 2.23a y 2.24 pueden ser escritas simbólicamente de la siguiente manera

$$F_c = s_c \phi_c \qquad 2.25$$

$$\phi_c = a_c r_c \qquad 2.26$$

en donde el subíndice c indica columna, a_c es la matriz de - continuidad y r_c define los desplazamientos finales del miem bro.

Hay una transformación adicional de los extremos de los miembros a los desplazamientos del marco, como se muestra en la fig 2.13 . Se utiliza la suposición de diafragmas rígidos en su plano, para forzar estos desplazamientos y rotaciones en el plano de la losa a un nudo maestro localizado en el origen de los ejes coordenados para ese marco. La transformación está dada por

$$\begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \\ \theta_z^I \\ \theta_x^I \\ \theta_y^I \\ W^I \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \text{sen } \theta & -\cos\theta & a & & & \\ \hline \cos\theta & \text{sen } \theta & b & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & \text{sen } \theta & -\cos\theta & \\ \hline & & & \cos\theta & \text{sen } \theta & \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} r_x^f \\ r_y^f \\ r_\theta^f \\ \theta_x^f \\ \theta_y^f \\ r_z^f \end{Bmatrix} \qquad 2.27a$$

en donde

$$a= -y \text{ sen } \theta - x \cos\theta \qquad 2.27b$$

$$b= -y \cos\theta + x \text{ sen } \theta \qquad 2.27c$$

y θ está definido por el ángulo entre el eje mayor de la columna y el eje X del marco. Las ecs 2.25, 2.26, 2.27a se pueden escribir de la siguiente manera

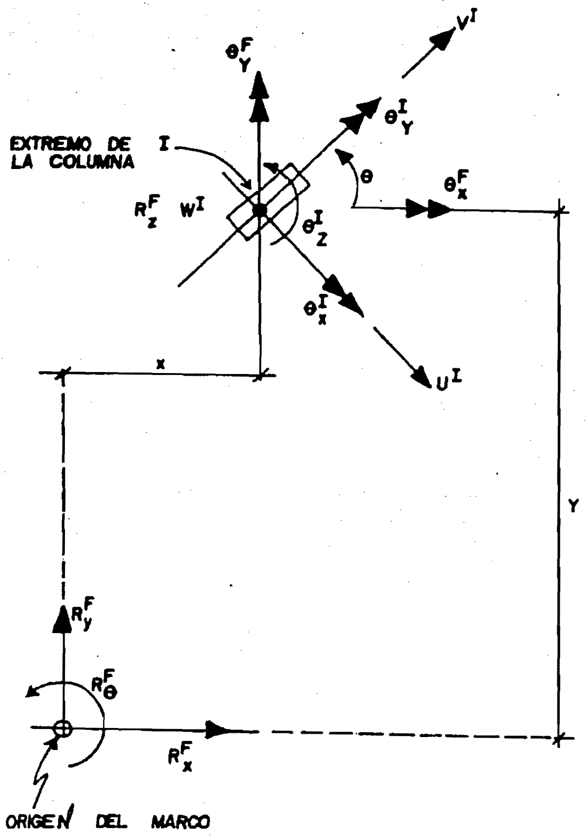


fig. 2.13 DESPLAZAMIENTO DEL EXTREMO DEL MIEMBRO Y DEL MARCO.

$$F_c = s_c \phi_c$$

$$\phi_c = a_c r_c$$

$$r_c = b_c r_f$$

o $$F_c = s_c a_c b_c r_f$$

y de acuerdo con la notación anterior, la matriz de rigidez para una columna individual en términos de los desplazamientos del marco está dada por

$$S_c = b_c^T \, a_c^T \, s_c \, a_c \, b_c \qquad 2.28$$

La rigidez de las vigas es derivada de una manera similar, exceptuando la flexión alrededor del eje vertical y la deformación axial. Por lo tanto la ec 2.23a queda de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} M_T \\ M_I \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_T & & \\ & S_a & S_b \\ & S_b & S_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_T \\ \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \qquad 2.29$$

De acuerdo con la fig 2.14 la transformación del miembro a sus desplazamientos finales queda de la siguiente manera

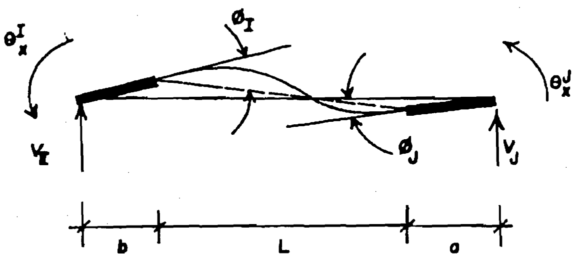


fig. 2.14 DEFORMACIONES DE LA VIGA Y DESPLAZAMIENTOS DE LA JUNTA.

$$\begin{Bmatrix} \phi_T \\ \phi_I \\ \phi_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & -1 & & & 1 & \\ 1+\frac{b}{L} & & \frac{1}{L} & \frac{a}{L} & & -\frac{1}{L} \\ \frac{b}{L} & & \frac{1}{L} & 1+\frac{a}{L} & & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_X^I \\ \theta_Y^I \\ r_Z^I \\ \theta_X^J \\ \theta_Y^J \\ r_Z^J \end{Bmatrix} \qquad 2.30$$

La transformación adicional a los desplazamientos del marco, es una rotación de los extremos del miembro, de los ejes coordenados a las direcciones paralelas, a los ejes coordenados del marco.

$$\begin{Bmatrix} \theta_X^I \\ \theta_Y^I \\ r_Z^I \\ \theta_X^J \\ \theta_Y^J \\ r_Z^J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & & & & \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & \\ & & & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{IX}^f \\ \theta_{IY}^f \\ r_{IZ}^f \\ \theta_{JX}^f \\ \theta_{JY}^f \\ r_{JZ}^f \end{Bmatrix} \qquad 2.31$$

Las ecs 2.29 a 2.31 pueden ser escritas simbólicamente de la siguiente manera

$$F_b = s_b \phi_b \qquad 2.32$$

$$\phi_b = a_b r_b \qquad 2.33$$

$$r_b = b_b r_t \qquad 2.34$$

A partir de las ecuaciones anteriores la matriz de rigidez de la viga S_b está dada por

$$S_b = b_b^T \, a_b^T \, s_b \, a_b \, b_b \qquad 2.35$$

La rigidez de una columna plana, incluyendo deformación a flexión y cortante, se obtiene con la ec 2.23 . Así mismo, cada grado de libertad rotacional es transformado en dos desplazamientos verticales de las juntas adyacentes.

Para los muros de flexión la matriz de transformación de deformación-desplazamiento está dada por las deformaciones del miembro y los desplazamientos de la junta, como se muestra en la fig 2.15 .

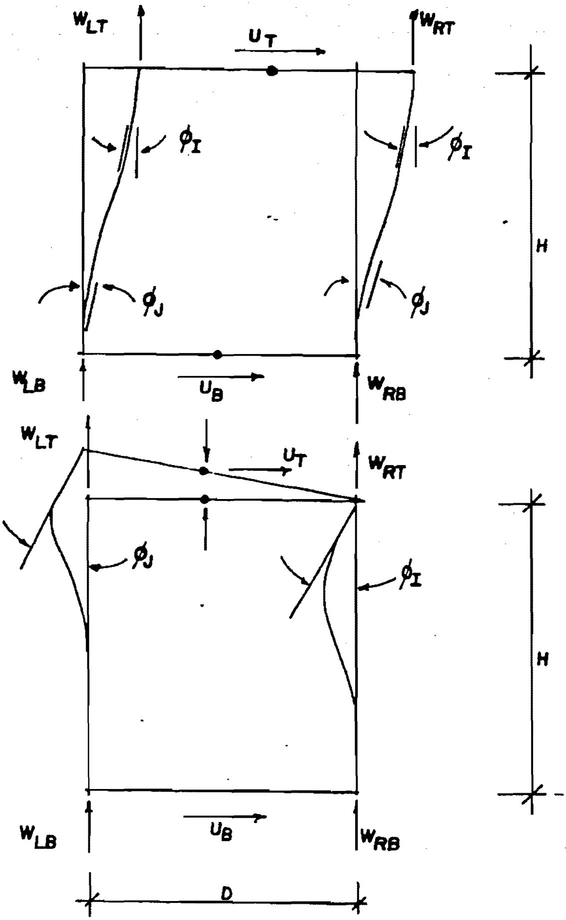


fig. 2.15 DEFORMACIONES DEL MURO TIPICO Y DESPLAZAMIENTOS DE LA JUNTA.

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{1}{h} & -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} & -\frac{1}{h} & & \\ \hline \frac{1}{h} & & & -\frac{1}{h} & -\frac{1}{d} & \frac{1}{d} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_T \\ W_{LT} \\ W_{RT} \\ U_B \\ W_{LB} \\ W_{RB} \end{Bmatrix} \qquad 2.36$$

que se puede escribir como

$$\phi_p = a_p r_p \qquad 2.37$$

En cuanto a los muros de cortante, puesto que están a-- signados a tomar únicamente cortante se empleará la relación constitutiva de cortante simple

$$\tau = G\ \gamma \qquad 2.38$$

siendo τ= esfuerzo de cortante; G= módulo de elasticidad en cortante; γ=deformación por cortante. Además

$$\tau = T/A \qquad 2.39$$

en donde, T= fuerza cortante; A= área efectiva de cortante .

De la fig 2.16, se observa que el esfuerzo cortante es inducido por un desplazamiento horizontal y vertical de los lados del muro, que es

$$\gamma = \frac{\delta_H}{L_V} + \frac{\delta_V}{L_H} \qquad 2.40$$

Los valores promedios del desplazamiento vertical de la junta en cada lado del muro son usados para calcular el desplazamiento vertical relativo. De esta manera se obtiene la matriz de transformación de deformación-desplazamiento, dada por

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_V} & -\frac{1}{2L_H} & \frac{1}{2L_H} & -\frac{1}{L_V} & \frac{1}{2L_H} & -\frac{1}{2L_H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_T \\ W_{LT} \\ W_{RT} \\ U_B \\ W_{LB} \\ W_{RB} \end{Bmatrix} \qquad 2.41$$

o bien

$$\gamma = a_p r_p \qquad 2.42$$

La matriz de rigideces del muro es obtenida de la siguiente manera

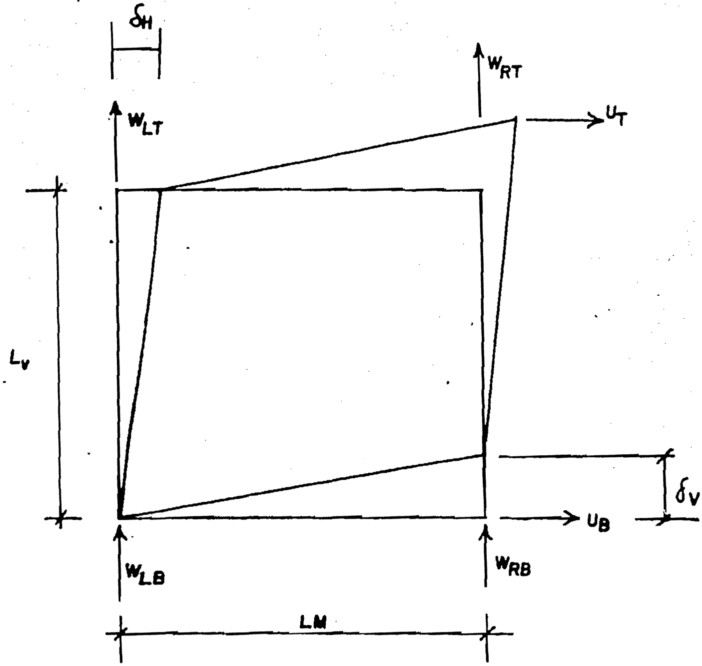


fig. 2.16 DEFORMACION DEL MURO DE CORTANTE

$$S_s = \int_{vol} a_p^T \, G \, a_p \, dv \qquad 2.43$$

$$S_s = L_v \, A \, G \, a_p^T \, a_p \qquad 2.44$$

La transformación a los desplazamientos del muro, está mostrada en la fig 2.17 y es igual para los dos tipos de muro. Matemáticamente se puede escribir como :

$$\begin{Bmatrix} U_T \\ W_{LT} \\ W_{RT} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \cos\beta & \text{sen}\,\beta & -d & & \\ \hline & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} r_x^f \\ r_y^f \\ r_\theta^f \\ r_{zL}^f \\ r_{zR}^f \end{Bmatrix} \qquad 2.45$$

o

$$r_p = b_b r_f \qquad 2.46$$

A partir de las ecs 2.23, 2.43, 2.45, la matriz de rigidez del muro con respecto a los desplazamientos del marco es

$$S_p = b_p^T \, a_p^T \, s_p \, a_p \, b_p \qquad 2.47$$

En cuanto a las diagonales la rigidez está definida -- como

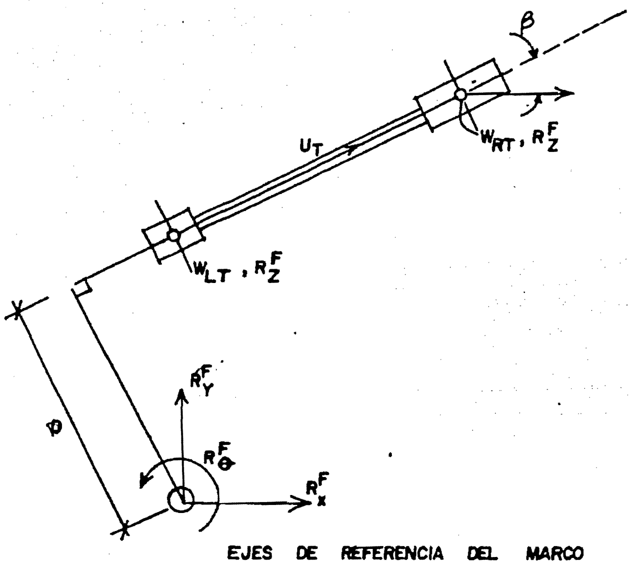


fig. 2.17 DESPLAZAMIENTOS DEL MURO Y DEL MARCO

$$S = \frac{EA}{L}\delta \qquad 2.48$$

$$\text{o} \qquad S = s_d \delta \qquad 2.49$$

con respecto al desplazamiento del marco, las diagonales implican dos transformaciones :

a) Una transformación para el desplazamiento vertical y horizontal, como se muestra en la fig 2.18 .

$$\delta = \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_V^T \\ r_H^T \\ r_V^B \\ r_H^B \end{Bmatrix} \qquad 2.50$$

$$\phi_d = a_d r_d \qquad 2.51$$

b) Y una transformación en cada nivel para el desplazamiento del marco, como se muestra en la fig 2.19 .

$$\begin{Bmatrix} r_V^T \\ r_H^T \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & 1 \\ \hline \cos\theta & \text{sen }\theta & d & \end{array}\right] \begin{Bmatrix} r_{xT}^f \\ r_{yT}^f \\ r_\theta^f \\ r_{zT}^f \end{Bmatrix} \qquad 2.52$$

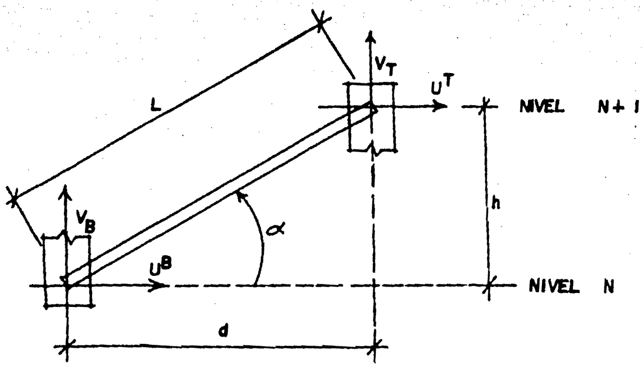


fig. 2.18 DEFORMACIONES DE LA DIAGONAL Y DESPLAZAMIENTOS DE LA JUNTA EN EL PLANO

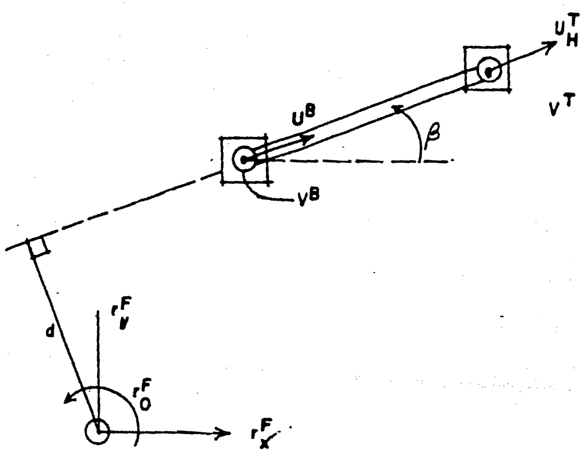


fig. 2.19 DESPLAZAMIENTOS DE LA DIAGONAL Y DEL MARCO

$$o \qquad r_d = b_d r_f \qquad 2.53$$

De las ecs 2.48, 2.50, 2.52, la rigidez para la diago-nal está dada por

$$S_d = b_d^T \, a_d^T \, s_d \, a_d \, b_d \qquad 2.54$$

La matriz de rigidez de la estructura completa, se ob-tiene de la forma en que se indicó en la sección 2.3, pero para este caso además se ensamblarán todos los marcos, por lo tanto la rigidez de la estructura completa es

$$S = \sum_i S_i \qquad 2.55$$

en donde i define el número de marcos; S_i se obtiene a partir de la ec 2.22 .

La forma de la matriz de rigideces de la estructura queda de manera similar a la que se muestra en la sección 2.3 .

Sustituyendo la matriz de rigideces en la ec 2.4 se obtendrán los desplazamientos de la estructura, y a partir de estos los elementos mecánicos, como ya se indicó.

3. INTERACCION TRIDIMENSIONAL DE MUROS Y MARCOS. METODO APROXIMADO.

3.1 Planteamiento del problema.

A continuación se presenta un método aproximado para estudiar la interacción tridimensional de muros y marcos en edificios sujetos a la acción de carga horizontal. Este método fue desarrollado en la Escuela de Ingeniería de San Carlos, en la Universidad de Sao Paulo, Brasil (ref 18).

Para su aplicación, en principio, se requiere de la existencia de dos sistemas de ejes centrales. Uno para los muros y otro para los marcos; que sirven para definir su posición con respecto a un sistema global de referencia (fig 3.1).

