

24/12

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA



**ANALISIS DE ESFUERZO EN UNA
VALVULA PARA CONTROL DE FLUJO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
P R E S E N T A

RUBEN AVILA RODRIGUEZ





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

	Página
CAPITULO 1.- INTRODUCCION	1
CAPITULO 2.- PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION DE LA TERMOELASTICIDAD.....	6
2.1 INTRODUCCION	6
2.2 ENFOQUE DEL CALCULO DIFERENCIAL	6
2.2.1 Principio de la conservación de la cantidad de movimiento	7
2.2.2 Tensor de Deformaciones ...	8
2.2.3 Ecuaciones Constitutivas ...	9
2.2.4 Ecuación de Campo	11
2.2.5 Ecuación de la Termoelasticidad	13
2.3 ENFOQUE DEL CALCULO VARIACIONAL	16
CAPITULO 3.- ASPECTOS GENERALES DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO	
3.1 INTRODUCCION	26
3.2 DESCRIPCION GENERAL DEL METODO	28
3.2.1 Discretización del continuo.	28
3.2.2 Modelos de desplazamiento.	29
3.2.3 Formulación de las Ecuaciones de Equilibrio	37
3.2.4 Formulación de las Ecuaciones de Equilibrio para un ensamble de Elementos	40
3.2.5 Solución de las ecuaciones de Equilibrio	50
3.2.6 Cálculo de Esfuerzos y deformaciones a partir de los Desplazamientos Nodales.	60

	Página
CAPITULO 4.- ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMETRICOS.	
4.1 INTRODUCCION	64
4.2 SISTEMA DE COORDENADAS NATURALES	65
4.3 MODELO DE LOS DESPLAZAMIENTOS CON FUNCIONES DE INTERPOLACION	71
4.4 FORMULACION GENERAL DE LOS ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS	73
4.5 INTEGRACION NUMERICA	80
CAPITULO 5.- DIAGRAMA DE FLUJO, PROGRAMA "ELFINTEST" y PROBLEMAS RESUELTOS.	
5.1 INTRODUCCION	87
5.2 DIAGRAMA DE FLUJO Y PROGRAMA "ELFINTEST"	89
5.3 SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES.	91
5.3.1 Deformación en el plano	92
5.3.2 Esfuerzos en el plano	95
5.3.3 Viga en cantiliver con carga concentrada en el extremo libre	97
5.3.4 Viga empotrada con cambio de temperatura	102
5.3.5 Viga en cantiliver con cargas concentradas de tensión	118
5.3.6 Viga en cantiliver con carga de presión en el extremo libre	122
5.3.7 Viga soportando su propio peso	122
5.4 SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES.	126
5.4.1 Viga tridimensional con cargas concentradas de tensión	126
5.4.2 Viga tridimensional soportando supropio peso	128
5.5 ANALISIS DE ESFUERZOS EN UNA VALVULA "Y" PARA CONTROL DE FLUJO	128
CONCLUSIONES	174
BIBLIOGRAFIA	175

INTRODUCCION

El diseño en la ingeniería mecánica es un proceso de toma de decisiones que el ingeniero lleva a cabo para la realización física de máquinas, mecanismos y sistemas¹, sin embargo, hablar de diseño en este contexto implica un amplio estudio de todas las disciplinas de la ingeniería mecánica, una parte constitutiva es el diseño mecánico, el cual aborda el diseño de dispositivos de naturaleza mecánica, ejemplos de éstos van desde un alfiler hasta el fuselaje de un avión, es decir, existe una gran variedad de estructuras que requieren de acuerdo a su utilización de un diseño mecánico confiable. Sin embargo en México esta actividad deja mucho que desear, repercutiendo lamentablemente en el atraso tecnológico en el que se encuentra el país. Esto es debido principalmente a que no es sencillo determinar completamente el comportamiento de un cuerpo y además a la falta de interés de los profesionistas del ramo de superar la etapa de diseño elemental e incursionar en pasos más sofisticados del diseño mecánico.

Una de las formas de atacar la crisis por la que atraviese la industria nacional es que en los centros de investigación y escuelas superiores se contemple la necesidad de estudiar y analizar a fondo dispositivos con geometría y condiciones de operación compleja, con la finalidad de mejorar la calidad de los productos nacionales y aliviar en un futuro la dependencia tecnológica que se tiene en este campo. Cabe hacer notar que al diseñar un dispositivo, no sólo entra en juego la intuición del ingeniero, sino también toda una base matemática que debe de utilizarse como herramienta principal en el proceso del diseño, sin embargo, esta disciplina deja mucho que desear en la gran mayoría de los ingenieros mexicanos, dando por consecuencia que no se puedan desarrollar diseños confiables que atraigan la atención de los industriales.

Por lo anterior expuesto, puede decirse que el interés fundamental al desarrollar el presente estudio, es el de incursionar en las técnicas de análisis de dispositivos sometidos a distintas sollicitaciones externas, considerando que los materiales estructurales que utilice el

ingeniero mecánico presentan un comportamiento lineal, elástico e isótropo, es conveniente enfocar el estudio de los mismos dentro del contexto de la teoría de la termoelasticidad. Sin embargo, el planteamiento riguroso de los problemas de esta índole² trae consigo grandes dificultades matemáticas y su solución solamente en un número reducido de casos, puede ser llevada a las fórmulas de cálculo útiles para las aplicaciones técnicas. Por esta razón, es que se utilizan ampliamente diferentes métodos para resolver en forma aproximada el problema de valores en la frontera de la teoría aplicada de la termoelasticidad, uno de estos métodos, es el del elemento finito³, el cual aproxima la solución en un número discreto de puntos en el interior de la estructura.

Una vez establecido el marco de referencia dentro del cual se desarrolla este trabajo de investigación, el objetivo del mismo puede plantearse en los siguientes términos; "Solución de las ecuaciones de Equilibrio de la Termoelasticidad a partir del Método del Elemento Finito".

Para llevar a cabo este objetivo es necesario en primer lugar establecer el modelo matemático a resolver y posteriormente, involucrarse en la teoría del método de solución, considerando sus diversos aspectos - tanto matemáticos como numéricos y computacionales. En el siguiente capítulo de esta obra, se presenta el planteamiento riguroso de las ecuaciones de la termoelasticidad a partir del cálculo diferencial y del cálculo variacional, mientras que en los siguientes capítulos se establece la teoría del método del elemento finito dentro del contexto de la mecánica de los sólidos, con el propósito de analizar el comportamiento de estructuras sometidas a diversas condiciones de frontera en estado estacionario, en el Capítulo 5 se presenta el programa de cómputo que se desarrolló durante el estudio, el cual resuelve en forma aproximada las ecuaciones de equilibrio en dos y tres dimensiones. Este esquema numérico determina entre otras cosas, los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones que se presentan en una estructura sometida a diversas condiciones en estado estacionario, las cuales pueden ser: cargas concentradas en puntos discretos del medio, cargas de cuerpo,

de presión y cargas inducidas por dilatación térmica del material. Con la finalidad de probar la convergencia del método y la bondad del programa de cómputo desarrollado, se analizaron estructuras con geometría y condiciones de frontera simples, obteniéndose resultados que concuerden con los obtenidos a partir de técnicas analíticas⁴, estos resultados se muestran en el Capítulo 5. Como parte final del estudio, se analiza una válvula para control de flujo, diseñado⁵ en el departamento de metales líquidos del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, las condiciones de operación, geometría y resultados se muestran también en el Capítulo 5.

Referencias.-

1. Joseph E. Shigley "Mechanical Engineering Design" International Student Edition, 1977.
2. V. G. Rekach "Problemas de la teoría de la Elasticidad" Ed. Mir Moscú, 1978.
3. Kleuss J. Bathe and Edward L. Wilson "Numerical Methods in Finite Element Analysis" Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1976.
4. V. G. Rekach. Op. Cit.
5. Rubén Avila R. "Diseño de una válvula "Y" para control de flujo" Reporte Interno del Departamento de Metales Líquidos del ININ. 1980

CAPITULO 2

PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION DE LA TERMOELASTICIDAD.

2.1 INTRODUCCION:

A fin de plantear el modelo matemático que rige el sistema en estudio, es conveniente decir que los materiales se consideran sólidos y presentan un comportamiento elástico, lineal e isótropo por lo que las leyes que gobiernan el comportamiento de tales materiales forman la base de la teoría de la elasticidad lineal,^{1,2} si a esto se agrega que existen cambios de temperatura y se incluye el coeficiente de dilatación térmica del material, se cae dentro del campo de la teoría de la termoelasticidad.³

2.2 ENFOQUE DEL CALCULO DIFERENCIAL.-

Para desarrollar la ecuación fundamental de la termoelasticidad, es necesario considerar las ecuaciones correspondientes a cualquier punto del medio continuo, asociado a un sistema de referencia cartesiano.

2.2.1 Principio de la conservación de la cantidad de movimiento o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento.⁴

En notación indicial.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \dots \dots \dots (2.1)$$

donde: σ_{ij} = son los componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy simétrico.

f_i = son los componentes del vector fuerzas de cuerpo por unidad de masa.

a_i = son los componentes del vector aceleración.

ρ = es la densidad de masa por unidad de volumen.

En notación tradicional.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = \rho a_x \dots \dots \dots (2.2a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = \rho a_y \dots \dots \dots (2.2b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho a_z \dots \dots \dots (2.2c)$$

2.2.2 Tensor de deformaciones⁵.

La métrica utilizada para medir el cambio geométrico de un cuerpo es:

En notación indicial.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \dots \dots \dots (2.3)$$

donde:

ϵ_{ij} = los componentes del tensor de deformaciones simétrico.

u_i = los componentes del vector de desplazamientos.

En notación tradicional.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots (2.4)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (2.6)$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots \dots (2.7)$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \dots \dots \dots (2.8)$$

$$\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots \dots (2.9)$$

2.2.3 Ecuaciones Constitutivas⁶⁷

Las ecuaciones constitutivas del material sólido, elástico, lineal e isótropo están dadas por las ecuaciones de Hooke-Cauchy, también conocida como la ley de Hooke generalizada.

En notación indicial.

$$\sigma_{kl} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{kl} + 2\mu \epsilon_{kl} \dots\dots\dots (2.10)$$

donde: λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y δ_{kl} es la delta de Kronecker.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots (2.12)$$

donde: E = módulo de Young.
 ν = módulo de Poisson.
G = módulo de rigidez al cortante.

En notación tradicional.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{xx} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right] \dots\dots (2.13)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{yy} + \nu(\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}) \right] \dots\dots (2.14)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{zz} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right] \dots \dots \dots (2.15)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \dots \dots \dots (2.16)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} \dots \dots \dots (2.17)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx} \dots \dots \dots (2.18)$$

En forme matricial

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{matrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{matrix} | & 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ | & \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ | & \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ | & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ | & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{matrix} \begin{matrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{matrix} \dots \dots (2.19)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon}'' \dots \dots \dots (2.20)$$

donde: $\underline{\sigma}$ = vector de esfuerzos

$\underline{\epsilon}''$ = vector de deformaciones

\underline{D} = matriz de coeficientes elásticos

2.2.4 Ecuaciones de Campo⁸.

A las ecuaciones de equilibrio dinámico (2.1) y (2.2) expresadas en función de los componentes del vector desplazamiento, se les conoce también con el nombre de ecuaciones de campo de Navier.

En notación indicial se obtienen al sustituir (2.3) en (2.10) y el resultado que se obtiene se sustituye en (2.1), resultando:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \nabla \cdot \underline{u} + \mu \nabla^2 u_k + \rho f_k = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad \dots (2.21)$$

En notación tradicional se obtienen al sustituir (2.4) o (2.9) en (2.13) o (2.18) y el resultado obtenido se sustituye en (2.2) quedando:

$$\bullet \left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots (2.22a)$$

$$\bullet \left[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \dots (2.22b)$$

$$\bullet \left[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots (2.22c)$$

Estas tres ecuaciones pueden juntarse en una sola de tipo vectorial quedando:

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{f} + G \nabla^2 \underline{u} + (G + \lambda) \text{grad div } \underline{u} \quad \dots (2.23)$$

donde: $\underline{a} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \underline{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \underline{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \underline{k}$... vector de aceleración

$\underline{u} = u \underline{i} + v \underline{j} + w \underline{k}$... vector de desplazamiento.

$\underline{f} = f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k}$... vector de fuerzas m3sicas.

A (2.23) se le conoce como la ecuaci3n de la elasticidad (Navier y Cauchy). Por lo general en los problemas modelados a partir de esta teor3a, las aceleraciones son tan peque1as ¹⁹ que com3nmente se desprecian entonces (2.23) se transforma en:

$$G \nabla^2 \underline{u} + (G + \lambda) \text{grad div } \underline{u} + \rho \underline{f} = 0 \quad \dots (2.24)$$

Las ecuaciones de equilibrio (2.21; 2,22; 2.23 o 2.24) son v3lidas para cualquier punto de cualquier cuerpo de forma arbitraria pero construido con un material s3lido, el3stico, lineal e is3tropo (cuerpos modelados con la teor3a de la elasticidad lineal).

2.2.5 Ecuación de la termoelasticidad.

Si se considera un cuerpo con una configuración arbitraria y se le permite cambiar su temperatura una cantidad ΔT , sucede que todos los elementos lineales infinitesimales en el volumen del cuerpo, tienen igual expansión o contracción, además de que mantienen su dirección inicial, es decir, que el tipo de deformación que se presenta es isotrópico y no distorsional⁹, entendiéndose por deformación isotrópica aquella que sólo produce cambios de volumen más no de forma. Consecuentemente los componentes de deformación debido al cambio de temperatura ΔT son: con respecto a las coordenadas rectangulares cartesianas¹⁰ (x, y, z) :

$$e'_{11} = e'_{22} = e'_{33} = \alpha \Delta T \quad e'_{12} = e'_{13} = e'_{23} = 0 \quad \dots (2.25)$$

donde: α = coeficiente de dilatación térmica lineal
en notación indicial

$$e'_{ij} = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad \dots (2.26)$$

Si además de presentarse dilatación térmica existe otra deformación provocada por fuerzas de cuerpo y de superficie e''_{ij} la deformación total resulte ser:

$$e_{ij} = e''_{ij} + \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

Se concluye entonces que el cambio neto en la deformación producido por las cargas externas está representado por:

$$e''_{ij} = e_{ij} - \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad \dots (2.27)$$

pudiéndose expresar en forma matricial como:

$$\underline{e}'' = \underline{e} - \underline{e}_0$$

sustituyendo esta última expresión en (2.20) se obtiene la forma modificada del vector esfuerzo:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{e} - \underline{e}_0) \quad \dots (2.20a)$$

Sustituyendo (2.4) o (2.9) en (2.27) y después colocando estas últimas en (2.13) o (2.18) se obtiene:

$$\sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \underline{e} - \alpha \Delta T \quad \dots (2.28)$$

$$\sigma_{yy} = 2G \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \underline{e} - \alpha \Delta T \quad \dots (2.29)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \underline{e} - \alpha \Delta T \quad \dots (2.30)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \dots (2.31)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \dots (2.32)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \dots (2.33)$$

donde:

$$C = (3\lambda + 2G) \alpha = \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha \quad \dots (2.34)$$

Sustituyendo (2.28) a (2.33) en (2.2).

$$G \left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - c \frac{\partial T}{\partial x} + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots (2.35a)$$

$$G \left[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - c \frac{\partial T}{\partial y} + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \dots (2.35b)$$

$$G \left[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - c \frac{\partial T}{\partial z} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots (2.35c)$$

Sumando vectorialmente tenemos

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{f} + G \nabla^2 \underline{a} + (G + \lambda) \text{grad div } \underline{a} - c \text{grad } T \quad \dots (2.36)$$

Que es la ecuación fundamental de la termoelasticidad.

Por lo general en los problemas modelados a partir de esta teoría, las aceleraciones son tan pequeñas que se pueden despreciar¹⁹, por tanto (2.36) se transforma en:

$$G \nabla^2 \underline{a} + (G + \lambda) \text{grad div } \underline{a} + \rho \underline{f} - c \text{grad } T = 0 \quad \dots (2.37)$$

Las ecuaciones de equilibrio (2.35), (2.36) y (2.37) son válidas para cualquier punto de cualquier medio sólido, elástico, lineal e isótropo.

2.3 ENFOQUE DEL CALCULO VARIACIONAL.

El cálculo variacional estudia los métodos que permiten encontrar los valores máximos y mínimos de ciertas magnitudes variables llamadas funcionales. Muchas leyes de la mecánica y la física se reducen a la afirmación de que cierta funcional debe alcanzar un mínimo o un máximo en el proceso considerado¹¹. En este enunciado dichas leyes reciben el nombre de principios variacionales. A estos o a sus corolarios más simples pertenecen; el principio de la acción mínima, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, el principio de la energía potencial, diferentes principios variacionales de la teoría relativista de campo, etc..

Un principio variacional fundamental de la mecánica del cuerpo elástico es la ecuación variacional de la energía potencial^{13,14,15}, basada en el principio de los desplazamientos posibles, representándose de la siguiente forma:

$$\delta \Pi(u, v, w) = 0 \quad \dots \dots \dots (2.38)$$

donde:

Π = Funcional de la energía potencial total del sistema.

$$\Pi = U + W_p \dots\dots\dots (2.39)$$

U = Energía potencial de la deformación del cuerpo.

W_p = Energía potencial de las cargas aplicadas.

u, v, w = Vector de los desplazamientos.

Si las cargas permanecen constantes durante una variación de los desplazamientos, se puede relacionar, las variaciones del trabajo realizado por las cargas W y el potencial de las mismas de la forma siguiente:

$$\delta W = - \delta W_p \dots\dots\dots (2.40)$$

Escribiéndose entonces (2.38) como:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W_p = \delta U - \delta W = 0 \dots\dots\dots (2.41)$$

Este principio de la energía potencial mínima, establece, que de todas las posibles configuraciones de desplazamiento que un cuerpo puede adquirir, aquella que satisface el equilibrio estático, es la que ocasiona que la energía potencial adquiera un valor mínimo. Es importante hacer no

ter que aunque se consideren variaciones de los desplazamientos y cargas externas constantes, las ecuaciones que se obtienen son ecuaciones de equilibrio.

La funcional de la energía potencial de un cuerpo elástico lineal, puede ser expresada como la suma del trabajo interno (energía de deformación, inducida por esfuerzos internos) y la energía potencial de las cargas externas tanto de cuerpo como de superficie, resultando una expresión de la forma siguiente¹²:

$$\Pi = \int_{\Omega} dU(u,v,w) - \int_{\Omega} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) d\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{T}_x u + \bar{T}_y v + \bar{T}_z w) d\Gamma. \quad (2.42)$$

donde Ω es un dominio (volumen), Γ son las fronteras del dominio, donde actúan las fuerzas superficiales, $dU(u,v,w)$ es la energía de la deformación por unidad de volumen. Las últimas dos integrales de (2.42) representan el trabajo realizado por las fuerzas externas, es decir las fuerzas de cuerpo $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ y las fuerzas superficiales $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$.

Una vez establecido el principio variacional sobre el cual se desarrollará el trabajo, es bueno comenzar a establecer

la relación existente entre las ecuaciones de equilibrio estático (2.37) y el principio de la energía potencial mínima. Para ello es conveniente reescribir (2.42) en forma general ¹⁴ es decir;

$$\Pi = \int_{\Omega} F(u, \frac{\partial u}{\partial x} \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} E(u, \frac{\partial u}{\partial x} \dots) d\Gamma \quad \dots (2.43)$$

donde: "u" es la función desconocida (vector de desplazamientos). Aplicando el principio de la energía potencial mínima ¹⁶ a (2.43) se obtiene:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta u A(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u B(u) d\Gamma = 0 \quad \dots (2.44a)$$

$$\delta \Pi = \delta u \int_{\Omega} A(u) d\Omega + \delta u \int_{\Gamma} B(u) d\Gamma = 0 \quad \dots (2.44b)$$

donde: A es un operador diferencial. Para que se cumplan las ecuaciones (2.44) considerando cualquier variación arbitraria, δu se tiene que:

$$A(u) = 0 \quad \text{en el dominio } \Omega \quad \dots (2.45)$$

$$B(u) = 0 \quad \text{en la frontera } \Gamma \quad \dots (2.46)$$

La expresión (2.45) representa las ecuaciones diferenciales que gobiernen el comportamiento del sistema, mientras que (2.46) represente las condiciones de frontera natura-

les impuestos sobre el mismo.^{13,14,15} Existen también las condiciones de frontera geométricas o forzadas, las cuales se establecen al considerar las variaciones de los desplazamientos y representadas como:

$$\begin{array}{ll} \delta u (X_1) = 0 & \delta u (Y_1) = 0 \\ \delta u (X_2) = 0 & \delta u (Y_2) = 0 \end{array} \quad \dots\dots (2.47)$$

Es bien claro entonces decir que cuando se aplican los conceptos del cálculo variacional a una cantidad que es la integral de una funcional (energía potencial), se obtiene una completa descripción del problema, consiguiendo no sólo las ecuaciones diferenciales, sino también las condiciones de frontera. A (2.45) y (2.46) se les conoce como ecuaciones diferenciales de Euler o ecuaciones de Euler-Lagrange. Es demostrable que para cualquier principio variacional de la física o de la mecánica un conjunto de ecuaciones diferenciales de Euler puede ser establecido, lo inverso no se cumple.^{16,17}

Haciendo referencia a los párrafos anteriores se dice que las ecuaciones de equilibrio estático (2.37) son las ecuaciones de Euler correspondientes al principio variacional de la energía potencial mínima, ésto se puede demostrar

si en (2.42) se expresa la energía de la deformación en forma matricial es decir:

$$dU = \frac{1}{2} \underline{e}^+ \underline{D} \underline{e} \, d\Omega \quad \dots\dots\dots (2.48)$$

Sustituyendo (2.20a) en (2.48) se obtiene la expresión siguiente:

$$dU = \frac{1}{2} \underline{e}^+ \underline{D} (\underline{e} - \underline{e}_p) \, d\Omega \quad \dots\dots\dots (2.49)$$

consecuentemente (2.42) se transforma en:

$$\begin{aligned} \pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{e}^+ \underline{D} \underline{e} - \underline{e}^+ \underline{D} \underline{e}_p - 2 \underline{u}^+ \bar{X}) \, d\Omega - \\ \int_{\Gamma} \underline{u}^+ \bar{T} \, d\Gamma \quad \dots\dots\dots (2.50) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \underline{u}^+ &= (u, v, w) \\ \bar{X}^+ &= (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) \quad \dots\dots\dots (2.51) \\ \bar{T}^+ &= (\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z) \end{aligned}$$

Debido a que se consideran variaciones de los desplazamientos posibles, es recomendable expresar (2.50) en función de los desplazamientos, para ello se expresan (2.4) o (2.9) en forma matricial como:

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{u} \dots \dots \dots (2.52)$$

donde:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \nu_{xy} \\ \nu_{yz} \\ \nu_{xz} \end{bmatrix} \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

sustituyendo (2.52) en (2.50) se obtiene la funcional de la energía potencial en función de los desplazamientos:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\underline{L} \underline{u})^t \underline{D} \underline{L} \underline{u} - (\underline{L} \underline{u})^t \underline{D} \underline{\epsilon}_0 - 2 \underline{u}^t \underline{\bar{X}}) d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{u}^t \underline{\bar{T}} d\Gamma \quad \dots (2.53)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{u}^t \underline{L}^t \underline{D} \underline{L} \underline{u} - \underline{u}^t \underline{L}^t \underline{D} \underline{\epsilon}_0 - 2 \underline{u}^t \underline{\bar{X}}) d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{u}^t \underline{\bar{T}} d\Gamma \quad \dots (2.54)$$

Aplicando el principio de la energía potencial mínima, se obtiene:

$$\delta \Pi = \delta \underline{u}^t \left(\int_{\Omega} \underline{L}^t \underline{D} \underline{L} \underline{u} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{L}^t \underline{D} \underline{\epsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\bar{X}} d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{\bar{T}} d\Gamma \right) = 0 \quad \dots (2.55)$$

debido a que las variaciones de los desplazamientos son arbitrarias, las expresiones dentro del paréntesis deben desaparecer teniendo entonces:

$$\int_{\Omega} (\underline{L}^t \underline{D} \underline{L} \underline{u} - \underline{L}^t \underline{D} \underline{e}_0 - \bar{X}) d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{T} d\Gamma = 0 \quad \dots (2.56)$$

pudiéndose expresar como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(u) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{B}(u) d\Gamma = 0 \quad \dots (2.57)$$

donde fácilmente se comprueba¹⁸ que las expresiones $\mathbf{A}(u)$ y $\mathbf{B}(u)$ de (2.57) son las ecuaciones de equilibrio y condiciones de frontera respectivamente que gobiernan el comportamiento de los medios continuos elásticos, ecuaciones (2.37).

Una vez establecida la relación entre las ecuaciones de equilibrio estático y el principio variacional de la energía potencial mínima, el paso siguiente es plantear el método de solución que resuelva en forma aproximada el problema de valores en la frontera de la teoría aplicada de la termoelasticidad.

Referencias:

1. Enzo Levi "Elementos de mecánica del medio continuo", Ed. Limusa, 1980.
2. Arthur P. Boresi and Paul P. Lynn, "Elasticity in Engineering Mechanics" Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1974.
3. Ibid.
4. R. Cervantes B. y V. Porras S. "Método del elemento finito", publicación de la DEPEI de la U.N.A.M.
5. Arthur P. Boresi. Op. Cit.
6. Ibid.
7. Y. C. Fung "A First Course in Continuum Mechanics" Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1977
8. Arthur P. Boresi. Op. Cit.
9. Enzo Levi. Op. Cit.
10. R. Cervantes B. Op. Cit.

11. L. Elsgoltz "Ecuaciones diferenciales y Cálculo Variacional". Ed. Mir Moscú, 1969.
12. Chendrekant S. Desai and John F. Abel "Introduction to the Finite Element Method". Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
13. Ibid.
14. O. C. Zienkiewicz "The Finite Element Method" Mc Graw Hill Company, 1977.
15. R. Cervantes B. Op. Cit.
16. O. C. Zienkiewicz. Op. Cit.
17. Chendrekant S. Desai, Op. Cit.
18. O. C. Zienkiewicz. Op. Cit.
19. Arthur P. Boresi. Op. Cit.

CAPITULO 3

ASPECTOS GENERALES DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

3.1 INTRODUCCION.

Una gran parte de los problemas que se presentan en ingeniería carecen de solución matemática analítica, debido a lo complejo de los modelos que rigen el comportamiento de los mismos¹. Sin embargo, esta carencia de solución cerrada puede suplirse en la mayoría de los casos con soluciones aproximadas aceptables, obtenidas a partir de diversos métodos numéricos desarrollados para tal fin.^{2,3}

Uno de estos métodos es el del elemento finito el cual es utilizado frecuentemente para resolver el problema de valores en la frontera, en sus tres formulaciones; estado estacionario o de equilibrio, valores y vectores característicos y estado transitorio o de propagación⁴. Este método aproxima la solución, en un determinado número de puntos discretos, seleccionados mediante un proceso denominado discretización, que consiste en dividir el continuo en pequeñas unidades, dentro de las cuales se formulan soluciones aproximadas a partir de funciones relativamente simples. Una vez establecidas las soluciones en cada uni-

dad constitutiva, el método combina todas ellas a fin de establecer el comportamiento del medio global.

Debido a que en el presente estudio se pretende resolver el problema de equilibrio de los medios continuos elásticos, es conveniente decir que el proceso de solución puede establecerse a partir de tres diferentes formulaciones, todo dependiendo de la función buscada⁵.

a.- Formulación de los desplazamientos: los desplazamientos de ciertos puntos discretos en una estructura son las incógnitas del problema.

b.- Formulación de equilibrio: Los esfuerzos en ciertos puntos discretos son las incógnitas del problema.

c.- Formulación mixta: algunos desplazamientos y algunos esfuerzos son las incógnitas del problema.

La formulación de los desplazamientos que es la que proporciona el mejor entendimiento físico del método^{3,4} ha sido seleccionada para resolver las ecuaciones de equilibrio de la termoelasticidad (2.37), siendo éste la razón de haberlas establecido en función de los desplazamientos.

3.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO.

En esta sección se describe la secuencia de pasos que rigen el proceso de solución de las ecuaciones de equilibrio estático de la teoría de la termoelasticidad, utilizando el método de elementos finitos.

3.2.1 Discretización del Continuo.

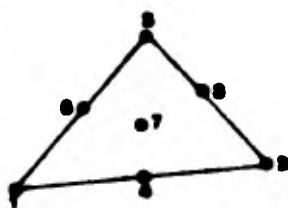
Discretización es el proceso de dividir un medio continuo en un sistema equivalente de elementos finitos, interconectados en puntos de unión llamados "nodos", estos elementos pueden ser triángulos o cuadriláteros, Fig. 3.1, cuando la estructura se analiza en dos dimensiones, si el análisis es tridimensional, los elementos pueden ser tetraedros, prismas rectangulares, o hexaedros, Fig. 3.2

El proceso de discretización depende en gran parte de la experiencia del analista⁶, ya que tiene que decidir entre otras cosas, el tamaño, tipo y arreglo de elementos que representen adecuadamente el cuerpo en estudio.

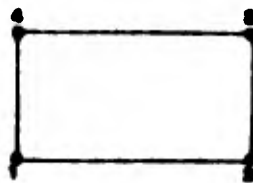
3.2.2 Modelos de desplazamiento.

Una vez que el cuerpo ha sido dividido, el paso siguiente es seleccionar una expresión relativamente simple, que aproxime la distribución o variación real de los desplazamientos en el interior de cada elemento.^{7,8,9} Estas expresiones son llamadas funciones o modelos de desplazamiento y para representarlas, comúnmente se emplean funciones polinomiales,¹⁰ las cuáles son de orden finito dando por consecuencia que los modelos no representen exactamente la variación de los desplazamientos, por lo que se dice que la aproximación básica del método del elemento finito se introduce en este paso.

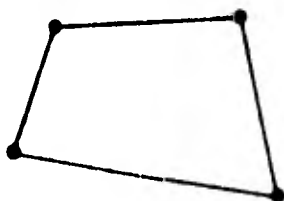
Fig. 3.1



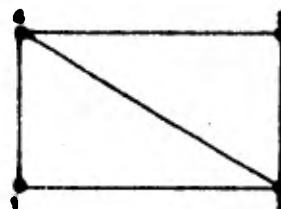
Elemento Triangular



Rectángulo

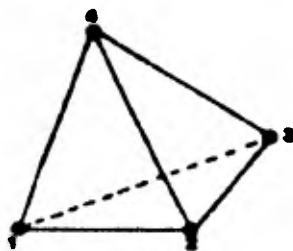


Cuadrilátero

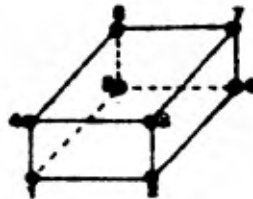


2 Triángulos

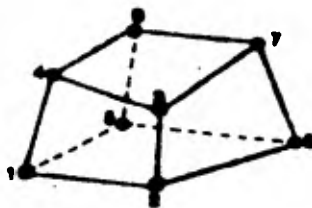
Fig. 3.2



Tetraedro



Prisma Rectangular



Hexaedro

.- Modelo de desplazamiento en coordenadas generalizadas.

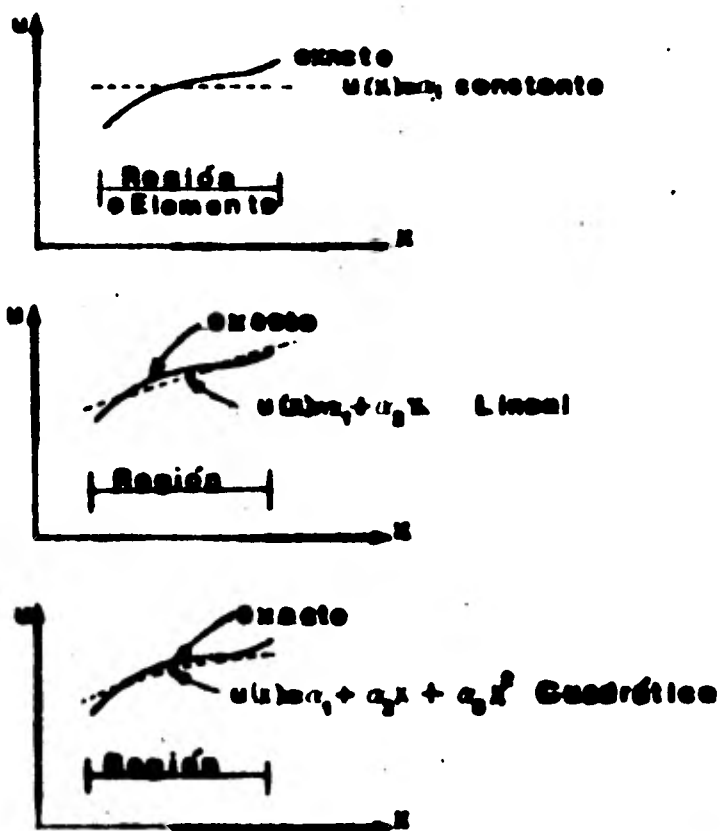
En la sección anterior se mencionó que un polinomio es la forma más adecuada de aproximar los desplazamientos en el interior de cada elemento, esto es debido principalmente a dos razones; la primera es que el uso de polinomios permite diferenciar e integrar las ecuaciones resultantes en forma relativamente fácil y la segunda es que un polinomio de orden arbitrario permite tener una idea clara^{11,12} de la aproximación.

En la Fig. 3.3 se muestra una solución exacte de la función desplazamiento $u(x)$, siendo aproximada por polinomios de distinto orden de la forma:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} X^n \dots \quad (3.1)$$

observándose que entre más grande es el número de términos incluidos en la aproximación, más cercanamente se representa la solución exacte.

Fig. 3.3



En la ecuación (3.1) los coeficientes α reciben el nombre de "coordenadas o amplitudes generalizadas de los desplazamientos" y representan combinaciones lineales de los desplazamientos nodales¹³, esta última ecuación puede escribirse en forma matricial como:

$$u(x) = \underline{\phi}^t \underline{\alpha} \quad (3.1b)$$

$$\underline{\phi}^t = [1, x, x^2, \dots, x^n]$$

donde: $\underline{\alpha}^t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}]$

El polinomio general que representa el modelo de los desplazamientos en dos dimensiones se expresa de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \dots + \alpha_m y^n \\ v(x, y) &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \dots + \alpha_{2m} y^n \end{aligned} \quad \dots (3.2a)$$

donde: $m = \sum_{l=1}^{n+1} l$

en esta ecuación u y v son los componentes del vector desplazamiento en las direcciones "x" y "y" respectivamente; en forma matricial se tiene:

$$\underline{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \underline{\Phi} \underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1^t & \underline{\Phi}_2^t \\ \underline{\Phi}_1^t & \underline{\Phi}_2^t \end{bmatrix} \underline{\alpha}$$

... (3.2b)

donde:

$$\underline{\Phi}_1^t = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, y^n]$$

$$\underline{\alpha}^t = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2m}]$$

Un conjunto de polinomios similares puede ser establecido para el modelo de los desplazamientos en tres dimensiones.

.- Grados de libertad nodal.

Los desplazamientos nodales que son los que determinan las deformaciones en cada elemento se denominan grados de libertad, diferenciándose de las coordenadas generalizadas en que cada uno esté plenamente identificado con un punto nodal. Con el propósito de establecer la relación entre estos dos parámetros, es necesario evaluar los desplazamientos nodales, utilizando para ello el modelo de los desplazamientos

$$\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{\alpha} \dots \dots \dots (3.3)$$

cabe hacer notar que para desarrollar esta relación es conveniente sustituir las coordenadas de los puntos nodales en (3.3).

$$\underline{q}^{\circ} = \begin{bmatrix} \underline{u} \text{ (Nodo 1)} \\ \underline{u} \text{ (Nodo 2)} \\ \dots\dots\dots \\ \underline{u} \text{ (Nodo M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\phi} \text{ Nodo 1} \\ \underline{\phi} \text{ Nodo 2} \\ \dots\dots\dots \\ \underline{\phi} \text{ Nodo M} \end{bmatrix} \quad \underline{\alpha} = \underline{A} \underline{\alpha} \dots (3.4)$$

donde:

M = número total de nodos en el elemento considerado.

\underline{q}° = vector de los desplazamientos nodales.

A = matriz de coordenadas de los puntos nodales.

