

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA



**DESACOPLAMIENTO DE UNA CLASE
RESTRINGIDA DE SISTEMAS MULTIVARIABLES**

T E S I S

**Que Para Obtener el Título de
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

P r e s e n t a

RAFAEL RAMOS VILLEGAS

México, D. F.

1979



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PROLOGO

El presente trabajo expone un conjunto de leyes de realización para lograr el desacoplamiento de una clase restringida de sistemas multivariables, con base en un programa de computadora.

El texto está organizado de la siguiente manera: en el Cap. 1 se plantea el problema del desacoplamiento de una clase restringida de sistemas multivariables. En el Cap. 2 se da, dentro de un marco de referencia histórico, una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución al problema planteado en el capítulo anterior. En el Cap. 3 se plantea una caracterización de la clase de matrices de desacoplamiento de los sistemas descritos en el Cap. 1. En el Cap. 4 se describe un programa de computadora para el diseño de sistemas multivariables con base en la caracterización anterior. En este mismo Cap. se proporcionan varios ejemplos de aplicación del programa. Por último se incluyen dos Anexos donde se proporcionan el diagrama de flujo y el listado del programa.

INDICE

DESACOPLAMIENTO DE UNA CLASE RESTRINGIDA DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

CAPITULO PRIMERO EL PROBLEMA DE DESACOPLAMIENTO DE UNA CLASE RESTRINGIDA DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

<u>Sección</u>		<u>Página</u>
1.	Introducción	1
2.	Notación y formulación del problema de des- acoplamiento	2
3.	Formalización del problema de desacoplamiento	5
4.	Comentarios y conclusiones	5

CAPITULO II EXISTENCIA DE UNA SOLUCION AL PROBLEMA DE DESACOPLAMIENTO

1.	Introducción	9
2.	Había una vez	9
3.	Comentarios y conclusiones	19

CAPITULO III CARACTERIZACION DE UNA CLASE DE MATRICES DE DESACOPLAMIENTO

1.	Introducción	20
2.	Caracterización de la clase de matrices de - desacoplamiento	22
3.	Estructura del sistema desacoplado	30
4.	Diseño del sistema desacoplado	38
5.	Conclusiones	40

CAPITULO IV
UN PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS LINEALES
MULTIVARIABLES DESACOPLADOS MEDIANTE REALIMENTACION ESTATICA
DEL VECTOR DE ESTADO

<u>Sección</u>	<u>Página</u>
1. Introducción	41
2. Generalidades	
2.1 Descripción del programa	41
2.2 Datos de entrada	43
2.3 Secuencia de ejecución	47
2.4 Mensajes en la impresión	49
2.5 Tiempo de ejecución	50
2.6 Ejecución continua del programa	50
3. Disponibilidad del programa	50
4. Ejemplos de aplicación del programa	51
 ANEXO A Diagrama de flujo del programa de computadora ..	 94
ANEXO B Listado general del programa de computadora	101
Listado de las subrutinas del programa	118
AGRADECIMIENTOS	132
REFERENCIAS	133

CAPITULO PRIMERO

EL PROBLEMA DE DESACOPLAMIENTO DE UNA CLASE RESTRINGIDA DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

1.1 INTRODUCCION

Los sistemas multivariantes de control son aquellos que tienen más de una entrada y/o más de una salida. Se caracterizan por tener una dinámica de interacción entre sus variables, i.e. una variable puede ser modificada al mismo tiempo por varias otras, a través de las distintas formas de interacción en el sistema. Debido a esta característica el estudio de tales sistemas ciertamente es complicado. Particularmente, ha habido enormes dificultades cuando se tratan de extender al caso multivariable las poderosas técnicas de análisis y de síntesis que existen para los sistemas de una entrada-una salida.

Existe un planteamiento de estudio de los sistemas multivariantes en el que se tratan de eliminar o reducir los efectos de la interacción. Este planteamiento asume que un sistema multivariable puede descomponerse en un conjunto de subsistemas en los que se reparten las entradas y salidas del sistema original. Este planteamiento se conoce como *desacoplamiento de sistemas multiva-*

1.2 NOTACION Y FORMULACION DEL PROBLEMA DE DESACOPPLAMIENTO

Considérese un sistema multivariable, lineal, continuo e invariable con el tiempo, descrito por las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (1.2)$$

en donde t es la variable independiente tiempo, $u(t)$ es un vector columna de dimensión m que representa al conjunto de entradas del sistema, $y(t)$ es un vector columna de dimensión r que representa al conjunto de salidas, $x(t)$ es un vector columna de dimensión n que representa el estado del sistema, y A , B , C y D son matrices constantes de dimensiones $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ y $r \times m$, respectivamente.

A los sistemas descritos por ecuaciones de la forma (1.1) y (1.2) se les denotará en lo sucesivo por $S = \{A, B, C, D\}$.

La clase restringida de sistemas multivariables con que se tratará en lo sucesivo, está caracterizada por sistemas S con un número de entradas igual al número de salidas ($r = m$) y por una matriz D nula, i.e.:

$$S = \{A, B, C\} \quad (1.3)$$

Se asume, como es usual en la mayor parte de la literatura, que $n > m$. Esto asegurará en S una matriz de transferencia estrictamente propia.

Para esta clase de sistemas puede definirse una ley de control de realimentación de la forma:

$$u(t) = F x(t) + G w(t) \tag{1.4}$$

Donde $w(t)$ es un vector columna de dimensión m que representa la entrada al sistema de malla cerrada de la fig. 1.1, F y G son matrices constantes de dimensiones $m \times n$ y $m \times m$, respectivamente. La ley de control (1.4) es una realimentación *estática* del vector de estado de S .

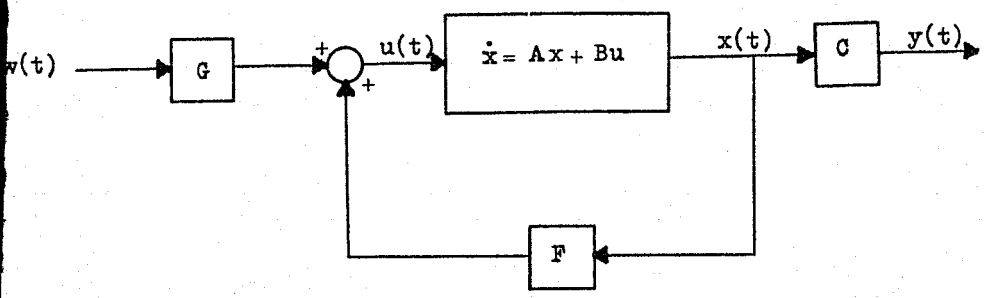


Fig. 1.1 Realimentación estática del estado del sistema $S = \{A, B, C\}$.

La sustitución de la expresión (1.4) en (1.1) y (1.2) forma un sistema de malla cerrada:

$$S(F, G) = \{A + BF, BG, C\} \tag{1.5}$$

Asumiendo un estado inicial nulo en S , la matriz de transferencia de (1.5) es:

$$H(s, F, G) = C [s I_n - A - BF]^{-1} BG \tag{1.6}$$

donde s es la variable de transformación de Laplace e I_n es una matriz identidad de dimensión $n \times n$. (1)

DEFINICION No. 1

El sistema $S(F,G)$ está desacoplado si $H(s,F,G)$ es diagonal y no singular.

Esta definición implica que:

- (a) La salida y_i del sistema realimentado depende exclusivamente de la correspondiente entrada w_i , de manera independiente de las otras entradas, i.e.:

$$y_i = h_{ii}(s) w_i$$

donde $h_{ii}(s)$ es el i -ésimo elemento de la diagonal principal de $H(s,F,G)$, y

- (b) Δy_i , la variación de y_i debida a una variación Δw_i , no es nula, en general; i.e.:

$$h_{ii}(s) \neq 0$$

La definición No. 1 fué propuesta por Morgan [26] y formalizada por Gilbert [11] y resulta bastante intuitiva en el sentido de salidas de un sistema controladas independientemente por entradas correspondientes. Una definición equivalente en el dominio del tiempo puede verse en [27]. Si bien existen otras definiciones -

(1) Puede probarse fácilmente que:

$$S(F,G) = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BF) x(t) + BG w(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

mediante una sustitución trivial de (1.4) en (1.1) y (1.2), luego (1.6) resulta evidente.

de desacoplamiento de sistemas multivariables, [8] , [32] , [37] , éstas no resultan tan simples e intuitivas como la Definición No. 1 anterior.

