

2ej 34



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

# DISEÑO DE ALGUNOS FILTROS ACTIVOS

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

**P r e s e n t a n :**

**Salvador Carrillo Guadarrama**

**Arturo Vázquez Ayala**

**México, D. F.**

**1981**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

### CAPITULO I

#### HISTORIA DE LOS FILTROS Y HERRAMIENTA MATEMATICA

1.	Introducción	
1.1	Historia de los Filtros Eléctricos	1
1.2	Fundamentos Matemáticos y Métodos de Análisis	8
1.3	Teoría de Aproximación	23
1.4	Filtros Ideales	41

### CAPITULO II

#### FILTROS PASIVOS

2.1	Redes de dos Puertos	44
2.2	Circuitos Foster LC	58
2.3	Circuitos Cauer LC	67
2.4	Circuitos Foster y Cauer RC	77

## CAPITULO III

### FILTROS ACTIVOS

3.1	Generalidades	84
3.2	Características de los Filtros Activos	85
3.3	Consideraciones para el diseño de Filtros Activos	87
3.4	Redes de Primer y Segundo Orden	91
3.5	Realización de los Filtros Activos	98

## CAPITULO IV

### DISEÑO DE FILTROS

4.1	Ejemplos: Diseño de Filtros Activos	111
-----	-------------------------------------	-----

## PROLOGO

ESTE REPORTE ES EL RESULTADO DE UN SEMINARIO QUE SE INICIO AMBICIOSAMENTE CON LA IDEA DE CUBRIR TODOS LOS FILTROS, DESDE LOS PASIVOS HASTA LOS DIGITALES. LA MAGNITUD DE TAL TAREA, SIN EMBARGO, INDUJO A LOS INTEGRANTES DEL SEMINARIO A REDUCIR LA AMPLITUD DEL TEMA, CON EL OBJETO DE PROFUNDIZAR UN POCO MAS EN EL ANALISIS DE ALGUNOS PUNTOS Y EN LA REALIZACION DE EJEMPLOS.

ESTA DECISION PERMITIO, A JUICIO DEL DIRECTOR, INTEGRAR MAS CONSECUENTEMENTE ALGO DE LA HISTORIA DE LOS FILTROS, LAS HERRAMIENTAS MATEMATICAS PARA SU ANALISIS, LOS FILTROS PASIVOS Y ACTIVOS MAS IMPORTANTES, ASI COMO ALGUNAS REALIZACIONES PRACTICAS QUE SON CONFIRMACIONES DE LA TEORIA.

EL RESULTADO TAL VEZ NO SEA TAN AMBICIOSO COMO LA INQUIETUD INICIAL, PERO ES EL FIEL REFLEJO DE LO QUE SE TRABAJO Y APRENDIO DURANTE EL DESARROLLO DEL SEMINARIO.

C. MUÑOZ GAMBOA

México, D. F. 1981

## CAPITULO I

### HISTORIA DE LOS FILTROS Y HERRAMIENTA MATEMATICA

#### 1.1 HISTORIA DE LOS FILTROS ELECTRICOS.

La finalidad de esta primera parte del trabajo es la de enfocar y ubicar al lector que está interesado en este tema, en el cual se presenta un bosquejo histórico del desarrollo sobre la teoría de filtros eléctricos.

El análisis de redes eléctricas en realidad es viejo, el primer concepto de un circuito eléctrico en el sentido matemático es acreditado a G. Simón Ohm en 1827 y las bases fundamentales de red fueron las leyes de Kirchoff publicadas en 1845; a este último también se deben las nociones geométricas que se aplican a las redes, conduciendo al concepto de dualidad y equivalencia geométrica con aplicaciones de Topología.

Durante los cuarenta años que siguieron a la publicación de Kirchoff sobre las ecuaciones de una red, la mayoría de los problemas de circuitos eléctricos fueron formulados en términos de sistemas mecánicos; esto, desafortunadamente no contribuyó en forma alguna al desarrollo progresivo de la teoría básica de redes.

En la última parte del siglo XIX, la fuerte personalidad de Oliver Heaviside apareció para ayudar a fortalecer la teoría de redes eléctricas; inventa matemáticamente el concepto de línea de transmisión sin distorsión, con lo cual, tuvo que enfrentarse al pensamiento de esa época cuando la inductancia era tomada como el equivalente exacto de la inercia en sistemas mecánicos; con el objeto de establecer la teoría de redes eléctricas como una disciplina aparte de los sistemas mecánicos, creó mucha de la terminología empleada hoy en día, como impedancia, admitancia y todas las otras "ancias" empleadas para parámetros idea--

les de circuitos. Heaviside en 1886, introdujo un cálculo operacional, que debido a su naturaleza empírica angustió a muchos matemáticos aplicados del tiempo; - pese a todo, la utilización de su operador complejo "p" y expansiones en fracciones parciales condujeron a una solución sistemática de muchos problemas concernientes al comportamiento continuo y transitorio de sistemas con parámetros concentrados.

En el año de 1915 nació la tecnología del filtro, basada en los resultados obtenidos de trabajos anteriores sobre líneas de transmisión cargadas y la teoría clásica de vibración. En los días anteriores a esta tecnología, la selectividad era obtenida mediante el uso de reactancias sencillas ó resonancias sencillas conectadas en serie o en paralelo; los primeros filtros diseñados científicamente, consistieron de una cascada de secciones simples idénticas formando una red de escalera, la selectividad de esta forma se incrementaba con el número de secciones. - La escalera podía ser tratada simplemente por medio de la llamada teoría de parámetros imagen, análoga a la teoría de línea de transmisión, en la cual, los parámetros de la red son expresados en términos de la impedancia imagen y el factor de transmisión imagen.

Si bien este método fué un gran paso hacia adelante, la selectividad resultante estaba lejos de ser óptima ya que las redes no tenían ceros de transferencia cerca de la banda de paso, y atenuaciones abruptas en las regiones de corte eran no realizables.

En 1923 se publicó un método práctico de diseñar filtros selectivos con un número ilimitado de reactancias, y fué el único método conocido hasta 1940.

Esta teoría, es algo artificial en principio ya que esta basada en parámetros imagen que únicamente aproximan los parámetros efectivos de operación y asumen elementos no físicos ( las terminales de impedancia imagen ). No obstante estos resultados, no solo permitían el diseño para bandas de no paso arbitrariamente preestablecidas, sino también mejoraban el acoplamiento de la carga terminal. Esta técnica podía reducir el error en la banda de paso debido a los requisitos no físicos en las terminales ( un mejor acoplamiento fué mas tarde obtenido por Bode ).

En 1924 R. M. Foster, publicó un "Teorema de Reactancias", el cual hizo posible realizar por primera vez una red que exhibiera en sus terminales una función real positiva como una impedancia o admitancia. Foster dividió la función racional dada en una suma de fracciones parciales que podían ser fácilmente identificadas como una conexión en serie de impedancia o como una conexión en paralelo de admitancias.

En 1926 Wilhem Cauer, expandió la función racional en fracciones continuas presentando una red de escalera.

Cada método dió dos redes sustitutas, y fueron llamadas formas canónicas, ya que siempre podían ser obtenidas a partir de una función inmitancia realizable y porque ellas empleaban un número mínimo de elementos. Pronto se reconoció que los métodos de "Foster y Cauer", podían ser adaptados rapidamente para dar una teoría mas general de síntesis de redes con elementos de dos clases, esto es la síntesis de redes R-L, R-C y L-C.

Sin embargo fué también reconocido que la simple adaptación de la síntesis

L-C de Foster no podía resolver el problema de sintetizar redes R-L-C, a partir de sus funciones de inmitancia dadas. Este problema mucho más difícil demandó una correspondiente solución más complicada.

A finales de los años treinta Wilhem Cauer y Sidney Darlington, estaban preocupados por las nuevas teorías de la síntesis exacta de ese tiempo ya que la nueva teoría del diseño de filtros que ellos podían generar al principio podía tener poca ventaja práctica sobre la vieja teoría. Aunque si bien, una pequeña cantidad de problemas especializados que resistieron el tratamiento de parámetros imagen, podían resolverse fácilmente con el método exacto, la principal razón para su uso se basó en el hecho de que la teoría de redes demandó nuevas formas que pudieran llevar un problema dado a través de las siguientes etapas:

Síntesis de aproximación. - Dada una característica de respuesta deseada (por ejemplo: amplitud - frecuencia, fase - frecuencia o cualquier otra combinación), sobre un rango de frecuencias establecido hay que obtener una función de transferencia realizable que pueda aproximar las especificaciones dentro de una tolerancia permitida.

Síntesis de la Función de Transferencia. - Consiste en manipular la función de transferencia a manera de obtener una función de inmitancia realizable.

Síntesis de la Realización. - Finalmente se construye la red real que corresponde a una función racional.

La importancia de este nuevo método, no fué reconocida inmediatamente pero podía ser usado para diseñar mejores filtros paso bajas, pero faltaba proporcio-

nar los diseños **en la práctica**, debido a la pesada carga de los cálculos requeridos.

No fué sino hasta la llegada de los métodos sencillos de computación ( en los años cincuenta ), donde los filtros Cauer y Darlington entraron en amplio uso.

Bode, quien junto con Cauer demolió en escencia el problema del diseño de filtros con parámetros imagen, en 1934 desarrollo relaciones prácticas que expresan la interdependencia entre la parte real e imaginaria de funciones de redes realizables, además hizo muchas aportaciones significativas a la teoría de la realimentación en 1945.

Durante la segunda guerra mundial, el arte creciente de la comunicación, en particular el radar, demandaba filtros que satisficieran un panorama completamente diferente de restricciones en la selectividad, además anchos de banda mas amplios, frecuencias centrales mas grandes, respuestas a pulsos no resonantes y severas tolerancias a los componentes.

Los valores de los elementos de filtros paso bajas clásicos Butter Worth y Tschebycheff, fueron tabulados a mediados de los años cincuenta; los coeficientes de acoplamiento correspondientes a estos valores de parámetros paso bajas fueron también difundidos en esa época. A partir de estos, los filtros paso banda angostos podían ser fácilmente diseñados a una respuesta dada, al mismo tiempo el diseñador tuvo una más amplia selección de posibles características de respuesta en frecuencia a la vez que aparecieron nuevas y especializadas aproximaciones de fase.

Con la aparición de la computadora digital, se hizo posible la simulación del comportamiento de un filtro elemental; los efectos de resistencia y capacitancia

parásitas podían entonces ser anticipados y el comportamiento del filtro mas --  
cercanamente predecido.

Recientemente el computador ha tenido un impacto mas grande sobre la teoría  
de filtros; por ejemplo, usando reglas topológicas han sido desarrollados algo--  
ritmos a partir de los cuales se pueden obtener respuestas completas en el do--  
minio del tiempo y en el de la frecuencia de filtros de complejidad arbitraria.

Por otro lado durante los años treinta surgieron los filtros activos ( sin induc--  
tores ) los cuales fueron construidos usando bulbos, resistencias y capacitan---  
cias; debido a su enorme tamaño y al alto consumo de potencia junto con su ele--  
vado precio, los filtros activos originalmente no recibieron mucha atención. El  
desarrollo de los transistores al final de los años cuarenta, revitalizó el interés  
en esta área dedicándose en el transcurso de los años cincuenta la atención so--  
bre las técnicas de diseñar filtros activos usando un simple elemento activo.

Los esfuerzos de investigación y desarrollo en filtros activos en recientes - -  
años han sido influenciados principalmente por el progreso en la tecnología de -  
circuitos integrados; las principales atracciones para producir filtros son la re--  
ducción de su tamaño, la reducción de su peso y de su consumo mínimo de poten--  
cia así como un incremento en la confiabilidad del sistema.

Los filtros activos R-C son ahora comercialmente disponibles en forma de cir--  
cuito integrado y estan siendo ampliamente utilizados en áreas con Telefonía y -  
Sistemas de Comunicación de Datos.

El primer método de diseño de un filtro activo R-C fué sugerido en 1938 por -  
H. Scott, quien mostró el uso de una red R-C gemela T en un amplificador rea--  
limentado para producir una respuesta paso banda, a partir de este momento -

muy poco trabajo fué reportado en esta área durante una década y media, y no fué sino hasta 1953 cuando J. G. Linvill propuso un método de diseño haciendo uso de un elemento activo completamente nuevo para ese entonces el "convertidor negativo de impedancia".

El trabajo de Linvill fué seguido por el Salley - Key en 1955, quienes publicaron un catálogo de secciones de segundo orden activas R-C empleando amplificadores de voltaje como elementos activos.

A partir de entonces han existido muchas publicaciones sobre este tema las cuales nos sería imposible enumerar.

## 1.2 FUNDAMENTOS MATEMATICOS Y METODOS DE ANALISIS.

Como se observó en la sección anterior, el desarrollo de la teoría de los filtros implicó la utilización de una gran cantidad de conceptos matemáticos para poder respaldar tal teoría.

Es por esto que el lector interesado en el diseño de filtros, debe por lo menos tener un conocimiento general de la herramienta matemática que se utiliza con mas frecuencia en el estudio de filtros eléctricos; para que no exista ninguna dificultad en entender los conceptos teóricos relacionados con el tema.

Los fundamentos matemáticos que se exponen a continuación no se describen con profundidad ni detalles ya que existen libros especializados para cada uno de estos temas, y sólo nos concretaremos a tratarlos en forma simple y breve.

### 1.2.1 Sistema Lineal.

Comenzaremos por dar una definición de modelo de un sistema:

Modelo de un sistema. - Es la representación de los aspectos mas resaltantes del sistema, donde se describe la estructura de éste, y cuando es necesario, los factores externos que se le aplican y salen modificados. Entendiéndose por sistema un dispositivo real o abstracto que interrelaciona una exitación con una respuesta.

En la mayoría de las áreas científicas, el establecimiento de un modelo útil es necesario para describir el comportamiento del sistema. Un modelo efectivo no necesita duplicar el mecanismo físico del sistema, sino simplemente es esencial que su análisis esté de acuerdo con las mediaciones del sistema dentro de

un rango de tolerancia aceptable.

El sistema lineal ha probado ser un modelo útil para muchos procesos físicos, pues aunque un sistema físico nunca es completamente lineal en ciertas áreas de aplicación un modelo lineal se puede usar con frecuencia en forma apropiada; esto es importante ya que el principio de superposición se aplica a estos sistemas, permitiendo formulaciones generales de respuesta. Por el contrario, el modelo de sistema no lineal no admite de esta formulación general de respuesta, y su análisis usualmente es estudiado como un caso particular, es decir no existen métodos generales de análisis ni tampoco soluciones generales.

El análisis de sistemas persigue dos objetivos que son:

- a). - Describir y determinar el valor que debe darse a una o mas variables controlables para maximizar o minimizar otra variable de interés.
- b). - Describir el comportamiento o estado de un sistema en un tiempo pasado, presente o futuro.

Asimismo, el análisis se puede dividir en tres aspectos, que son:

- a). - El modelo matemático apropiado para el problema físico.
- b). - Solución a ecuaciones resultantes.
- c). - Interpretación de resultados obtenidos.

Muchos sistemas de filtrado son modelados con exactitud por medio de un sistema lineal.

### 1.2.2 Terminología y Clasificación de los Sistemas.

Un sistema puede representarse de una manera muy simple por medio de una caja, señalando de un lado de la caja todas las entradas, denotadas por  $X_i$  que sim-

boliza las excitaciones, y por el otro lado todas salidas o respuestas denotadas por  $Y_i$ ; como se muestra en la figura 1.1

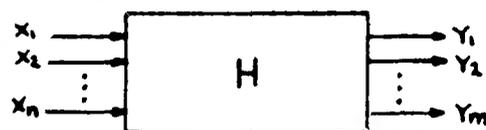


fig. 1.1 Representación de un sistema.

En general, el número de entradas en un sistema no es igual al número de salidas. El sistema es la "caja" en si y se denota por alguna letra mayúscula como H, G, T, P, etc.

Para un mejor manejo matemático los conjuntos de señales de entrada y salida suelen indicarse en forma vectorial como:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

La relación entre vector de entrada y el de salida se escribe en la forma  $Y = HX$  y se lee: Y es la respuesta de H sobre X.

Puede decirse que el sistema H es un operador que transforma o modifica la entrada X para producir la salida Y.

Con el fin de formular modelos y técnicas adecuadas a los diferentes problemas que pueden ser estudiados como sistemas, es necesario conocer las características específicas de cada tipo de sistema, con el objeto de fijar los límites de aplicación del modelo al problema real; para esto podemos clasificar los sis-

temas en :

Sistema Lineal y No Lineal. - Un sistema es lineal si la entrada  $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$  produce una salida  $C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t)$  para toda  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  cuando se conoce que  $f_1(t)$  produce una salida  $g_1(t)$  y  $f_2(t)$  una salida  $g_2(t)$ ; siendo  $C_1$  y  $C_2$  constantes que pueden ser números complejos.

Este es el llamado teorema de superposición y es característico de los sistemas lineales, si esta propiedad no se cumple el sistema es, no lineal.

Sistemas de Tiempo Continuo y Tiempo Discreto. - Un sistema de tiempo continuo es aquel en que las entradas y salidas de este cambian en cualquier instante de tiempo, esto es, que la entrada  $X$  y la salida  $Y$  son funciones de la variable de tiempo continuo "t" y esto se expresa de la siguiente forma:

$$X = X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad Y = Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Un sistema de tiempo discreto es aquel en que las señales cambian sólo en instantes discretos. Entre los instantes en que varían las señales, éstas pueden no estar definidas o bien ser constantes; en cada caso el comportamiento de las señales durante estos intervalos de tiempo no es de interés. La naturaleza discreta de un sistema se manifiesta escribiendo las señales como funciones de una variable discreta  $t_k$ , donde los  $t_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) son los instantes en que

las funciones pueden cambiar sus valores. Así, para un sistema de tiempo discreto:

$$X(t_k) = \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \\ x_3(t_k) \\ \vdots \\ x_n(t_k) \end{bmatrix} \quad Y(t_k) = \begin{bmatrix} y_1(t_k) \\ y_2(t_k) \\ y_3(t_k) \\ \vdots \\ y_m(t_k) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Generalmente los sistemas de tiempo continuo se expresan mediante ecuaciones diferenciales, y los sistemas de tiempo discreto se expresan por ecuaciones de diferencia.

Sistemas Fijos y Variables en el Tiempo. - Un sistema fijo o variable en el tiempo es aquel en que la relación entrada - salida no cambia con el tiempo, esto es:

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \longrightarrow & Y(t) \\ X(t-T) & \longrightarrow & Y(t-T) \end{array} \quad (1.4)$$

Los sistemas variables en el tiempo son aquellos en los que los parámetros varían con el tiempo, es decir la salida dependerá no sólo de la forma de la entrada sino además del momento en que se aplique.

Estos sistemas tienen la propiedad de que una entrada retrasada en T unidades de tiempo generalmente no produce una salida retrasada en T unidades de tiempo. En realidad la respuesta del sistema depende del instante en que la entrada es aplicada. Una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables, describe un sistema lineal que varía con el tiempo.

Sistema Causal y No Causal. - Un sistema es causal si el valor de la salida en - -

cualquier instante es independiente del valor de la entrada en todo los instantes posteriores.

Un sistema no causal es aquel en que el valor de la salida en cualquier instante no es independiente del valor de la entrada en un instante posterior; este sistema es físicamente irrealizable.

Sistemas de Parámetros Concentrados y Distribuidos. - Los sistemas de parámetros concentrados son aquellos en que la señal de entrada se propaga instantáneamente a través de todos los elementos del sistema; estos sistemas se modelan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los sistemas de parámetros distribuidos son aquellos en que la excitación de entrada tarda cierto tiempo en excitar los elementos internos del sistema; se pueden modelar usando ecuaciones diferenciales parciales.

### 1.2.3 Métodos de Análisis.

Existen dos métodos en el análisis de Ingeniería, que son:

1.2.3.1. - Método directo que consiste en determinar la salida  $Y(t)$  debido a una entrada  $X(t)$  resolviendo el modelo matemático que describe el sistema; - este modelo es sólo aplicable cuando se dispone de un modelo matemático adecuado para caracterizar el sistema, y además cuando dicho modelo es fácil de manipular cualquiera que sea la forma de la señal de entrada.

1.2.3.2. - El método indirecto se aplica en alguno de los siguientes casos:

1.2.3.2.a. - Cuando se dispone de un modelo determinístico para describir el sistema.

1.2.3.2.b. - Cuando el modelo de que se dispone es de difícil manipulación matemática cuando la señal de entrada tiene una forma complicada.

En el caso ( 1.2.3.2.a ) se predice la salida del sistema empleando un modelo probabilístico; o bien, conocidas las entradas y las salidas se determina el estado interno del sistema empleando métodos de interpretación indirecta. En el caso ( 1.2.3.2.b ) la entrada  $X(t)$  se descompone en un conjunto de funciones elementales o componentes individuales de forma asimilar y de fácil manejo algebraico; la respuesta del sistema a cada componente elemental se calcula resolviendo su modelo matemático. Si el sistema en estudio es lineal, podemos obtener la salida total  $Y(t)$  debida a  $X(t)$  sumando cada una de las respuestas elementales, esto es superponiendo los efectos debido a cada una de las funciones elementales en que se descompone  $X(t)$ .

1.2.4. Análisis en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia.

Los filtros compuestos de elementos convencionales agrupados están gobernados por ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes donde la variable independiente es el tiempo. Así, nuestro objetivo puede ser identificado como análisis en el dominio del tiempo con constantes agrupadas.

El análisis en el dominio del tiempo es útil cuando el problema es definido en términos de una ecuación diferencial o cuando la respuesta al impulso del sistema es definida.

El tiempo es la variable principal, por lo tanto la descripción física del sistema de filtrado debería ser expresada en el dominio del tiempo; después de todo, las señales de entrada y de salida son definidas en este dominio. Sin embargo,

la mayoría de las especificaciones de un filtro son expresadas en términos de -  
frecuencias en estado estable, tales como la respuesta de magnitud, de fase y -  
de retardo de grupo.

Cuando el sistema es invariante en tiempo además de ser lineal, los coeficientes  
de la ecuación diferencial que lo describen son constantes, estos sistemas -  
son útiles como modelos para muchos sistemas de la vida real. Un uso extensi-  
vo es hecho de las transformadas de Fourier y Laplace para analizar y diseñar  
estos sistemas teniendo a la frecuencia como la variable independiente en lugar  
del tiempo; de una consideración práctica estas transformaciones comunmente -  
conducen a simplificaciones matemáticas que entonces justifican su uso.

A continuación daremos la descripción de las transformadas de Fourier y - - -  
Laplace que nos servirán mas adelante para entender toda la teoría del análisis  
de filtros.

#### 1.2.5 Transformadas de Laplace.

La transformada de Laplace constituye una herramienta matemática muy útil en  
el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales; problemas modelados con este  
tipo de ecuaciones se presenta frecuentemente en el análisis de circuitos - -  
eléctricos, ya que el caso de algunas funciones no se pueden manejar con facili-  
dad los métodos clásicos; y el método de Laplace, en cambio, proporciona una -  
solución mas rápida a este tipo de problemas.

La transformada de Laplace de una función expresada en el dominio del tiempo  
es definida como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.5)$$

Donde el parámetro  $S$  puede ser un número real o complejo. Para las aplicaciones de teoría de circuitos  $S = \sigma + j\omega$ .

La operación  $\mathcal{L}[f(t)]$  transformada de una función  $f(t)$  en el dominio del tiempo, es una función  $F(S)$  en el dominio de la variable  $S$ .

Las condiciones suficientes para la existencia de la Transformada de Laplace, son que la función  $f(t)$  sea: a). - continua a intervalos y b). - de orden exponencial. Una función es de orden exponencial si; para todo  $t > t_0$ ,  $|f(t)| < A e^{-\alpha t}$ ; siendo  $A$  y  $t_0$  constantes positivas. Si se cumplen estas condiciones, la integral de la transformación directa es convergente para todo  $\sigma > \alpha$  y existe  $F(S)$ .

Todas las funciones que tienen una transformada de Laplace deben cumplir la siguiente condición, para que  $S$  sea real y positiva.

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (1.6)$$

### 1.2.6 Transformadas de Fourier.

La transformada de Fourier, de una función de tiempo arbitraria  $f(t)$  es indicada por  $\mathcal{F}$  (hablada la transformada de Fourier de  $f(t)$ ) y esta dada por:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.7)$$

esta es la representación en el dominio de la frecuencia de  $f(t)$ . Aquí es la frecuencia en radianes, relacionada con "f" frecuencia en hertz mediante:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{rad/seg} \quad (1.8)$$

Las letras minúsculas son reservadas para las funciones de tiempo y las letras mayúsculas indican sus transformaciones respectivas.

La integral a la derecha de la ecuación (1.7) es conocida como la integral de Fourier y es útil para analizar una función aperiódica, algunas veces llamada una función transiente. Usando la serie de Fourier para obtener la representación en la frecuencia de una función periódica.

Como se recordará la integral de Fourier es comunmente derivada de la serie de Fourier de la función periódica haciendo que el período tienda a infinito, esto es haciendo que la función periódica se aproxime a una aperiódica.

No todas las funciones son transformables con Fourier en el sentido clásico. Supongamos; sin embargo, que la función  $f(t)$  es de variación limitada, esto es, puede ser representada mediante una curva de longitud finita en cualquier intervalo finito de tiempo. Entonces una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de la integral de Fourier es que  $f(t)$  sea absolutamente integrable, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1.9)$$

Comunmente la transformada de Fourier de algunas funciones no satisfacen la ecuación (1.9) tal como la función impulso; pero pueden ser obtenidas introdu

ciendo procesos matemáticos permisibles sólo dentro de la teoría de las distribuciones.

### 1.2.7 La Integral de Convolución.

La integral de Convolución es de importancia fundamental en el diseño y análisis de un sistema lineal invariante en el tiempo, ya que se obtiene una representación explícita de la respuesta del sistema.

Sean  $p(t)$  y  $q(t)$  cada una un tramo de una función continua dentro del intervalo  $-\infty < t < \infty$ ; la convolución de  $p$  y  $q$ , simbolizada  $p * q$  se define como una tercera función dada por:

$$v(t) = p * q = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-z) q(z) dz \quad (1.10)$$

en donde la integral de la derecha es llamada integral de convolución.

### 1.2.8 Función de Transferencia.

La función de transferencia  $H(S)$  es la descripción en dominio de la frecuencia de un sistema lineal invariante en el tiempo y es una función necesaria para el análisis y la síntesis en este dominio.

Antes de que la función de transferencia pueda ser determinada, las variables de entrada y salida deben ser especificadas. La función de transferencia de voltaje  $T(S)$  es la relación del voltaje de salida al voltaje de entrada de un sistema; mientras la función de transferencia de corriente  $I(s)$  es la relación de la corriente de salida a la corriente de entrada, ambas son adimensionales. Sin embargo, continuaremos usando el término función de transferencia representa

do por  $H(S)$  a menos de que sea mas útil usar alguna de las otras descripciones.

Veamos ahora que son los polos y ceros de  $H(S)$  y su representación gráfica.  $H(S)$  es la función racional en  $S$  definida por :

$$H(S) = \frac{b_0 S^m + \dots + b_m}{a_0 S^n + \dots + a_n} = \frac{N(S)}{D(S)} \quad (1.11)$$

donde  $N(S)$  es el polinomio del numerador y  $D(S)$  es el polinomio del denominador. A las raíces de  $N(S)$  y  $D(S)$  les son dados nombres especiales debido a su importancia en caracterizar  $H(S)$ ; las raíces del polinomio del numerador son llamadas los ceros de  $H(S)$  y las raíces del polinomio del denominador son llamadas los polos de  $H(S)$ . Las especificaciones de los polos, ceros y una constante de ganancia  $H_0$  caracterizan a un sistema completamente, ya que entonces la función de transferencia es conocida. La ecuación 1.11 puede ser reescrita como:

$$H(s) = H_0 \frac{S^m + (b_1/b_0)S^{m-1} + \dots + b_m/b_0}{S^n + (a_1/a_0)S^{n-1} + \dots + a_n/a_0} \quad (1.12)$$

donde la constante de ganancia  $H_0 = \frac{b_0}{a_0}$  .