Invirtiendo (3.4) se obtiene:

$$\underline{\alpha} = \underline{A}^{-1} \underline{q}^{\circ} \dots\dots\dots (3.5)$$

donde \underline{A}^{-1} recibe el nombre de matriz de los desplazamientos y como es una matriz cuadrada se concluye que el número total de coordenadas generalizadas es igual al número total de grados de libertad. Si se sustituye (3.5) en (3.3) se eliminan las coordenadas generalizadas, quedando:

$$\underline{u} = \underline{\phi} \underline{A}^{-1} \underline{q}^{\circ} = \underline{N} \underline{q}^{\circ} \dots\dots\dots (3.6)$$

Esta ecuación determina los desplazamientos \underline{u} en cualquier punto del elemento, en función de los desplazamientos nodales \underline{q}° . Una limitante del modelo en coordenadas generalizadas es que la inversa de la matriz A

no siempre puede ser evaluada¹⁴, sin embargo esta dificultad se evita al utilizar el modelo presentado en el siguiente capítulo.

.- Requisitos de convergencia.

En cualquier formulación numérica aceptable el resultado debe converger a una solución, en el método del elemento finito se ha demostrado¹⁵ que la formulación de los desplazamientos proporciona un límite superior "upper bound" de la rigidez real de la estructura, en otras palabras; los coeficientes de rigideces adquieren valores más grandes que los exactos, dando por consecuencia que bajo condiciones de carga la estructura simulada se deforme una cantidad menor que la estructura real. Con todo ésto se dice que conforme la división del cuerpo se hace más pequeño¹⁶, la solución numérica tiende a la solución exacta desde abajo "lower bound", con el propósito de asegurar la convergencia, tres requisitos^{17,18} deben cumplirse al seleccionar un modelo de desplazamiento.

1.- El modelo debe ser continuo en todo el elemento y los desplazamientos deben ser compatibles entre elementos adyacentes.

La primera parte de este requisito se cumple si se seleccionen modelos en forma de polinomios, la segunda parte implica que elementos adyacentes se deformen sin causar discontinuidades entre las interfases de los mismos.^{3,4,5}

2.- El modelo debe incluir el desplazamiento de cuerpo rígido del elemento. Un desplazamiento de cuerpo rígido es la deformación más elemental que una estructura puede sufrir, básicamente este requisito establece que deben existir combinaciones de las coordenadas generalizadas que provoquen que todos los puntos del elemento presenten los mismos desplazamientos. En los modelos de la sección anterior el término constante representa el desplazamiento de cuerpo rígido.^{3,4,5}

3.- El modelo debe incluir el estado de deformación constante de cada elemento. Este requisito puede establecerse en términos similares al anterior, es decir que deben existir combinaciones de las coordenadas generalizadas, las cuales provoquen que todos los puntos en el interior de un elemento, presenten la misma deformación. Esta condición de convergencia puede entenderse físicamente

si se imagina la subdivisión de un cuerpo en elementos cada vez más pequeños, mientras que los elementos se aproximen a un tamaño infinitesimal, las deformaciones se aproximan a valores constantes, los términos asociados con α_2 y α_{m+3} en la ecuación (3.2) proporcionan una deformación uniforme e_{xx} y e_{yy} en un elemento bidimensional.^{3,4,5}

En la literatura de los elementos finitos, los modelos que satisfacen el primer requisito se les llama "compatibles", mientras que los modelos "completos" son los que satisfacen los dos restantes. Los modelos establecidos en las ecuaciones (3.1) y (3.2) satisfacen las tres condiciones de convergencia si por lo menos se incluyen en la formulación los términos constantes y lineales de cada polinomio.

3.2.3 Formulación de las ecuaciones de equilibrio.

Una vez establecida la función de los desplazamientos que aproxime la variación real de los mismos en el interior de cada elemento finito, el paso siguiente con-

siste en formular las ecuaciones de equilibrio estático de la teoría de la termoelasticidad (ecs. 2.56) en función de esta aproximación para lo cual se sustituye (3.6) en (2.52) quedando:

$$\underline{\epsilon} \approx \underline{L} \underline{N} \underline{q}^{\circ} = \underline{B} \underline{q}^{\circ} \dots\dots\dots(3.7)$$

siendo \underline{B} la matriz de deformaciones. Sustituyendo (3.7) en (2.20a) se obtiene la forma aproximada del vector de los esfuerzos.

$$\underline{\sigma} \approx \underline{D} (\underline{B} \underline{q}^{\circ} - \underline{\epsilon}_0) \dots\dots\dots(3.8)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (2.50) se obtiene la forma aproximada de la energía potencial en cada elemento:

$$\begin{aligned} \pi_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\underline{B} \underline{q}^{\circ})^t \underline{D} \underline{B} \underline{q}^{\circ} - (\underline{B} \underline{q}^{\circ})^t \underline{D} \underline{\epsilon}_0 - 2(\underline{N} \underline{q}^{\circ})^t \bar{X}) \\ d\Omega - \int_{\Gamma} (\underline{N} \underline{q}^{\circ})^t \bar{I} d\Gamma \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

donde los integrandos se extienden sobre el dominio y fronteras del elemento considerado. Aplicando el principio de la energía potencial mínima a (3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \pi_e = \delta \underline{q}^{\circ t} \left(\int_{\Omega} \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} \underline{q}^{\circ} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{B}^t \underline{D} \underline{\epsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \underline{N}^t \bar{X} d\Omega - \right. \\ \left. \int_{\Gamma} \underline{N}^t \bar{I} d\Gamma \right) = 0 \dots\dots\dots(3.10) \end{aligned}$$

para que la ecuación (3.10) sea válida para cualquier variación arbitraria del vector de los desplazamientos nodales $\delta \underline{q}^e$ las expresiones dentro del paréntesis deben anularse, obteniendo de esta forma las ecuaciones de equilibrio para cada elemento finito:

$$\underline{k}^e \underline{q}^e = \underline{Q}^e \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

donde:

$$\underline{k}^e = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega \dots\dots\dots (3.12)$$

$$\underline{Q}^e = \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{\bar{X}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon\epsilon} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{\bar{T}} \, d\Gamma \dots (3.13)$$

siendo \underline{k}^e la matriz simétrica de coeficientes de influencia o matriz de rigideces y \underline{Q}^e el vector de fuerzas nodales de cada elemento.

Los coeficientes de influencia del arreglo \underline{k}^e determinan la magnitud de la fuerza aplicada en un punto, asociada con el desplazamiento unitario del mismo o de distintos puntos de una estructura, en otras palabras; la matriz de rigideces establece la relación entre las fuerzas nodales \underline{Q}^e y los desplazamientos nodales \underline{q}^e . Según lo anterior y considerando (3.13), se dice que al aplicar el principio de la energía potencial mínima a cada ele-

mento, las fuerzas de cuerpo y de superficie actuando sobre el dominio del mismo se transforman en fuerzas equivalentes¹⁹, concentradas en los puntos nodales que representan cada elemento, la ecuación (3.13) puede modificarse si existe como condición externa, un vector de cargas concentradas en los puntos nodales \underline{F}° , quedando como sigue:

$$\underline{Q}^{\circ} = \underline{F}_c + \underline{F}_s + \underline{F}_o + \underline{F}^{\circ} \dots\dots\dots (3.14)$$

donde:

$$\underline{F}_c = \int_{\Omega} \underline{N}^t \underline{X} \, d\Omega \dots \text{vector de fuerzas de cuerpo.}$$

$$\underline{F}_s = \int_{\Gamma} \underline{N}^t \underline{T} \, d\Gamma \dots \text{vector de fuerzas de superficie.}$$

$$\underline{F}_o = \int_{\Omega} \underline{B}^t \underline{D} \underline{\epsilon} \, d\Omega \dots \text{vector de fuerzas iniciales.}$$

$$\underline{F}^{\circ} = \text{vector de fuerzas concentradas externas.}$$

3.2.4 Formulación de las ecuaciones de equilibrio para un ensemble de elementos.

Una vez establecidas las ecuaciones de equilibrio de cada elemento finito, el paso siguiente involucra el proceso de ensemble de las ecuaciones que rigen el comporta-

miento del medio continuo en estudio, ésto se logra combinando las ecuaciones de todos y cada uno de los elementos, de manera que los desplazamientos en los puntos nodales sean compatibles,²⁰ es decir, que todos los elementos adyacentes a un nodo particular tengan el mismo desplazamiento en este punto. El proceso incluye la creación de la matriz de rigideces \underline{K} a partir de las matrices individuales \underline{k}^e y la elaboración del vector de cargas \underline{R} a partir de los vectores de fuerza nodal \underline{Q}^e .

.- Reglas para el proceso de ensamble de los arreglos \underline{K} y \underline{R} .

Con el propósito de obtener una interpretación matemática de las reglas que rigen el proceso de ensamble de las ecuaciones de equilibrio, es conveniente aplicar el principio variacional de la energía potencial mínima a todo el conjunto de elementos que constituyen un cuerpo, por lo que la funcional de la energía potencial total puede escribirse de la forma siguiente:

$$\Pi = \sum_{e=1}^M \Pi_e \dots \dots \dots (3.15)$$

donde:

M = número total de elementos

Π_{\bullet} = energía potencial de cada elemento.

Sustituyendo (3.12) y (3.13) en (3.9) la funcional de la energía potencial de cada elemento puede escribirse como:

$$\Pi_{\bullet} = \frac{1}{2} \underline{q}^{\bullet t} \underline{k}^{\bullet} \underline{q}^{\bullet} - \underline{q}^{\bullet t} \underline{Q}^{\bullet} \dots\dots\dots (3.16)$$

donde:

$\underline{q}^{\bullet t}$ es de orden (1 x n)

\underline{q}^{\bullet} es de orden (n x 1)

\underline{k}^{\bullet} es de orden (n x n)

\underline{Q}^{\bullet} es de orden (n x 1)

siendo n el número de grados de libertad local, es decir de cada elemento.

La ecuación (3.16) puede escribirse también de la forma:

$$\Pi_{\bullet} = \frac{1}{2} \underline{r}^{\bullet t} \underline{K}^{\bullet} \underline{r}^{\bullet} - \underline{r}^{\bullet t} \underline{R}^{\bullet} \dots\dots\dots (3.17)$$

donde:

$\underline{r}^{\bullet t}$ es de orden (1 x N)

\underline{r}^{\bullet} es de orden (N x 1)

K° es de orden $(N \times N)$

\underline{R}° es de orden $(N \times 1)$

siendo N el número de grados de libertad total del medio continuo en estudio. La matriz \underline{K}° en (3.17) se construye a partir de la inserción de los coeficientes de \underline{k}° en localidades específicas, las cuales relacionan los grados de libertad locales con los grados de libertad de todo el medio. Este proceso de inserción puede tomarse también como una "expansión" de la matriz \underline{k}° de orden $(n \times n)$ en una matriz \underline{K}° de orden $(N \times N)$. Un procedimiento similar rige la construcción de los vectores \underline{r}° y \underline{R}° a partir de los arreglos \underline{q}° y \underline{Q}° respectivamente, resultando de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{r}^\circ &= [\underline{0}^\circ \quad \underline{0}^\circ \quad \dots \quad \underline{q}^\circ \quad \dots \quad \underline{0}^\circ] \\ \underline{R}^\circ &= [\underline{0}^\circ \quad \underline{0}^\circ \quad \dots \quad \underline{Q}^\circ \quad \dots \quad \underline{0}^\circ] \end{aligned} \quad \dots (3.18)$$

Sustituyendo (3.17) en (3.15) la energía potencial total

es:

$$\Pi = \sum_{\alpha=1}^M \Pi_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^M \underline{r}^{\alpha \circ} \underline{K}^{\alpha \circ} \underline{r}^{\alpha \circ} - \sum_{\alpha=1}^M \underline{r}^{\alpha \circ} \underline{R}^{\alpha \circ} \quad \dots (3.19)$$

aplicando el principio variacional de la energía potencial mínimo a (3.19)

$$\delta \Pi = \delta \underline{r}^t \left[\left(\sum_{e=1}^M \underline{K}^e \right) \underline{r} - \sum_{e=1}^M \underline{R}^e \right] = 0 \quad \dots (3.20)$$

el término entre paréntesis cuadrados debe desaparecer al considerar cualquier variación arbitraria del vector desplazamiento $\delta \underline{r}^t$ quedando:

$$\sum_{e=1}^M \underline{K}^e \underline{r} = \sum_{e=1}^M \underline{R}^e \quad \dots (3.21)$$

dando por consecuencia las ecuaciones de equilibrio para el ensemble de los elementos finitos. La ecuación (3.21) puede escribirse también como:

$$\underline{K} \underline{r} = \underline{R} \quad \dots (3.22)$$

donde:

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^M \underline{K}^e \quad \text{matriz de rigideces del medio.. (3.23)}$$

$$\underline{R} = \sum_{e=1}^M \underline{R}^e \quad \text{vector de cargas del medio....(3.24)}$$

A (3.23) y (3.24) se les conoce como las reglas de ensemble de las ecuaciones de equilibrio.

.- Método de ensamble.

El método directo de las rigideces es un proceso que comúnmente se emplea para desarrollar el ensamble de las ecuaciones de equilibrio global del medio elástico en estudio. Su popularidad se debe principalmente a las ventajas que presenta en el campo numérico y computacional ya que permite entre otras cosas ahorrar memoria de computadora mediante una codificación relativamente sencilla.

Con el propósito de mostrar la teoría del método directo y las características de los arreglos resultantes a continuación se desarrolla el proceso de ensamble²¹ de las matrices de rigideces de una estructura simple la cual se ilustra en la Fig. 3.4. La estructura es un miembro unidimensional dividido en cuatro elementos con cinco puntos nodales, las matrices simétricas y los vectores de carga para cada elemento son los siguientes:

$$\begin{aligned} \underline{k}^1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \underline{k}^3 &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ & & & \dots\dots\dots (3.25) \\ \underline{k}^2 &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & \underline{k}^4 &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{Q}^1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^2 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^3 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^4 = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad \dots (3.26)$$

los vectores de desplazamiento nodal (incógnitas) son los siguientes:

$$\underline{q}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \underline{q}^2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \underline{q}^3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \underline{q}^4 = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \quad \dots (3.27)$$

evaluando a partir de (3.16) la energía potencial para el elemento 1 se tiene:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \underline{q}^{1T} \underline{k}^1 \underline{q}^1 - \underline{q}^{1T} \underline{Q}^1 \quad \dots \dots \dots (3.28)$$

por lo que sustituyendo (3.25), (3.26) y (3.27) en (3.28) resulta:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} (a_{11} u_1^2 + 2 a_{12} u_1 u_2 + a_{22} u_2^2) - A_1 u_1 - A_2 u_2$$

pudiéndose establecer una expresión similar para cada elemento.

Con el propósito de ensamblar las matrices de rigideces es necesario evaluar la funcional de la energía potencial total de la forma siguiente:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \quad \dots \dots \dots (3.29)$$

por lo que al aplicar el principio de la energía potencial mínima se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 - A_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \sigma_{12} u_1 + (\sigma_{22} + b_{11}) u_2 + b_{12} u_3 - (A_2 + B_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = b_{12} u_2 + (b_{22} + c_{11}) u_3 + c_{12} u_4 - (B_2 + C_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = c_{12} u_3 + (c_{22} + d_{11}) u_4 + d_{12} u_5 - (C_2 + D_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = d_{12} u_4 + d_{22} u_5 - D_2 = 0$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} + b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{12} & b_{22} + c_{11} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} & c_{22} + d_{11} & d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 + B_1 \\ B_2 + C_1 \\ C_2 + D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

en forma compacta se encuentra que son las ecuaciones de equilibrio:

$$\underline{K} \underline{r} = \underline{R} \quad \dots \dots \dots (3.22)$$

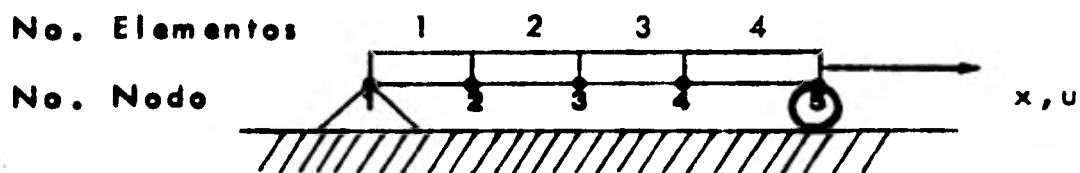


Fig. 3.4

El método directo de las rigideces resulta evidente si se comparan las ecuaciones de equilibrio de la estructura - (3.30) con las ecuaciones individuales (3.25) y (3.26) - observándose que es posible añadir directamente las - rigideces \underline{k}^e y cargas individuales \underline{Q}^e en localizaciones específicas de los arreglos globales \underline{K} y \underline{R} de acuerdo con una correspondencia uno a uno entre los nodos del elemento y los nodos de la estructura, por otro lado; se observa también que la ecuación resultante (3.30) es consistente con las reglas de ensamble (3.23) y (3.24). Una vez que se ha reconocido la posibilidad de esta edición directa, se evita la necesidad ya sea; de la replicación del principio variacional como en el ejemplo anterior o de la expansión de la matriz \underline{k}^e (ec. 3.17).

De acuerdo al ejemplo desarrollado puede decirse en forma general que el arreglo \underline{K} resultante es una matriz simétrica bandeda, implicando por bandeda el hecho de que todos sus componentes fuera del ancho de banda de la matriz son nulos, es decir:

$$K_{ij} = 0 \quad \text{para } |j-i| > m_K \dots\dots\dots (3.31)$$

donde: m_K es el semiancho de banda y $2m_K + 1$ es el ancho de banda.

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales (3.22) no tiene solución ya que la matriz \underline{K} es singular, esto significa que una estructura al aplicársele cargas experimenta movimientos ilimitados de cuerpo rígido,^{3,4,5} la forma de evitar esto, consiste en imponer restricciones cinemáticas o condiciones de frontera que aseguren el equilibrio de las cargas.

.- Tipos de condiciones de frontera.

Desde el punto de vista variacional existen dos tipos básicos de condiciones de frontera, que son las "geométricas"

y las "naturales"²², ambas condiciones son únicamente restricciones cinemáticas dentro del contexto del método de los desplazamientos. Una de las ventajas principales de la técnica del elemento finito es que sólo es necesario especificar las condiciones geométricas ya que las naturales se satisfacen implícitamente al utilizar un principio variacional. Las condiciones geométricas pueden considerarse como homogéneas y no homogéneas, siendo las primeras aquéllas que restringen completamente el movimiento en determinados puntos de la estructura, mientras que las no homogéneas especifican desplazamientos finitos diferentes de cero.

3.2.5 Solución de las ecuaciones de equilibrio.

Una vez establecidas las ecuaciones de equilibrio que rigen en forma aproximada el comportamiento de un cuerpo sólido, elástico, lineal e isotrópico, el paso siguiente consiste en resolver el modelo matemático planteado por la ecuación (3.22), cabe hacer notar que el método del elemento finito genera un número relativamente grande de ecuaciones simultáneas por lo que es impráctico y puede

decirse que imposible resolverlas sin el uso de la computadora.

Existen diversos métodos de solución del modelo $\underline{K} \underline{r} = \underline{R}$ los cuáles se pueden conjuntar en la siguiente clasificación^{4,23,24}

- .- Métodos Directos.
- .- Métodos Iterativos

Siendo los directos como su nombre lo indica, aquéllos que resuelven el sistema de una manera exacta, mientras que los iterativos encuentran la solución, en base a un proceso de correcciones sucesivas, las cuales se desarrollan en forma repetitiva hasta que el tamaño de la corrección es despreciable. Debido a que un estudio detallado de estos métodos cae fuera del alcance del presente estudio, solamente se indicarán las bases del método directo que se ha utilizado para alcanzar el objetivo de este trabajo.

- .- Método directo de Gauss-Crout modificado para matrices simétricas.

Este método es de los llamados compactos ya que combina

las disciplinas del álgebra lineal y del análisis numérico, con el propósito de obtener algoritmos eficientes para resolver sistemas de ecuaciones de orden mayor. Teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes de influencia \underline{K} es simétrica y haciendo referencia a un teorema del álgebra lineal²⁵ el cual establece que cualquier matriz simétrica puede representarse como el producto de tres matrices, el método de Gauss-Crout puede resumirse en los ^{4,23} tres pasos siguientes:

a.- Triangulación

$$\underline{K} = \underline{L} \underline{I} \underline{U} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \dots\dots\dots (3.32)$$

donde:

\underline{K} = matriz simétrica de rigideces.

\underline{L} = matriz triangular inferior.

\underline{U} = matriz triangular superior normalizada

\underline{I} = matriz identidad.

\underline{D} = matriz diagonal formada con la diagonal de \underline{L}

Los algoritmos de triangulación que determinan las matrices \underline{U} y \underline{D} son los siguientes⁴:

$$\text{Para } J = 1 \quad D_{11} = K_{11}$$

$$\text{Para } J = 2 \quad U_{12} = K_{12} / D_{11}$$

$$D_{22} = K_{22} - D_{11} U_{12}^2 \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

$$\text{Para } J = 3 \dots N \quad U_{1i} = K_{1i} / D_{11} \quad \dots \text{ Para } i = 1$$

$$U_{ij} = (K_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} U_{ki} U_{kj}) / D_{ii} \quad \text{para } i = 2 \dots J-1$$

$$D_{ii} = K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} D_{kk} U_{ki}^2$$

b.- Sustitución hacia adelante.

Sustituyendo (3.32) en (3.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{U}^t \underline{D} \underline{U} \underline{r} &= \underline{R} \\ \underline{U}^t \underline{\gamma} &= \underline{R} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

Los algoritmos que determinan el vector $\underline{\gamma}$ de la sustitución hacia adelante son los siguientes⁴:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= R_1 \\ \gamma_i &= R_i - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} \gamma_k \quad i = 2 \dots N \end{aligned} \quad (3.35)$$

c.- Sustitución hacia atrás.

Con referencia en (3.34) se tiene que:

$$\underline{D} \underline{U} \underline{r} = \underline{y} \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

Los algoritmos para encontrar el vector \underline{r} de la sustitución hacia atrás son:

$$r_N = y_N / U_{NN}$$

$$r_i = y_i / U_{ii} - \sum_{k=i+1}^N U_{ik} r_k \quad i = N-1 \dots 1 \quad (3.37)$$

Las ecuaciones (3.33), (3.35) y (3.37) establecen la secuencia de solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Sin embargo, dentro del contexto del elemento finito, estos algoritmos no son del todo eficientes, ya que excluyen el hecho de que la matriz \underline{K} también es bandeda (sec. 3.2.4), en otras palabras; no son eficientes debido a que en el proceso de cálculo involucran toda la parte superior del arreglo bidimensional \underline{K} dando por consecuencia que se tomen en cuenta una gran cantidad de elementos con valor nulo, repercutiendo esto en el tiempo de computadora y en la utilización innecesaria de memoria.

.- Almacenamiento de la matriz \underline{K} en un arreglo unidimensional K .

Con el propósito de incrementar la eficiencia de los algoritmos de Gauss-Crout, es necesario en primer lugar mo dificar el esquema de almacenaje de la matriz de coeficientes. Uno de los esquemas más utilizados en el análisis de elementos finitos^{3,4,5,24} es aquél que almacena en un arreglo unidimensional K todos los elementos que se encuentran en el interior de la silueta del arreglo \underline{K} Fig. 3.5 y Fig. 3.6, los elementos que tienen valor nulo, pero que se encuentran dentro de la silueta deben ser asignados al vector ya que durante el proceso de solución adquieren valores diferentes de cero.

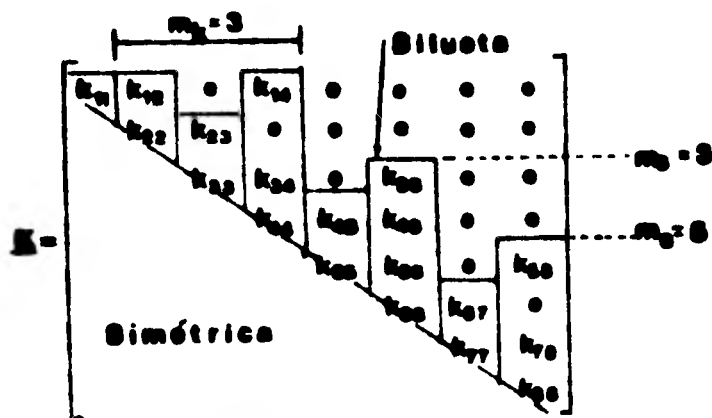


Fig. 3.5

c.- Sustitución hacia atrás.

Con referencia en (3.34) se tiene que:

$$\underline{D} \underline{U} \underline{r} = \underline{y} \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

Los algoritmos para encontrar el vector \underline{r} de la sustitución hacia atrás son:

$$r_N = y_N / U_{NN}$$

$$r_i = y_i / U_{ii} - \sum_{k=i+1}^N U_{ik} r_k \quad i = N-1 \dots 1 \quad (3.37)$$

Las ecuaciones (3.33), (3.35) y (3.37) establecen la secuencia de solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Sin embargo, dentro del contexto del elemento finito, estos algoritmos no son del todo eficientes, ya que excluyen el hecho de que la matriz \underline{K} también es bandeda (sec. 3.2.4), en otras palabras; no son eficientes debido a que en el proceso de cálculo involucran toda la parte superior del arreglo bidimensional \underline{K} dando por consecuencia que se tomen en cuenta una gran cantidad de elementos con valor nulo, repercutiendo ésto en el tiempo de computadora y en la utilización innecesaria de memoria.

.- Almacenamiento de la matriz \underline{K} en un arreglo unidimensional K .

Con el propósito de incrementar la eficiencia de los algoritmos de Gauss-Crout, es necesario en primer lugar modificar el esquema de almacenaje de la matriz de coeficientes. Uno de los esquemas más utilizados en el análisis de elementos finitos^{3,4,5,24}, es aquél que almacena en un arreglo unidimensional K todos los elementos que se encuentran en el interior de la silueta del arreglo \underline{K} Fig. 3.5 y Fig. 3.6, los elementos que tienen valor nulo, pero que se encuentran dentro de la silueta deben ser asignados al vector ya que durante el proceso de solución adquirirán valores diferentes de cero.

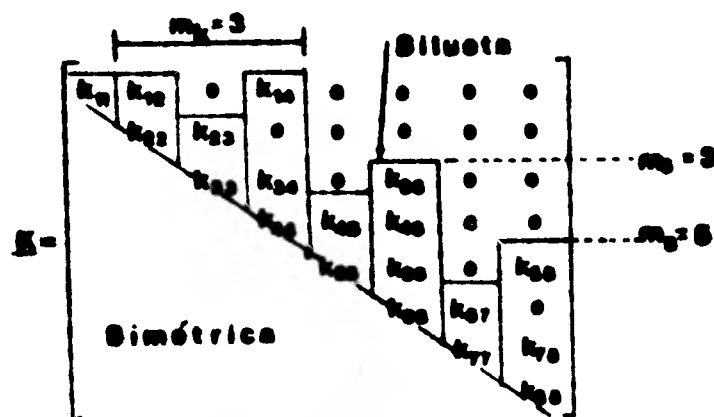


Fig. 3.5

$$K = \begin{array}{l} K(1) = K_{11} \\ K(2) = K_{12} \\ K(3) = K_{22} \\ K(4) = K_{23} \\ K(5) = K_{33} \\ K(6) = K_{14} \\ K(7) = 0 \\ K(8) = K_{34} \\ K(9) = K_{44} \\ K(10) = K_{45} \\ K(11) = K_{55} \\ K(12) = K_{36} \\ K(13) = K_{46} \\ K(14) = K_{56} \\ K(15) = K_{66} \\ K(16) = K_{67} \\ K(17) = K_{77} \\ K(18) = K_{58} \\ K(19) = 0 \\ K(20) = K_{78} \\ K(21) = K_{38} \end{array}$$

$$MD = \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \\ 15 \\ 17 \\ 21 \end{array}$$

$$K(i,j) = K(ij)$$

$$ij = i + MD(j) - j$$

$$i = 3 \quad j = 4$$

$$ij = 3 + MD(4) - 4$$

$$ij = 3 + 9 - 4 = 8$$

$$\therefore K(3,4) = K(8)$$

Fig. 3.6

Debido a que existe una correspondencia uno a uno entre el arreglo unidimensional K y la matriz \underline{K} puede establecerse la siguiente relación:^{4,5}

$$\underline{K}(i,j) = (Kij) \dots\dots\dots (3.38)$$

donde:

$$ij = i + MD(j) - j$$

$MD(j)$ = vector que relaciona la diagonal principal de \underline{K} con K Fig.3.6

Una vez que se ha modificado el esquema de almacenaje de \underline{K} se observa que es adecuado, ya que el análisis se ahorra una gran cantidad de memoria sobre todo al resolver matrices de orden mayor. Con el propósito de llevar a cabo la modificación de los algoritmos, considerando éste nuevo esquema de almacenaje, es necesario definir los siguientes parámetros.

- m_i, m_j Número de renglón en donde se encuentra ubicado el primer elemento diferente de cero en la columna "i" y en la columna "j" respectivamente Fig. 3.5 Cabe hacer notar que las variables $m_i, i = 1 \dots N$ definen el contorno de silueta de la matriz.

.- $i = m_i$ Altura de columna, representada por el número de elementos interiores al contorno de silueta, que se encuentran por arriba de $\underline{K}(i, i)$ Fig. 3.5.

Considerando lo mencionado en los párrafos anteriores, los algoritmos se modifican de la siguiente forma:

a.- Triangulación⁴.

$$D_{11} = K_{11}$$

Para $j = 2 \dots N$

$$g_{m_j, j} = K_{m_j, j}$$

$$g_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=m_m}^{i-1} U_{ri} \ g_{rj} \quad i = m_i + 1, \dots, j-1 \quad (3.39)$$

$$U_{ij} = \frac{g_{ij}}{D_{ij}} \quad i = m_i, \dots, j-1$$

$$D_{ii} = K_{ii} - \sum_{r=m_i}^{j-1} U_{rj} \ g_{rj}$$

donde:

$$m_m = \text{MAX} (m_1, m_j)$$

b.- Sustitución hacia adelante⁴.

$$y_1 = R_1 \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

$$y_i = R_i - \sum_{k=m_i}^{i-1} U_{ki} y_k \quad \text{para } i = 2 \dots\dots N$$

c.- Sustitución hacia atrás⁴.

$$\underline{y} = \underline{D}^{-1} \underline{y} \quad \text{Si: } \underline{y}^{(N)} = \underline{y} \Rightarrow r_N = y_N^{(N)} \dots\dots (3.41)$$

Para: $i = N, \dots, 2$

$$y_k^{(i)} = y_k^{(i-1)} - U_{ki} r_i \quad ; \quad k = m_i, \dots, i-1$$

$$r_{i-1} = y_{i-1}^{(i-1)}$$

Los algoritmos (3.39), (3.40) y (3.41), resuelven el sistema de ecuaciones algebraicas lineales de una manera sumamente eficiente ya que ahorran tiempo de computadora eliminando operaciones con valores nulos utilizando la memoria mínima necesaria. Este método de Gauss-Crout modificado ha sido implementado en una subrutina* que forma parte del programa Elfintest, desarrollado para cumplir el objetivo del presente trabajo.

(*) Subrutina Lemecu desarrollada por R. Avile R. durante el curso de análisis numérico en la D.E.P.F.I. de la U.N.A.M.

3.2.6 Cálculo de los esfuerzos y deformaciones a partir de los desplazamientos nodales.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones de equilibrio, el paso siguiente consiste en evaluar los esfuerzos y deformaciones^{3,4,5} que se presentan en el interior de cada elemento, a partir de las ecuaciones (3.8) y (3.7) respectivamente.

La secuencia de cálculo resumida en las seis secciones anteriores, establece la forma de resolver en forma aproximada las ecuaciones de equilibrio estático de la teoría de la termoelasticidad, a partir del método del elemento finito.

Referencias.-

- 1.- V. G. Rekech "Problemas de la teoría de la Elasticidad" Ed. Mir.Moscú, 1978.
- 2.- Forsythe, G. E., and Wasow, W. R., "Difference Methods for Partial Differential Equations", John Wiley and Son, Inc. New York, 1960.
- 3.- Chandrakant S. Desai and John F. Abel, "Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- 4.- Klaus J. Bathe and Edward L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1976.
- 5.- O. C. Zienkiewicz "The Finite Element Method" Mc Graw Hill Company, 1977.
- 6.- Larry J. Segerlind; "Applied Finite Element Analysis" John Wiley and Son, Inc. 1976.
- 7.- Chandrakant S. Desai. Op. Cit.
- 8.- Klaus J. Bathe. Op. Cit.
- 9.- O. C. Zienkiewicz. Op. Cit.
- 10.- P. C. Dunne "Complete Polynomial Displacement Fields For Finite Element Methods" Trans Roy Aero. Soc. 72, 245, 1968.

- 11.- Anthony Ralston "Introducción al Análisis Numérico"
Ed. Limusa, 1978.
- 12.- Chandrakent S. Desai. Op. Cit.
- 13.- Larry J. Segerlind. Op. Cit.
- 14.- Ibid.
- 15.- Fraeijs de Veubeke, B., "Upper and Lower Bounds
in Matrix Structural Analysis" Matrix Methods of
Struct. Anal., McMillan New York, 1964.
- 16.- Chandrakent S. Desai. Op. Cit.
- 17.- O. C. Zienkiewicz. Op. Cit.
- 18.- S. Valliapan "Finite Element Method Theory and
Application". Publicación de la Sección de Mecá-
nica de Suelos de la U.N.A.M., 1979.
- 19.- Klaus J. Bathe. Op. Cit.
- 20.- R. L. Taylor "On Completeness of Shape Functions
for Finite Element Analysis" International Journal for
Numerical Methods in Engineering Vol. 4, 1972.
- 21.- Chandrakent S. Desai. Op. Cit.
- 22.- L. Elsgoltz "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo
Variacional" Ed. Mir Moscú, 1969.
- 23.- Antony Ralston, Op. Cit.

- 24.- Digamber P. Mondkar and Graham H. Powell
"Towards Optimal in Core Equation Solving"
Journal Computers and Structures : Vol. 4
Pergamon Press, 1974.
- 25.- A. J. Máltsev "Fundamentos del Algebra
Lineal" Ed. Mir. Moscú, 1978.

CAPITULO 4

ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMETRICOS

4.1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior se estableció la formulación del "modelo de los desplazamientos en coordenadas generalizadas", considerando desplazamientos $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ en forma de polinomios con coeficientes indeterminados α_i , sin embargo, debido a que no fue posible asociar a priori un significado físico de las coordenadas generalizadas, únicamente se mencionó que representan combinaciones lineales de los desplazamientos nodales, se estableció también el hecho de que no siempre es posible determinar la inversa de la matriz A ec. (3.5), ya que la geometría del elemento en ocasiones no está bien definida dando por consecuencia que no exista una expresión única de las coordenadas generalizadas en términos de los desplazamientos nodales.

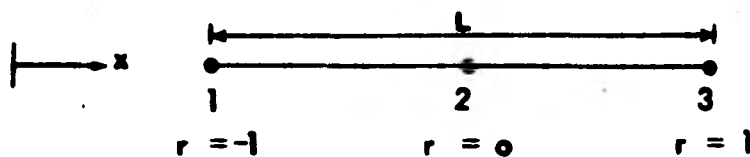
El objetivo de este capítulo consiste en presentar la formulación de los elementos finitos isoparamétricos y que a partir de su uso es posible obtener los desplazamientos de cualquier punto interno de cada elemento en función directa de los desplazamientos nodales.

ec.(3.6) . Antes de definir y discutir el concepto de elemento isoparamétrico es conveniente tratar dos aspectos importantes que entran en juego en la formulación.

4.2 SISTEMA DE COORDENADAS NATURALES.-

En el análisis de elementos finitos isoparamétricos se definen tres sistemas de coordenadas los cuales son; el sistema global, el sistema local y el sistema natural. Un sistema de coordenadas global es aquél que esté definido para un cuerpo o estructura, mientras que un sistema local, es aquél que esté definido para un elemento particular, ahora bien, se dice que un sistema de coordenadas naturales es un sistema local el cual permite especificar la localización de cualquier punto del elemento a partir de un conjunto de números dimensionales cuya magnitud nunca excede la unidad,^{1,2,3} este sistema esté definido de tal manera que las coordenadas naturales adquieran valores unitarios en los puntos nodales exteriores.