Para el desarrollo de este método se han hecho las siguientes suposiciones : 1) Los edificios están formados por muros y marcos; 2) Los muros y los marcos son de rigidez constante a todo lo alto del edificio; 3) Los muros y los marcos están ligados por medio de losas, las cuales se consideran como medios continuos, y que son infinitamente rígidas en su plano; 4) Los muros y los marcos están empotrados en la cimentación; 5) Cada marco se considera como una viga vertical en voladizo; 6) Los muros se consideran rígidos a cortante; 7) Los marcos se consideran con una rigidez infinita a momento flexionante, pero con rigidez finita a cortante; 8) Las cargas externas son horizontales y actúan en un plano vertical π (fig 3.1) a nivel de cada piso; 9) Las cargas actuantes pueden ser una carga uniformemente distribuida, p, y/o una carga concentrada, P, aplicada en el extremo superior del edificio; 10) Se desprecia la rigidez torsional de vigas y columnas.

Para la localización de muros, marcos y fuerzas existirá un sistema global de referencia, definido por Oxyz. Esta localización se hará mediante un vector horizontal unitario, que tendrá por coordenadas a a, b y c; estas coordenadas son las componentes a lo largo de los ejes horizontales Ox, Oy, y la de momento alrededor del eje vertical Oz, respectivamente, del vector unitario en cuestión.

Los muros están representados por la letra ω, y el número total de muros se designa con $n\omega$. La posición de un muro plano, ω, está definida por las componentes a_ω, b_ω, y c_ω del vector unitario, referido éste al sistema global de referen-

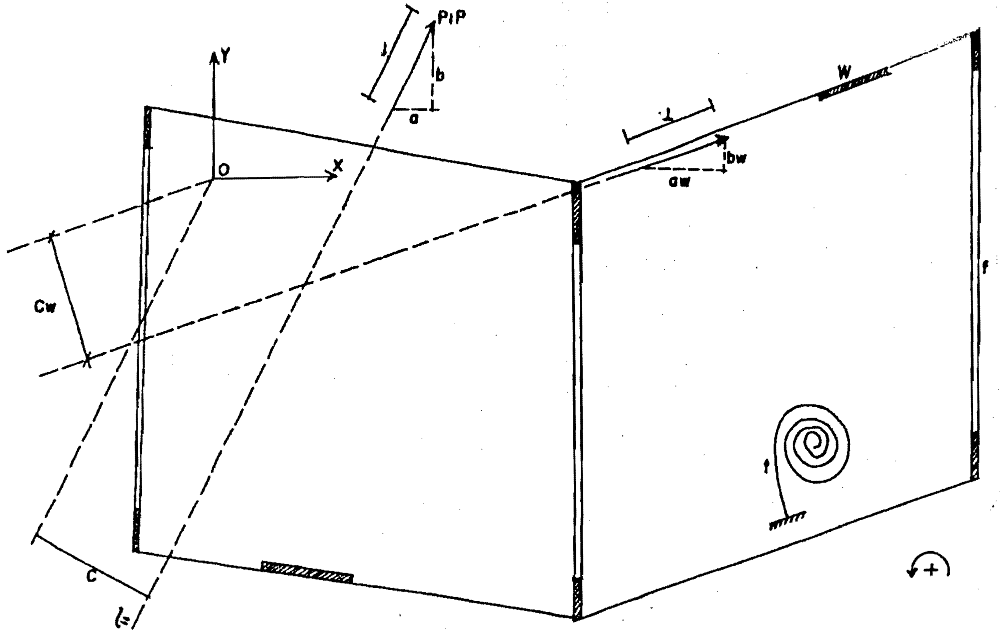


fig. 3.1 PLANTA DEL EDIFICIO

cia Oxyz. Por otra parte si se aplican los conceptos de mecánica de materiales (ref 19) y se observa la figura 3.2, la línea elástica y las ecuaciones de equilibrio para el elemento dz, del muro están dadas por

$$M\omega = EI\omega \frac{d^2U\omega}{dz^2} \qquad 3.1$$

$$Q\omega = -M\omega' = -EI\omega \frac{d^3U\omega}{dz^3} \qquad 3.2$$

$$q\omega = -Q\omega' = EI\omega \frac{d^4U\omega}{dz^4} \qquad 3.3$$

en donde, $M\omega$= momento flexionante en el muro; E= módulo de elasticidad; $I\omega$= momento de inercia, alrededor del eje centroidal, del muro plano; $Q\omega$= fuerza cortante del muro; $q\omega$= carga distribuida en el muro; $U\omega$= desplazamiento horizontal del muro y z= altura sobre la base.

De manera similar, los marcos se representan con la letra f, y el número total de marcos planos nf. La orientación de los marcos se hace con respecto al sistema global Oxyz, mediante las coordenadas a_f, b_f, y c_f. De manera análoga con los muros, la línea elástica y las ecuaciones de equilibrio

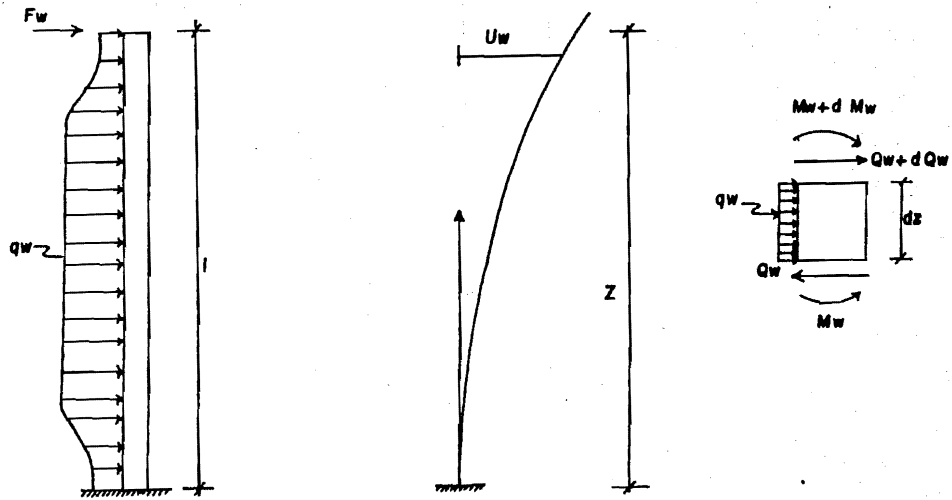


fig. 3.2 MURO PLANO AISLADO

para el elemento dz del marco son

$$M_f = -S_f U_f \qquad 3.4$$

$$Q_f = -M_f' = S_f U_f' = S_f \frac{dU_f}{dz} \qquad 3.5$$

$$q_f = -Q_f' = -S_f U_f'' = -S_f \frac{d^2U_f}{dz^2} \qquad 3.6$$

donde, M_f= momento flexionante del marco; S_f= rigidez a cortante del marco; Q_f= fuerza cortante; q_f= carga distribuida y U_f= desplazamiento horizontal del marco.

S_f es la rigidez a cortante (GS) de la viga en voladizo equivalente al marco. Los valores de S_f están dados como funciones de la elástica y de las características geométricas de las vigas y columnas del marco. En general, los edificios pueden tener un desplazamiento horizontal relativo ΔU, entre los pisos adyacentes, a una distancia ΔZ. Este desplazamiento está dado por (ref 9)

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = \frac{Q}{S} \qquad 3.7$$

siendo, Q= suma de las fuerzas horizontales arriba del nivel considerado y S= constante que depende de la rigidez de los miembros de los marcos. Cuando existen muchos niveles (aproximadamente 10) la ec 3.5 es una aproximación razonable de la ec 3.7 (ref 9).

Para conocer el valor de la constante S es necesario obtener primeramente el valor de Q. Por sencillez se hacen las siguientes suposiciones, que están basadas en el método del voladizo (ref 21) :

1.- El punto de inflexión de las columnas se encuentra en el punto medio de estas.
2.- La rigidez de los sistemas de piso en su propio plano es infinita, por lo cual funcionan como diafragmas rígidos.
3.- Los esfuerzos directos en las columnas interiores son cero.

Con ayuda de la fig 3.3 puede verse que el desplazamiento máximo del marco está dado por

$$\Delta = 2\left(\frac{1}{3EI_c}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)\frac{h^3}{2^3} + \left(\frac{h}{L}\right)\left(\frac{Qh}{4L}\right)\left(\frac{L^3}{3EI_v}\right) \qquad 3.8$$

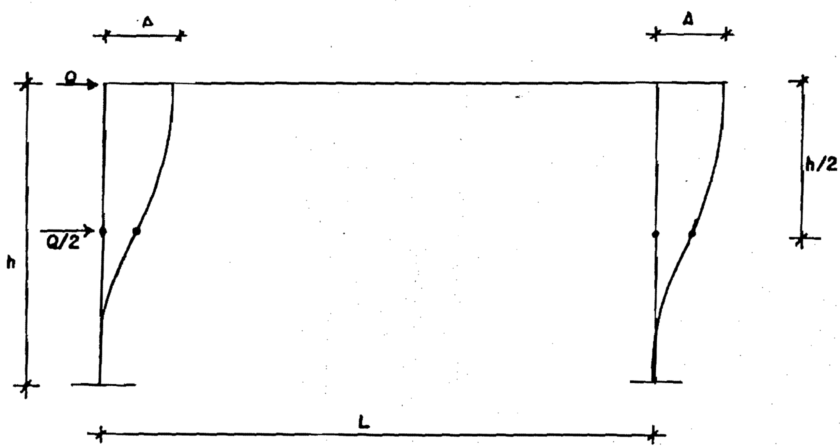


fig. 3.3

siendo, Δ= desplazamiento máximo; Q= carga horizontal; h= altura de la columna; E= módulo de elasticidad; I_c= momento de inercia de la columna; I_v= momento de inercia de la viga y L= longitud del claro del marco (o crujía).

Si en la ec 3.8 se supone que existe un desplazamiento unitario, Δ=1, se puede obtener Q fácilmente, y a partir de este valor obtener el valor de S, sustituyendo el valor de Q en la ec 3.7 .

De manera similar a los muros y a los marcos, las cargas también están definidas por un vector horizontal unitario, mediante las coordenadas a, b y c, referidas al sistema global Oxyz (fig 3.1). La carga uniformemente repartida está representada por p y la carga concentrada aplicada en el extremo superior de la estructura está representada por la letra P.

En este método se toma en cuenta el alabeo de los muros de sección abierta, ya que puede darse el caso que al producirse la torsión las secciones rectas planas antes de la deformación no continúan siéndolo después de ella, sino que presentan alabeo. De ser este el caso la ecuación de equilibrio a torsión está dada por la siguiente expresión :

$$M_t = GJ_t \theta'_t - EC\omega \ \theta'''_t \qquad 3.9$$

esta expresión relaciona la deformación por torsión con el momento que la produce, el primer término del segundo miembro representa el momento torsionante requerido para hacer girar a la sección alrededor de su eje longitudinal venciendo la rigidez torsional GJ_t de la pieza. El segundo término aparece debido al hecho de que en ciertos casos el alabeo no puede producirse libremente, el signo menos se debe a que la deformación no se produce libremente sino que está impedida por el apoyo empotrado en la base.

De la ec 3.9 se tiene que M_t= momento de torsión; G= módulo de elasticidad de cortante; J_t= constante de torsión; θ_t= ángulo de rotación unitario o rotación angular; E= módulo de elasticidad y $C\omega$= constante de alabeo.

Un muro de sección abierta, como el que se muestra en la fig 3.4, puede ser remplazado por dos muros planos equivalentes e independientes, que pasen por el centro de cortante (C) y orientados de acuerdo con los ejes principales Cw_1 y -

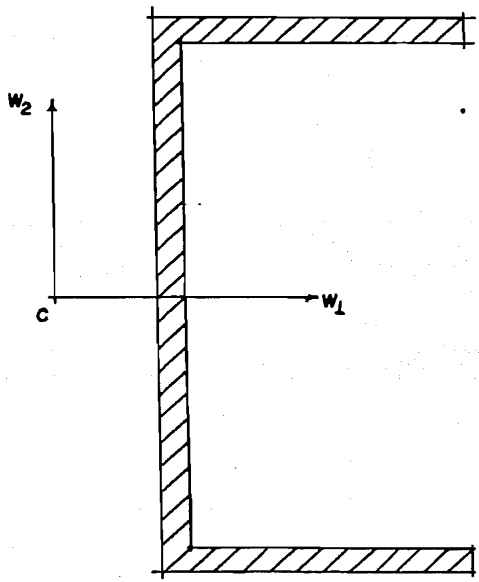


fig. 3.4 MURO DE SECCION ABIERTA

Cw_2; que tengan rigidez EI_1 y EI_2, siendo I_1el momento de -- inercia con respecto al eje Cw_2 de la sección original, e I_2 el momento de inercia con respecto al eje Cw_1 de la sección original.

A estos dos muros planos se les debe sumar un "resorte de rigidez a torsión", que resista torsión únicamente. Este "resorte de torsión" representa el momento de torsión, el -- cual a partir de la ec 3.9 se puede escribir como

$$M_t = S_t\theta_t' - J\omega\theta_t''' \qquad 3.10$$

en donde, $S_t = GJ_t$ es la rigidez torsional; $J\omega = EC\omega$ es la ri gidez de alabeo. Los valores de GJ_t están dados por la teorí a de torsión uniforme de Sn Venant y los de $EC\omega$ por la de -- torsión no uniforme de Vlasov (refs 19,20).

3.2 Ecuaciones de equilibrio.

De las hipótesis hechas anteriormente puede observarse que cada nivel tiene tres grados de libertad que son : dos -

traslaciones en las direcciones de dos ejes ortogonales (Ox, Oy) y una rotación alrededor de un eje normal al piso (Oz).

Si se designa a u como el desplazamiento de Oz en el -- sentido de Ox, a v como el desplazamiento de Oz en el sentido Oy y a θ como rotación del diafragma alrededor de Oz, y - además se superponen los efectos de u, v y θ, es posible obtener los desplazamientos del muro plano típico, Uw, del marco plano típico, Uf, y del resorte típico de torsión, θt, como funciones lineales de u,v y θ, tal como se indica a continuación :

$$U\omega = a\omega u + b\omega v + c\omega\theta \qquad 3.11$$

$$U_f = a_f u + b_f v + c_f\theta \qquad 3.12$$

$$\theta t = \theta \qquad 3.13$$

Si Q es la resultante de las cargas externas arriba del nivel considerado, z, el equilibrio de la parte del edificio arriba de ese nivel está dado por las siguientes ecuaciones

$$\sum_1^{n\omega} Q\omega a\omega + \sum_1^{nf} Q_f a_f = Qa \qquad 3.14$$

$$\sum_1^{n\omega} Q\omega b\omega + \sum_1^{nf} Q_f b_f = Q_b \qquad 3.15$$

$$\sum_{1}^{n\omega} Q\omega c\omega + \sum_{1}^{nf} Q_f c_f = Qc \qquad 3.16$$

la ec 3.14 nos representa el equilibrio de las cargas en el sentido X, ($\Sigma Fx=0$), la ec 3.15 el equilibrio en el sentido Y ($\Sigma Fy=0$), y la ec 3.16 el equilibrio de momentos alrededor de O, ($\Sigma M_0=0$).

Al sustituir las ecs 3.11 a 3.13 en las ecs 3.2, - 3.5 y 3.10, respectivamente, se obtiene lo siguiente :

$$Q\omega = -EI\omega(a\omega u''' + b\omega v''' + c\omega\theta''') \qquad 3.17$$

$$Q_f = S_f(a_f u' + b_f v' + c_f \ ') \qquad 3.18$$

$$M_t = S_t\theta' - J\omega\theta''' \qquad 3.19$$

y si ahora estas ecuaciones se sustituyen en las ecs 3.14 a 3.16, se obtiene que

$$\sum_{1}^{n\omega} \left[-EI \ (a\omega u''' + b\omega v''' + c\omega\theta''')\right] a\omega +$$

$$\sum_{1}^{nf} S_f(a_f u' + b_f v' + c_f\theta')a_f = Qa \qquad 3.20$$

$$\sum_{1}^{n\omega} \left[-EI\omega(a\omega u''' + b\omega v''' + c\omega\theta''')\right] b\omega +$$

$$\sum_{1}^{nf} S_f(a_f u' + b_f v' + c_f\theta') b_f = Qb \qquad 3.21$$

$$\sum_{1}^{n\omega} \left[-EI\omega(a\omega u''' + b\omega v''' + c\omega\theta''')\right] c\omega +$$

$$\sum_{1}^{nf} S_f(a_f u' + b_f v' + c_f\theta') c_f + \sum^{nt} (S_t\theta' -$$

$$J\omega\theta''') = Qc \qquad 3.22$$

ahora bien, si se hace $EI\omega=J$, y $S_f=S$, las ecs 3.20 a 3.22 se pueden escribir en forma matricial como

$$-\begin{bmatrix} Jaa & Jab & Jac \\ Jba & Jbb & Jbc \\ Jca & Jcb & J\overset{*}{c}c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Saa & Sab & Sac \\ Sba & Sbb & Sbc \\ Sca & Scb & S\overset{*}{c}c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad 3.23$$

de donde :

$$Jde= \sum_{1}^{n\omega} EI\omega d\omega e\omega \qquad 3.24$$

$$Sde= \sum_{1}^{nf} S_f d_f e_f \qquad 3.25$$

$$J^{*}cc = Jcc + \sum_{1}^{nt} J\omega \qquad 3.26$$

$$S^{*}cc = Scc + \sum_{1}^{nt} S_t \qquad 3.27$$

en las ecs 3.24 y 3.25, d y e representan cualesquiera de -- las coordenadas a,b,c.

El sistema dado por la ec 3.23 representa un sistema de tres ecuaciones diferenciales de tercer orden, el cual tam-- bién se puede escribir de la siguiente manera :

$$-[J][U'''] + [S][U'] = Q[D] \qquad 3.28$$

en donde, [J] representa la matriz de rigidez de la coloca-- ción de los muros; [S] representa la matriz de rigidez de la colocación de los marcos, además :

$$[U] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \qquad 3.29a$$

$$[D] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad 3.29b$$

Debe observarse que al resolver el sistema dado por la ec 3.28 y al ajustar las condiciones de frontera en la solución se podrán definir los aspectos cinemáticos de la estructura.

3.3 Solución del sistema de ecuaciones de equilibrio.

Uno de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como el que está dado por la ec 3.28, consiste en buscar la ecuación característica O ecuación auxiliar del sistema. Para el problema en cuestión la ecuación está dada por

$$-[J][r^3]+[S][r]=0 \tag{3.30}$$

que también puede escribirse como

$$\begin{vmatrix} -Jaa\ r^3 + Saa\ r & -Jab\ r^3 + Sab\ r & -Jac\ r^3 + Sac\ r \\ -Jba\ r^3 + Sba\ r & -Jbb\ r^3 + Sbb\ r & -Jbc\ r^3 + Sbc\ r \\ -Jca\ r^3 + Sca\ r & -Jcb\ r^3 + Scb\ r & -J\overset{*}{c}c\ r^3 + S\overset{*}{c}c\ r \end{vmatrix} = 0 \tag{3.31}$$

siendo r= operador, que nos expresa la función $\frac{d^nU}{dx^n}$

A partir de la ecuación característica, representada -- por la ec 3.31 se pueden obtener las raíces del sistema. Por el teorema fundamental del álgebra, el cual establece que -- "cada ecuación integral racional f(x)=0 tiene por lo menos - una raíz, real o compleja". Cada ecuación de grado n tiene - exactamente n raíces reales o complejas. Por lo tanto, la solución general de la ec 3.28 tendrá términos polinomiales en z, correspondientes a las raíces cero de la ec 3.31, así como términos exponenciales en z correspondientes a las raíces no nulas de la ec 3.31 .