Los ceros son frecuencias complejas a las cuales la función de transferencia tiene el valor cero, mientras que los polos son aquellas frecuencias complejas a las cuales el valor de la función de transferencia es infinito. Los polos además tienen otro significado, en ellos se encuentran las frecuencias naturales del sistema y en consecuencia determinan el comportamiento general del sistema.

Se define a  $S$  como la frecuencia compleja  $\sigma + j\omega$ ; mas precisamente  $S$  es una variable compleja cuya parte real es  $\sigma$  ( frecuencia en Nepers ) y cuya parte imaginaria es  $\omega$  ( frecuencia en radianes ). Consecuentemente cualquier función en  $S$  es una función de la variable compleja con una parte real y una imaginaria; una de estas por supuesto, puede ser cero.

La representación gráfica de los polos y los ceros proporciona una visión dentro del comportamiento del sistema, el plano que contiene los dos números que definen un polo o un cero y es conocido como el plano  $S$ . Cuando graficamos un polo es indicado mediante una cruz y un cero es indicado mediante un círculo. El orden  $q$  del polo o el cero es indicado por  $q$  cerca del polo o el cero, ningún número es dado si el orden  $q$  es la unidad. La constante de ganancia  $H_0$  algunas veces aparece en el diagrama; la figura 1.2 es una gráfica típica en el plano  $S$ .

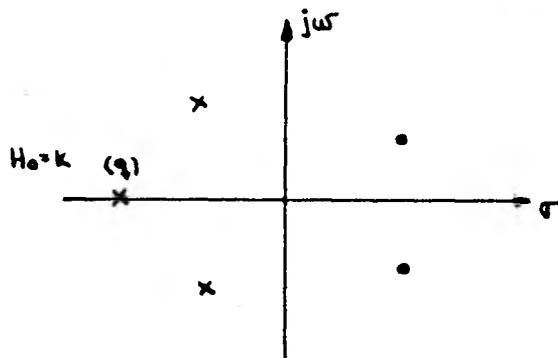


fig. 1.2 Diagrama de polos y ceros en el plano  $S$ .

Una función de transferencia tiene un número igual de polos y ceros por lo que algunos de los polos o algunos de los ceros pueden ocurrir en el infinito, esto es  $H(S)$  se hace infinito o cero cuando  $S$  se hace infinito. Para determinar el comportamiento de  $H(S)$  en el infinito, de la ecuación 1.11 se obtiene:

$$H(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{a_0}{b_0} s^{n-m}$$

Si  $m < n$ ,  $H(s) \propto \infty$ ; entonces,  $H(s)$  tiene  $(m-n)$  polos en el infinito.

Si  $m > n$ ,  $H(s) \rightarrow 0$ ; entonces,  $H(s)$  tiene  $(n-m)$  ceros en el infinito.

Si  $m = n$ ,  $H(s) \rightarrow \frac{a_0}{b_0}$ ; entonces,  $H(s)$  no tiene polos o ceros en el infinito.

En una gráfica de polos y ceros sin embargo, únicamente son indicados los polos y ceros finitos. Tres regiones del plano  $S$  merecen especial atención debido a las respuestas peculiares que producen los polos situados en estas regiones. La región ubicada a la izquierda del eje  $j\omega$  es conocida como el medio plano izquierdo y la región a la derecha de este eje es llamada medio plano derecho, la tercera región es la línea infinitesimal conocida como eje  $j\omega$ . Los polos en el medio plano izquierdo dan origen a funciones de tiempo exponencialmente decrecientes, y los polos en el medio plano derecho dan origen a funciones de tiempo exponencialmente crecientes. Los polos sobre el eje  $j\omega$  resultan en funciones de tiempo oscilatorias.

Para ilustrar como se forma una gráfica de polos y ceros veamos un ejemplo.

Ejemplo. - Vamos a obtener los polos, ceros y el diagrama correspondiente a la siguiente función de transferencia.

$$H(s) = 5 \frac{s^3 - 3s^2 + 9s + 13}{s^4 + 14s^3 + 89s^2 + 296s + 400} \quad (1.13)$$

El polinomio del numerador  $N(s)$  es factorizado como:

$$N(s) = (s+1)(s^2 - 4s + 13)$$

Y sus raíces que son los ceros finitos de  $H(s)$  son:  $-1$  y  $\pm j3$ . El polinomio del denominador  $D(s)$  es factorizado como:

$$D(s) = (s+4)^2(s^2 + 6s + 25)$$

Y sus raíces que son los polos de  $H(s)$  son:  $-4, -4, -3 \pm j4$ . Si hacemos que  $s$  tienda a infinito en  $H(s)$  encontramos que:

$$H(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{5}{s}$$

Existe un cero en infinito como resultado de un igual número de polos y ceros. -

La figura 1.3 es el diagrama de polos y ceros en el plano  $s$ .

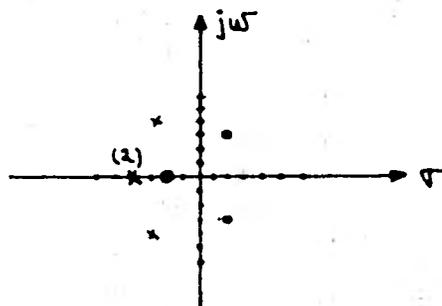


fig. 1.3 Diagrama de polos y ceros de la función de transferencia definida:

$$H(s) = 5 \frac{s^3 - 3s^2 + 9s + 13}{s^4 + 14s^3 + 89s^2 + 296s + 400}$$

### 1.3 TEORIA DE APROXIMACION.

El problema de aproximación puede ser considerado desde distintos puntos de vista. Algunas veces deben usarse datos experimentales dados en forma de curva o de una tabla; otras veces, una expresión matemática complicada debe ser reemplazada por una mas simple.

Si lo que interesa en la aproximación es una expresión mas simple la función aproximativa debe ser simple en sí. Tales funciones simples son:

- Potencias de una variable ( polinomios ).
- Funciones trigonométricas.
- Funciones exponenciales.

La elección de uno de los tipos enumerados depende del resultado deseado.

Las potencias de una variable (polinomio) se usan generalmente para aproximar funciones no periódicas, las funciones trigonométricas se usan para aproximar respuestas en el tiempo de redes.

Existen muchas formas para reemplazar una función dada por otra mas simple esta aproximación puede ser de la forma de un polinomio o de una función racional.

Estudiaremos la aproximación por polinomio, que es la que se usa con mas frecuencia en el diseño de filtros eléctricos.

En primer lugar es necesario establecer la factibilidad de aproximar una función mediante un polinomio; esto nos lo da el siguiente teorema.

#### TEOREMA.

Una función no periódica  $f(x)$ , continúa en el intervalo  $[a, b]$  puede ser aproxima---

mada por un polinomio, esto es:

$$P_n(x) = a x \quad (1.14)$$

Donde los "a" son coeficientes reales.

Este teorema nos garantiza que una función  $f(x)$  puede ser aproximada por un polinomio con coeficientes reales, lo cual es de suma importancia para aproximar características de redes eléctricas, por las condiciones de realización impuestas a las redes a sintetizar. A continuación veremos los tipos de aproximación de uso mas frecuente.

### 1.3.1 Aproximación de la Función en un Punto.

El polinomio debe aproximarse lo mas cercanamente a un punto "a" de la curva dada; este requerimiento significa que el polinomio debe pasar por un punto "a" y que la mayoría de sus derivadas deben ser iguales a las de la curva dada. El tipo de aproximación se muestra en la figura 1.4

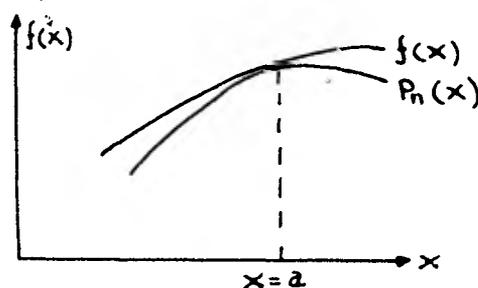


fig. 1.4 Aproximación de una función en un punto.

Matemáticamente, la condición impuesta en este tipo de aproximación es que:

$$P_n^{(i)}(a) - f^{(i)}(a) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.15)$$

Obviamente, este tipo de aproximación se podrá utilizar con funciones que tengan al menos  $n$  derivadas en el punto  $a$ .

En general, este método impone condiciones al comportamiento del polinomio en un punto determinado. La aproximación en dicho punto es particularmente buena, pero no hay forma de controlar el comportamiento del polinomio fuera de dicho punto. El único control posible es observar si el error en el intervalo de aproximación excede un margen considerado aceptable.

Una aproximación de este tipo se realiza expandiendo la función en una serie de Taylor.

TEOREMA: ( TAYLOR ) Toda función  $f(x)$  que posea  $n + 1$  derivadas en el intervalo  $a, b$  puede ser expandida en cada punto  $X = \sigma$  ;  $a < \sigma < b$ :

$$f(x) = \left[ \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \right] + R_n(x) \quad (1.16)$$

En la ecuación anterior  $R_n(x)$  es el residuo y puede ser expresado de la forma:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \quad (1.17)$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , la serie converge y es igual a  $f(x)$ .

### 1.3.2 Aproximación en Varios Puntos.

En este tipo de aproximación, el polinomio debe cortar la curva dada en varios puntos distintos en el intervalo de aproximación; no se dan condiciones para el

comportamiento del polinomio dentro de dichos puntos. Este tipo de aproximación se muestra en la figura 1.5. Matemáticamente la condición impuesta se expresa por:

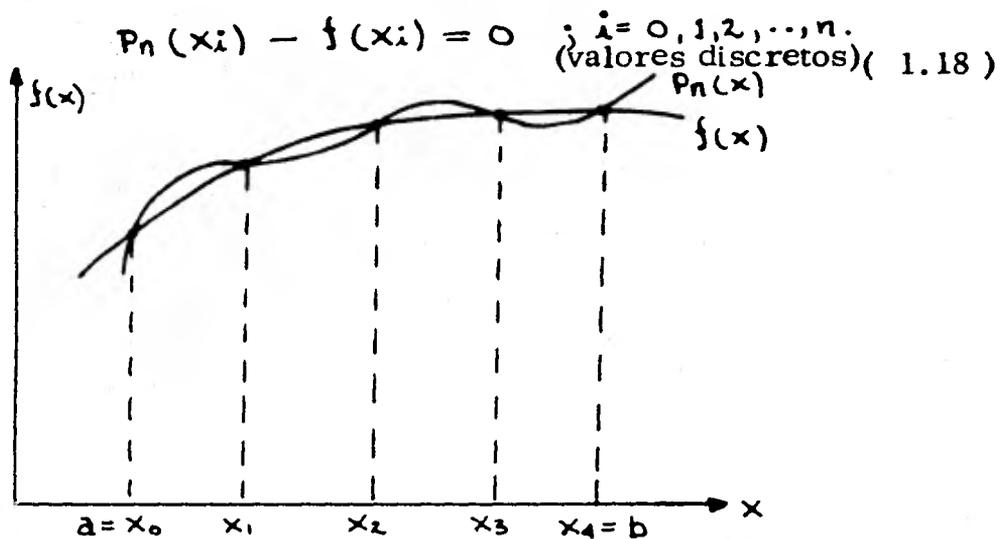


fig. 1.5 Aproximación de una función en varios puntos.

### 1.3.3 Aproximación Media.

En este tipo de aproximación, los coeficientes del polinomio se determinan de la condición de que el área de la  $n$ -ésima potencia de  $P_n(x) - f(x)$  sea mínima. En la figura 1.6, se muestra este tipo de aproximación para  $q = 2$ .

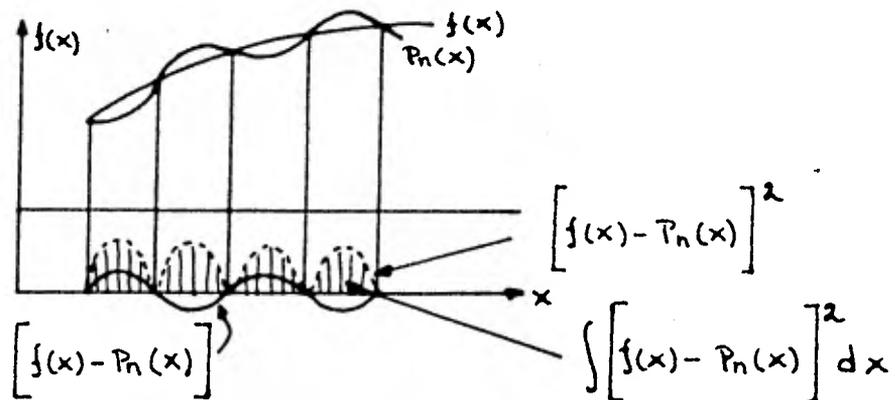


fig. 1.6 Aproximación media.

La expresión matemática es:

$$F = \min \int_a^b [P_n(x) - f(x)]^2 dx \quad (1.19)$$

#### 1.3.4 Aproximación Butterworth ( ó Maximally Flat ).

El criterio de aproximación Butterworth, corresponde a la aproximación de una función en un punto, en este caso, el punto es  $\omega = 0$ . El criterio usado en este caso es hacer todas las derivadas de  $|H(j\omega)|$  iguales a las de la función que se quiere aproximar, es decir, los coeficientes del polinomio, determinados mediante la expansión de Taylor, deben ser iguales a las derivadas de la función. Como en el caso del filtro ideal, todas las derivadas son cero, los coeficientes del polinomio correspondiente a dichas derivadas deberán ser cero. Matemáticamente el procedimiento es el siguiente:

La función que queremos aproximar es:

$$|H(j\omega)| = 1 \quad (1.20)$$

Ahora bien:

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) H(-j\omega) = G(\omega^2) \quad (1.21)$$

El problema de aproximación se puede resolver seleccionando los coeficientes de:

$$G(\omega^2) = \frac{1 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 + \dots + a_r \omega^{2r}}{1 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^4 + \dots + b_t \omega^{2t}} \quad (1.22)$$

De tal forma de hacer  $G(0) = 1$  y las  $n$  primeras derivadas de  $G(0)$  sean cero (obsérvese que  $n = r + t$ ). La razón por la cual las primeras  $n$  derivadas se pueden hacer cero, es debido a que  $n+1$  grados de libertad, luego se pueden elegir  $n+1$  coeficientes. (Un grado de libertad es usado para escalar en frecuencia y poder elegir la frecuencia de corte).

Si se obtiene la primera derivada de la expresión 1.22 y haciendo  $\omega=0$  se obtiene:

$$G'(0) = a_1 - b_1 = 0 ; \text{ y hacemos } a_1 = b_1 = 0$$

Para la segunda derivada se obtiene:

$$G''(0) = a_2 - b_2 = 0 ; \text{ y hacemos } a_2 = b_2 = 0$$

Continuando con este procedimiento, se obtiene:

$$a_i - b_i = 0 ; \text{ y hacemos } a_i = b_i = 0 ; \text{ donde } i \leq n$$

Luego obtenemos:

$$G(\omega^2) = \frac{1 + a_n \omega^{2n} + a_{n+1} \omega^{2n+2} + \dots}{1 + b_n \omega^{2n} + b_{n+1} \omega^{2n+2} + \dots} \quad (1.23)$$

Todos los coeficientes restantes pueden elegirse arbitrariamente. Hacemos  $a_n = 0 ; a_{n+1} = 0 ; c_{n+i} = 0 (i \geq 1)$  y obtenemos:

$$G(\omega^2) = \frac{1}{1 + b_n \omega^{2n}} \quad (1.24)$$

$b_n$  lo elegimos de tal forma que la atenuación en (frecuencias de corte) - sea de 3 db. luego:

$$[G(\omega_0^2)]^{1/2} = (1 + b_n \omega_0^{2n})^{-1/2} \quad (1.25)$$

de donde 
$$b_n = \frac{1}{1 + \omega_0^{2n}}$$

Se acostumbra a normalizar la frecuencia de corte a  $\omega_0 = 1$  ; luego :

$$G(\omega^2) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (1.26)$$

Ahora bien, la ecuación 1.25, es para  $\omega^2$  pero a nosotros nos interesa obtener  $H(s)$ . Si hacemos  $s = j\omega$ , lo que equivale extender  $G(\omega^2)$  desde el eje "w" a todo el plano "s", obtenemos :

$$G(-s^2) = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}} \quad (1.27)$$

Los polos de  $G(-s^2)$  se obtienen de  $(-1)^n s^{2n} = -1$  mediante el teorema de De Moivre

$$S_r = e^{j[(2r-1)/2n]\pi}$$

para n par

$$S_r = e^{j(r/n)\pi}$$

para n impar

(1.27.a)

Expresando  $S_r$  como  $S_r = \sqrt{r} + j\omega_r$  las partes real e imaginaria son:

$$\sqrt{r} = \cos \frac{(2r+n-1)\pi}{2n} = \sin \frac{(2r-1)\pi}{n}$$

$$\omega_r = \sin \frac{(2r+n-1)\pi}{2n} = \cos \frac{(2r-1)\pi}{n} \quad (1.27.b)$$

En la figura 1.7, se muestran los polos de  $G(-s^2)$ .

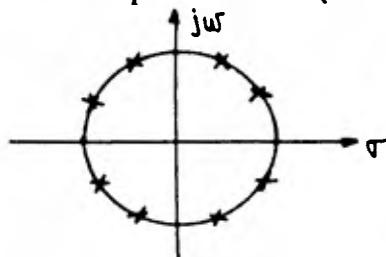


fig. 1.7 Polos de  $G(-s^2)$ .

Estos se encuentran ubicados en un círculo unitario en forma simétrica con respecto a ambos ejes. Para satisfacer las condiciones de realización, los polos de

$H(s)$  serán aquellos que se encuentren en el lado izquierdo del plano complejo.

Los polinomios cuyas raíces se encuentran en el lado izquierdo del plano complejo se llaman polinomios de Butterworth y se designan por  $B_n$ . Existe un polinomio para cada valor de  $n$ . A continuación se muestran tres tablas, la primera se da una lista de las  $B_n$  correspondientes a los ocho primeros valores de  $n$ ; la segunda da sus coeficientes y la tercera sus raíces.

$n$  Tabla 1

1	$(s+1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
3	$(s^2 + s + 1)(s+1)$
4	$(s^2 + 0.76536s + 1)(s^2 + 1.8180s + 1)$
5	$(s+1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5178s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s^2 + 1.9318s + 1)$
7	$(s+1)(s^2 + 0.4450s + 1)(s^2 + 1.2463s + 1)(s^2 + 1.8022s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3861s + 1)(s^2 + 1.1110s + 1)(s^2 + 1.8630s + 1)(s^2 + 1.9622s + 1)$

Tabla 2

$n$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	1	1							
2	1	$\sqrt{2}$	1						
3	1	2	2	1					
4	1	2.613	3.4142	2.673	1				
5	1	3.236	5.236	5.236	3.236	1			
6	1	3.864	7.464	9.141	7.464	3.864	1		

7	1	4.494	10.103	14.606	14.606	10.103	4.494	1	
8	1	5.126	13.138	21.848	25.691	21.848	13.138	5.126	1

Tabla 3

n	Polos de H(s)
1	-1.000000
2	-0.707107+j0.707107
3	-1.000000
	-0.500000+j0.866015
4	-0.382683+j0.923880
	-0.923880+j0.382683
5	-1.000000
	-0.309017+j0.951057
	-0.809017+j0.587785
6	-0.258819+j0.965926
	-0.707107+j0.7-71-7
	-0.965926+j0.258819
7	-1.000000
	-0.222521+j0.974928
	-0.623490+j0.781832
	-0.900969+j0.433884
8	-0.195090+j0.980785
	-0.555570+j0.831470

$$-0.831470 \pm j0.555570$$

$$-0.980785 \pm j0.195090$$

En la figura 1.8, se muestra la aproximación lograda con este tipo de filtro:

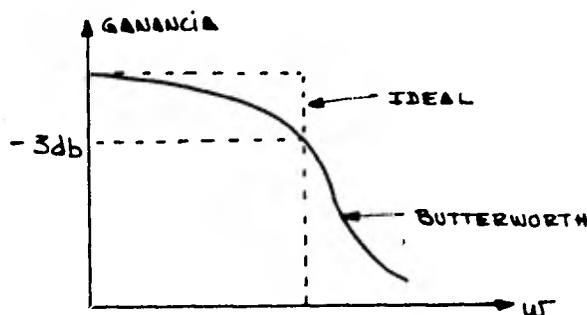


fig. 1.8 Aproximación Butterworth.

La aproximación Maximally Flat, se da generalmente en términos de los polinomios de Butterworth, en la forma:

$$H(s) = \frac{1}{1 + B_n(s)} \quad (1.28)$$

Veamos ahora la influencia del número de polos o del grado de  $B_n(s)$ , en el comportamiento del filtro.

De la ecuación (1.26), la magnitud de  $H(s)$ , esta dada por:

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{[1 + \omega^{2n}]^{1/2}} \quad (1.29)$$

En la figura 1.9, se muestran algunas curvas de  $|H(j\omega)|$  para distintos valores de  $n$ .

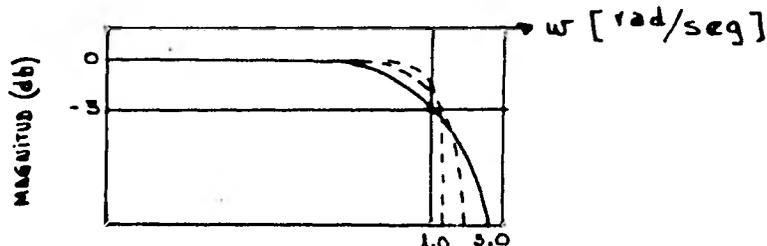


fig. 1.9 Curvas de  $H(j\omega)$  para distintos valores de  $n$ .

Obsérvese que a la frecuencia de quiebre,  $\omega_0 = 1$ ; todas las curvas presentan una atenuación de 3db. Además se aprecia claramente que mientras mayor sea  $n$  mejor es la aproximación.

De la ecuación 1.29, es posible obtener la ganancia del filtro para frecuencias altas,  $\omega \gg 1$ .

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega^n} \quad \text{para } \omega \gg 1 \quad (1.30)$$

Ya que 1 comparado con  $\omega^{2n}$  es despreciable.

Ahora bien, por definición, la ganancia es  $20 \text{ Log } |H(j\omega)|$ ; luego:

$$20 \text{ Log } |H(j\omega)| = -20 \text{ Log } \omega \quad \text{db.} \quad (1.31)$$

Es decir que a frecuencias altas la atenuación ( obsérvese que la ganancia en este caso es negativa ) en decibeles es proporcional al logaritmo de la frecuencia y al orden de la aproximación de Butterworth "n". Como  $\log \omega$  aumenta en 1 por cada década de frecuencia, la atenuación para frecuencias mayores que la de corte, es aproximadamente de  $20n \text{ db/déc}$ . Es decir que un filtro de Butterworth de dos polos tendrá una atenuación de  $40 \text{ db/déc}$  a frecuencias altas, mientras uno de 10 polos tendrá una atenuación de  $200 \text{ db/déc}$  para el mismo rango de frecuencia.

En este punto cabe hacerse una pregunta; obviamente un filtro de Butterworth de 10 polos es mucho mas difícil de diseñar, que un filtro de 5 polos ¿ no es mas conveniente diseñar dos filtros de 5 polos y conectarlos en cascada, en vez de diseñar uno de 10 polos ?. La respuesta tiene dos aspectos; para los efectos de

atenuación para frecuencias altas, dos filtros de 5 polos en cascada tienen - - aproximadamente la misma atenuación que uno de 10. Sin embargo, la atenuación en la pasa-banda, es muy diferente en ambos casos y esto puede observarse en las curvas de la figura 1.10 ( lado izquierdo ).

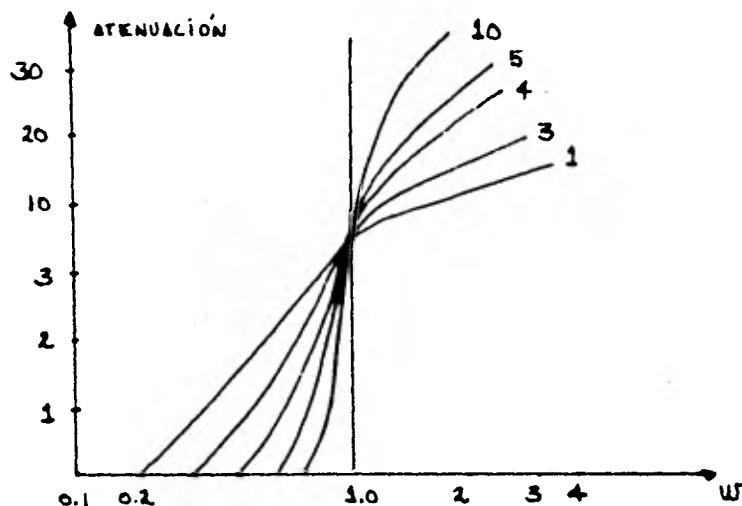


fig. 1.10 Respuestas de diferentes filtros Butterworth.

Por ejemplo: para  $\omega = 0.9$  un filtro de 10 polos tendrá una atenuación de 0.8 db, mientras dos filtros de 5 polos cada uno conectados en cascada tendrán una atenuación de 2.6 db.

A medida que aumenta el número de polos, Butterworth se aproxima cada vez más al filtro ideal. Sin embargo, filtros con más de 10 polos son difíciles de diseñar, por lo tanto las curvas de las figuras 1.10-3 y 1.10-4 son lo mejor que se puede esperar de un filtro Butterworth.

Otra consideración importante en el diseño de filtros, es la pendiente de la curva de atenuación en la frecuencia de corte, ya que marca la transición entre la pasa-banda y corte.

La derivada de la ganancia Butterworth evaluada en  $\omega=1$  es  $\frac{n}{2}$  luego, la pendiente de la curva de atenuación aumenta con la complejidad de filtro ( aumento de "n").

De la discusión anterior, se desprende que la aproximación Butterworth depende del número de polos  $n$ , el cual para los efectos de diseño se puede determinar directamente de las especificaciones.

### 1.3.5 Aproximación de Tchebysheff

La aproximación de Butterworth está basada en la tesis que, el comportamiento en  $\omega=0$  es crítico. Sin embargo, a medida que nos aproximamos a la frecuencia de corte,  $\omega=1$  el comportamiento se va haciendo progresivamente mas pobre. Este punto de vista es realista cuando se van a conectar varios filtros en cascada, de tal forma que la pasa-banda total es pequeña.

Si nos olvidamos de las condiciones impuestas al comportamiento en  $\omega=0$  ( restricciones en las derivadas de la amplitud y nos imponemos condiciones en la amplitud para toda la pasa-banda,  $\omega \in [0,1]$  es posible obtener una transición mas rápida entre la pasa-banda y corte.

La aproximación que veremos a continuación oscila alrededor de la unidad en la pasa-banda y decrece rápidamente para  $\omega=1$ . Este tipo de aproximación es llamada de Tchebysheff y en ella, todas las frecuencias de la pasa-banda se consideran igualmente importantes y lo que interesa en este caso, es minimizar la desviación máxima entre la respuesta ideal y la respuesta aproximada, para cualquier punto en la pasa-banda.

Esta aproximación es igualmente buena para  $\omega=0$  como para  $\omega=1$  y por eso es llamada "equal-ripple".