Al utilizar el sistema natural, no sólo se generaliza y simplifica la formulación sino también como se verá más adelante se facilita el proceso de integración numérica requerido para obtener la matriz de rigideces y el vector de cargas de cada elemento. En las figuras 4.1 a 4.3 se presentan sistemas de coordenadas naturales para elementos en una, dos y tres dimensiones.³



$$N_1 = \frac{1}{2} ((1-r) - (1-r^2))$$

$$N_2 = \frac{1}{2} ((1+r) - (1-r^2))$$

$$N_3 = 1-r^2$$

Fig.4.1

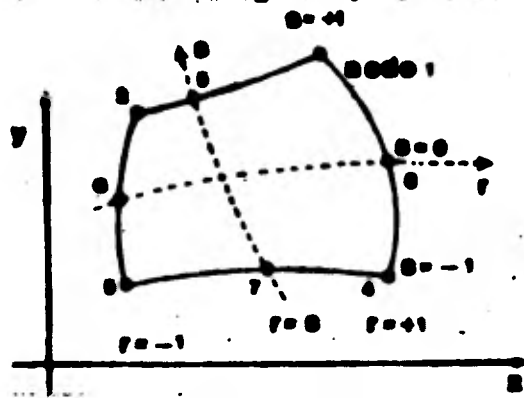
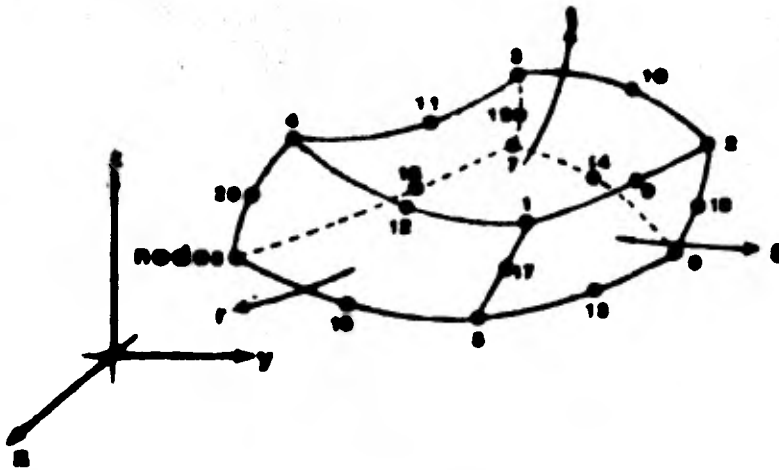


FIG.4.2

Continúa Fig.4.2 →

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} (1+r) (1+s) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_8 \\
 N_2 &= \frac{1}{4} (1-r) (1+s) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_6 \\
 N_3 &= \frac{1}{4} (1-r) (1-s) - \frac{1}{2} N_6 - \frac{1}{2} N_7 \\
 N_4 &= \frac{1}{4} (1+r) (1-s) - \frac{1}{2} N_7 - \frac{1}{2} N_8 \\
 N_5 &= \frac{1}{2} (1-r^2) (1+s) \\
 N_6 &= \frac{1}{2} (1-s^2) (1-r) \\
 N_7 &= \frac{1}{2} (1-r^2) (1-s) \\
 N_8 &= \frac{1}{2} (1-s^2) (1+r)
 \end{aligned}$$

Fig. 4.2



$$\begin{aligned}
 N_1 &= g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17}) / 2 \\
 N_2 &= g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18}) / 2 \\
 N_3 &= g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19}) / 2 \\
 N_4 &= g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20}) / 2
 \end{aligned}$$

Continúa Fig.4.3

FIG.4.3

$$\begin{aligned}
 N_5 &= g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17}) / 2 \\
 N_6 &= g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18}) / 2 \\
 N_7 &= g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19}) / 2 \\
 N_8 &= g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20}) / 2 \\
 N_i &= g_i \quad \text{para } i = 9 \dots\dots 20
 \end{aligned}$$

$$g_i = G(r, r_i) G(s, s_i) G(t, t_i)$$

$$G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2} (1 + \beta_i \beta) \quad \text{Para } \beta_i = \pm 1$$

$$G(\beta, \beta_i) = (1 - \beta^2) \quad \text{Para } \begin{matrix} \beta = r, s, t \\ \beta_i = 0 \end{matrix}$$

Fig. 4.3

En la Fig. 4.1 se muestra el sistema de coordenadas naturales para un elemento unidimensional, pudiéndose expresar la relación entre la coordenada natural r de cualquier punto y la coordenada cartesiana x de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i \dots\dots\dots (4.1)$$

en forma matricial:

$$\underline{x} = \underline{N}^t \underline{x}_n \dots\dots\dots (4.1a)$$

donde: $\underline{N}^t = [N_i \quad i = 1 \dots 3]$ ver figura.

$$\underline{x}_n^t = [x_i \quad i = 1 \dots 3] \quad \text{abscisas de los puntos nodales.}$$

En la Fig. 4.2 se muestra el sistema de coordenadas naturales para un elemento bidimensional, ahora bien, la relación entre las coordenadas naturales r y s de cualquier punto y las coordenadas cartesianas x , y puede escribirse como³:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i y_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1Z}^T & \mathbf{10}^T \\ \mathbf{10}^T & \mathbf{1Z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \mathbf{1Z} \mathbf{x} \dots\dots\dots (4.2a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{1Z}^T &= [N_i \quad i = 1 \dots 8] && \text{ver figure.} \\ \mathbf{x}_n &= [x_i \quad i = 1 \dots 8] && \text{abscisas de los puntos nodales} \\ \mathbf{y}_n &= [y_i \quad i = 1 \dots 8] && \text{ordenadas de los puntos nodales.} \end{aligned}$$

En la figura 4.3 se presenta el sistema de coordenadas naturales para un elemento tridimensional, la relación entre las coordenadas r, s, t de cualquier punto y las coordenadas cartesianas x, y, z se escribe de la forma³:

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{20} N_i x_i \\
y &= \sum_{i=1}^{20} N_i y_i \dots\dots\dots (4.3) \\
z &= \sum_{i=1}^{20} N_i z_i
\end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_{20} \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \dots \\ x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{X} \dots\dots (4.3.a)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\underline{N}^T &= [N_i \quad i = 1 \dots 20] && \text{ver figura} \\
\underline{x}^e &= [x_i \quad i = 1 \dots 20] && \text{abscisas de los puntos no-} \\
&&& \text{dales.} \\
\underline{y}^e &= [y_i \quad i = 1 \dots 20] && \text{ordenadas de los puntos} \\
&&& \text{nadales.} \\
\underline{z}^e &= [z_i \quad i = 1 \dots 20] && \text{cotas de los puntos no-} \\
&&& \text{dales.}
\end{aligned}$$

4.3 MODELO DE LOS DESPLAZAMIENTOS CON FUNCIONES DE INTERPOLACION.-

El procedimiento para elaborar un modelo de los desplazamientos fue descrito en la sec. 3.2.2 y sintetizado en las ecuaciones (3.4) a (3.6), a partir de lo cual es evidente que si se logra directamente determinar la matriz \underline{N} definida en (3.6) se evita la necesidad de calcular e invertir el arreglo \underline{A} . Una forma de lograr esto consiste en seleccionar funciones de interpolación como la base de formulación del modelo de los desplazamientos,^{3,4} una función de interpolación es aquella que tiene valor unitario en un punto nodal y valor nulo en el resto de los nodos,^{3,4,5,6} es conveniente seleccionar funciones de forma polinomial de tal manera que el grado del polinomio satisfaga los requisitos de convergencia establecidos en la sec. 3.2.2. En las figuras 4.1 a 4.3 los factores N_i representan interpolaciones del tipo parabólico, las cuales satisfacen los requisitos de convergencia y la definición de función de interpolación, esto último, se demuestra fácilmente al sustituir las coordenadas naturales del nodo i en la función N_i comprobándose que su valor es la unidad.

El modelo de los desplazamientos para un elemento unidimensional Fig. 4.1 puede escribirse de la forma siguiente:

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^3 N_i u_i \dots\dots\dots (4.4)$$

en forma matricial:

$$\underline{u} = \underline{N}^T \underline{q}^e \dots\dots\dots (4.4a)$$

donde:

$$\underline{N}^T = [N_i \quad i = 1 \dots 3]$$

\underline{q}^e = vector de los desplazamientos nodales

El modelo de los desplazamientos para un elemento bidimensional Fig. 4.2 puede escribirse de la siguiente forma:

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i \dots\dots\dots (4.5)$$

$$v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{q}^e \dots\dots (4.5a)$$

El modelo de los desplazamientos para un elemento tridimensional Fig. 4.3 se escribe de la forma³:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^n N_i u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^n N_i v_i \dots\dots\dots (4.6) \\
 w &= \sum_{i=1}^n N_i w_i
 \end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & & \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ & & & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = N \cdot \mathbf{u} \dots\dots\dots (4.6a)$$

4.4 FORMULACION GENERAL DE LOS ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS.

El procedimiento básico en la formulación de los elementos finitos isoperámétricos consiste en expresar las coordenadas y los desplazamientos de cualquier punto en forma de interpolaciones, utilizando para ello un sistema de coordenadas local. Si se comparan las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) con (4.4), (4.5) y (4.6) respectivamente se observa que son exactamente de la misma forma,

es decir la geometría y los desplazamientos del elemento se describen en términos de los mismos parámetros, a los elementos que presentan esta característica se les denomina isoparamétricos^{3,4,5}.

Debido a que la formulación de los elementos finitos isoparamétricos, sigue el mismo proceso para una, dos y tres dimensiones, únicamente se explicará el caso más general (tridimensional), para ello es conveniente representar a (4.3) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.7)$$

lo que implica que existe una correspondencia uno a uno entre el sistema de coordenadas cartesianas y el sistema natural, la ecuación (4.7) puede interpretarse también como el mapeo (Fig. 4.4) de un elemento en coordenadas locales hacia un elemento en el sistema de coordenadas globales⁵, este enfoque permite analizar elementos con fronteras "curvas" en el sistema de coordenadas global, siempre y cuando se mantenga la relación uno a uno

mencionada anteriormente, es decir, que no se presenten dobles brucos o muy distorsionados en los elementos.

.- Evaluación de la matriz de deformaciones \underline{B} .

Según el capítulo anterior la matriz \underline{B} tiene la siguiente forma:

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \dots\dots\dots (3.7)$$

donde:

\underline{L} = operador diferencial con respecto a las coordenadas cartesianas (2.52)

\underline{N} = matriz de funciones de interpolación en coordenadas naturales.

de acuerdo a (3.7) la matriz \underline{B} puede representarse como:

$$B = f \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (3.7a)$$

Según lo anterior es evidente que la evaluación del arreglo \underline{B} no puede desarrollarse directamente ya que es necesario diferenciar las funciones de interpolación con respecto a las coordenadas cartesianas, por lo que recurriendo al cálculo diferencial puede expresarse lo siguiente:^{3,4,5}

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \dots \dots \dots (4.8)$$

realizando la misma diferenciación con respecto a las otras dos coordenadas y rescribiendo en forma matricial se obtiene:^{3,4,5}

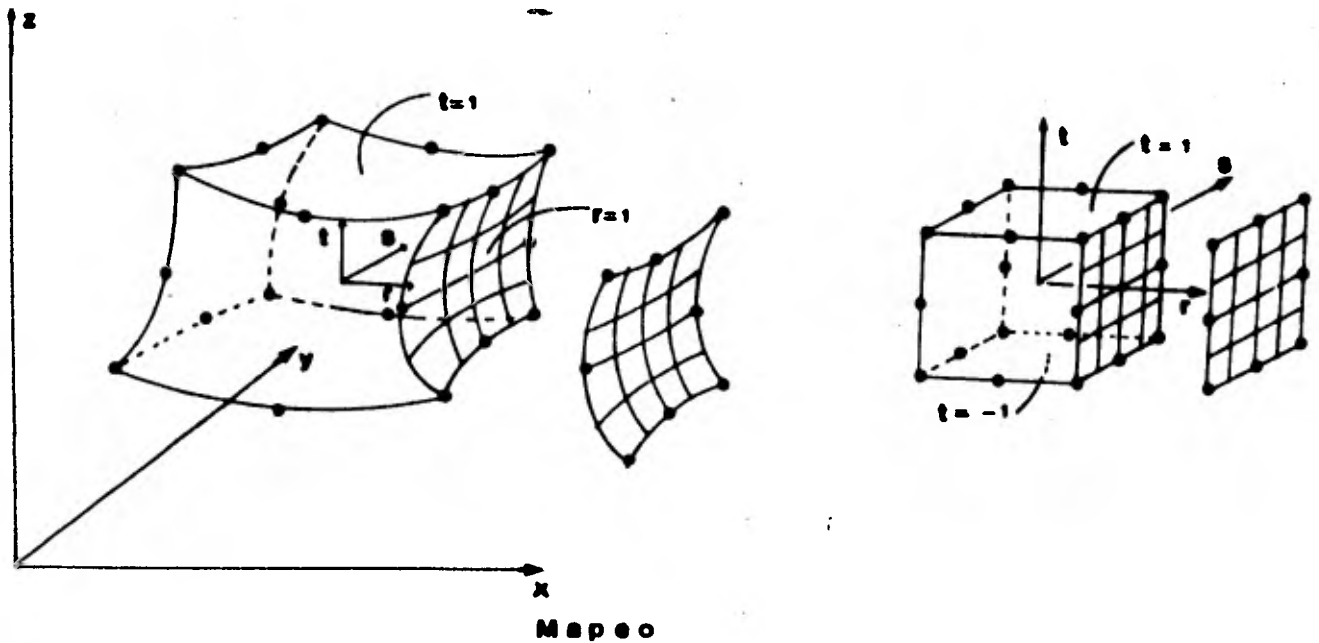
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \dots (4.9)$$

en (4.9) el miembro a la izquierda puede ser directamente evaluado ya que las funciones N_i y sus derivadas con respecto a r, s, t se conocen, además el operador jacobiano \underline{J} también puede ser evaluado explícitamente debido a que las coordenadas x, y, z se conocen a partir de (4.3). Con el propósito de obtener las derivadas de las funciones de interpolación en coordenadas cartesianas y de esta forma poder establecer la matriz \underline{B} , es necesario invertir \underline{J} , quedando de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.10)$$

De acuerdo a (4.3) y (4.9) el operador jacobiano puede escribirse de la forma:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i & \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \\ \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i & \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \\ \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i & \sum_{i=1}^q \frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix} \quad \dots (4.11)$$



Mapeo

Fig. 4.4

.- Cambio de variables de integración.

En el capítulo anterior se estableció que para resolver las ecuaciones de equilibrio estático de la teoría de la termoelasticidad a partir del método del elemento finito, es necesario determinar la matriz de rigideces para cada elemento:

$$\underline{k}^e = \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dv = \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dx dy dz \dots (3.12)$$

y los vectores de carga asociados:

$$\underline{Q}^e = \int_V \underline{N}^t \underline{\bar{X}} dx dy dz + \int_S \underline{N}^t \underline{\bar{T}} dx dy + \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{\epsilon_0} dx dy dz \dots (3.13)$$

En estas ecuaciones las matrices \underline{B} pueden ser evaluadas a partir del concepto de elementos isoparamétricos, sin embargo debido a que están en función de las coordenadas naturales r, s, t es necesario transformar las variables y la región con respecto a la cual las integrales se extienden, esta transformación para el volumen diferencial ^{3,5,6} es:

$$dx dy dz = \det \underline{J} dr ds dt \dots (4.12)$$

y para la superficie diferencial es:

$$dx dy = \det \underline{J} dr ds \dots\dots\dots (4.13)$$

donde $\det \underline{J}$ es el determinante del operador jacobiano. Una evaluación explícita de las integrales en (3.12) y (3.13) generalmente no es posible, teniendo que recurrir a un proceso de integración numérica, por lo que las ecuaciones a integrar se modifican de la siguiente forma:^{3,6,7}

$$\underline{k}^e = \int_v \underline{F} dr ds dt \dots\dots\dots (4.14)$$

$$\text{donde: } \underline{F} = \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} \det \underline{J}$$

consecuentemente, la integración se desarrolla en el sistema de coordenadas natural del elemento, quedando:

$$\underline{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} \det \underline{J} dr ds dt \dots (4.15)$$

mientras que (3.13) se transforma en:

$$\begin{aligned} Q^e = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{N}^t \underline{\bar{X}} \det \underline{J} dr ds dt + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^t \underline{D} \underline{e}_0 \det \underline{J} dr ds dt + \\ & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{N}^t \underline{\bar{T}} \det \underline{J} dr ds \dots\dots\dots (4.16) \end{aligned}$$

$$\underline{Q}^e = \int_V \underline{F}_c \, dr \, ds \, dt + \int_V \underline{F}_{-I} \, dr \, ds \, dt + \int_0 \underline{F}_s \, dr \, ds \dots\dots\dots (4.17)$$

donde:

$$\underline{F}_c = \underline{N}^t \underline{X} \det \underline{J}$$

$$\underline{F}_{-I} = \underline{B}^t \underline{D} \underline{e}_0 \det \underline{J}$$

$$\underline{F}_s = \underline{N}^t \underline{T} \det \underline{J}$$

4.5 INTEGRACION NUMERICA.-

Se ha mencionado en la sección anterior que es necesario llevar a cabo el proceso de integración en forma numérica debido a lo complejo de las expresiones de la forma: ^{8,9}

$$\int_1 F(r) \, dr \quad \int_0 F(r,s) \, dr \, ds \quad \int_V F(r,s,t) \, dr \, ds \, dt \quad \dots (4.18)$$

representadas en una, dos y tres dimensiones respectivamente, y cuya solución se plantea de la siguiente forma: ^{8,9}

$$\begin{aligned} \int F(r) \, dr &= \sum_i \alpha_i F(r_i) \\ \int F(r,s) \, dr \, ds &= \sum_{ij} \alpha_{ij} F(r_i, s_j) \quad \dots\dots (4.19) \\ \int F(r,s,t) \, dr \, ds \, dt &= \sum_{ijk} \alpha_{ijk} F(r_i, s_j, t_k) \end{aligned}$$

donde: r_i, s_j, t_k son puntos muestra en los que se evalúa F .

α_{ijk} son constantes que dependen de los valores anteriores.

Los puntos muestra r_i, s_j, t_k de la función F y los factores de peso correspondientes (α_{ijk}) son seleccionados con el propósito de obtener máxima exactitud en la integración^{8,9}, naturalmente que la exactitud se incrementa conforme aumenta el número de puntos muestra.

Con el propósito de cumplir el objetivo del estudio se ha seleccionado el procedimiento de integración numérica de Gauss-Legendre, cuyos factores de peso y puntos muestra se muestran en la Tabla 1.⁹

.- Orden de integración numérica requerido.

La selección del orden de integración numérica es importante debido a que en primer lugar, el costo del análisis se incrementa cuando se seleccione un orden de integración alto y en segundo lugar utilizando un orden de integración demasiado bajo, las matrices pueden ser evaluadas muy inexactamente de tal manera que la solución del problema puede no ser posible.^{9,10} En general, puede de-

cirse que el orden de integración apropiado depende de la matriz a ser evaluada y del elemento específico considerado. Existe una gran variedad de criterios para seleccionar el orden de integración óptima para el análisis de elementos finitos isoparamétricos,¹¹ todos ellos tomando en consideración, la convergencia del método, la evaluación correcta de las matrices, el que las matrices sean o no singulares, etc.

Haciendo una aplicación práctica de esos criterios en la Tabla II se establecen los órdenes de integración recomendados para algunos elementos isoparamétricos, aunque en esta Tabla se consideran elementos bidimensionales, la información es válida para elementos tridimensionales tomando en cuenta los puntos nodales representativos.¹² Debido a que el orden de integración varía de acuerdo a la forma y a las condiciones de frontera de cada elemento, en el presente trabajo se implementó, el programa Elfintest de tal manera que permite variar el orden de integración desde 1 a 4 dependiendo del modelo en estudio.

Abcissas y factores de peso
de la cuadratura de Gauss.

$$\int_{-1}^1 F(r) dr = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(r_i)$$

$\pm r$ α

			n = 1					
	0			2.00000	00000	00000		
			n = 2					
0.57735	02691	89626		1.00000	00000	00000		
			n = 3					
0.77459	66692	41483		0.55555	55555	55556		
0.00000	00000	00000		0.88888	88888	88889		
			n = 4					
0.86113	63115	94053		0.34785	48451	37454		
0.33998	10435	84856		0.65214	51548	62546		
			n = 5					
0.90617	98459	38664		0.23692	68850	56109		
0.53846	93101	05683		0.47862	86704	99366		
0.00000	00000	00000		0.56888	88888	88889		
			n = 6					
0.93246	95142	03152		0.17132	44923	79170		
0.66120	93864	66265		0.36076	15730	48139		
0.23861	91860	83197		0.46791	39345	72691		
			n = 7					
0.94910	79123	42759		0.12948	49661	68870		
0.74153	11855	99394		0.27970	53914	89277		
0.40584	51513	77397		0.38183	00505	05119		
0.00000	00000	00000		0.41795	91836	73469		
			n = 8					
0.96028	98564	97536		0.10122	85362	90376		
0.79666	64774	13627		0.22238	10344	53374		
0.52553	24099	16329		0.31370	66458	77887		
0.18343	46424	95650		0.36268	37833	78362		
			n = 9					
0.96816	02395	07626		0.08127	43883	61574		
0.83603	11073	26636		0.18064	81606	94857		
0.61337	14327	00590		0.26061	06964	02935		
0.32425	34234	03809		0.31234	70770	40003		
0.00000	00000	00000		0.33023	93530	01260		

Tabla I

**Orden de integración numérica de Gauss
para elementos isoparamétricos²**



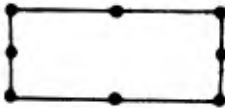
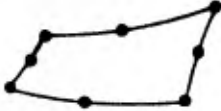
Elemento		Orden de Integración	
		Recomendado	Máximo
Rectángulo 4 Nodos		2 por 2	2 por 2
Cuadrilátero 4 Nodos		2 por 2	3 por 3
Rectángulo 8 Nodos		2 por 2	3 por 3
Cuadrilátero 8 Nodos		3 por 3	4 por 4

Tabla II

REFERENCIAS

- 1.- Klaus J. Bathe and Edward L. Wilson. "Numerical Methods in finite element analysis". Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1976.
- 2.- Chandra Kant S. Desai and John F. Abel, "Introduction to the finite element Method", Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- 3.- O. C. Zienkiewicz "The finite element method" Mc Graw Hill Company, 1977.
- 4.- Larry J. Segerlind "Applied finite elemento analysis" John Wiley and Sons, Inc., 1976
- 5.- Klaus J. Bathe. Op. Cit.
- 6.- Anthony Ralston "Introducción al Análisis Numérico" Ed. Limusa, 1978.
- 7.- F. B. Hildebrand "Introduction to Numerical Analysis" Mc Graw Hill Company, New York, 1956.
- 8.- Klaus J. Bathe. Op. Cit.
- 9.- Antony Ralston. Op. Cit.
- 10.- T.K. Hellen "Effective quadrature rules for cuadratic solid isoperametric finite elements" Int. J. Num. Meth. Eng. 4, 597-600, 1972.

11.- O. C. Zienckiewicz. Op. Cit.

12. Klaus J. Bathe. Op. Cit.

CAPITULO 5

DIAGRAMA DE FLUJO, PROGRAMA ELFINTEST Y PROBLEMAS RESUELTOS.

5.1 INTRODUCCION.-

En los capítulos anteriores se establecieron las ecuaciones de la termoelasticidad y los fundamentos del método numérico que resuelve en forma aproximada tales ecuaciones, de acuerdo a lo explicado puede decirse que al resolver un problema con valores en la frontera, la cantidad de operaciones y datos involucrados es excesivamente grande, lo que hace imposible determinar manualmente la solución, sin embargo, esto no representa dificultad ya que con el uso de la computadora pueden resolverse problemas modelados por una cantidad considerable de elementos.

Con el propósito de utilizar la computadora en el análisis de elementos finitos es necesario en primer lugar desarrollar un diagrama de flujo que indique la secuencia lógica de los pasos a seguir en el proceso de solución — (Cap.3), posteriormente formular un esquema numérico^{3,4} que involucre las instrucciones a realizar, desde la lectura -

de datos hasta la impresión de resultados, pasando por el cálculo de matrices, vectores, integración numérica, diferenciación, etc.. Una vez que el esquema ha sido formulado y traducido a lenguaje de máquina, el paso siguiente consiste en resolver en forma aproximada problemas simples que tengan solución analítica⁴ con el propósito de comparar los resultados, tomando en consideración la convergencia del método, es decir, que al incrementar el número de elementos, la solución tiende al valor exacto. Este proceso de comparación es bien importante, ya que es en esta etapa cuando se llega a la conclusión de que el esquema esté correcto o incorrectamente formulado.

Es el objetivo del presente capítulo mostrar el diagrama de flujo, programa de cómputo y problemas resueltos que se desarrollaron en este trabajo con el propósito de alcanzar el objetivo del mismo, cabe hacer notar que se obtuvieron resultados sumamente satisfactorios tal como se muestra en las siguientes secciones.

5.2 DIAGRAMA DE FLUJO Y PROGRAMA ELFINTEST.-

El diagrama de flujo que establece la secuencia lógica de las etapas que rigen el análisis de elementos finitos en el contexto de la mecánica de los sólidos se muestra en el esquema 1, cabe mencionar que el significado de los parámetros involucrados puede encontrarse en el listado del programa ELFINTEST que se incluye al final del capítulo. Haciendo referencia al diagrama de flujo y al significado de los parámetros, puede observarse que el programa de cómputo desarrollado resuelve en forma aproximada las ecuaciones de equilibrio estático de la termoelasticidad en dos y tres dimensiones, considerando diversas condiciones de frontera impuestas sobre la estructura e analizar tales como, cargas distribuidas de cuerpo y de presión, cargas inducidas por deformaciones iniciales y cargas concentradas en puntos discretos, así como también diversas condiciones impuestas a los desplazamientos de los puntos nodales.

Para tener una idea clara del alcance del programa, es necesario comprender el significado de cada uno de los parámetros involucrados en la secuencia de cálculo, cabe

mencionar que ELFINTEST pretende ser versátil en diversos sentidos, tales como el de poder analizar estructuras que presenten diversidad de materiales, espesores, incrementos de temperatura y condiciones de carga por lo que se asevera, que para definir los parámetros es conveniente considerar tanto la estructura a analizar como la experiencia del ingeniero. El proceso de selección y elaboración de datos para modelar un cuerpo es un trabajo sumamente tedioso, por lo que se han realizado intentos por elaborar programas de cómputo^{5,6} que disminuyan la carga de trabajo, sin embargo, la intuición del analista actualmente sigue siendo de importancia relevante en este proceso.

A continuación se presentan las características generales del programa ELFINTEST, si se requiere mayor información, se recomienda revisar tanto el diagrama de flujo como el listado del programa.

- 1.- Objetivo: Solución de las ecuaciones de equilibrio estático de la termoeleasticidad en dos y tres dimensiones a partir del método del elemento finito, utilizando el enfoque de los desplazamientos.

- 2.- Lenguaje: Fortran IV
- 3.- Presición: Simple
- 4.- Elementos: Isoparamétricos con 8 puntos nodales para el caso bidimensional y 20 para el caso tridimensional.
- 5.- Incógnitas: Los desplazamientos de los puntos nodales, 2 para el caso bidimensional y 3 para el caso tridimensional.
- 6.- Resultados: Los desplazamientos de los puntos nodales, deformaciones y esfuerzos en puntos discretos de cada elemento, la cantidad de estos puntos depende del orden de integración seleccionado.
- 7.- Implementado en la computadora PDP 10 del "Centro Nuclear" del ININ.

5.3 SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES.-

Al analizar situaciones prácticas de la mecánica de los sólidos, muchas veces las configuraciones de geometría y carga pueden ser tales que permiten reducir el problema

tridimensional a un problema en dos o incluso en una dimensión, consiguiéndose con esto un ahorro de tiempo de computadora considerable. ELFINTEST es capaz de resolver las ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones, tomando en consideración los dos enfoques alternos que se presentan en el estado plano⁷, los cuales se mencionan a continuación.

5.3.1 Deformación en el plano.-

Las situaciones que involucran cuerpos "alargados" cuya geometría y condiciones de carga no varían significativamente en la dirección longitudinal se les conoce como problemas con deformaciones en el plano. En esta situación si el eje de coordenadas z está orientado en el sentido de la longitud de la estructura, las variables de pendientes pueden considerarse como función de las coordenadas x , y únicamente, además se dice que no existe desplazamiento w en el sentido del eje z , por lo que las componentes del tensor de las deformaciones ϵ_{zz} , γ_{yz} y γ_{zx} desaparecen.^{8,9}

• Ecuaciones constitutivas para deformaciones en el plano.-

Teniendo en cuenta que la deformación ϵ_{zz} tiene valor nulo, el esfuerzo σ_z puede expresarse en término de σ_x y σ_y como:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \dots \dots \dots (5.1)$$

por lo que σ_x , σ_y y τ_{xy} son entonces las únicas variables dependientes y la ley constitutiva para materiales isotrópicos elásticos (ec. 2.19) se reduce a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots \dots (5.2)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon}$$

para problemas que presentan la característica de la deformación en el plano comúnmente se emplea una "rebana⁹da" de la estructura con espesor unitario.

.- Vector de las deformaciones por dilatación térmica.

Debido a que este vector involucra deformaciones isotrópicas únicamente, el arreglo \underline{e}_o de la ecuación (3.20) toma la forma:

$$\underline{e}_o = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \nu_{xy} \end{bmatrix} = 1 + \nu \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.3)$$

donde: ν = Módulo de Poisson

α = Coeficiente de dilatación térmica.

ΔT = Incremento de temperatura.

.- Vector de fuerzas de cuerpo.

Para representar el vector de fuerzas de cuerpo actuando sobre un elemento que se analiza mediante el enfoque de la deformación en el plano, es necesario recurrir al arreglo siguiente:

$$\underline{\bar{X}}^T = (\bar{X}, \bar{Y}) \dots\dots\dots (5.4)$$

donde: \bar{X} y \bar{Y} son las componentes del vector fuerzas de cuerpo.

Si se considera que la estructura está sujeta a las cargas inducidas por la fuerza de gravedad el valor de $\bar{X} = 0.0$ mientras que $\bar{Y} = \rho g$.

.- Vector de cargas superficiales.

El vector de cargas de superficie para elementos que se analizan en el plano tiene la forma siguiente⁹:

$$\bar{T}^T = (P_x, P_y) \dots\dots\dots (5.5)$$

donde: P_x y P_y son las componentes de las cargas de presión aplicadas en las fronteras del elemento, en las direcciones "x" y "y" respectivamente.

5.3.2. Esfuerzos en el plano.

En contraste a la condición de deformación en el plano en la cual la dimensión longitudinal en la dirección "z" es grande comparada con las dimensiones en "x" y "y", la condición de esfuerzo en el plano presenta la característica de tener una dimensión sumamente pequeña en la dirección "z", un caso representativo de esta condición, es una placa delgada sobre la cual no se apliquen cargas en su superficie.

Tomando en consideración la situación anterior se dice que los esfuerzos τ_{yz} y τ_{zx} desaparecen¹⁰ y σ_z tiene valor nulo en todo el espesor.

.- Ecuación constitutiva para esfuerzos en el plano.

La ecuación (2.19) para el caso de análisis de esfuerzo en el plano toma la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots\dots (5.6)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon}''$$

.- Vector de las deformaciones por dilatación térmica.

El arreglo $\underline{\epsilon}_0$ de la ecuación (3.20) para el caso de análisis de esfuerzo en el plano se representa como⁹:

$$\underline{\epsilon}_0 = \begin{bmatrix} \epsilon_{0xx} \\ \epsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.7)$$

Los vectores de fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales se representen de la misma forma que para el caso de las deformaciones en el plano.

Se ha mencionado con anterioridad que ELFINTEST resuelve en forma aproximada las ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones, sin embargo, para aseverar ésto fue necesario recurrir a un proceso de solución de problemas simples cuya solución exacta o aproximada es conocida. A continuación se presentarán los problemas resueltos, con el propósito de demostrar tanto la versatilidad del programa como la convergencia del método.

5.3.3 Viga en cantiliver con carga concentrada en el extremo libre.

Como primer caso de análisis en dos dimensiones se tiene el problema de una viga en cantiliver cuyas dimensiones y condiciones de carga se muestran en la Fig. 5.1, en esta misma ilustración, se indica que la viga se dividió inicialmente en dos elementos considerando trece puntos nodales, sin embargo, para llevar a cabo un análisis

riguroso fue necesario discretizar la estructura en 2,6,12 y 18 elementos con 13,29,53 y 73 puntos nodales respectivamente, (ver Figs. 5.1 a 5.7) obteniéndose con ello resultados que son congruentes con los obtenidos a partir de la resistencia de materiales¹¹ y de la teoría de la elasticidad^{12,13}.

En las figuras mencionadas, la configuración que adquiere la estructura al estar soportando la carga se muestra mediante líneas punteadas, destacándose entre otras cosas los desplazamientos de los puntos marcados con A y B.

Las fórmulas analíticas obtenidas a partir de la teoría de la elasticidad que permiten evaluar tanto los desplazamientos como los esfuerzos en cualquier punto de la estructura son las siguientes¹³:

$$u = -\frac{P x^2 y}{2 E I} - \frac{\nu P y^3}{6 E I} + \frac{P y^3}{6 I G} + \left[\frac{P L^2}{2 E I} - \frac{P c^2}{2 I G} \right] y \dots \dots \dots (5.8)$$

$$v = \frac{\nu P x y^2}{2 E I} + \frac{P x^3}{6 E I} - \frac{P L^2 x}{2 E I} + \frac{P L^3}{3 E I} \dots \dots \dots (5.9)$$

donde: u y v, son las componentes del vector de los des-

plazamientos en las direcciones x , y respectivamente.

P = Magnitud de la carga.

E = Módulo de Young

I = Momento de inercia de la sección transversal de la viga.

ν = Módulo de Poisson

G = Módulo de rigidez al cortante

c = Distancia del eje neutro de la viga al extremo de la misma.

x, y = Coordenadas de los puntos en donde se evalúan los desplazamientos.

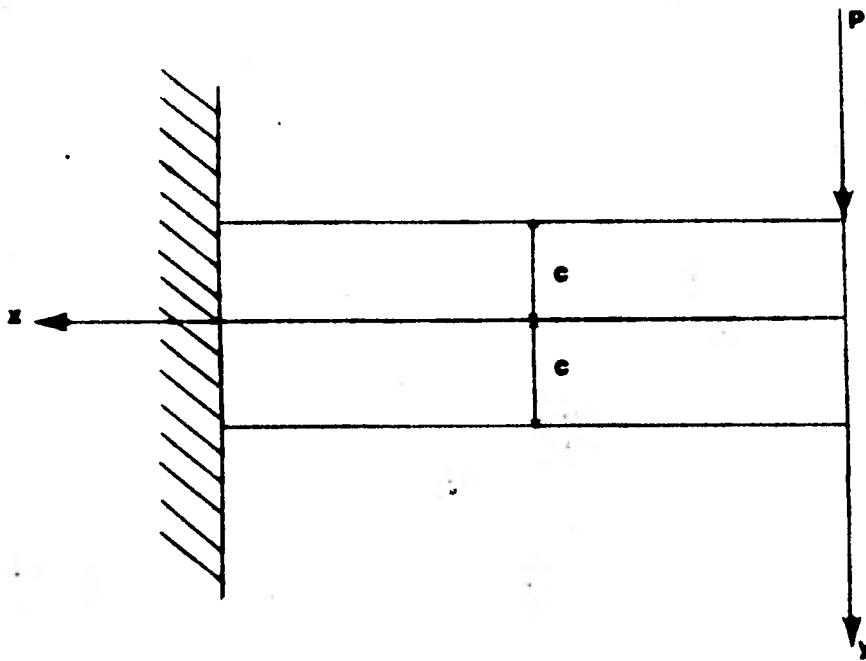
Para determinar los esfuerzos se tienen las siguientes expresiones:¹³

$$\sigma_y = 0.0 \dots\dots\dots (5.10)$$

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy \dots\dots\dots (5.11)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \dots\dots\dots (5.12)$$

estando los ejes orientados tal como lo muestra la siguiente ilustración.



En la Fig. 5.2 se presenta la gráfica de los esfuerzos inducidos en los puntos marcados del 1 al 8, en la Fig. 5.1, observándose que la solución numérica para el esfuerzo en la dirección x (σ_x) coincide con la solución obtenida a partir de la ecuación (5.11), mientras que para los esfuerzos σ_y y τ_{xy} la solución numérica diverge de la solución analítica, por lo que fue necesario elaborar una malla más fina, con el propósito de aproximar más la solución.

En la Fig. 5.6 se encuentran graficados los esfuerzos, tomando en consideración que la estructura ha sido discretizada en 18 elementos con 73 puntos nodales, cabe mencionar que sólo se muestran los esfuerzos inducidos en los puntos marcados del 1 al 12 indicados en la Fig. 5.5, pue

de observarse que los tres esfuerzos presentes en el plano obtenidos en forma numérica se aproximan bastante y en ocasiones son iguales a los obtenidos a partir de las ecuaciones (5.10) a (5.12), teniendo en cuenta estos resultados puede concluirse que ELFINTEST considera en forma apropiada la condición de frontera representada por cargas concentradas en los puntos nodales.