Si r_s es el rango de la matriz $[S]$, se encuentra que el número de raíces cero de la ec 3.31 es igual con

$$\text{raíces nulas} = 9 - 2r_s \tag{3.32}$$

Si r_j es el rango de la matriz $|J|$, se encuentra que el número total de raíces de la ec 3.31 es igual con

$$\text{raíces totales} = 3 + 2r_j \tag{3.33}$$

De las ecs 3.32 y 3.33 se obtiene el número de raíces - no cero de la ec 3.31. Este resulta ser igual con

$$\text{raíces no nulas} = 2(r_s + r_j) - 6 \qquad 3.34$$

Por lo tanto, la solución de la ec 3.28 está influenciada por los rangos r_j y r_s, los cuales determinan el número total de raíces de la ecuación característica. Puede demostrarse (ref 4) que las n raíces que se obtengan serán raíces reales. En este trabajo se omite, en obvio de espacio, dar cualquier demostración de tipo algebraico y se opta por dar las referencias pertinentes.

A continuación se presenta el caso más general, que es cuando las matrices [J] y [S] son no singulares, en cuyo caso los rangos están dados por r_j=3 y r_s=3. Aplicando las ecs 3.32 a 3.34 se obtiene que

$$\text{raíces cero} = 9 - 2(3) = 3$$

$$\text{raíces no cero} = 2(3 + 3) - 6 = 6$$

$$\text{total de raíces} = 3 + 2(3) = 9$$

Por otra parte, al considerar

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \qquad 3.35$$

cuya ecuación auxiliar o característica es

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \dots + a_{n-1} + a_n = 0 \qquad 3.36$$

se pueden obtener las n raíces reales, que son m_1, m_2, m_3, ... , m_n, con lo que la solución general de la ec 3.35 está dada por

$$y= C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + C_3e^{m_3x} + \dots + C_ne^{m_nx} \qquad 3.37$$

Por lo tanto, la solución del sistema 3.30, considerando los resultados obtenidos anteriormente, indica que existen 9 raíces en total, de las cuales 3 son cero y 6 no cero, por lo tanto habrá tres raíces repetidas. Se puede escribir que

$$u= A_1e^{0z} + A_2Ze^{0z} + A_3Z^2e^{0z} + A_4e^{r_4z} + A_5e^{r_5z} + A_6e^{r_6z} + A_7e^{r_7z} + A_8e^{r_8z} + A_9e^{r_9z} \qquad 3.38$$

$$v= B_1e^{0z} + B_2Ze^{0z} + B_3Z^2e^{0z} + B_4e^{r_4z} + B_5e^{r_5z} + B_6e^{r_6z} + B_7e^{r_7z} + B_8e^{r_8z} + B_9e^{r_9z} \qquad 3.39$$

$$\Theta = C_1 e^{0z} + C_2 Z e^{0z} + C_3 Z^2 e^{0z} + C_4 e^{r_4 z} + C_5 e^{r_5 z} + C_6 e^{r_6 z} + C_7 e^{r_7 z} + C_8 e^{r_8 z} + C_9 e^{r_9 z} \qquad 3.40$$

que en forma compacta también puede escribirse como

$$u = \sum_1^3 A_i Z^{i-1} + \sum_4^9 A_i e^{r_i z} \qquad 3.41$$

$$v = \sum_1^3 B_i Z^{i-1} + \sum_4^9 B_i e^{r_i z} \qquad 3.42$$

$$\Theta = \sum_1^3 C_i Z^{i-1} + \sum_4^9 C_i e^{r_i z} \qquad 3.43$$

en donde A_i, B_i, C_i = constantes; r_i= las seis raíces no cero obtenidas de la solución de la ec 3.30 . Las ecs 3.41 a 3.43 **representan la solución general del sistema.**

Si el rango de $[S]$, r_s, es menor que tres indicará que existe degeneración en la colocación del sistema de referencia de los marcos. Por degeneración debe entenderse la inhabilidad de los marcos para soportar una carga horizontal general (sin el conjunto de muros). Dicha inhabilidad ocurre en el caso de un número insuficiente de marcos (menor que tres), o de un arreglo defectuoso de los marcos (todos paralelos o concurrentes). En el conjunto de muros habrá degeneración si el rango de [J], r_J, es menor que tres.

Si ambas matrices [S] y [J] tienen rango menor que tres el sistema global de marcos y muros no será degenerado si el rango de

$$[J] + \lambda^2[S] = 3 \qquad 3.44$$

en donde λ es una longitud no nula y arbitraria, usada simplemente para hacer a las dos matrices dimensionalmente homogéneas.

3.4 Condiciones de frontera. Determinación de constantes.

De la solución general del sistema, dada por las ecs -- 3.41 a 3.43 se puede observar que existen 27 constantes (9 - de u, 9 de v y 9 de θ), las cuales hay que determinar para - poder conocer el valor de u,v y θ en un problema particular. Para la determinación de las constantes se procede de la siguiente manera :

1) Se consideran únicamente los términos polinomiales -

de las ecs 3.41 a 3.43, esto es

$$u= \sum_{1}^{3} A_i z^{i-1} \qquad 3.45$$

$$v= \sum_{1}^{3} B_i z^{i-1} \qquad 3.46$$

$$\theta= \sum_{1}^{3} C_i z^{i-1} \qquad 3.47$$

si estas ecuaciones se sustituyen en la ec 3.28 se obtiene

$$-[J]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [S]\begin{bmatrix} A_2 + 2A_3 Z \\ B_2 + 2B_3 Z \\ C_2 + 2C_3 Z \end{bmatrix} = Q[D] \qquad 3.48$$

en donde $Q= P + p(l-z)$ 3.49

La ec 3.48 es válida para cualquier nivel, por lo tanto si se hace $z=0$ en la ec 3.49 y se sustituye en la ec 3.48, - resulta

$$[S]\begin{bmatrix} A_2 + 0 \\ B_2 + 0 \\ C_2 + 0 \end{bmatrix} = P + pl[D] \qquad 3.50$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = [S]^{-1}[D](P + pl) \qquad 3.51$$

Ahora, si se sustituye la ec 3.51 en la ec 3.48, el resultado es

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = -[S]^{-1}[D]p/2 \qquad 3.52$$

2) A continuación se consideran los términos exponenciales de las ecs 3.41 a 3.43, esto es

$$u= \sum_4^9 A_i e^{r_i z} \qquad 3.53$$

$$v= \sum_4^9 B_i e^{r_i z} \qquad 3.54$$

$$\theta= \sum_4^9 C_i e^{r_i z} \qquad 3.55$$

Al sustituir las ecs 3.53 a 3.55 en la ec 3.28, además si se igualan con cero, se obtiene

$$\left(-[J]r_i^2 + [S]\right)\begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} r_i e^{r_i z} = 0 \qquad 3.56$$

como se puede observar, el determinante de la matriz

$$\left|\left(-[J]r_i^3 + [S]\right)\right| \qquad 3.57$$

es el mismo de la ec 3.31 y r_i es una de las raíces que lo nulifica. Entonces, existe solución no trivial, es decir, soluciones no cero para A_i, B_i, C_i, en la ec 3.56. Por ejemplo, puede suponerse que la matriz en la ec 3.57 tiene rango 2 y que las dos últimas columnas y los dos últimos renglones forman un determinante no singular. En este caso la primera de las ecuaciones dadas en 3.56 puede ser omitida, puesto que es una combinación lineal de las dos últimas. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{bmatrix} Sab & -Jbb\, r_i^2 + Sbb & Sbc \\ Sac & Sbc & -J^{*}cc\, r_i^2 + S^{*}cc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 3.58$$

con la parte mostrada en la ec 3.58 es posible escribir que

$$[S_{Ai}]A_i + [S_{BC}]_i \begin{bmatrix} B_i \\ C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 3.59$$

como $|S_{BC}|_i$ fue supuesta no singular, entonces

$$B_i = \beta_i A_i \qquad 3.60$$

$$C_i = \gamma_i A_i \qquad 3.61$$

en donde β_i y γ_i están dadas por

$$\begin{bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = -[S_{BC}]_i^{-1}[S_{Ai}] \qquad 3.62$$

Por lo tanto B_i y C_i no son independientes, sino que están relacionadas con A_i como se muestra en las ecs 3.60 y 3.61 . Esto puede ser mostrado en forma similar para cada una de las seis raíces no cero r_i ($i=4,5,\ldots,9$).

Considerando las condiciones de frontera, se tiene que en la base z=0, y como $|J|$ es no singular, entonces

$$u = v = \theta = 0 \qquad 3.63$$

$$u'=v'=\theta'=0 \tag{3.64}$$

además, en la parte superior donde z=1, el mómento flexionante en el muro es nulo, y $|J|$ es no singular, entonces se encuentra que

$$u''=v''=\theta'' \tag{3.65}$$

A partir de estas consideraciones y tomando en cuenta las ecs 3.41 a 3.43 y 3.63, se obtiene que

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + \sum_4^9 \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Al considerar las ecs 3.41 a 3.43, 3.51 y 3.64 se obtiene que

$$\sum_4^9 \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} r_i = -[S]^{-1}[D](P + pl) \tag{3.67}$$

Ahora, al tomar en cuenta las ecs 3.41 a 3.43, 3.52 y -

3.65 se puede escribir que

$$\sum_{4}^{9}\begin{bmatrix}A_i\\B_i\\C_i\end{bmatrix} r_i^2 \, e^{r_i l} = [S]^{-1}[D]p \qquad 3.68$$

3.4.1 <u>Procedimiento para determinar las constantes de las - ecuaciones diferenciales.</u>

Para determinar las 27 constantes de las ecs 3.41 a - 3.43 se seguirá el siguiente procedimiento, debe notarse que dependen unas de las otras

1.- De la ec 3.51 se obtienen directamente A_2, B_2 y C_2.
2.- De la ec 3.52 se obtienen directamente A_3, B_3 y C_3.
3.- Puesto que hay seis valores de r_i, habrá seis ecuaciones como la ec 3.61, que expresarán directamente dos de los valores A_i, B_i, C_i como dependientes de -- uno de ellos ($i=4,5,\ldots,9$).
4.- Los resultados obtenidos en el punto (3) son sustituídos en las 3.67 y 3.68, por lo cual se obtiene - un sistema de seis ecuaciones.

5.- Se resuelve este sistema y los resultados se sustituyen en el punto (3), para determinar 18 constantes A_i, B_i, C_i $(i=4,5,\ldots,9)$.

6.- A partir de los valores obtenidos en el punto (5), los resultados son sustituídos en la ec 3.66, con lo cual se determina A_1, B_1 y C_1.

7.- Una vez determinadas las 27 constantes, se sustituyen estas en las ecs 3.41 a 3.43, con lo cual se obtienen los desplazamientos u,v y θ.

Es conveniente hacer notar que el problema que se está presentando es el caso más general, y que en muchas aplicaciones particulares el procedimiento aquí descrito es más simple. Diversas simplificaciones ocurren cuando la estructura es simétrica.

A partir de las 27 constantes A_i, B_i, C_i $(i=1,2,\ldots,9)$ y de los desplazamientos u,v y θ obtenidos con las ecs 3.41 a 3.43 se pueden obtener las fuerzas internas de muros y marcos.

Las fuerzas internas de un muro típico son obtenidas a partir de las ecs 1 a 3 y 11, de la siguiente manera

$$M\omega = EI\omega U_\omega'' = EI\omega(a\omega u'' + b\omega v'' + c\omega\theta'') \qquad 3.69$$

$$Q\omega = -EI\omega U_\omega''' = -EI\omega(a\omega u''' + b\omega v''' + c\omega\theta''') \qquad 3.70$$

$$q\omega = EI\omega U_\omega^{lV} = EI\omega(a\omega u^{lV} + b\omega v^{lV} + c\omega\theta^{lV}) \qquad 3.71$$

Las fuerzas internas de un marco típico son obtenidas a partir de las ecuaciones siguientes

$$Q_f = S_f U_f' = S_f(a_f u' + b_f v' + c_f\theta') \qquad 3.72$$

$$q_f = -S_f U_f'' = -S_f(a_f u'' + b_f v'' + c_f\theta'') \qquad 3.73$$

$$M_f = -S_f U_f + D_f = -S_f(a_f u + b_f v + c_f\theta) + D_f \qquad 3.74$$

siendo D_f= constante, determinada de la condición que M_f=0 en el tope donde z=L.

Las fuerzas concentradas F_w y F_f, que actúan en los topes del muro y del marco (fig 3.2) son obtenidas de las fuerzas cortantes respectivas $Q\omega$ y Q_f, en el nivel z=1.

Una vez determinada la fuerza cortante total Q_f (o las cargas q_f y F_f), en cada marco (a la mitad de la altura de -- las columnas) se pueden determinar las fuerzas internas en - los miembros de cada marco a partir del método del portal o de algún otro método aproximado, lo cual dará una solución - bastante aproximada a la solución exacta.

Para el resorte de torsión típico para cualquier nivel z, pueden ser definidos los siguientes términos : momento de torsión total M_t; momento de torsión uniforme M_u; momento de torsión-alabeo M_a; bimomento B_t; y momento de torsión distri buido q_t. Estas variables están dadas por las ecs 3.75 a 3.79 y por la teoría de torsión de vigas de pared delgada, en la forma siguiente

$$M_t = S_t\theta' - J_t\theta''' = M_u - M_a \qquad 3.75$$

$$M_u = S_t\theta' \qquad 3.76$$

$$M_a = -J_t\theta''' \qquad 3.77$$

$$B_t = J_t\theta'' \qquad 3.78$$

$$q_t = -M_t' = -S_t\theta'' + J_t\theta^{IV} \qquad 3.79$$

Usando los valores de $M\omega$ (ec 3.69) y B_t (ec 3.78) los - esfuerzos normales, σ, en los muros son determinados fácil-- mente. También conociendo $Q\omega$ y $M\omega$ podrán calcularse los es-- fuerzos cortantes, τ, en los muros.

3.5 Diagonalización de matrices.

Con un sistema conveniente de ejes de referencia, siempre es posible diagonalizar una matriz. Si se pretende diagonalizar la matriz $|J|$, hay siempre un sistema (o varios), -- $O\omega x\omega y\omega$, que produce $\bar{J}ab = \bar{J}ac = \bar{J}bc = 0$ (el nuevo símbolo $\bar{J}$ de está referido al nuevo sistema $O\omega x\omega y\omega$). Para lograr esto se efectuarán dos etapas, que son la rotación y la traslación - del sistema global de ejes de referencia.

1.- Rotación de los ejes coordenados. Si se desea que - la matriz $|J|$ tenga la forma

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} \bar{J}aa & 0 & \bar{J}ac \\ 0 & \bar{J}bb & \bar{J}bc \\ \bar{J}ca & \bar{J}cb & \bar{J}cc \end{bmatrix}$$

será necesaria una rotación de los ejes coordenados. El problema es similar al de la obtención de eigenvalores y eigenvectores de matrices simétricas (ref 5), por lo que se obtienen las siguientes expresiones

$$\phi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2Jab}{Jaa - Jbb}\right) \qquad 3.80$$

$$\bar{J}aa = \frac{Jaa + Jbb}{2} + \sqrt{\left(\frac{Jaa - Jbb}{2}\right)^2 + J^2ab} \qquad 3.81$$

$$\bar{J}bb = \frac{Jaa + Jbb}{2} - \sqrt{\left(\frac{Jaa - Jbb}{2}\right)^2 + J^2ab} \qquad 3.82$$

A los nuevos ejes se les denominará ejes principales de rigidez. Además, se tiene que si los marcos son paralelos a dos direcciones ortogonales, las direcciones principales de rigidez coinciden con esas dos direcciones.

2.- Traslación de los ejes coordenados. Si se desea que la matriz |J| tenga la forma siguiente

$$[J] = \begin{bmatrix} Jaa & & \\ & Jbb & \\ & & Jcc \end{bmatrix}$$

será necesario efectuar un traslado de los ejes coordenados, moviendo el origen a un punto, que se le denomina Centro de Torsión, y sus coordenadas están dadas por

$$X_0 = \frac{Jaa\ Jbc - Jab\ Jac}{Jaa\ Jbb - (Jab)^2} \qquad 3.83$$

$$Y_0 = \frac{-Jbb\ Jac + Jab\ Jbc}{Jaa\ Jbb - (Jab)^2} \qquad 3.84$$

Se puede observar que hay una analogía entre Jaa, Jbb, Jab y los momentos de inercia Ix, Iy, e Ixy de una sección - plana. Esto se podrá llevar a cabo siempre y cuando $|J|$ sea una matriz no singular.

De manera similar, es posible diagonalizar la matriz -- $|S|$, es decir, hay un sistema (o varios), $O_f x_f y_f$, que produce $\overline{S}ab = \overline{S}ac = \overline{S}bc = 0$, por lo que se obtiene

$$X_0 = \frac{Saa\ Sbc - Sab\ Sac}{Saa\ Sbb - (Sab)^2} \qquad 3.85$$

$$Y_0 = \frac{-Sab\ Sac + Sab\ Sbc}{Saa\ Sbb - (Sab)^2} \qquad 3.86$$

$$\phi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2Sab}{Saa - Sbb}\right) \qquad 3.87$$

Los ejes $O\omega x\omega y\omega$, son llamados ejes principales de los muros, y los ejes $O_f x_f y_f$, son llamados ejes principales de los marcos.

La existencia del "resorte de torsión" afecta únicamente a los elementos J^*cc y S^*cc, pero no alteran la posición de los ejes.

Si los sistemas, $O\omega x\omega y\omega$ y $O_f x_f y_f$, son coincidentes, las matrices $|J|$ y $|S|$ son diagonalizadas simultáneamente, causando el desacoplamiento de las variables u,v y θ en la ec 3.28 y, por ende, simplifican radicalmente la solución. Este caso ocurre en estructuras con dos planos verticales de simetría. Si esta situación se presenta, se resolverán tres ecuaciones diferenciales de tercer orden separadamente para cada una de las variables u,v y θ.

4. APLICACIONES.

Como aplicación de los métodos anteriormente indicados - se presentan dos ejemplos, uno analizado ante fuerzas sísmicas y otro con presión de viento. En ambos casos se trata de un edificio de 10 niveles, formado por 4 marcos y un muro de cortante, en donde lo que varía son las dimensiones del edificio, y las propiedades de los elementos que lo constituyen.