La propiedad de "equal-ripple" se consigue mediante un polinomio  $f(w)$  que tenga dicho tipo de variación en el intervalo  $[0, 1]$ . Tal polinomio es el polinomio de Tchebysheff.  $C_n(w)$ . La forma trigonométrica del polinomio de Tchebysheff es:

$$C_n(w) = \cos(n \cos^{-1} w); \text{ para } |w| \leq 1 \quad (1.32)$$

$$C_n(w) = \cosh(n \cos h^{-1} w); \text{ para } |w| \geq 1 \quad (1.33)$$

De la ecuación 1.32, se ve claramente que para  $n=0$

$$C_0(w) = 1 \quad (1.34)$$

y para  $n=1$

$$C_1(w) = w \quad (1.35)$$

Para obtener los polinomios de orden mayor, se utiliza la fórmula recursiva:

$$C_n(w) = 2w C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w)$$

En la tabla 4, se dan los polinomios de Tchebysheff hasta  $n=10$ .

Las propiedades más importantes de los polinomios de Tchebysheff y que son usadas para la aproximación de filtro ideal son:

1. - Los ceros del polinomio están ubicadas en el intervalo  $|w| \leq 1$  lo cual se muestra en la figura 1.11 de las gráficas de  $C_3(w)$  y  $C_4(w)$ .
2. - Dentro del intervalo  $|w| \leq 1$  el valor absoluto de  $C_n(w)$  nunca excede la unidad es decir:  $|C_n(w)| \leq 1$  ; para  $|w| \leq 1$
3. - Mas allá del intervalo  $|w| \leq 1$   $C_n(w)$  crece rápidamente para incrementar en  $|w|$ .

Tabla 4:

n	Polinomios de Tchebysheff $C_n(w)$
0	1
1	w
2	$2w^2 - 1$
3	$4w^3 - 3w$
4	$8w^4 - 8w + 1$
5	$16w^5 - 20w^3 + 5w$
6	$32w^6 - 48w^4 + 18w^2 - 1$
7	$64w^7 - 112w^5 + 56w^3 - 7w$
8	$128w^8 - 256w^6 + 160w^4 - 32w^2 + 1$
9	$256w^9 - 576w^7 + 432w^5 - 120w^3 + 9w$
10	$512w^{10} - 1280w^8 + 1120w^6 - 400w^4 + 50w^2 - 1$

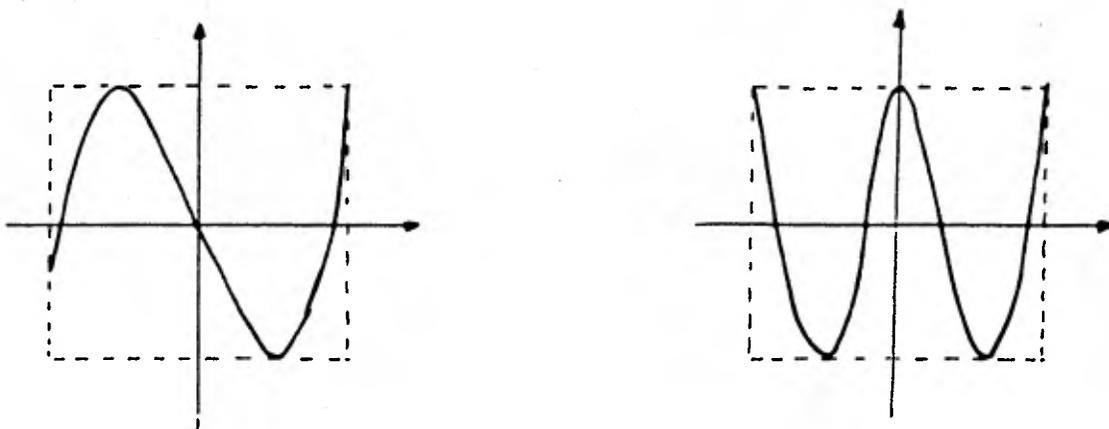


fig. 1.11 Ubicación de los ceros de un polinomio Tchebysheff.

Veamos ahora como utilizar los polinomios de Tchebysheff para aproximar la característica del filtro ideal.

Considérese la función  $E^2 C_n^2(w)$  donde  $E$  es un número real, muy pequeño comparado con "1". Claramente  $E^2 C_n^2(w)$  variará entre 0 y  $E^2$  en el intervalo  $|w| \leq 1$ . A continuación, sumemos 1 a la función, la que ahora queda:  $1 + E^2 C_n^2(w)$ . Esta nueva función variará entre 1 y  $1 + E^2$  cantidad ligeramente superior a 1, para  $|w| \leq 1$ . Invertiendo esta función, obtendremos otra función que asociaremos con  $|H(jw)|^2$ ; luego:

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + E^2 C_n^2(w)} \quad (1.36)$$

En el intervalo  $|w| \leq 1$ ,  $|H(jw)|^2$  oscilará alrededor de la unidad, tal que el valor máximo es 1 y el mínimo es  $1 / (1 + E^2)$ . Fuera del intervalo  $|w| \leq 1$ ;  $C_n^2(w)$  se hace muy grande, de tal forma, a medida que  $w$  aumenta, se alcanza un punto en el que  $E^2 C_n^2(w) \gg 1$  y  $|H(jw)|^2$  se aproxima a cero. Vemos entonces que la ecuación 1.36 es realmente una buena aproximación de la característica del filtro ideal. En la figura 1.12, se muestra una aproximación de Tchebysheff al filtro ideal:

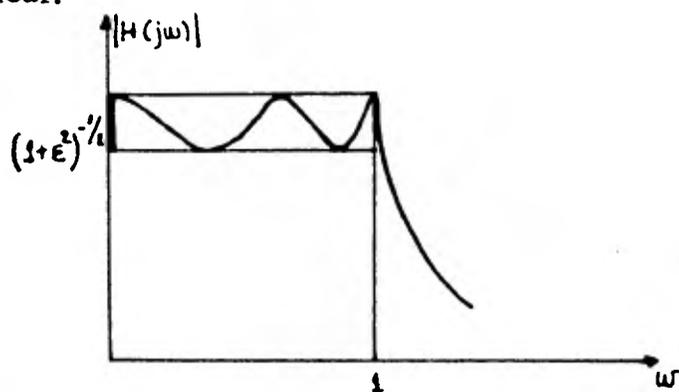


fig. 1.12 Aproximación Tchebysheff al filtro ideal.

En la figura se puede observar que dentro de la pasa-banda,  $0 \leq \omega \leq 1$  oscila -- ("ripples") entre los valores 1 y  $(1 + \epsilon^2)^{-1/2}$  luego el ripple está dado por

$$\text{Ripple} = 1 - \frac{1}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}} \quad (1.37)$$

Para  $\omega = 1$ ,  $|H(j\omega)|$  es:

$$|H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad (1.38)$$

puesto que  $C_n^2(1) = 1$

En la banda de corte, es decir, para  $\omega > 1$ , a medida que  $\omega$  crece, se llega a un punto en el que  $\epsilon^2 C_n^2(\omega) \gg 1$ , de manera que:

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\epsilon C_n(\omega)} \quad (1.39)$$

Luego la atenuación en decibeles está dada por:

$$20 \text{ Log } |H(j\omega)| = -20 \text{ Log } \epsilon - 20 \text{ Log } C_n(\omega) \quad (1.40)$$

Para valores grandes de  $\omega$ ,  $C_n(\omega)$  puede aproximarse por el primer término:

$2^{n-1} \omega^n$  luego la atenuación (ecuación 1.40) será:

$$\begin{aligned} 20 \text{ Log } |H(j\omega)| &= -20 \text{ Log } \epsilon - 20 \text{ Log } 2^{n-1} \omega^n \\ 20 \text{ Log } |H(j\omega)| &= -20 \text{ Log } \epsilon - 6(n-1) - 20n \text{ Log } \omega \quad (1.41) \end{aligned}$$

De la ecuación (1.41) podemos observar que después de la caída de  $[20 \text{ Log } \epsilon + 6(n-1)]$  db, la respuesta cae a razón de  $20n$  db /déc. Sin embargo, en la mayoría de -- las aplicaciones,  $\epsilon$  es un número pequeño, de manera que  $20 \text{ Log } \epsilon$  es generalmente un número negativo. Por lo tanto es necesario compensar esta disminución de la atenuación eligiendo un "n" suficientemente grande.

De la discusión anterior, vemos que la aproximación de Tchebysheff depende -- de dos variables:  $\epsilon$  y "n" las que deberán ser determinadas directamente de las --

especificaciones. El ripple máximo permisible impone un límite a  $\epsilon$  y una vez determinado  $\epsilon$  el valor de "n" dependerá del valor de atenuación deseado en la zona de corte.

## 1.4 FILTROS IDEALES.

Un filtro ideal tiene definida una forma rectangular muy precisa como se ve en la figura 1.13, esta forma, como es de esperarse es irrealizable. Sin embargo, la forma de la figura 1.14 es mas realista, donde la pendiente tienen una frecuencia de corte finita, en general se pueden realizar filtros pero con pendientes escarpadas. Pero siempre se desea que las esquinas sean lo mas agudo posible, dando una respuesta plena en la banda de paso y una transición rápida.

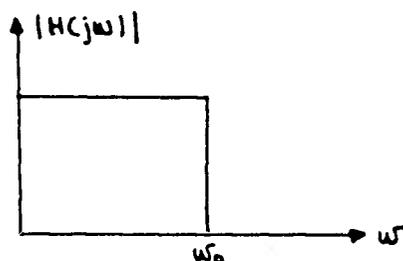


fig. 1.13 Filtro ideal paso bajas.

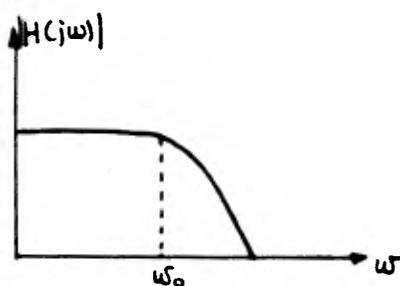


fig. 1.14 Forma real de un filtro paso bajas.

Dependiendo de las relaciones entre la banda de paso y la de rechazo, los filtros se pueden clasificar como:

### 1.4.1 Filtro Paso Bajas Ideal.

Idealmente estos filtros tienen la particularidad de permitir el paso de señales -

que van de una frecuencia de cero hertz ( corriente directa ) hasta una frecuencia determinada que se llama frecuencia de corte ( $\omega_c$ ); a partir de este valor de frecuencia la atenuación es muy alta, todo depende de la calidad del filtro como se muestra en la figura 1.15

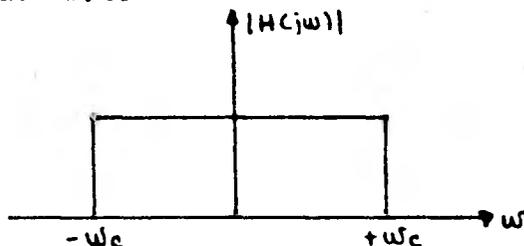


fig. 1.15 Filtro paso bajas ideal.

#### 1.4.2 Filtro Paso Altas Ideal.

Este filtro presenta propiedades inversas al anterior, ésto es, la atenuación para frecuencias altas es casi nula y para frecuencias menores que la de corte, es sumamente alta, según figura 1.16

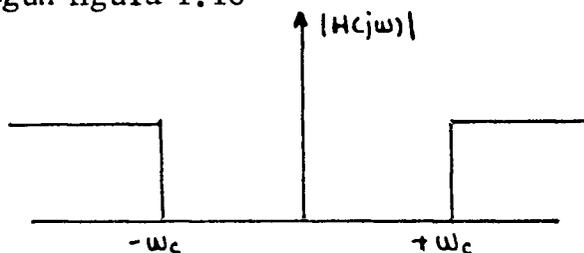


fig. 1.16 Filtro paso altas ideal.

#### 1.4.3 Filtro Paso Banda Ideal.

Estos filtros tienen la propiedad de permitir el paso de señales en un cierto rango de frecuencias; o sea, que para bajar frecuencias tiene alta atenuación, hasta un valor en que empieza a tener baja atenuación, a este se le llama frecuencia de corte inferior ( $\omega_{c1}$ ); y luego pasa un cierto rango y llega un valor de fre---

cuencias ( $\omega_{c2}$ ), y de corte superior para el cual tendrán un alto valor de - -  
atenuación las frecuencias superiores, como se ilustra en la figura 1.17

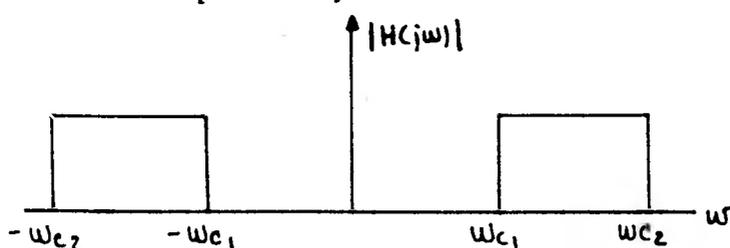


fig. 1.17 Filtro paso banda ideal.

#### 1.4.4 Filtro Supresor de Banda Ideal.

Este filtro se comporta en forma inversa al anterior; es decir, permite pasar -  
todas las frecuencias altas y bajas y atenúa fuertemente las intermedias entre la  
frecuencia de corte inferior y la frecuencia de corte superior. En este tipo de -  
filtro la pendiente de atenuación dependerá de la calidad del diseño, como se - -  
muestra en la figura 1.18

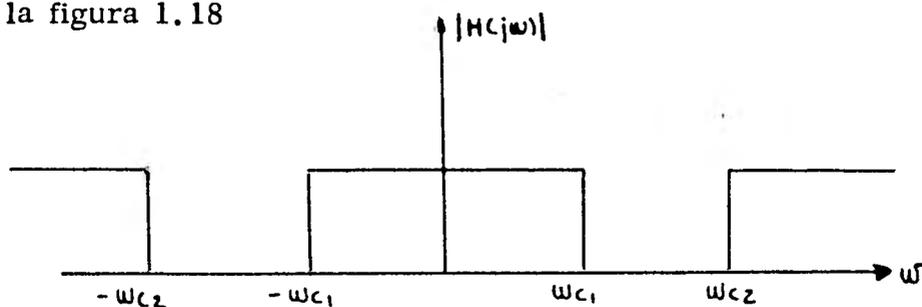


fig. 1.18 Filtro supresor de banda ideal.

## CAPITULO II

### FILTROS PÁSIVOS

#### 2.1 REDES DE DOS PUERTOS.

Como pudimos observar en el capítulo anterior, para poder llegar a un análisis y a la síntesis de alguna red eléctrica ya sea pasiva o activa, es necesario auxiliarse de una gran cantidad de conceptos matemáticos, que nos sirven para poder definir cada uno de los términos para el desarrollo de un filtro, esta herramienta matemática que se planteó anteriormente nos servirá como un complemento para poder entender cada uno de los conceptos que en el desarrollo de este capítulo se emplean para los filtros que analizaremos; además de la ayuda de otros nuevos conceptos.

Cuando hacemos un arreglo con una colección de elementos, los cuales pueden ser resistores capacitores o inductores; dentro de una red, a esto se le llama un filtro, el cual constituye un arreglo que obedece a un conjunto de leyes universales.

Si conectamos una señal eléctrica a la entrada de un circuito de dos terminales observaremos que la salida dependerá de esta señal de entrada y de todos los parámetros que componen la red.

Generalmente, una red de comunicación o una red de control, tienen un par de terminales conectados a la carga y un par de terminales conectados a la fuente, tal como se ilustra en la figura 2.1

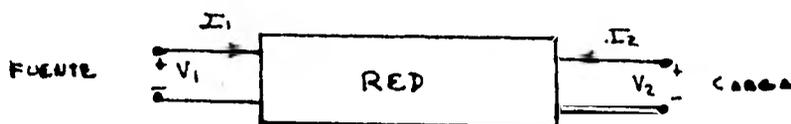


fig. 2.1 Representación de una red de dos puertos

Los pares de terminales que poseé la red se denominan "Puertos", de esta forma un puerto es un par de terminales en las que la corriente que entra por una terminal es igual a la corriente que sale por el otro.

La función de transferencia de un circuito de dos puertos puede ser:

- a) Razón de transferencia de voltaje.  $\frac{V_2}{V_1}$   
 b) Razón de transferencia de corriente.  $\frac{I_2}{I_1}$   
 c) Impedancia de transferencia.  $\frac{V_2}{I_1}$   
 d) Admitancia de transferencia.  $\frac{I_2}{V_1}$

La descripción del circuito en términos de los voltajes y corrientes en los puertos es:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las impedancias  $Z_{ij}$  son llamadas impedancias de circuito abierto. Los distintos parámetros de la red están definidos por:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} & Z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \\ Z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} & Z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cuando los circuitos son recíprocos  $Z_{21} = Z_{12}$ . Otra descripción posible del de dos puertos se obtiene usando análisis de malla en lugar de análisis de nodos.

En este caso las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

En donde las  $Y_{ij}$  son llamadas admitancias de corto circuito, las parámetros -

son:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad (2.4)$$

Así mismo para circuitos recíprocos  $Y_{21} = Y_{12}$ .

Ahora será posible relacionar los parámetros de circuito abierto y corto circuito con varias funciones de transferencia. Este tipo de relaciones se presentan muy frecuentemente en el diseño de filtros, cuando éstos deben de ser terminados en resistencias y como esta terminación afecta a la función de transferencia. La relación mas simple es la mostrada en la figura 2.2

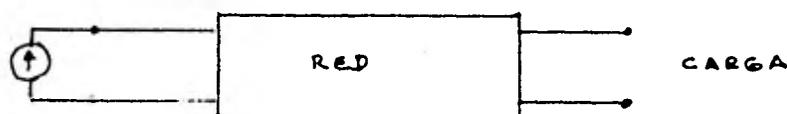


fig. 2.2 Red de dos puertos controlada por una fuente de corriente.

En la que se muestra una red de dos puertos, cuya carga es un circuito abierto, y la fuente es una fuente ideal de corriente con impedancia interna infinita.

La función de transferencia en este caso es la impedancia de transferencia de circuito abierto  $Z_{21}$ . Cuando la fuente es de voltaje con impedancia interna cero y un corto circuito de carga. La función de transferencia es la admitancia de corto circuito  $Y_{21}$ .

Veamos ahora otros tipos de configuraciones que aparecen normalmente en el diseño de filtros.

Consideremos una red de dos puertos en que la fuente es una fuente de voltaje,

la carga un circuito abierto y la función de transferencia es una relación de voltajes, según figura 2.3.



fig. 2.3 Red de dos puertos controlada por una fuente de voltaje.

Y como  $I_2 = 0$ , se tiene entonces que :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad (2.5)$$

En el caso en que la carga es una resistencia  $R$  y la fuente es de corriente, como se muestra en la figura 2.4

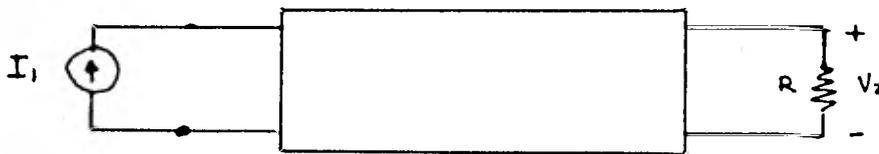


fig. 2.4 Red de dos puertos controlada por una fuente de corriente y una carga resistiva.

La función de transferencia en este caso es:

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \quad (2.6)$$

La ecuación anterior puede relacionarse con los parámetros de impedancia de - circuito abierto, así:

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (2.7)$$

Y cuando la carga es puramente resistiva tenemos:

$$V_2 = -I_2 R_2 \quad (2.8)$$

Y combinando estas dos últimas ecuaciones tenemos:

$$Z_{21} \frac{V_2}{I_1} = \frac{Z_{21} R}{Z_{22} + R} \quad (2.9)$$

Y si normalizamos de tal forma que  $R = 1$ , la ecuación quedaría así:

$$Z_{21} = \frac{Z_{21}}{Z_{22} + 1} \quad (2.10)$$

Ahora si la fuente en el caso anterior, fuera una fuente de voltaje, como se muestra en la figura 2.5. Y siguiendo un procedimiento análogo al anterior, se obtendría:

$$Y_{21} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{Y_{21} G}{Y_{22} + G} \quad (2.11)$$

En donde la  $G = 1/R$ , y la función de transferencia de voltaje sería en este caso:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + G} = -R Y_{21} \quad (2.12)$$

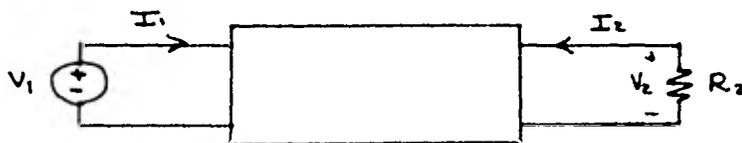


fig. 2.5 Red de dos puertos controlada por una fuente de voltaje y una carga resistiva.

Así con procedimientos similares se pueden obtener relaciones para las configuraciones mostradas en la figura 2.6

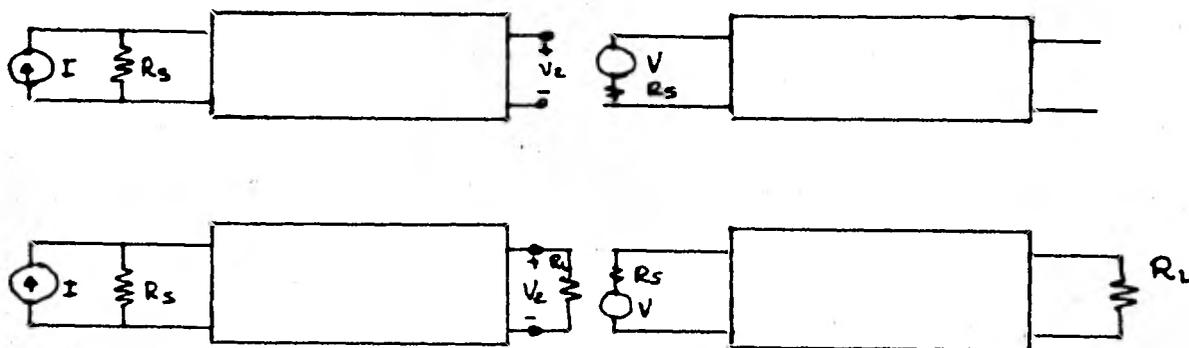


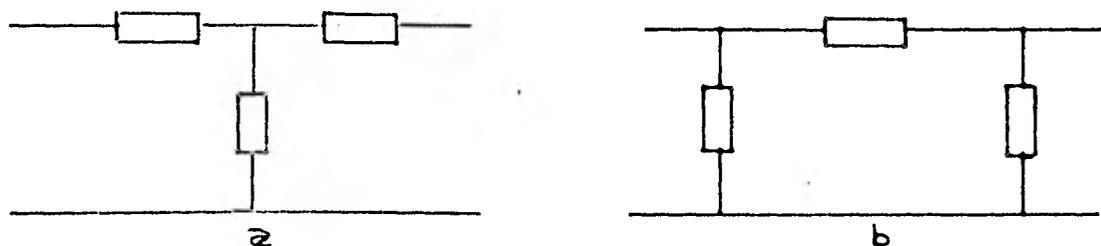
fig. 2.6 Diferentes arreglos de redes de dos puertos.

Ahora que hemos definido algunas funciones de transferencia de corriente y voltaje, así como de impedancia de redes combinadas, podemos decir que un filtro se puede considerar como una red eléctrica que impide el paso de ciertas fre---cuencias y permite el paso de otras.

Los filtros pasivos se pueden clasificar en; Filtros Paso Bajas, Filtros Paso - Altas, Paso Banda y Supresor de Banda.

Así, un circuito que realiza las funciones anteriores, estará compuesto por -- reactancias, o sea elementos que son función de la frecuencia.

Existen cinco configuraciones básicas de redes, las cuales se muestran en la - figura 2.7



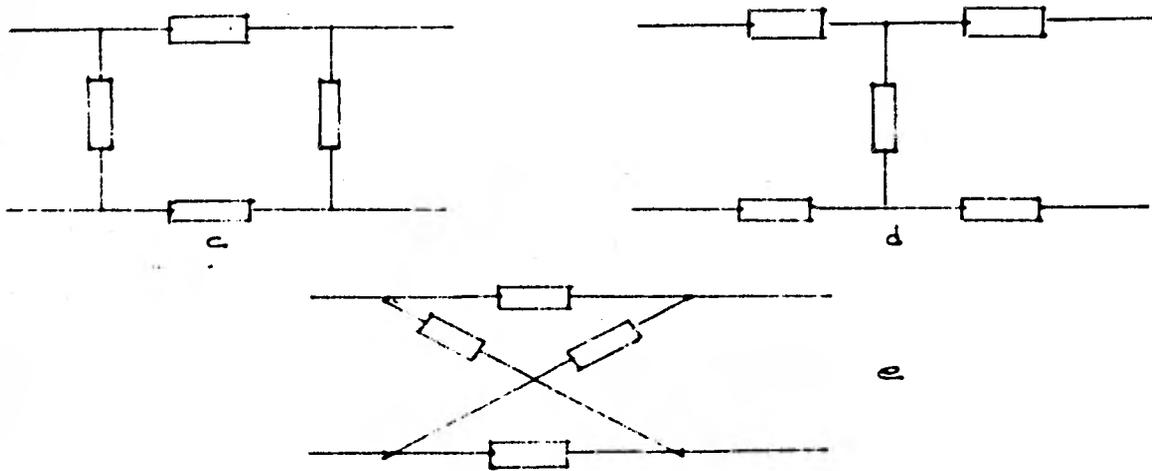


fig. 2.7

- 7.a) Red Tipo T  
 7.b) Red Tipo  $\Pi$   
 7.c) Red Tipo O  
 7.d) Red Tipo H  
 7.e) Red Tipo Puente o Celocia

Cada bloque en los diagramas anteriores, puede estar ocupado por una reactancia inductiva, capacitiva o un circuito resonante serie o paralelo. las formas  $\Pi$  y O se derivan de las T y  $\Pi$  respectivamente.

Ahora daremos algunas impedancias de entrada para algunos circuitos, las cuales nos servirán mas adelante para el desarrollo de filtros pasivos.

Empesaremos con la figura 2.8, que es una sección de Tipo T.

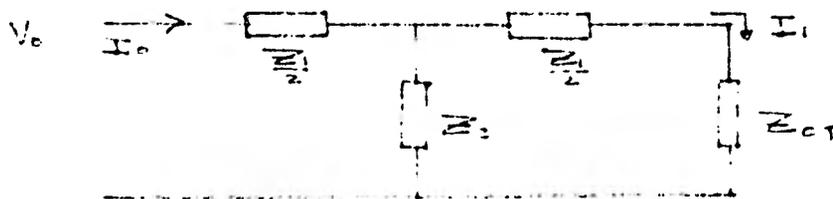


fig. 2.8 Sección tipo T.

$$Z_{oT} = \frac{Z_1 Z_2}{4} + Z_1 Z_2 \quad (2.13)$$

Para el caso del Tipo II, tenemos que la impedancia se deduce a partir de las admitancias de la red, como se muestra en la figura 2.9

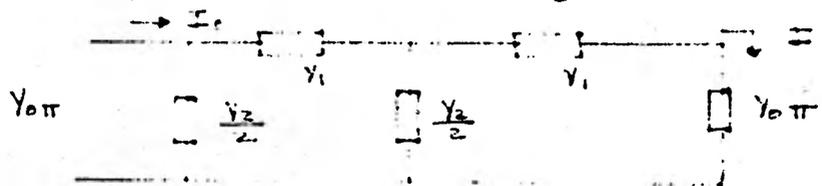


fig. 2.9

$$Y_{o\pi} = \frac{Y_2^2}{4} + Y_1 Y_2 \quad Z_{o\pi} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{oT}} \quad (2.14)$$

Y como para nuestro análisis es de interés que los circuitos estén formados con elementos LC y RC, entonces de una manera fácil para el entendimiento y no estar analizando cada uno de los tipos de redes, antes mencionados; resumimos que en una tabla las impedancias de entrada de algunos circuitos LC, tabla 2.1 y RC, en la tabla 2.2, en donde además del circuito podremos observar la colocación de los polos y ceros que contienen dichas funciones dentro de un patrón de polos y ceros.