Antes de analizar el siguiente problema resuelto es interesante observar la Fig. 5.7, en donde se demuestra la convergencia del método del elemento finito, a partir de representar en forma gráfica los desplazamientos del punto A en la dirección del eje y, conforme se incrementa el número de elementos, puede observarse que la solución se estabiliza alrededor del valor 3.6 in. - Otro aspecto importante de analizar es el desplazamiento inducido en el punto B en la dirección del eje x, según la (ec.58), debe ser cero, lo que concuerda con el resultado obtenido a partir de ELFINTEST, es decir, que de acuerdo a lo mostrado en las Figs. 5.1 a 5.6 el punto nodal B únicamente sufre desplazamientos en la dirección del eje y, mientras que en el eje x sus desplazamientos son nulos.

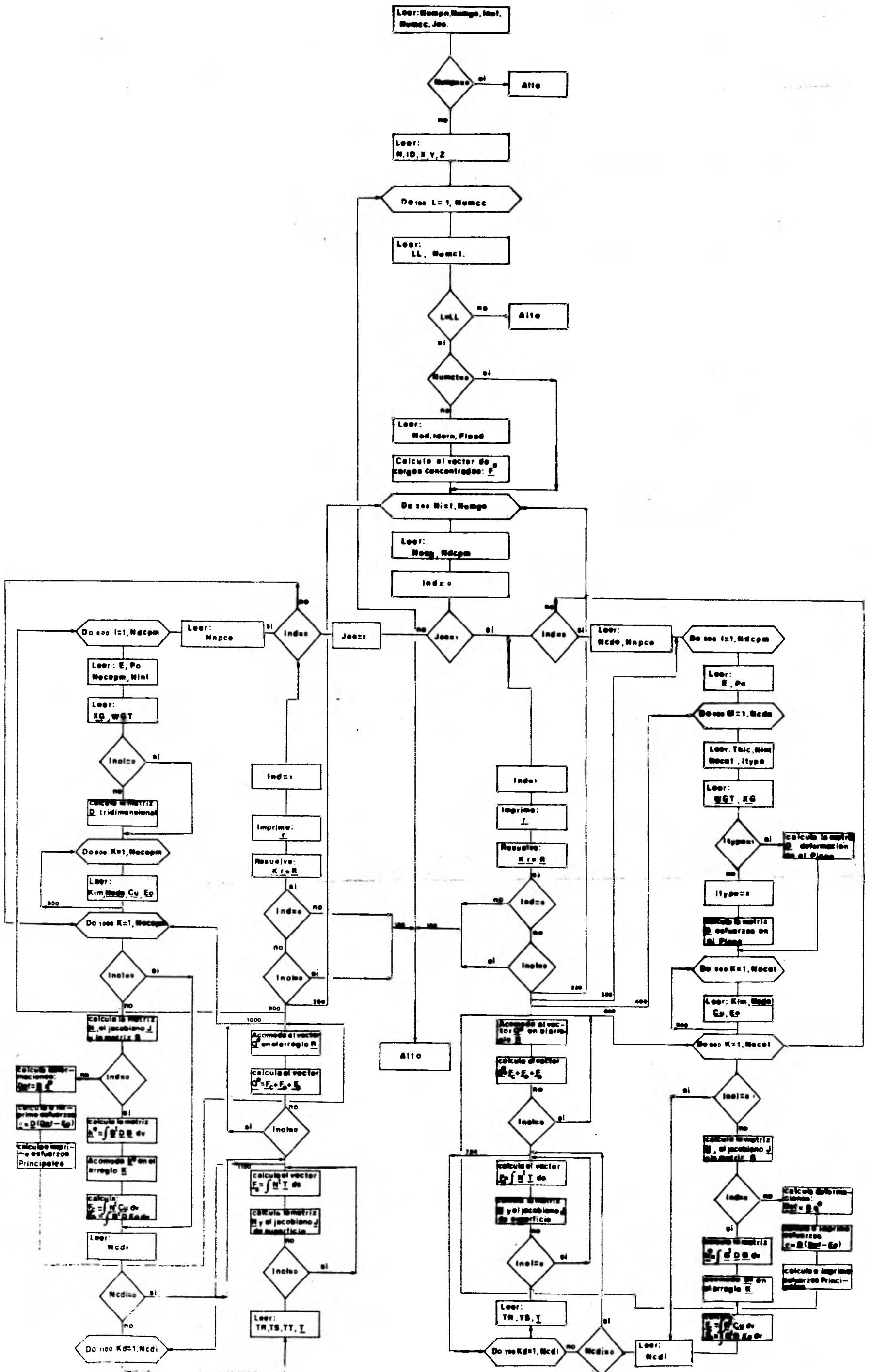
5.3.4 **Viga empotrada con cambio de temperatura.**
El siguiente problema resuelto en dos dimensiones, consiste de una viga a la cual se le restringe el desplazamiento de los puntos situados en los extremos de la estructura y sufre un incremento de temperatura. La viga presenta las mismas dimensiones que el problema anterior, así como también las mismas propiedades mecánicas, sin embargo, como se puede observar en la Fig. 5.8, las condiciones de frontera y de carga son completamente distintas, en esta misma ilustración se indica que la estructura se dividió inicialmente en 2 elementos considerando 13 puntos nodales, sin embargo, para poder mejorar la solución fue necesario discretizar el miembro en 18 elementos con 73 puntos, tal como lo muestra la Fig. 5.10.

DIAGRAMA DE FLUJO
DEL PROGRAMA

★ ★ ★ ★
★ ★ E L F I N T E S T ★ ★
★ ★ ★ ★

Diagrama de Flujo

"ELFINTEST"



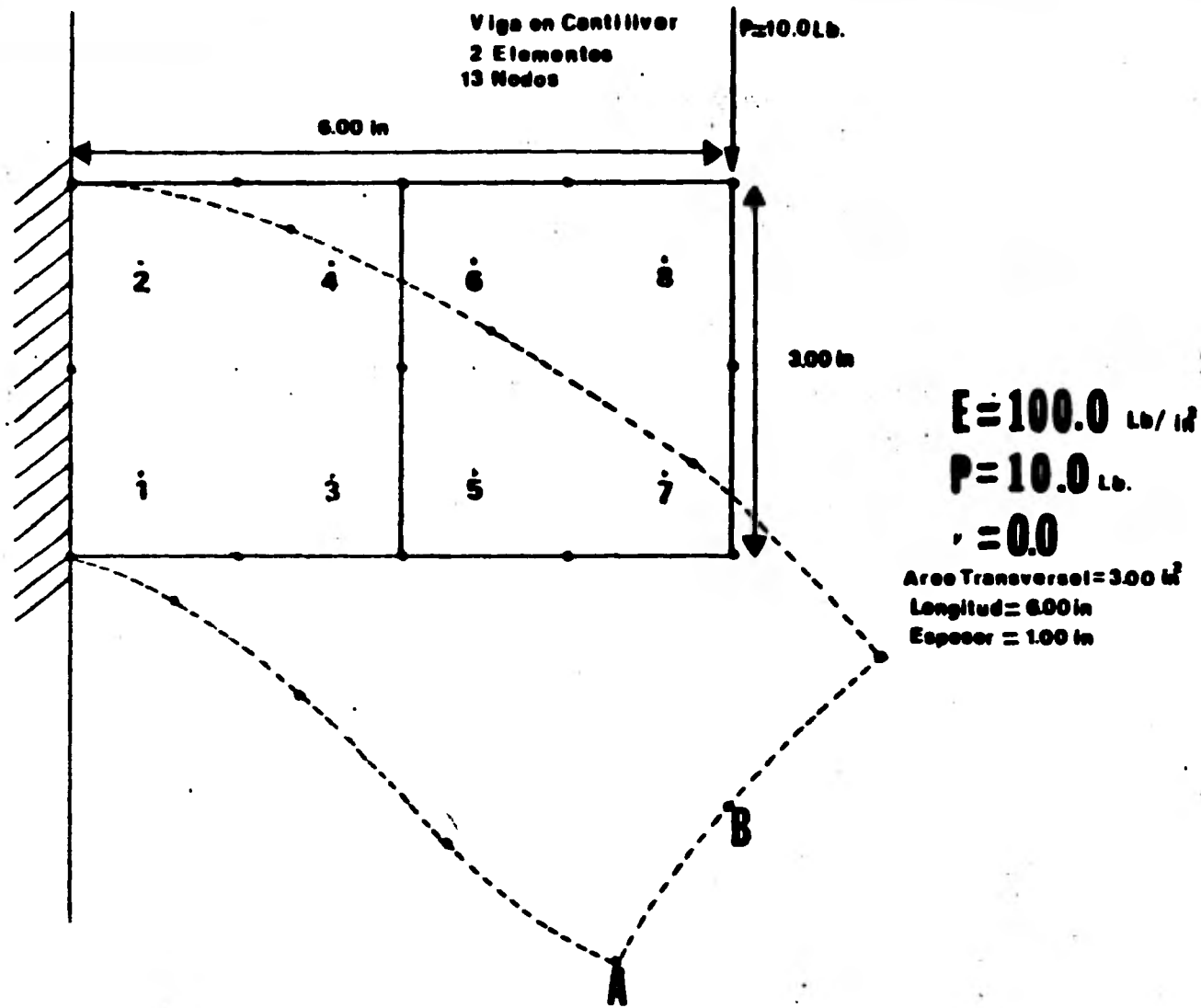


Fig.5.1

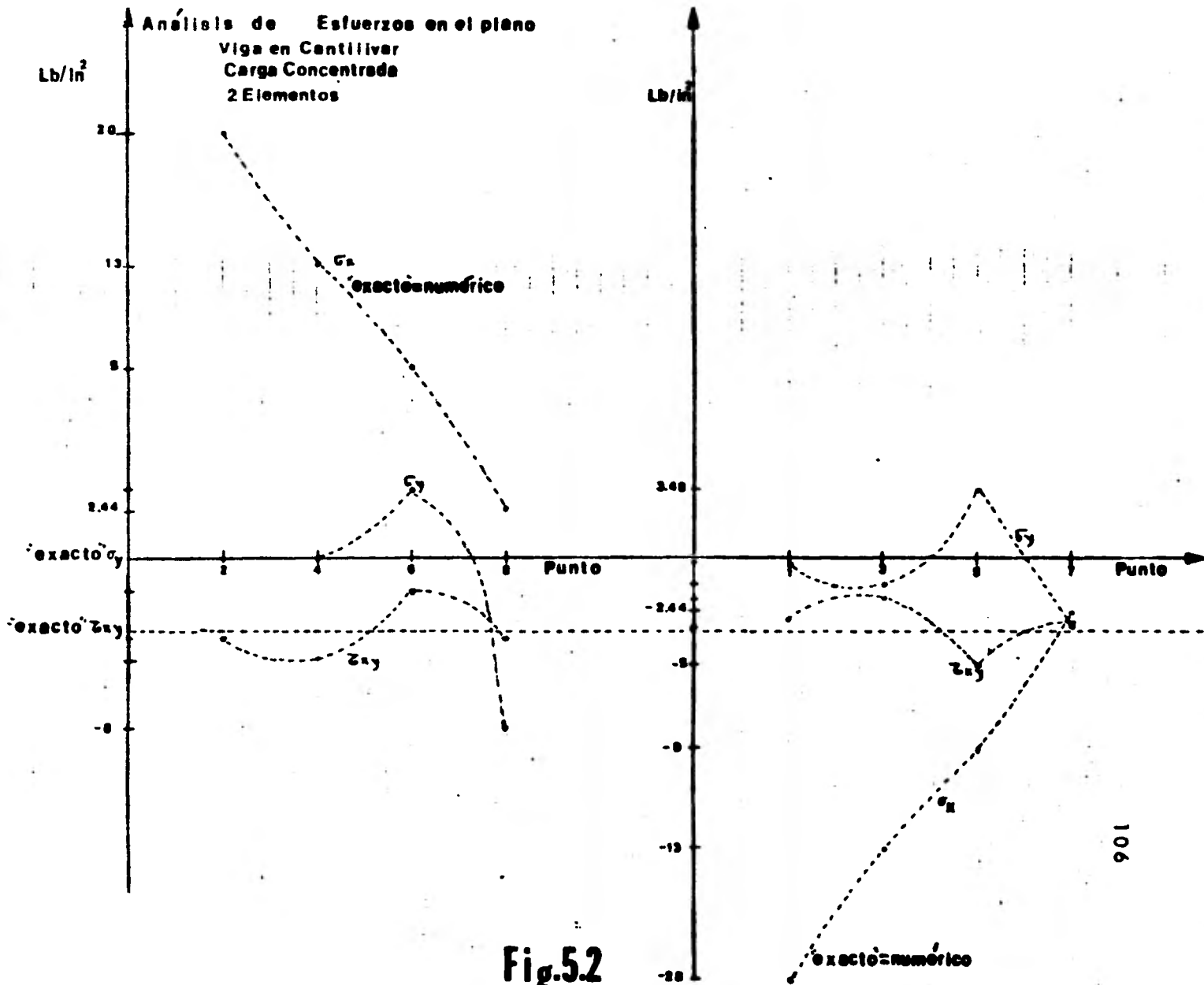


Fig.5.2

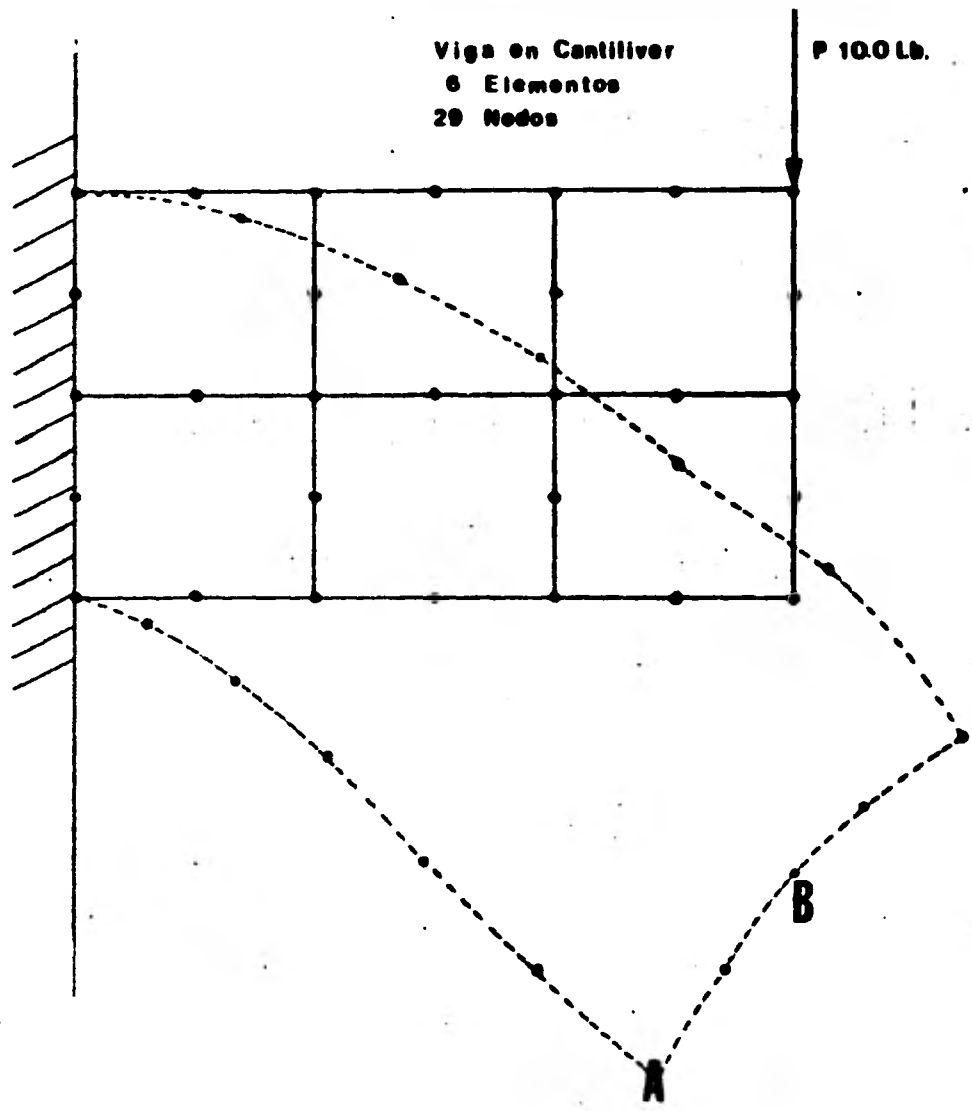


Fig.5.3

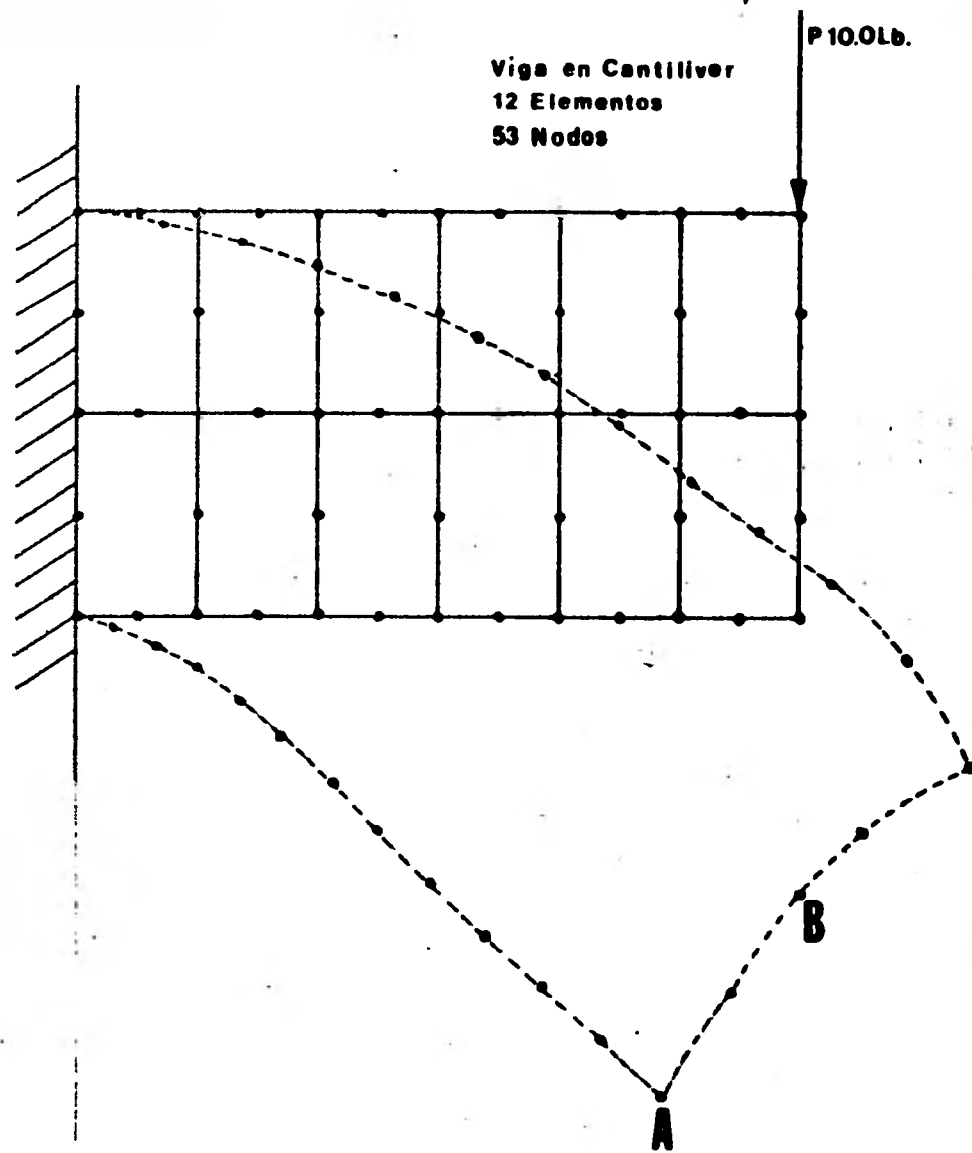


Fig.5.4

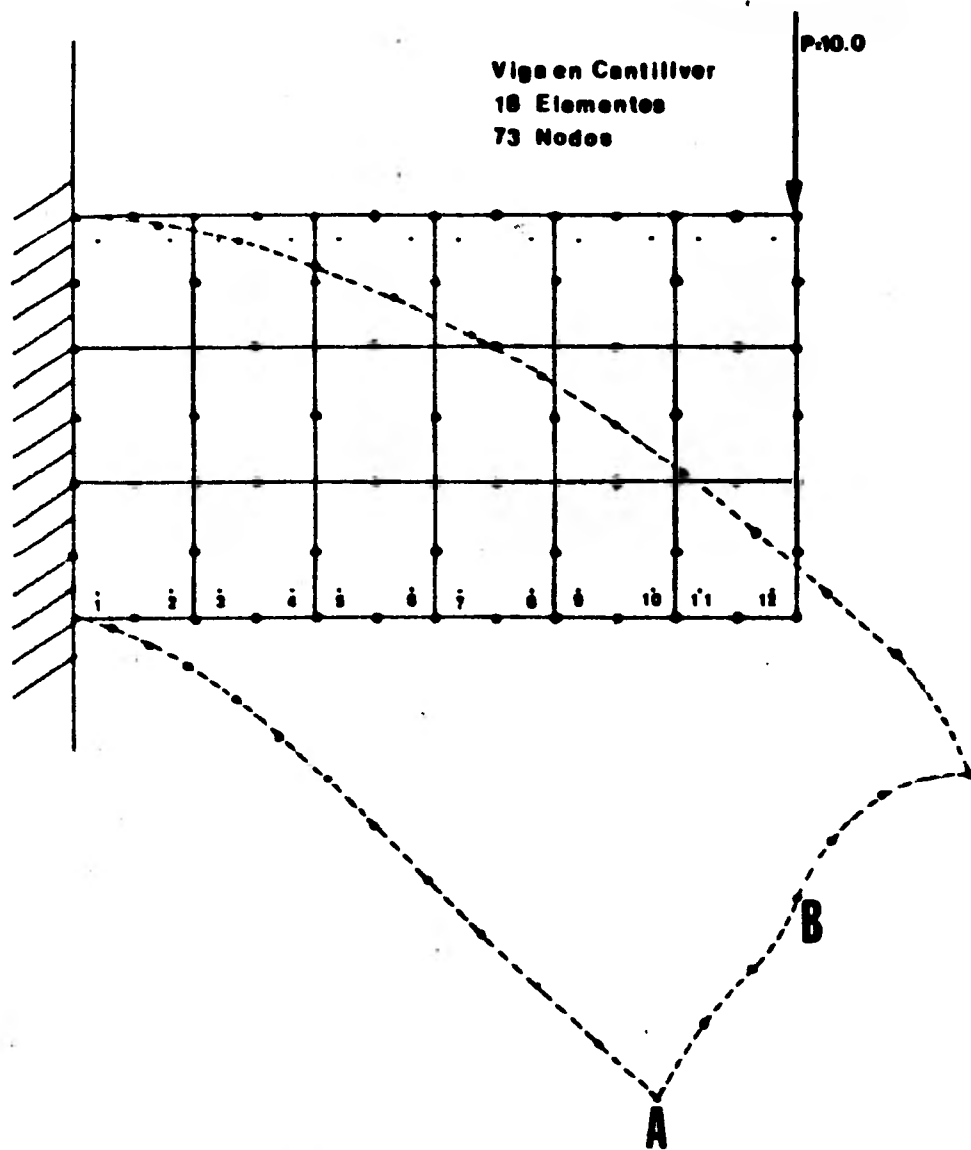


Fig.5.5

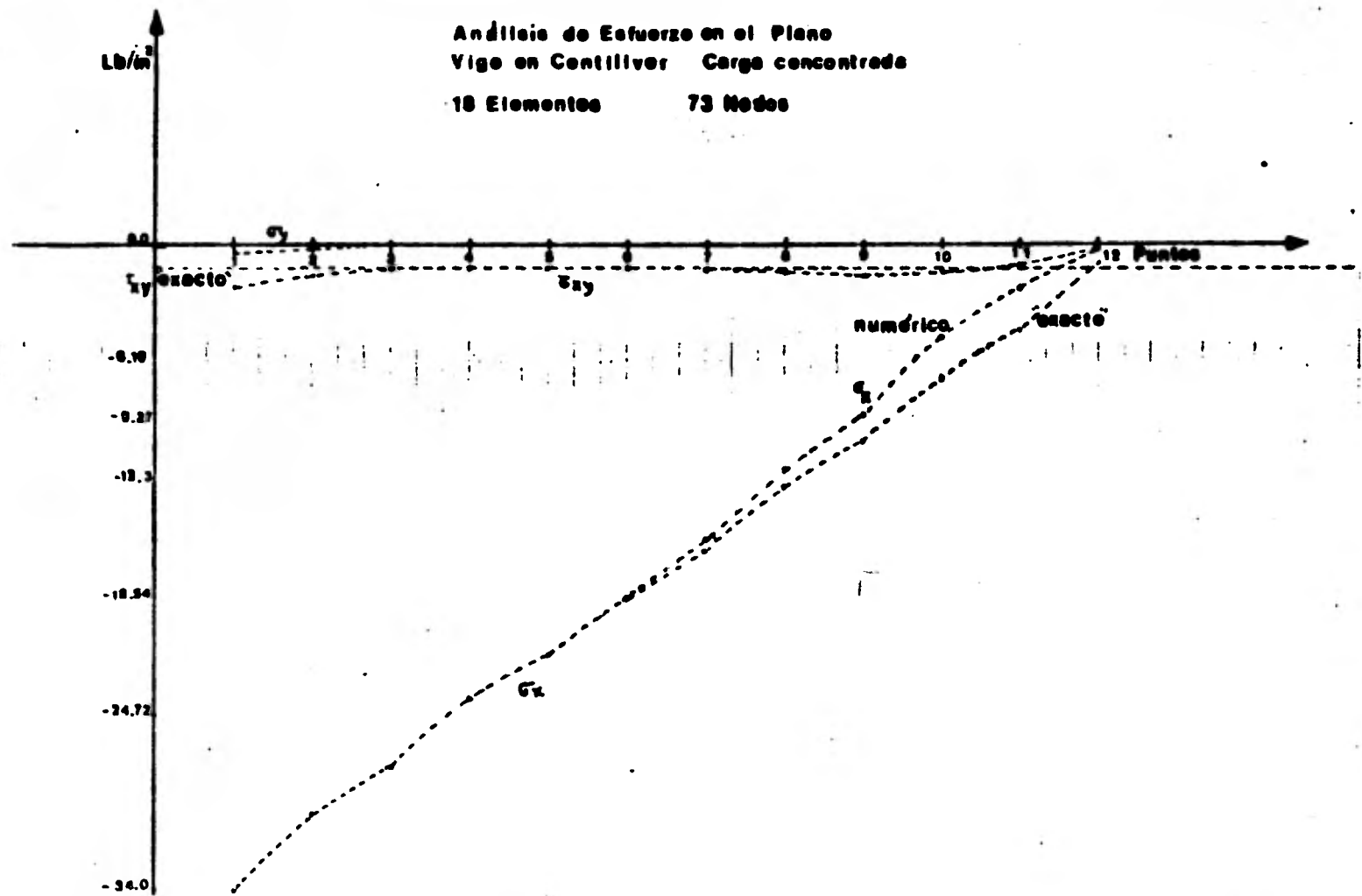


Fig.5.6

Análisis de Esfuerzo en el Plano

Convergencia del Método

Viga en Cantiliver

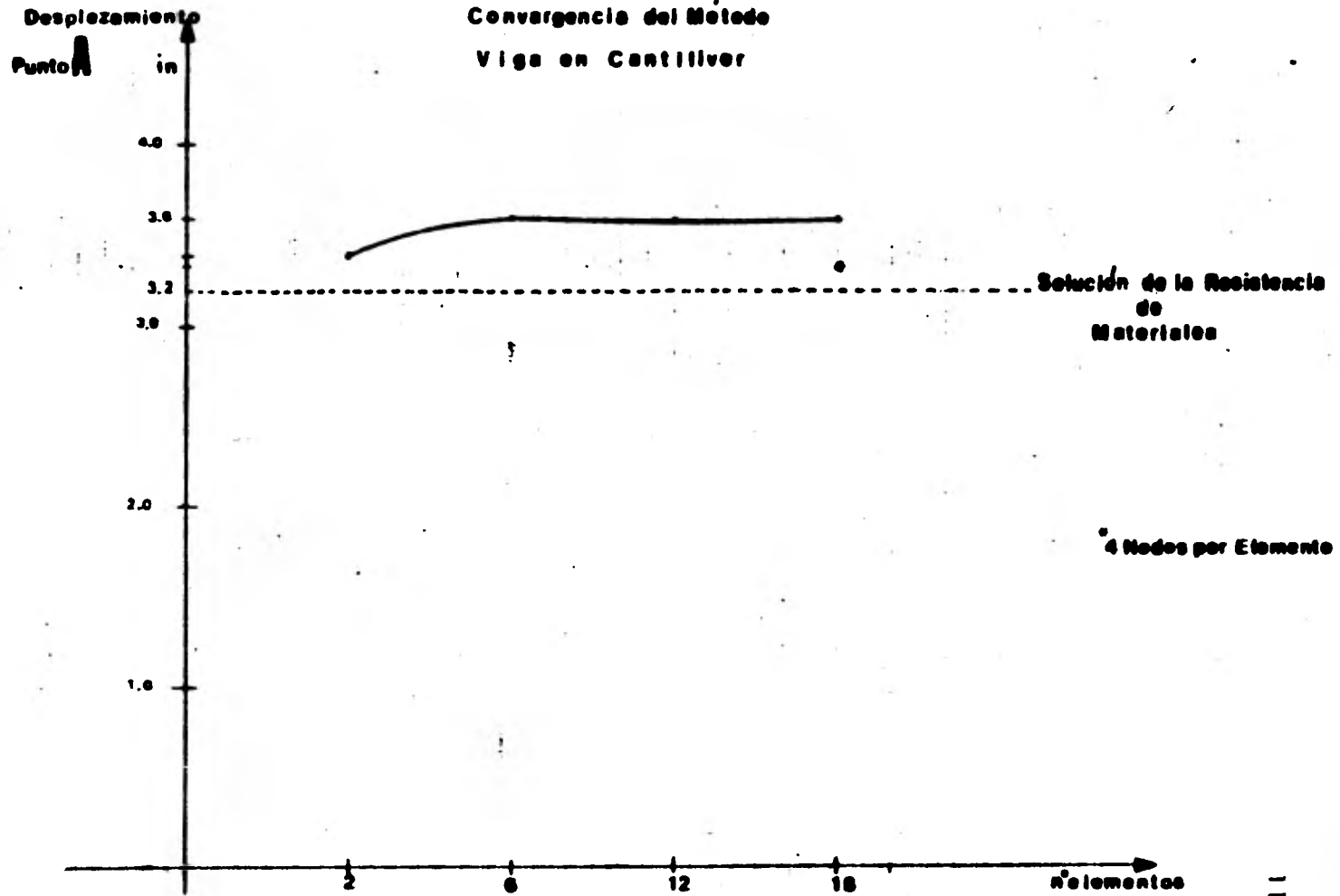


Fig.5.7

En las dos figuras mencionadas en el párrafo anterior, la configuración de la estructura al soportar el cambio de temperatura, se muestra con líneas punteadas, mientras que los esfuerzos inducidos en puntos seleccionados se representan en las Figs. 5.9 y 5.11. Los esfuerzos obtenidos en forma numérica se compararon con los obtenidos a partir de la resistencia de los materiales¹⁴ y determinados a partir de las ecuaciones siguientes:

$$\sigma_y = 0.0 \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

$$\tau_{xy} = 0.0 \quad \dots\dots\dots (5.14)$$

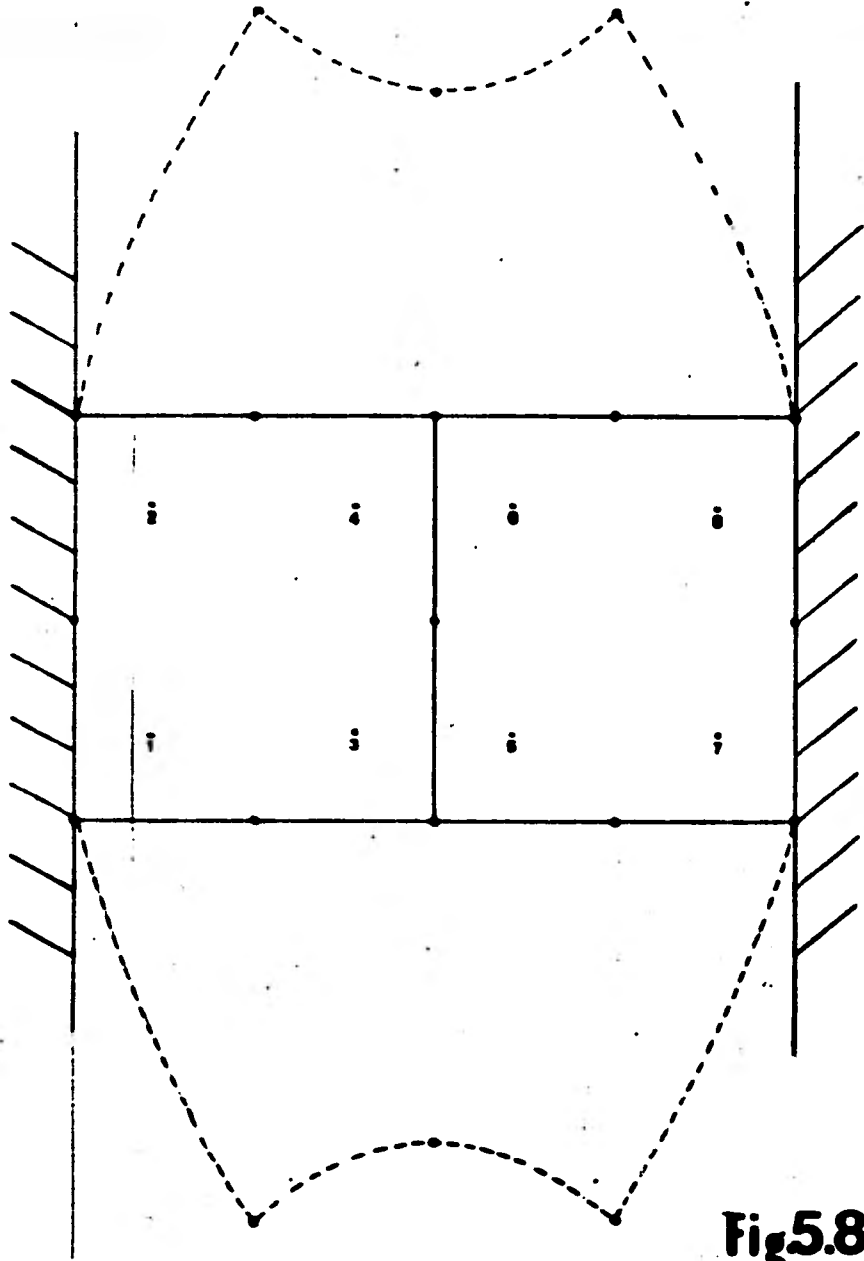
Para el cálculo del esfuerzo σ_x es necesario desarrollar el siguiente método de solución:¹⁴

- .- Quitar uno de los empotramientos y permitir que el miembro cambie su longitud libremente al modificar su temperatura.
- .- Se calcule la variación de longitud debido al cambio de temperatura a partir de $\delta_T = \alpha L \Delta T$
- .- Se aplique una carga axial al extremo libre con el propósito de regresarlo a su posición original.

La magnitud de la carga puede determinarse a partir de $\delta_T = PL/AE$:

- Se determina el esfuerzo en la dirección axial a partir de $\sigma = P/A$

En la Fig. 5.9 el esfuerzo σ_x es igual al obtenido a partir de la resistencia de los materiales, sin embargo, los esfuerzos σ_y y τ_{xy} presentan valores muy distintos a los proporcionados por las ecuaciones (5.13) y (5.14). En la Fig. 5.11 puede observarse que las soluciones son muy semejantes e incluso en ocasiones presentan valores iguales por lo que puede decirse que ELFINTEST considera en forma adecuada la condición de frontera representada por el cambio de temperatura en cuerpos cuya dilatación esté restringida.