4.1 Ejemplo 1.

La estructura que se analizará es un edificio de 10 niveles, con planta de 10 x 20 m, como se muestra en las figs 4.1 y 4.2 . Es un edificio a base de trabes, columnas y muros, clasificado dentro del grupo A y localizado en un terreno compresible.

La clasificación de la estructura es con base en el Reglamento de Construcciones para el D.F. (ref 12).

Según su estructuración, el edificio se clasifica dentro del Tipo 1, de acuerdo con el artículo 233.

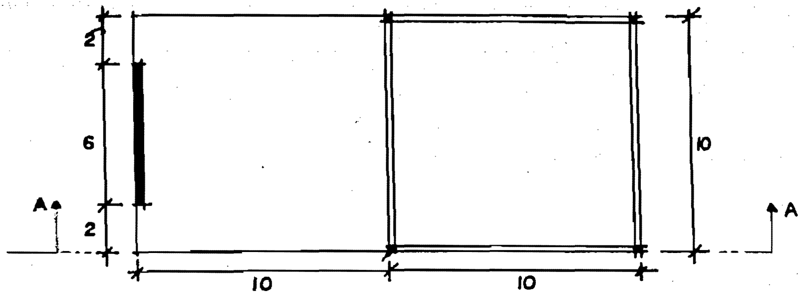


fig. 4.1

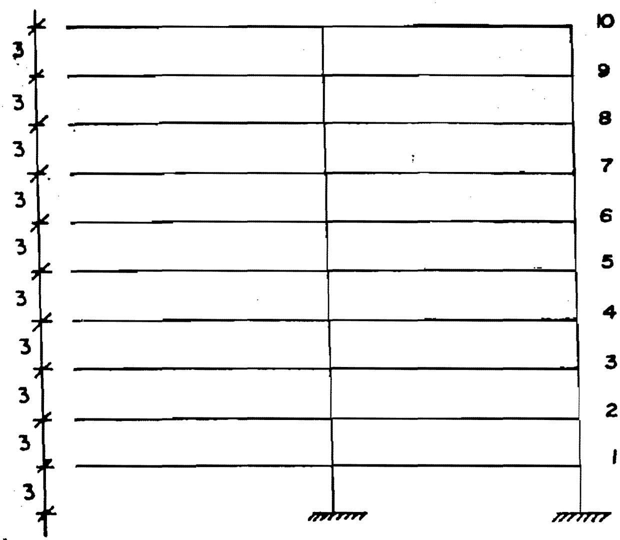


fig. 4.2
corte A-A

La construcción se supone que se encuentra en un suelo compresible, que según el artículo 262 corresponde a la Zona III.

De acuerdo con el artículo 234 se supone un coeficiente sísmico c=0.24 x 1.3 = 0.312, y según el artículo 235 se supone un factor de ductilidad Q=4.0 .

A continuación se presentan las dimensiones y propiedades de los elementos que constituyen al edificio

sección de las trabes principales = 0.60 x 0.40 m
sección de las trabes secundarias = 0.20 x 0.20 m
sección de las columnas = 0.60 x 0.60 m
espesor del muro = 0.20 m
espesor de la losa = 0.15 m
módulo de elasticidad $E= 2x10^6$ ton/m^2
módulo de cortante G= 833333 ton/m^2
momento de inercia de trabes principales I_v= 0.0072 m^4
momento de inercia de trabes secundarias I = 0.000133 m^4
momento de inercia de las columnas I_c= 0.0108 m^4
momento de inercia del muro $I\omega$= 3.6 m^4

El método que se utilizará para cuantificar el efecto - del sismo sobre el edificio será el estático, por lo tanto - se seguirán los pasos siguientes :

a) Determinación de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad de cada nivel.

Se tiene que el peso total por piso es de 185 ton, el - cual es igual para todos los pisos, como se muestra en la -- fig 4.3 . A partir de los pesos y de acuerdo con el artículo 240 se tiene que las fuerzas horizontales actuando en cada - nivel son iguales con

$$F_i = \frac{W_i h_i}{\Sigma W_i h_i}(c/Q)W$$

a partir de esta fórmula se calcularán las fuerzas que actúan en el sentido y-y; por lo que se tiene que el cortante en la base del edificio es

$$\frac{V}{W} = \frac{c}{Q}$$

$$V = \frac{(0.312)(1850)}{4.0}$$

$$V = 144.3 \text{ ton}$$

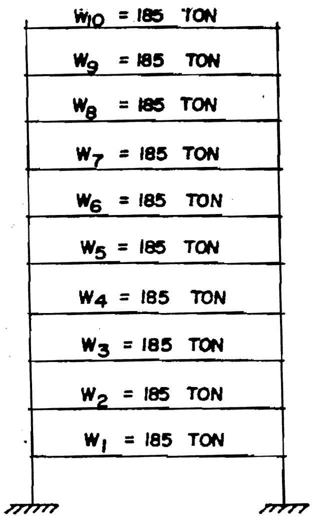


fig. 4 . 3 PESO DE CADA NIVEL

Las fuerzas horizontales actuantes en cada entrepiso -- son las que se muestran a continuación

$$F_{10} = 26.24 \text{ ton}$$

$$F_{9} = 23.61 \text{ ton}$$

$$F_{8} = 20.99 \text{ ton}$$

$$F_{7} = 18.36 \text{ ton}$$

$$F_{6} = 15.74 \text{ ton}$$

$$F_{5} = 13.11 \text{ ton}$$

$$F_{4} = 10.49 \text{ ton}$$

$$F_{3} = 7.87 \text{ ton}$$

$$F_{2} = 5.25 \text{ ton}$$

$$F_{1} = 2.62 \text{ ton}$$

b) Obtención de la línea de acción de la fuerza cortante sísmica en cada entrepiso.

En la tabla 4.1 se presentan las fuerzas sísmicas en cada nivel, el cortante en cada entrepiso y los centros de gravedad de cada piso. Los centros de gravedad indican el lugar geométrico en donde se encuentran aplicadas las fuerzas sísmicas del edificio.

nivel No.	F_{iy} (ton)	V_y (ton)	$\bar{X}$ (m)	$\bar{Y}$ (m)
10	26.24	26.24	10.38	0.0
9	23.61	49.85	10.38	0.0
8	20.99	70.84	10.38	0.0
7	18.36	89.20	10.38	0.0
6	15.74	104.94	10.38	0.0
5	13.11	118.05	10.38	0.0
4	10.49	128.54	10.38	0.0
3	7.87	136.41	10.38	0.0
2	5.25	141.66	10.38	0.0
1	2.62	144.28	10.38	0.0

tabla 4.1

4.1.1 Método aproximado.

Se resolverá la estructura utilizando el método aproximado, para lo cual primeramente se numeran los marcos y el muro, y se escoge un sistema de ejes de referencia, como se muestra en la fig 4.4

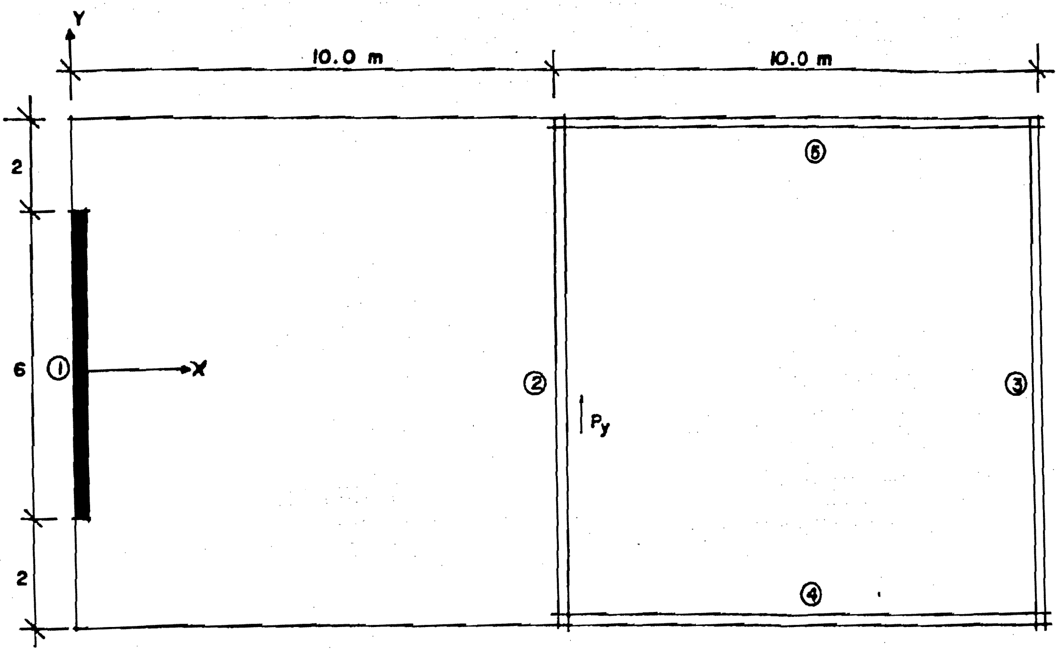


fig. 4 . 4

planta del edificio ejemplo 1

A partir de la fig 4.4 se obtendrán las coordenadas de los marcos, del muro y de la carga, que definirán la posi- ción de éstos con respecto al sistema de ejes coordenados.

muro 1 (0,1,0)

marco 2 (0,1,10)

marco 3 (0,1,20)

marco 4 (1,0,-5)

marco 5 (1,0,5)

carga Py (0,1,10.38)

Con base en las coordenadas obtenidas para cada elemento, se formarán las matrices de rigidez para los muros y marcos de la estructura, encontrando primeramente los elementos que las constituyen, para lo cual se aplican las ecs 3.14 a 3.16 de la siguiente manera :

Para el muro

$$Q\omega a\omega = -EI\omega(0u''' + 1v''' + 0\theta''')(0)=0$$

$$Q\omega b\omega = -EI\omega(0u''' + 1v''' + 0\theta''')(1)=-EI\omega(v''')=Jbb$$

$Q\omega c\omega = -EI\omega(0u''' + 1v''' + 0\theta''')(0) = 0$

por lo tanto la matriz de rigidez del muro queda constituída como se indica a continuación

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Jbb & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo $Jbb = EI\omega = 2 \times 10^6 (3.6) = 7.2 \times 10^6$ ton-m^2

Para los marcos

$$Q_f a_f = S_f(0u' + 1v' + 10\theta')(0) + S_f(0u' + 1v' + 20\theta')(0) + S_f(1u' + 0v' - 5\theta')(1) + S_f(1u' + 0v' + 5\theta')(1) = 2S_f u' = Saa$$

$$Q_f b_f = S_f(0u' + 1v' + 10\theta')(1) + S_f(0u' + 1v' + 20\theta')(1) + S_f(1u' + 0v' - 5\theta')(0) + S_f(1u' + 0v' + 5\theta')(0) = Sbb + Sbc = 2S_f v' + 30S_f\theta'$$

$$Q_f c_f = S_f(0u' + 1v' + 10\theta')(10) + S_f(0u' + 1v' + 20\theta')(20) + S_f(1u' + 0v' - 5\theta')(-5) + S_f(1u' + 0v' + 5\theta')(5) = 30S_f v' + 550S_f\theta' = Scb + Scc$$

por lo tanto la matriz de rigidez de los marcos queda formada como se indica a continuación

$$[S] = \begin{bmatrix} Saa & 0 & 0 \\ 0 & Sbb & Sbc \\ 0 & scb & Scc \end{bmatrix}$$

de donde :

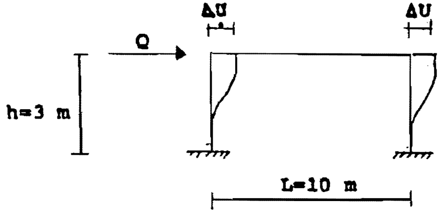
$$Saa = Sbb = 2S_f$$

$$Sbc = Scb = 30S_f$$

$$Scc = 550S_f$$

A continuación se obtendrá el valor S_f, mediante el criterio que se indicó en la sección 3.1, para lo cual se tiene que :

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = \frac{Q}{S_f}$$



El valor que se trata de obtener es el de Q, para lo -- cual se utiliza la ec 3.8 y se supone un desplazamiento Δ= 0.01 m, por lo tanto, se tiene que

$$\Delta = \frac{2}{3EI_c} \frac{Q}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{h}{L} \frac{Qh}{4L} \frac{L^3}{3EI_v} = 0.01$$

sustituyendo valores

$$0.01 = \frac{2}{3(2x10^6)(0.0108)} \frac{Q}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{10} \frac{Q(3)}{4(10)} \frac{10^3}{3(2x10^6)(0.0072)}$$

$$0.01 = 5.20833x10^{-5}Q + 5.20833x10^{-4}Q$$

$$0.01 = 5.729x10^{-4}Q$$

despejando Q, se tiene que :

$$Q = 17.45 \text{ ton}$$

sustituyendo el valor de Q en la ec 3.7 y despejando S_f :

$$\frac{0.01}{3.0} = \frac{17.46}{S_f}$$

$$S_f = 5235 \text{ ton}$$

ahora se sustituye el valor de S_f en la matriz $|S|'$, por lo - que se tiene que :

$$Saa = Sbb = 2(5235) = 10470 \text{ ton}$$

$$Sbc = Scb = 30(5235) = 157050 \text{ ton-m}$$

$$Scc = 550(5235) = 2879250 \text{ ton-m}^2$$

A partir de los valores obtenidos para la matriz J y S, se sustituyen estos en la ec 3.28, que es la ecuación de --- equilibrio del sistema, la cual queda :

$$-\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 7.2\text{x}10^6 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10470 & & \\ & 10470 & 157050 \\ & 157050 & 2879250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que el rango de las matrices J y S es el siguiente

rango de J, $r_j = 1$

rango de S, $r_s = 3$

A partir de los rangos de las matrices se obtiene el número total de raíces, el número de raíces nulas y de raíces no nulas, de acuerdo con las ecs 3.32 a 3.34.

núm. total de raíces = 3 + 2 = 5

núm de raíces nulas = 9 - 6 = 3

núm de raíces no nulas = 2(4) - 6 = 2

Ahora se comprobará que el sistema no sea degenerado, es decir, se verificará que el rango de la suma de las matrices J y S sea igual con 3, para lo cual se hace uso de la ec 3.44 y se supone un valor de $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2\text{x}10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 10470 & 0 & 0 \\ 0 & 10470 & 157050 \\ 0 & 157050 & 2879250 \end{bmatrix} = \text{rango } 3$$

Como se puede observar el rango es igual con 3, por lo tanto no hay degeneración en el sistema. El valor de las raíces se podrá obtener haciendo uso de la ec 3.31, como se indica a continuación :

$$-\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 7.2x10^{6} & \\ & & 0 \end{bmatrix} r_i^2 + \begin{bmatrix} 10470 & & \\ & 10470 & 157050 \\ & 157050 & 2879250 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 10470 & & \\ & -7.2x10^{6} r_i^2 + 10470 & 157050 \\ & 157050 & 2879250 \end{bmatrix} = 0$$

resolviendo el determinante

$$10470(-2.073x10^{13} r_i^2 + 3.015x10^{10} - 2.466x10^{10}) = 0$$

$$-2.17x10^{17} r_i^2 + 3.1567x10^{14} - 2.5824x10^{14} = 0$$

agrupando términos se tiene que

$$-2.17x10^{17} r_i^2 + 5.743x10^{13} = 0$$

despejando r_i^2 :

$$r_i^2 = 2.646x10^{-4}$$

de donde se obtiene :

$$r_i = \pm 0.01626$$

por lo tanto las cinco raíces son :

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = 0$$

$$r_3 = 0$$

$$r_4 = 0.01626$$

$$r_5 = -0.01626$$

De acuerdo con los valores obtenidos se procederá a la determinación de las constantes que se indican en las ecs -- 3.38 a 3.40 (se determinarán 15 constantes por piso). Es importante hacer notar que para este ejemplo el valor de P en la ec 3.50 irá variando con respecto a cada piso, ya que P - es la suma de las fuerzas cortantes arriba del nivel considerado.

Las constantes se determinarán del nivel superior al nivel inferior, por lo tanto, se principia con la determinación de las 15 constantes para el nivel 10, en donde P=26.24 ton . Haciendo uso de la ec 3.51 se obtiene

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.551\times10^{-5} & & \\ & 5.253\times10^{-4} & -2.865\times10^{-5} \\ & -2.865\times10^{-5} & 1.91\times10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10.38 \end{bmatrix} (26.24) =$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.98\times10^{-3} \\ -2.315\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

Se procederá ahora a obtener el valor de A_3, B_3 y C_3, mediante la ec 3.52, como se muestra a continuación :

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.551\times10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 5.253\times10^{-4} & -2.865\times10^{-5} \\ 0 & -2.865\times10^{-5} & 1.91\times10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10.38 \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ec 3.57 se llega a :

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2\times10^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (0.01626)^2 + \begin{bmatrix} 10470 & 0 & 0 \\ 0 & 10470 & 157050 \\ 0 & 157050 & 2879250 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10470 & 0 & 0 \\ 0 & 8.56\times10^{3} & 157050 \\ 0 & 157050 & 2879250 \end{bmatrix}$$

y utilizando la ec 3.58 se tiene que :

$$\begin{bmatrix} 10470 & 0 & 0 \\ 0 & 8.56x10^3 & 157050 \\ 0 & 157050 & 2879250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde si se elimina la última ecuación queda el siguiente sistema :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10470 & 0 & 0 \\ 0 & 8.56x10^3 & 157050 \end{array}\right] \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ \hline C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de aquí se tiene que

$$\left[S_{AB}\right]_i = \begin{bmatrix} 10470 & 0 \\ 0 & 8.56x10^3 \end{bmatrix} \quad y \quad \left[S_{ci}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 157050 \end{bmatrix}$$

además

$$A_i = \beta_i C_i$$

$$B_i = \gamma_i C_i$$

por lo tanto de la ec 3.62 se obtiene

$$\begin{bmatrix}\beta_i\\ \gamma_i\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}9.551\times10^{-5} & 0\\ 0 & 1.168\times10^{-4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 157050\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ 18.34\end{bmatrix}$$

para i=4

$\beta_4 = 0$

$\gamma_4 = -18.34$

$A_4 = 0$

$B_4 = -18.34C_4$

para i=5

$\beta_5 = 0$

$\gamma_5 = -18.34$

$A_5 = 0$

$B_5 = -18.34C_5$

de la ec 3.67

$$(-18.34C_4)(0.01626) + (-18.34C_5)(-0.01626) = -5.98\times10^{-3} \quad (1)$$

de la ec 3.68

$$(-18.34C_4)(0.00028) + (-18.34C_5)(0.000252) = 0 \quad (2)$$

despejando C_4 de (1)

$$C_4 = 2.0\times10^{-2} + C_5$$

y sustituyendo en (2)

$$-0.005135(2.0\times10^{-2} + C_5) - 0.004622C_5 = 0$$

de donde se obtiene

$$C_5 = -1.0518\times10^{-2}$$
$$C_4 = 9.542\times10^{-3}$$
$$B_4 = -0.1749$$
$$B_5 = 0.1928$$

sustituyendo estos cuatro últimos valores en la ec 3.66

$$B_1 = -1.79\times10^{-2}$$
$$C_1 = 9.76\times10^{-4}$$

Por lo tanto las 15 constantes para el nivel 10 son :