CIRCUITO.	IMPEDANCIA DE ENTRADA.	PATRON DE POLOS Y CEROS.
	$Z = sL$	
	$Z = \frac{1}{sC}$	

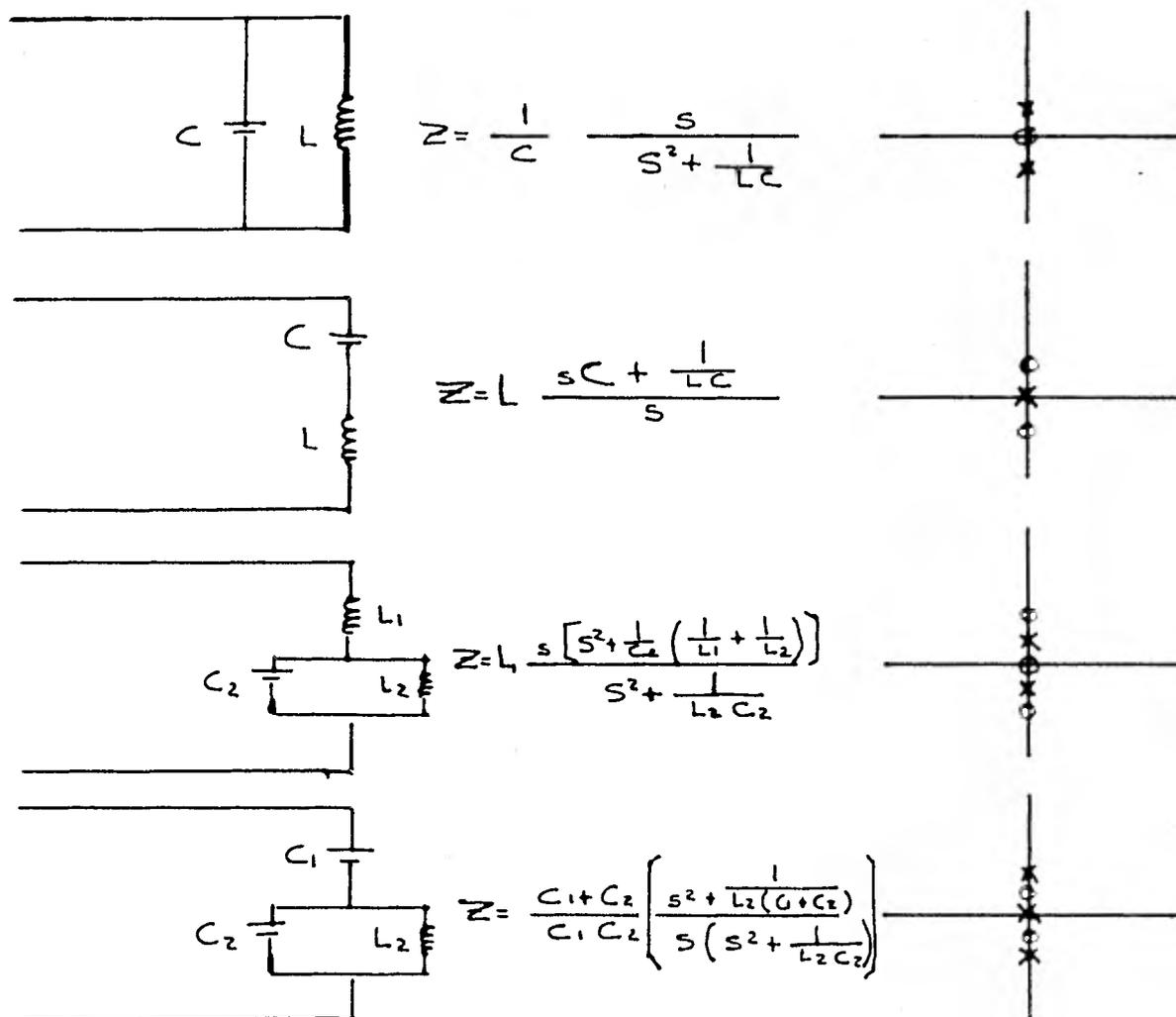


Tabla 2.1 Impedancias de entrada, circuitos LC

Obsérvese en la tabla 2.1 de circuitos LC, que los polos y ceros están sobre el eje imaginario y son simples y alternados; y esto siempre se cumplirá para cualquier circuito LC.

Los circuitos LC, se diferencian en su impedancia de entrada solamente, de acuerdo al número total de polos y ceros; y sus localizaciones sobre el eje imaginario y en ningún caso podrán nunca estar juntos dos polos o ceros, ya que el

patrón es siempre alternado; polo, cero, polo, cero, y la frecuencia crítica es simple.

Un par de frecuencias críticas  $\pm j\omega_0$  sin embargo forma el factor  $(s^2 + \omega_0^2)$ , esto dependerá de lo que exista sobre el origen de un polo o un cero, el cual fijará el patrón de polos y ceros.

Así, si recordamos que nuestra función de transferencia que habíamos definido tenía la siguiente forma:

$$Z(s) = H \frac{(s^2 + \omega_{z1}^2)(s^2 + \omega_{z2}^2)}{s(s^2 + \omega_{p1}^2)(s^2 + \omega_{p2}^2)}$$

$$Z(s) = H \frac{s(s^2 + \omega_{z1}^2)(s^2 + \omega_{z2}^2)}{(s^2 + \omega_{p1}^2)(s^2 + \omega_{p2}^2)} \quad (2.15)$$

En donde H, es constante y positiva. Si la frecuencia crítica alta nos da un par de polos, entonces el grado del denominador es uno mas que el del numerador; - y si son un par de ceros, entonces el grado del numerador es uno mas que el del denominador.

Para los circuitos RC, la expansión de la impedancia de entrada y la localización de polos y ceros, será de la siguiente manera:

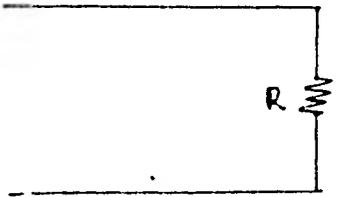
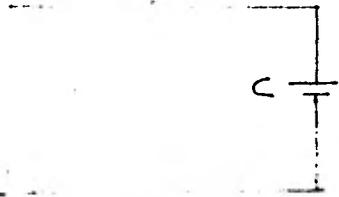
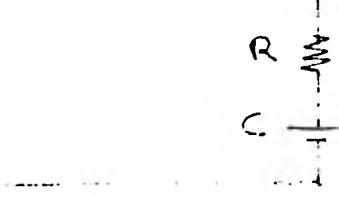
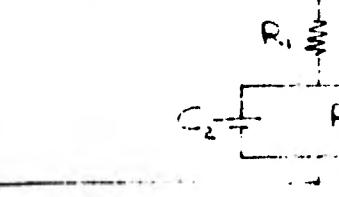
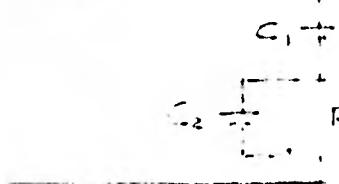
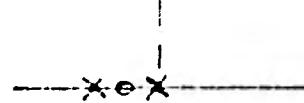
- a) Los ceros estarán sobre el eje real negativo y serán simples.
- b) Los polos estarán sobre el eje real negativo, podrá haber un polo al origen y todos los polos serán simples.
- c) Los polos y ceros estarán siempre alternados.
- d) La primera frecuencia crítica cerca del origen será siempre un polo y la última frecuencia crítica podrá ser un polo o un cero.

En este caso vimos que la función de transferencia sería:

$$Z(s) = H \frac{(s + \alpha_2)(s + \alpha_1)}{(s + \alpha_3)(s + \alpha_4)} \quad (0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4)$$

En donde  $H_1$  era una constante real y positiva. Si la frecuencia crítica es un polo, entonces el grado de polinomio del denominador es uno mas que el del polinomio del numerador

En otras ocasiones estos polinomios podrán tener el mismo grado.

CIRCUITO.	IMPEDANCIA DE ENTRADA.	PATRON DE POLOS Y CEROS.
	$Z = R$	Sin polos Sin Ceros
	$Z = \frac{1}{sC}$	
	$Z = \frac{1}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$	
	$Z = \frac{R (s + \frac{1}{RC})}{s}$	
	$Z = \frac{R_1 [s + \frac{1}{C_2} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})]}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$	
	$Z = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \left[ s + \frac{1}{R_2 (C_1 + C_2)} \right] \frac{1}{s (s + \frac{1}{R_2 C_2})}$	

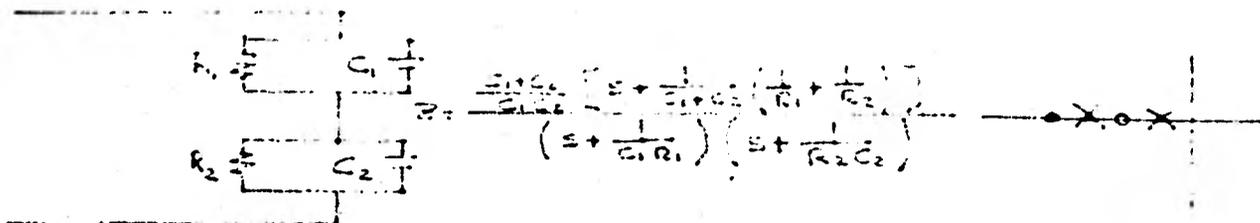


Tabla 2.2 Impedancias de entrada de circuitos RC.

En base a lo anterior podremos decir entonces que las propiedades de un circuito de dos terminales de elementos R L C y fuentes dependientes lineales, se pueden caracterizar completamente por su función impedancia de entrada. Ya que esta relación establece conexión entre el dominio de la frecuencia compleja y el voltaje y corriente de entrada, proporcionadas por la excitación externa de entrada al circuito.

La impedancia de un circuito es la relación del voltaje de entrada  $V(s)$  y la corriente de entrada  $I(s)$ .

Los polos y ceros de la impedancia de entrada de un circuito LC, son simples y sobre el eje imaginario estarán alternados, habrá además un polo o un cero en el origen  $Z_{LC}(s)$ , será una función impar de  $S$ .

El infinito  $Z_{LC}(s)$  es infinito a cero. Las propiedades sobre el eje  $j\omega$  de  $Z_{LC}(s)$ , son descritos por la función.

$$j X(\omega) = Z_{LC}(j\omega) \quad (2.16)$$

Y entre cual quiera, dos polos sucesivos de  $Z_{LC}$  la curva  $X(\omega)$ , tendrá una pendiente que va de  $-\infty$  a  $\infty$ .

Los polos y ceros de un circuito con impedancia de entrada RC, serán simples y en la región negativa del eje real y alternados; y la primera frecuencia crítica

encontramos que cerca del origen es siempre un polo.

Dado un circuito sin ninguna fuente independiente de excitación, podemos calcular su impedancia de entrada: Que es análisis. Y esto también es importante para obtener un circuito cuando la impedancia de entrada es dada: Que es síntesis.

El análisis muestra que la impedancia de entrada de un circuito RC o RL, debe obedecer varias reglas.

Consecuentemente una función que obedece estas reglas puede ser realizada con un circuito de dos terminales RC o RL.

La solución nunca podrá ser única, ya que varios circuitos que tengan la misma impedancia podrán ser hallados. El procedimiento es descomponer la función racional en varias partes, en donde se podrá reconocer si la impedancia de entrada es un resistor, un capacitor, un inductor o alguna combinación entre éstos.

Existen dos métodos para poder descomponer en partes la función racional, el primero consiste en una expansión de fracciones parciales y la otra una expansión de fracciones continuas.

Nosotros haremos un enfoque en dos circuitos para filtros pasivos que son de mayor importancia, debido a la relación que existe entre ellos. Y es por eso que en muchas ocasiones se les llama, formas canónicas.

El circuito resultante de una expansión en fracciones parciales es llamado circuito Foster; y el que se obtiene de la expansión en fracciones continuas es el circuito Cauer.

Así para el diseño de filtros pasivos nos enfocaremos en cuatro circuitos que son:

- a) CAUER I
- b) CAUER II
- c) FOSTER I
- d) FOSTER II

Y que podrán servir de base para el análisis de cualquier otro circuito de interés.

## 2.2 CIRCUITOS FOSTER LC.

Existen dos realizaciones foster asociadas con la función impedancia de entrada descrita por polos y ceros simples sobre el eje imaginario.

El primer circuito Foster I, se obtiene por medio de una expansión de fracciones parciales de  $Z(s)$ , también con la expansión de fracciones parciales de  $Y(s)$  se obtiene el segundo circuito Foster II.

### 2.2.1 Realización Foster I.

Para obtener el circuito Foster I, considere  $Z(s)$  para un circuito LC en la siguiente forma:

$$Z(s) = H \frac{(s^2 + \omega_{z1}^2)(s^2 + \omega_{z2}^2)}{s(s^2 + \omega_{p1}^2)(s^2 + \omega_{p2}^2)} \quad (2.17)$$

Si  $\omega_{z1}$  se hace cero,  $Z(s)$  tiene un cero al origen y el grado del polinomio del numerador es uno mas que el del denominador (causando un polo a infinito) es uno menor (resultando un cero a infinito). Si  $Z_{LC}$  tiene un polo a infinito entonces dividiendo obtenemos:

$$Z(s) = Hs + Z_L(s) \quad (2.18)$$

Donde  $Z_L(s)$  esta ahora en una forma propia y el numerador tiene un grado menor que el denominador. Si expandemos  $Z_L(s)$  en fracciones parciales y conjugamos los términos complejos de  $Z(s)$ , tenemos.

$$Z(s) = Hs + \frac{k_0}{s} + \frac{k_1 s}{s^2 + \omega_{p1}^2} + \frac{k_2 s}{s^2 + \omega_{p2}^2} + \dots + \frac{k_n s}{s^2 + \omega_{pn}^2} \quad (2.19)$$

Donde las K's son evaluadas así:

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s Z(s)$$

$$K_i = \frac{s^2 + \omega_{pi}^2}{s} Z(s) \Big|_{s^2 = -\omega_{pi}^2}$$

Donde todas las K's serán reales y positivas.

El primer término  $Hs$ , es la impedancia de un inductor de  $H$  henry's en valor.

El segundo término  $K_0/s$  es la impedancia de un capacitor de  $1/K_0$  faradios en valor.

El tercer término es el siguiente:

$$Z_3 = \frac{k_1 s}{s^2 + \omega_{p1}^2} = \frac{1}{s(1/k_1) + \frac{1}{s(k_1/\omega_{p1}^2)}} = Y_3 \quad (2.20)$$

Esta es la suma de dos admitancias, la primera  $1/K_1$ , representa un capacitor y el segundo un inductor de  $\frac{k_1}{\omega_{p1}^2}$  henry's.

La realización completa Foster I, es mostrada a continuación en la figura

2.10

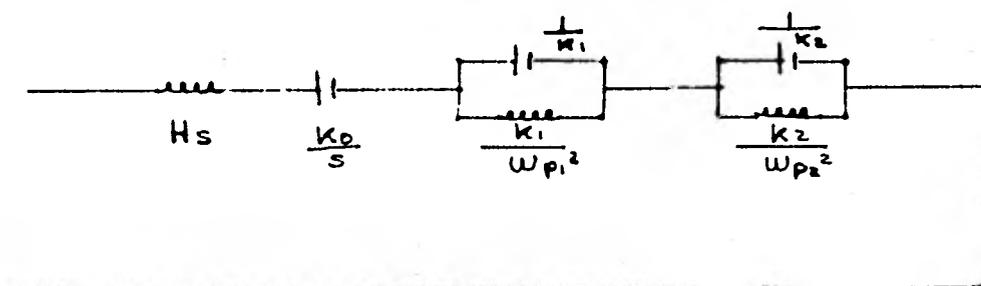


fig. 2.10 Realización Foster I.

Algunas observaciones importantes serán hechas para el estudio del circuito Foster I :

1) Este presenta una realización de impedancia de entrada de cualquier función -

racional con un factor de escala positivo con polos y ceros arreglados en forma alternativa sobre el eje imaginario.

2) El primer inductor hace que  $Z(s)$  sea infinito para  $s = \infty$ , si este está ausente  $Z(\infty) = 0$ , debido a los capacitores que están entre las terminales de entrada.

3) El primer capacitor hace que  $Z(s)$  sea infinito para  $s = 0$ , si éste está ausente  $Z(0) = 0$ , debido a los inductores que están entre las terminales de entrada.

4) Un número mínimo de elementos será usado para realizar  $Z(s)$ . Hay un elemento por cada polo de  $Z(s)$ , incluyendo uno a infinito.

5) El número de capacitores o inductores siempre son iguales o difieren en uno.

6) El primer inductor en serie expresa un polo a infinito. El primer capacitor en serie expresa un polo al origen y el primer circuito paralelo LC, expresa un par de polos.

Como hemos visto el número de polos determina el número de elementos, si el número de elementos es impar debemos considerar  $Z(0)$  ó  $Z(\infty)$ :

$Z(0) = 0$  El capacitor en serie no estará presente y el primer elemento será L

$Z(0) = \infty$  El capacitor en serie si estará presente.

$Z(\infty) = 0$  El inductor en serie no estará presente y el primer elemento será C

$Z(\infty) = \infty$  El inductor en serie si estará presente.

Si el número de elementos es par, el inductor en serie y el capacitor deberán estar ausentes o presentes.

$Z(0) = 0$  Ambos estarán ausentes.

$Z(0) = \infty$  Ambos estarán presentes.

$Z(\infty) = 0$  Ambos estarán ausentes.

$Z(\infty) = \infty$  Ambos estarán presentes.

### 2.2.2 Realización Foster II.

Para obtener el circuito Foster II, expandemos  $Y(s)$  en fracciones parciales. -

En su forma mas general  $Y(s)$ , es dada por:

$$Y(s) = H \frac{(s^2 + \omega_{z1}^2)(s^2 + \omega_{z2}^2)}{S(s^2 + \omega_{p1}^2)(s^2 + \omega_{p2}^2)} \quad (2.21)$$

La cual tiene una expansión de fracciones parciales, dada por:

$$Y(s) = Hs + \frac{k_0}{S} + \frac{k_1 s}{s^2 + \omega_{p1}^2} + \frac{k_2 s}{s^2 + \omega_{p2}^2} + \frac{k_n s}{s^2 + \omega_{pn}^2} \quad (2.22)$$

Las K's. son todas positivas y reales; y son halladas de la siguiente forma:

$$K_0 = S Y(s) \Big|_{s=0} \quad (2.23)$$

$$K_i = \frac{S + \omega_{pi}^2}{S} Y(s) \Big|_{s = -\omega_{pi}} \quad (2.24)$$

El primer término  $Hs$ , es la admitancia de un capacitor de (H) valor en farados.

El segundo término  $K_0/s$ , es la admitancia de un inductor de  $1/K_0$  valor en henry's.

El tercer término es:

$$Y_3 = \frac{k_1 s}{s^2 + \omega_{p1}^2} = \frac{1}{s \left( \frac{1}{k_1} \right) + \frac{1}{s \left( \frac{k_1}{\omega_{p1}^2} \right)}} = \frac{1}{Z_3} \quad (2.25)$$

$$Z_3 = \sum \left( \frac{1}{k_i} \right) + \frac{1}{\sum \left( \frac{k_i}{\omega_{p_i}^2} \right)} \quad (2.26)$$

La impedancia  $Z_3$  representa la combinación serie de un inductor de  $1/K_1$  - henry's con un capacitor de  $\frac{k_1}{\omega_{p_1}^2}$  faradios.

La realización Foster II, completa, es representada en la siguiente figura ---

2.11

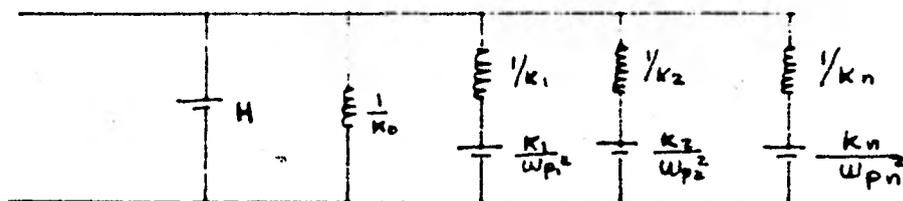


fig. 2.11 Realización Foster II

Algunas observaciones importantes para esta configuración son analizadas a continuación:

- 1) El circuito representa una realización de impedancia de entrada de cualquier función racional con factor de escala positivo y con polos y ceros simples.
- 2) El primer capacitor hace  $Z(s) = 0$  para  $s = \infty$ , si éste está ausente  $Z(\infty) = \infty$ . Porque los inductores en paralelo causan un circuito abierto en  $s = \infty$ .
- 3) El primer inductor hace que  $Z(s) = 0$  para  $s = 0$  y si éste está ausente ---  $Z(0) = \infty$ . Porque los capacitores en paralelo causan un circuito abierto en ---  $s = 0$ .
- 4) Existirá un elemento por cada polo de  $Z(s)$ , incluyendo cualquiera a infinito.
- 5) El número de inductores es igual al número de capacitores o difieren en uno.
- 6) El circuito expresa todos los ceros de  $Z(s)$ .

$$Z_3 = \sum \left( \frac{1}{k_i} \right) + \frac{1}{\sum \left( \frac{k_i}{\omega_{p_i}^2} \right)} \quad (2.26)$$

La impedancia  $Z_3$  representa la combinación serie de un inductor de  $1/K_1$  - henry's con un capacitor de  $\frac{k_1}{\omega_{p_1}^2}$  faradios.

La realización Foster II, completa, es representada en la siguiente figura ---

2.11

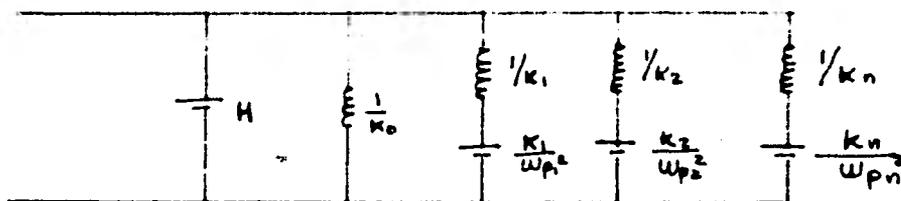


fig. 2.11 Realización Foster II

Algunas observaciones importantes para esta configuración son analizadas a - continuación:

- 1) El circuito representa una realización de impedancia de entrada de cualquier función racional con factor de escala positivo y con polos y ceros simples.
- 2) El primer capacitor hace  $Z(s) = 0$  para  $s = \infty$ , si éste está ausente  $Z(\infty) = \infty$ . Porque los inductores en paralelo causan un circuito abierto en  $s = \infty$ .
- 3) El primer inductor hace que  $Z(s) = 0$  para  $s = 0$  y si éste está ausente - - -  $Z(0) = \infty$ . Porque los capacitores en paralelo causan un circuito abierto en - -  $s = 0$ .
- 4) Existirá un elemento por cada polo de  $Z(s)$ , incluyendo cualquiera a infinito.
- 5) El número de inductores es igual al número de capacitores o difieren en uno.
- 6) El circuito expresa todos los ceros de  $Z(s)$ .

El primer capacitor en paralelo representa un cero a infinito.

El primer inductor en paralelo representa un cero al origen.

La primera combinación LC, representa un par de ceros a  $\pm j\omega_{pi}$ .

El circuito Foster II, puede ser dibujado directamente dado  $Z(s)$  y con el número de polos y  $Z(0)$  y  $Z(\infty)$ .

Si el número de elementos es impar cualquier capacitor o inductor en paralelo estará presente.

El capacitor en paralelo hace  $Z(\infty) = 0$ , si no, no existe.

El inductor en paralelo hace  $Z(0) = 0$ , si no, no existe.

Si el número de elementos es par, el capacitor y el inductor están ambos presentes o ausentes.

Si  $Z(0) = 0$  Están ambos presentes.

Si  $Z(0) = \infty$  Están ambos ausentes.

La expansión en fracciones parciales de  $V(s)$ , es necesaria solamente para hallar el valor de los elementos.

### 2.2.3 Ejemplos.

Ejemplo: Realización Foster I.

$$Z(s) = H \frac{S(S^2 + 4)}{(S^2 + 1)(S^2 + 9)}$$

Asumimos que  $H = 1$ .

$Z(s)$  tiene polos en  $\pm j1$ ,  $\pm j3$ . Y tiene ceros en  $\pm 2$ , y uno en infinito.

Los polos y ceros son simples y alternados, como  $Z(s)$  tiene cuatro polos - puede ser realizado con cuatro elementos; ahora  $Z(0) = 0$  por lo tanto el capa-

citor en serie no existe, tampoco el inductor en serie ya que el número de elementos es par o  $Z(\infty) = 0$ , por lo tanto el circuito resultante puede ser dibujado como se muestra a continuación en la figura 2.12

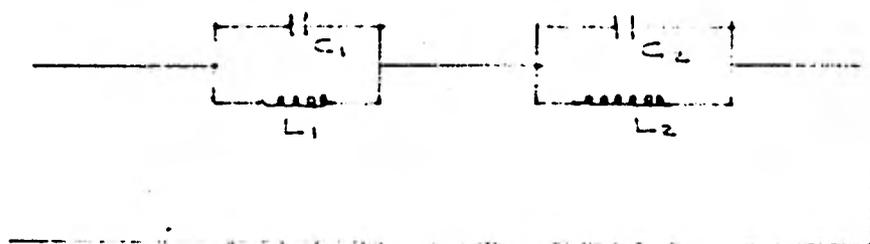


fig. 2.12 Realización Foster I, del ejemplo arriba mencionado.