Análisis de Esfuerzo en el Plano
Viga Empotrada con cambio de
temperatura 2 Elementos

$$E = 100 \text{ LB/in}^2$$

$$\nu = 0.00$$

$$\alpha \Delta T = 3.00$$

Fig5.8

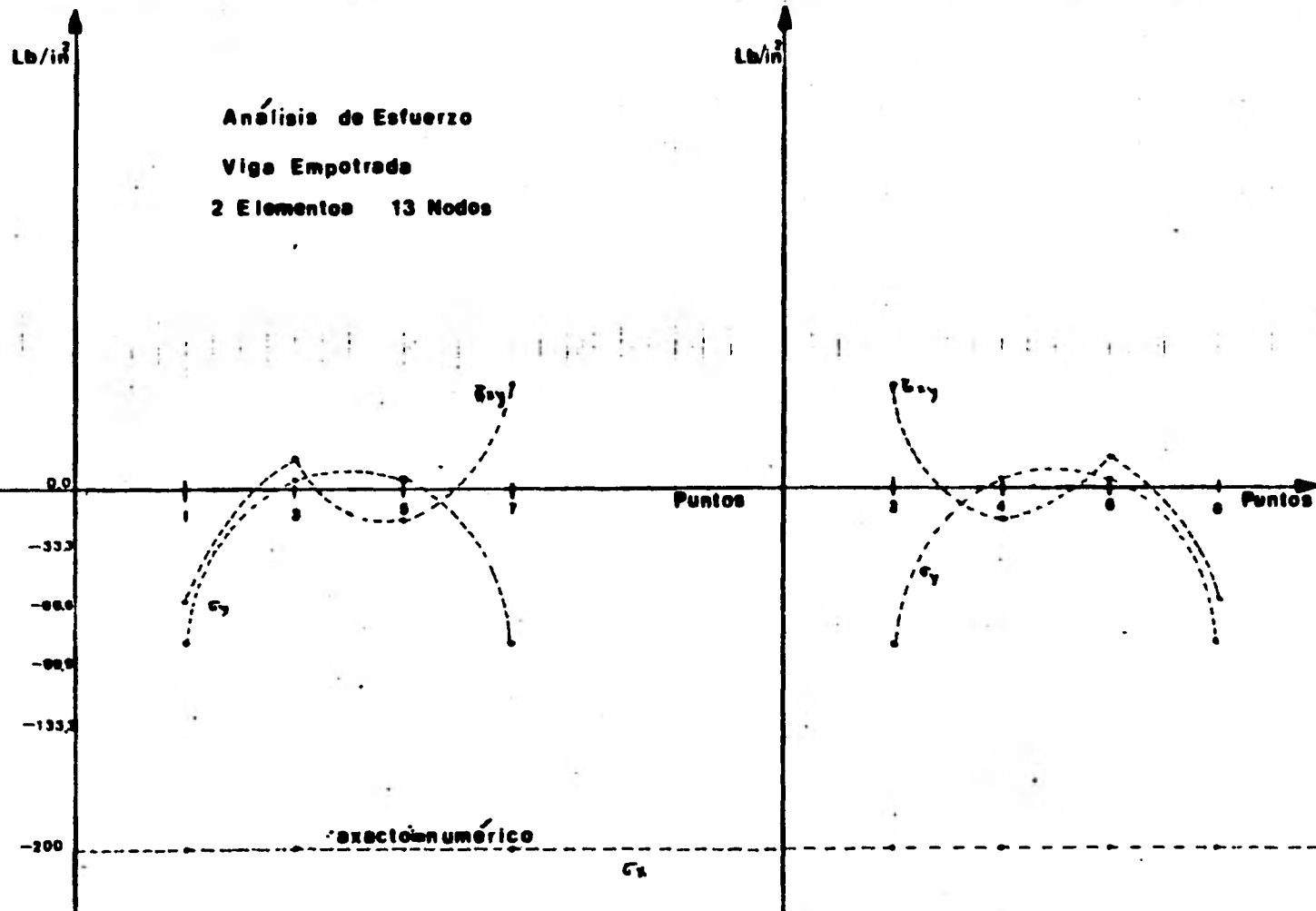
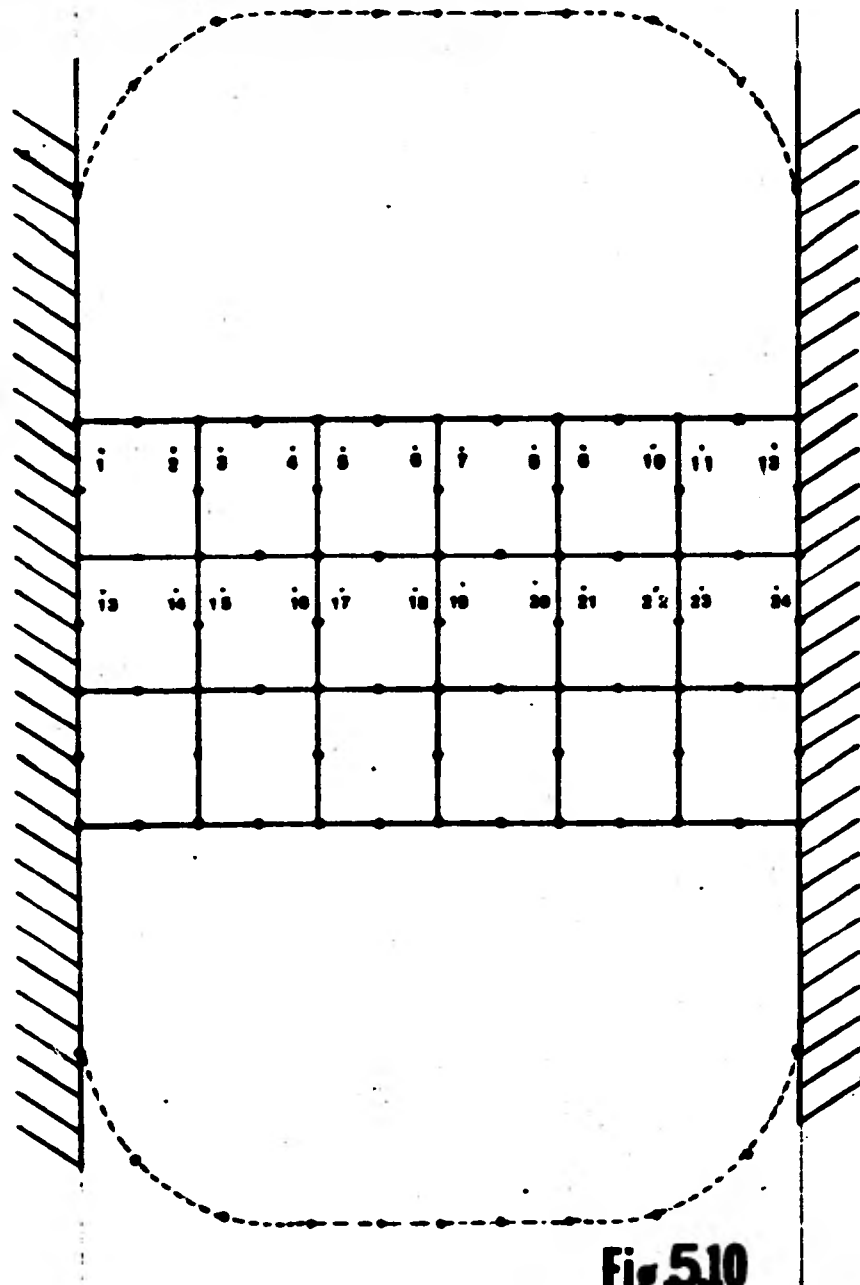


Fig.5.9



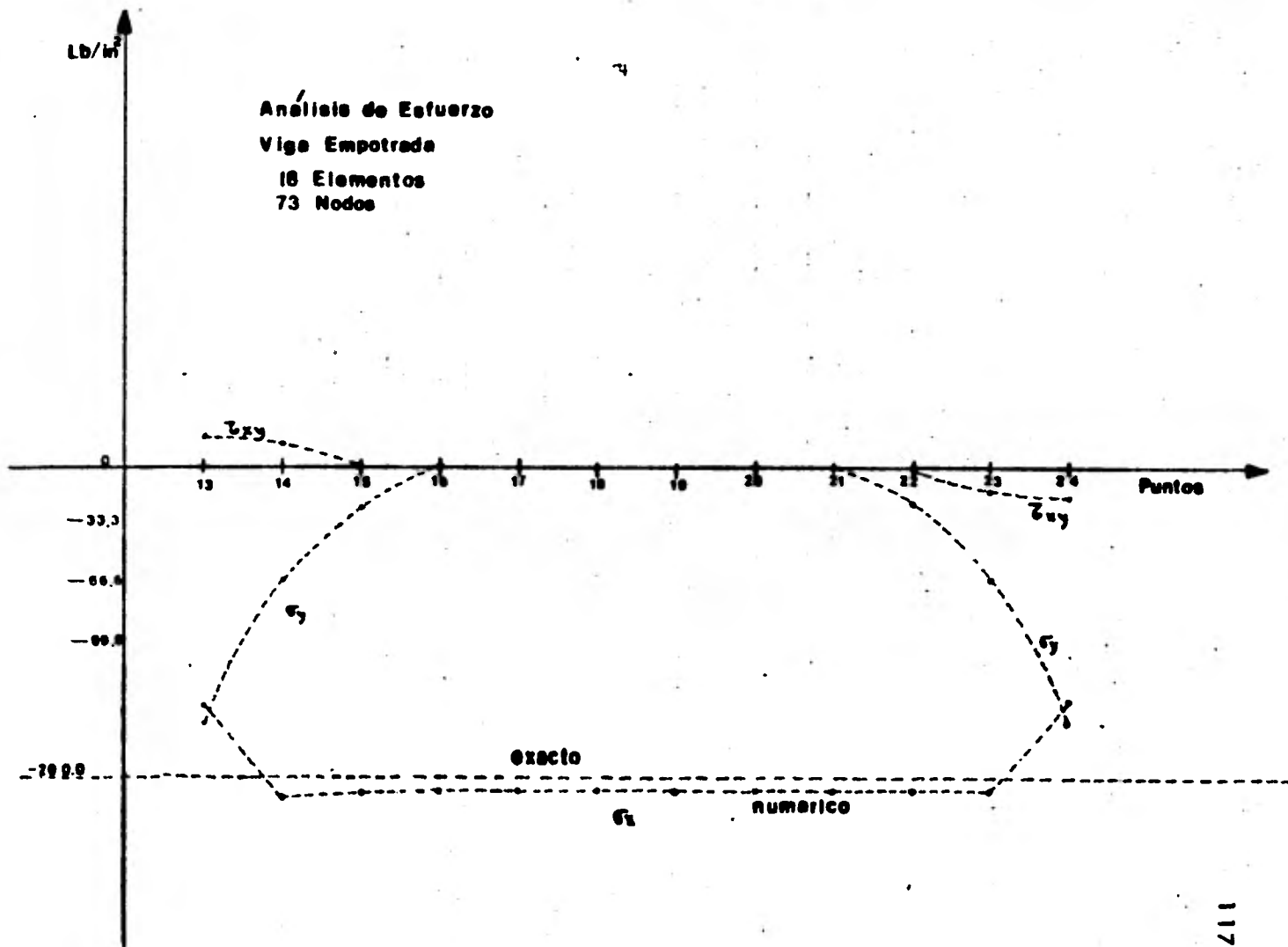


Fig.5.11

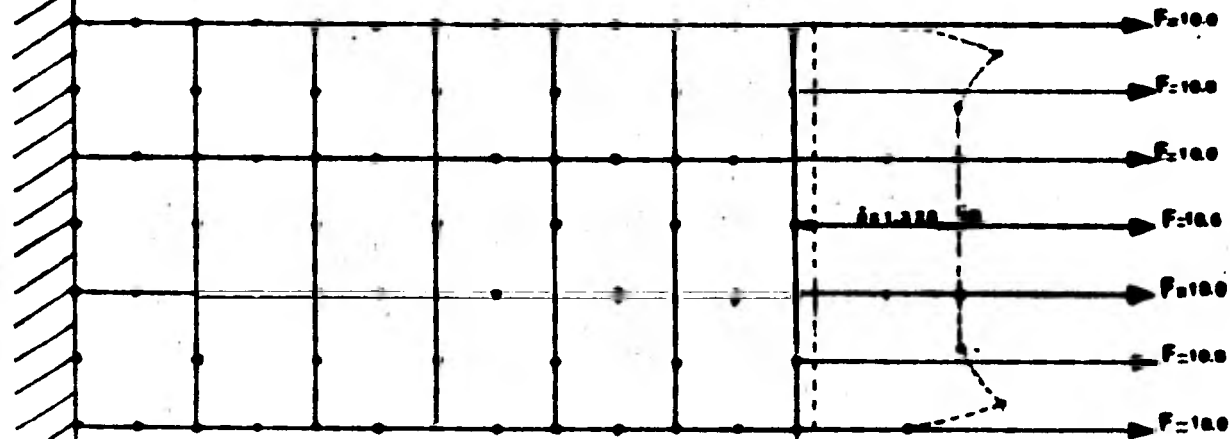
Un aspecto importante de analizar en la Fig. 5.11 es el hecho de que los esfuerzos evaluados en las zonas cercanas a los empotramientos, presentan valores muy distintos a los que se manifiestan en las zonas internas de la estructura, esto se debe principalmente a que existen concentración de esfuerzos¹⁵ inducidos por la condición de frontera impuesta. Con el propósito de que los esfuerzos no presenten cambios bruscos de una zona a otra, la literatura^{15,16,17} recomienda disminuir el tamaño de la malla en las zonas donde se manifieste este fenómeno, la disminución del tamaño de la malla no se implementó en este problema ya que el objetivo del mismo es únicamente comprobar el programa de cómputo para la condición de cambios de temperaturas.

5.3.5 Viga en cantiliver con cargas concentradas de tensión.

En este ejemplo, se analiza en forma numérica, el comportamiento de la viga del primer problema, considerando que se le aplican cargas concentradas en los puntos nodales situados en el extremo libre, cabe mencionar

que las fuerzas aplicadas estén orientadas en la dirección del eje x , tal como lo muestran las Figs. 5.12 y 5.13. En estas mismas ilustraciones la configuración de la estructura al soportar las cargas de tensión, se muestra con líneas punteadas, mientras que los esfuerzos se presentan explícitamente tanto en forma numérica como analítica. Un aspecto importante de la Fig. 5.13 es el hecho de que la estructura sufre un adelgazamiento proporcionado por el valor del módulo de Poisson diferente de cero, este adelgazamiento no se manifiesta en la Fig. 5.12 debido a que la relación de Poisson tiene valor nulo y por consiguiente al presentarse deformaciones longitudinales, no existen las deformaciones transversales. Como puede observarse en las figuras mencionadas, los resultados son sumamente satisfactorios ya que concuerdan tanto con los esfuerzos como con las elongaciones obtenidas a partir de la resistencia de los materiales.

Viga con cargas concentradas de tension
 18 Elementos
 73 Nodos



$\nu = 0.0$
 $E = 1000 \text{ Lb/in}^2$

Solución de la Resistencia de Materiales

$$\delta = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{7000}{31100} = 0.225 \text{ in}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{100}{3} = 33.33 \frac{\text{Lb}}{\text{in}^2}$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0.0 \frac{\text{Lb}}{\text{in}^2}$$

Solución Numérica

$$\sigma_x \approx 33.3 \text{ Lb/in}^2$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} \approx 0.0 \text{ Lb/in}^2$$

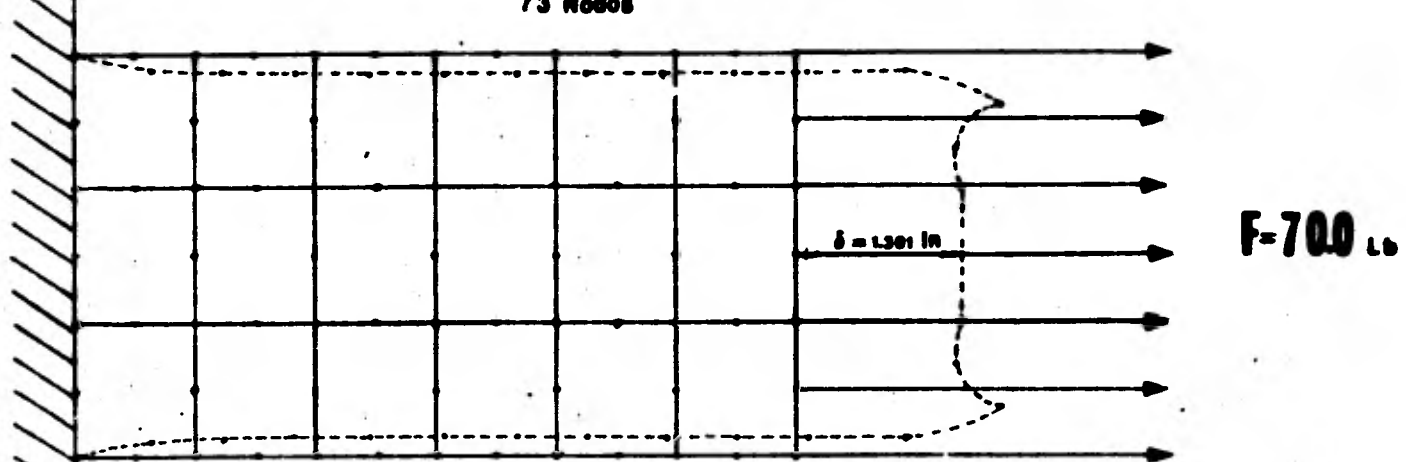
F=70.0 Lb

Fig.5.12

Viga con carga concentrada de tensión

18 Elementos

73 Nodos



$$\nu = 0.4$$

$$E = 100.0 \text{ Lb/in}^2$$

Solución de la Resistencia de Materiales

$$\frac{\delta FL}{AE} = \frac{18 \times 700}{3 \times 100} = 1.4 \text{ in}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{700}{3} = 233.3 \text{ Lb/in}^2$$

$$\sigma_y = 0.0$$

$$\tau_{xy} = 0.0$$

Solución Numérica

$$\sigma_x \approx 233.3 \text{ Lb/in}^2$$

$$\sigma_y \approx \tau_{xy} \approx 0.0$$

Fig.5.13

5.3.6 Viga en cantiliver con carga de presión en el extremo libre.

En este ejemplo se analiza la misma viga de los casos anteriores, sólo que las cargas a las que está sujeta ahora son cargas superficiales aplicadas en el extremo libre en la dirección del eje x , tal como se indica en la Fig.

5.14 En esta figura se muestran tanto los esfuerzos inducidos como el desplazamiento o más bien dicho "acortamiento" que sufre la estructura al estar sometida a una carga de presión, los resultados obtenidos son bastante congruentes con los proporcionados a partir de fórmulas resultantes de la teoría de la resistencia de materiales,¹⁴ por lo que se concluye que ELFINTEST está implementado de tal forma que considera la condición de frontera representada por cargas superficiales.

5.3.7 Viga soportando su propio peso.

En este ejemplo se analiza el comportamiento de una estructura al estar sujeta a cargas inducidas por su mismo peso, con esto se pretende comprobar que el programa ELFINTEST es capaz de considerar la condición de frontera representa-

de por las fuerzas de cuerpo a las que puede estar sometida cualquier estructura.

Las propiedades mecánicas y dimensiones de la estructura a analizar son las mismas que tiene la viga del primer ejemplo, sin embargo, ahora es necesario considerar el peso del material, tal como se muestra en la Fig. 5.15. En esta misma ilustración se presentan los resultados tanto numéricos como analíticos de los desplazamientos y de los esfuerzos que se presentan en la estructura, pudiéndose notar que al variar la relación de Poisson se presenta un ensanchamiento de la misma, esto se representa con líneas punteadas.

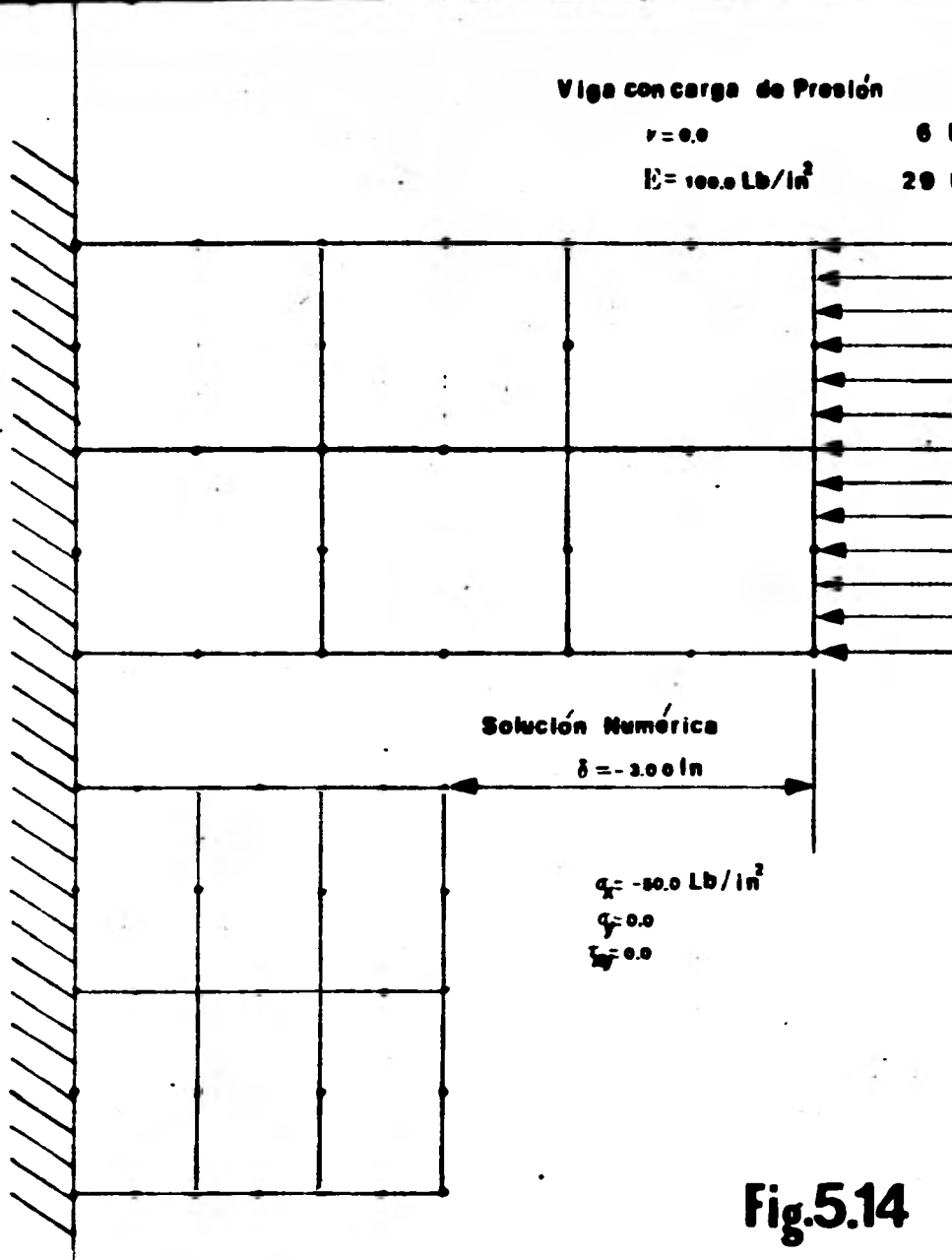
Viga con carga de Presión

$\nu = 0.0$

6 Elementos

$E = 100.0 \text{ Lb/in}^2$

29 Nodos



$\frac{F}{A} = 50.0 \frac{\text{Lb}}{\text{in}^2}$

Solución de Resistencia de Materiales

$\delta = \frac{FL}{AE} = -\frac{50 \times 10}{100} = -3.0 \text{ in}$

$\sigma_x = -50.0 \text{ Lb/in}^2$

$\sigma_y = \tau_{xy} = 0.0$

Solución Numérica

$\delta = -3.00 \text{ in}$

$q_x = -50.0 \text{ Lb/in}^2$

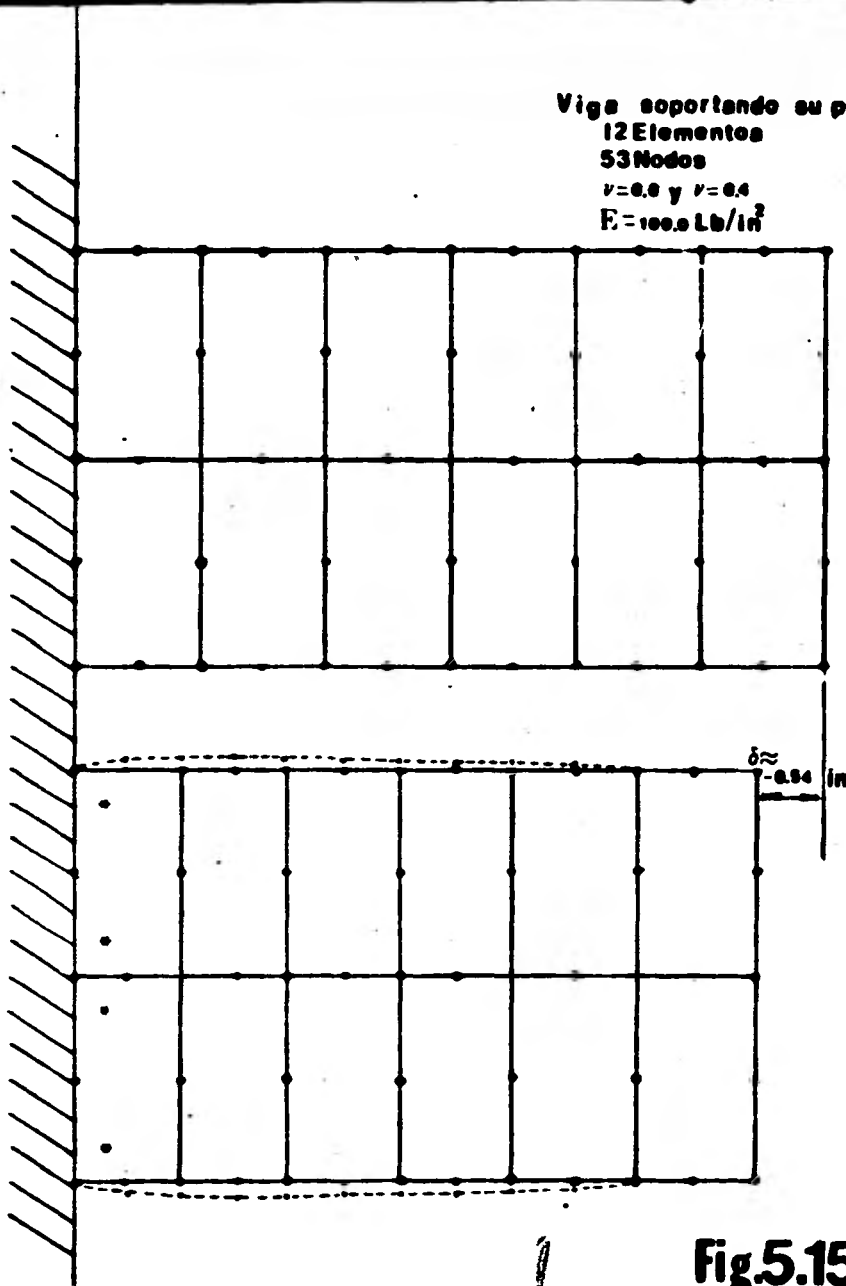
$q_y = 0.0$

$q_z = 0.0$

Fig.5.14

Viga soportando su propio peso
 12 Elementos
 53 Nodos
 $\nu = 0.3$ y $\nu = 0.4$
 $E = 1000 \text{ Lb/in}^2$

$$\rho g = 3.0 \text{ Lb/in}^3$$



Solución de la Elasticidad¹³

$$\delta = -\frac{\rho g (L^2 - x^2)}{2E}$$

$$\delta = -\frac{3 \times 120}{200} = -0.0018 \text{ in}$$

$$\sigma_x = -\rho g x = -3 \times 6.00 = -18.00 \text{ Lb/in}^2$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0.0$$

Solución Numérica

$$\sigma_x \approx 18.00 \text{ Lb/in}^2$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0.0 \text{ Lb/in}^2$$

Fig. 5.15

5.4 SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES.-

Se ha mencionado con anterioridad que ELFINTEST resuelve el problema tridimensional de la mecánica de los sólidos, sin embargo, para poder aseverar lo anterior, fue necesario resolver problemas simples tal y como se hizo para el estado plano, explicado en las secciones anteriores. Los problemas resueltos en tres dimensiones son los mismos que se resolvieron para el estado plano, considerando la misma estructura con iguales dimensiones y propiedades mecánicas, se llevó a cabo esto con el propósito de comparar las soluciones, las cuales fueron congruentes y en ocasiones iguales, por lo que en la presente sección se muestran únicamente dos casos representativos de la solución de las ecuaciones de equilibrio en tres dimensiones.

5.4.1 Viga tridimensional con cargas concentradas de tensión.

En la Fig. 5.16 se muestra una viga en cantiliver en tres dimensiones con cargas concentradas de tensión en

el extremo libre en la dirección del eje x , la configuración de la estructura deformada al soportar las cargas se muestra con líneas punteadas, es importante hacer notar el valor de la elongación δ que se obtuvo en forma numérica, ya que resulta ser igual al obtenido a partir de la formulación de la resistencia de los materiales.¹⁴ El valor del esfuerzo normal en la dirección x que se obtuvo en forma numérica resulta ser igual a la fórmula $\sigma_x = F/A$. De acuerdo a las observaciones realizadas en la Fig. 5.16 se puede concluir que el programa de cómputo considere la condición de frontera representada por cargas concentradas en puntos discretos de una estructura tridimensional.

5.4.2 Viga tridimensional soportando su propio peso.

En este ejemplo se analiza el comportamiento de una estructura tridimensional al estar sujeta a cargas inducidas por su propio peso, las propiedades mecánicas y dimensiones son las mismas que la viga del estado plano, así como también se considera la misma carga de cuerpo tal como se muestra en la Fig. 5.17. Cabe hacer notar que

el peso de la estructura está orientado en el sentido negativo del eje x, por lo que la estructura sufre un "acortamiento" en el sentido longitudinal y un ensanchamiento en el sentido transversal.

Si se comparan las figuras 5.15 y 5.17 puede observarse fácilmente que tanto los esfuerzos de los puntos marcados con asterisco, como el "acortamiento" son los mismos, de tal manera que se puede concluir que ELFINTEST considere adecuadamente la condición de frontera representada por cargas de cuerpo presentes en estructuras tridimensionales.

5.5 ANALISIS DE ESFUERZOS EN UNA VALVULA "Y" PARA CONTROL DE FLUJO.

Con los resultados mostrados en las secciones anteriores, se tiene la certeza de que la secuencia de cálculo del programa ELFINTEST está correctamente formulada. El paso siguiente que es necesario llevar a cabo con el propósito de alcanzar el objetivo principal del presente estudio, consiste en analizar el cuerpo de una válvula para control de flujo¹⁸ que se encuentra instalada en el

laboratorio de metales líquidos del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares. El dispositivo a analizar se muestra en la Fig. 5.18, el material es acero inoxidable 304, con propiedades mecánicas¹⁹ y condiciones de carga mostradas en la misma figura. De acuerdo a la geometría del cuerpo se observa que es necesario atacar el problema en forma tridimensional, por lo que cada punto nodal tendrá tres grados de libertad, excepto los puntos que se encuentran localizados a la entrada y la salida de la válvula considerándose como empotrados, es decir, con esta condición de frontera impuesta a los nodos que estén en contacto con la tubería de acceso y descarga se pretende simular las condiciones de operación del dispositivo en estudio.¹⁸

Como primer intento de análisis se dividió la válvula en 56 elementos con 444 puntos nodales, sin embargo no fue posible llevar a cabo esta solución ya que se necesitaba establecer un arreglo unidimensional del orden de 120,000 localidades, cosa que es imposible hacer en la PDP10 del centro nuclear dada la capacidad de memoria del procesador central. Como segundo intento se dividió la vál-

vule en 24 elementos con 224 puntos nodales, para lo cual fue necesario establecer un vector del orden de 65,000 localidades el cual si fue posible almacenarlo en la computadora ya que cuenta con una memoria de 82 K. Al estudiar los resultados del programa se encontró que existe simetría axial en el sentido longitudinal del cuerpo, dando por consecuencia que se presenten los mismos esfuerzos y desplazamientos en ambas partes del dispositivo. Fue hasta entonces que se decidió analizar una mitad del cuerpo, tomando en consideración que los puntos nodales situados en el plano de simetría carecen de desplazamiento en la dirección normal al plano, según los resultados que se obtuvieron y según lo establece la literatura²⁰.

La decisión de analizar solamente una parte del cuerpo, a priori parece ser muy "simplista", sin embargo fue de importancia relevante para el desarrollo del presente estudio, ya que en primer lugar se observó que ELFINTEST es capaz de analizar estructuras que presenten fronteras curvas y en segundo lugar el ahorro de memoria de computadora fue considerable a tal extremo que

se logró dividir y analizar la mitad de la válvula con 12, 15, 20 y 28 elementos representando una discretización global de 24, 30, 40 y 56 elementos respectivamente.

En la Fig. 5.18 se muestra la válvula dividida en 56 elementos, mientras que en la Fig. 5.23 se muestra un corte de la misma representada por 28 elementos con 254 puntos nodales. En las Figs. 5.19 a 5.21 se pueden observar las deformaciones sufridas por el material al estar sujeto a las condiciones de carga definidas con anterioridad, es conveniente estudiar con todo detalle estas ilustraciones ya que proporcionen resultados interesantes, como es el hecho de que la elipse tienda a cerrarse en su eje mayor y abrirse en su eje menor, la configuración del cuerpo deformado se muestra con líneas punteadas.

En la Fig. 5.22 se muestran los desplazamientos del punto A para varias divisiones observándose que no se llega a estabilizar la solución, aun considerando los 28 elementos con 254 puntos nodales, por lo que se recomienda desarrollar una malla más cerrada,¹⁵ sin embargo,

Ésto no es posible realizarlo en la PDP10 debido a que su capacidad de memoria es muy pequeña.

Con respecto a los esfuerzos, éstos fueron evaluados en 8 puntos internos de cada elemento, es decir, se empleó un orden de integración de 2 tanto para integrar las matrices como para evaluar los esfuerzos, en la Fig. 5.23 se muestran los 28 elementos en que se discretizó la parte media del cuerpo algunos de los cuáles se marcan con asterisco, ésto quiere decir que en estos elementos se obtuvieron esfuerzos mayores a los de cedencia, detectándose que ésto ocurre en las zonas alrededor de los puntos empotrados y en las zonas donde ocurre un cambio de geometría.

Existe concentración de esfuerzos, la forma de analizar con más detalle estas regiones con el propósito de converger a una solución, es discretizar más el medio, cosa que es imposible realizar debido a la carencia de memoria y a las características propias del programa. Al final del capítulo se presenta un listado de computadora en donde se muestran los esfuerzos que sobrepasan el

de cedencia¹⁹, para tener idea clara del punto en donde se evaluaron los esfuerzos es conveniente tomar como referencia la Fig. 5.23 en donde se muestra la orientación del sistema de coordenadas naturales r, s, t .

Aunque no se llegó con este análisis a una solución adecuada puede decirse que los resultados son bastante satisfactorios, cabe hacer notar que los esfuerzos no sólo fueron evaluados en el dispositivo modelado con 28 elementos, sino que se evaluaron en cada división de 12, 15 y 20 comprobándose que conforme incrementa el número de elementos cada vez es menor la cantidad de puntos en donde se sobrepasa el esfuerzo de cedencia, cosa que indica que al utilizar ELFINTEST se tiende hacia el resultado correcto.