$A_1=0$	$B_1=-1.79\times10^{-2}$	$C_1= 9.76\times10^{-4}$
$A_2=0$	$B_2= 5.98\times10^{-2}$	$C_2=-2.315\times10^{-4}$
$A_3=0$	$B_3= 0$	$C_3= 0$
$A_4=0$	$B_4=-0.1749$	$C_4= 9.542\times10^{-3}$
$A_5=0$	$B_5= 0.1928$	$C_5=-1.0518\times10^{-2}$

De manera similar se obtienen las constantes para cada uno de los pisos, en donde lo único que varía es el valor de la fuerza actuante P. A continuación se presentan a manera de resumen los valores de las constantes para cada uno de los pisos :

<u>nivel 9, P= 49.85 ton</u>

$A_1 = 0$	$B_1 = -3.399 \times 10^{-2}$	$C_1 = 1.853 \times 10^{-3}$
$A_2 = 0$	$B_2 = 1.135 \times 10^{-2}$	$C_2 = -4.396 \times 10^{-4}$
$A_3 = 0$	$B_3 = 0$	$C_3 = 0$
$A_4 = 0$	$B_4 = -0.3321$	$C_4 = 1.812 \times 10^{-2}$
$A_5 = 0$	$B_5 = 0.3661$	$C_5 = -1.997 \times 10^{-2}$

<u>nivel 8, P= 70.84 ton</u>

$A_1 = 0$	$B_1 = -4.829 \times 10^{-2}$	$C_1 = 2.633 \times 10^{-3}$
$A_2 = 0$	$B_2 = 1.612 \times 10^{-2}$	$C_2 = -6.246 \times 10^{-4}$
$A_3 = 0$	$B_3 = 0$	$C_3 = 0$
$A_4 = 0$	$B_4 = -0.4719$	$C_4 = 2.574 \times 10^{-2}$
$A_5 = 0$	$B_5 = 0.5202$	$C_5 = -2.837 \times 10^{-2}$

<u>nivel 7, P= 89.20 ton</u>

$A_1 = 0$	$B_1 = -6.079 \times 10^{-2}$	$C_1 = 3.314 \times 10^{-3}$
$A_2 = 0$	$B_2 = 2.029 \times 10^{-2}$	$C_2 = -7.863 \times 10^{-4}$

$A_3= 0$	$B_3= 0$	$C_3= 0$
$A_4= 0$	$B_4=-0.5941$	$C_4= 3.24x10^{-2}$
$A_5= 0$	$B_5= 0.6549$	$C_5=-3.571x10^{-2}$

<u>nivel 6, P= 104.94 ton</u>

$A_1= 0$	$B_1=-7.148x10^{-2}$	$C_1= 3.897x10^{-3}$
$A_2= 0$	$B_2= 2.386x10^{-2}$	$C_2=-9.247x10^{-4}$
$A_3= 0$	$B_3= 0$	$C_3= 0$
$A_4= 0$	$B_4=-0.6986$	$C_4= 3.81x10^{-2}$
$A_5= 0$	$B_5= 0.7701$	$C_5=-4.199x10^{-2}$

<u>nivel 5, P= 118.05 ton</u>

$A_1= 0$	$B_1=-8.04x10^{-2}$	$C_1= 4.383x10^{-3}$
$A_2= 0$	$B_2= 2.684x10^{-2}$	$C_2=-1.040x10^{-4}$
$A_3= 0$	$B_3= 0$	$C_3= 0$
$A_4= 0$	$B_4=-0.7858$	$C_4= 4.20x10^{-2}$
$A_5= 0$	$B_5= 0.8662$	$C_5=-4.723x10^{-2}$

<u>nivel 4, P= 128.54 ton</u>

$A_1= 0$	$B_1=-8.747x10^{-2}$	$C_1= 4.768x10^{-3}$
$A_2= 0$	$B_2= 2.92x10^{-2}$	$C_2=-1.131x10^{-3}$
$A_3= 0$	$B_3= 0$	$C_3= 0$
$A_4= 0$	$B_4=-0.8549$	$C_4= 4.662x10^{-2}$
$A_5= 0$	$B_5= 0.9424$	$C_5=-5.138x10^{-2}$

los desplazamientos y la rotación para cada uno de los pisos de la estructura, los cuales se determinan con las ecs 3.38 a 3.40 y en donde la altura z variará de 0 a 3 m , las cuales se sustituyen en las ecs 3.11 a 3.13, para determinar dichos desplazamientos.

En las tablas 4.2 a 4.7 se presentan los desplazamientos para cada uno de los pisos, y en las tablas 4.8 a 4.13 se presentan los desplazamientos finales, los cuales se calcularon con la suma de los desplazamientos relativos del nivel 0 al nivel 10.

Las fuerzas cortantes se determinan con las ecs 3.70 y 3.72, para muros y marcos respectivamente. En las tablas 4.14 a 4.18 se presentan los cortantes para cada una de los pisos y en las tablas 4.19 a 4.22 se presentan los cortantes finales para cada uno de los entrepisos, los cuales se obtienen con el promedio de los cortantes obtenidos en las tablas 4.14 a 4.18

En las tablas 4.23 a 4.27 se presentan los momentos flexionantes de los muros y marcos, los cuales se obtuvierón con las ecs 3.69 y 3.74 respectivamente. En las tablas 4.28

a 4.31 se presentan los momentos flexionantes finales, para cada nivel.

Desplazamientos de la estructura.

muro 1

entropiso	Z (m)	U relativo (m)
10	3	0.0025
	0	0.0
9	3	0.0070
	0	0.0
8	3	0.0024
	0	0.0
7	3	0.0045
	0	0.0
6	3	0.0094
	0	0.0
5	3	0.0060
	0	0.0
4	3	0.0056
	0	0.0
3	3	0.0064
	0	0.0
2	3	0.0036
	0	0.0
1	3	0.0017
	0	0.0

tabla 4.2

marco 2

entrepiso	Z (m)	U relativo (m)
10	3	0.0029
	0	0.0
9	3	0.0054
	0	0.0
8	3	0.0077
	0	0.0
7	3	0.0096
	0	0.0
6	3	0.0114
	0	0.0
5	3	0.0127
	0	0.0
4	3	0.0139
	0	0.0
3	3	0.0138
	0	0.0
2	3	0.0143
	0	0.0
1	3	0.0146
	0	0.0

tabla 4.3

marco 3

entrepiso	Z (m)	U relativo (m)
10	3	0.0057
	0	0.0
9	3	0.0108
	0	0.0
8	3	0.0153
	0	0.0
7	3	0.0193
	0	0.0
6	3	0.0227
	0	0.0
5	3	0.0254
	0	0.0
4	3	0.0279
	0	0.0
3	3	0.0286
	0	0.0
2	3	0.0296
	0	0.0
1	3	0.0302
	0	0.0

tabla 4.4

marco 4

entrepiso	Z (m)	U relativo (m)
10	3	0.0014
	0	0.0
9	3	0.0027
	0	0.0
8	3	0.0038
	0	0.0
7	3	0.0048
	0	0.0
6	3	0.0057
	0	0.0
5	3	0.0064
	0	0.0
4	3	0.0069
	0	0.0
3	3	0.0074
	0	0.0
2	3	0.0076
	0	0.0
1	3	0.0078
	0	0.0

tabla 4.5

marco 5

entrepiso	Z (m)	U relativo (m)
10	3	-0.0014
	0	0.0
9	3	-0.0027
	0	0.0
8	3	-0.0038
	0	0.0
7	3	-0.0048
	0	0.0
6	3	-0.0057
	0	0.0
5	3	-0.0064
	0	0.0
4	3	-0.0069
	0	0.0
3	3	-0.0074
	0	0.0
2	3	-0.0076
	0	0.0
1	3	-0.0078
	0	0.0

tabla 4.6

piso

entrepiso	Z (m)	θ relativo (rad)
10	3	0.000283
	0	0.0
9	3	0.000540
	0	0.0
8	3	0.000766
	0	0.0
7	3	0.000965
	0	0.0
6	3	0.001136
	0	0.0
5	3	0.001273
	0	0.0
4	3	0.001391
	0	0.0
3	3	0.001478
	0	0.0
2	3	0.001527
	0	0.0
1	3	0.001559
	0	0.0

tabla 4.7

Desplazamientos y rotaciones finales.

muro 1

nivel	U total (m)
10	0.0492
9	0.0467
8	0.0397
7	0.0373
6	0.0328
5	0.0234
4	0.0174
3	0.0117
2	0.0053
1	0.0017
0	0.0

tabla 4.8

marco 2

nivel	U total (m)
10	0.1063
9	0.1034
8	0.0980
7	0.0903
6	0.0807
5	0.0693
4	0.0566
3	0.0426
2	0.0288
1	0.0145
0	0.0

tabla 4.9

marco 3

nivel	U total (m)
10	0.2155
9	0.2098
8	0.1990
7	0.1836
6	0.1643
5	0.1416
4	0.1161
3	0.0883
2	0.0597
1	0.0301
0	0.0

tabla 4.10

marco 4

nivel	U total (m)
10	0.0545
9	0.0531
8	0.0504
7	0.0465
6	0.0417
5	0.0360
4	0.0297
3	0.0227
2	0.0153
1	0.0077
0	0.0

tabla 4.11

marco 5

nivel	U total (m)
10	-0.0545
9	-0.0531
8	-0.0504
7	-0.0465
6	-0.0417
5	-0.0360
4	-0.0297
3	-0.0227
2	-0.0153
1	-0.0077
0	0.0

tabla 4.12

piso

nivel	θ total (rad)
10	0.01092
9	0.01063
8	0.01009
7	0.00933
6	0.00836
5	0.00723
4	0.00595
3	0.00456
2	0.00308
1	0.00155
0	0.0

tabla 4.13

muro 1

entrepiso	Z (m)	Q (ton)
10	3	11.36
	0	11.38
9	3	21.57
	0	21.60
8	3	30.66
	0	30.70
7	3	38.58
	0	38.62
6	3	45.37
	0	45.43
5	3	51.06
	0	51.12
4	3	55.56
	0	55.62
3	3	58.89
	0	58.96
2	3	61.15
	0	61.22
1	3	62.24
	0	62.31

tabla 4.14

marco 2

entrepiso	Z (m)	Q (ton)
10	3	5.00
	0	4.98
9	3	9.43
	0	9.40
8	3	13.34
	0	12.83
7	3	16.81
	0	16.76
6	3	19.78
	0	19.76
5	3	22.25
	0	22.23
4	3	24.18
	0	24.20
3	3	25.81
	0	25.73
2	3	26.81
	0	26.72
1	3	27.25
	0	27.22

tabla 4.15

marco 3

entrepiso	Z (m)	Q (ton)
10	3	9.93
	0	9.93
9	3	18.80
	0	18.80
8	3	26.64
	0	26.65
7	3	33.55
	0	33.56
6	3	39.46
	0	39.47
5	3	44.38
	0	44.40
4	3	48.29
	0	48.30
3	3	51.44
	0	51.46
2	3	53.42
	0	53.44
1	3	54.35
	0	54.38

tabla 4.16

marco 4

entrepiso	Z (m)	Q (ton)
10	3	2.46
	0	2.47
9	3	4.68
	0	4.70
8	3	6.65
	0	6.67
7	3	8.37
	0	8.40
6	3	9.84
	0	9.88
5	3	11.06
	0	11.11
4	3	12.05
	0	12.10
3	3	12.81
	0	12.86
2	3	13.30
	0	13.36
1	3	13.55
	0	13.60

tabla 4.17

marco 5

entrepiso	Z (m)	Q (ton)
10	3	- 2.46
	0	- 2.47
9	3	- 4.68
	0	- 4.70
8	3	- 6.65
	0	- 6.67
7	3	- 8.37
	0	- 8.40
6	3	- 9.84
	0	- 9.88
5	3	-11.06
	0	-11.11
4	3	-12.05
	0	-12.10
3	3	-12.81
	0	-12.86
2	3	-13.30
	0	-13.36
1	3	-13.55
	0	-13.60

tabla 4.18

Fuerzas cortantes finales.

muro 1

entrepiso	Q (ton)
10	11.37
9	21.58
8	30.68
7	38.60
6	45.40
5	51.09
4	55.59
3	58.93
2	61.19
1	62.28

tabla 4.19

marco 2

entrepiso	Q (ton)
10	5.00
9	9.42
8	13.09
7	16.79
6	19.77
5	22.24
4	24.19
3	25.77
2	26.77
1	27.24

tabla 4.20

marco 3

entrepiso	Q (ton)
10	9.93
9	18.80
8	26.65
7	33.56
6	39.47
5	44.39
4	48.30
3	51.45
2	53.43
1	54.37

tabla 4,21

marco 4 y 5

entrepiso	Q (ton)
10	± 2.47
9	± 4.69
8	± 6.66
7	± 8.39
6	± 9.86
5	±11.09
4	±12.08
3	±12.84
2	±13.33
1	±13.58

tabla 4.22

Momentos flexionantes.

muro 1

entrepiso	Z (m)	M (ton-m)
10	3	-0.058
	0	34.056
9	3	-0.051
	0	64.728
8	3	0.14
	0	92.16
7	3	0.075
	0	115.92
6	3	-0.18
	0	136.08
5	3	0.10
	0	153.36
4	3	-0.41
	0	166.32
3	3	-1.05
	0	175.68
2	3	-2.03
	0	181.44
1	3	-1.76
	0	185.04

tabla 4.23

marco 2

entrepiso	Z (m)	M (ton-m)
10	3	0.00
	0	14.92
9	3	0.00
	0	28.47
8	3	0.00
	0	40.31
7	3	0.00
	0	50.78
6	3	0.00
	0	59.52
5	3	0.00
	0	66.73
4	3	0.00
	0	73.02
3	3	0.00
	0	73.29
2	3	0.00
	0	74.86
1	3	0.00
	0	74.86

tabla 4.24

marco 3

entrepiso	Z (m)	M (ton-m)
10	3	0.00
	0	29.83
9	3	0.00
	0	56.54
8	3	0.00
	0	80.26
7	3	0.00
	0	100.98
6	3	0.00
	0	119.04
5	3	0.00
	0	133.34
4	3	0.00
	0	148.13
3	3	0.00
	0	149.77
2	3	0.00
	0	154.75
1	3	0.00
	0	157.84

tabla 4.25

marco 4

entrepiso	Z (m)	M (ton-m)
10	3	0.00
	0	7.33
9	3	0.00
	0	14.14
8	3	0.00
	0	20.42
7	3	0.00
	0	25.13
6	3	0.00
	0	29.84
5	3	0.00
	0	32.98
4	3	0.00
	0	36.65
3	3	0.00
	0	38.74
2	3	0.00
	0	39.79
1	3	0.00
	0	40.31

tabla 4.26

marco 5

entrepiso	Z (m)	M (ton-m)
10	3	0.00
	0	- 7.33
9	3	0.00
	0	-14.14
8	3	0.00
	0	-20.42
7	3	0.00
	0	-25.13
6	3	0.00
	0	-29.84
5	3	0.00
	0	-32.98
4	3	0.00
	0	-36.65
3	3	0.00
	0	-38.74
2	3	0.00
	0	-39.79
1	3	0.00
	0	-40.31

tabla 4.27

Momentos flexionantes finales.

muro 1

nivel	M (ton-m)
10	-0.058
9	33.947
8	98.815
7	191.05
6	306.79
5	442.97
4	595.92
3	761.19
2	934.84
1	1114.52
0	1299.56

tabla 4.28

marco 2

nivel	M (ton-m)
10	0.00
9	14.92
8	28.46
7	40.20
6	50.52
5	59.52
4	66.70
3	72.90
2	72.40
1	74.76
0	76.22

tabla 4.29

marco 3

nivel	M (ton-m)
10	0.00
9	29.83
8	56.54
7	80.26
6	100.98
5	119.04
4	133.34
3	148.13
2	149.77
1	154.75
0	157.84

tabla 4.30

marco 4 y 5

nivel	M (ton-m)
10	± 0.00
9	± 7.33
8	±14.14
7	±20.42
6	±25.13
5	±29.84
4	±32.98
3	±36.65
2	±38.74
1	±39.79
0	±40.31

tabla 4.31

4.1.2 Método exacto.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante los programas de calculadora, de los que ya se hizo mención en la sección 2.5 (Refs. 24 y 25).

De la tabla 4.32 a la 4.37 se presentan los desplazamientos del muro y de cada marco, así como la rotación de la estructura.

Las fuerzas cortantes son presentadas de la tabla 4.38 a la 4.41. Los momentos flexionantes de la tabla 4.42 a la 4.46 En una columna se presentan los resultados obtenidos en el programa TABS (Ref. 24) y en otra los resultados del ETABS (Ref. 25).