Para hallar el valor de los elementos expandemos  $Z(s)$  en fracciones parciales.

$$Z(s) = \frac{K_1 S}{S^2+1} + \frac{K_2 S}{S^2+9}$$

$$K_1 = Z(s) \frac{S^2+1}{S} \Big|_{S^2=-1} = \frac{S^2+4}{S^2+9} \Big|_{S^2=-1} = \frac{3}{8}$$

$$K_2 = Z(s) \frac{S^2+9}{S} \Big|_{S^2=-9} = \frac{S^2+4}{S^2+1} \Big|_{S^2=-9} = \frac{5}{8}$$

entonces

$$Z(s) = \frac{\frac{3}{8} S}{S^2+1} + \frac{\frac{5}{8} S}{S^2+9} = Z_1 + Z_2$$

$$Z_1 \text{ para } S \text{ pequeña es } \frac{3}{8} S \quad L_1 = \frac{3}{8}$$

$$Z_2 \text{ para } S \text{ pequeña es } \frac{5}{72} S \quad L_2 = \frac{5}{72}$$

$$Z_1 \text{ para } S \text{ grande es } \frac{3}{8} S \quad C_1 = \frac{8}{3}$$

$$Z_2 \text{ para } S \text{ grande es } \frac{5}{8} S \quad C_2 = \frac{8}{5}$$

Ejemplo: Realización Foster II.

$$Z(s) = \frac{S (S^2 + 4)}{(S^2+1) (S^2+9)}$$

$Z(s)$  tiene cuatro polos de donde el circuito tendrá cuatro elementos.  $Z(0) = 0$ , donde el inductor en paralelo deberá estar presente, además el capacitor debe estar presente también, ya que el número de elementos es par o  $Z(\infty) = 0$ , así, el circuito resultante será el de la siguiente figura 2.13

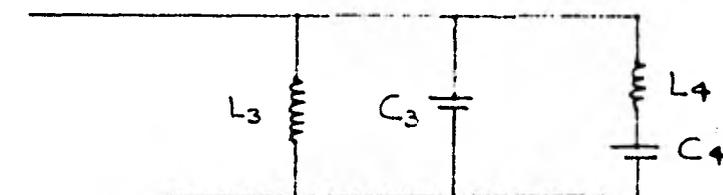


fig. 2.13 Circuito del ejemplo Foster II.

$$Z(s) \text{ para } S \text{ pequeña es } \frac{4}{9} \text{ de donde } L_3 = \frac{4}{9}$$

$$Z(s) \text{ para } S \text{ grande es } \frac{1}{S} \text{ de donde } C_3 = 1$$

De la expansión en fracciones parciales de  $Y(s)$  los otros dos elementos podrán ser hallados.

$$Y(s) = \frac{(S^2+1)(S^2+9)}{S(S^2+4)} = Y_3 + Y_4 = Y_3 + \frac{K_1 S}{S^2+4}$$

Donde  $Y_3$  representa la admitancia de dos elementos que fueron ya calculados - de la forma asintótica de  $Z(s)$ .

$$K_1 = Y(s) \frac{S^2 + 4}{S} \Big|_{S^2 = -4} = \frac{(S^2 + 1)(S^2 + 9)(S^2 + 4)}{S(S^2 + 4)} \Big|_{S^2 = -4} = \frac{(-3)(5)}{(-4)} = \frac{15}{4}$$

$$Y_3 = \frac{K_1 S}{S^2 + 4} = \frac{\frac{15}{4} S}{S^2 + 4}$$

$$Y_3 \text{ para } S \text{ pequeña} = \frac{15 S}{16} \quad C_4 = \frac{16}{15}$$

$$Y_3 \text{ para } S \text{ grande} = \frac{15}{48} \quad L_4 = \frac{4}{15}$$

### 2.3 CIRCUITOS CAUER LC.

Existen dos circuitos cauer asociados con una impedancia de entrada LC, la cual es realizable. La forma general de los circuitos cauer es mostrada en la figura 2.14

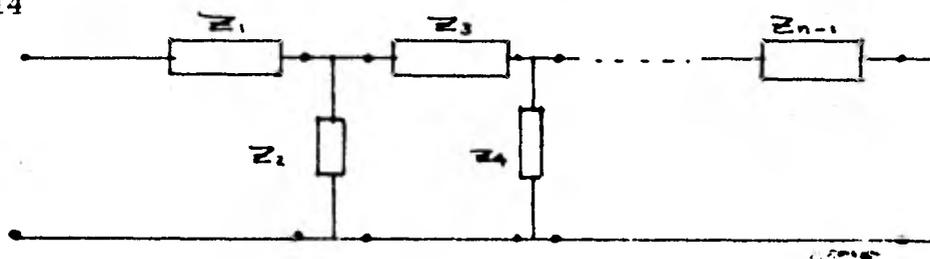


fig. 2.14 Circuito Cauer

Reconociendo el patrón serie paralelo repetitivo del circuito, la impedancia -- puede ser escrita por inspección de la figura 2.14, con la ayuda de una expansión de fracciones continuas, como se muestra a continuación:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{\dots Z_{n-1} + \frac{1}{Y_n}}}}} \quad (2.27)$$

En el circuito LC  $Z_1$  ó  $Z_n$ , ambos serán cero dependiendo del valor de la impedancia a frecuencia cero o infinito. En el circuito Cauer I, los inductores están en serie y los capacitores están en paralelo. En el circuito Cauer II, los elementos en serie son capacitores y en paralelo están los inductores.

El número de elementos es igual al número de polos  $Z(s)$ , considerando algún polo en el origen o infinito, así como algún cero.

#### 2.3.1 Realización Cauer I.

La expansión Cauer I, se puede realizar con  $Z(s)$  o  $Y(s)$  haciendo un arreglo del polinomio del numerador y del denominador en potencias de crecientes de  $S$ .

Se usara la impedancia  $Z(s)$  si el primer elemento es un inductor en serie -- ( $Z(\infty) = \infty$ ) y se empleara la admitancia  $Y(s)$  si el primer elemento es un capacitor en paralelo ( $Z(\infty) = 0$ ) finalmente, el último elemento será un inductor si  $Z(0) = 0$  y será un capacitor si  $Z(0) = \infty$ .

La expansión de parciales continuas con el que se realiza el circuito Cauer I, es de la siguiente forma:

$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{L_3 s + \frac{1}{\dots}}} + \frac{1}{b_n s} \quad (2.28)$$

### 2.3.2 Realización Cauer II.

La expansión Cauer II, se puede realizar con la función de impedancia  $Z(s)$  o la función admitancia  $Y(s)$  acomodando el polinomio del numerador y denominador en potencias ascendentes de  $S$ .

Emplearemos la función  $Z(s)$  si  $Z(0) = \infty$  lo cual requiere el primer elemento o sea un capacitor en serie. Si  $Z(0) = 0$  entonces el primer elemento sera un inductor en paralelo.

El último elemento de circuito será un inductor si  $Z(\infty) = \infty$  y será un capacitor si  $Z(\infty) = 0$ .

La forma de la expansión de fracciones parciales para este tipo de realización - Cauer II, es como se muestra a continuación .

$$Z(s) = \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_2 s} + \frac{1}{\frac{1}{C_3 s} + \frac{1}{\frac{1}{L_4 s} + \frac{1}{\dots}}}} \quad (2.29)$$

Observamos que el circuito resultante para la realización Cauer I, es como se muestra en la figura 2.15 y para la realización Cauer II, como se muestra en la figura 2.16

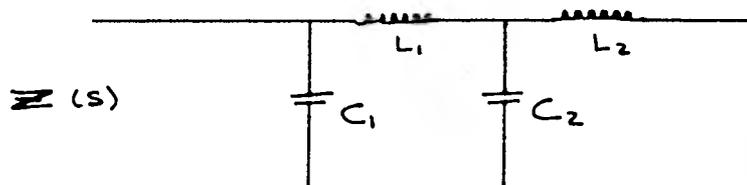


fig. 2.15 Realización Cauer I.

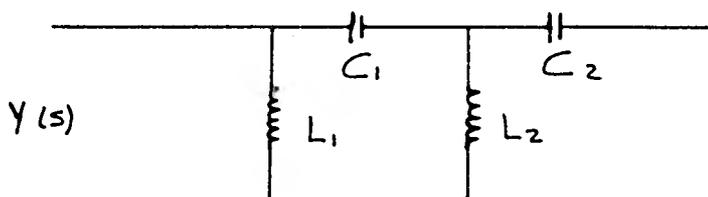


fig. 2.16 Realización Cauer II.

El circuito tendrá la siguiente forma; como se muestra en la figura 2.17, si la función de impedancia es  $Z(s)$  tiene un cero a infinito. La otra posibilidad será invertir  $Z(s)$  para obtener la admitancia  $Y(s) = 1/Z(s)$ , la cual tendrá un polo a infinito en este caso.

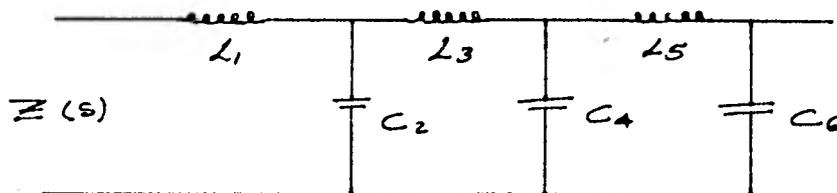


fig. 2.17 Realización Cauer II

Con una expansión de fracciones parciales continuas calculamos el valor de - cada uno de los elementos del circuito. La única diferencia en éste caso será la ausencia del inductor  $L_1$  que es igual a cero y el cero de la impedancia infinita será  $C_2$ . El circuito resultante será como el de la figura 2.18

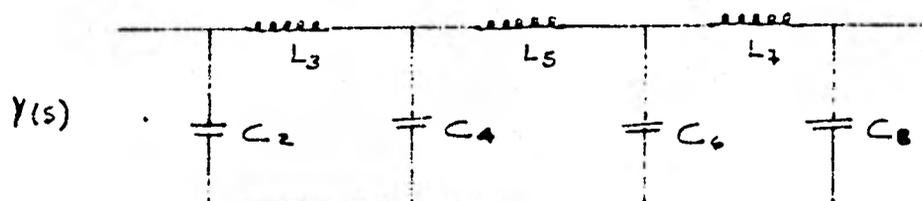


fig. 2.18  $Z(s)$  tiene un cero a infinito.

Por otro lado, si la función de impedancia  $Z(s)$  tiene un cero en el origen (la función de admitancia  $Y(s)$  tendrá un polo), entonces el circuito será como el de la figura 2.19

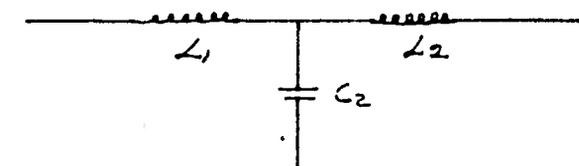


fig. 2.19  $Z(s)$  tiene un cero en el origen.

Si la función de impedancia tiene un polo en el origen (la admitancia tendrá un cero), el circuito resultante será como se muestra en la figura 2.20

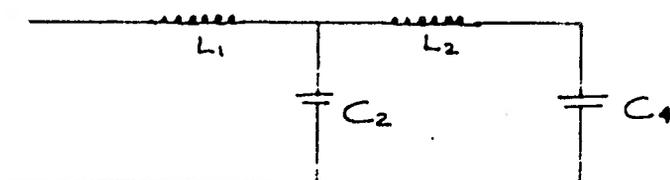
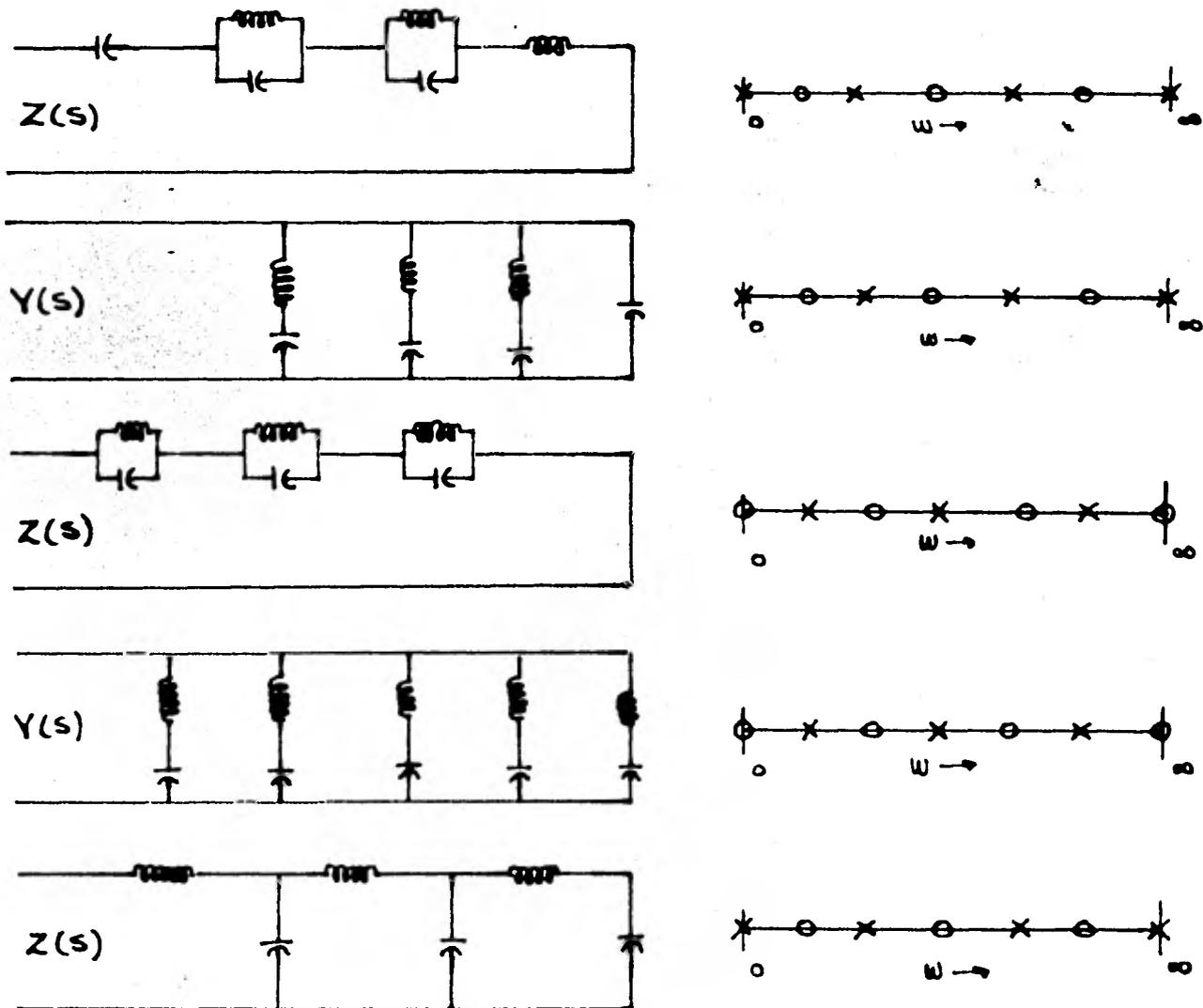


fig. 2.20  $Z(s)$  tiene un polo en el origen.

Para entender mejor este tipo de circuitos; en la figura 2.21.a, se muestra una tabla con circuitos Foster y sus respectivos circuitos Cauer. Así como sus correspondientes patrones de frecuencias donde observamos la forma en que van alternados los polos y los ceros en el plano complejo. Además en la figura 2.21.b, se muestran algunas relaciones de impedancia y admitancia, para algunas realizaciones Foster y Cauer, mas frecuentes.



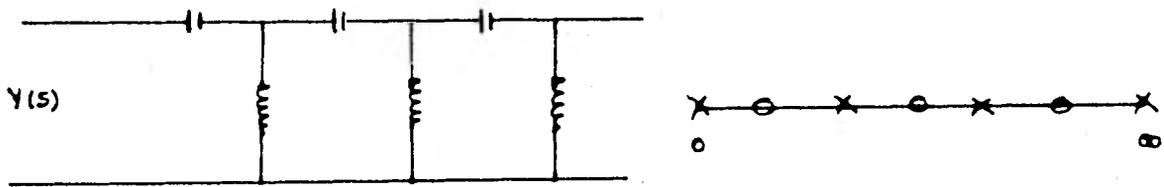


fig. 2.21.a Circuitos Foster y Cauer con sus correspondientes patrones de frecuencia.

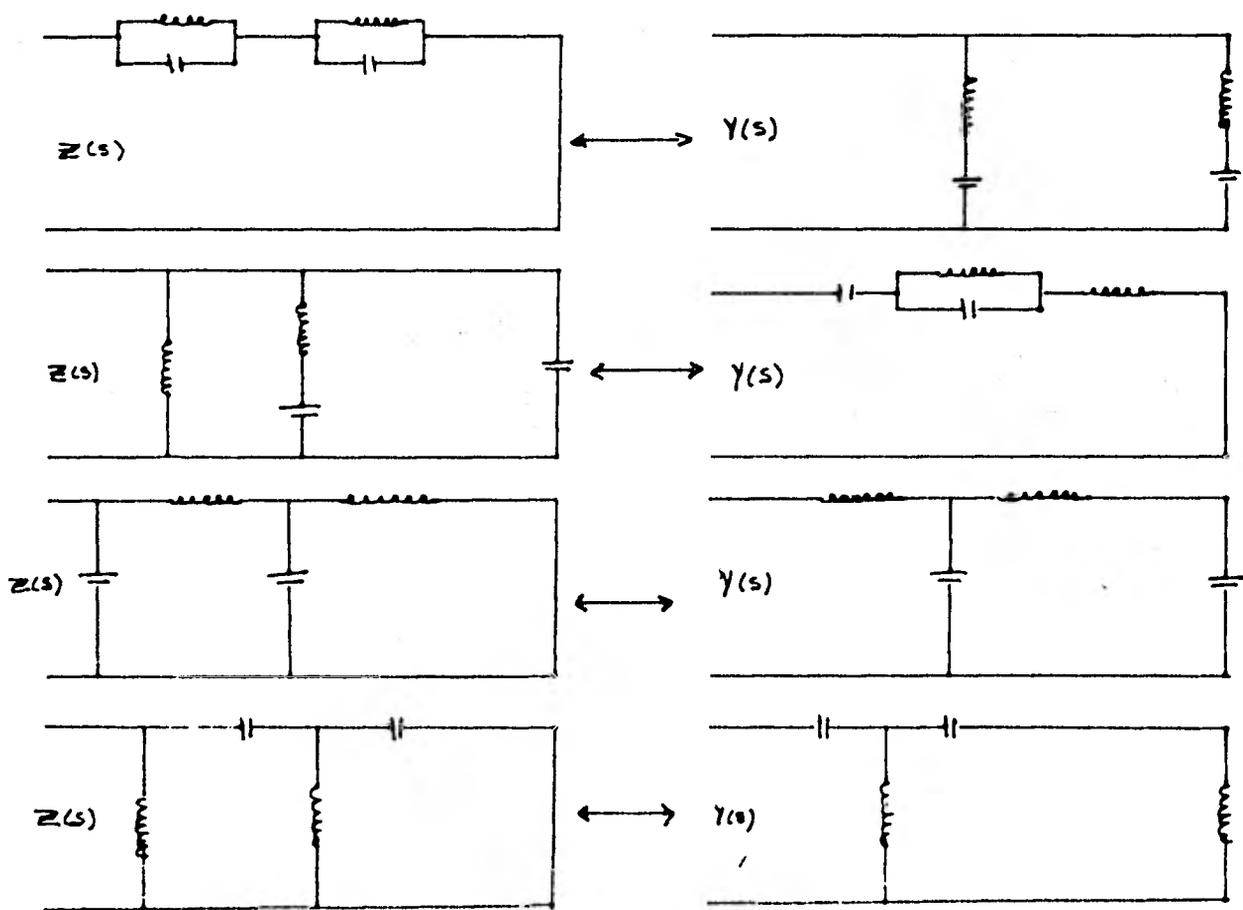


fig. 2.21.b Relaciones de impedancia  $Z(s)$  y admitancia  $Y(s)$  para algunas realizaciones Foster y Cauer.

## 2.3.3 Ejemplos.

Ejemplo: Realización Cauer I.

$$Z(s) = H \frac{180 s^4 + 45 s^2 + 1}{30 s^3 + 5 s} \quad \text{si } H = 1$$

Veamos que  $Z(s)$  es una función impar y los polinomios del numerador y denominador tienen orden descendente y tiene una frecuencia patrón, como sigue:



La expansión en fracciones parciales continuas es:

$$\begin{array}{r} 30 \ 5 \ ) \ 180 \ 45 \ 1 \ ( \ 6 \\ \underline{180 \ 30} \\ 0 \ 15 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} ( \ 30 \ 5 \ ( \ 2 \\ \underline{30 \ 2} \\ 0 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} ( \ 15 \ 1 \ ( \ 5 \\ \underline{15} \\ 0 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} ( \ 3 \ ( \ 3 \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

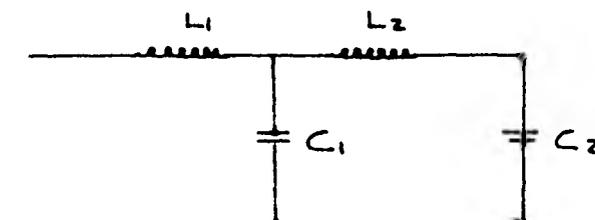
$$L_1 = 6 \text{ h}$$

$$L_2 = 5 \text{ h}$$

$$C_1 = 2 \text{ f}$$

$$C_2 = 3 \text{ f}$$

Así el circuito quedará:

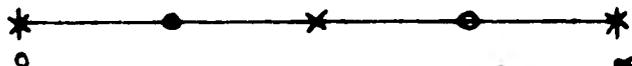


Ya que  $L_1$  es debido a que  $Z(s)$  tiene un polo a infinito y  $C_2$  es debido a que  $Z(s)$  tiene un polo en el origen.

Ejemplo: Realización Cauer II.

$$Z(s) = H \frac{s^4 + 35 s^2 + 120}{9 s^3 + 40 s} \quad \text{si } H = 1$$

Y con la frecuencia patrón siguiente:



Primeramente escribiremos  $Z(s)$  de tal forma que el polinomio del numerador - y denominador estén acomodados en forma creciente; de la siguiente manera:

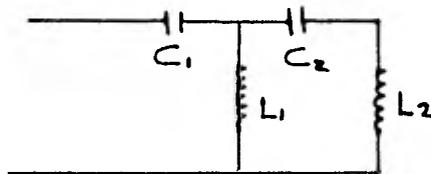
$$Z(s) = \frac{120 + 35s^2 + s^4}{40s + 9s^3}$$

Así la expansión de fracciones parciales continuas, será:

$$\begin{array}{r} 40 \ 9 \ ) \ 120 \ 35 \ 1 \ ( \ 3 \\ \underline{120 \ 27} \\ 0 \ 8 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} ( \ 40 \ 9 \ ( \ 5 \\ \underline{40 \ 5} \\ 0 \ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} ( \ 8 \ 1 \ ( \ 2 \\ \underline{8} \\ 0 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} ( \ 4 \ ( \ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$

Donde  $Z(s)$  será de la siguiente forma:

$$Z(s) = \frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{2}{s} + \frac{1}{\frac{4}{s}}}}$$



$$C_1 = 1/3 \text{ f}$$

$$L_1 = 1/5 \text{ h}$$

$$C_2 = 1/2 \text{ f}$$

$$L_2 = 1/4 \text{ h}$$

$C_1$  es colocado en ese lugar, debido a que  $Z(s)$  tiene un polo a infinito y  $C_2$  - se debe a que  $Z(s)$  tiene un polo en el origen.

### 2.3.4 Circuitos Foster y Cauer Mixtas.

Las formas Foster y Cauer pueden ser mixtas y el desarrollo del circuito el cual es realizable, es dado por  $Z(s)$ . Se puede obtener algunos elementos en la forma Foster I y entonces desarrollar la impedancia Cauer II, para algunos otros elementos.

El circuito resultante usa el mismo número de inductores y el mismo número de capacitores en todos los circuitos Foster y Cauer.

Además el número de formas mixtas también usan un número mínimo de elementos para realizar  $Z(s)$ . Ejemplo:

$$Z(s) = \frac{S(S^2+4)(S^2+25)}{(S^2+1)(S^2+9)}$$

$Z(s)$  tiene cinco polos, un número mínimo de cinco elementos es necesario para realizar  $Z(s)$ .

Si  $Z(\infty) = \infty$  entonces el primer elemento en una expansión Foster I, es un inductor. Este elemento es puesto fuera del circuito:

$$Z(s) = S + Z_{r_1}$$

La impedancia residuo será  $Z_{r_1}$  que es:

$$Z_{r_1} = Z(s) - S = \frac{19S(S^2 + \frac{91}{19})}{(S^2+1)(S^2+9)}$$

$$Z_{r_1} = \frac{19S^3 + 91S}{S^4 + 10S^2 + 9}$$

$$\text{para } S \text{ pequeña} \quad L_2 = \frac{91}{9}$$

$$\text{para } S \text{ grande} \quad C_3 = 19$$

Con una expansión de fracciones parciales de  $Y(s)$  se podrán calcular los otros elementos:

$$Y(s) = \frac{(S^2+1)(S^2+9)}{19S \left( S^2 + \frac{91}{19} \right)} = Y_4 + Y_5$$

Donde  $Y_4$  representa la admitancia de los dos elementos que fueron ya calculados, de la forma asintótica de  $Zr_1$ :

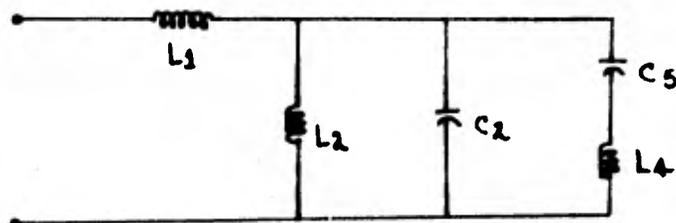
$$Y_4 + \frac{19 K_1 S}{\left( S^2 + \frac{91}{19} \right)}$$

$$K_1 = Y(s) \frac{\left( S^2 + \frac{91}{19} \right)}{S} \quad S = - \frac{91}{19}$$

Así, obtenemos que:

$$L_4 = \frac{32851}{5760} \quad \text{y} \quad C_5 = \frac{5760}{157389}$$

El circuito finalmente es una combinación del circuito Foster I y circuito Foster II, como se muestra en la siguiente figura.



## 2.4 CIRCUITOS CAUER Y FOSTER RC.

Una función racional, que tenga polos y ceros simples y que estén colocados en la mitad izquierda del plano complejo  $S$ , es posible realizarlos si en la impedancia de entrada de un circuito RC, si la frecuencia crítica cercana al origen, es un polo.

Existen dos circuitos asociados con la impedancia, el primer circuito se obtiene expandiendo  $Z(s)$  en fracciones parciales ( Foster I ) y el segundo se obtiene expandiendo  $Y(s)/S$ , en fracciones parciales ( Foster II ).

### 2.4.1 Realización Foster I.

Para obtener el primer circuito Foster I, consideremos:

$$Z(s) = H \frac{(S + \alpha_2)(S + \alpha_4)}{(S + \alpha_1)(S + \alpha_3)(S + \alpha_5)} \quad (2.30)$$

Si el grado del numerador es igual al grado del denominador la expansión en fracciones parciales será de la siguiente manera:

$$Z(s) = H + \frac{K_1}{S} + \frac{K_3}{S + \alpha_3} + \frac{K_5}{S + \alpha_5} \quad \alpha_1 = 0 \quad (2.31)$$

Donde las  $K$ 's, están dadas por:

$$K_1 = S Z(s) \Big|_{S=0}$$

$$K_n = (S + \alpha_n) Z(s) \Big|_{S = -\alpha_n}$$

Todas las K's, son números reales positivos por el arreglo de los polos y los ceros, de esta manera todas las resistencias y los capacitores serán positivos, esto lo observamos en la figura 2.22

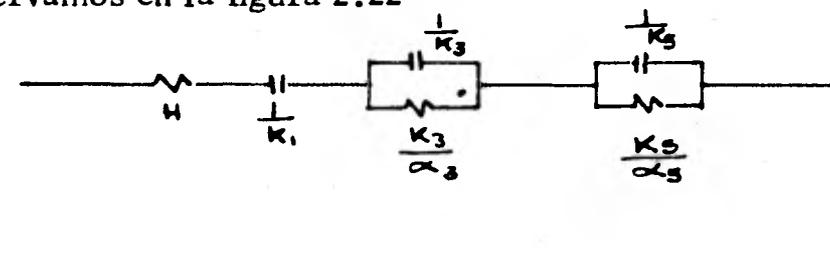


fig. 2.22 Realización Foster I

Algunas características importantes para este circuito son:

- 1) Este tipo de realización nos da una impedancia de entrada RC. La realización usa un número mínimo de elementos.
- 2) Si  $Z(0) = \infty$  el primer capacitor en serie deberá estar presente. Si  $Z(0) \neq \infty$ , entonces  $Z(0)$  es una constante y el primer capacitor debe estar ausente. Además el funcionamiento del circuito para baja frecuencia de  $Z(s)$  determina la presencia o ausencia del primer capacitor.
- 3) Si  $Z(\infty)$  es diferente de cero, entonces el primer resistor en serie deberá estar presente. Si  $Z(\infty) = 0$ , entonces el primer resistor deberá estar ausente. Además del funcionamiento del circuito para altas frecuencias de  $Z(s)$ , determina la frecuencia, la presencia o ausencia del primer resistor.
- 4) Si el funcionamiento de  $Z(s)$  para  $s$  pequeña y  $s$  grande, es de un resistor, entonces el número de resistores es uno más que el número de capacitores. Si el funcionamiento en ambas frecuencias externas es de un capacitor entonces el número de capacitores será uno más que el número de resistores. Si el funciona-

miento en una frecuencia externa es de un capacitor y en otra frecuencia, de un resistor, entonces el número de capacitores y resistores será igual. Siempre deberá estar o existir un capacitor por cada polo de la función de transferencia.