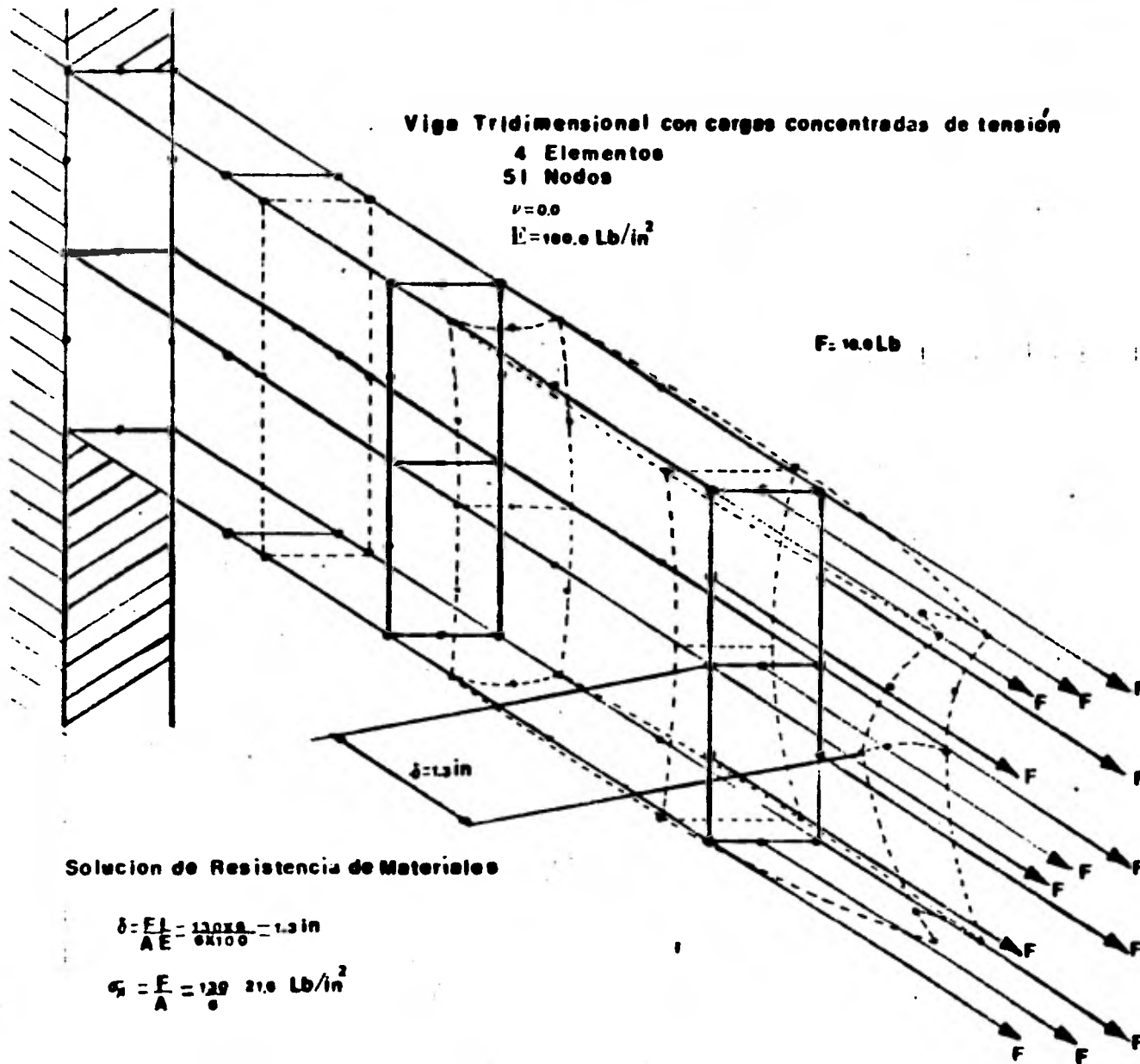


Fig.5.16

Viga tridimensional soportando su propio peso.

4 Elementos
51 Nodos

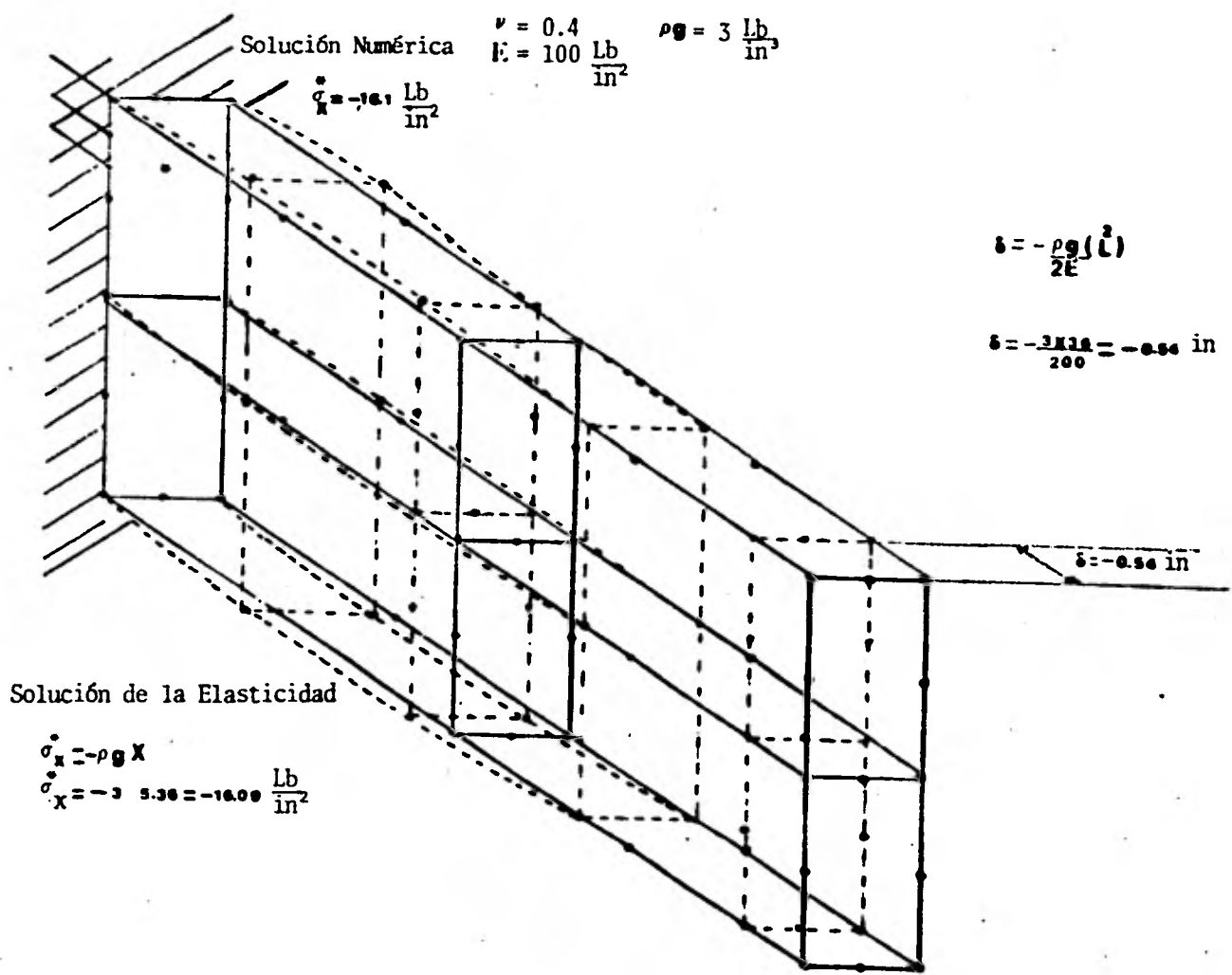
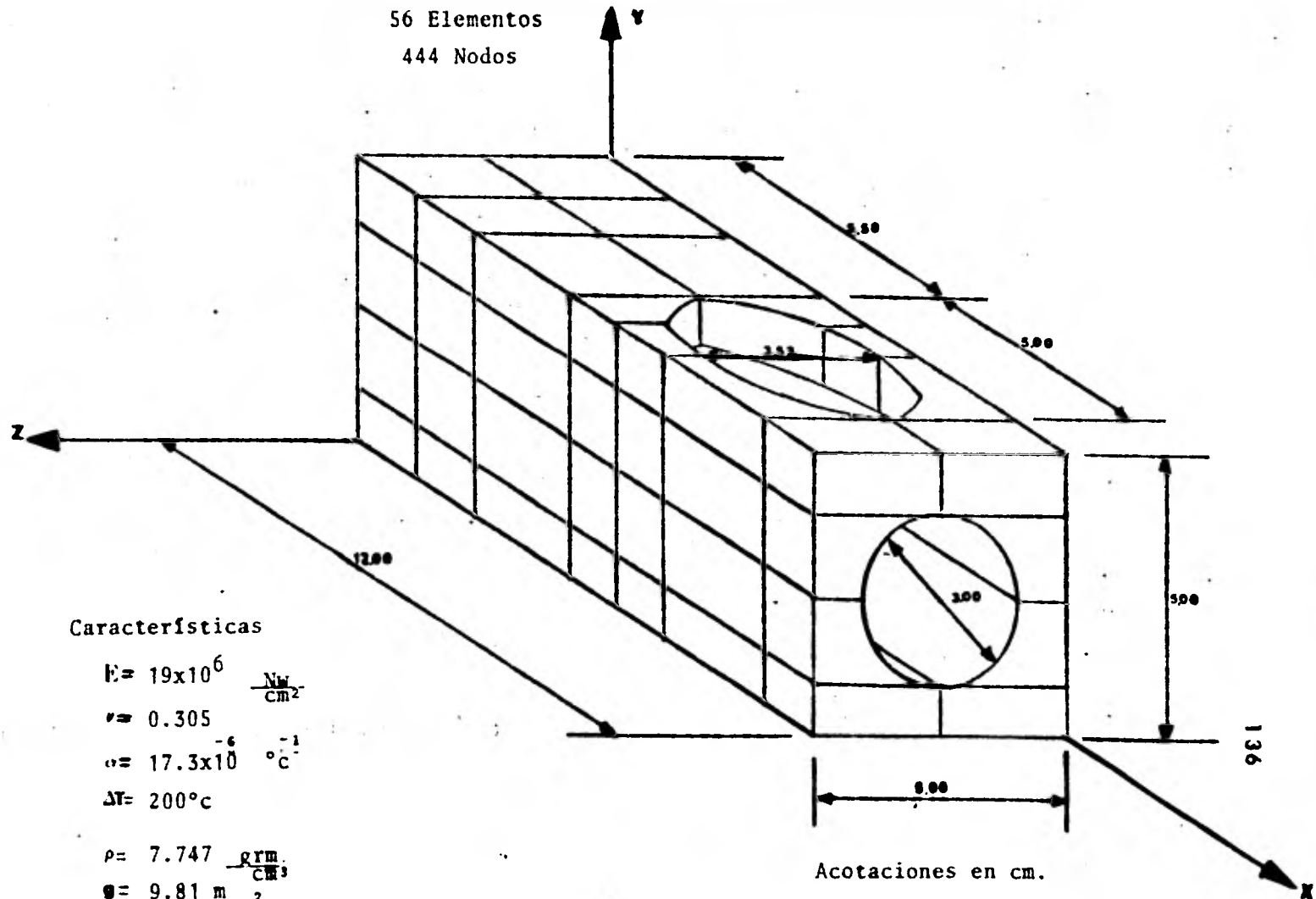


Fig.5.17

Válvula "Y" para Control de Flujo
Material Acero Inoxidable 304

56 Elementos
444 Nodos



Características

$$E = 19 \times 10^6 \frac{\text{Nw}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu = 0.305$$

$$\alpha = 17.3 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\Delta T = 200^\circ\text{C}$$

$$\rho = 7.747 \frac{\text{grm}}{\text{cm}^3}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

$$Y_p = 4.82 \times 10^4 \frac{\text{Nw}_2}{\text{cm}}$$

Fig.5.18

Deformaciones de la Válvula "Y" Para Control de Flujo

28 Elementos

254 Nodos

Escala del cuerpo = 1.75 : 1

Escala de las deformaciones 210 : 1

Vista Superior

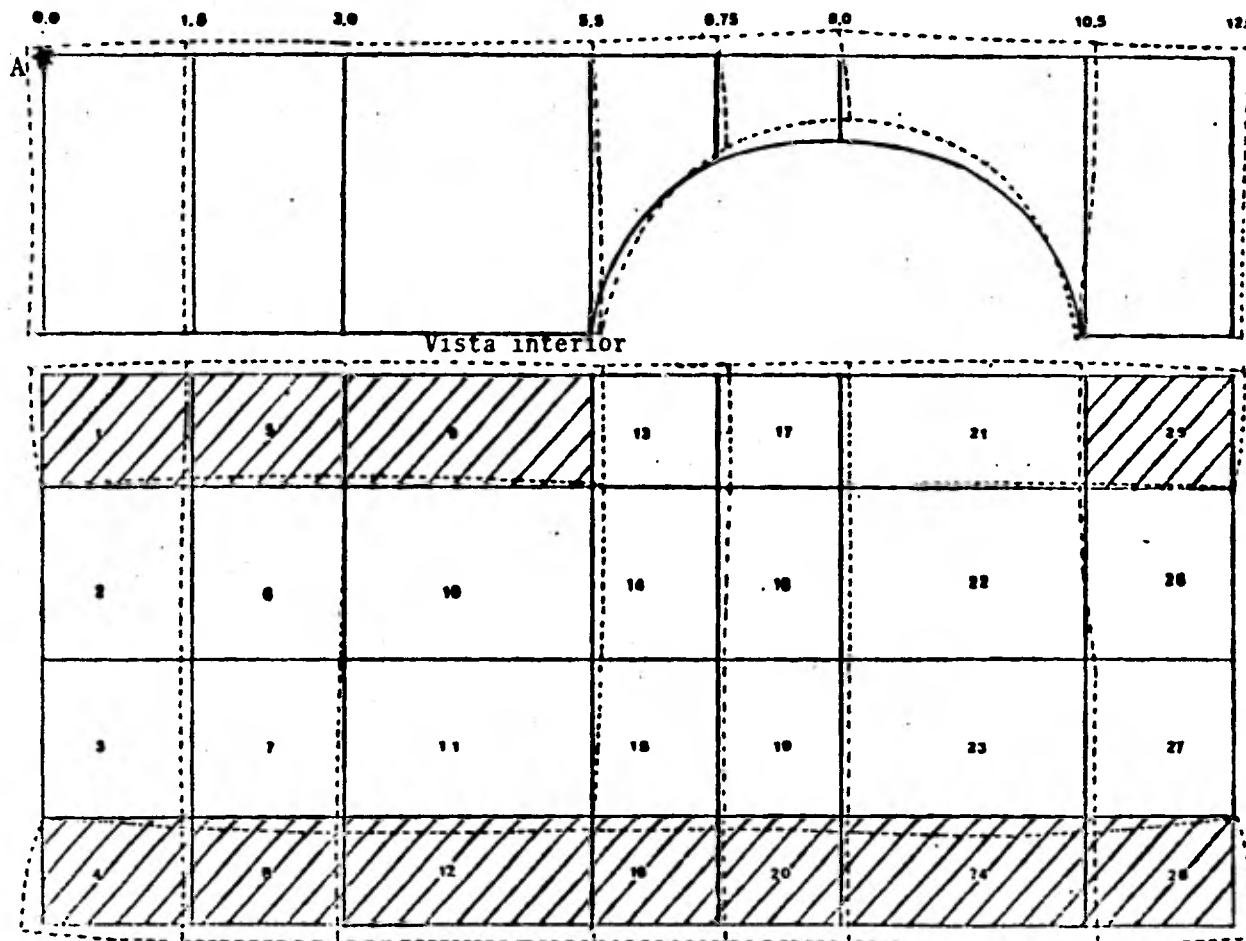


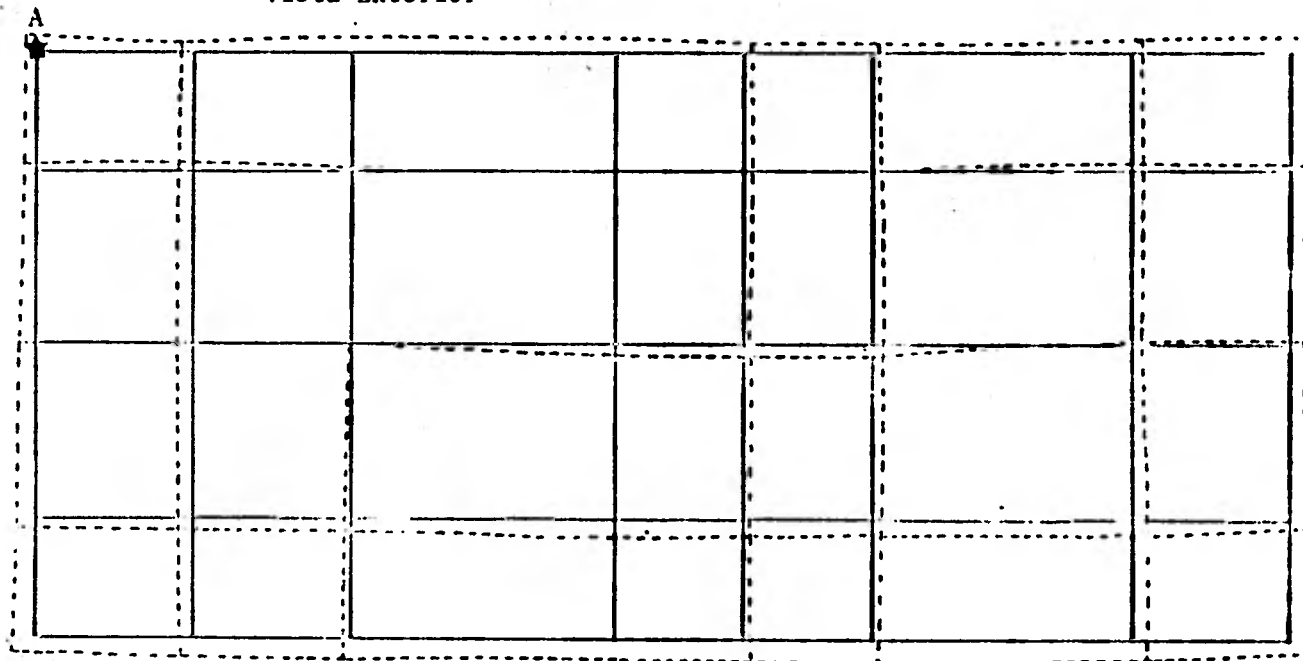
Fig.5.19

Deformaciones de la válvula "Y" para control de flujo

28 Elementos

254 Nodos

Vista Exterior



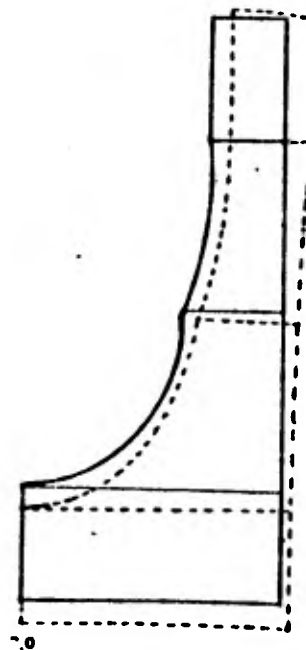
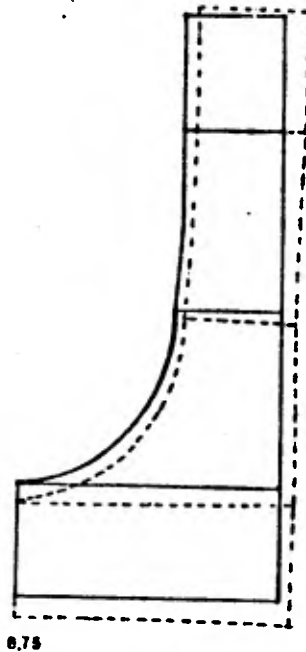
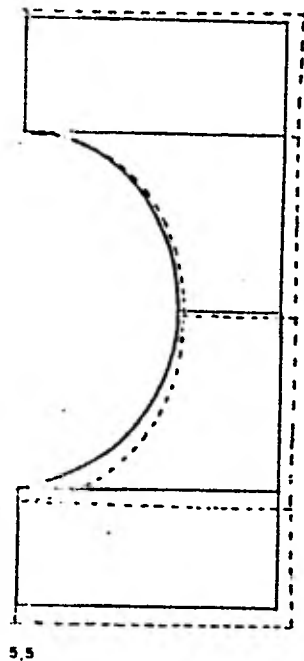
Escala del cuerpo = 1.75 : 1

Escala de las deformaciones = 210 : 1

Fig.5.20

Deformaciones provocadas en la válvula "Y" para control de Flujo

Vista de los planos de la Elipse



Esc = 1.75 ; 1

Escala de las deformaciones = 210 ; 1

Fig.5.21

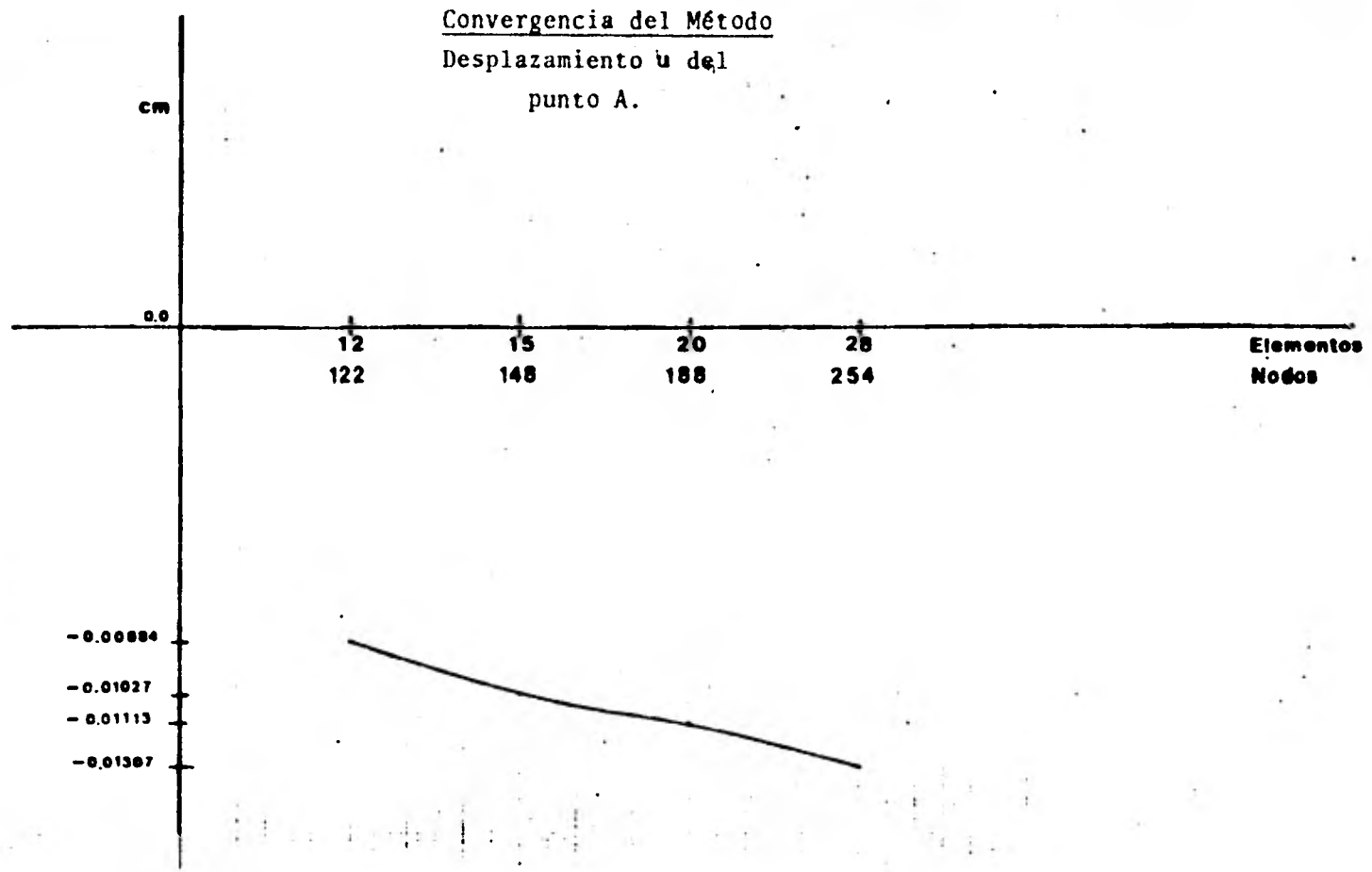
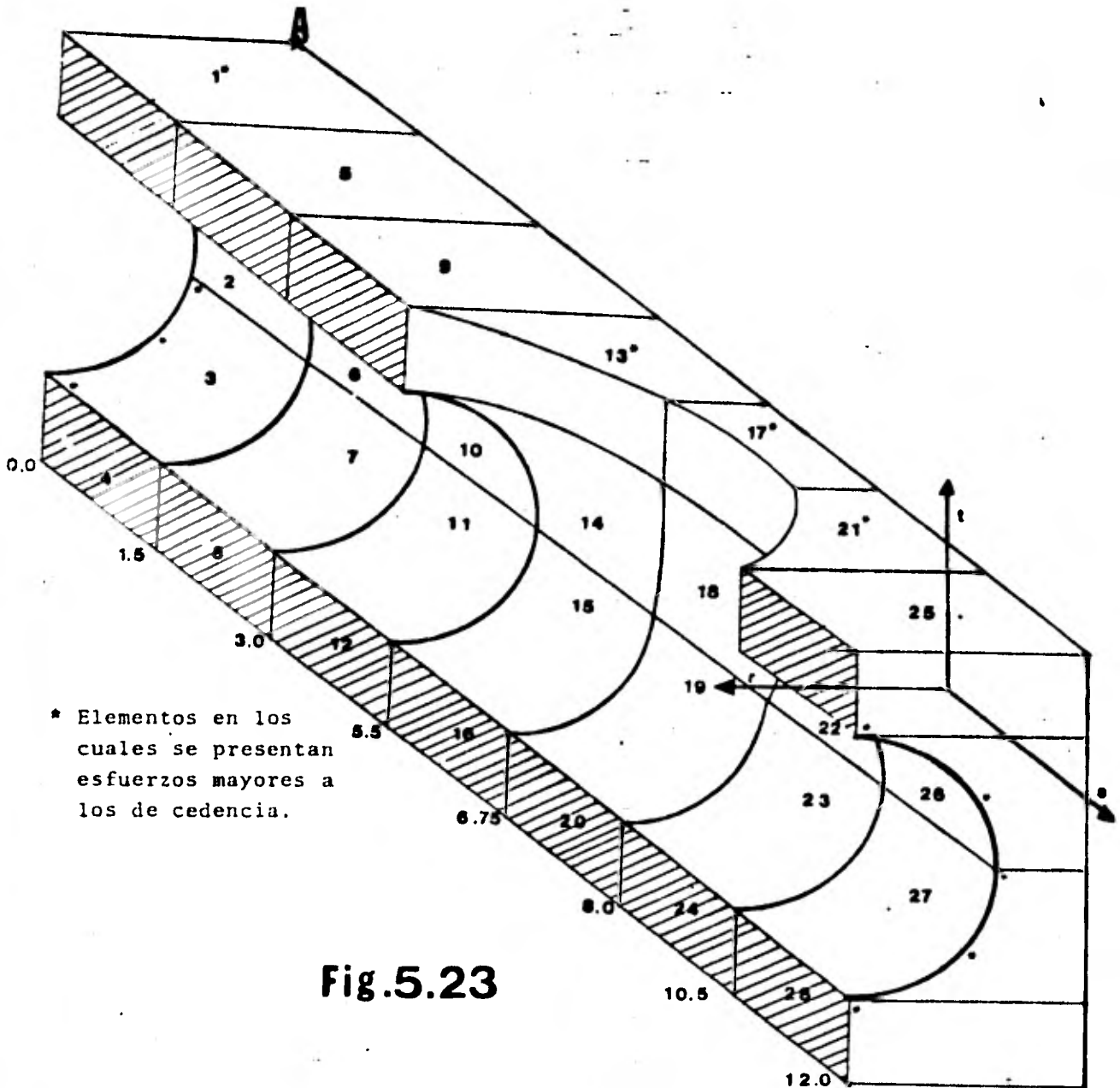


Fig.5.22

Válvula "Y" para control de flujo
 28 elementos
 254 Nodos



* Elementos en los
 cuales se presentan
 esfuerzos mayores a
 los de cedencia.

Fig.5.23

PROGRAMA ELINTEST

ESTE PROGRAMA RESUELVE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTADICO DE LA TEORIA DE LA TERMOELASTICIDAD EN DOS Y TRES DIMENSIONES

EL METODO NUMERICO UTILIZADO ES LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO CONSIDERANDO ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS CON 8 PUNTOS NODALES PARA EL CASO BIDIMENSIONAL Y 20 PUNTOS NODALES PARA EL CASO TRIDIMENSIONAL.

LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN ESTE PROGRAMA SON LOS DESPLAZAMIENTOS DE CADA PUNTO NODAL Y LOS ESFUERZOS INDUCIDOS POR DISTINTAS CONDICIONES DE CARGA EN EL INTERIOR DE CADA ELEMENTO.

LAS CONDICIONES DE CARGA QUE CONSIDERA EL PROGRAMA SON LAS SIGUIENTES: CARGA DE PRESION EN LA FRONTERA DEL ELEMENTO, FUERZAS MASICAS, CARGAS INDUCIDAS POR DILATACION TERMICA Y CARGAS CONCENTRADAS EN LOS PUNTOS NODALES.

DATOS DE ENTRADA

PRIMERA TARJETA: NUMPN, NUMGE, NUMCC, INOL, JOS (515)

NUMPN=NUMERO DE PUNTOS NODALES
NUMGE=NUMERO DE GRUPOS DE ELEMENTOS
NUMCC=NUMERO DE CASOS DE CARGA
INOL=INDICADOR

EQ.0 LEE E IMPRIME DATOS UNICAMENTE

EQ.1 EJECUTA EL PROGRAMA

JOS=INDICADOR

EQ.1 RESUELVE EL PROBLEMA EN EL PLANO

EQ.2 RESUELVE EL PROBLEMA TRIDIMENSIONAL

LA CANTIDAD DE TARJETAS SIGUIENTES DEPENDE DEL NUMERO DE PUNTOS NODALES.

TARJETAS: ID, X, Y, Z (415, 3F10.4)

ID=ARREGLO QUE ALMACENA LOS GRADOS DE LIBERTAD DE CADA NODO

EQ.0=EXISTE GRADO DE LIBERTAD

EQ.1=NO EXISTE GRADO DE LIBERTAD

X=ARREGLO QUE ALMACENA LA ABCISA DE CADA NODO

Y=ARREGLO QUE ALMACENA LA ORDENADA DE CADA NODO

Z=ARREGLO QUE ALMACENA LA COTA DE CADA NODO

TARJETA: LL, NUMCT (215)

LL=INDICA EL ORDEN DE LOS CASOS DE CARGA CONSIDERADOS

NUMCT=NUMERO TOTAL DE CARGAS CONCENTRADAS EN LOS NODOS

TARJETA: NOD, IDARN, FLOAD (215, F10.0)

NOD=ARREGLO QUE ALMACENA EL NODO EN EL CUAL SE APLICA LA CARGA

IDARN=ARREGLO QUE ALMACENA LA DIRECCION DE LA CARGA

EQ.1=LA CARGA ACTUA EN LA DIRECCION X

EQ.2=LA CARGA ACTUA EN LA DIRECCION Y

EQ.3=LA CARGA ACTUA EN LA DIRECCION Z

FLOAD=ARREGLO QUE ALMACENA LA MAGNITUD DE LA CARGA

SI EL NUMCT, EQ. 0 LAS TARJETAS ANTERIORES SE EXCLUYEN CONTINUANDO
CON LAS TARJETAS SIGUIENTES:

TARJETA: NEEG, NDCPM (215)
NEEG=NUMERO DE ELEMENTOS ESPECIFICOS DEL GRUPO
NDCPM=NUMERO DE DISTINTOS CASOS DE PROPIEDADES MECANICAS

TARJETA: INCDE, NNPCE (215) IF(JOS, EQ. 2) SOLO NNPCE (15)
NCDE=NUMERO DE CASOS DISTINTOS DE ESPESOR
NNPCE=NUMERO DE NODOS PARA CADA ELEMENTO
EQ. 0=CASO BIDIMENSIONAL
EQ. 20=CASO TRIDIMENSIONAL

TARJETA: E, PO (E15.0, F10.0)
E=MODULO DE YOUNG
PO=MODULO DE POISSON

TARJETA: THIC, NECET (F10.0, I5)
THIC=ESPESOR DEL ELEMENTO
NECET=NUMERO DE ELEMENTOS CON ESTE ESPESOR (IF, JOS, EQ. 2) TARJETA
EXCLUIDA

TARJETA: NECEPM (15)
NECEPM=NUMERO DE ELEMENTOS CON ESTAS PROPIEDADES MECANICAS
IF(JOS, EQ. 1) TARJETA EXCLUIDA

TARJETA: ITYPE, NINT (215) IF(JOS, EQ. 2) SOLO NINT (15)
ITYPE=INDICADOR
EQ. 1=DEFORMACION EN EL PLANO
EQ. 2=ESFUERZOS EN EL PLANO
NINT=ORDEN DE INTEGRACION VARIANDO DE 1 A 4

TARJETAS: XG (4F10.0)
XG=ARREGLO QUE ALMACENA LOS PUNTOS MUESTRA DE GAUSS-LEGENDRE

TARJETAS: WGT (4F10.0)
WGT=ARREGLO QUE ALMACENA LOS FACTORES DE PESO DE GAUSS-LEGENDRE

TARJETA: KIM, NODA IF(JOS, EQ. 1) (9I5), IF(JOS, EQ. 2) (21I3)
KIM=NUMERO DE ELEMENTO
NODA=ARREGLO QUE ALMACENA LOS PUNTOS NODALES DE CADA ELEMENTO

TARJETA: CU (2F10.0), IF(JOS, EQ. 2) (3F10.0)
CU=ARREGLO QUE ALMACENA LAS FUERZAS DE CUERPO DE CADA ELEMENTO

TARJETA: IEQ (3F10.0), IF(JOS, EQ. 2) (6F10.0)
EQ=ARREGLO QUE ALMACENA LAS DEFORMACIONES TERMICAS INICIALES

TARJETA: INCDI (15)
NCDI=NUMERO DE CARGAS DE PRESION ACTUANDO EN CADA ELEMENTO

TARJETA: TR, TS, T (2F10.0, 2E15.0)
TR=INDICADOR
EQ. 0=LA CARGA NO ACTUA SOBRE LA SUPERFICIE R=1
EQ. 1 O -1=LA CARGA ACTUA SOBRE LA SUPERFICIE R=1 O R=-1
TS=INDICADOR CON LAS MISMAS VARIABLES ASIGNADAS A TR.
T =ARREGLO QUE ALMACENA LAS CARGAS DE PRESION

IF(JOS, EQ. 2) LAS TARJETAS ANTERIORES SE EXCLUYEN INTRODUCIENDO

EN SU LUGAR LAS SIGUIENTES:

144

TARJETA:TR,TS,TT,T (JFS,0,JEIS,0)
SIENDO TR,TS,TT INDICADORES Y T ARREGLO SEGUN LO ANTERIOR

RESULTADOS

LOS RESULTADOS SON EXPLICITAMENTE INDICADOS, OBTENIENDOSE ENTRE
OTRAS COSAS, EL VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS DE CADA PUNTO NODAL,
EL TENSOR DE LOS ESFUERZOS EN EL INTERIOR DE CADA ELEMENTO Y
LOS ESFUERZOS PRINCIPALES.