Desplazamientos

muro 1

nivel	U (m)
10	0.0429
9	0.0372
8	0.0315
7	0.0259
6	0.0204
5	0.0152
4	0.0105
3	0.0064
2	0.0031
1	0.0009
0	0.0

tabla 4.32

marco 2

nivel	U (m)
10	0.0992
9	0.0932
8	0.0857
7	0.0766
6	0.0661
5	0.0544
4	0.0419
3	0.0290
2	0.0165
1	0.0057
0	0.0

tabla 4.33

marco 3

nivel	U (m)
10	0.1554
9	0.1491
8	0.1398
7	0.1273
6	0.1117
5	0.0936
4	0.0733
3	0.0517
2	0.0299
1	0.0106
0	0.0

tabla 4.34

marco 4

nivel	U (m)
10	0.0281
9	0.0279
8	0.0270
7	0.0253
6	0.0228
5	0.0196
4	0.0157
3	0.0113
2	0.0067
1	0.0024
0	0.0

tabla 4.35

marco 5

nivel	U (m)
10	-0.0281
9	-0.0279
8	-0.0270
7	-0.0253
6	-0.0228
5	-0.0196
4	-0.0157
3	-0.0113
2	-0.0067
1	-0.0024
0	0.0

tabla 4.36

piso

nivel	θ (rad)
10	0.0074
9	0.0072
8	0.0068
7	0.0063
6	0.0056
5	0.0047
4	0.0037
3	0.0026
2	0.0015
1	0.0005
0	0.0

tabla 4.37

marco 3

entrepiso	TABS Q (ton)	ETABS Q (ton)
10	8.37	8.77
9	17.88	18.09
8	25.66	25.94
7	32.65	32.89
6	38.64	38.87
5	43.67	43.87
4	47.75	47.91
3	50.86	50.99
2	53.13	53.14
1	54.14	54.16

tabla 4.40

marco 4 y 5

entrepiso	TABS Q (ton)	ETABS Q (ton)
10	± 1.94	± 0.96
9	± 1.81	± 2.54
8	± 3.38	± 4.27
7	± 5.26	± 6.11
6	± 6.84	± 7.69
5	± 8.31	± 9.12
4	± 9.61	±10.36
3	±10.80	±11.43
2	±11.74	±12.44
1	±12.87	±12.76

tabla 4.41

Momentos flexionantes

muro 1

nivel	TABS M (ton-m)	ETABS M (ton-m)
10	0.00	-0.053
9	16.31	28.38
8	69.69	76.56
7	148.72	159.08
6	252.28	265.94
5	376.76	393.70
4	519.23	539.26
3	676.66	699.51
2	846.10	871.29
1	1024.56	1051.97
0	1209.16	1236.37

tabla 4.42

marco 2

nivel	TABS M (ton-m)	ETABS M (ton-m)
10	0.00	0.00
9	29.83	31.96
8	34.02	39.02
7	45.22	52.14
6	52.86	62.04
5	59.55	70.48
4	64.54	77.00
3	67.95	81.68
2	67.75	84.54
1	69.70	84.96
0	68.65	90.02

tabla 4.43

marco 3

nivel	TABS M (ton-m)	ETABS M (ton-m)
10	0.00	0.00
9	20.10	29.76
8	42.91	56.78
7	61.58	80.35
6	78.37	101.04
5	92.73	119.11
4	104.81	133.41
3	114.60	145.87
2	122.08	149.86
1	127.52	154.84
0	129.95	157.92

tabla 4.44

marco 4

nivel	TABS M (ton-m)	ETABS M (ton-m)
10	0.00	0.00
9	-4.84	-2.80
8	4.52	7.62
7	8.45	12.80
6	13.14	18.30
5	17.11	23.04
4	20.76	27.26
3	24.02	30.98
2	26.99	34.16
1	29.32	37.20
0	32.19	38.24

tabla 4.45

marco 5

nivel	TABS M (ton-m)	ETABS M (ton-m)
10	0.00	0.00
9	4.84	2.80
8	- 4.52	- 7.62
7	- 8.45	-12.80
6	-13.14	-18.30
5	-17.11	-23.04
4	-20.76	-27.26
3	-24.02	-30.98
2	-26.99	-34.16
1	-29.32	-37.20
0	-32.19	-38.24

tabla 4.46

4.1.3 Comparación de resultados.

A continuación se presenta la comparación de los resultados obtenidos anteriormente. Esta comparación se hace gráficamente, ya que de esta manera es más facil observar las diferencias entre un método y otro.

Los desplazamientos son presentados de la figura 4.5 a la figura 4.9.

En las figuras 4.10 a 4.13 se muestran las fuerzas cortantes.

Los momentos flexionantes son mostrados de la figura 4.14 a la figura 4.17.

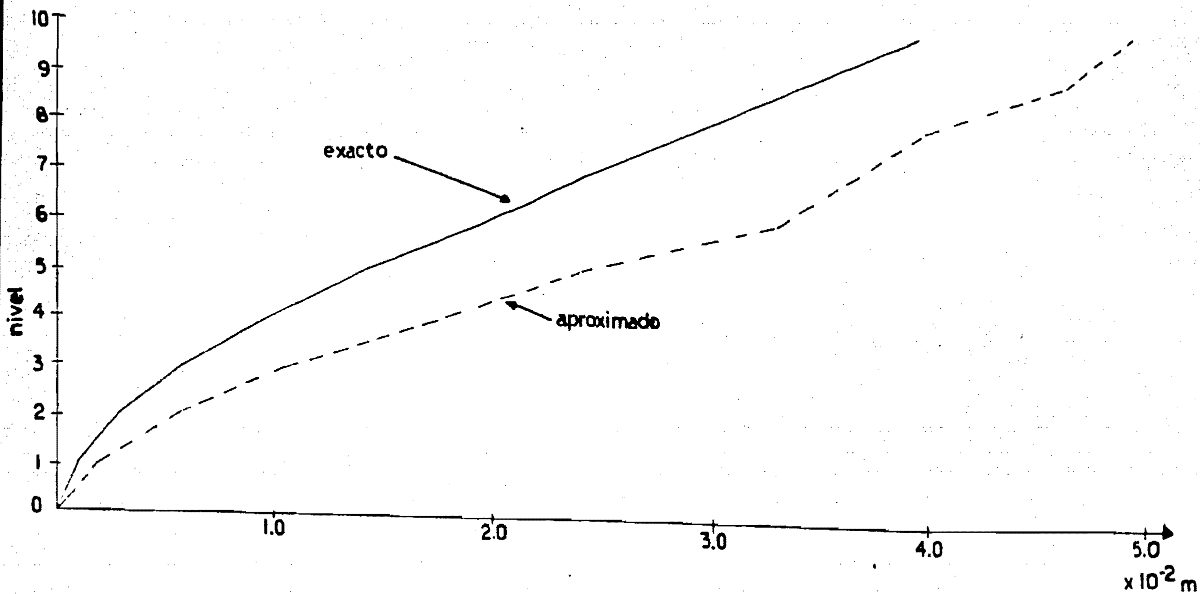


fig. 4.5 Desplazamientos muro I

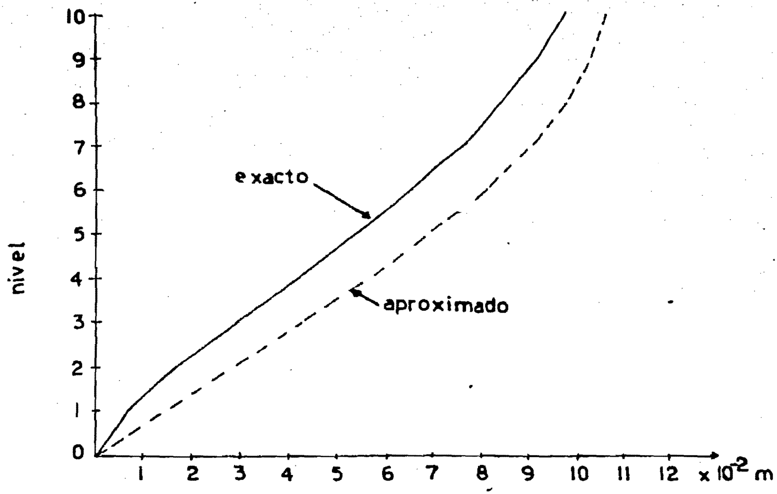


fig 4.6 Desplazamientos marco 2

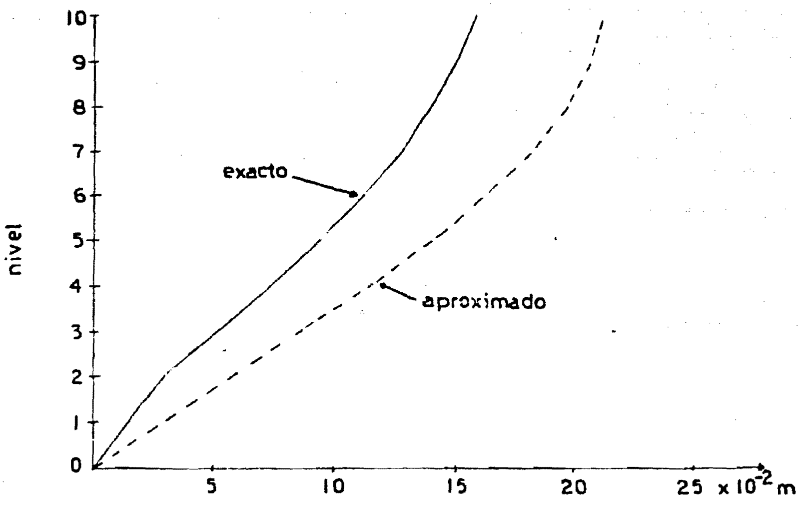


fig 4.7 Desplazamientos marco 3

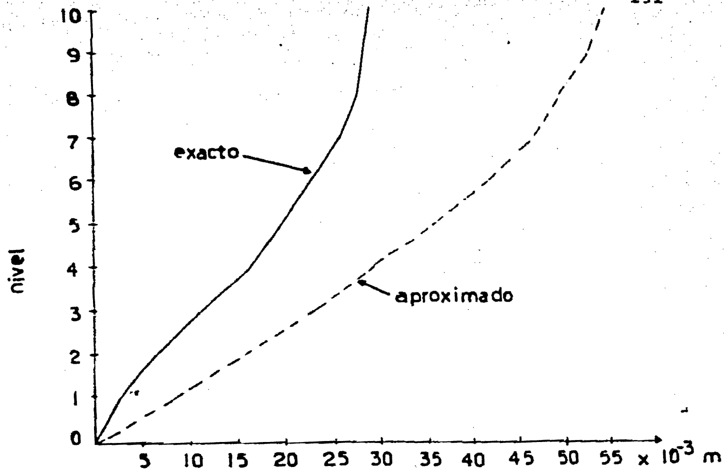


fig 4.8 Desplazamientos marco 4

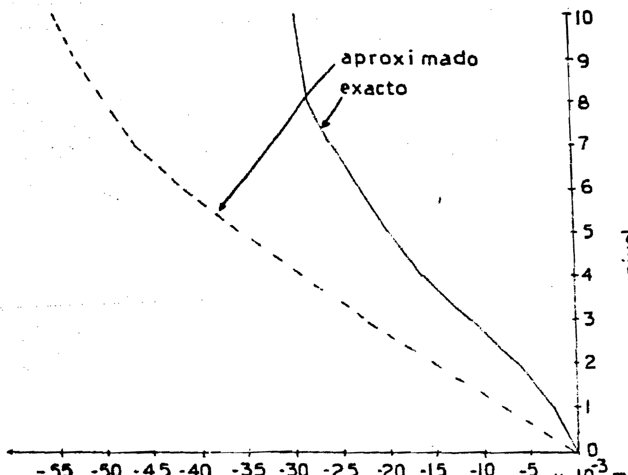


fig 4.9 Desplazamientos marco 5

CORTANTES

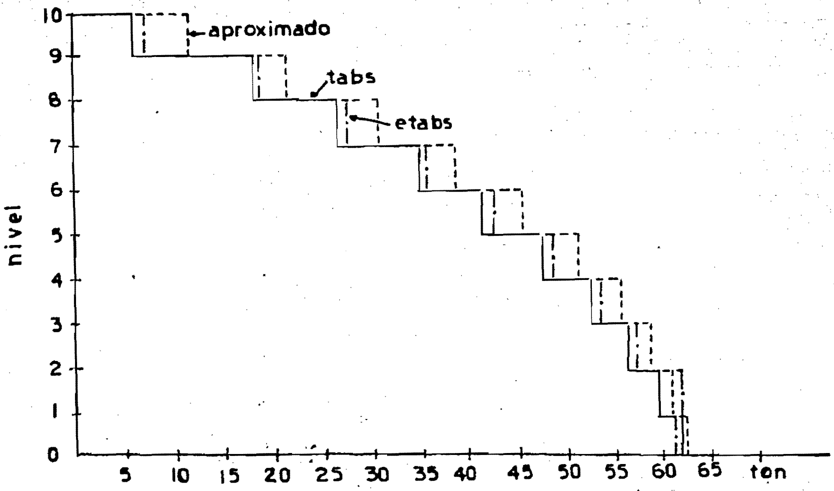


fig 4.10 muro 1

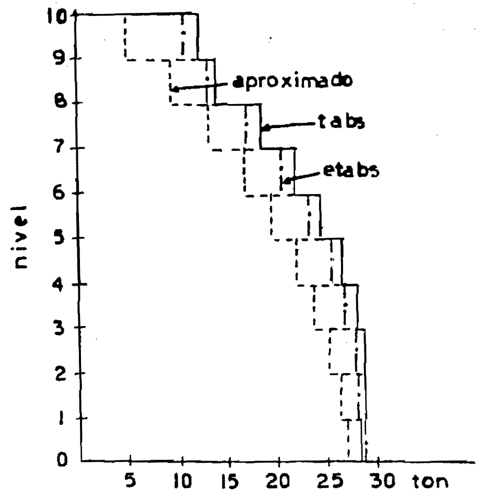


fig 4.11 marco 2

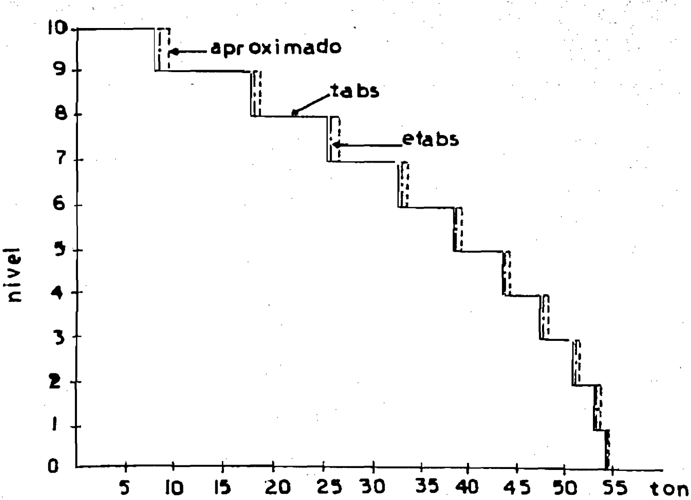
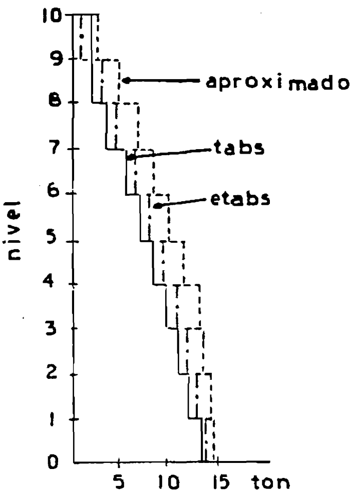


fig 4.12 marco 3



$a_4 = -a_5$

fig 4.13 marco 4

MOMENTOS FLEXIONANTES

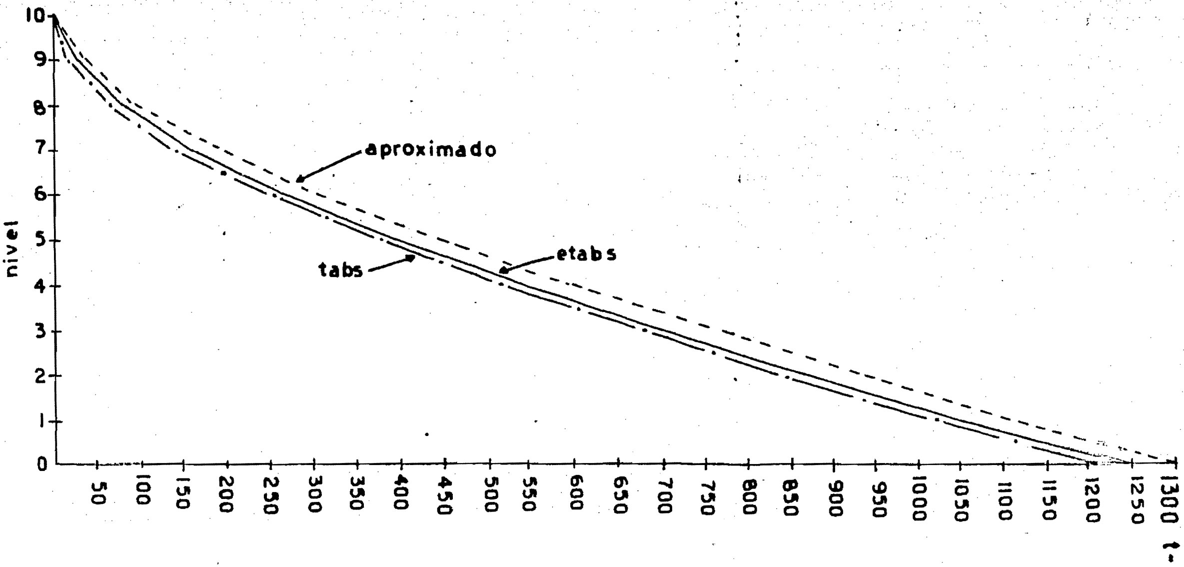


fig 4,13 muro I

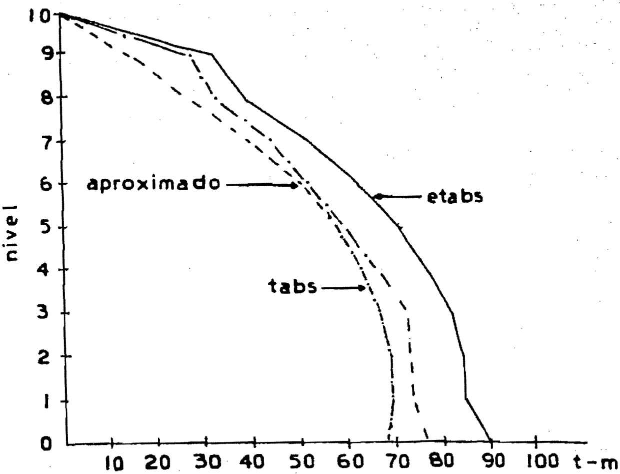


fig 4.14 marco 2

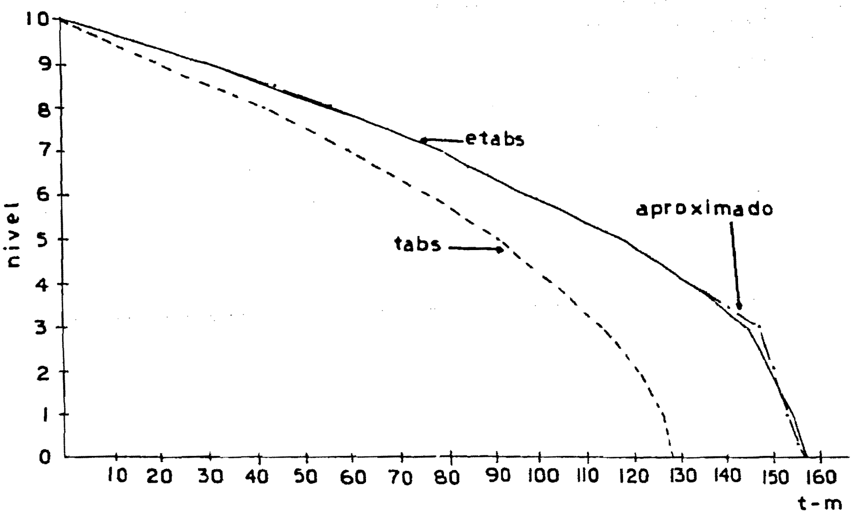


fig 4.15 marco 3

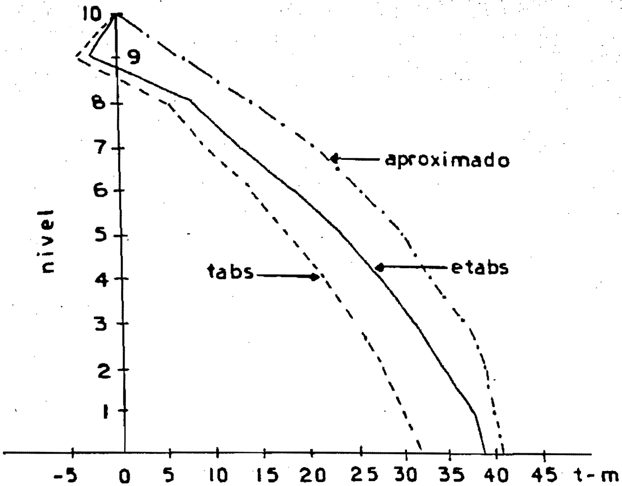


fig 4.16 marco 4

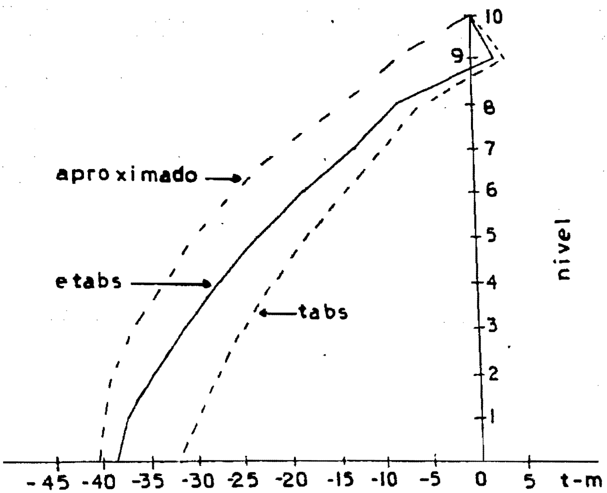


fig 4.17 marco 5

4.2 Ejemplo 2.

Este ejemplo consiste en hacer un análisis por viento - de la estructura que se muestra en la fig 4.18, que es un modelo de un edificio de 10 niveles. El modelo fue probado en el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de --- Southampton (ref 18).