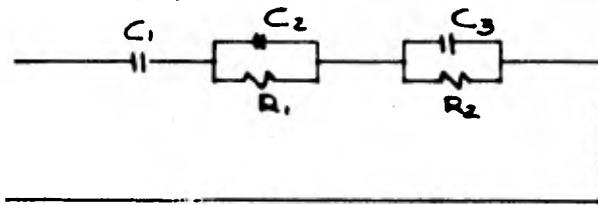
5) El primer capacitor indicara que existe un polo a infinito así mismo cada circuito paralelo RC proporcionará un polo sobre el eje real negativo localizado en  $(-1/R_i C_i)$ .

### 2.1.1.a Ejemplo.

Ejemplo: Realización Foster I.

$$Z(s) = \frac{(S + 1)(S + 3)}{S(S + 2)(S + 3)}$$

$Z(s)$  es un circuito RC realizable, ya que tiene polos y ceros que son simples y alternados, sobre el eje real negativo.  $Z(s)$  tiene tres polos, por lo tanto la realización deberá contener tres capacitores y del funcionamiento asimptotico de  $Z(s)$ , en altas frecuencias, observamos que es capacitiva. Además deberá contener dos resistores: Así para la realización Foster I, el circuito deberá quedar de la siguiente forma:



Expandiendo  $Z(s)$  en fracciones parciales obtenemos:

$$Z(s) = \frac{(S + 1)(S + 3)}{S(S + 2)(S + 4)} = \frac{K_0}{S} + \frac{K_1}{(S + 2)} + \frac{K_3}{(S + 4)}$$

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \frac{(S+1)(S+3)}{(S+2)(S+4)} \Big|_{S=0} = \frac{3}{8} \\
 K_1 &= \frac{(S+1)(S+3)}{S(S+4)} \Big|_{S=-2} = \frac{(-1)(1)}{-2(2)} = -\frac{1}{4} \\
 K_2 &= \frac{(S+1)(S+3)}{S(S+2)} \Big|_{S=-4} = \frac{(-3)(-1)}{-4(-2)} = \frac{3}{8} \\
 Z(s) &= \frac{\frac{3}{8}}{S} + \frac{\frac{1}{4}}{(S+2)} + \frac{\frac{3}{8}}{(S+4)}
 \end{aligned}$$

Los valores de los elementos serán:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{8}{3} & R_1 &= \frac{1}{8} \\
 C_2 &= 4 & R_2 &= \frac{3}{32} \\
 C_3 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Aquí el resistor en serie no aparece debido a que  $Z(\infty) = 0$ .

#### 2.4.2 Realización Foster II.

Para poder obtener el circuito Foster II, tenemos que  $Y(s)/S$  se expande en fracciones parciales. La expansión mas general es de la forma  $Y(s)/S$ .

$$\frac{Y(s)}{S} = H + \frac{K_0}{S} + \frac{K_2}{S+\alpha_2} + \frac{K_4}{S+\alpha_4} \quad (2.32)$$

Donde las  $K$ 's, son positivas y reales.

$$K_0 = Y(0)$$

$$K_n = \frac{Y(s)}{s} (s + \alpha_n) \Big|_{s = -\alpha_n} \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

Después de las ecuaciones 2.32, es multiplicada por  $S$  para obtener:

$$Y(s) = Hs + K_0 + \frac{K_2 S}{s + \alpha_2} + \frac{K_4 S}{s + \alpha_4}$$

El cual puede ser fácilmente dibujado como se muestra en la figura 2.23

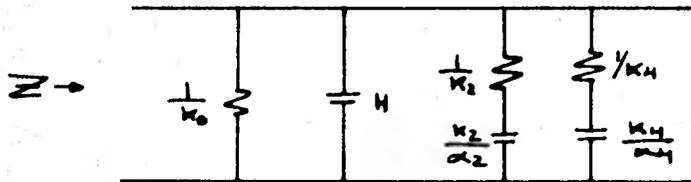


fig. 2.23 Realización Foster II.

Notamos que la realización Foster II exhibe los ceros de  $Z(s)$ . Así, el primer capacitor representa un cero a infinito. Del mismo modo el circuito paralelo RC, es representado por  $1/R_i C_i$ , ( $i = 2, 4, \dots$ )

#### 2.4.2.a Ejemplo.

Ejemplo: Realización Foster II.

La expansión de fracciones parciales se realiza con la ayuda de  $Y(s)/S$ ; tenemos que:

$$Z(s) = \frac{S(S+1)(S+3)}{(S+2)(S+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{(S+2)(S+4)}{S(S+1)(S+3)}$$

$$\frac{Y(s)}{S} = \frac{(S+2)(S+4)}{(S+1)(S+3)} = \frac{K_1}{S+1} + \frac{K_2}{S+3} + 1$$

$$K_1 = \frac{(S+2)(S+4)}{S+3} \Big|_{S=-1} = \frac{(1)(3)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$K_2 = \frac{(S+2)(S+4)}{S+1} \Big|_{S=-3} = \frac{(-1)(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{Y(s)}{S} = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{S+1} + \frac{\frac{1}{2}}{S+3}$$

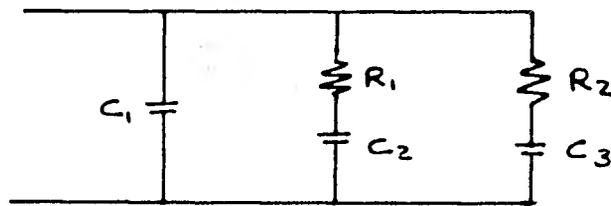
Los valores de los elementos son:

$$C_1 = 1 \qquad R_1 = 2/3$$

$$C_2 = 3/2 \qquad R_2 = 2$$

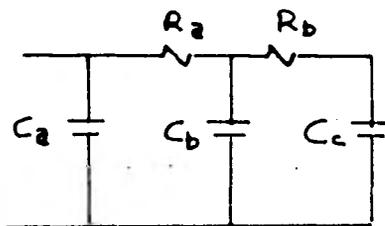
$$C_3 = 1/6$$

El circuito Foster II, resultante es:

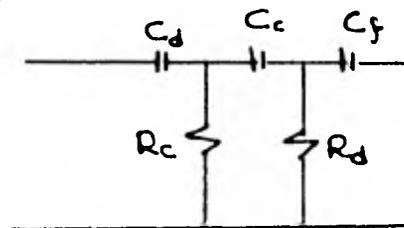


### 2.4.3 Circuitos Cauer RC

Los dos circuitos cauer asociados, con una función de impedancia RC y que son realizables se muestran en la figura 2.24



Cauer I



Cauer II

fig. 2.24 Circuitos Cauer RC.

Los capacitores en estos circuitos representan el número de polos del sistema. El circuito Cauer I, tiene en su estructura resistores en serie y capacitores en paralelo y el circuito Cauer II, capacitores en serie y resistores en paralelo.

El funcionamiento en alta y baja frecuencia determina la estructura del circuito al principio y final de éste.

Por ejemplo; si  $Z(0) = \infty$   $R_{n+1}$  deberá ser infinita en el circuito Cauer I y  $R_1$  deberá ser infinita en el circuito Cauer II. Si  $Z(\infty) = 0$ ,  $R_1$  deberá ser -- cero en el circuito cauer I y  $R_{n+1}$  será cero en el circuito Cauer II.

El circuito Cauer I, el desarrollo del polinomio es efectuado en potencias descendientes de  $S$ , mientras que en la realización del circuito Cauer II, el polinomio es arreglado en potencias ascendentes de  $S$ . En cualquier caso la expansión es realizada con la impedancia  $Z(s)$  si el primer elemento se encuentra colocado en serie: Si el primer elemento esta en paralelo, entonces la expansión se -- realiza con la función de admitancia  $Y(s)$ .

## CAPITULO III

### FILTROS ACTIVOS

#### 3.1 GENERALIDADES.

El campo de acción de los filtros activos es de bajas frecuencias, donde los filtros pasivos tienen muchos inconvenientes prácticos, ya que cuando la frecuencia es baja los inductores para implementar los filtros pasivos, son voluminosos e ineficientes; así como los que utilizan exclusivamente resistencias y capacitores ofrecen características pobres de filtrado, que no son muy aceptables.

En la figura 3.1 se muestran los campos de aplicación en la frecuencia de los principales tipos de filtros y los factores de calidad ( $Q$ ) típicos de cada realización; donde  $Q$  es una medida de lo pronunciado del corte del filtro y se define como. En filtro paso banda es:

$$Q = \frac{\text{frecuencia de corte}}{\text{ancho de banda}} = \frac{W_c}{A_w}$$

En filtros de segundo orden es igual al inverso del amortiguamiento:

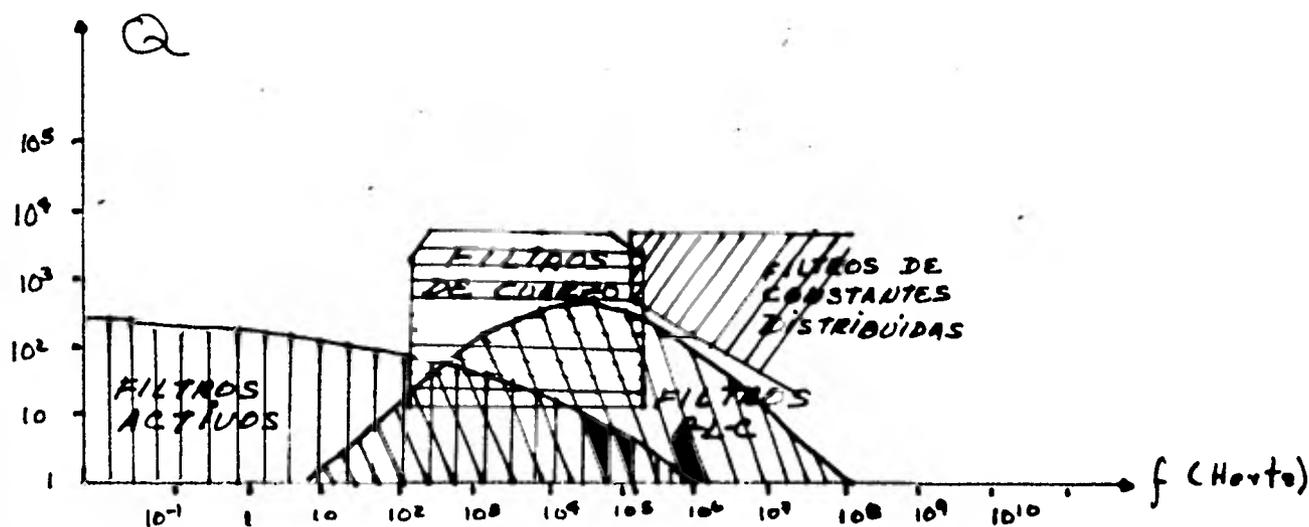


fig. 3.1 Campo de aplicación de los filtros

## 3.2 CARACTERISTICAS DE LOS FILTROS ACTIVOS.

Los filtros activos tienen algunas características propias que los hacen diferentes de los filtros pasivos y el diseñador deberá tenerlas en consideración; por ejemplo, los filtros activos tienen por lo general entradas y salidas de un solo canal y por lo tanto no flotan con respecto a la fuente del sistema. Las salidas de los filtros activos construidos con amplificadores operacionales tienen un voltaje de compensación que varía con los cambios de temperatura, y éste varía -- desde unos cuantos microvolts a unos cientos de milivolts, la corriente de polarización puede variar desde unos cuantos picoampers en el transistor de efecto de campo de los amplificadores operacionales a unos cuantos microampers en el transistor bipolar y amplificadores de circuito integrado.

### 3.2.1 Ventajas de Filtros Activos con Operacionales.

- a) Su principal ventaja es su tamaño reducido y su poco peso para sus aplicaciones a bajas frecuencias, ya que por lo general son los capacitores los que fijan el tamaño del dispositivo.
- b) Los filtros activos tienen excelentes propiedades de aislamiento, esto es, una elevada impedancia de entrada y una baja impedancia de salida que permite la -- realización de filtros de cualquier orden simplemente conectando en cascada etapas de primer y segundo orden de manera que cada una de ellas pueda proyectarse y sintonizarse independientemente con la mínima interacción.
- c) Además de atenuar las frecuencias no deseadas amplifica las señales de frecuencia en la banda de paso del filtro, es por eso que se dice que el filtro tiene --

una ganancia en la banda de paso.

d) El costo de un filtro activo es muy reducido, está determinado solo por el tipo de amplificador operacional que se vaya a utilizar.

### 3.2.2 Desventajas de los Filtros Activos con Operacionales.

a) Los voltajes máximos de operación los fija la fuente de alimentación del amplificador operacional.

b) La potencia del filtro también la fija el amplificador operacional y está restringida generalmente a menos de un watt.

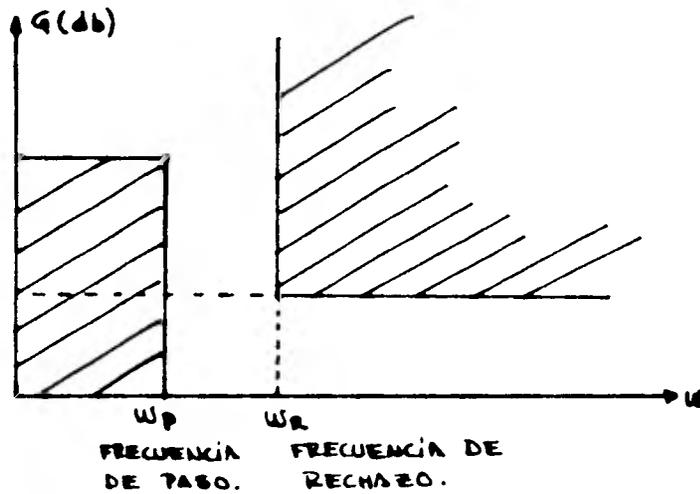
c) Los filtros activos son mas adecuados para bajas frecuencias ( tanto como  $10^{-3}$  Hz ) pero los capacitores pueden ser voluminosos para frecuencias muy bajas pudiendo hacer inconveniente el tamaño del filtro.

En altas frecuencias los filtros activos no son muy adecuados ya que están limitados por la respuesta en frecuencia del amplificador operacional que es por lo general baja.

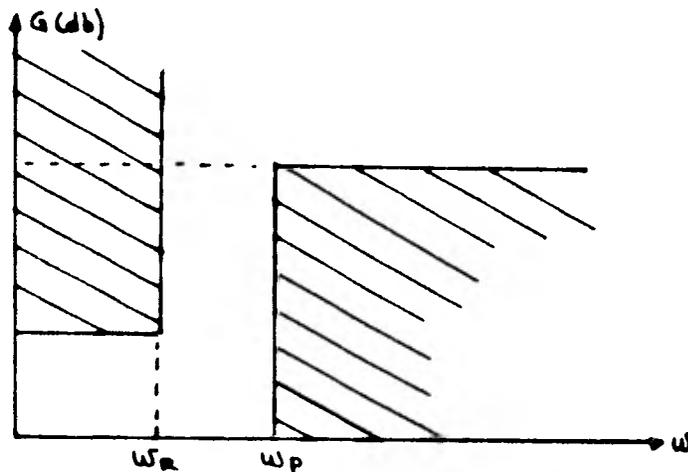
### 3.3 CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS.

El procedimiento más general para el desarrollo del diseño de un filtro que cumpla con los requerimientos de un problema es el siguiente:

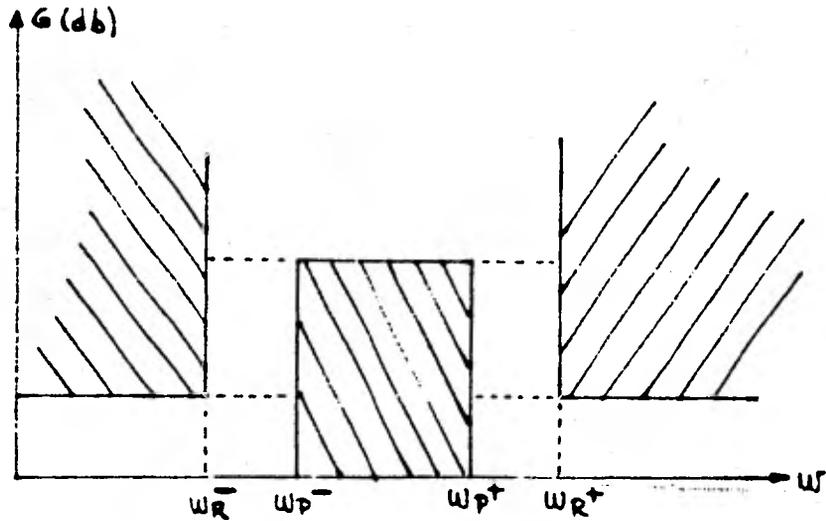
a) Definir todas las características del filtro con la ayuda de una plantilla en donde se especifiquen los requerimientos mínimos del problema ( ver figura 3.2 )



a) Plantilla de un filtro paso bajas.



b) Plantilla de un filtro paso altas.



c) Plantilla de un filtro paso banda.

fig. 3.2 Plantillas de filtros

Como podemos observar en las plantillas de los filtros paso bajas y paso altas, se especifica la ganancia mínima en la banda de paso, la atenuación mínima en la banda de rechazo y las frecuencias límites para banda de paso y banda de rechazo. Otra forma de especificar la plantilla de un filtro paso bajas o paso altas es utilizando la selectividad; la cual se define como:

$$\text{Selectividad} = K = \frac{\omega_p}{\omega_R}$$

$$\omega_p = \text{frecuencia de paso} \tag{3.1}$$

$$\omega_R = \text{frecuencia de rechazo}$$

La selectividad expresa la pendiente en la banda de transición; cuando  $k$  tiene a la unidad, el filtro se aproxima mucho a la unidad. Junto con la selectividad se especifican la ganancia mínima ( $G_{mín}$ ) y la atenuación mínima ( $A_{mín}$ ).

Como se muestra en la figura 3.2 en el filtro paso banda es necesario especificar cuatro frecuencias límite; cuando el filtro paso banda es simétrico, la plantilla se puede especificar mediante la frecuencia central ( $\omega_0$ ), la selectividad -

( $k$ ), el factor de calidad ( $Q$ ),  $G_{mín}$  y  $A_{mín}$ .

Para un filtro paso banda la selectividad y el factor de calidad se definen como:

$$k = \frac{\omega_R^+ - \omega_R^-}{\omega_{p^+} - \omega_{p^-}} = \frac{\Delta\omega_R}{\Delta\omega_p} \quad (3.2)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_{p^+} - \omega_{p^-}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_p} ; \omega_0 = \text{FRECUENCIA CENTRAL.} \quad (3.3)$$

Además de la atenuación que un filtro debe imponer a las diferentes componentes espectrales de una señal, es importante considerar el defasamiento de cada una de sus armónicas; así, un filtro verdadero implementado con componentes reales hace que cada componente de una señal filtrada sufra un defasamiento variable con la frecuencia, y aún en el caso que el filtro se aproxime al ideal en lo que concierne a la atenuación, el defasamiento a que se someten las armónicas de una señal filtrada en la banda de paso, pueden ser indeseables para el diseñador.

En un filtro paso banda, para que se transmita una señal sin deformación se debe cumplir en toda la banda de paso la siguiente relación:

$$\xi = \frac{d\phi \text{ (FASE)}}{d\omega \text{ (FRECUENCIA)}} = \text{cte.} \quad (3.4)$$

Donde  $\xi$  se llama constante de propagación de grupo.

La respuesta de atenuación y de propagación de grupo no se pueden optimizar en forma simultánea; pues el filtro, o bien tiene una buena respuesta de amplitud pero mala regularidad del tiempo de propagación de grupo, o bien presenta un tiempo de propagación de grupo regular pero su curva de respuesta de amplitud se aleja mucho de la ideal; en la práctica debe realizarse un compromiso entre -

la respuesta de amplitud y la respuesta de tiempo de propagación de grupo.

Para la realización de un filtro que cumpla con una plantilla definida se necesita la ayuda de las llamadas funciones de aproximación, con las que determinamos la función de transferencia del filtro a construir, determinando con ello la naturaleza y el valor de sus componentes.

El diseño del filtro se realiza sintetizando un circuito cuya función de transferencia sea idéntica a la función de aproximación seleccionada. Un método simplificado para diseñar filtros activos se obtiene aplicando las propiedades aislantes del amplificador operacional; este método consiste en trabajar con filtros de primer y segundo orden exclusivamente y lograr filtros de orden superior al conectar estos filtros en cascada, debido al aislamiento que provee el operacional las etapas prácticamente no interactúan y el diseño se realiza en etapas sencillas.

### 3.4 REDES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.

Los filtros activos complejos se construyen normalmente conectando en cascada dos tipos de redes relativamente simples de circuitos, llamados redes de primer y segundo orden. Este procedimiento permite el diseño y sintonización fácil de un filtro complejo y permite también utilizar un solo enfoque sistemático para determinar que es lo que le pasa a la respuesta de un filtro, si los valores de los elementos de la red no son precisos y si varían con el tiempo y la temperatura.

Las funciones de red de un filtro que mas interesan son: la amplitud, fase y retraso de grupo. Los parámetros de la red que son importantes son: La frecuencia característica y la ganancia en la banda de paso. En esta sección se analizarán en forma breve estas funciones y parámetros en redes de un polo simple y con un par de polos conjugados complejos.

#### 3.4.1 Funciones de las Redes Paso Bajo.

Polo sencillo. - La función de transferencia de paso bajo de un polo sencillo en función de la frecuencia compleja es:

$$H(s) = \frac{H_o W_o}{S + W_o} \quad (3.5)$$

La magnitud de la función de transferencia para la respuesta a la excitación senoidal de estado estable es:

$$|H(j\omega)| = \left[ \frac{H_o^2 W_o^2}{\omega^2 + W_o^2} \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

fase:  $\phi(\omega) = -\text{arc tang } \frac{\omega}{\omega_0}$  (3.7)

retardo de grupo es:  $\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{\cos^2 \phi}{\omega_0}$  (3.8)

Realización con elementos pasivos únicamente:

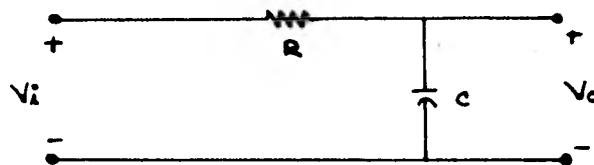


fig. 3.3 Realización de función de transferencia de paso bajo de un polo sencillo.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/sC}{R + 1/sC} \quad (3.9)$$

Donde

$$H_0 = 1$$

$$\omega_0 = 1/RC$$

Realización con amplificador operacional.

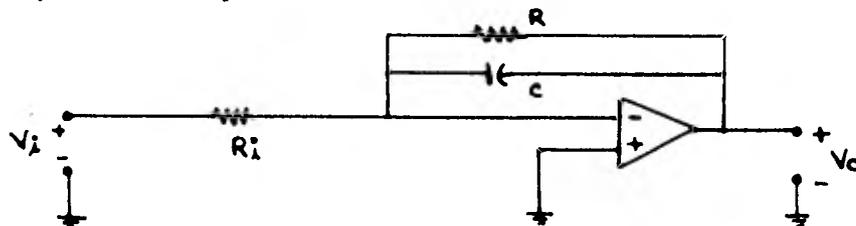


fig. 3.4 Realización de función de transferencia a paso bajo de un polo sencillo con amplificador operacional.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{(R/RC)/(s + 1/RC)}{R_i} \quad (3.10)$$

$$H(s) = \frac{-R/R_i (1/RC)}{s + 1/RC} \quad (3.11)$$

Donde

$$H_o = -R/R_i$$

$$\omega_o = 1/RC$$

Entrada no inversora:

$$H_o = \frac{R}{R_i} + 1$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

Par de de polos conjugados complejos. - La función de transferencia de paso bajo de par de polos conjugados complejos es:

$$H(s) = \frac{H_o \omega_o^2}{s^2 + \omega_o s \alpha + \omega_o^2} \quad (3.12)$$

La magnitud de la función de transferencia en estado estable está dada por:

$$|H(j\omega)| = \left[ \frac{H_o^2 \omega_o^4}{\omega^4 + \omega^2 \omega_o^2 (\alpha^2 - 2) + \omega_o^4} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

$$\text{La fase es: } \phi(\omega) = - \arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_o} + \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] - \arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_o} - \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

Nótese que  $\alpha^2$  nunca es mayor de 4. Si es así, los polos ya no serán comple--

jos. La  $Q$  de un par de polos complejos es igual a  $1/\alpha$ .

El retraso de grupo es:

$$\tau(\omega) = \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \phi}{\omega_0} - \frac{\operatorname{Sen} 2\phi}{2\omega} \quad (3.15)$$

### 3.4.2 Funciones de las Redes de Paso Alto.

Polo sencillo. - La función de transferencia de paso alto de polo sencillo y funciones de magnitud, de fase y retraso de grupo en estado estable senoidal son:

$$H(s) = \frac{H_0 s}{s + \omega_0} \quad (3.16)$$

$$|H(j\omega)| = \left[ \frac{H_0^2 \omega^2}{\omega^2 + \omega_0^2} \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \tan \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3.18)$$

$$\tau(\omega) = \frac{\operatorname{Sen}^2 \phi}{\omega_0} \quad (3.19)$$

Realización con elementos pasivos únicamente:

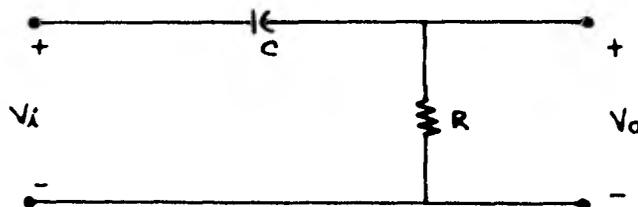
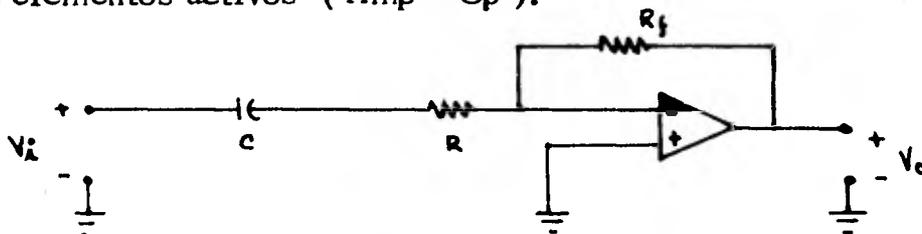


fig. 3.5 Realización de funciones de transferencia de paso alto de polo sencillo.

$$H_0 = 1$$

$$\omega_0 = 1/RC$$

Realización con elementos activos ( Amp - Op ).



$$H_0 = - R_f / R \quad (\text{Entrada inversora})$$

$$H_0 = R_f / R + 1 \quad (\text{Entrada no inversora})$$

$$\omega_0 = 1 / RC$$

fig. 3.6 Realización de función de transferencia de paso alto de polo sencillo con amplificador operacional.