PROGRAMA DESARROLLADO POR RUBEN AVILA RODRIGUEZ DEPARTAMENTO
DE METALES LIQUIDOS DEL INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES
NUCLEARES

TARJETAS DEL PROGRAMA

COMMON/AA/A(5000)
COMMON/IO/IAL, IAE
COMMON/N/N1, N12, N26, N31, N32, N33
COMMON/IN/IND
COMMON/K05/INOL
COMMON/J10/J08
IAL=2
IAE=3
READ(IAL,1000) NUMP, NUMGE, NUMCC, INOL, JOS
IF(NUMP, EQ, 0) STOP
WRITE(IAE, 2000) NUMP, NUMGE, NUMCC, INOL, JOS
LECTURA DE DATOS PARA LOS PUNTOS NODALES
N1=1
N2=N1+3*NUMP
N3=N2+NUMP
N4=N3+NUMP
N5=N4+NUMP
CALL INPUT(A(N1), A(N2), A(N3), A(N4), NUMP, NEG)
CALCULA Y ALMACENA LOS VECTORES DE CARGA
N6=N5+NEG
DO 300 L=1, NUMCC
READ(IAL, 1010) LL, NUMCT
WRITE(IAE, 2010) LL, NUMCT
IF(LL, EQ, L) GO TO 310
WRITE(IAE, 2020)
STOP
310 CONTINUE
N7=N6+NUMCT
N8=N7+NUMCT
N9=N8+NUMCT
N10=N9+NEG
N11=N10+NEG
CALL LOADS(A(N5), A(N6), A(N7), A(N8), A(N1), NUMCT, NEG)
LECTURA Y ALMACENAMIENTO DE DATOS DE ELEMENTOS
CALL ELCAL(A(N1), A(N2), A(N3), A(N4), A(N9), A(N10),
INUMP, NEG, NUMGE, A(N5))

```

300 CONTINUE
1000 FORMAT(5I5)
2000 FORMAT(10X,7HNUMBN= ,I5,5X,7HNUMGB= ,I5,
15X,7HNUMCC= ,I5,5X,6HINOL= ,I5,5X,5HJOB= ,I5)
1010 FORMAT(2I5)
2010 FORMAT(///4X,22HNUMERO DE CASO CARGA= ,I5//
15X,31HNUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS= ,I5)
2020 FORMAT(1X,46H*** ERROR LOS CASOS DE CARGA NO ESTAN EN ORDEN)
CALL EXIT
END
SUBROUTINE INPUT(ID,X,Y,Z,NUMPN,NEQ)
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,NUMPN)
COMMON/IO/IAL,IAE
10 READ(IAL,1000) N,(ID(I,N),I=1,3),X(N),Y(N),Z(N)
WRITE(IAE,2030) N,(ID(I,N),I=1,3),X(N),Y(N),Z(N)
IF(N,NE,NUMPN) GO TO 10
C
NUMRO DE INCUGNITAS
NEQ=0
DO 100 N=1,NUMPN
DO 100 I=1,3
IF(ID(I,N)) 110,120,110
120 NEQ=NEQ+1
ID(I,N)=NEQ
GO TO 100
110 ID(I,N)=0
100 CONTINUE
C
ESCRIBE EL NUMERO DE ECUACIONES
WRITE(IAE,2040) (N,(ID(I,N),I=1,3),N=1,NUMPN)
RETURN
1000 FORMAT(4I5,3F10.4)
2030 FORMAT(15,6X,3I5,6X,3F13.3)
2040 FORMAT(//21H NUMERO DE ECUACIONES//,4X,4HNODO,9X,
11HGRADOS DE LIBERTAD/3X,6HNUMERO//,
25X,1HN,13X,1HX,4X,1HY,4X,1HZ/(1X,I5,9X,3I5))
END
SUBROUTINE LOADS(R,NOD,1DARN,FLOAD,1D,NUMCT,NEQ)
DIMENSION R(NEQ),NOD(1),1DARN(1),FLOAD(1)
DIMENSION 1D(3,1)
COMMON/IO/IAL,IAE
IF(NUMCT.EQ.0) RETURN
WRITE(IAE,2000)
READ(IAL,1000) (NOD(I),1DARN(I),FLOAD(I),I=1,NUMCT)
WRITE(IAE,2010) (NOD(I),1DARN(I),FLOAD(I),I=1,NUMCT)
DO 210 I=1,NEQ
210 R(I)=0.
DO 220 L=1,NUMCT
LN=NOD(L)
LI=1DARN(L)
II=1D(LI,LN)
WRITE(IAE,2040) II
IF(II) 220,220,240
240 R(II)=R(II)+FLOAD(L)
WRITE(IAE,2050) R(II)
220 CONTINUE
WRITE(IAE,2020)
WRITE(IAE,2030) (R(I),I=1,NEQ)
2000 FORMAT(///4X,30HNODO :IRECCION CARG/
13X,6HNUMERO,19X,8HMAGNITUD)
1000 FORMAT(2I5,F10.3)
2010 FORMAT(1H0,16,9X,14,7X,E12.5)

```



```

2020 FORMAT(////4X,3,INVECTOR R DE CARGO CONCENTRADAS)
2030 FORMAT(4X,F10.3)
2040 FORMAT(////4X,12MEL VALOR I10 ,I5)
2050 FORMAT(////4X,12MEL VALOR N10 ,F10.3)
RETURN
END
SUBROUTINE PRIME(A,NR,NC,IFO)
DIMENSION A(NR,NC)
COMMON/IO/IAL,IAE
NE=10
NI=18
IF(IFO.GT.0) GO TO 300
C
REALES
DO 200 L=1,NC,NE
N=MINO(L+NE-1,NC)
WRITE(IAE,6000) (K,K=L,M)
DO 200 I=1,NR
WRITE (IAE,6010) I,(A(I,J),J=L,M)
200 CONTINUE
RETURN
300 CONTINUE
C
ENTEROS
DO 400 L=1,NC,NI
N=MINO(L+NI-1,NC)
WRITE(IAE,6020) (K,K=L,M)
DO 400 I=1,NR
WRITE(IAE,6030) I,(A(I,J),J=L,M)
400 CONTINUE
RETURN
6000 FORMAT(/8X,I3,9(9X,I3)/)
6010 FORMAT( 1X,I3,10(1PE12.4))
6020 FORMAT(/8X,I3,17(4X,I3)/)
6030 FORMAT ( 1X,I3,18I7)
END
SUBROUTINE ELCAL(ID,X,Y,Z,NUMP,N,NEE,NDCPM,NEQ,NUMGE,R)
DIMENSION ID(3,NUMPN),X(1),Y(1),Z(1)
DIMENSION MHT(NEQ)
DIMENSION MD(NEQ)
DIMENSION R(NEQ)
COMMON/AA/A(50000)
COMMON/IO/IAL,IAE
COMMON/M/N11,N12,N26,N31,N32,N33
COMMON/IN/IND
DO 510 I=1,NEQ
510 MHT(I)=0
WRITE(IAE,2000)
DO 100 N=1,NUMGE
READ(IAL,1000) NEEG,NDCPM
WRITE(IAE,2010) NEEG,NDCPM
IND=0
CALL ELEMENT(ID,X,Y,Z,NUMP,N,NEEG,NDCPM,NEQ,MHT,R,MD)
100 CONTINUE
IND=1
CALL PRIME(R,NEQ,1,0)
CALL ELEMENT(ID,X,Y,Z,NUMP,N,NEEG,NDCPM,NEQ,MHT,R,MD)
RETURN
1000 FORMAT(2I5)
2000 FORMAT(1H1,34GRUPOS DE DATOS PARA LOS ELEMENTOS
1///)
2010 FORMAT(////4X,25NUM DE ELEMENT DEL GRUPO ,I5//)

```

```

END
SUBROUTINE ELEMENT(ID,X,Y,Z,NUMPN,N,NEEG,NDCPM,NEQ,MHT,R,MD)
C LLAMA LA SUBROUTINA ADECUADA PARA CADA ELEMENTO
DIMENSION ID(3,NUMPN),X(1),Y(1),Z(1)
DIMENSION MD(NEQ)
DIMENSION MHT(NEQ)
DIMENSION R(NEQ)
COMMON/IO/LAL,IAE
COMMON/JIB/JOS
COMMON/IN/IND
GO TO (1,2),JOS
1 CALL QUADS(ID,X,Y,Z,NUMPN,NEEG,NDCPM,N,NEQ,MHT,R,MD)
RETURN
2 CALL CUABS(ID,X,Y,Z,NUMPN,NEEG,NDCPM,N,NEQ,MHT,R,MD)
RETURN
END
SUBROUTINE SUMAT(S,ND,SN,NEQ,LM,MHT,MD,LM)
DIMENSION S(ND,ND),SN(LM),MHT(1),MD(1),LM(1)
COMMON/IO/LAL,IAE
COMMON/AA/A(50000)
DO 100 I=1,ND
K=LM(1)
IF(K) 100,100,110
110 DO 500 J=1,ND
M=LM(J)
IF(M) 500,500,600
600 IF(K.GT.M) GO TO 500
NIO=M-K
LP=MD(M)-NIO
SN(LP)=SN(LP)+S(I,J)
500 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE DIR(MD,MHT,NEQ)
DIMENSION MD(1),MHT(1)
DO 20 I=1,NEQ
20 MD(I)=0
MD(1)=1
LN=NEQ-1
DO 10 I=1,LN
10 MD(I+1)=MD(I)+MHT(I+1)+1
RETURN
END
SUBROUTINE ALTUC(MHT,MD,LM,NEQ)
DIMENSION LM(1),MHT(1)
LS=10000
DO 100 I=1,ND
IF(LM(I)) 110,100,110
110 IF(LM(I)-LS) 120,100,100
120 LS=LM(I)
100 CONTINUE
DO 200 I=1,ND
II=LM(I)
IF(II.EQ.0) GO TO 200
ME=II-LS
IF(ME.GT.MHT(II)) MHT(II)=ME
200 CONTINUE
RETURN

```

```

      END
      SUBROUTINE LEMACU(N,NTDUA,A,MD,R)
      DIMENSION A(NTDUA),MD(N),R(N)
      COMMON/IO/IAL,IAE
      WRITE(IAE,1000) N,NTDUA
      CALL TGCSI(A,MD,N)
      CALL SGCSI(A,R,MD,N)
      RETURN
1000  FORMAT(////4X,5HNEUM ,15,5X,5HLINE ,15)
      END
      SUBROUTINE TGCSI(A,MD,N)
      DIMENSION A(1),MD(N)
      C      TRIANGULACION GAUSS-CROUT
      C      EN SILUETA EFICIENTE
      C      CONSIDERANDO SOLO LOS TERMINOS DIFERENTES DE CERO
      C      QUE SE PRESENTAN EN UNA MATRIZ BANDAADA SIMETRICA
      IF(MD(2).EQ.2) GO TO 150
      YY=A(2)/A(1)
      A(3)=A(3)-A(2)*YY
      A(2)=YY
150  CONTINUE
      IF(N.EQ.2) RETURN
      DO 600 J=3,N
      JM=J-1
      JJ=MD(J)
      JJM=JJ-J
      JH=JJ-MD(JM)-1
      IF(JH.EQ.0) GO TO 600
      MJ=J-JH
      IL=MJ+1
      IF(JM.LT.IL) GO TO 350
      C      PRIMER PASO CALCULO DE LAS G
      DO 300 I=IL,JM
      IM=I-1
      II=MD(I)
      IIM=II-I
      IH=II-MD(IM)-1
      IF(IH.EQ.0) GO TO 300
      MI=I-IH
      KL=MAX0(MI,MJ)
      XX=0.
      DO 200 K=KL,IM
      KI=K+IIM
      KJ=K+JJM
      XX=XX+A(KI)*A(KJ)
200  CONTINUE
      IJ=I+JJM
      A(IJ)=A(IJ)-XX
300  CONTINUE
350  CONTINUE
      C      SEGUNDO PASO CALCULO DE U
      XX=0.
      DO 400 I=MJ,JM
      II=MD(I)
      IJ=I+JJM
      YY=A(IJ)/A(II)
      XX=XX+YY*A(IJ)
      A(IJ)=YY
400  CONTINUE
      A(JJ)=A(JJ)-XX

```

```

000 CONTINUE
    RETURN
    END
    SUBROUTINE SGCBI(A,R,ND,N)
    DIMENSION A(1),R(N),MU(N)
C   SUSTITUCION GAUSS-CROUT
C   HACIA ADELANTE POR COLUMNAS
C   EN SILUETA EFICIENTE
C   MATRICES SIMETRICAS
    IF(N.GT.1) GO TO 150
    R(1)=R(1)/A(1)
    RETURN
150 CONTINUE
    DO 300 J=2,N
    JM=J-1
    XI=R(JM)
    DO 200 K=J,N
    KM=K-1
    KK=MD(K)
    KH=KK-MD(KM)-1
    MK=K-KH
    IF(JM=MK) 200,160,160
160 KI=MD(K)-K+JM
    R(K)=R(K)-A(KI)*XI
200 CONTINUE
300 CONTINUE
C   SUSTITUCION GAUSS-CROUT
C   HACIA ATRAS POR COLUMNA EN SILUETA EFICIENTE
    DO 500 I=1,N
    MM=MD(I)
    R(I)=R(I)/A(MM)
500 CONTINUE
    NP=N+1
    NM=N-1
    DO 700 M=1,NM
    I=NP-M
    XI=R(I)
    KS=I-1
    MM=MD(I)
    MH=MM-MD(KS)-1
    MS=I-MH
    IF(MH.EQ.0) GO TO 700
    DO 350 K=MS,KS
    KI=MD(I)-I+K
    R(K)=R(K)-A(KI)*XI
350 CONTINUE
700 CONTINUE
    RETURN
    END
    SUBROUTINE DUMAT(RL,RU,NEQ,LM,ND)
    DIMENSION RL(ND),RU(NEQ),LM(1)
    COMMON/IO/IAL,IAE
    COMMON/AA/A(50000)
    DO 20 I=1,ND
    KI=LM(I)
    IF(KI.EQ.0) GO TO 20
    RU(KI)=RU(KI)+RL(I)
20 CONTINUE
    RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE STAE(ST,B,LM,D,IST,DB,NEQ,R,CU,EU,T, 150
INI,NIM,NO,NOM,ND)
DIMENSION ST(IST,ND),D(IST,ND),LM(ND),DB(IST),D(IST,IST)
DIMENSION H(NEQ)
DIMENSION CU(1),EU(1),T(1)
COMMON/N/N11,N12,N26,N31,N32,N33
COMMON/AA/A(5000)
COMMON/IO/IAL,IAE
DO 50 I=1,IST
50 DO 50 J=1,ND
ST(I,J)=0.0
DO 70 J=1,ND
DO 40 K=1,IST
40 DB(K)=0.
DO 40 L=1,IST
DB(K)=DB(K)+D(K,L)*B(L,J)
80 ST(K,J)=DB(K)
70 CONTINUE
CONTINUE
N33=N32+IST
N34=N33+ND
N35=N34+3
CALL STRESS(A(N32),LM,ST,IST,NEQ,A(N33),R,CU,EU,T,
INI,NIM,NO,NOM,D,DB,ND,A(N34))
RETURN
END
SUBROUTINE STRESS(ESF,LM,ST,IST,NEQ,DES,R,CU,EU,T,
INI,NIM,NO,NOM,D,DB,ND,PRINC)
DIMENSION ESF(IST),LM(ND),ST(IST,ND),DES(ND)
DIMENSION PRINC(3)
DIMENSION R(NEQ)
DIMENSION CU(1),EU(1),T(1)
DIMENSION D(IST,IST),DB(IST)
COMMON/IO/IAL,IAE
COMMON/AA/A(5000)
DO 50 J=1,ND
30 K=LM(J)
50 IF(K.EQ.0) GO TO 30
DES(J)=R(K)
GO TO 50
DES(J)=0.
CONTINUE
DO 40 K=1,IST
40 ESF(K)=0.
DO 40 L=1,ND
80 ESF(K)=ESF(K)+ST(K,L)*DES(L)
80 CONTINUE
DO 15 K=1,IST
15 LT=0
DB(K)=0.0
DO 15 L=NO,NOM
LT=LT+1
15 DB(K)=DB(K)+D(K,LT)*EU(L)
DO 31 LK=1,IST
31 ESF(LK)=ESF(LK)+DB(LK)
CALL PRIME(ESF,IST,1,0)
PIN=ESF(1)+ESF(2)+ESF(3)
TIN=ESF(4)*2
TUN=ESF(5)*2
TUN=ESF(6)*2

```

```

SAN=ESF(1)*ESF(2)
SON=ESF(2)*ESF(3)
SUN=ESF(3)*ESF(1)
CIN=TIN+TON+TUN-SAN-SON-SUN
ANI=ESF(1)*ESF(2)*ESF(3)
ANA=2.*ESF(4)*ESF(5)*ESF(6)
ANE=ESF(1)*TON
ANU=ESF(2)*TUN
ANOT=ESF(3)*TIN
ZIN=ANI+ANA-ANE-ANU-ANOT
PIN=PIN
CIN=CIN
ZIN=ZIN
Q=(3.*CIN-(PIN**2))/9.
RP=9.*PIN*CIN-(27.*ZIN)-(2.*(PIN**3))
RA=RP/54.
DI=Q**3+(RA**2)
WRITE(IAE,2002) DI
IF(DI.GT.0) RETURN
RAI=SQRT((RA**2)-DI)
RUS=RA/RAI
THETA=ACOS(RUS)
TIS=THETA/3.
TRIS=RAI**0.33333
TROS=COS(TIS)
TRUS=TRIS*TROS
PRINC(1)=2.*TRUS-(PIN/3.)
THAS=SIN(TIS)
PRINC(2)=-TRUS-(PIN/3.)-(SQRT(3.)*TRIS*TRAS)
PRINC(3)=-TRUS-(PIN/3.)+(SQRT(3.)*TRIS*TRAS)
CALL PRIME(PRINC,3,1,0)
BAL=PRINC(1)
BEL=PRINC(2)
BIL=PRINC(3)
TAM=AMAX1(BAL,BEL,BIL)
TAMI=AMIN1(BAL,BEL,BIL)
CURT=(TAM-TAMI)/2.
WRITE(IAE,2000) CURT
RETURN
2000 FORMAT(///4X,17HCORTANTE MAXIMO= ,E15.5)
2002 FORMAT(E15.5)
END
SUBROUTINE CUABS(ID,X,Y,Z,NUMPN,NEEG,NDCPM,N,NEQ,MHT,R,MD)
DIMENSION ID(3,NUMPN),X(1),Y(1),Z(1)
DIMENSION MD(NEQ)
DIMENSION MHT(NEQ)
DIMENSION R(NEQ)
COMMON/IO/IAL,IAE
COMMON/AA/A(50000)
COMMON/N/N11,N12,N26,N31,N32,N33
COMMON/IN/IND
IF(IND.GT.0) GO TO 3001
READ(IAL,2010) NNPCE
WRITE(IAE,2020) NNPCE
N12=N11+NEEG*NNPCE
3001 CALL DEN1(ID,X,Y,Z,A(N11),NEQ,MHT,NUMPN,NNPCE,NEEG,NDCPM,N,R,MD)
RETURN
1000 FORMAT(15)
2000 FORMAT(///4X,30HNUM.DE CASOS DIST.DE ESPESUR= ,15)
2010 FORMAT(15)

```

END

```

SUBROUTINE DENI(ID,X,Y,Z,NODA,NEQ,MHT,NUMPN,NNPCE,NEEG
1,NDCPM,N,R,MD)

```

```

DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,1),NODA(1)

```

```

DIMENSION MD(NEQ)

```

```

DIMENSION MHT(NEQ)

```

```

DIMENSION R(NEQ)

```

```

COMMON/IO/IAL,IAE

```

```

COMMON/AA/A(50000)

```

```

COMMON/N/N11,N12,N26,N31,N32,N33

```

```

COMMON/IN/IND

```

```

C LECTURA DE DATOS DE LOS ELEMENTOS

```

```

IF(IND.GT.0) GO TO 3001

```

```

300 WRITE(IAE,2000) N,NEEG

```

```

DO 10 I=1,NDCPM

```

```

READ(IAL,1000) E,PO

```

```

WRITE(IAE,2030) E,PO

```

```

READ(IAL,2060) NECEPM

```

```

WRITE(IAE,2070) NECEPM

```

```

N13=N12+36

```

```

N14=N13+360

```

```

N15=N14+3600

```

```

N16=N15+16

```

```

N17=N16+16

```

```

N18=N17+6

```

```

N19=N18+60

```

```

N20=N19+60

```

```

N21=N20+60

```

```

N22=N21+180

```

```

N23=N22+60

```

```

N24=N23+NEEG*3

```

```

N25=N24+NEEG*6

```

```

N26=N25+NEEG*3

```

```

READ(IAL,2091) NINT

```

```

WRITE(IAE,2092) NINT

```

```

3001 CALL CBS(ID,X,Y,Z,E,PO,NODA,NUMPN,NNPCE,NEQ,MHT,

```

```

1,NEEG,NDCPM,N,NECEPM,L,NINT,A(N12),A(N13),

```

```

2A(N14),A(N15),A(N16),A(N17),A(N18),A(N19),A(N20),

```

```

3A(N21),A(N22),A(N23),A(N24),A(N25),R,MD)

```

```

10 CONTINUE

```

```

RETURN

```

```

1000 FORMAT(E15.0,F10.0)

```

```

2000 FORMAT(10X,3HN= ,I5,5X,6HNEEG= ,I5)

```

```

2030 FORMAT(10X,3HNE ,E15.5,5X,4HPO= ,F10.6)

```

```

2060 FORMAT(I5)

```

```

2070 FORMAT(//4X,39HNUM.DE ELEMENTOS CON PROPIED INDICAD.= ,I5)

```

```

2091 FORMAT(I5)

```

```

2092 FORMAT(///4X,6HNINT= ,I5)

```

END

```

SUBROUTINE CBS(ID,X,Y,Z,E,PO,NODA,NUMPN,NNPCE,NEQ,MHT,

```

```

1,NEEG,NDCPM,N,NECEPM,L,NINT,D,B,S,XG,

```

```

2NGT,DB,XX,LM,RB,RC,RL,CU,EU,T,RU,MD)

```

```

DIMENSION MD(NEQ)

```

```

DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,1),NODA(1),D(6,6),

```

```

1B(6,60),S(60,60),XG(4,4),

```

```

2NGT(4,4),DB(6),XX(3,20),LM(60)

```

```

DIMENSION MHT(NEQ)

```

```

DIMENSION RU(NEQ)

```

```

DIMENSION HB(60),HC(60,3),HL(60),CU(1),EO(1),T(1)

```

```

COMMON/IO/IAL, IAN
COMMON/AA/A(5000)
COMMON/N/N1, N12, N26, N31, N32, N33
COMMON/IN/IND
COMMON/KOS/INOL
NOK=1
NAM=NNPCE
N1=1
N12=3
N26=1
NOM=6
N1M=1
N2M=3
IF(IND.GT.0) GO TO 3002
C LA MATRIZ XG ALMACENA LOS PUNTOS MUESTRA DE
C GAUSS-LEGENDRE
DO 120 II=1,4
120 READ(IAL,1000),(XG(II,J),J=1,4)
CALL PRIME(XG,4,0)
C LA MATRIZ WGT ALMACENA LOS FACTORES DE PESO DE GAUSS-
C LEGENDRE
DO 130 IJI=1,4
130 READ(IAL,2000),(WGT(IJI,JA),JA=1,4)
CALL PRIME(WGT,4,0)
IF(INOL.EQ.0) GO TO 103
C OBTENCION DE LA LEY ESFUERZO DEFORMACION
DO 61 IM=1,6
DO 61 JK=1,6
61 D(IM,JK)=0.0
F=(1.+PO)*(1.-(2.*PO))
FS=E*(1.-PO)
FI=FS/F
FK=PO/(1.-PO)
FP=(1.-(2.*PO))/(2.*(1.-PO))
D(1,1)=FI
D(2,2)=FI
D(3,3)=FI
D(4,4)=FP*FI
D(5,5)=FP*FI
D(6,6)=FP*FI
D(1,2)=FK*FI
D(1,3)=FK*FI
D(2,1)=FK*FI
D(2,3)=FK*FI
D(3,1)=FK*FI
D(3,2)=FK*FI
CALL PRIME(D,6,6,0)
C CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDEZES DEL ELEMENTO
C CORRESPONDIENTE
103 DO 122 KUM=1,NECEPM
READ(IAL,2080) NIM,(NODA(II),II=NOK,NAM)
READ(IAL,8080) (CU(LI),LI=N1,NIM)
WRITE(IAE,8090) (CU(LI),LI=N1,NIM)
READ(IAL,8091) (EO(KL),KL=NO,NOM)
WRITE(IAE,8092) (EO(KL),KL=NO,NOM)
J=0
DO 41 K=NOK,NAM
LO=NODA(K)
DO 41 M=1,3
LID=ID(M,LO)

```



```

41      J=J+1
        LM(J)=LID
        CALL ALTUC(MHT,60,LM,NEU)
        NOK=NOK+NNPCE
        NAM=NAM+NNPCE
        NI=NI+3
        NIM=NIM+3
        NU=NU+6
        NOM=NOM+6
122     CONTINUE
        CALL DIR(MU,MHT,NEG)
        LIM=MD(NEG)
        WRITE(IAE,8010) LIM,NEU
        NOK=1
        NAM=NNPCE
        NI=1
        NIM=3
        NU=1
        NOM=6
3002    DO 107 KIM=1,NECEPM
        WRITE(IAE,8070) KIM,NECEPM
        IF(INOL,EU,0) GO TO 534
        DO 30 I=1,60
        DO 30 J=1,60
30      S(I,J)=0.0
        DO 12 LZ=1,60
12      RL(LZ)=0.0
534     J=0
        DO 51 K=NOK,NAM
        LU=NODA(K)
        DO 51 M=1,3
        LID=ID(M,LU)
        J=J+1
51     LM(J)=LID
C       ALMACENA EN LA MATRIZ XX LOS VALORES DE LAS
C       COORDENADAS PARA CADA NUDO
        KI=0
        DO 100 J=NOK,NAM
        NUN=NODA(J)
100     KI=KI+1
        XX(1,KI)=X(NUN)
        JL=0
        DO 101 K=NOK,NAM
        NUL=NODA(K)
101     JL=JL+1
        XX(2,JL)=Y(NUL)
        KIS=0
        DO 102 JA=NOK,NAM
        NUO=NODA(JA)
102     KIS=KIS+1
        XX(3,KIS)=Z(NUO)
        CALL PRIME(XX,3,20,0)
        NOK=NOK+NNPCE
        NAM=NAM+NNPCE
        IST=6
        IF(INUL,EU,0) GO TO 134
        IF(IND.GT.0) NINT=2
        DO 60 LX=1,NINT
        RI=XG(LX,NINT)
        DO 60 LY=1,NINT

```

```

SI=XG(LY,NINT)
  DO 80 LZ=1,NINT
    TI=XG(LZ,NINT)
C   EVALUACION DEL OPERADOS B Y DEL DETERMINANTE
C   DEL JACOBIANU DET.
    N27=N26+20
    N28=N27+60
    N29=N28+9
    N30=N29+9
    N31=N30+LIM
    INP=0
    CALL CTDN(ID,X,Y,Z,E,PU,NODA,NMPPN,NNPCE,NEQ,IST,RU,
1   INEG,NDCPM,N,NECEPM,L,NINT,D,B,S,XG,
2   WGT,DB,XX,LM,DET,RI,SI,TI,A(N26),A(N27),
3   A(N28),A(N29),CU,EQ,T,NI,NIM,NO,NOM,RC,INP,PDET)
    IF(INU.GT.0) GO TO 80
      WT=WGT(LX,NINT)*WGT(LY,NINT)*WGT(LZ,NINT)*DET
    DO 13 K=1,60
      LS=0
      RB(K)=0.0
      DO 14 L=NI,NIM
        LS=LS+1
14     RB(K)=RB(K)+RC(K,LS)*CU(L)
        RL(K)=RL(K)+RB(K)*WT
13     CONTINUE
      DO 15 K=1,IST
        LT=0
        DB(K)=0.0
        DO 15 L=NO,NUM
          LT=LT+1
15     DB(K)=DB(K)+D(K,LT)*EU(L)
        DO 16 K=1,60
          RB(K)=0.0
          DO 17 L=1,IST
            KB(K)=RB(K)+B(L,K)*DB(L)
            RL(K)=RL(K)+RB(K)*WT
17     CONTINUE
16     DO 70 J=1,60
          DO 40 K=1,IST
            DB(K)=0.0
            DO 40 L=1,IST
              DB(K)=DB(K)+D(K,L)*B(L,J)
40     DO 60 I=J,60
            STIFF=0.0
            DO 50 L=1,IST
              STIFF=STIFF+B(L,I)*DB(L)
            S(I,J)=S(I,J)+STIFF*WT
60     CONTINUE
70     CONTINUE
80     NI=NI+3
          NIM=NIM+3
          NO=NO+6
          NUM=NUM+6
          IF(INU.GT.0) GO TO 107
          DO 90 J=1,60
            DO 90 I=J,60
90     S(J,I)=S(I,J)
          CALL SUMAT(S,60,A(N30),NEQ,LM,MHT,MD,LIM)
134    READ(IAL,8095) NCDI
        WRITE(IAE,8098) NCDI

```

```

IF(NCDI, EQ, 0) GO TO 106
INP=1
KINT=4
DO 31 KD=1, NCDI
READ(IAL, 8096) TR, TS, TT, (T(KIL), KIL=MIM, MUM)
WRITE(IAE, 8097) TR, TS, TT, (T(KIL), KIL=MIM, MUM)
IF(INOL, EQ, 0) GO TO 31
DO 93 NX=1, KINT
DO 93 NX=1, KINT
IF(TR, EQ, 0) GO TO 21
IF(TS, EQ, 0) GO TO 25
21  RI=XG(NX, KINT)
IF(TS, EQ, 0) GO TO 22
SI=TS
TI=XG(NX, KINT)
GO TO 39
22  SI=XG(NX, KINT)
TI=TT
GO TO 39
25  SI=XG(NX, KINT)
TI=XG(NX, KINT)
RI=TR
39  CALL CTDN(ID, X, Y, Z, E, PO, NODA, NUPN, NMPCE, NEG, IST, RU,
INEG, NDCPM, N, NECEPM, L, NINT, D, B, S, XG,
2WGT, DB, XX, LM, DET, RI, SI, TI, A(N26), A(N27),
3A(N28), A(N29), CU, EO, I, NI, NIM, NO, NOM, RC, INP, PDET)
WIS=WGT(NX, KINT)*WGT(NX, KINT)*PDET
DO 19 K=1, 60
LS=0
RB(K)=0.0
DO 29 L=MIM, MUM
LS=LS+1
29  RB(K)=RB(K)+RC(K, LS)*T(L)
RL(K)=RL(K)+RB(K)*WIS
19  CONTINUE
WRITE(IAE, 8031) RI, SI, TI
93  CONTINUE
31  CONTINUE
106 MIM=MIM+3
MUM=MUM+3
IF(INOL, EQ, 0) GO TO 107
CALL QURAT(RL, RU, NEG, LM, 60)
107 CONTINUE
IF(INOL, EQ, 0) STOP
IF(IND, GT, 0) RETURN
CALL LEMACU(NEG, LIM, A(N30), MU, RU)
CALL PRIME(RU, NEG, 1, 0)
RETURN
1000 FORMAT(4F10.6)
2000 FORMAT(4F10.6)
3000 FORMAT(2I13)
7000 FORMAT(////10X, 7HITYPE= , 15, 5X, 6HNINT= , 15)
8010 FORMAT(///4X, 5HLM= , 19, 4X, 5HNEG= , 15)
8070 FORMAT(////10X, 3HL= , 15, 5X, 7HNECET= , 15)
8080 FORMAT(3F10.6)
8090 FORMAT(//4X, 13HF. CUERPO EN X, 10X, 13HF. CUERPO EN Y,
110X, 13HF. CUERPO EN Z / (7X, F10.6, 17X, F10.6, 17X, F10.6))
8091 FORMAT(6F10.6)
8092 FORMAT(//4X, 4HDEFX, 5X, 4HDEFY, 5X, 4HDEFZ, 5X, 5HDEFXY,
15X, 5HDEFYZ, 5X, 5HDEFXZ / (4X, F10.6, 5X, F10.6, 5X, F10.6, 5X,

```

2F10.6,5X,F10.6,5X,F10.6))

```

0095  FORMAT(I5)
0096  FORMAT(3F5.0,3E15.0)
0097  FORMAT(3F5.2,3E15.5)
0098  FORMAT(I5)
0031  FORMAT(/4X,3HR= ,F10.6,5X,3HS= ,F10.6,5X,3HT= ,F10.6)

```

END

```

SUBROUTINE CTOR(I0,X,Y,Z,E,PO,NODA,NUMP,NPCE,NEQ,IST,RU,
1NEG,NDCPM,N,NECEPM,L,NINT,D,B,S,XG,WGT,DB,XX,LM,DET,R,SI,
2TI,H,P,XJ,XJI,CU,EU,I,NI,NIM,NO,NUM,RC,IMP,PDET)
  DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),IU(3,1),NODA(1),D(6,6),B(6,60),
1S(60,60),XG(4,4),LM(60),WGT(4,4),DB(6),XX(3,20),H(20),
2P(3,20),XJ(3,3),XJI(3,3)

```

```

  DIMENSION HU(NEQ)
  DIMENSION CU(1),EU(1),I(1),RC(60,3)

```

```

  COMMON/IG/IAL,IAE
  COMMON/N/N11,N12,N26,N31,NJ2,N33

```

```

  COMMON/IN/IND
  COMMON/AA/A(5000)
  WRITE(IAE,1001) N,SI,TI

```

RP=0.5*(1.+R)

RM=0.5*(1.-R)

RS=1.-(R*R)

SP=0.5*(1.+SI)

SM=0.5*(1.-SI)

SS=1.-(SI*SI)

TP=0.5*(1.+TI)

TM=0.5*(1.-TI)

TS=1.-(TI*TI)

H(1)=RP*SP*TP-(0.5*((RS*SP*TP)+(RP*SS*TP)+(RM*SP*TS)))

H(2)=RM*SP*TP-(0.5*((RS*SP*TP)+(RM*SS*TP)+(RP*SP*TS)))

H(3)=RM*SM*TP-(0.5*((RM*SS*TP)+(RS*SM*TP)+(RP*SM*TS)))

H(4)=RP*SM*TP-(0.5*((RS*SM*TP)+(RP*SS*TP)+(RM*SM*TS)))

H(5)=RP*SP*TM-(0.5*((RS*SP*TM)+(RP*SS*TM)+(RM*SP*TS)))

H(6)=RM*SP*TM-(0.5*((RS*SP*TM)+(RM*SS*TM)+(RP*SP*TS)))

H(7)=RM*SM*TM-(0.5*((RM*SS*TM)+(RS*SM*TM)+(RM*SM*TS)))

H(8)=RP*SM*TM-(0.5*((RS*SM*TM)+(RP*SS*TM)+(RM*SM*TS)))

H(9)=RS*SP*TP

H(10)=RM*SS*TP

H(11)=RS*SM*TP

H(12)=RP*SS*TP

H(13)=RS*SP*TM

H(14)=RM*SS*TM

H(15)=RS*SM*TM

H(16)=RP*SS*TM

H(17)=RP*SP*TS

H(18)=RM*SP*TS

H(19)=RM*SM*TS

H(20)=RP*SM*TS

DO 19 I=1,60

DO 19 J=1,3

19 RC(I,J)=0.0

LI=0

DO 31 KAL=1,20

DO 61 I=1,3

LI=LI+1

IF(I=2) 81,91,101

91 RC(LI,2)=H(KAL)

GO TO 61

101 RC(LI,3)=H(KAL)

01
61
31
C
C

RC(LI,1)=H(KAL)

CONTINUE

CÓNTINUE

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION

CON RESPECTO A R

$P(1,1)=0.5*SP*TP-(0.5*((-2.*R*SP*TP)+(0.5*SS*TP)+(0.5*SP*TS)))$
 $P(1,2)=-0.5*SP*TP-(0.5*((-2.*R*SP*TP)+(-0.5*SS*TP)+(-0.5*SP*TS)))$
 $P(1,3)=0.5*SM*TP-(0.5*((-2.*R*SM*TP)+(0.5*SS*TP)+(0.5*SM*TS)))$
 $P(1,4)=-0.5*SM*TP-(0.5*((-2.*R*SM*TP)+(-0.5*SS*TP)+(-0.5*SM*TS)))$
 $P(1,5)=0.5*SP*TM-(0.5*((-2.*R*SP*TM)+(0.5*SS*TM)+(0.5*SP*TS)))$
 $P(1,6)=-0.5*SP*TM-(0.5*((-2.*R*SP*TM)+(-0.5*SS*TM)+(-0.5*SP*TS)))$
 $P(1,7)=0.5*SM*TM-(0.5*((-2.*R*SM*TM)+(0.5*SS*TM)+(0.5*SM*TS)))$
 $P(1,8)=-0.5*SM*TM-(0.5*((-2.*R*SM*TM)+(-0.5*SS*TM)+(-0.5*SM*TS)))$
 $P(1,9)=2.*R*SD*TP$
 $P(1,10)=-0.5*SS*TP$
 $P(1,11)=-2.*R*SM*TP$
 $P(1,12)=0.5*SS*TP$
 $P(1,13)=-2.*R*SP*TM$
 $P(1,14)=0.5*SS*TM$
 $P(1,15)=-2.*R*SM*TM$
 $P(1,16)=0.5*SS*TM$
 $P(1,17)=0.5*SP*TS$
 $P(1,18)=-0.5*SP*TS$
 $P(1,19)=-0.5*SM*TS$
 $P(1,20)=0.5*SM*TS$

C
C

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION

CON RESPECTO A S

$P(2,1)=0.5*RP*TP-(0.5*((0.5*RS*TP)+(-2.*SI*RP*TP)+(0.5*RP*TS)))$
 $P(2,2)=0.5*RM*TP-(0.5*((0.5*RS*TP)+(-2.*SI*RM*TP)+(0.5*RM*TS)))$
 $P(2,3)=-0.5*RM*TP-(0.5*((-2.*SI*RM*TP)+(-0.5*RS*TP)+(-0.5*RM*TS)))$
 $P(2,4)=0.5*RP*TP-(0.5*((-0.5*RS*TP)+(-2.*SI*RP*TP)+(-0.5*RP*TS)))$
 $P(2,5)=0.5*RM*TP-(0.5*((-0.5*RS*TP)+(-2.*SI*RM*TP)+(-0.5*RM*TS)))$
 $P(2,6)=0.5*RM*TM-(0.5*((0.5*RS*TM)+(-2.*SI*RM*TM)+(0.5*RM*TS)))$
 $P(2,7)=-0.5*RM*TM-(0.5*((-2.*SI*RM*TM)+(-0.5*RS*TM)+(-0.5*RM*TS)))$
 $P(2,8)=0.5*RP*TM-(0.5*((0.5*RS*TM)+(-2.*SI*RP*TM)+(-0.5*RP*TS)))$
 $P(2,9)=0.5*RS*TP$
 $P(2,10)=-2.*SI*RM*TP$
 $P(2,11)=-0.5*RS*TP$
 $P(2,12)=-2.*SI*RP*TP$
 $P(2,13)=0.5*RS*TM$
 $P(2,14)=-2.*SI*RM*TM$
 $P(2,15)=-0.5*RS*TM$
 $P(2,16)=-2.*SI*RP*TM$
 $P(2,17)=0.5*RP*TS$
 $P(2,18)=0.5*RM*TS$
 $P(2,19)=-0.5*RM*TS$
 $P(2,20)=-0.5*RP*TS$