A continuación se presentan las dimensiones y propiedades de los elementos que lo constituyen :

material = acrílico

peso volumétrico γ= 1.4 ton/m^3 = 0.05059 lb/pulg

relación de Poisson ν= 0.4

sección de las trabes = 1/4" x 5/4"

sección de las columnas = 3/4" x 3/4"

sección del muro = 1/4" x 4"

espesor de la losa = 3/16"

módulo de elasticidad E= 420 ksi

Como se mencionó anteriormente se analizará por viento, por lo que se aplica una carga horizontal uniformemente distribuida p= 0.2 lb/pulg (3.6 kg/m), la cual se encuentra actuando en el plano del marco 2, como se indica en la fig 4.19 .

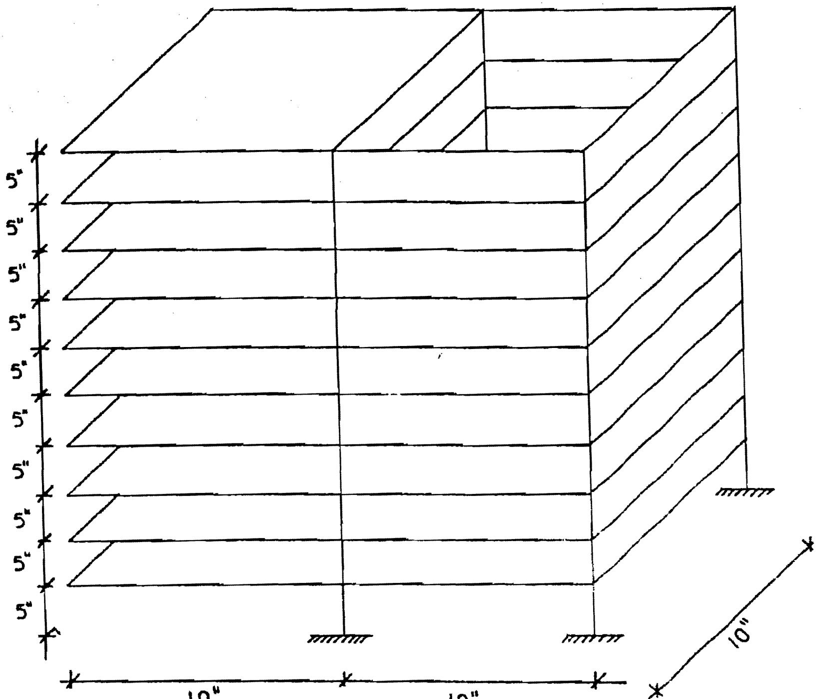


fig 4.18

4.2.1 Método aproximado.

Una vez determinadas las características se procederá a la solución del problema, como se indica a continuación :

1.- Numeración de muros y marcos, y localización de los ejes del sistema.

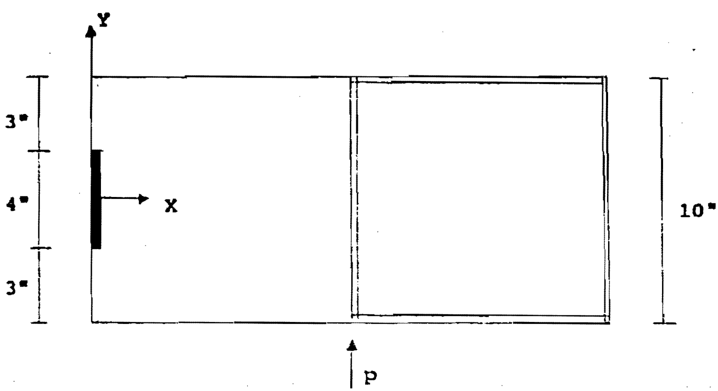


fig 4.19

2.- Obtención de las coordenadas de marcos, muro y carga.

muro 1	(0,1,0)
marco 2	(0,1,10)
marco 3	(0,1,20)
marco 4	(1,0,-5)
marco 5	(1,0, 5)
carga p	(0,1,10)

3.- Obtención de las matrices de rigidez para muros y marcos.

a) Determinación de los elementos para el muro :

$$[J]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & Jbb & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$Jbb= EI\omega= 420(1.33333)= 560$ kip-pulg^2

b) Determinación de los elementos para los marcos :

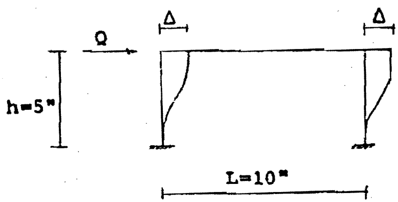
$$[S]=\begin{bmatrix}Saa & 0 & 0\\ 0 & Sbb & Sbc\\ 0 & Scb & Scc\end{bmatrix}$$

$Saa= Sbb= 2S_f$

$Sbc= Scb= 30S_f$

$Scc= 550S_f$

b.1) Calculo de S_f



se supone Δ=1 pulg .

$$\Delta = \frac{2}{3(420)(0.02636)}\,\frac{Q}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{5}{10}\,\frac{Q(5)}{4(10)}\,\frac{10^3}{3(420)(0.04069)}$$

$1= 0.47031Q + 1.21904Q = 1.68935Q$

$Q= 0.5919$ kips

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = \frac{Q}{S_f} \quad ; \quad \frac{1}{5} = \frac{0.5919}{S_f}$$

despejando S_f :

$$S_f = 2.96 \text{ kips}$$

sustituyendo el valor de S_f en la matriz S, se tiene :

$Saa = Sbb = 2S_f = 2(2.96) = 5.92$ kip

$Sbc = Scb = 30S_f = 30(2.96) = 88.8$ kip-pulg

$Scc = 550S_f = 550(2.96) = 1628$ kip-pulg^2

A partir de los valores obtenidos para las matrices J y S se sustituyen en la ecuación de equilibrio, quedando :

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 560 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.92 & 0 & 0 \\ 0 & 5.92 & 88.8 \\ 0 & 88.8 & 1628 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \partial' \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que el rango de las matrices J y S es el siguiente :

rango de J, $r_j = 1$

rango de S, $r_s = 3$

A partir de estos valores se obtiene :

total de raíces = 5

raíces nulas = 3

raíces no nulas = 2

Ahora se comprueba que el sistema no sea degenerado :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 560 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 5.92 & 0 & 0 \\ 0 & 5.92 & 88.8 \\ 0 & 88.8 & 1628 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5.92 & 0 & 0 \\ 0 & 565.92 & 88.8 \\ 0 & 88.8 & 1628 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es igual a 3, por lo tanto, no -- hay degeneración en el sistema

4.- Obtención de raíces.

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 560 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r_i^2 + \begin{bmatrix} 5.92 & 0 & 0 \\ 0 & 5.92 & 88.8 \\ 0 & 88.8 & 1628 \end{bmatrix} = 0$$

sumando las matrices :

$$\begin{bmatrix} 5.92 & 0 & 0 \\ 0 & -560r_i^2 + 5.92 & 88.8 \\ 0 & 88.8 & 1628 \end{bmatrix} = 0$$

resolviendo el determinante :

$$5.92(-911680r_i^2 + 9637.76 - 7885.44) = 0$$

$$-5397145.6r_i^2 + 57055.54 - 46681.8 = 0$$

$$-5397145.6r_i^2 + 10373.74 = 0$$

$$r_i^2 = 0.001922$$

$$r_i = \pm 0.04384$$

por lo tanto las cinco raíces son

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

$$r_4 = 0.04384$$

$$r_5 = -0.04384$$

5.- Obtención de constantes.

Aplicando el criterio descrito en la sección 3.4, - se tiene que las constantes son :

$A_1= 0$	$B_1=-103.6454\times10^{-3}$	$C_1= 5.6483\times10^{-3}$
$A_2= 0$	$B_2= 4.22294\times10^{-3}$	$C_2=-0.16889\times10^{-3}$
$A_3= 0$	$B_3=-0.042229\times10^{-3}$	$C_3= 0.001688\times10^{-3}$
$A_4= 0$	$B_4= 3.66\times10^{-3}$	$C_4=-0.1995\times10^{-3}$
$A_5= 0$	$B_5= 99.9854\times10^{-3}$	$C_5=-5.4488\times10^{-3}$

Una vez encontradas las constantes, se procede a - calcular las acciones internas de la estructura. Sustituyendo los valores de las constantes en las ecs 3.38 a 3.40, se tiene que

$$u=0$$

$$v=(-103.6454 + 4.22294z - 0.042229z^2 + 3.66e^{0.04384z} + 99.9854e^{-0.04384z})\times10^{-3}$$

$$\theta=(5.6483 - 0.16889z + 0.001688z^2 - 0.1995e^{0.04384z} - 5.4488e^{-0.04384z})\times10^{-3}$$

Desplazamientos de la estructura.

muro 1

altura Z (pul)	U total (pul)
50	0.046
45	0.041
40	0.036
35	0.031
30	0.026
25	0.020
20	0.014
15	0.009
10	0.004
5	0.001
0	0.0

Tabla 4.47

marco 2

altura Z (pul)	U total (pul)
50	0.036
45	0.034
40	0.031
35	0.028
30	0.025
25	0.021
20	0.016
15	0.012
10	0.007
5	0.004
0	0.0

Tabla 4.48

marco 3

altura Z (pul)	U total (pul)
50	0.027
45	0.027
40	0.026
35	0.025
30	0.024
25	0.021
20	0.018
15	0.015
10	0.011
5	0.006
0	0.0

Tabla 4.49

marco 4

altura Z (pul)	U total (pul)
50	0.0047
45	0.0035
40	0.0024
35	0.0014
30	0.0005
25	-0.0004
20	-0.0010
15	-0.0014
10	-0.0015
5	-0.0011
0	0.0

Tabla 4.50

marco 5

altura Z (pul)	U total (pul)
50	-0.0047
45	-0.0035
40	-0.0024
35	-0.0014
30	-0.0005
25	0.0004
20	0.0010
15	0.0014
10	0.0015
5	0.0011
0	0.0

Tabla 4.51

piso

altura Z (pul)	θ total (rad)
50	-0.00094
45	-0.00069
40	-0.00048
35	-0.00028
30	-0.00091
25	0.00007
20	0.00021
15	0.00029
10	0.00031
5	0.00022
0	0.0

Tabla 4.52

Fuerzas Cortantes.

muro 1

altura Z (pul)	Q total (lb)
50	-1.02
45	-0.59
40	-0.18
35	0.22
30	0.62
25	1.06
20	1.55
15	2.11
10	2.78
5	3.57
0	4.55

Tabla 4.53

marco 2

altura Z (pul)	Q total (lb)
50	1.27
45	1.48
40	1.72
35	1.98
30	2.22
25	2.42
20	2.56
15	2.61
10	2.53
5	2.28
0	1.81

Tabla 4.54

marco 3

altura Z (pul)	Q total (lb)
50	-0.26
45	0.10
40	0.45
35	0.80
30	1.15
25	1.51
20	1.88
15	2.27
10	2.69
5	3.13
0	3.63

Tabla 4.55

marco 4

altura Z (pul)	Q total (lb)
50	-0.74
45	-0.69
40	-0.64
35	-0.59
30	-0.53
25	-0.46
20	-0.34
15	-0.17
10	0.08
5	0.43
0	0.91

Tabla 4.56

Momentos Flexionantes.

muro 1

altura Z (pul)	M total (lb-pul)
50	0.016
45	-3.97
40	-5.87
35	-5.77
30	-3.67
25	0.54
20	7.05
15	16.19
10	28.38
5	44.23
0	64.50

Tabla 4.57

marco 2

altura Z (pul)	M total (lb-pul)
50	0.00
45	7.05
40	15.20
35	24.58
30	35.18
25	46.86
20	59.43
15	72.46
10	85.39
5	97.52
0	107.97

Tabla 4.58

marco 3

altura Z (pul)	M total (lb-pul)
50	0.00
45	-0.39
40	0.99
35	4.10
30	6.08
25	15.58
20	24.02
15	34.35
10	46.69
5	61.18
0	78.18

Tabla 4.59

marco 4

altura Z (pul)	M total (lb-pul)
50	0.00
45	3.66
40	7.01
35	10.12
30	12.98
25	15.53
20	17.61
15	18.98
10	19.31
5	18.15
0	14.70

Tabla 4.60

4.2.2 Método exacto.

A continuación se presentan los resultados obtenidos con el programa ETABS.

Desplazamiento de la Estructura.

Muro 1

altura Z (pul)	ETABS U (pul)
50	0.049
45	0.044
40	0.039
35	0.033
30	0.027
25	0.021
20	0.015
15	0.009
10	0.004
5	0.001
0	0.00

Tabla 4.61

Marco 2

altura Z (pul)	ETABS U (pul)
50	0.039
45	0.037
40	0.034
35	0.029
30	0.026
25	0.021
20	0.016
15	0.012
10	0.007
5	0.003
0	0.0

Tabla 4.62

Marco 3

altura Z (pul)	ETABS U (pul)
50	0.028
45	0.027
40	0.026
35	0.025
30	0.024
25	0.020
20	0.018
15	0.015
10	0.011
5	0.006
0	0.0

Tabla 4.63

Piso

altura z (pul)	ETABS θ (rad)
50	-0.00096
45	-0.00074
40	-0.00053
35	-0.00034
30	-0.00017
25	-0.00002
20	0.00009
15	0.00016
10	0.00017
5	0.00009
0	0.0

Tabla 4.64

Fuerzas Cortantes.

Muro 1

Entrepiso	ETABS Q (Lb)
10	- 0.95
9	- 0.24
8	0.11
7	0.51
6	0.92
5	1.37
4	1.87
3	2.46
2	3.15
1	3.96

Tabla 4.65

Marco 2

Entrepiso	ETABS Q (Lb)
10	1.56
9	1.42
8	1.74
7	1.99
6	2.23
5	2.42
4	2.53
3	2.55
2	2.43
1	2.18

Tabla 4.66

Marco 3

Entrepiso	ETABS Q (Lb)
10	-0.109
9	0.32
8	0.65
7	1.00
6	1.36
5	1.72
4	2.10
3	2.49
2	2.91
1	3.36

Tabla 4.67

Marco 4

Entrepiso	Etabs Q (Lb)
10	- 0.84
9	- 0.55
8	- 0.54
7	- 0.49
6	- 0.99
5	- 0.35
4	- 0.22
3	- 0.03
2	0.24
1	0.59

Tabla 4.68

Momentos Flexionantes.

Muro 1

altura Z (pul)	ETABS M (Lb-pul)
50	0.02
45	- 4.74
40	- 5.93
35	- 5.40
30	- 2.87
25	+ 1.71
20	+ 8.54
15	+17.91
10	+30.0
5	+45.76
0	+65.54

Tabla 4.69

Marco 2

altura Z (pul)	ETABS M (Lb-pul)
50	0.0
45	7.06
40	15.04
35	24.32
30	34.8
25	45.32
20	58.56
15	71.08
10	83.10
5	92.9
0	100.72

Tabla 4.70

Marco 3

altura Z (pul)	ETABS M (Lb-pul)
50	0.0
45	- 0.72
40	1.71
35	5.84
30	11.74
25	19.42
20	28.94
15	40.34
10	53.39
5	66.23
0	77.69

Tabla 4.71

Marco 4

altura Z (pul)	ETABS M (Lb-pul)
50	0.00
45	3.19
40	5.99
35	8.59
30	10.91
25	12.85
20	14.23
15	14.81
10	14.31
5	12.81
0	10.99

Tabla 4.72

4.2.3 Comparación de resultados.

A continuación se presenta la cmparación de resultados obtenidos con el método exacto y con el método aproximado.

En las figuras 4.20 a la 4.23 se presentan los desplazamientos, en la figura 4.24 se muestra la rotación de la estructura.

Las fuerzas cortantes son mostradas de la figura 4.25 a la 4.28.

Los momentos flexionantes se presentan de la figura -- 4.29 a la 4.32.