1.3 FORMALIZACION DEL PROBLEMA DE DESACOPLAMIENTO

El problema de desacoplamiento de un sistema $S = \{A, B, C\}$ consiste en encontrar un par apropiado de matrices de realimentación $\{F, G\}$ de tal modo que el sistema de malla cerrada $S(F, G)$ tenga una matriz de transferencia $H(s, F, G)$ diagonal y no singular.

El tratar de resolver el problema de desacoplamiento lleva en seguida a la formulación de las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué condiciones se deben cumplir en S para que se asegure la existencia del par de desacoplamiento $\{F, G\}$?
- b) Si es posible el desacoplamiento, ¿qué libertad para escoger un par $\{F, G\}$ existe?
- c) ¿Qué características del sistema de malla cerrada $S(F, G)$ pueden especificarse conservando el desacoplamiento? y
- d) Una vez especificadas las características de malla cerrada deseadas, ¿cómo se determinan F y G ?

Las respuestas a estas preguntas son el objeto de los siguientes capítulos.

1.4 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Entre las restricciones impuestas al sistema S de la expresión (1.3) está la de tener un número de entradas igual al de salidas ($r=m$), ésto es con el objeto de *desacoplar* al sistema S en un conjunto de m subsistemas de una entrada-una salida.

Por otra parte, la aplicación de la ley de control de realimentación (1.4) asume que el estado del sistema $S = \{A, B, C\}$ está completamente determinado y disponible para propósitos de control. -- Sin embargo, en muchas ocasiones esta suposición es inadecuada puesto que no siempre es posible contar con el vector de estado completo, -- sea porque las variables de estado no están accesibles para medición directa, que el número de dispositivos de medición es limitado, o bien, que la medición de algunas variables es costosa. Esta dificultad puede ser franqueada de dos maneras:

- a) Si el sistema S tiene un vector de estado incompleto disponible y además es *observable*, es posible estimar el vector de estado completo mediante un dispositivo dinámico llamado *observador* el cual proporciona una aproximación al vector de estado a partir de los vectores de entrada y salida (siempre disponibles) del sistema S . Este planteamiento se ilustra en la fig. 1.2. Una vez obtenido el vector de estado estimado de S , es posible aplicarlo a la ley de realimentación (1.4).

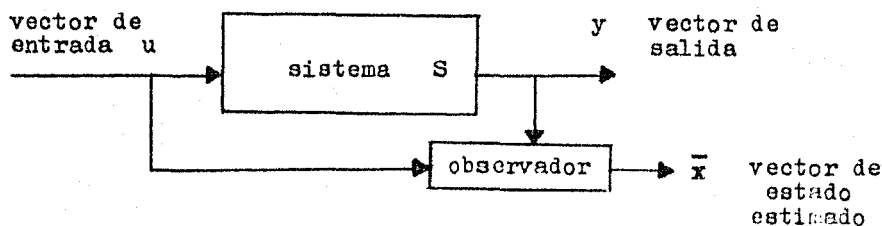


Fig. 1.2 Estimación del estado del sistema S .

- b) Encontrar un sustituto adecuado de la ley de control (1.4) que logre el desacoplamiento del sistema S. Por ejemplo, implantar una ley de realimentación de la salida (siempre disponible) de la forma:

$$u(t) = M y(t) + G w(t) \quad (1.7)$$

donde M es el elemento de realimentación de la salida. - El planteamiento sugerido por esta expresión se ilustra en la fig. 1.3.

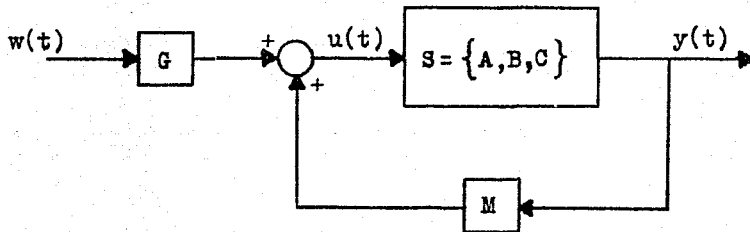


Fig. 1.3 Realimentación de la salida del sistema S.

Los procedimientos arriba señalados, si bien son deseables - según las circunstancias, también tienen implicaciones desfavorables. En el primer caso -estimar el estado- se aumenta la dimensión del sistema y con ello los costos producidos por su implantación.- En el segundo caso -realimentar la salida- se pierde cierta flexibilidad en el diseño del sistema realimentado con respecto al caso de realimentar el estado, [19], [3], [13].

En este trabajo se asumirá que el vector de estado está completamente disponible para propósitos de control, con las reservas e implicaciones inherentes. Queda abierta la inquietud planteada en esta sección para rebasar los alcances y limitaciones de este trabajo.

CAPITULO 2

EXISTENCIA DE UNA SOLUCION AL PROBLEMA DE DESACOPLAMIENTO

2.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución al problema de desacoplamiento propuesto en el capítulo anterior. La exposición es hecha dentro de un marco de referencia histórico sobre los principales trabajos concernientes a este tema.

2.2 HABIA UNA VEZ ...

El planteamiento del problema del desacoplamiento de sistemas multivariables es relativamente reciente, hablando en términos del desarrollo de la ciencia: sin embargo, existe a la fecha una literatura al respecto muy numerosa. Morse y Wonham mencionan en [23] que los primeros intentos para lograr controles multivariables no-interactuantes de que se tiene registro, fueron hechos en la Unión Soviética a principio de la década de los 1930's con un estudio aplicado al control de potencia de máquinas generadoras

[21] , y a finales de la década siguiente con un trabajo sobre control de turbinas de gas [2]. Posteriormente, varios investigadores de diferentes nacionalidades continuaron los esfuerzos por obtener soluciones al problema. En tal virtud, a finales de los 50's, los métodos de desacoplamiento con base en técnicas de matriz de transferencia eran de uso común [10], [17]. En ellos se asume que un sistema físico puede ser representado por una matriz de transferencia; el sistema se compensa entonces para lograr una nueva matriz de transferencia diagonal. El problema de síntesis consiste en determinar los compensadores que logran diagonalizar la matriz de transferencia, incluyendo en ella ciertas características de diseño. Usualmente los compensadores que resultan son de alto orden (dinámicos) y además presentan problemas de estabilidad y realización, por lo que estos métodos son de poca utilidad en la práctica.

Otros intentos por lograr controles no-interactuantes se hicieron a principios de los 60's utilizando diagramas de Bode, con un éxito muy limitado [5].

En 1963 Morgan [26] formuló por primera vez el problema de desacoplamiento como un problema de control con realimentación, empleando una representación en variables de estado del sistema físico. Su planteamiento asume que la dinámica de un sistema está representada por un vector de estado: entonces se dice que el sistema es *desacoplado* si, después de realimentar el estado, la matriz de transferencia de malla cerrada es diagonal. Morgan dió una condición de suficiencia para el desacoplamiento por realimentación estática del vector de estado de una clase restringida de sistemas lineales e invariables con el tiempo. Cuando era posible lograr el desacoplamiento, Morgan mostró que los subsistemas resultantes podían ser -

inestables y entonces señaló la posible existencia de sistemas para los cuales no fuera posible lograr el desacoplamiento y la localización de polos simultáneamente.

El planteamiento de Morgan fué significativo porque orientó la investigación posterior hacia una nueva y fructífera dirección.

En 1965 Rekasius [35] investigó el problema propuesto por Morgan y extendió los resultados de este último. Señaló una condición-necesaria y suficiente para el desacoplamiento por realimentación -dinámica del vector de estado. Para el caso de realimentación estática, dió una nueva condición de suficiencia para el desacoplamiento. En su planteamiento propone un procedimiento de prueba y error-para especificar un cierto número de polos del sistema, conservando la no-interacción.

Aunque significativos, los trabajos de Morgan y Rekasius resultaron incompletos, pues ninguno de ellos dió una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución al problema.

En 1967 Falb y Wolovich [8] dieron por primera vez una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución al problema de Morgan. Esta condición es la que se menciona en el siguiente

TEOREMA No. 1

Un sistema $S = \{A, B, C\}$ puede ser desacoplado si y solo si

$$\det B^* \neq 0 \quad (2.1)$$

esto es, si y solo si la matriz B^* es no singular, donde B^* es una matriz $m \times m$ definida por:

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

C_i denota el i ésimo renglón de la matriz C , y

$$d_i = \begin{cases} \min \{ j : C_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1 \} & (2.3) \\ n-1 \text{ si } C_i A^j B = 0 \text{ para toda } j & (2.4) \end{cases}$$

Además de obtener este importante resultado, Falb y Wolovich caracterizaron una clase de matrices de desacoplo $\{F, G\}$, determinaron una cota inferior para el número de polos que pueden ser especificados conservando la no-interacción y desarrollaron un procedimiento de síntesis para obtener las configuraciones de polos deseadas. A pesar de que la demostración de este teorema la hicieron con base en su intrincada definición de desacoplamiento y resulta de difícil comprensión, sus resultados fueron una importante contribución al impulso que cobró la materia a partir de la publicación de su artículo.