Par de polos conjugados complejos. - La función de transferencia de par de polos conjugados de una red paso alto y las funciones de magnitud y de retraso, de estado estable senoidal son las que se muestran a continuación.

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.20)$$

$$|H(j\omega)| = \left[ \frac{H_0^2 \omega^4}{\omega^4 + \omega^2 \omega_0^2 (\alpha^2 - 2) + \omega_0^4} \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

$$\phi(\omega) = \pi - \arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] - \arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad (3.22)$$

$$\zeta(\omega) = \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \phi}{\alpha \omega_0} - \frac{\operatorname{Sen} 2\phi}{2\omega} \quad (3.23)$$

### 3.4.3 Función de Red de Paso Banda.

La función de transferencia de paso banda de par de polos conjugados complejos es:

$$H(s) = \frac{H_0 \alpha \omega_0 s}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.24)$$

$$\text{donde; } \alpha = \frac{1}{Q} \quad \text{y} \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (3.25)$$

Y donde  $f_1$  y  $f_2$  son las frecuencias donde la respuesta de magnitud es 3db de  $H_0$ , la ganancia de paso de banda que ocurre a  $\omega_0 = 2 f_0$ . La función de transferencia también puede escribirse como:

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega \right)} \quad (3.26)$$

La magnitud de la función de transferencia es:

$$|H(j\omega)| = \left[ \frac{H_0^2 \alpha^2 \omega_0^2 \omega^2}{\omega^4 + \omega^2 \omega_0^2 (\alpha^2 - 2) + \omega_0^4} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

LA FASE ES:

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \tan \left( \frac{2Q\omega}{\omega_0} + \sqrt{4Q^2 - 1} \right) - \operatorname{arc} \tan \left( \frac{2Q\omega}{\omega_0} - \sqrt{4Q^2 - 1} \right) \quad (3.28)$$

EL RETRASO DE GRUPO ES:

$$\zeta(\omega) = \frac{2Q \operatorname{Cos}^2 \phi}{\omega_0} + \frac{\operatorname{Sen} 2\phi}{2\omega} \quad (3.29)$$

### 3.4.4 Función de Red de Rechaso de Banda.

Se puede obtener un filtro de rechazo de banda ejecutando la operación  $1 - H_{bp}(s)$ ; donde  $H_{bp}(s)$  es una función de transferencia, de paso de banda. ( ver figura 3.7 )

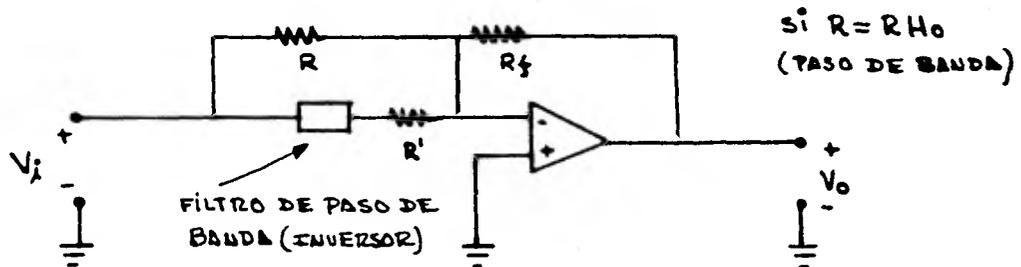


fig. 3.7 Realización de función de transferencia de rechazo de banda.

$$H(s) = - \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{R_f}{R} \quad (3.30)$$

Como este filtro esta muy relacionado con el filtro de paso de banda, sus propiedades no se tratarán aquí.

### 3.5 REALIZACION DE LOS FILTROS ACTIVOS.

Se presentán a continuación algunas formas reales de los filtros activos. Todas las funciones estandar de un filtro ( paso bajas, paso altas, paso banda y supre sor de banda ) pueden ser realizadas con cortes de frecuencia de 12 db/octava - en un simple paso. El error que puede ocurrir en el diseño de estos filtros depen de de la tolerancia que tengan los elementos pasivos ( resistencias y capacitores) Los filtros que se implementan con Amp Operacionales, como se dijo anterior- mente dan rangos de corte de 12 db por octava ( 40 db/década ) por lo que son - filtros de segundo orden, si se desea implementar un filtro de mayor orden lo -- único que hay que hacer es, conectar dos de menor orden en cascada y se obten- drá un filtro de orden igual a la suma de los filtros de menor orden; así, por -- ejemplo, si se conectan dos filtros de segundo orden en cascada se obtendrá un - filtro de cuarto orden. En los procedimientos de proyecto dados, por lo común - se comienza eligiendo el valor del capacitor, ya que existen menos valores estan- dar de capacitores que de resistencia.

Con frecuencia es conveniente permitir que  $H_0$  sea variable para que pueda -- usarse como parámetro para determinar sensibilidades óptimas, o cuando menos pequeñas, de ciertos parámetros.

#### 3.5.1 Circuitos de Realimentación Múltiple Ganancia Infinita.

Aquí el amplificador es usado en su configuración inversora, **o sea con** la entrada positiva aterrizada. Cada elemento  $Y_i$  representa una **resistencia o un capacitor** La función de transferencia se obtendrá a continuación.

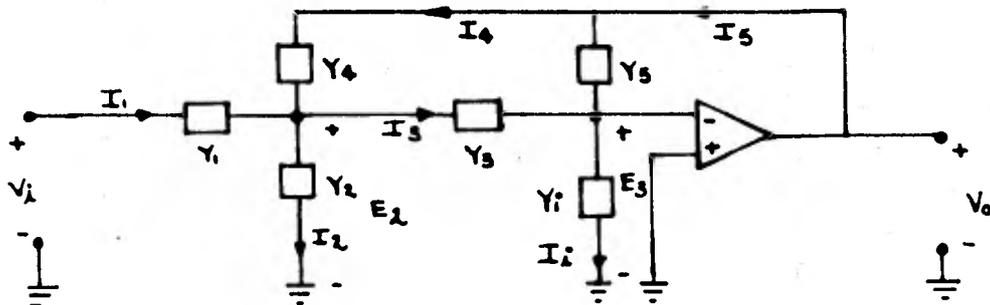


fig. 3.8 Red de realimentación múltiple ganancia infinita.

Ecuaciones de nodos:

$$I_4 + I_1 = I_2 + I_3 \quad - (1)$$

$$I_5 + I_3 = I_i \quad - (2)$$

$$(V_i - E_2) Y_1 = I_1 \quad - (3)$$

$$(E_2 - E_3) Y_3 = I_3 \quad - (4)$$

$$E_2 Y_2 = I_2 \quad - (5)$$

$$E_3 Y_i = I_i \quad - (6) \quad (3.31)$$

$$(V_0 - E_2) Y_4 = I_4 \quad - (7)$$

$$(V_0 - E_3) Y_5 = I_5 \quad - (8)$$

$$-A_{01} E_3 = V_0 \quad - (9)$$

Substituyendo las ecuaciones 3), 4), 5), y 7), en la ecuación 1, se obtiene:

$$(V_0 - E_2) Y_4 + (V_i - E_2) Y_1 = E_2 Y_2 + (E_2 - E_3) Y_3 \quad (3.32)$$

De igual forma substituyendo 8), 4) y 6), en la ecuación 2, obtenemos:

$$(V_0 - E_3) Y_5 + (E_2 - E_3) Y_3 = E_3 Y_i \quad (3.33)$$

Despejando  $E_2$  de la ecuación (3.33), tenemos:

$$V_0 Y_5 - E_3 Y_5 + E_2 Y_3 - E_3 Y_3 = E_3 Y_i$$

$$E_2 = \frac{E_3 Y_i + E_3 Y_3 + E_3 Y_5 - V_0 Y_5}{Y_3} \quad (3.34)$$

$$\text{pero: } E_3 = -\frac{E_0}{A_{01}}$$

$$E_2 = \frac{-\frac{V_0 Y_i}{A_{01}} - \frac{V_0 Y_3}{A_{01}} - \frac{V_0 Y_5}{A_{01}} - V_0 Y_5}{Y_3} \quad (3.35)$$

Y de la ecuación (3.32):

$$V_0 Y_4 - E_2 Y_4 + V_i Y_i - E_2 Y_i = E_2 Y_2 + E_2 Y_3 - E_3 Y_3$$

$$V_0 Y_4 = E_2 Y_2 + E_2 Y_3 - E_3 Y_3 + E_2 Y_4 - V_i Y_i + E_2 V_i$$

$$V_0 Y_4 - \frac{V_0 Y_3}{A_{01}} = E_2 (Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_i) - V_i Y_i \quad (3.36)$$

Sustituyendo ahora ecuación (3.35) en ecuación (3.36), tenemos:

$$V_0 Y_4 - \frac{V_0 Y_3}{A_{01}} = \frac{-\frac{V_0}{A_{01}} (Y_i + Y_3 + Y_5 + Y_5 A_{01})}{Y_3} (Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_i) - V_i Y_i$$

$$V_0 Y_4 - \frac{V_0 Y_3}{A_{01}} + V_i Y_i = -\frac{V_0}{A_{01}} (Y_i Y_2 + Y_i Y_3 + Y_i Y_4 + Y_i Y_i + Y_3 Y_2 + Y_3 Y_3 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_i + Y_5 Y_2 + Y_5 Y_3 + Y_5 Y_4 + Y_5 Y_i + Y_5 A_{01} Y_2 + Y_5 A_{01} Y_3 + Y_5 A_{01} Y_4 + Y_5 A_{01} Y_i - Y_3 Y_3 + Y_5 A_{01} Y_3) = X$$

$$V_i Y_i = X - V_0 Y_4 + \frac{V_0 Y_3}{A_{01}}$$

$$-\frac{V_0}{A_{01} Y_3} (Y_i Y_2 + Y_i Y_3 + Y_i Y_4 + Y_i Y_i + Y_3 Y_2 + Y_3 Y_3 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_i + Y_5 Y_2 + Y_5 Y_3 + Y_5 Y_4 + Y_5 Y_i + Y_5 A_{01} Y_2 + Y_5 A_{01} Y_3 + Y_5 A_{01} Y_4 + Y_5 A_{01} Y_i - Y_3 Y_3 + Y_5 A_{01} Y_3) = V_i Y_i$$

$$-\frac{V_o}{A_{o1} Y_3} \left( A_{o1} (Y_5 Y_2 + Y_5 Y_3 + Y_5 Y_4 + Y_5 Y_1 + Y_4 Y_3) + Y_3 Y_2 + Y_3 Y_4 + Y_5 Y_2 + Y_3 Y_1 + Y_5 Y_3 + Y_5 Y_4 + Y_5 Y_1 \right) = V_i Y_1$$

Si  $A_{o1}$  tiende a infinito, tenemos:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_5 Y_2 + Y_5 Y_3 + Y_5 Y_4 + Y_5 Y_1 + Y_4 Y_3} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3} \quad (3.37)$$

Estos cinco elementos  $Y_i$  pueden elegirse de manera que realicen las funciones de la red de paso bajo, paso alto y paso banda. En el siguiente ejemplo, se demuestra como se puede elegir cada uno de estos elementos para obtener las funciones de una red de paso altas.

### 3.5.1.1 Diseño de un Filtro Activo Paso Altas.

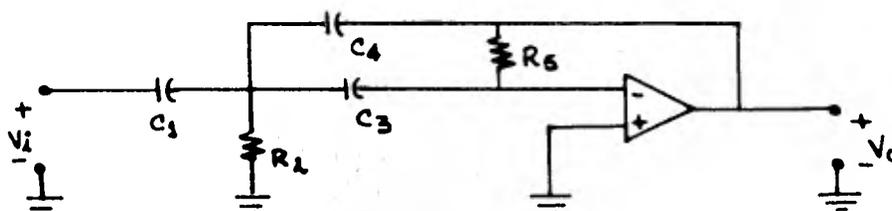


fig. 3.9 Realización de función de transferencia paso altas con configuración ganancia infinita realimentación múltiple.

La función de transferencia de voltaje del circuito de realimentación múltiple - ganancia infinita, para la función de la red de paso altas mostrada en la figura 3.9; es la siguiente.

$$\frac{V_o}{V_i}(s) = \frac{-(C_1/C_4) s^2}{s^2 + s(1/R_5)(C_1/C_3 C_4 + 1/C_4 + 1/C_3) + 1/R_2 R_5 C_3 C_4} \quad (3.38)$$

Ahora bien, la función de transferencia de un filtro paso altas de segundo orden, viene dado por:

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.39)$$

Comparando estas ecuaciones, tenemos que:

$$H_0 = \frac{C_1}{C_4} \quad \omega_0 = \left[ \frac{1}{R_2 R_5 C_3 C_4} \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_2}{R_5}} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_3 C_4}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_4}} + \sqrt{\frac{C_4}{C_3}} \right) ; \quad \phi = \pi + \phi_{HP}$$

$$\zeta = \zeta_{HP}$$

Nótese que se ha incorporado la inversión de fase a la función de fase.

Determinación de los parámetros de la red. - Se deberán considerar las siguientes características:

- 1). - Orden del filtro.
- 2). - Función de aproximación.
- 3). - Ganancia en la banda de paso.
- 4). - Frecuencia de corte.

Elíjase  $C_1 = C_3 = C$  de un valor conveniente; Y en seguida se calcula:

$$R_5 = \frac{1}{\alpha \omega_0 C} (2H_0 + 1)$$

$$R_2 = \frac{\alpha H_0}{\omega_0 C (2H_0 + 1)}$$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_0}$$

### 3.5.2 Circuitos de Fuente de Voltaje Controlada por Voltaje.

La red de una fuente de voltaje controlada por voltaje para circuitos que realizan funciones de transferencia de segundo orden, es la siguiente (ver figura 3.10)

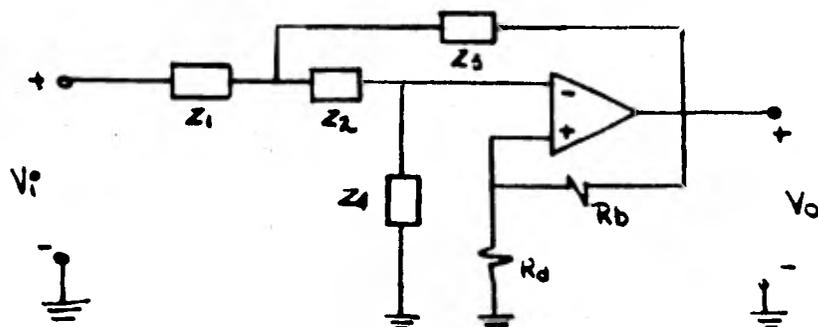


fig. 3.10 Circuito de fuente de voltaje controlada por voltaje.

Los  $Z_i$  elementos están restringidos a ser capacitores o resistores. La función de transferencia de esta red es la siguiente:

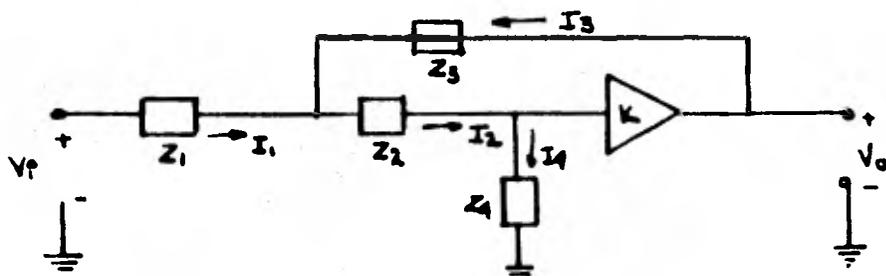


fig. 3.11 Circuito simplificado de F.V.C.V.

En donde  $K$  (Ganancia del Circuito), es:

$$K = 1 + \frac{R_b}{R_a} \quad (3.40)$$

Las ecuaciones de nodos para el circuito de la figura (3.11), serán las siguientes:

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (1)$$

$$I_2 = I_4 \quad (2)$$

(3.41)

Las ecuaciones de malla del circuito serán:

$$\frac{V_2 - V_4}{Z_2} = I_2 \quad (1)$$

$$\frac{V_i - V_2}{Z_1} = I_2 \quad (2)$$

(3.42)

$$\frac{V_o - V_2}{Z_3} = I_3 \quad (3)$$

$$\frac{V_4}{Z_4} = I_2 = I_4 \quad (4)$$

Si de la ecuación (3.42.1), despejamos  $V_2$ .

$$V_2 = I_2 Z_2 + V_4$$

pero

$$V_4 = Z_4 I_2$$

$$V_2 = I_2 (Z_2 + Z_4)$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2 + Z_4}$$

De tal forma obtenemos:

$$V_4 = \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} V_4$$

(3.43)

$$V_2 = \frac{Z_2 + Z_4}{Z_4} V_4$$

Sustituyendo la ecuación (3.42.1), (3.42.2) y (3.42.3), en la ecuación (3.41.1), -  
tenemos que:

$$\frac{V_i - V_2}{Z_1} + \frac{V_o - V_2}{Z_3} = \frac{V_2 - V_4}{Z_2} = \frac{V_4}{Z_4} \quad (3.44)$$

Y sustituyendo en la ecuación (3.44) la ecuación (3.43), obtenemos:

$$\frac{V_i - \frac{(Z_2 + Z_4)V_4}{Z_4}}{Z_1} + \frac{V_o - \frac{(Z_2 + Z_4)V_4}{Z_4}}{Z_3} = \frac{V_4}{Z_4} \quad (3.45)$$

Además sabemos que  $V_4 = \frac{V_o}{K}$ , sustituyendo en (3.45):

$$\frac{V_i - \frac{(Z_2 + Z_4)V_o}{K Z_4}}{Z_1} + \frac{V_o - \frac{(Z_2 + Z_4)V_o}{K Z_4}}{Z_3} = \frac{V_o}{K Z_4}$$

$$\frac{V_i K Z_4 - (Z_2 + Z_4)V_o}{K Z_4} + \frac{V_o K Z_4 - (Z_2 + Z_4)V_o}{K Z_4} = \frac{V_o}{K Z_4}$$

$$\frac{V_i K Z_4 - (Z_2 + Z_4)V_o}{Z_1} + \frac{V_o K Z_4 - (Z_2 + Z_4)V_o}{Z_3} = \frac{V_o}{1}$$

$$Z_3 V_i K Z_4 - (Z_2 + Z_4)V_o Z_3 + V_o K Z_1 Z_4 - (Z_2 + Z_4) Z_1 V_o - V_o Z_1 Z_3 = 0$$

$$V_i Z_3 Z_4 K = V_o [(Z_2 + Z_4) Z_3 - K Z_1 Z_4 + (Z_2 Z_4) Z_1 + Z_1 Z_3]$$

DESPEJANDO  $V_i$  Y  $V_o$  DE ESTA ECUACION TENEMOS QUE:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 - K Z_1 Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_1 Z_3}$$

por último tenemos :

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K Z_3 Z_4}{Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_4) + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 (1 - K)} \quad (3.46)$$

Estos cuatro elementos  $Z_i$  pueden elegirse de manera que realicen las funciones de red paso bajas, paso altas o paso banda. El ejemplo que se da a continuación muestra la forma en que deben elegirse estos elementos  $Z_i$  para producir una función paso baja.

### 3.5.2.1 Diseño de un Filtro Paso Bajas por medio de un Circuito F.V.C.V.

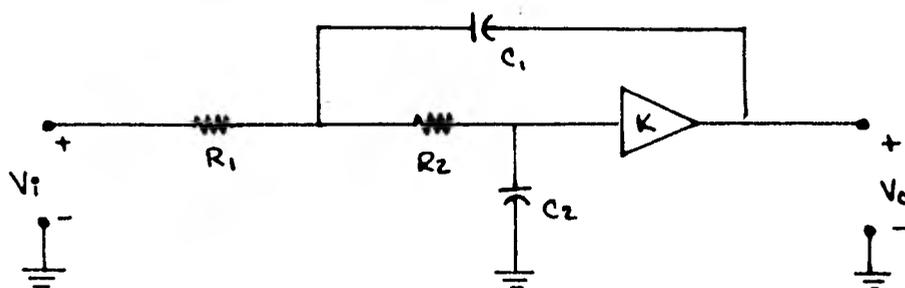


fig. 3.12 Realización de función de transferencia paso bajas por medio de una configuración F.V.C.V.

La función de transferencia de esa red es:

$$\frac{V_o}{V_i}(s) = \frac{K/R_1 R_2 C_1 C_2}{s^2 + s(1/R_1 C_1 + 1/R_2 C_1 + (1-K)/R_2 C_2) + 1/R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (3.47)$$

Ahora bien, la función de transferencia generalizada de un filtro paso bajas de segundo orden viene dada por:

$$H(s) = \frac{H_0 \omega_0^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.48)$$

Comporando estas dos ecuaciones tenemos que:

$$H_0 = K$$

$$\omega_0 = \left( \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \left( \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \right)^{1/2} + \left( \frac{R_1 C_2}{R_2 C_1} \right)^{1/2} + \left( \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} \right)^{1/2} + \left( \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} \right)^{1/2} K$$

$$\phi = \phi_{LP}$$

$$\zeta = \zeta_{LP}$$

Determinación de los Parámetros de la red de un Circuito de Voltaje Controlada por Voltaje.

Dada: Polinomio de aproximación, orden del filtro y la frecuencia de corte.

Podemos fijar  $K$  de manera que la sensibilidad global  $\alpha$  sea mínima, suponiendo que los capacitores se desvían igualmente, y por lo tanto:

Elegimos:  $C = C_1 = C_2$  y suponemos  $R = R_1 = R_2$

$$R = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$K = 3 - \alpha$$

Además:

$$K = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

Primeramente se le da un valor determinado de  $R_A$  para poder calcular  $R_B$  de la siguiente forma:

$$R_B = KR_A - R_A$$

### 3.5.3 Redes Biquad.

En esta sección se ilustra como utilizar las redes Biquad, para la realización de funciones paso banda. La configuración Biquad general para la realización de una función paso banda se muestra a continuación

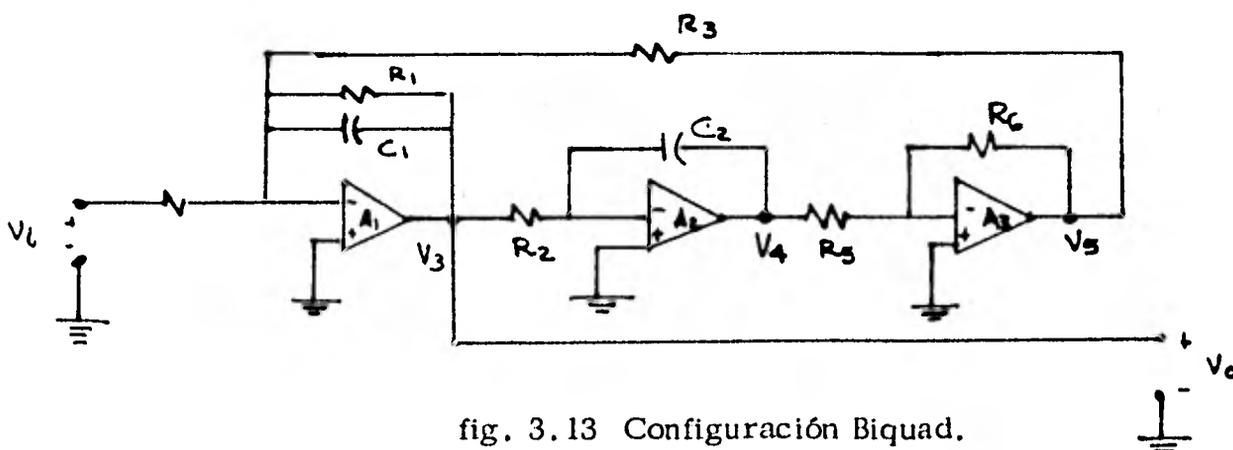


fig. 3.13 Configuración Biquad.

La función de transferencia de voltaje la obtenemos de la siguiente forma:

$$\frac{V_5}{V_4} = - \frac{R_6}{R_5} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{V_4}{V_3} = - \frac{1}{sR_2C_2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{V_5}{R_3} + \frac{sC_1R_1 + 1}{R_1} (V_3) = 0 \quad \text{--- (3)}$$

DE (1) Y (2) :

$$\frac{V_5}{V_4} \frac{V_4}{V_3} = \frac{R_6}{R_5 s R_2 C_2} \quad \text{--- (4)}$$

SUSTITUYENDO (4) EN (3)

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{\frac{R_6}{R_5 s R_2 C_2}}{\frac{R_3}{V_3}} + \frac{sC_1R_1 + 1}{R_1} (V_3) = 0$$

$$\frac{V_i}{R_4} + \frac{R_6 V_3}{s R_2 R_3 R_5 C_2} + \frac{(sC_1R_1 + 1) V_3}{R_1} = 0$$

$$\frac{sR_1R_2R_3R_5C_2V_i + R_1R_4R_6V_3 + s^2C_1R_1R_2R_3R_4R_5C_2V_3 + sR_2R_3R_4R_5C_2V_3}{sR_1R_2R_3R_4R_5C_2} = 0$$

$$V_3 (s^2R_1R_2R_3R_4R_5C_1C_2 + sR_2R_3R_4R_5C_2) + V_3 (R_1R_4R_6) = -sR_1R_2R_3R_5C_2V_i$$

$$\frac{V_3}{V_i} = - \frac{sR_1R_2R_3R_5C_2}{s^2R_1R_2R_3R_4R_5C_1C_2 + sR_2R_3R_4R_5C_2 + R_1R_4R_6}$$

Dividiendo todo entre  $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 C_1 C_2$  obtenemos:

$$\frac{V_3}{V_i} = - \frac{S / R_4 C_1}{S^2 + \frac{S}{R_1 C_1} + \frac{R_6}{R_2 R_3 R_5 C_1 C_2}}$$

$$\frac{V_3}{V_i} = - \frac{1}{R_4 C_1} \frac{S}{S^2 + \frac{1}{R_1 C_1} S + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \cdot \frac{R_6}{R_5}$$

De nuestra figura ( 3.13 Red Biquad, observamos que  $V_3 = V_o$  entonces:

$$\frac{V_o}{V_i} = - \frac{1}{R_4 C_1} \frac{S}{S^2 + \frac{1}{R_1 C_1} S + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \cdot \frac{R_6}{R_5}$$

( 2.50 )

## CAPITULO IV

### DISEÑOS DE FILTROS

#### 4.1 EJEMPLOS DE DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS.

En esta sección mostraremos el diseño de filtros activos de orden superior conectando en cascada redes de primer y segundo orden, con las cuales es más fácil implementar físicamente los filtros activos que hemos tratado en el capítulo anterior.

En los ejemplos que se mencionarán a continuación, el diseño se realiza utilizando diferentes tipos de aproximación como Tchebycheff y Butterworth; para poder observar los diferentes tipos de respuesta que las redes proporcionan a cada una de estas aproximaciones.

##### 4.1.1 Diseño de Filtros Paso Altas.

Se diseñará un filtro paso altas de décimo orden con aproximación Butterworth, con ganancia en la banda de paso uno y una frecuencia de corte de 1 KHz; configuración realimentación múltiple ganancia infinita. El polinomio de aproximación Butterworth, para un filtro de décimo orden, tendrá la siguiente forma:

$$D(s) = (s^2 + \alpha_0 \omega_0 s + \omega_0^2) (s^2 + \alpha_1 \omega_0 s + \omega_0^2) (s^2 + \alpha_2 \omega_0 s + \omega_0^2) \\ (s^2 + \alpha_3 \omega_0 s + \omega_0^2) (s^2 + \alpha_4 \omega_0 s + \omega_0^2)$$

Entonces la función de transferencia general de un filtro paso altas de décimo orden será

$$H(s) = \frac{H_0^5 \omega_0^{10}}{D(s)}$$

Nuestro diseño se realizará por medio de la conexión en cascada de cinco etapas de segundo orden, por lo que de las tablas para redes Butterworth, obtendremos valores de las  $\alpha$ 's, para cada una de las etapas.