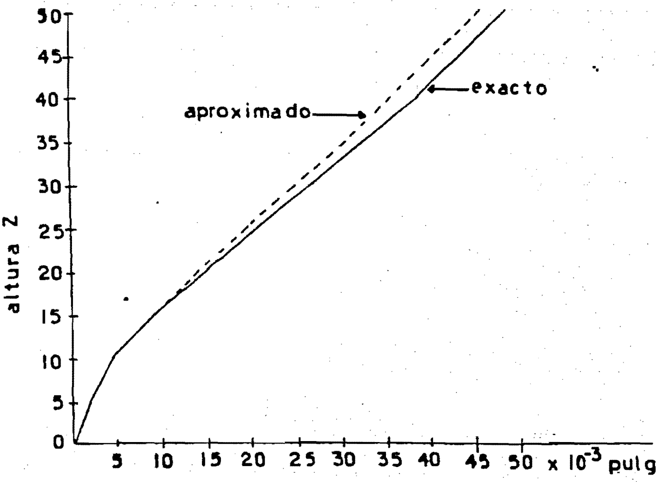


fig 4.20 muro 1

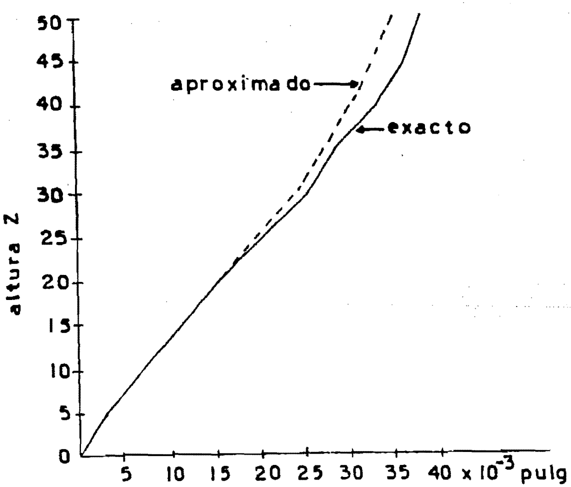


fig 4.21 marco 2

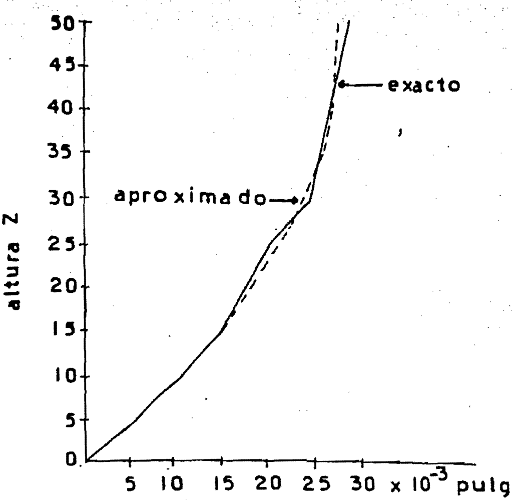


fig 4.22 marco 3

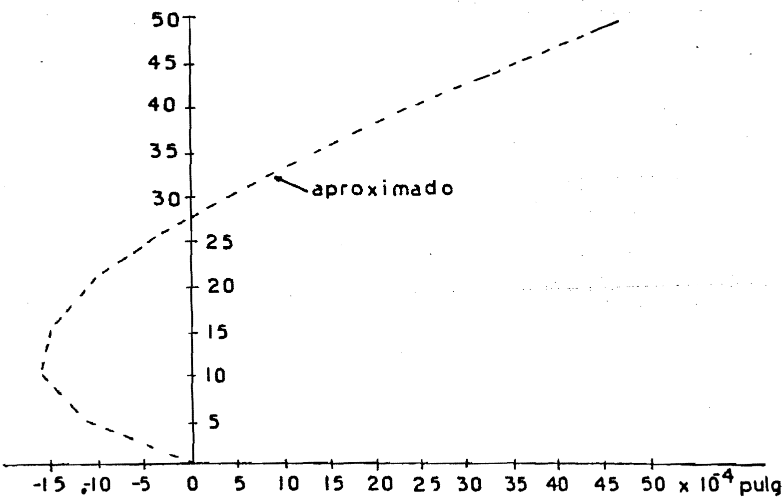


fig 4.23 marco 4

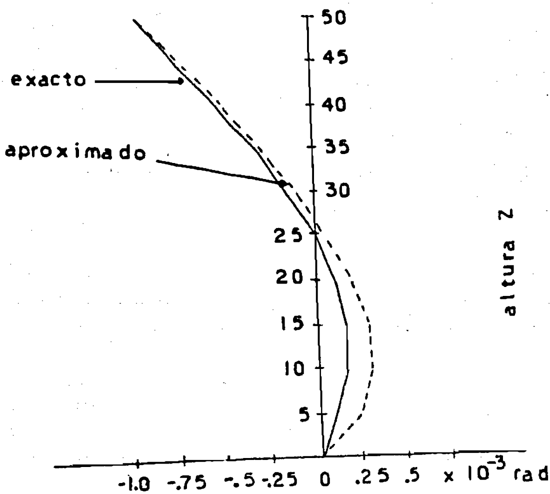


fig 4.24 rotación de la estructura

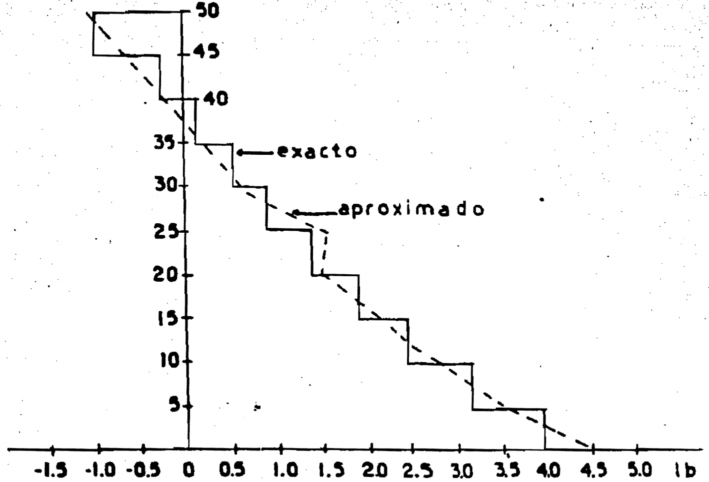


fig 4.25 muro 1

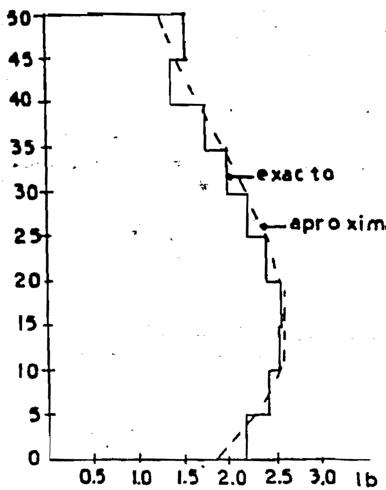


fig 4.26 marco 2

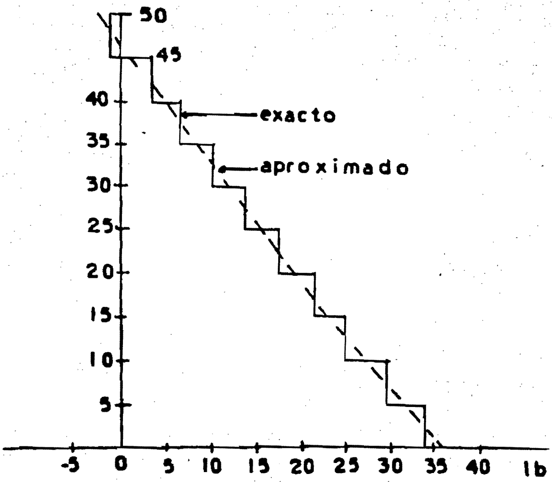


fig 4.27 marco 3

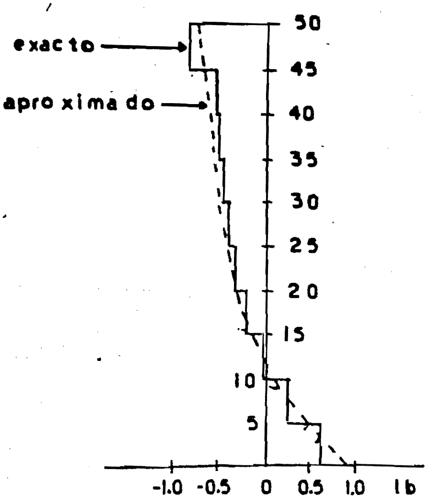


fig 4.28 marco 4

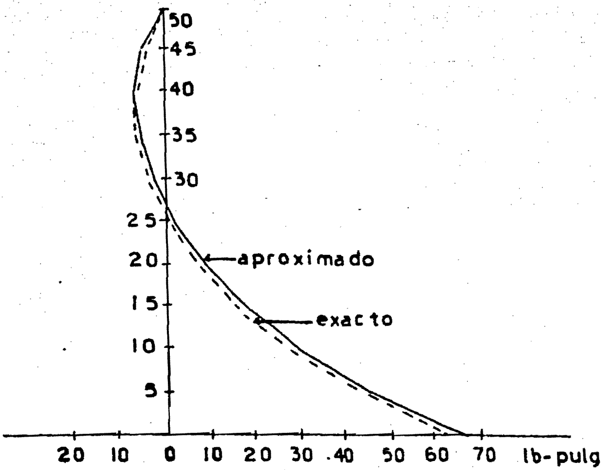


fig 4.29 muro I

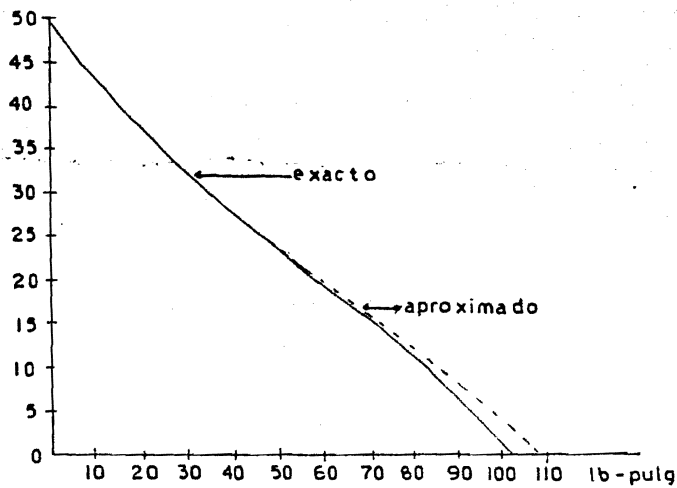


fig 4,30 marco 2

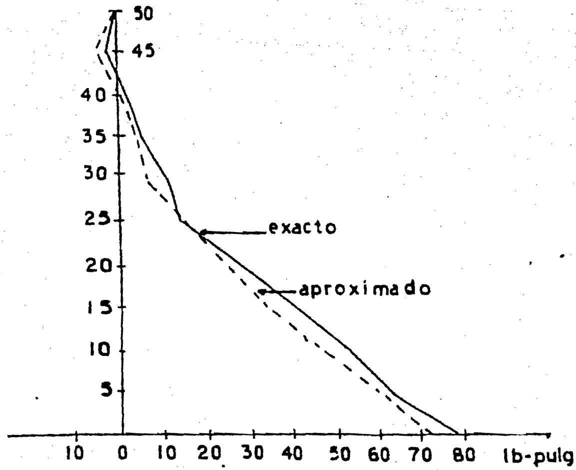


fig 4.31 marco 3

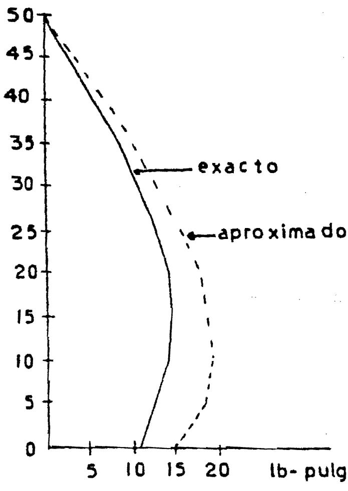


fig 4.32 marco 4

5. CONCLUSIONES.

Dos métodos de análisis tridimensional han sido presentados, uno exacto y otro aproximado. El primero está basado en el método de rigideces, para el cual se utilizó un programa de calculadora. Se puede considerar que este método es el más conveniente de emplear, ya que está basado en planteamientos exactos.

El método simplificado puede usarse para el análisis aproximado de edificios consistentes de marcos y muros. El análisis sísmico de edificios utilizando este método está basado en considerar independientemente a cada entrepiso y se resuelve utilizando tres ecuaciones diferenciales por piso. El cortante total en cada entrepiso se determina obteniendo la resultante de las fuerzas sísmicas que actúan arriba del entrepiso considerado. En caso de que se tenga presión de viento, o carga uniformemente repartida a todo lo alto del edificio la solución se simplifica, ya que únicamente se resuelven tres ecuaciones para toda la estructura.

En el método aproximado se usan matrices de rigidez lateral obtenidas en forma aproximada; sin embargo, de la comparación con los métodos exactos, los resultados que se obtienen son bastante aceptables desde un punto de vista ingenieril. Este método se recomienda cuando no se disponga de una calculadora electrónica y de algún programa apropiado, o bien, para cualquier cálculo preliminar en el diseño definitivo de un edificio.

Para observar la bondad del método aproximado se resolvieron dos casos específicos. Uno consistió en un edificio de 10 niveles, sujeto a solicitaciones sísmicas. El otro fue análogo, nada más que cambiado de escala y con solicitaciones de viento. Los ejemplos se resolvieron utilizando los métodos descritos anteriormente, para observar el comportamiento de las estructuras.

Del ejemplo 1 se observa que los desplazamientos obtenidos con el método exacto son menores que los desplazamientos obtenidos con el método aproximado, es decir, el método aproximado da resultados más conservadores en todo lo alto de la estructura. Se puede observar que en el tercio inferior son menos conservadores que en el tercio superior. Si se compara con el método exacto, el error que se tiene para el tercio superior varía entre el 9% y el 47%, y del 44% al 58% pa ra el tercio inferior, en todos los casos.

Así mismo, se observa que las fuerzas cortantes también son más conservadoras con el método aproximado, teniendo poca diferencia con respecto a los valores obtenidos con el método exacto. Al comparar resultados con el método exacto el error más crítico se tiene para el tercio superior, ya que llega a variar hasta en un 50%; para el tercio inferior el error que se tiene es de un 15%.

En algunos casos puede ocurrir que los resultados obtenidos con el método aproximado sean menores que los obtenidos con el método exacto. Esto se puede deber al efecto de torsión que se produce en la estructura, el cual no está considerado en el método aproximado. De los resultados obtenidos con el método exacto, se puede observar que cuando un edificio está formado por muros y marcos, los primeros reciben más cortante en sus primeros entrepisos y menos en los superiores.

Como consecuencia de lo anterior los momentos flexionantes obtenidos con el método aproximado resultan ser más conservadores que los que se obtuvieron con el método exacto.

Cuando la estructura está sujeta a la acción de carga uniformemente repartida no sucede lo mismo, como se pudo observar en el ejemplo 2. En este caso los desplazamientos obtenidos con el método exacto son iguales a los que se obtuvieron con el método aproximado. Lo mismo sucede en el caso de las fuerzas cortantes y de los momentos flexionantes.

En términos generales se puede decir que el método aproximado proporciona resultados conservadores con respecto al método exacto, lo cual hace que se esté del lado de la seguridad, por lo que es recomendable el uso de esté método como cálculo preliminar para el diseño definitivo de un edificio en la práctica ingenieril.

6. RECONOCIMIENTO.

Deseo hacer patente mi agradecimiento al M. en I. Gustavo Rafael Aranda Hernández por su paciente y valiosa ayuda durante el desarrollo de este trabajo.

Así mismo, al IIMAS y a la biblioteca de la DESFI por las facilidades que me otorgaron durante la realización del trabajo.

A mis compañeros y amigos que me alentaron hasta el final de este trabajo.

7. BIBLIOGRAFIA.

1.- Aranda, G R, Palencia, V J, y Sánchez, F J, "Análisis sísmico de estructuras"; Tesis Profesional, Fac de Ingeniería, UNAM, 1974.

2.- Aranda, G R, Ayala, F G, "Análisis tridimensional de edificios (adaptación del programa ETABS)", Instituto de Ingeniería, UNAM, 1977.

3.- Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G, y Hackett, R M, Computer methods of structural analysis, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J, 1970.

4.- Boyce, W E, y DiPrima, R C, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, Editorial LIMUSA, México, 1973.

5.- Branson, L K, Engineering mechanics, statics and dynamics, Simon and Schuster, New York, 1963.

6.- Caamaño, F, "ejemplos de diseño sísmico de estructuras empleando el proyecto de nuevo Reglamento de --- Construcciones para el D.F.", Tesis Profesional, Fac de Ingeniería, UNAM, 1974.

7.- Damy, J, "Diagonalización de matrices de rigidez de edificios", Ponencia presentada en el Primer Congreso de Ingeniería Estructural, Octubre de 1977, México D.F., Revista Ingeniería, vol XLVIII, núm 1, pp - 62 - 67, 1978.

8.- Ghali, A, y Neville, A M, Structural analysis, a unified classical and matrix approach, Intext Educational Publishers, Pennsylvania, 1972.

9.- Grinter, L E, Theory of modern steel structures, vol I, Statically determinate structures, revised edi--- tion, The Macmillan Company, New York, 1953.

10.- Livesley, R L, Matrix methods of structural analysis, Pergamon Press LTD, The Macmillan Company, New York, 1964.

11.- Luthe, R, Análisis estructural, Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., Primera edición, México, 1971.

12.- "Manual de diseño por sismo" (Según el Reglamento de Construcciones para el D.F.), Informe 406, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1977.

13.- Portland Cement Association, Continuity in concrete building frames, practical analysis for vertical load and wind pressure, Fourth edition, Chicago Illinois, 1959.

14.- "Requisitos de seguridad y servicio para las estructuras", Título IV del Reglamento de Construcciones para el D.F., Informe 400, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1977.

15.- Rosenblueth, E, y Esteva, L, "Folleto complementario, Diseño sísmico de edificios", Fac de Ingeniería, UNAM 1962.

16.- Ross, D, ICES STRUDL, Engineering user's manual, Civil Engineering Systems Laboratory MIT, Cambridge, - Mass., 1967.

17.- Spiegel, M, College algebra, Schaum's outline series, Mc Graw-Hill Book Company, Rensselaer Polytechnic -- Institute, 1956.

18.- Stamato, M C, y Mancini, E, "Three dimensional inter action of walls and frames", Journal of the Structural Division, ASCE, vol No ST12, Proc paper 10193, - pp 2375 - 2399, 1973.

19.- Timoshenko, S, Resistencia de materiales, ESPASA-CALPE S.A., Madrid, 1957.

20.- Timoshenko, S, and Gere, W, Theory of elastic stability, International Student Edition, Second edition, Mc Graw-Hill, Kogakusha, LTD, 1961.

21.- White, R N, Gergely, P, y Sexsmith, R G, Introducción a los conceptos de análisis y diseño. Ingeniería Estructural, vol 1, Editorial LIMUSA, México, -- 1976

22.- Wiegel, R L, <u>Earthquake engineering</u>, Prentice-Hall,- Inc, Englewood Cliffs, N J, 1970.

23.- Wilson, E L, y Penzien, J, "Evaluation of orthogonal damping matrices", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 4, 5 - 10, University of California, Berkeley, California, 1972.

24.- Wilson, E L, y Dovey, H M, "Three dimensional analysis of building systems - TABS", No EERC 72-8, University of California, Berkeley, California, 1972.

25.- Wilson, E L, Hollings, J P, y Dovey, H M, "Three --- dimensional analysis of building systems (Extend Version)", No EERC 75-13, University of California, Berkeley, California, 1975.