La investigación posterior a Falb y Wolovich [B] se orientó a dar claridad y extender los resultados de estos autores. Así, Mufti [27] demostró el Teorema No. 1 bajo su propia definición de desacoplamiento, obteniendo los mismos resultados de Falb y Wolovich, si bien, de manera más intuitiva.

En 1969 Gilbert [11] describió la estructura de los sistemas -

desacoplados por realimentación estática del vector de estado, mediante una clara representación matricial, demostró el Teorema No. 1 de una manera sencilla, caracterizó el par de desacoplamiento $\{F, G\}$, el máximo número de polos asignables y las funciones de transferencia del sistema desacoplado que es posible obtener. El planteamiento utilizado por Gilbert se basa en tratar un problema equivalente de estructura simple mediante transformaciones de similitud aplicadas al sistema original. Esta teoría fue traducida por Gilbert y Pivnichny [12] a fines de 1969, en un algoritmo capaz de ser implantado en computadora digital. El estudio de este algoritmo constituye una parte esencial del presente trabajo.

En 1971 Mufti [28] ofreció otra estructura de la clase de matrices de realimentación para el desacoplamiento por realimentación estática del vector de estado. Comparado con el método de Gilbert, el de Mufti requiere de cálculos más sencillos pero más laboriosos, y desde el punto de vista computacional el algoritmo de Gilbert y Pivnichny es más eficiente. Sin embargo Mufti señaló dos casos particulares de aplicación restringida en los que su método resulta ser elegante y menos laborioso:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{i=1}^m d_i + m = n \\ \text{ii)} \quad & \sum_{i=1}^m d_i = 0, \quad m = n-1 \end{aligned}$$

Durante los primeros años de los 70's la investigación sobre desacoplamiento se orientó, mediante nuevos procedimientos, a encontrar solución para sistemas multivariables menos restringidos.

Sato y Lopresti [33] , [34] proponen el problema de desacoplamiento parcial en sistemas lineales multivariados de m entradas y r salidas. El problema consiste en determinar el par de desacoplamiento $\{F,G\}$ para el cual un subconjunto del vector de salidas está desacoplado *uno a uno* (2) por un subconjunto del vector de entradas, i.e., se trata de lograr una matriz de transferencia de malla cerrada de la forma:

$$H(s,F,G) = \left[\begin{array}{cccc|c} h_{11}(s) & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & h_{22}(s) & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & h_{kk}(s) & \\ \hline & & & & \hat{H}(s,F,G) \end{array} \right]$$

donde $h_{ii}(s)$, $i=1,2,\dots,k$ son funciones de transferencia racionales propias y $\hat{H}(s,F,G)$ es una matriz $(r-k) \times (m-k)$ de transferencia racional propia.

Wonham y Morse [37] generalizaron el problema de Morgan proponiendo el desacoplamiento por bloques de sistemas lineales multivariados mediante realimentación estática del vector de estado; este problema lo llamaron *Problema de Desacoplamiento Restringido (PDR)*.

En sistemas multivariados, cuando $r \neq m$, puede obtenerse un sistema desacoplado por bloques de modo tal que cada elemento de

(2) Esto es, una entrada controla una y sólo una salida.

una partición del vector de entradas controle *uno a uno* a cada elemento correspondiente de una partición del vector de salidas. - Para ello, la matriz de transferencia de malla cerrada que se obtiene al aplicar un par de realimentación $\{F, G\}$ debe ser *diagonal por bloques*.

El planteamiento de este problema fué hecho en términos geométricos,⁽³⁾ de lo que resultó, según sus autores, una formulación *transparente* del problema y una descripción simple de la estructura del sistema desacoplado.

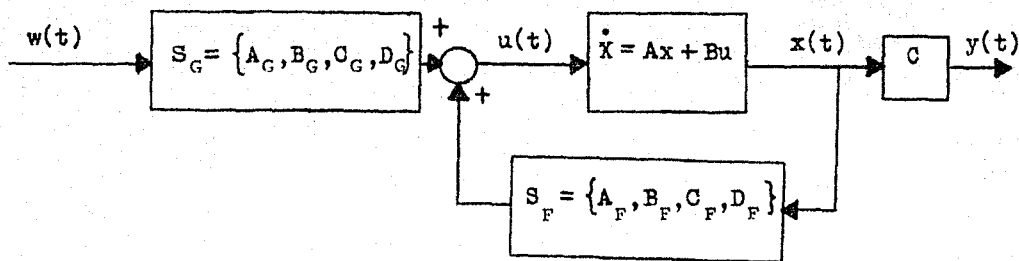
El PDR no ha sido resuelto completamente aún, debido a que la caracterización de la clase de matrices F que desacoplan es no lineal. Se cuenta, sin embargo, con la solución de tres casos - particulares importantes, uno de los cuales es el planteado por Falb y Wolovich en [8] .

En un artículo posterior Morse y Wonham [24] resolvieron completamente la versión dinámica del problema de desacoplamiento por bloques, llamada *Problema de Desacoplamiento Extendido (PDE)*, porque el empleo de realimentación dinámica (Fig. 2.1) aumenta o *extiende* la dimensión del espacio de estados. El planteamiento de este problema fué también en términos geométricos. El PDE admite más de una solución, ya que siempre es posible desacoplar y localizar adecuadamente todos los polos de un sistema simultáneamente mediante compensadores de orden suficientemente alto. Si bién este procedimiento es satisfactorio como método de síntesis, existe una -

(3) El enfoque geométrico del problema de desacoplamiento se basa en conceptos de espacios y subespacios vectoriales. Varios autores sostienen que este enfoque da mayor claridad de conceptos que las complejas estructuras algebraicas hasta entonces desarrolladas.

restricción de tipo económico: la de lograr compensadores del menor orden posible.

Con el planteamiento del PDE, el PDR resulta un caso particular del primero.



S_G y S_F tienen, respectivamente, matrices de transferencia
 $G(s) = C_G(Is - A_G)^{-1} B_G + D_G$ y $F(s) = C_F(Is - A_F)^{-1} B_F + D_F$

Fig. 2.1 Realimentación dinámica del vector de estado del sistema $S = \{A, B, C\}$.

En 1971 Silverman y Payne [32] plantearon el PDE considerando un sistema $S = \{A, B, C, D\}$ y aplicando realimentación (dinámica) del vector de salida. El planteamiento fué hecho en términos algebraicos (matriciales) adecuados para computación. La solución completa de este problema fué dada por Howze y Pearson en [14].

Otro problema interesante sobre desacoplamiento es el llamado *Desacoplamiento triangular* el cual consiste en determinar el par $\{F, G\}$ que logre una matriz de transferencia de malla cerrada triangular (superior o inferior) con renglones no nulos, a partir de un sistema con $r = m$. Para una discusión completa de este problema véase el trabajo de Morse y Wonham [25].

Hasta aquí se han planteado, en términos generales, algunos de los trabajos más importantes sobre desacoplamiento de sistemas multivariables. El estado actual de la investigación sobre desacoplamiento cuenta con un soporte bibliográfico muy extenso que abarca - procedimientos tan diversos y específicos que aún un señalamiento - superficial requeriría de un considerable espacio dentro de este - trabajo. No obstante, se señalarán algunos de los planteamientos don - de la investigación sobre desacoplamiento se ha encaminado:

Sistemas variables con el tiempo

Sistemas no lineales

Sistemas discretos

Sistemas muestreados

Sistemas con retraso en el tiempo

Sistemas de parámetros distribuidos

Desacoplamiento y optimación, etc.

A pesar de los avances en estas direcciones, algunos investiga - dores consideran que el problema de la no-interacción debería ocu - par menor atención. Meerov [22] detracta la teoría de desacopla - miento señalando que el conjunto de sistemas que pueden desacoplar - se constituye una subclase muy restringida de los sistemas multiva - riables, en los cuales la implantación de las leyes de desacopla - miento no conduce, en casi todos los casos, a la optimación del de - sempeño de dichos sistemas. En su opinión, tal optimación debe cons - tituir el problema fundamental de los sistemas multivariables.

A. S. Foss [9] señala el hecho de que el control no-interac - tuante no sea aplicable en la mayoría de los problemas relacionados con procesos químicos. Esto es debido probablemente a que la inter -

acción de las variables en esos procesos es determinante en la dinámica del sistema en conjunto.