Primera etapa:

$$\begin{aligned} \omega_o &= 1.985377 ; & \omega_o &= 1 \quad \text{--- de tablas} \\ & & & \text{normalizada} \\ H_o &= 1 ; \\ f_o &= 1 \text{ KHz} \end{aligned}$$

Escogemos  $C = C_1 = C_2 = 0.01$  ; entonces:

$$R_s = \frac{1}{\omega_o C} (2 H_o + 1) = \frac{1 (2 + 1)}{1.985377 (2 \pi \times 1 \times 10^3) (.01 \times 10^6)}$$

$$R_s = \frac{3 \times 10^3}{1.985377 (2 \pi \times 1 \times 0.01)} = 24.06 \times 10^3 \text{ } \Omega$$

Valor comercial  $2.4 \text{ K } \Omega$

$$R_2 = \frac{H_o}{\omega_o C (2 H_o + 1)} \frac{1.985377 (1)}{2 \pi \times 1 \times 10^3 \times .01 \times 10^{-6} (2 + 1)}$$

$$R_2 = 10.53 \times 10^3$$

Valor comercial  $R_2 = 10 \text{ K } \Omega$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_o} = .01$$

Comprobamos:

$$\omega_o = \left( \frac{1}{(10)(24)(.01)(.01)} \right)^{1/2} = 6.4549 \text{ K } \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$f_o = \frac{\omega_o}{2 \pi} = 1.02 \text{ KHz}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{10}{24} \left[ \frac{.01}{(.01)(.01)} + \frac{.01}{.01} + \frac{.01}{.01} \right]} = 1.9364$$

Nuestro circuito queda entonces de la siguiente forma:

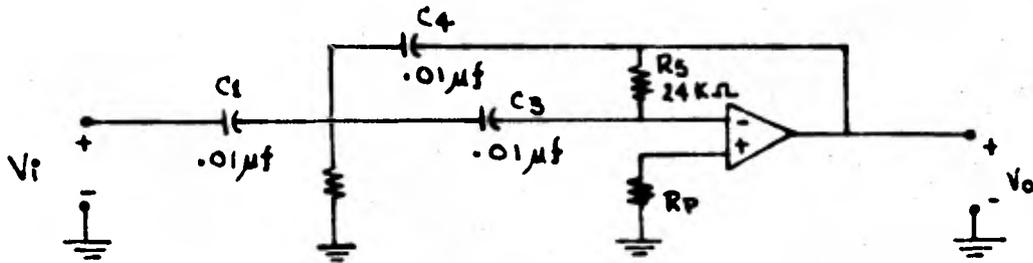


fig. 4.1 Realización función de transferencia paso altas por medio de ; circuito realimentación múltiple ganancia infinita

$R_p$  se calcula para minimizar el voltaje de offser debido a la corriente de polarización. Analizando el circuito para CD obtenemos:

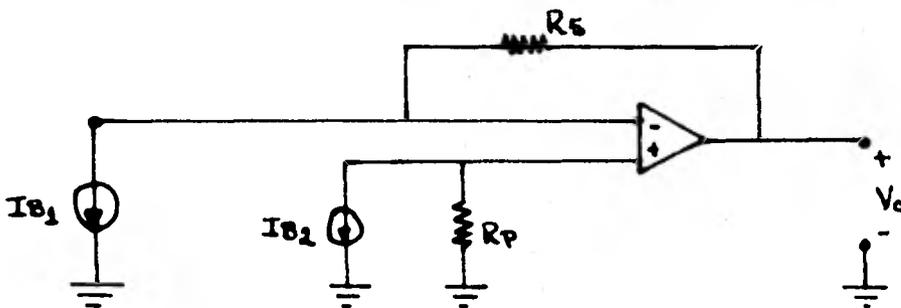


fig. 4.2 Circuito de polarización.

Empleando el principio de superposición.

$$I_{B1} = 0 \quad ; \quad I_{B2} \neq 0$$

$$V_{o'} = I_{B2} R_p$$

$$I_{B2} = 0 \quad ; \quad I_{B1} \neq 0$$

$$V_{o''} = -I_{B1} R_5$$

$$V_o = V_{o'} + V_{o''} = -I_{B1} R_5 + I_{B2} R_p$$

Para minimizar el voltaje de offset a la salida tenemos:

$$R_p = R_s$$

Entonces:

$$V_o = R_s (I_{e1} - I_{e2}) = R_s I_{off}$$

Y por lo tanto.

$$R_p = 24K$$

Segunda etapa:

$$\alpha_1 = 1.782013$$

$W_o = 1$  — de tablas  
Normalizado

$$H_o = 1$$

$$f_o = 1$$

Entonces

$$Si \quad C = C_1 = C_3 = .047 \text{ uf}$$

$$R_s = \frac{1(2+1)}{1.75 \cdot 13 \times 2\pi \times 1 \times 10^3 \times .047 \times 10^{-6}} = 5.7 \times 10^3 \Omega$$

$$R_2 = \frac{1.782013(1)}{2 \cdot 11 \times 1 \times 10^3 \times .047 \times 10^{-6} (2+1)} = 2.01 \times 10^3 \Omega$$

Valor comercial  $5.6 K\Omega = R_s$  y  $R_2 = 2.01 \times 10^3 \Omega$

Para un mejor ajuste usamos dos resistencias de:  $1 K\Omega$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_o} = .047 \text{ uf}$$

Comprobando.

$$W_o = \left( \frac{1}{(5.6)(2)(.047)(.047)} \right)^{1/2} = 6.35 \text{ K} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$f_o = \frac{W_o}{2\pi} = 1.01 \text{ KHz}$$

$$R_p = R_s = 5.6 K\Omega$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{5.6} \left[ \frac{.047}{1.047(.047)} + \frac{.047}{.047} + \frac{.047}{.047} \right]} = 1.7928$$

Tercera etapa:

$$\alpha_2 = 1.414214$$

$$W_o = 1 \quad \text{--- de tablas}$$

$$H_o = 1$$

$$f_o = 1 \text{ KHz}$$

$$\text{Si } C = C_1 = C_3 = .022 \text{ uf}$$

Entonces.

$$R_s = \frac{1(2+1)}{1.414214 \times 2\pi \times 1 \times 10^3 \times .022 \times 10^{-6}} = 15.34 \times 10^3 \Omega$$

Valor comercial 15 K  $\Omega$

$$R_2 = \frac{1.414214(1)}{2\pi \times 1 \times 10^3 \times .022 \times 10^{-6}(2+1)} = 3.41 \text{ K}\Omega$$

Valor comercial 3.3 K  $\Omega$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_o} = .022 \text{ uf}$$

Comprobando

$$W_o = \left[ \frac{1}{(15)(3.3)(.022)(.022)} \right]^{1/2} = 6.46 \text{ K } \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$f_o = \frac{W_o}{2\pi} = 1.02 \text{ KHz}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{3.3}{15} \left[ \frac{.022}{(.022)(.022)} + \frac{.022}{.022} + \frac{.022}{.022} \right]} = 1.4071$$

Para minimizar el voltaje de offset

$$R_p = R_s = 15 \text{ K}\Omega$$

Cuarta etapa:

$$\alpha_3 = .907981 \quad ; \quad \omega_0 = 1 \quad \text{--- de tablas}$$

$$H_0 = 1 \quad ; \quad f_0 = 1 \text{ KH}_z$$

$$\text{Si } C = C_1 = C_3 = .022 \text{ uf}$$

Entonces.

$$R_s = \frac{1(2+1)}{.907981 \times 2\pi \times 1 \times 10^3 \times .022 \times 10^{-6}}$$

Valor comercial 22 K $\Omega$

$$R_2 = \frac{.907981}{2\pi \times 1 \times 10^3 \times .022 \times 10^{-6} (2+1)}$$

Valor comercial 2.2 K $\Omega$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_0} = .022 \text{ uf}$$

Comprobando.

$$\omega_0 = \left( \frac{1}{(22)(2.2)(.022)(.022)} \right)^{1/2} = 6.53 \text{ K } \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1.04 \text{ KH}_z$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{2.2}{22} \left[ \frac{.022}{.022} + \frac{.022}{.022} + \frac{.022}{.022} \right]} = .9486$$

Para minimizar el voltaje de offset

$$R_p = R_s = 22 \text{ K}\Omega$$

Quinta etapa:

$$\alpha_4 = .312869 \quad ; \quad W_o = 1$$

$$H_o = 1 \quad f_o = 1 \text{ KH}_z$$

Si  $C = C_1 = C_3 = 0.1 \text{ uf}$

$$R_s = \frac{1(2+1)}{.312869 \times 2 \pi \times 1 \times 10^3 \times .1 \times 10^{-6}} = 15.26 \times 10^3 \Omega$$

Valor comercial = 15 K  $\Omega$

$$R_2 = \frac{.312869 (1)}{2 \pi \times 1 \times 10^3 \times .1 \times 10^{-6}}^{1/2} = .166 \text{ K } \Omega$$

Valor comercial 150  $\Omega$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_o} = 0.1 \text{ uf}$$

Comprobamos

$$W_o = \left( \frac{1}{(15)(.15)(.1)(.1)} \right)^{1/2} = 6.66 \text{ K } \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$f_o = \frac{W_o}{2 \pi} = 1.06 \text{ KH}_z$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{.15}{15} \left[ \frac{.1}{.1(.1)} + \frac{.1}{.1} + \frac{.1}{.1} \right]} = 0.3$$

Para minimizar el voltaje de offset a la salida de esta etapa.

$$R_p = R_s = 15 \text{ K } \Omega$$

El circuito completo conectando nuestras cinco etapas en cascada para formar nuestro filtro de décimo orden, queda como se ilustra a continuación:

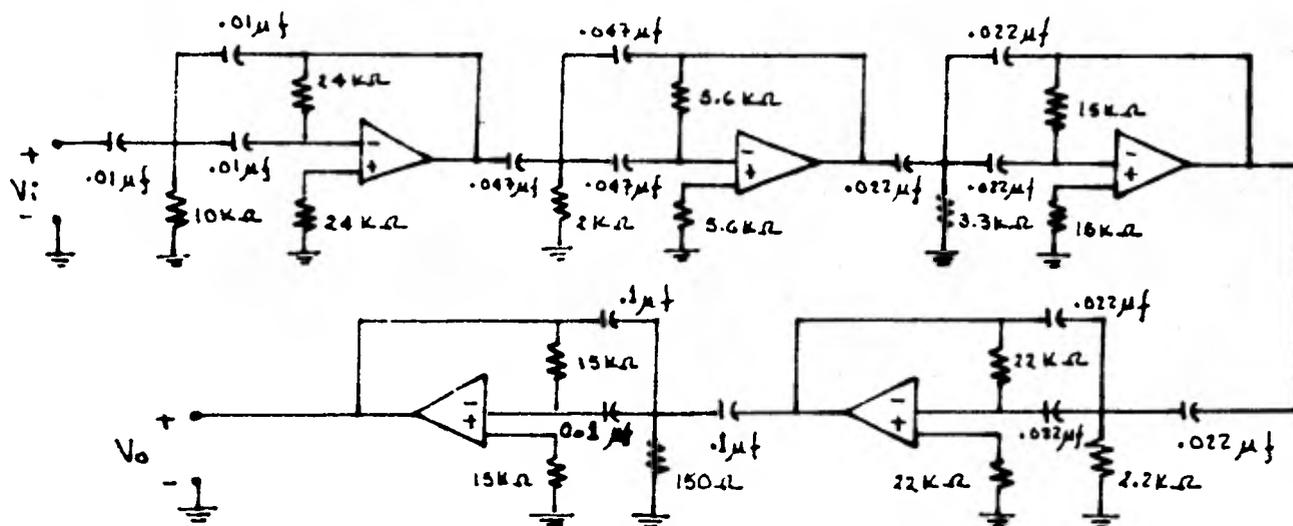


fig. 4.3 Filtro activo paso altas,

de décimo orden aproximación Butterworth ganancia en la banda de paso ( $H_0=1$ ), frecuencia de corte 1 KHz, configuración realimentación múltiple ganancia infinita

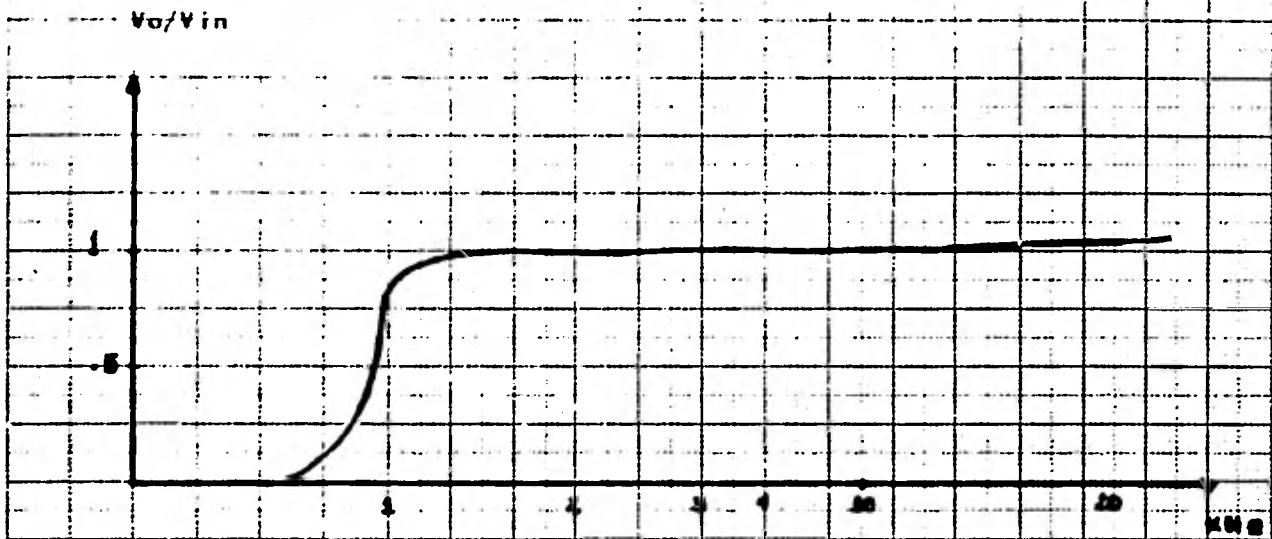
## RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DEL FILTRO

PASO ALTAS DE DECIMO ORDEN APROXIMACION

BUTTERWORTH FRECUENCIA DE CORTE 1 KHz

FRECUENCIA (HZ)	FASE ( GRADOS )		GANANCIA EN LA BANDA DE PASO
1	0		0
10	0		0
100	0		0
200	0		0
300	0		0
400	0		0
500	0		0
700	60	adelante	2.5/50 = .05
800	24	adelante	7/50 = .14
900	12	atrasado	17/50 = .34
1000	84	atrasado	42/50 = .84
1200	225	atrasado	45/50 = .90
1600	308	atrasado	46/50 = .92
2000	360	atrasado	50/50 = 1.0
3000	405	atrasado	50/50 = 1.0
4000	450	atrasado	50/50 = 1.0
5000	468	atrasado	50/50 = 1.0
6000	495	atrasado	50/50 = 1.0
7000	497	atrasado	50/50 = 1.0
10000	540	atrasado	50/50 = 1.0
50000	576	atrasado	80/50 = 1.6
70000	617	atrasado	300/50 = 6

# RESPUESTA DEL FILTRO ACTIVO PASO ALTAS



Gráfica No. 1 Gráfica de los resultados obtenidos en la prueba del filtro activo pasoaltas de decimo orden aproximación Butterworth y frecuencia de corte 1 KHz.

#### 4.1.2 Diseño de Filtro Activo Paso Bajas.

Diseñaremos un filtro paso bajas con aproximación Tchebysheff de orden décimo y una frecuencia de corte de 3 KHz y con un rizado de 3 db pico a pico, configuración fuente de voltaje controlada por voltaje.

El polinomio de aproximación Tchebysheff para un filtro de décimo orden tiene la siguiente forma:

$$D(s) = (S^2 + \alpha_0 S \omega_0 + \omega_0^2) (S^2 + \alpha_1 S \omega_0 + \omega_0^2) (S^2 + \alpha_2 S \omega_0 + \omega_0^2) \\ (S^2 + \alpha_3 S \omega_0 + \omega_0^2) (S^2 + \alpha_4 S \omega_0 + \omega_0^2)$$

El diseño de nuestro filtro será por medio de cinco etapas de segundo orden cada una obteniendo las tablas para redes Tchebysheff, los valores  $\alpha$  y  $\omega_0$  para cada una de las etapas.

##### Primera etapa:

$$\alpha_0 = .372004 \quad \omega_0 = 0.17694 \quad \text{--- de tablas normalizadas}$$

Elejimos,  $C = 0.022 \text{ uf}$

Entonces:

$$R = \frac{1}{0.179694 + (2 \Pi) (3 \times 10^3) (.022 \times 10^{-6})} = 13.42 \text{ K } \Omega$$

Para implementación utilizaremos  $12 \text{ K } \Omega + 1.5 \text{ K } \Omega$  que son valores comerciales de resistencia

$$K = 3 - = 2.037996$$

$$K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

Si  $R_A = 1 \text{ K } \Omega$

$$R_B = K R_a - R_a$$

$$R_a = 1 \text{ K } \Omega$$

$$R_B = 1.0279$$

Valor comercial

$$R_B = 1 \text{ K } \Omega$$

Segunda etapa:

$$\alpha_1 = .340668$$

$$W_o = .462521$$

Si

$$C = .047 \text{ uf}$$

$$R = \frac{1}{.462521 (2 \pi) (3 \times 10^5) (.047 \times 10^{-6})}$$

$$R = 2.44 \text{ K } \Omega$$

Valor comercial

$$R = 2.2 \text{ K}$$

$$K = 3 - .340668 = 2.6593$$

Si

$$R_a = 2.2 \text{ K } \Omega$$

$$R_B = 3.65 \text{ K } \Omega$$

Valor comercial

$$R_B = 3.6 \text{ K } \Omega$$

Tercera etapa:

$$W_{o2} = .712614$$

$$\alpha_2 = .175474$$

Si  $C = .047 \text{ uf}$

$$R = \frac{1}{.712614 (2 \Pi) (3 \times 10^3) (.047 \times 10^{-2})}$$

$R = 1.58 \text{ K } \Omega$

Valor comercial

$R = 1.5 \text{ K } \Omega$

$K = 3 - .175474 = 2.8245$

Si  $R_a = 4.7 \text{ K } \Omega$

$R_B = 8.57 \text{ K } \Omega$

Valor comercial

$R_B = 8.2 \text{ K } \Omega$

Cuarta etapa:

$\alpha_3 = .089664$

$W_o = .895383$

Si  $C = .012 \text{ uf}$

$$R = \frac{1}{.558383 (2 \Pi) (3 \times 10^3) (.012 \times 10^{-6})}$$

$R = 4.94 \text{ K } \Omega$

Valor comercial

$R = 4.7 \text{ K } \Omega$

$K = 3 - .089664 = 2.9104$

Si  $R_a = 6.8 \text{ K } \Omega$

$R_B = 12.99 \text{ K } \Omega \approx 13 \text{ K } \Omega$

Usando valores comerciales  $R_B = 12 \text{ K}\Omega + 1 \text{ K}\Omega$

Quinta etapa:

$$\alpha_4 = 0.027897$$

$$W_o = .991638$$

Si  $C = .022 \text{ uf}$

$$R = \frac{1}{0.991638 (2 \pi) (2 \times 10^3) (.022 \times 10^{-6})}$$

$$R = 2.43 \text{ K}\Omega$$

Valor comercial

$$R = 2.2 \text{ K}\Omega$$

$$K = 3 - .027897 = 2.972$$

Si  $R_a = 3.3 \text{ K}\Omega$

$$R_B = 6.5 \text{ K}\Omega$$

Valor comercial  $6.8 \text{ K}\Omega$

La red completa de nuestro filtro se muestra a continuación, según figura 4.4

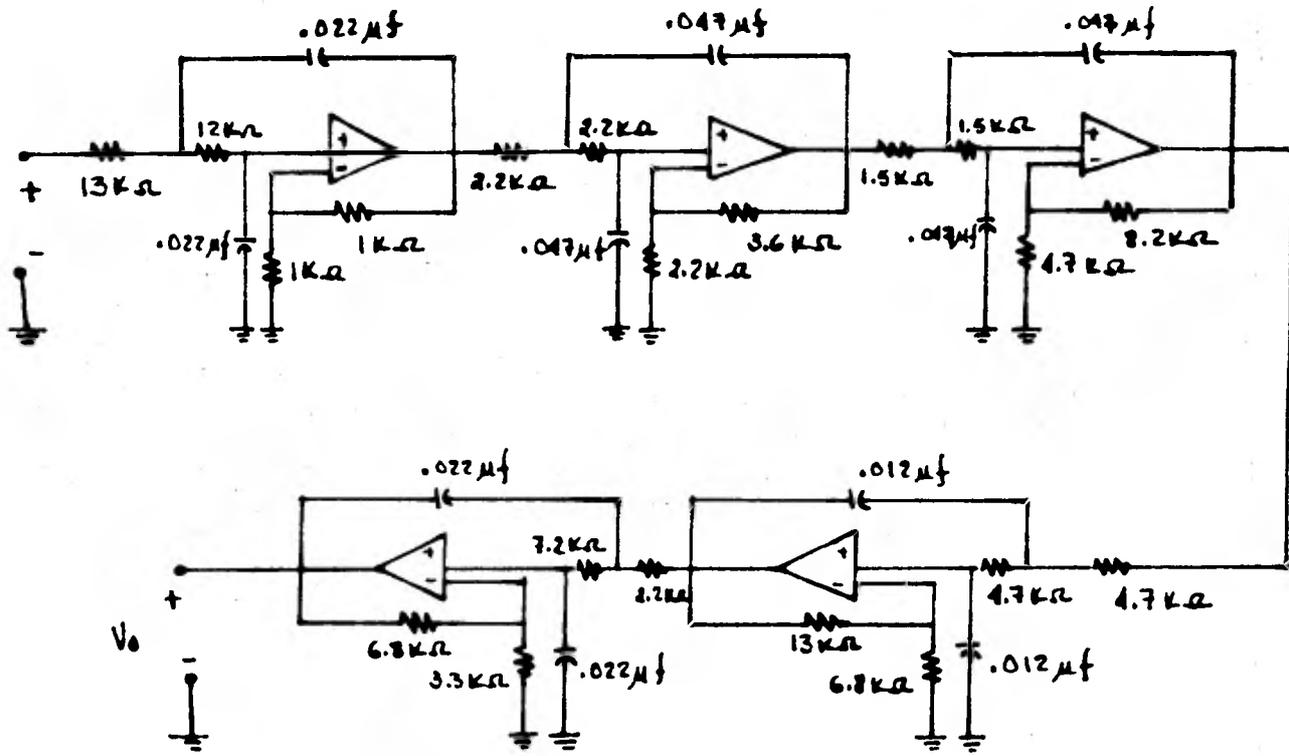


fig. 4.4 Filtro activo paso bajas,

de décimo orden aproximación Tchebysheff frecuencia de corte 3 KHz; configuración fuente controlada por voltaje de voltaje.

## RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DEL FILTRO

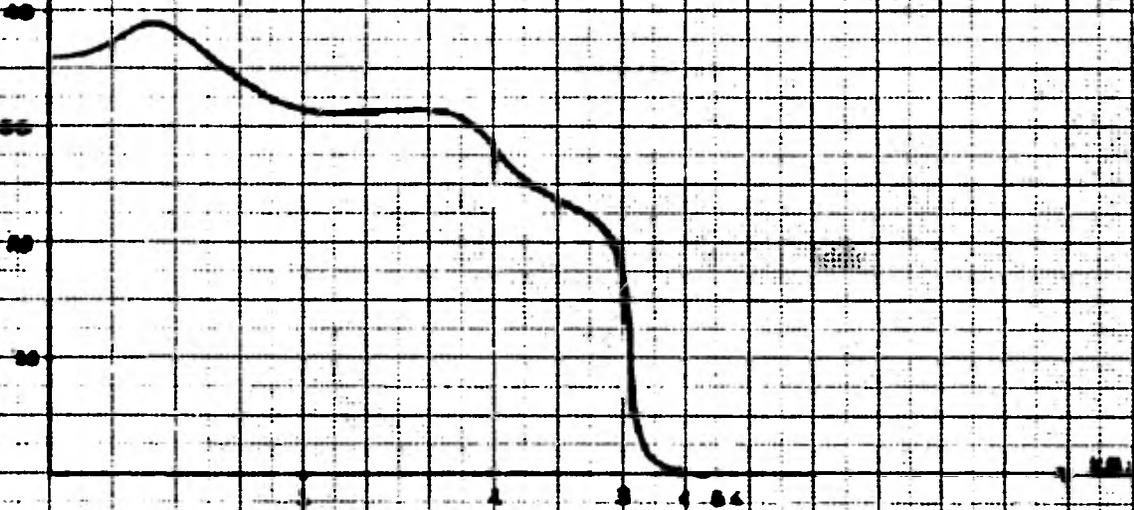
PASO BAJAS DE DECIMO ORDEN APROXIMACION

TCHEBYSHEFF FRECUENCIA DE CORTE 3 KHz

FRECUENCIA (HZ)	DEFASAMIENTO (GRADOS)		GANANCIA EN LA BANDA DE PASO
10	0		180/5 = 36
50	0		178/5 = 35.6
100	8	atras	178/5 = 35.6
200	28.8	atras	180/5 = 36
400	57.6	atras	200/5 = 40
800	128.5	atras	168/5 = 33.6
1000	180.0	atras	156/5 = 31.2
1200	182.4	atras	160/5 = 32
1600	300.0	atras	164/5 = 32.8
1800	324.0	atras	144/5 = 28.0
2000	360.0	atras	128/5 = 25.6
2200	396.0	atras	112/5 = 22.4
2400	445.0	atras	108/5 = 21.6
2800	462.84	atras	105/5 = 21
3000	480.0	atras	40/5 = 8
3200	496.2	atras	10/5 = 2
3000	0		
4000	0		
5000	0		

RESPUESTA DEL FILTRO ACTIVO PASO BAJAS

$V_o/V_i$



Gráfica No.2 Gráfica de los resultados obtenidos en la prueba -  
del filtro ACTIVO PASO BAJAS de décimo orden apro-  
ximación Tchebycheff y frecuencia de corte 3 KHz.

## BIBLIOGRAFIA.

1. - Filter System and design Electrical, microwave and digital.  
Yale, Job, Lubkin  
Mc Craw-Hill, 1970
2. - Introducción a la teoria y Sistemas de Comunicación  
B.P. Lathi  
Editorial Limusa-Wiley S.A., 1978
3. - Modern Filter Theory and Design  
Gabor C. Temes  
Mc Craw-Hill, 1972
4. - Operational Amplifiers  
J. G. Graeme, G. E. Tobey  
Limusa-Wiley S.A., 1973
5. - Active Filter  
Laurence P. Huelsman  
Mc Craw-Hill, 1973
6. - Networks Analysis and Synthesis  
Aram Budak

7. - Approximation Methods For Electronics Filter Design  
Daniels  
Mc Crow-Hill, 1974
8. - Active Inductorless  
Sanjit T. K. Mitra  
I E E E Press, 1971
9. - Active Filter  
Don Lancaster R  
Howard W. Sams Co. Inc, 1977
10. - Active Filters: Lumped, Distributed, Interated, Digital and Parametric  
Laurence P. Huelsman  
Mc Crow-Hill, 1973
11. - Network Synthesis  
David F. Tuttle  
Mc Crow-Hill