C
C

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION

CON RESPECTO A T

$P(3,1)=0.5*RP*SP-(0.5*((0.5*RS*SP)+(0.5*RP*SS)+(-2.*TI*RP*SP)))$
 $P(3,2)=0.5*RM*SP-(0.5*((0.5*RS*SP)+(0.5*RM*SS)+(-2.*TI*RM*SP)))$
 $P(3,3)=0.5*RM*SM-(0.5*((0.5*RS*SM)+(0.5*RM*SS)+(-2.*TI*RM*SM)))$
 $P(3,4)=0.5*RP*SM-(0.5*((0.5*RS*SM)+(0.5*RP*SS)+(-2.*TI*RP*SM)))$
 $P(3,5)=-0.5*RP*SP-(0.5*((-0.5*RS*SP)+(-0.5*RP*SS)+(-2.*TI*RP*SP)))$
 $P(3,6)=-0.5*RM*SP-(0.5*((-0.5*RS*SP)+(-0.5*RM*SS)+(-2.*TI*RM*SP)))$
 $P(3,7)=-0.5*RM*SM-(0.5*((-0.5*RS*SM)+(-0.5*RM*SS)+(-2.*TI*RM*SM)))$
 $P(3,8)=-0.5*RP*SM-(0.5*((-0.5*RS*SM)+(-0.5*RP*SS)+(-2.*TI*RP*SM)))$
 $P(3,9)=0.5*RS*SP$
 $P(3,10)=0.5*RM*SS$

```

P(3,11)=0.5*RS*SM
P(3,12)=0.5*RP*SS
P(3,13)=-0.5*RS*SP
P(3,14)=-0.5*RM*SS
P(3,15)=-0.5*RM*SM
P(3,16)=-0.5*RD*SS
P(3,17)=-2.*TI*HP*SP
P(3,18)=-2.*TI*HM*SP
P(3,19)=-2.*TI*RM*SM
P(3,20)=-2.*TI*HP*SM
10  DO 30 I=1,3
    DU 30 J=1,3
    DUM=0.0
    DU 20 K=1,20
20  DUM=DUM+P(1,K)*XX(J,K)
30  XJ(1,J)=DUM
    IF(INP.EQ.0) GO TO 2004
    XR=XJ(1,1)
    YR=XJ(1,2)
    ZR=XJ(1,3)
    XS=XJ(2,1)
    YS=XJ(2,2)
    ZS=XJ(2,3)
    XT=XJ(3,1)
    YT=XJ(3,2)
    ZT=XJ(3,3)
    IF(SI.EQ.1) GO TO 2002
    IF(R.EQ.1) GO TO 2003
    TIS=(YR*ZS-(ZR*YS))*2
    TJS=(ZR*XS-(XR*ZS))*2
    TAS=(XR*YS-(YR*XS))*2
    PDET=SQRT(TIS+TJS+TAS)
    GO TO 2004
2002  SIS=(YR*ZT-(ZR*YT))*2
    SJS=(ZR*XT-(XR*ZT))*2
    SAS=(XR*YT-(YR*XT))*2
    PDET=SQRT(SIS+SJS+SAS)
    GO TO 2004
2003  RIS=(YS*ZT-(ZS*YT))*2
    RJS=(ZS*XT-(XS*ZT))*2
    RKS=(XS*YT-(YS*XT))*2
    PDET=SQRT(RIS+RJS+RKS)
2004  IF(INP.NE.0) RETURN
    XR=XJ(2,2)*XJ(3,3)
    XO=XJ(2,3)*XJ(3,2)
    XIL=XJ(2,1)*XJ(3,3)
    XIN=XJ(2,3)*XJ(3,1)
    XUL=XJ(2,1)*XJ(3,2)
    XUP=XJ(2,2)*XJ(3,1)
    DET=XJ(1,1)*(XR-XO)-(XJ(1,2)*(XIL-XIN))+(XJ(1,3)*(XUL-XUP))
    IF(DET.GT.0.00001) GO TO 40
    WRITE(IAE,2000)
    STOP
40  DUM=1./DET
    XJI(1,1)=DUM*(XR-XO)
    XJI(2,1)=DUM*(XIL-XIN)
    XJI(3,1)=DUM*(XUL-XUP)
    XNI=XJ(1,2)*XJ(3,3)
    XNO=XJ(1,3)*XJ(3,2)
    XNU=XJ(1,1)*XJ(3,3)

```

```

XNR=XJ(1,3)*XJ(3,1)
XNS=XJ(1,1)*XJ(3,2)
XNT=XJ(1,2)*XJ(3,1)
XJI(1,2)=-DUM*(XNI-XNO)
XJI(2,2)=DUM*(XNU-XNR)
XJI(3,2)=-DUM*(XNS-XNT)
ZNI=XJ(1,2)*XJ(2,3)
ZNO=XJ(1,3)*XJ(2,2)
ZNU=XJ(1,1)*XJ(2,3)
ZNR=XJ(2,1)*XJ(1,3)
ZNS=XJ(1,1)*XJ(2,2)
ZNT=XJ(1,2)*XJ(2,1)
XJI(1,3)=DUM*(ZNI-ZNO)
XJI(2,3)=-DUM*(ZNU-ZNR)
XJI(3,3)=DUM*(ZNS-ZNT)
NAL=1
NAS=3
DO 60 K=1,20
DO 21 I=1,6
DO 21 J=NAL,NAS
21 B(I,J)=0.0
DO 50 I=1,3
B(1,NAS-2)=B(1,NAS-2)+XJI(1,I)*P(I,K)
50 B(2,NAS-1)=B(2,NAS-1)+XJI(2,I)*P(I,K)
B(3,NAS)=B(3,NAS)+XJI(3,I)*P(I,K)
B(4,NAS-2)=B(2,NAS-1)
B(4,NAS-1)=B(1,NAS-2)
B(5,NAS-1)=B(3,NAS)
B(5,NAS)=B(4,NAS-2)
B(6,NAS-2)=B(5,NAS-1)
B(6,NAS)=B(4,NAS-1)
NAL=NAL+3
NAS=NAS+3
60 CONTINUE
IF(IND.EQ.0) GO TO 300
N32=N31+(60*IST)
CALL STAE(A(N31),B,LM,D,IST,DB,NEQ,RU,CU,EO,T,NI,NTH,
IND,NOM,60)
300 RETURN
1001 FORMAT(3F10.6)
2000 FORMAT(////4X,31HEL DET.ES CERO PARA EL ELEMENTO)
END
SUBROUTINE QUADS(ID,X,Y,Z,NUMPN,NEEG,NDCPM,N,NEQ,MHT,R,MD)
DIMENSION ID(3,NUMPN),X(1),Y(1),Z(1)
DIMENSION MD(NEQ)
DIMENSION MHT(NEQ)
DIMENSION R(NEQ)
COMMON/IO/IAL,IAE
COMMON/AA/A(5000)
COMMON/N/N1,N12,N26,N31,N32,N33
COMMON/IN/IND
IF(IND.GT.0) GO TO 3001
READ(IAL,1000) NCDE,NNPCE
WRITE(IAE,2000) NCDE
WRITE(IAE,2020) NNPCE
N12=N11+NEEG*NNPCE
3001 CALL QUADS(ID,X,Y,Z,A(N11),NEQ,MHT,NUMPN,NNPCE,NEEG,NDCPM,
IN,NCDE,R,MD)
RETURN
1000 FORMAT(2I5)

```

2000 FORMAT(////4X,30HNUM.DE CASOS DIST,DE ESPESOR= ,15)

161

2020 FORMAT(////4X,27HNUM.DE NUDOS POR ELEMENTO= ,15)

END

SUBROUTINE QADS(ID,X,Y,Z,NODA,NEQ,MHT,
1NMPN,MNPCE,NEEG,NDCPM,N,NCDE,R,MD)

DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,1),NODA(1)

DIMENSION MD(NEQ)

DIMENSION MHT(NEQ)

DIMENSION R(NEQ)

COMMON/IO/IAL,IAE

COMMON/AA/A(50000)

COMMON/N/N11,N12,N26,N31,N32,N33

COMMON/IN/IND

C LECTURA DE DATOS DE LOS ELEMENTOS

IF(IND.GT.0) GO TO 3001

300 WRITE(IAE,2000) N,NEEG

DO 10 I=1,NDCPM

READ(IAL,1000) E,PO

WRITE(IAE,2030) E,PO

DO 20 M=1,NCDE

READ(IAL,2040) THIC,NECET

WRITE(IAE,2050) THIC

WRITE(IAE,2070) NECET

N13=N12+16

N14=N13+64

N15=N14+256

N16=N15+16

N17=N16+16

N18=N17+4

N19=N18+16

N20=N19+16

N21=N20+16

N22=N21+32

N23=N22+16

N24=N23+NEEG*2

N25=N24+NEEG*3

N26=N25+NEEG*2

READ(IAL,2091) ITYPE,NINT

WRITE(IAE,2092) ITYPE,NINT

3001 CALL QDS(ID,X,Y,Z,E,PO,THIC,NODA,NMPN,MNPCE,NEQ,MHT,

1NEEG,NDCPM,N,NCDE,NECET,L,ITYPE,NINT,A(N12),A(N13),

2A(N14),A(N15),A(N16),A(N17),A(N18),A(N19),A(N20),

3A(N21),A(N22),A(N23),A(N24),A(N25),R,MD)

20 CONTINUE

10 CONTINUE

RETURN

1000 FORMAT(E15.0,F10.0)

2000 FORMAT(10X,3HN= ,15,5X,6HNEEG= ,15)

2030 FORMAT(10X,3HY= ,F10.6,5X,4HPO= ,F10.6)

2040 FORMAT(F10.6)

2050 FORMAT(////4X,9HESPESOR= ,F10.6)

2070 FORMAT(//4X,39HNUM.DE ELEMENTOS CON ESPESOR INDICADO= ,15)

2091 FORMAT(2I5)

2092 FORMAT(////4X,7HITYPE= ,15,5X,6HNINT= ,15)

END

SUBROUTINE QDS(ID,X,Y,Z,E,PO,THIC,NODA,NMPN,MNPCE,NEQ,MHT,

1NEEG,NDCPM,N,NCDE,NECET,L,ITYPE,NINT,D,B,S,XG,

2WGT,DB,XX,LM,RB,RC,RL,CU,EU,T,RU,MD)

DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,1),NODA(1),D(4,4),

1B(4,16),S(16,16),XG(4,4),


```

2WGT(4,4),DB(4),XX(2,0),LM(16)
  DIMENSION MD(NBO)
  DIMENSION MHT(NEQ)
  DIMENSION KU(NEQ)
  DIMENSION RB(16),RC(16,2),ML(16),CU(1),EO(1),T(1)
COMMON/IO/IAL,IAE
COMMON/KUS/INOL
COMMON/AA/A(50000)
COMMON/N/N11,N12,N26,N31,N32,N33
COMMON/In/IND
  NUK=1
  NAM=NNPCE
  NI=1
  NIM=2
  NU=1
  NUM=3
  MIM=1
  MUM=2
  IF(IND.GT.0) GO TO 3002
  WRITE(IAE,3000) B,PO
C   LA MATRIZ XG ALMACENA LOS PUNTOS MUESTRA DE
C   GAUSS-LEGENDRÉ
  DO 120 II=1,4
120 READ(IAL,1000),(XG(II,J),J=1,4)
  CALL PRIME(XG,4,4,0)
C   LA MATRIZ WGT ALMACENA LOS FACTORES DE PESO DE GAUSS-
C   LEGENDRE
  DO 130 IJI=1,4
130 READ(IAL,2000),(WGT(IJI,JA),JA=1,4)
  CALL PRIME(WGT,4,4,0)
C   OBTENCION DE LA LEY ESFUERZO DEFORMACION
  F=E/(1.+PO)
  G=F*PO/(1.-2.*PO)
  H=F+G
C   ANALISIS PARA DEFORMACION EN EL PLANO
  D(1,1)=H
  D(1,2)=G
  D(1,3)=0.
  D(2,1)=G
  D(2,2)=H
  D(2,3)=0.
  D(3,1)=0.
  D(3,2)=0.
  D(3,3)=F/2.
  CALL PRIME(D,4,4,0)
  IF(ITYPE.EQ.1) THIC=1.
  IF(ITYPE.EQ.1) GO TO 103
C   ANALISIS AXISIMETRICO
  D(1,4)=G
  D(2,4)=G
  D(3,4)=0.
  D(4,1)=G
  D(4,2)=G
  D(4,3)=0.
  D(4,4)=H
  CALL PRIME(D,4,4,0)
  IF(ITYPE.EQ.0) GO TO 103
C   PARA ANALISIS DE ESFUERZO EN EL PLANO
C   MATRIZ ESFUERZO-DEFORMACION CONDENSADA
  DO 10 I=1,3

```

```

C=D(I,4)/D(4,4)
DO 10 J=1,3
D(I,J)=D(I,J)-D(4,J)*C
10 D(J,I)=D(I,J)
CALL PRIME(D,4,4,0)
C CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDECES DEL ELEMENTO
C CORRESPONDIENTE
103 CONTINUE
DO 102 K=N0, N0CET
READ(IAL,2080) KIM,(NODA(I),I=N0K,NAM)
WRITE(IAE,4000) KIM,(NODA(I),I=N0K,NAM)
READ(IAL,8080) (CU(LI),LI=N1,NIM)
WRITE(IAE,8090) (CU(LI),LI=N1,NIM)
READ(IAL,8091) (EU(KL),KL=N0,NOM)
WRITE(IAE,8092) (EU(KL),KL=N0,NOM)
J=0
DO 41 K=N0K,NAM
LO=NODA(K)
DO 41 M=1,2
LID=ID(M,LO)
J=J+1
41 LM(J)=LID
CALL ALTUC(MHT,16,LM,NEU)
N0K=N0K+NNPCE
NAM=NAM+NNPCE
N1=N1+2
NIM=NIM+2
N0=N0+3
NUM=NUM+3
102 CONTINUE
CALL DIR(MD,MHT,NEU)
LIM=MD(NEU)
N0K=1
NAM=NNPCE
N1=1
NIM=2
N0=1
NUM=3
3002 DO 107 KIM=1,NECET
DO 30 I=1,16
DO 30 J=1,16
30 S(I,J)=0.0
DO 12 LZ=1,16
12 RL(LZ)=0.0
WRITE(IAE,8070) KIM,NECET
J=0
DO 51 K=N0K,NAM
LO=NODA(K)
DO 51 M=1,2
LID=ID(M,LO)
J=J+1
51 LM(J)=LID
C ALMACENA EN LA MATRIZ XX LOS VALORES DE LAS
C COORDENADAS PARA CADA NUDO
KI=0
DO 100 J=N0K,NAM
NUN=NODA(J)
KI=KI+1
100 XX(1,KI)=X(NUN)
JL=0

```

```

DO 101 K=NOK,NAM
NUL=NODA(K)
JL=JL+1
101 XX(2,JL)=Y(NUL)
NOK=NOK+NNPCE
NAM=NAM+NNPCE
IF(ITYPE.EQ.0) IST=4
IST=3
IF(INOL.EQ.0) GO TO 134
IF(IND.GT.0) NINT=2
DO 80 LX=1,NINT
RI=XG(LX,NINT)
DO 80 LY=1,NINT
SI=XG(LY,NINT)
C EVALUACION DEL OPERADOS B Y DEL DETERMINANTE
C DEL JACOBIANO DET.
N27=N26+8
N28=N27+16
N29=N28+4
N30=N29+4
N31=N30+LIM
INP=0
CALL STDN(ID,X,Y,Z,E,PO,THIC,NODA,NUMP,N,NPCE,NEO,IST,RU,
1NEEG,NDCPN,N,NCDE,NECET,L,ITYPE,NINT,D,B,S,XG,
2WGT,DB,XX,LM,DET,R1,SI,XBAR,A(N26),A(N27),
3A(N28),A(N29),CU,EU,I,N1,NIM,NO,NOM,RC,INP,DRI,DS1)
IF(IND.GT.0) GO TO 80
IF(ITYPE.GT.0) XBAR=THIC
WT=WGT(LX,NINT)*WGT(LY,NINT)*XBAR*DET
DO 13 K=1,16
LS=0
RB(K)=0.0
DO 14 L=N1,NIM
LS=LS+1
14 RB(K)=RB(K)+RC(K,LS)*CU(L)
RL(K)=RL(K)+RB(K)*WT
13 CONTINUE
DO 15 K=1,IST
LT=0
DB(K)=0.0
DO 15 L=NU,NOM
LT=LT+1
15 DB(K)=DB(K)+D(K,LT)*EU(L)
DO 16 K=1,16
RB(K)=0.0
DO 17 L=1,IST
17 RB(K)=RB(K)+B(L,K)*DB(L)
RL(K)=RL(K)+RB(K)*WT
16 CONTINUE
DO 70 J=1,16
DO 40 K=1,IST
DB(K)=0.0
DO 40 L=1,IST
40 DB(K)=DB(K)+D(K,L)*B(L,J)
DO 60 I=J,16
STIFF=0.0
DO 50 L=1,IST
50 STIFF=STIFF+B(L,1)*DB(L)
60 S(I,J)=S(I,J)+STIFF*WT
70 CONTINUE

```

```

80 CONTINUE
  N1=N1+2
  N1M=N1M+2
  ND=ND+3
  NUM=NUM+3
  IF(IND.GT.0) GO TO 107
  DO 90 J=1,16
  DO 90 I=J,16
90 S(J,I)=S(I,J)
  CALL SUMAT(S,16,A(N30),NEG,LM,MHT,MD,LIM)
134 READ(IAL,8095) NCDI
  WRITE(IAE,8098) NCDI
  IF(NCDI.EQ.0) GO TO 106
  INP=1
  KINT=2
  DO 31 KD=1,NCDI
  READ(IAL,8096) TR,TS,(T(KIL),KIL=MIM,MUM)
  WRITE(IAE,8097) TR,TS,(T(KIL),KIL=MIM,MUM)
  IF(INOL.EQ.0) GO TO 31
  DO 93 MX=1,KINT
  IF(TR.EQ.0) GO TO 21
  IF(TS.EQ.0) GO TO 25
21 RI=XG(MX,KINT)
  SI=TS
  GO TO 27
25 SI=XG(MX,KINT)
  RI=TR
  WRITE(IAE,8031) RI,SI
27 CALL STDN(ID,X,Y,Z,E,PU,THIC,NODA,NUMPN,NNPCE,NEG,IST,RU,
  INEG,NDCPN,N,NCDE,NECET,L,ITYPE,NINT,D,B,S,XG,
  WGT,DB,XX,LM,DET,RI,SI,XBAR,A(N26),A(N27),
  JA(N28),A(N29),CU,EO,T,NI,N1M,NO,NOM,RC,INP,DRI,DSI)
  DET=DSI
  IF(RI.EQ.1) DET=DRI
  WTS=WGT(MX,KINT)*XBAR*DET
  DO 19 K=1,16
  LS=0
  RB(K)=0.0
  DO 29 L=MIM,MUM
  LS=LS+1
29 RB(K)=RB(K)+RC(K,LS)*T(L)
  RL(K)=RL(K)+RB(K)*WTS
19 CONTINUE
93 CONTINUE
31 CONTINUE
106 N1M=N1M+2
  NUM=NUM+2
  IF(INOL.EQ.0) GO TO 107
  CALL DUMAT(RL,RU,NEG,LM,16)
107 CONTINUE
  IF(INOL.EQ.0) STOP
  IF(IND.GT.0) RETURN
  CALL LEMACU(NEG,LIM,A(N30),MD,RU)
  RETURN
1000 FORMAT(4F10.6)
2000 FORMAT(4F10.6)
2080 FORMAT(9I5)
3000 FORMAT(////10X,3HY=,F10.6,5X,4HPO=,F10.6)
4000 FORMAT(//4X,5HELEMENT,4X,5HNODO1,9X,5HNODO2,
  19X,5HNODO3,9X,5HNODO4,9X,5HNODO5,9X,5HNODO6,

```

29X,5HN0007,9X,5HN0008/(4X,15,9X,15,9X,15,9X,15,

166

```
39X,15,9X,15,9X,15,9X,15,9X,15))
7000 FORMAT(////10X,7NITYPE=,15,5X,6HNINT=,15)
0031 FORMAT(//4X,3HR=,F10.6,5X,3HS=,F10.6)
0070 FORMAT(////10X,3HL=,15,5X,7MNECET=,15)
0080 FORMAT(2F10.6)
0090 FORMAT(//4X,13HF.CUERPO EN X,10X,13HF.CUERPO EN Y/
1(7X,F10.6,17X,F10.6))
0091 FORMAT(3F10.6)
0092 FORMAT(//4X,4HDEFX,5X,4HDEFY,5X,5HDEFXY/
1(4X,F10.6,5X,F10.6,5X,F10.6))
0095 FORMAT(15)
0096 FORMAT(2F10.3,2E15.0)
0097 FORMAT(2F10.5,2E15.5)
0098 FORMAT(15)
```

END

```
SUBROUTINE STDM(ID,X,Y,Z,E,PO,THIC,NODA,NUMPN,NMPCE,NEQ,IST,RU,
1NEEG,MDCPM,N,NCDE,NECET,L,ITYPE,MINT,D,B,S,XG,
2WGT,DB,XX,LM,DET,R,SI,XBAR,H,P,XJ,XJI,CU,EO,
3T,NI,NIM,NO,NOM,RC,IMP,ORI,DOI)
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,1),NODA(1),D(4,4),
1B(4,16),S(16,16),XG(4,4),LM(16),
2WGT(4,4),DB(4),XX(2,8),H(8),P(2,8),XJ(2,2),XJI(2,2)
DIMENSION RU(NEQ)
DIMENSION CU(1),EO(1),T(1)
DIMENSION RC(16,2)
COMMON/IO/IAL,IAE
COMMON/N/N11,N12,N26,N31,N32,N33
COMMON/IN/IND
COMMON/AA/A(50800)
```

RP=1,+R

SP=1,+SI

RM=1,-R

SM=1,-SI

SS=0.5*(1.-(SI*SI))

RS=0.5*(1.-(R*R))

C

FUNCIONES DE INTERPOLACION

H(1)=0.25*RP*SP-(0.5*RS*SP)-(0.5*SS*RP)

H(2)=0.25*RM*SP-(0.5*RS*SP)-(0.5*SS*RM)

H(3)=0.25*RP*SM-(0.5*RS*SM)-(0.5*SS*SM)

H(4)=0.25*RM*SM-(0.5*RS*SM)-(0.5*SS*RM)

H(5)=RS*SP

H(6)=SS*RM

H(7)=RS*SM

H(8)=SS*RP

RC(1,1)=H(1)

RC(1,2)=0.0

RC(2,1)=0.0

RC(2,2)=H(1)

RC(3,1)=H(2)

RC(3,2)=0.0

RC(4,1)=0.0

RC(4,2)=H(2)

RC(5,1)=H(3)

RC(5,2)=0.0

RC(6,1)=0.0

RC(6,2)=H(3)

RC(7,1)=H(4)

RC(7,2)=0.0

RC(8,1)=0.0

```

RC(8,2)=H(4)
RC(9,1)=H(5)
RC(9,2)=0.0
RC(10,1)=0.0
RC(10,2)=H(5)
RC(11,1)=H(6)
RC(11,2)=0.0
RC(12,1)=0.0
RC(12,2)=H(6)
RC(13,1)=H(7)
RC(13,2)=0.0
RC(14,1)=0.0
RC(14,2)=H(7)
RC(15,1)=H(8)
RC(15,2)=0.0
RC(16,1)=0.0
RC(16,2)=H(8)
C  DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION
C  1.-CON RESPECTO A H
P(1,1)=0.25*SP+(0.5*R*SP)-(0.5*SS)
P(1,2)=-((0.25*SP)+(0.5*R*SP)+(0.5*SS))
P(1,3)=-((0.25*SM)+(0.5*SS)+(0.5*R*SM))
P(1,4)=0.25*SM+(0.5*R*SM)-(0.5*SS)
P(1,5)=-((R*SP))
P(1,6)=-SS
P(1,7)=-((H*SM))
P(1,8)=SS
C  2.-CON RESPECTO A S
P(2,1)=0.25*RP-(0.5*RS)+(0.5*SI*RP)
P(2,2)=0.25*RM-(0.5*RS)+(0.5*SI*RM)
P(2,3)=-((0.25*RM)+(0.5*SI*RM)+(0.5*RS))
P(2,4)=-((0.25*RP)+(0.5*RS)+(0.5*SI*RP))
P(2,5)=RS
P(2,6)=-((SI*RM))
P(2,7)=-RS
P(2,8)=-((SI*RP))
C  EVALUACION DE LA MATRIZ JACOBIANO EN EL PUNTO (R,S)
10 DO 30 I=1,2
DO 30 J=1,2
DUM=0.0
DO 20 K=1,8
20 DUM=DUM+P(I,K)*XJ(J,K)
30 XJ(I,J)=DUM
RAZ=XJ(1,1)
PAS=XJ(1,2)
TAZ=XJ(2,1)
BAZ=XJ(2,2)
DS=RAZ**2+(PAS**2)
DSI=SQRT(DS)
DH=TAZ**2+(BAZ**2)
DHI=SQRT(DH)
C  CALCULO DEL DETERMINANTE DE LA MATRIZ JACOBIANO
C  EN EL PUNTO (R,S)
DET=XJ(1,1)*XJ(2,2)-XJ(2,1)*XJ(1,2)
IF (DET.GT.0.00001) GO TO 40
WRITE (IAE,2000) L
STOP
C  CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ JACOBIANO
40 IF (INP.NE.0) RETURN
DUM=1./DET

```

```

XJI(1,1)=XJ(2,2)*DUM
XJI(1,2)=-XJ(1,2)*DUM
XJI(2,1)=-XJ(2,1)*DUM
XJI(2,2)=XJ(1,1)*DUM
C  EVALUACION GLOBAL DEL OPERADOR B
   K2=0
   DO 60 K=1,8
     K2=K2+2
     B(1,K2-1)=0.
     B(1,K2)=0.
     B(2,K2-1)=0.
     B(2,K2)=0.
     DO 50 I=1,2
       B(1,K2-1)=B(1,K2-1)+XJI(1,I)*P(I,K)
50    B(2,K2)=B(2,K2)+XJI(2,I)*P(I,K)
       B(3,K2)=B(1,K2-1)
60    B(3,K2-1)=B(2,K2)
       IF(INO.EQ.0) GO TO 300
       N32=N31+(16*IST)
       WRITE(IAE,1500) R,SI
       CALL STAE(A(N31),B,LM,D,IST,DB,NEO,RU,CU,EO,T,
INI,NIM,NO,NUM,16)
       RETURN
300   IF(ITYPE.GT.0) RETURN
2000 FORMAT(////4X,33HEL DET.ES CERU PARA EL ELEMENTO= ,I5)
1500 FORMAT(////4X,15HEL VALOR DE R= ,F10.6,5X,
115HEL VALOR DE S= ,F10.6)
END

```

LPTSP, VERSION 6(344) RUNNING ON LPTO
 START USER M-1-LIG 1550,550) JOB ESFUER SEG. 2310 DATE 26-SEP-81 16:53:37
 MONITOR ININ 507/60) TS+RT *START*
 REQUEST CREATED: 28-SEP-81 15:15:59
 FILE: DSKCO:ESFUER(550,550) CREATED: 28-SEP-81 14:50:00 <157>
 PRINTED: 28-SEP-81 16:54:52
 QUEUE SWITCHES: /PRINT:ARROW /FILE:ASCII /COPIES:1
 /SPACING:1 /LIMIT:31 /FORMS:500
 FILE WILL BE RENAMED TO <057> PROTECTION

ESFUERZOS PRESENTES EN UNA VALVULA PARA CONTROL DE FLUJO
 EN LOS PUNTOS DONDE SE SURREPASA EL ESFUERZO DE CEDENCIA Y F
 LOS ELEMENTOS DONDE SE EVALUAN ESTOS ESFUERZOS SE ENCUEN-
 TRAN MARCADOS CON * EN LA FIG. 5.23

NUMERO DE ELEMENTOS= 28 NUMERO DE PUNTOS NODALES= 254
 MATERIAL ACERO INOXIDABLE 304
 MODULO DE YOUNG=19,00E06 NW/CM**2
 MODULO DE POISSON=0,305
 COEFICIENTE DE DILATACION TERMICA=17,3E-06 1/GRADOS CENTIGRADOS
 DENSIDAD=7,747 GRAMOS MASA/CM**3
 ACELERACION DE LA GRAVEDAD=981,00 CM/SEG**2
 ESFUERZO DE CEDENCIA DEL MATERIAL=4,62E04 NW/CM**2
 INCREMENTO DE TEMPERATURA=200 GRADOS CENTIGRADOS

ELEMENTO= 2 NECTE= 28

R S T

0,577350 -0,577000 -0,577000

TENSOR DE LOS ESFUERZOS

1	-1,1927E+05	ESFUERZO	X
2	-4,8205E+04	ESFUERZO	Y
3	-2,8119E+03	ESFUERZO	Z
4	-1,1318E+03	ESFUERZO	XY
5	5,2702E+03	ESFUERZO	YZ
6	3,3527E+04	ESFUERZO	ZX

DESCRIMINANTE

-0.52550E+20

ESFUERZOS PRINCIPALES

- 1 -6.5646E+03
- 2 -1.2830E+05
- 3 -4.8551E+04

170

CORTANTE MAXIMO= 0.67432E+05
0.577350 -0.577000 0.577350

- 1 -9.4118E+04
- 2 -2.1009E+04

- 3 -2.7620E+04
- 4 -3.0839E+04
- 5 -2.2328E+04
- 6 -2.4398E+04
- 0.18439E+28

- 1 -1.2705E+04
- 2 -1.0860E+05
- 3 -4.6851E+04

CORTANTE MAXIMO= 0.60651E+05
0.577350 0.577350 -0.577000

- 1 -4.8457E+04
- 2 -5.5781E+03
- 3 -1.5142E+04
- 4 -9.0829E+02
- 5 8.8296E+03
- 6 1.8864E+04
- 0.35767E+26

- 1 -9.5204E+03
- 2 -5.7284E+04
- 3 -1.0257E+04

CORTANTE MAXIMO= 0.33402E+05
0.577350 0.577350 0.577350

- 1 -6.2474E+04
- 2 -7.0415E+03
- 3 -1.0168E+04
- 4 -1.0944E+04
- 5 9.5163E+03
- 6 1.9443E+03
- 0.32926E+26

- 1 1.8633E+03
- 2 -6.4808E+04
- 3 -1.6738E+04

CORTANTE MAXIMO= 0.33335E+05

ELEMENTO= 3 NECEI= 28

0.577350 -0.577000 -0.577000

4.9246E+03
-6.0807E+04
-3.1331E+02

CORTANTE MAXIMO= 0.32866E+05

ELEMENTU= 26 NECET=28

0.577350 -0.577000 -0.577000

1 -5.8377E+04
2 -4.1280E+03
3 -1.2066E+04
4 -4.1986E+03
5 -8.3024E+03
6 -2.1023E+04
0 -0.70994E+26

1 1.0195E+04
2 -6.6505E+04
3 -1.0005E+04

CORTANTE MAXIMO= 0.38350E+05
0.577350 0.577350 -0.577000

1 -1.3524E+05
2 -5.9980E+04
3 -1.5983E+04
4 3.7838E+03
5 1.0807E+04
6 -3.9244E+04
0 -0.49341E+26

1 -2.7274E+03
2 -1.4751E+05
3 -6.0968E+04

CORTANTE MAXIMO= 0.72392E+05
0.577350 0.577350 0.577350

1 -7.3714E+04
2 -2.1170E+04
3 -3.5121E+04
4 -2.5651E+04
5 -1.1784E+04
6 -1.6123E+04
0 -0.21328E+27

1 -1.7220E+03
2 -8.6469E+04
3 -4.1814E+04

CORTANTE MAXIMO= 0.42374E+05

ELEMENTU= 27 NECET= 28
0.577350 -0.577000 -0.577000

1 -8.2769E+04
2 -9.6958E+03
3 -1.0042E+04
4 -1.3305E+04
5 -1.1735E+04
6 -1.5842E+03
0 -1.5842E+03

REFERENCIAS.-

- 1.- Daniel D. Mc Cracken "Programación Fortran IV"
Ed. Limusa, Segunda Edición, 1980.
- 2.- Klaus J. Bathe and Edwards L. Wilson
"Numerical Methods in Finite Element Analysis"
Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1976.
- 3.- O. C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method"
Mc. Graw Hill Co., 1977
- 4.- L. J. Segerlind "Applied Finite Element Analysis"
John Wiley and Sons. Inc., 1976
- 5.- Chandrakant S. Desai and John F. Abel.
"Introduction to the Finite Element Method"
Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- 6.- O. C. Zienkiewicz. Op. Cit.
- 7.- Timoshenko, S. and Goodier J. N.
"Theory of Elasticity". Mc Graw Hill Book Co.,
1951.
- 8.- Ibid.
- 9.- Chandrakant S. Desai. Op. Cit.
- 10.- Timoshenko, S. Op. Cit.

- 11.- Robert W. Fitzgerald "Strength of Materials"
Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- 12.- Arthur P. Boresi and Paul P. Lynn
"Elasticity in Engineering Mechanics"
Prentice-Hall Inc., 1974.
- 13.- Timoshenko, S. Op. Cit.
- 14.- Robert W. Fitzgerald. Op. Cit.
- 15.- Chandrakant S. Desai. Op. Cit.
- 16.- Klaus J. Bathe. Op. Cit.
- 17.- O. C. Zienkiewicz. Op. Cit.
- 18.- Rubén Avila R. "Diseño de una Válvula "Y" para
Control de Flujo".
Reporte Interno del Departamento de Metales
Líquidos del ININ, 1980.
- 19.- Machinery's Handbook Industrial Press Inc.
Twenty-First Edition, 1979
- 20.- A. J. Durelli "Applied Stress Analysis"
Prentice-Hall Inc., 1967

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo del trabajo se establecieron los conceptos básicos que entran en juego en un análisis de elementos finitos, sin embargo, para desarrollar problemas prácticos de la mecánica de los sólidos es necesario tener un conocimiento más profundo de cada una de las disciplinas involucradas, esto se puso de manifiesto en el Capítulo 5, cuando se planteó el problema de analizar el cuerpo de una válvula "Y" para control de flujo.

Debido al carácter básico de la obra, puede concluirse que ELFINTEST no pretende ser de carácter general y mucho menos perfecto en el sentido computacional y aunque fue intención del autor elaborar un programa eficiente, esto sólo se consiguió en forma parcial, ya que no es capaz de analizar cuerpos cuya matriz de rigideces en forma unidimensional sobrepase el límite de memoria del procesador central, sin embargo, al recordar el objetivo fundamental del estudio "IncurSIONAR en las técnicas de análisis de dispositivos sometidos a distintas sollicitaciones externas" todo parece indicar que éste se alcanzó en forma satisfactoria.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Klaus J. Bathe and Edward L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1976.
- 2.- Chandrakant S. Desai and John F. Abel, "Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- 3.- O. C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method", Mc Graw Hill Company, 1977.
- 4.- Larry J. Segerlind "Applied Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., 1976.
- 5.- S. Valliappan "Finite Element Method Theory and Application",
Publicación de la Sección de Mecánica de Suelos de la U.N.A.M.
1979.
- 6.- Enzo Levi, "Elementos de Mecánica del Medio Continuo". Ed.
Limusa, 1980.
- 7.- A. I. Máltsev "Fundamentos de Algebra Lineal", Ed. Mir Moscú, 1978.
- 8.- Arthur P. Boresi and Paul P. Lynn, "Elasticity in Engineering Mechanics"
Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.

- 9.- Robert W. Fitzgerald "Resistencia de Materiales" Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1970
- 10.- Anthony Ralston "Introducción al Análisis Numérico", Ed. Limusa, 1978
- 11.- A. J. Durelli. "Applied Stress Analysis", Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1967.
- 12.- V. G. Rekach "Problemas de la Teoría de la Elasticidad". Ed. Mir Moscú, 1978.
- 13.- Y. C. Fung "A first course in continuum Mechanics", Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1977.
- 14.- L. Elsgoltz "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional" Ed. Mir Moscú, 1969.
- 15.- Daniel D. Mc Cracken "Programación Fortran IV" Ed. Limusa, 1980.
- 16.- "Machinery's Handbook" Twenty-First Edition, Industrial Press, Inc. 1979
- 17.- Digambar P. Mondkar and Graham H. Powell. "Towards optimal incore Equation Solving" Journal computers and Structures Vol. 4, Pergamon Press, 1974.
- 18.- Joseph E. Shigley "Mechanical Engineering Design" International Student, Edition, 1977.

19.- Rubén Avila R. - "Diseño de una Válvula "Y" para control de Flujo". Reporte interno del Departamento de Metales Líquidos del ININ, 1980.

20.- Robert C. Juvinall "Stress, strain, and strength" Mc Graw-Hill Book Company, 1976.