A. G. Macfarlane, en un extenso trabajo de revisión de la teoría de sistemas multivariables lineales [20] expone las desventajas de la aplicación de un control no-interactuante. Estas pueden resumirse en:

- 1) El compromiso que implica diagonalizar la matriz de transferencia se traduce en un sacrificio de las características que puedan especificarse en el sistema desacoplado.
- 2) Aún cuando puedan especificarse algunas características, el sistema desacoplado se vuelve innecesariamente complicado.
- 3) La técnica de desacoplamiento falla si la matriz de transferencia diagonal tiene polos fijos con parte real positiva, pues entonces el sistema desacoplado es inestable.

Contra estas objeciones, sugiere que se abandone el procedimiento de desacoplamiento por otras técnicas mejor aplicables al estudio de los sistemas multivariables, e.g. el Arreglo Inverso de Nyquist, que desde su punto de vista resulta ser "una técnica ampliamente superior que proporciona una configuración simple de los controladores aplicados y una mayor flexibilidad hacia las variaciones de la planta"⁽⁴⁾.

(4) Ob. cit. p. 480.

2.3 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El capítulo que aquí concluye es una revisión somera de los principales trabajos sobre desacoplamiento de sistemas multivariables. Estos trabajos representan el esfuerzo que se ha hecho por proponer un procedimiento válido en el estudio de los sistemas multivariables.

Ciertamente, la implantación de las leyes de desacoplamiento lleva consigo objeciones y desventajas inherentes a pesar de la simplicidad que pueda lograrse en el sistema desacoplado. Sin embargo, la teoría de desacoplamiento representó un avance significativo en el estudio de los sistemas multivariables, a falta en un momento dado, de técnicas adecuadas para tratar la interacción de tales sistemas. Es de esperarse que con el desarrollo de las nuevas técnicas en estudio, se tenga una mejor comprensión de los efectos de la interacción y pueda resolverse entonces completamente el problema de los sistemas multivariables.

CAPITULO 3

CARACTERIZACION DE UNA CLASE DE MATRICES DE DESACOPPLAMIENTO

3.1 INTRODUCCION

En este cap. se especifica una clase de matrices de desacoplamiento $\{F, G\}$ para el tipo de sistemas propuesto en el cap. 1.

En la demostración del Teorema No. 1 Falb y Wolovich [8] - señalan que, si $S = \{A, B, C\}$ es desacoplable ($\det B^* \neq 0$), el par de matrices de realimentación

$$F^* = -B^{*-1} A^* \quad (3.1)$$

$$G^* = B^{*-1} \Lambda \quad (3.2)$$

desacoplan al sistema S ; donde

B^* está definida por (2.2),

$$A^* = \begin{bmatrix} C_1 & A^{d_1+1} \\ \vdots & \vdots \\ C_m & A^{d_m+1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

y A es una matriz $m \times m$ diagonal y no singular, de la forma

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (3.4)$$

La matriz de transferencia del sistema de malla cerrada

$$S(F^*, G^*) = \{A + BF^*, BG^*, C\} \quad (3.5)$$

es diagonal, con elementos de la forma

$$h_{i_i}(s, F^*, G^*) = \lambda_i s^{-(\hat{d}_i+1)} \quad (3.6)$$

i.e. la salida y_i del sistema $S(F^*, G^*)$ es la $(\hat{d}_i+1)^{\text{a}}$ integral de la entrada w_i .

Si bien el par $\{F^*, G^*\}$ dado por (3.1) y (3.2) es una solución al problema de desacoplamiento del sistema S , es claro que puede existir un conjunto de pares $\{F, G\}$ que desacoplen, se podría escoger un par $\{F, G\}$ particular que permitiese especificar un "mejor desempeño" del sistema desacoplado que el propuesto por (3.5). El propósito de este capítulo es la caracterización de estos pares $\{F, G\}$.

3.2 CARACTERIZACION DE LA CLASE DE MATRICES DE DESACOPLAMIENTO

Existen varias caracterizaciones de la clase de matrices de desacoplamiento: Falb y Wolovich [8], [38], Liu y Bergman [18], Paul [29], Mufti [28], Gilbert [11], etc. En particular, ésta última resulta relativamente simple y ha sido implantada en un algoritmo de computación particularmente eficiente [12], por estas razones se describirá a continuación la clase de matrices de desacoplamiento debida a Gilbert, y en el cap. siguiente el programa de computadora [12]: en ambos casos se empleará la misma nota

ción que Gilbert empleó en [11].

3.2.1 Sistemas desacoplados por integradores.

La matriz de transferencia del sistema $S(F^*, G^*)$ de la expresión (3.5) es diagonal, con elementos de la forma (3.6). En este sistema se cumplen:

$$C_i(A+BF^*)^{d_i}BG^* = e_i \lambda_i \quad (3.7)$$

$$y \quad C_i(A+BF^*)^{d_i+1} = 0 \quad (3.8)$$

donde e_i es el i -ésimo vector renglón de una matriz identidad $m \times m$. Estas expresiones son fácilmente comprensibles si se ven como el resultado de obtener las matrices dadas por (2.2) y (3.3) a partir de un sistema $S(F^*, G^*)$ ya desacoplado. Dicho de otro modo:

$$D(F^*, G^*) = \Gamma \quad (3.9)$$

$$y \quad A^*(F^*, G^*) = 0 \quad (3.10)$$

donde Γ es una matriz $m \times m$ diagonal y no singular.

NOTA: Gilbert llama D a la matriz B^* dada por (2.2).

Gilbert denominó *Desacoplados por Integradores* (D.I.) a todos los sistemas que, después de aplicarles un par de realimentación $\{F, G\}$, cumplen con:

$$D(F, G) = \Gamma \quad (3.11)$$

$$y \quad A^*(F, G) = 0 \quad (3.12)$$

Esa denominación obedece a la forma de los elementos de la matriz de transferencia $H(s, F^*, G^*)$ en la expresión (3.6).

Como consecuencia de lo anterior, y de acuerdo con (3.7) y (3.8), el sistema $S(F^*, G^*)$ está D.I. (Desacoplado por integradores).

3.2.2 Sistemas equivalentes bajo una ley de control de realimentación.

La conexión entre los sistemas D.I. y la solución al problema de desacoplamiento se establece mediante la siguiente

DEFINICION No. 2

El sistema $S''(F'', G'')$ es equivalente (bajo una ley de control de realimentación) (E.L.C.) al sistema D.I. $S'(F', G')$, si existe una correspondencia entre $\{F'', G''\}$ y $\{F', G'\}$ tal que

$$H(s, F'', G'') = H(s, F', G')$$

NOTAS:

- a) Si el problema de desacoplamiento está resuelto para S'' , también lo está para S' .
- b) La equivalencia anterior es transitiva, i.e. si S''' y S'' son E.L.C., y a su vez lo son S'' y S' , entonces S''' y S' son E.L.C.

La importancia de esta definición está en que una vez resuelto el problema de desacoplamiento en S'' (que puede ser de estructura simple), queda resuelto el de S' aplicando la correspondencia entre $\{F'', G''\}$ y $\{F', G'\}$.

3.2.3 Invariantes.

Gilbert demostró, como ya antes Falb y Wolovich, que los parámetros d_i definidos por (2.3) y (2.4) y la matriz D definida por (2.2), son elementos de $S(F,G)$ que, para cualquier matriz G fija, no se modifican bajo transformaciones de similitud y realimentación estática del vector de estado aplicadas a $S(F,G)$; - por esta razón él los denominó *invariantes*.⁽⁵⁾

3.2.4 Forma canónica de desacoplamiento.

Gilbert resolvió el problema de desacoplamiento restringido, bajo una forma canónica del sistema D.I. de la expresión (3.5). Para que dicho sistema adopte esa forma se requiere efectuar en él dos transformaciones de similitud, de tal modo que se verifique la ley de control de equivalencia de la sección 3.2.2 anterior. Considérese inicialmente al sistema de la expresión (1.3):

$$S = \{A, B, C\}$$

Al aplicar el par de realimentación $\{F, G\}$ dado por (3.1) y (3.2), el sistema S se transforma en D.I., i.e.

$$\{F, G\} : S \longrightarrow S(F, G) = \bar{S} = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$$

donde $\bar{A} = A + BF = A - BD^{-1}A^*$ (3.13)

$$\bar{B} = BG = BD^{-1}A \quad (3.14)$$

$$\bar{C} = C \quad (3.15)$$

Es claro que \bar{S} está D.I. puesto que en él se verifican (3.11) y (3.12), i.e.

$$\bar{C}_i \bar{A}^{-d_i} \bar{B} = C_i (A + BF)^{d_i} B G = e_i \lambda_i = \bar{C}_i \quad (3.16)$$

$$\bar{C}_i \bar{A}^{-d_i+1} = C_i (A + BF)^{d_i+1} = 0 \quad (3.17)$$

(5) Una discusión interesante sobre los invariantes d_i puede verse en [1].

Además, S y \bar{S} son E.L.O. ya que

$$\bar{F} = DF + A^* \quad (3.18.a)$$

$$\bar{G} = DG \quad (3.18.b)$$

i.e. $H(s, F, G) = H(s, \bar{F}, \bar{G})$

Sea \bar{H} la matriz $n \times n$ de controlabilidad del sistema \bar{S}

$$\bar{H} = [\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \dots \mid \bar{A}^{(n-1)}\bar{B}] \quad (3.19)$$

El sistema \bar{S} es completamente controlable (controlable) si el rango de la matriz \bar{H} es n , i.e.

$$\text{rango}(\bar{H}) = n_c = n$$

Si $n_c < n$, \bar{S} no es controlable, es sabido [4], [39] que existe una matriz de transformación de similitud $n \times n$ no singular T_1 que separa de \bar{S} la parte controlable del mismo:

$$T_1 : \bar{S} \longrightarrow \tilde{S} = \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$$

donde
$$\tilde{A} = T_1 \bar{A} T_1^{-1} = \begin{bmatrix} A^c & A^u \\ 0 & A^u \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\tilde{B} = T_1 \bar{B} = \begin{bmatrix} B^c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\tilde{C} = \bar{C} T_1^{-1} = \begin{bmatrix} C^c & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

y $S^c = \{A^c, B^c, C^c\}$ es la parte controlable de \bar{S} .

Si \bar{S} es controlable ($n_c = n$), entonces

$$\bar{S} = \tilde{S} = S^c$$

i.e. $T_1 = I \quad (3.23)$

\tilde{S} y S^c están D.I. (recuérdese que d_1 y D son invariantes bajo transformaciones de similitud y realimentación estática del vector de estado), y además \tilde{S} y \tilde{S} son E.L.C. porque

$$\tilde{F} T_1 = \bar{F} \quad (3.24.a)$$

$$y \quad \tilde{G} = \bar{G} \quad (3.24.b)$$

Verificar la propiedad de controlabilidad de un sistema de malla abierta $\tilde{S} = \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ es importante, pues ésta implica la asignabilidad arbitraria de los polos del sistema de malla cerrada $S(F,G)$ (Wonham [36]).

Aplicando una segunda matriz de transformación de similitud T_2 al sistema \tilde{S} :

$$T_2 : \tilde{S} \longrightarrow \hat{S} = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$$

T_2 está definida por

$$T_2 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

donde Q es una matriz cuadrada no singular, cuya dimensión es igual a la dimensión del subespacio controlable de \tilde{S} (i.e. n_c) y está dada por

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{m+1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde

$$Q_i = \begin{bmatrix} C_i^c \\ \vdots \\ C_i^c A^{d_i} \\ q_i^1 \\ \vdots \\ q_i^{p_i - d_i - 1} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m$$

$$Q_{m+1} = \begin{bmatrix} q_{m+1}^1 \\ \vdots \\ q_{m+1}^{p_{m+1}} \end{bmatrix}$$

donde a su vez, los enteros $p_i = \dim(Q_i)$; $i = 1, \dots, m+1$ y

los vectores $q_i^1, \dots, q_i^{p_i - d_i - 1}$, $i = 1, \dots, m$ forman una base del espacio nulo de la matriz

$$E = \begin{bmatrix} Z_i \\ C_i^c \\ \vdots \\ C_i^c (A^c)^{d_i} \end{bmatrix}$$

y donde la matriz Z_i es la matriz de controlabilidad

$$\left[B^c \mid A^c B^c \mid \dots \mid (A^c)^{n_c - 1} B^c \right]$$

cuyas n_c columnas $i, i+m, \dots, i+(n_c-1)m$ han sido sustituidas por ceros. Los renglones de Q_{m+1} deben extender a los renglones Q_1, \dots, Q_m para formar un conjunto de n_c vectores linealmente independientes, i.e. los vectores $q_{m+1}^1, \dots, q_{m+1}^{p_{m+1}}$ son

man una base del espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación T_2 aplicada a \tilde{S} crea un nuevo sistema $\hat{S} = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ cuya estructura es la siguiente

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_1^u \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_2^u \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m & 0 & A_m^u \\ A_1^c & A_2^c & A_3^c & \dots & A_m^c & A_{m+1} & A_{m+1}^u \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_{m+2} \end{bmatrix}$$

A_i es $p_i x_{p_i}$,
 A_i^c es $p_{m+1} x_{p_i}$,
 A_i^u es $p_i x_{p_{m+2}}$,

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_m \\ b_1^c & b_2^c & \dots & b_m^c \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

b_i es $p_i x_1$,
 b_i^c es $p_{m+1} x_1$,

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1^u \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & c_2^u \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_m & 0 & c_m^u \end{bmatrix}$$

c_i es $l x_{p_i}$,
 c_i^u es $l x_{p_{m+2}}$.

donde $p_i \geq d_i + 1$, $i = 1, \dots, m$; $p_{m+1} = n - \sum_{i=1}^m p_i \geq 0$ y

Para $i = 1, \dots, m$ las matrices A_i , b_i y c_i tienen la siguiente forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ Y_i & \Phi_i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} Y_i \text{ es } r_i \times (d_i + 1), \\ \Phi_i \text{ es } r_i \times r_i, \end{array}$$

$$b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \beta_i \end{bmatrix}, \quad \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{i r_i} \end{bmatrix},$$

$$c_i = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0],$$

donde $r_i = p_i - l - d_i$.

Es claro que el sistema \hat{S} está D.I., y que \tilde{S} y \hat{S} son E.L.C. puesto que

$$\hat{F} T_2 = \tilde{F} \quad (3.27.a)$$

$$\hat{G} = \tilde{G} \quad (3.27.b)$$

La importancia del sistema $\hat{S} = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ es que adopta, lo que Gilbert llamó, una *Forma Canónica de Desacoplamiento* donde se resuelve el problema de desacoplamiento.

3.3 ESTRUCTURA DEL SISTEMA DESACOPLADO

Ha quedado establecido que T_1 transforma al sistema D.I. \tilde{S} en un sistema \hat{S} cuya parte controlable es conocida, y que T_2 transforma a \hat{S} en un sistema C.D., de aquí que pueda enunciarse el siguiente

TEOREMA No. 2

Todo sistema D.I. es similar a uno C.D.

Gilbert demostró que para lograr el desacoplamiento de un sistema C.D. es condición necesaria y suficiente que el par $\{\hat{F}, \hat{G}\}$ tenga la estructura que se describe a continuación:

TEOREMA No. 3

Si \hat{S} está C.D., el par $\{\hat{F}, \hat{G}\}$ desacopla a \hat{S} si y sólo si

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \theta_1^u \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 & 0 & \theta_2^u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_m & 0 & \theta_m^u \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde θ_i es de dimensiones $l \times p_i$ y θ_i^u es $l \times p_{m-2}$

$$y \quad \hat{G} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \Lambda \quad (3.29)$$

con $\lambda_i \neq 0$ para $i=1, \dots, m$

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de transferencia del sistema desacoplado son:

$$h_{ii}(s, F, G) = c_i \left[I s - A_i - b_i \theta_i \right]^{-1} b_i \lambda_i \quad (3.30)$$

de aquí que $h_{i1}(s, F, G)$ pueda interpretarse como la función de transferencia del sistema $S^i(\theta_1, \lambda_1)$, donde $S^i = \{A_i, b_i, c_i\}$ es un sistema controlable de una entrada-una salida y orden p_i . -
 Más específicamente:

TEOREMA No. 4

Considerando que $S^i = \{A_i, b_i, c_i\}$ es un sistema controlable de una entrada-una salida y orden p_i , entonces, la función de transferencia $S^i(\theta_1, \lambda_1)$ tiene la forma:

$$h_{i1}(s, \theta_1, \lambda_1) = \frac{\alpha_i(s) \lambda_1}{\psi_i(s, \sigma_1)} \quad (3.31)$$

donde $\alpha_i(s)$ es un polinomio de grado p_i-1 ó menor, y

$$\psi_i(s, \sigma_1) = s^{p_i} - \sigma_{i1} s^{p_i-1} - \dots - \sigma_{ip_i}$$

De lo anterior:

$$\alpha_i(s) = c_i \left[\text{adj}(Is - A_i - b_i \theta_1) \right] b_i$$

$$y \quad \psi_i(s, \sigma_1) = \det (Is - A_i - b_i \theta_1)$$

Calculando la matriz $\text{adj}(Is - A_i - b_i \theta_1)$ con el método de Leverrier⁽⁶⁾

$$\text{adj}(Is - \hat{A}_i) = R_{i0} s^{p_i-1} - R_{i1} s^{p_i-2} - \dots - R_{ip_i-1}$$

(6) Gantmacher, Matrix Theory, Vol. I, pp.82-89, Chelsea Publishing Co. Nueva York, N. Y., 1959.

donde

$$\hat{A}_i = A_i + b_i \theta_i$$

$$R_{i0} = I$$

$$R_{i1} = \hat{A}_i - q_{i1} I ;$$

$$q_{i1} = \text{tr } \hat{A}_i$$

$$R_{i2} = \hat{A}_i R_{i1} - q_{i2} I ;$$

$$q_{i2} = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{A}_i R_{i1})$$

⋮

⋮

$$R_{ip_i-1} = \hat{A}_i R_{ip_i-2} - q_{ip_i-1} I ;$$

$$q_{ip_i-1} = \frac{1}{p_i-1} \text{tr}(\hat{A}_i R_{ip_i-2})$$

$$R_{ip_i} = \hat{A}_i R_{ip_i-1} - q_{ip_i} I = 0 ;$$

$$q_{ip_i} = \frac{1}{p_i} \text{tr}(\hat{A}_i R_{ip_i-1})$$

donde $\text{tr}(\cdot)$ significa la traza de la matriz.

La última expresión $R_{ip_i} = \hat{A}_i R_{ip_i-1} - q_{ip_i} I = 0$ se utiliza para

verificar los cálculos del algoritmo.

Sean $\sigma_i = [\sigma_{ip_i}, \dots, \sigma_{i1}]$ y $\pi_i = [q_{ip_i}, \dots, q_{i1}]$, si se define la matriz $K_i = [K_{i1} \dots K_{ip_i}]$, donde las columnas $K_{ij} = R_{ip_i-j} b_j$, $j = 1, \dots, p_i$ entonces, K_i es no singular (7) y $\theta_i K_i = \sigma_i - \pi_i$. Haciendo $V_i = K_i^{-1}$ se tiene:

$$\theta_i = (\sigma_i - \pi_i) V_i \quad (3.32)$$

$\pi_i = [\pi_{ip_i}, \dots, \pi_{i1}]$ son los coeficientes del polinomio característico de la matriz \hat{A}_i . Obsérvese que:

$$\pi_{ik} = q_{ik} = \alpha_{ik}, \quad k = 1, \dots, r_i$$

$$\pi_{ik} = q_{ik} = 0, \quad k = r_i + 1, \dots, p_i$$

El polinomio característico del sistema desacoplado es:

$$q(s, F) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i) \quad (3.33)$$

donde $\alpha_i(s) = \det(Is - \hat{A}_i)$, $i = m+1, m+2$.

La correspondencia entre (\hat{F}, \hat{G}) y (F, G) asociada a la propiedad de equivalencia señalada en la Definición No. 2, proporciona el par (F, G) para el desacoplamiento del sistema S. Para ello es necesario aplicar las correspondencias señaladas por (3.27), (3.24) y (3.18):

$$\tilde{F} = \hat{F} T_2$$

$$\bar{F} = \tilde{F} T_1 = \hat{F} T_2 T_1$$

$$F = D^{-1} [-A^* + \bar{F}] = -D^{-1} A^* + D^{-1} \hat{F} T_2 T_1$$

$$\text{i.e. } F = -D^{-1} A^* + D^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \theta_1^u \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 & 0 & \theta_2^u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_m & 0 & \theta_m^u \end{bmatrix} T_2 T_1 \quad (3.34)$$

donde T_1 y T_2 son matrices no singulares que justifican la proposición del Teorema No. 2.

Por otro lado:

$$\tilde{G} = \hat{G}$$

$$\bar{G} = \tilde{G}$$

$$G = D^{-1} \bar{G}$$

$$\text{i.e. } G = D^{-1} A^{-1} \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (3.35)$$

Así pues, las expresiones (3.34) y (3.35) constituyen el par $\{F, G\}$ que aplicado a $S = \{A, B, C\}$ permite el diseño de un sistema $S(F, G) = \{A + BF, BG, C\}$ desacoplado. Pueden ahora resumirse los resultados importantes de esta caracterización en el enunciado del siguiente

TEOREMA No. 5

Considérese que $S = \{A, B, C\}$ puede desacoplarse. Si $\{F, G\}$ desacopla a S , los elementos de la diagonal principal de $H(s, F, G)$ tienen la forma indicada por (3.31), donde los enteros p_i y r_i y los polinomios $\alpha_i(s)$ están unívocamente determinados a partir de S . Además, $q(s, F)$ tiene la forma indicada por (3.33), donde $\alpha_{m+1}(s)$ y $\alpha_{m+2}(s)$ son polinomios de grados p_{m+1} y p_{m+2} respectivamente, unívocamente determinados a partir de S . La clase de matrices $\{F, G\}$ que desacoplan a S puede ser caracterizada por $G \in \mathcal{L}$ y $F \in \mathcal{F}$, donde \mathcal{L} es un espacio lineal m dimensional y \mathcal{F} es una variedad lineal $(\sum_{i=1}^m p_i + m p_{m+2})$ dimensional. Más específicamente, existen matrices $G_i, J_1^i, \dots, J_{p_i}^i$, para $i = 1, \dots, m$, y un espacio lineal $(m p_{m+2})$ dimensional \mathcal{F}^u que está unívocamente determinado a partir de S , tal que

$$G = D^{-1} \Lambda \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (3.36)$$

$$F = D^{-1} A^* + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} (\sigma_{ik} - \pi_{ik}) J_k^i + F^u \quad (3.37)$$

donde $F^u \in \mathcal{F}^u$, $\pi_{ik} = \alpha_{ik}$, $k = 1, \dots, r_i$, y $\pi_{ik} = 0$, $k = r_{i+1}, \dots, p_i$

El Teorema anterior establece los datos necesarios para el diseño de un sistema multivariable desacoplado. La clase de sistemas desacoplados ha quedado establecida y han sido dadas las fórmulas para el cálculo de F y G para el diseño de un sistema desacoplado particular dentro de esa misma clase. El planteamiento general para obtener los datos de esas fórmulas ($p_i, \alpha_{ij}, \pi_{ij}, A^*, D, G_i, J_k^i$) quedó establecido de los desarrollos precedentes; sin embargo, su cálculo puede resultar engorroso aun para sistemas de bajo orden. Por esta razón Gilbert y Pivnichny [12] desarrollaron un programa de computadora digital para el cálculo de esos datos, generados a partir de $S = \{A, B, C\}$. El programa acepta como entrada las matrices A, B y C , y proporciona los siguientes resultados: enteros d_i y p_i ; constantes $\det D$ y α_{ik} ; y las matrices $D, D^{-1}, A^*, D^{-1}A^*, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, T_1, T_1^{-1}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, T_2, T_2^{-1}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, G_i, V_i, V_i^{-1}$, y J_k^i .

La clase de matrices $\{F, G\}$ que puede ser determinada está dada por:

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m G_i \lambda_{li} \quad (3.38)$$

$$F = -D^{-1}A^* + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} (\alpha_{ik} - \pi_{ik}) J_k^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{r_{m+2}} \rho_{ik} K_{ik} \quad (3.39)$$

donde $\pi_{ik} = \alpha_{ik}, \quad k=1, \dots, r_i \quad (3.40)$

$$\pi_{ik} = 0, \quad k=r_i+1, \dots, p_i \quad (3.41)$$

$$r_i = p_i - 1 - d_i, \quad i=1, \dots, m \quad (3.42)$$

$$r_{m+1} = p_{m+1} = n - \sum_{i=1}^m p_i \quad (3.43)$$

$$\text{(si } \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^m (d_i + 1) = n_c, \quad k = 1, \dots, m \text{ entonces)} \quad (3.44)$$

$$r_{m+1} = p_{m+1} = 0 \quad (3.45)$$

$$r_{m+2} = p_{m+2} = n - n_c \quad (3.46)$$

y $\lambda_i, \sigma_{ik}, \rho_{ik}$ son números reales arbitrarios.

La selección de Θ_i^u en (3.34) involucra la parte no controlable de \hat{S} y de aquí que no tenga efecto sobre

$$h_{ii}(s, \hat{F}, \hat{G}) = h_{ii}(s, F, G)$$

Tomando $\Theta_i^u = [p_{i1} \dots p_{ip_{m+2}}]$ y usando la E.L.C. entre \hat{S} y S se determina el último término de (3.39). Este constituye el método para encontrar las matrices K_{ik} . El último término de (3.39) no existe si $r_{m+2} = 0$, i.e. si el sistema es controlable.

Los elementos de la diagonal de la matriz de transferencia del sistema desacoplado $H(s, F, G)$ están dados por

$$h_{ii}(s, F, G) = \frac{\lambda_i \alpha_i(s)}{\psi_i(s, \sigma_i)} \quad (3.47)$$

$$\text{donde } \alpha_i(s) = s^{r_i} - \alpha_{i1} s^{r_i-1} - \dots - \alpha_{ir_i} \quad (3.48)$$

$$\text{(si } r_i = 0, \text{ entonces } \alpha_i(s) = 1) \quad (3.49)$$

$$\text{y } \psi_i(s, \sigma_i) = s^{p_i} - \sigma_{i1} s^{p_i-1} - \dots - \sigma_{ip_i} \quad (3.50)$$

$$\sigma_i = [c_{i1}, \dots, c_{ip_i}]$$

Recuerde que el procedimiento de diseño consiste en determinar primero λ_i y σ_i , luego entonces $\{F, G\}$ queda determinado -- por (3.38) y (3.39).

Además, la ecuación característica del sistema desacoplado está dada por

$$q(s, F) = \det(Is - A - BF) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i) \quad (3.51)$$

Es claro entonces que el Teorema No. 5 responde a las preguntas formuladas con respecto al problema de desacoplamiento -- en el cap. 1.

Antes de pasar a la descripción del programa de computadora se señalarán algunos conceptos importantes que deben ser tomados en cuenta en la aplicación del programa mismo.

3.4 DISEÑO DEL SISTEMA DESACOPLADO

3.4.1 Asignación de polos

El problema de asignación de polos del sistema desacoplado ha recibido una enorme atención debido primordialmente a que la estabilidad⁽⁸⁾ del sistema depende directamente de la localización de las raíces de su ecuación característica (polos). Morgan [26] y Rekasius [35] apuntaron que, en algunos casos, los sistemas desacoplados bajo sus respectivas caracterizaciones podían ser inestables; sin embargo no señalaron bajo qué condiciones sucedía esto, ni tampoco en qué casos podía ser resuelta esta dificultad. Posteriormente, Falb y Wolovich [8] demostraron que al menos $m + \sum_{i=1}^m d_i$ polos del sistema desacoplado podían ser especificados libremente ($d_i + 1$ a la vez). Gilbert resolvió completamente el problema de asignación de polos y demostró que el número de polos del sistema desacoplado que pueden ser especificados libremente (p_i a la vez) es:

$$p = \sum_{i=1}^m p_i$$

De acuerdo con (3.33) el polinomio característico del sistema desacoplado es

$$q(s, F) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i)$$

donde $\alpha_{m+1}(s)$ y $\alpha_{m+2}(s)$ son polinomios de grados p_{m+1} y p_{m+2} respectivamente, unívocamente determinados por $S = \{A, B, C\}$.

(8) Es bien sabido que para asegurar la estabilidad de un sistema lineal e invariable es necesario que las raíces de su ecuación característica estén todas localizadas en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Los vectores σ_i de los polinomios $\psi_i(s, \sigma_i)$ para $i=1, \dots, m$ pueden ser escogidos arbitrariamente. De aquí que $\sum_{i=1}^m p_i$ polos del sistema desacoplado puedan especificarse libremente (p_i a la vez) mediante una selección de los coeficientes σ_{ik} .

Como $\alpha_{m+1}(s)$ y $\alpha_{m+2}(s)$ son polinomios con coeficientes -fijos, entonces el sistema desacoplado será estable si y sólo si las raíces de $\alpha_{m+1}(s)=0$ y $\alpha_{m+2}(s)=0$ tienen parte real negativa. Si dichas raíces tienen parte real positiva, entonces no es posible diseñar un sistema desacoplado estable. Según (3.51) - se observa que si $r_{m+1} = r_{m+2} = 0$ entonces todos los polos del sistema desacoplado pueden ser asignados arbitrariamente.

Estudios posteriores al artículo de Gilbert han llegado a los mismos resultados, arriba establecidos, referentes al problema de asignación de polos (ver Wolovich y Falb [38], Paul [29] Wonham y Morse [37], entre otros).

3.4.2 Asignación de Ceros

La localización en el plano complejo de los ceros de un sistema lineal e invariable afecta el comportamiento del mismo, por ejemplo, la respuesta escalón y el error en estado estable difieren ante diferentes localizaciones de ceros.

El problema de asignación de ceros en sistemas desacoplados no ha recibido el mismo interés por parte de los investigadores, que el de asignación de polos, y aún no se cuenta con una solución completa. Sin embargo, se tienen algunos resultados, que aunque parciales y restringidos, constituyen un esfuerzo hacia la completa solución del problema. A este respecto conviene mencionar algunos de los autores que han abordado esta cuestión:

S. Hosoe, K. Furuta y M. Ito, Zero assignment in linear multivariable decoupled control systems, Memories Fac. Eng. Nagoya University (Japón), Vol. 23, No. 1, pp. 143-154, mayo de 1971.

M. Ito, S. Hosoe y K. Furuta, On pole-zero assignment in state-variable feedback systems, J. of Inst. Elect. Eng. (Japón), Vol. 91, No. 9, pp. 1715-1722, 1971 (en idioma japonés).

W. M. Loscutoff y R. F. Schenz Jr., Zeroes in multivariable systems, J.A.C.C., pp. 899-904, 1972.

3.5 CONCLUSIONES

En esta sección conviene hacer un resumen de los resultados de la teoría de desacoplamiento presentados al caso de resolver el problema de Morgan (i.e. el desacoplamiento de sistemas multi variables, lineales, continuos e invariables con el tiempo, mediante realimentación estática del vector de estado).

Se comenzó por definir el problema de desacoplamiento y a partir de ello definir la existencia de una solución. Cuando es posible lograr el desacoplamiento se encontró que la solución al problema no es única, de aquí que se haya caracterizado al conjunto de todas las posibles soluciones. Hecho esto se apuntaron las características del sistema desacoplado que pueden lograrse. Sobre estas consideraciones puede plantearse la alternativa de establecer la selección de los parámetros para el desacoplamiento bajo criterios de optimalidad. Esta cuestión queda fuera del alcance de este trabajo, sin embargo, ha de mencionarse que los artículos de Pivnichny [31] y Yore⁽⁹⁾ tratan sobre esta importante alternativa.

(9) E.E. Yore, Optimal decoupling control, Proc. J.A.C.C. pp. 327-336, 1968.

CAPITULO 4

UN PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES DESACOPLADOS MEDIANTE REALIMENTACION ESTATICA DEL VECTOR DE ESTADO

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se describe la estructura del programa de computadora debido a Gilbert y Pivnichny [12] que logra el desacoplamiento de la clase de sistemas descrita en el cap. 1, con base en la caracterización de desacoplamiento de Gilbert [11] que se describe en el cap. 3. Se presentan varios ejemplos de aplicación del programa. El diagrama general de flujos se presenta en el anexo A y el listado del programa en el anexo B.

4.2 GENERALIDADES

4.2.1 Descripción del programa

El programa de computadora que se describe en este capítulo efectúa los cálculos necesarios para determinar un par de matrices de realimentación $\{F,G\}$ que logran el desacoplamiento de una clase restringida de sistemas multivARIABLES: los de la forma (1.3).

El programa está escrito en lenguaje FORTRAN IV [15] y ha sido probado satisfactoriamente en computadoras IBM 360 y Bourrroughs 6700 en modo de tiempo compartido.

El requerimiento de memoria es, aproximadamente, de 100K-bytes para el programa principal y de 15K bytes para las subrutinas. Todas las subrutinas provienen del paquete SSP de IBM - [16] y están escritas en programación estructural, lo que asegura un mínimo en almacenamiento y en tiempo de ejecución. Las subrutinas que se emplean son las siguientes:

NOMBRE	REQUERIMIENTO DE MEMORIA (BYTES)
ARRAY	666
LOC	488
MCPY	406
RCPY	496
DCPY	390
XCPY	666
GMSUB	284
GMTRA	354
SCLA	416
DCLA	388
RADD	534
CADD	546
SRMA	438
MINV	1858
MFGR	2092
PRQD	4572
GMPRD	570

El único dispositivo periférico requerido para la ejecución del programa es un teletipo, desde el cual se llama al programa y se introducen los datos. Los resultados del programa se listan en el mismo teletipo.

4.2.2 Datos de Entrada

Los datos de entrada están especificados en formato libre y son almacenados en el archivo de entrada número 1 (instrucción # 1 del listado del anexo B).

Una vez iniciada la ejecución, el programa requiere de los siguientes datos de entrada:

- 1) N : Orden del sistema $S = \{A, B, C\}$.

Este dato debe ser un número natural menor o igual a 25; si $N > 25$ el programa se reinicia, si $N < 0$ la ejecución del programa termina (se utiliza un valor negativo de N para dar fin al programa). Ejemplos:

```
#RUNNING 8224
```

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

```
#?  
26
```

EL ORDEN DEL SISTEMA ES MAYOR QUE LA CAPACIDAD MÁXIMA DEL PROGRAMA = 25

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

*?

-7

ENTRADA INVALIDA

FIN DEL PROGRAMA

*E7=15.6 PT=0.3 IO=0.2

- 2) M : Número de entradas del sistema (igual al número de -
salidas). Este dato debe ser un número natural menor
o igual a 10. Si $M < 0$ la ejecución del programa ter
mina. Ejemplos:

R

*RUNNING 8431

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

6

11

EL NUMERO DE ENTRADAS DEL SISTEMA ES MAYOR QUE
LA CAPACIDAD MAXIMA DEL PROGRAMA = 10

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

ENTRADA INVALIDA

FIN DEL PROGRAMA

PT=19.2 ET=0.5 IO=0.3

- 3) La matriz A por renglones. Los elementos del primer renglón de A se proporcionan de uno en uno separados por comas; luego los del segundo renglón y así sucesivamente (el último elemento de cada renglón debe a parecer sin coma).
- 4) La matriz B por renglones. De la misma manera que la matriz A.
- 5) La matriz C por renglones. Al igual que A y B.

Ejemplo:

Se desea introducir al programa un sistema $S = \{A, B, C\}$ - descrito por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

observe que $N = 3$ y $M = 2$. La forma de hacerlo es la siguiente:

R
 #SCHED 7079
 #RUNNING 7079

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
 DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

#T
 3
 0,1,0
 2,3,0
 1,1,1
 0,0
 1,0
 0,1
 1,1,0
 0,0,1

Un dato que proporciona internamente el programa es el valor de la tolerancia para cero. El valor de este parámetro es 10^{-6} , pero puede modificarse a criterio, cambiando la instrucción siguiente a la número 22 (ver anexo B: $TOL = 1.0E-06$). Este importante dato se utiliza en las siguientes proposiciones para redondear algunas cantidades al valor cero:

PROPOSICION
 NUMERO

- | | |
|-----|---|
| 41 | Al determinar si $C_1 A^j B \neq 0$ |
| 61 | Al verificar si D es singular, i.e. $ D < TOL$. |
| 109 | Al utilizar la subrutina MFGR para determinar - el rango de la matriz H y resolver $L_1^T x = 0$ para encontrar L_2 . |
| 140 | Al verificar si L es singular. |

- 220 Al utilizar la subrutina MFGR para encontrar el rango de \bar{H}_1 , los parámetros p_i y los vectores $q_i^1 \dots q_i^{r_i}$.
- 271 Al utilizar la subrutina MFGR para encontrar los renglones de Q_{m+1} .
- 284 Al verificar si T_2 es singular.
- 513 Al verificar la precisión del algoritmo de Leve_{rr}ier, i.e. R_{p_i} debe ser igual a cero.
- 526 Al verificar si las matrices K_i son singulares.

4.2.3 Secuencia de Ejecución

La secuencia de ejecución del programa puede entenderse mejor siguiendo los diagramas de flujo que aparecen en el anexo A.

Una vez introducidos los datos desde el teletipo, éstos se listan para ser verificados por el usuario, y asegurarse que corresponden al sistema original. Después de esto se inician propiamente los cálculos. Se determinan los parámetros d_i , la matriz D , su determinante = DET, y la matriz D inversa $D^{-1} = \text{DINV}$. Si $\text{DET} = 0$, el problema de desacoplamiento no tiene solución y se da por terminada la ejecución, iniciándose de inmediato una nueva. En caso de que $\text{DET} \neq 0$ se calcula $A^* = \text{ASTAR}$ y con ella se determinan \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} , la representación D.I. del sistema original. Hecho esto se calcula la matriz $\bar{H} = [\bar{B} | \bar{A}\bar{B} | \dots | \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$ y se determina $n_c = \text{rango}(\bar{H})$ con la subrutina MFGR. Si $n_c = n$ el sistema es completamente controlable, $T_1 = I$ y $\tilde{A} = \bar{A}$, $\tilde{B} = \bar{B}$ y $\tilde{C} = \bar{C}$. Si $n_c < n$ se determina la matriz $T_1 = L^{-1}$, donde la matriz $n \times n$ $L = [L_1 | L_2]$: L_1 es una matriz $n_c \times n$ cuyas columnas son los vectores linealmente independientes de \bar{H} . Las $n - n_c$ columnas de L_2 son

ortogonales a las anteriores y se toman del espacio nulo de \bar{H} (la subrutina MFCR encuentra la base del espacio nulo de \bar{H}). Con T_1 se determina $\tilde{S} = \{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$; posteriormente se imprimen T_1 , \tilde{A} , \tilde{B} y \tilde{C} . En seguida se efectúan los cálculos necesarios para llegar a la Forma Canónica de Desacoplamiento: se obtienen las matrices Q_i a partir de

$$H_i = \left[B^C \mid A^C B^C \mid \dots \mid (A^C)^{n-1} B^C \mid (C_i^C)^T \mid (C_i^C A^C)^T \mid \dots \mid (C_i^C (A^C)^{d_i-1})^T \right]$$

haciendo igual a cero las primeras r_i columnas. Se resuelve $nH_i = 0$ y se determinan los vectores $q_i^1 \dots q_i^{r_i}$, que deben ser ortogonales entre sí. En este proceso se determinan los parámetros $p_i = \dim Q_i$. Posteriormente, y de ser necesario, se calcula Q_{m+1} y con ello se forma T_2 . Seguidamente se forma \hat{S} y se imprimen las matrices T_2 , T_2^{-1} , \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} .

Se calculan e imprimen las matrices G_i como se indica en el diagrama de flujo y, finalmente, para cada $i=1, \dots, m+1$ se calculan:

- los coeficientes de la ecuación característica de la matriz \hat{A}_i mediante el método de Leverrier.
- las raíces del polinomio característico $\det(\lambda I - \hat{A}_i) = 0$, que son impresas como Q_{iK} .
- la matriz K y la matriz $V = K^{-1}$.
- las matrices J_k^i .

4.2.4 Mensajes en la impresión

El programa está estructurado para emitir, si es el caso, los siguientes mensajes en algún momento de la ejecución:

ERROR EN EL PROGRAMA. El programa tiene comandos de verificación que comprueban la validez de los datos que se van generando internamente. Este mensaje aparece debido a errores en la escritura del programa. El listado del anexo B ha sido verificado con múltiples ejemplos, de modo que este mensaje no debe aparecer; en caso de transcribir el programa y aparecer este mensaje, es fácil detectar la causa del error observando lo que ha sido impreso antes de aparecer este mensaje.

LA MATRIZ D ES SINGULAR. Este mensaje aparece si $|D|$ es menor que la tolerancia para cero. En este caso el problema de desacoplamiento no tiene solución.

EL SISTEMA ES CONTROLABLE $T1 = I$. Este mensaje aparece si $n_c = n$ (rango(H) = n_c).

LA MATRIZ L ES SINGULAR. Este mensaje, obviamente, no debe aparecer.

LA SUMA (D-SUB-I+1) PARA $I = 1, \dots, M$ ES MAYOR QUE n_c . Esto es $m + \sum_{i=1}^m d_i > n_c$ lo cual no debe suceder.

LA MATRIZ $T2$ ES SINGULAR. Este mensaje, obviamente, no debe aparecer.

EL METODO DE LA TRAZA FALLA PARA $I =$. Los coeficientes de la ecuación característica para \hat{A}_i se calculan -

con el método de Leverrier. La matriz resultante R_{p_i} debe ser nula. Si algún elemento de R_{p_i} es mayor (en valor absoluto) que la tolerancia para cero, entonces se imprime este mensaje, pero no se interrumpe la ejecución del programa.

LA MATRIZ K ES SINGULAR. Este mensaje, obviamente, no debe aparecer.

4.2.5 Tiempo de ejecución

El tiempo de ejecución de este programa depende de muchos factores tales como los valores de n , m y de la estructura de las matrices A , B y C . El tiempo promedio de ejecución, con n entre 3 y 8 y m entre 2 y 4, es de 3 segundos.

4.2.6 Ejecución continua del programa

El programa al que se hace referencia, tiene la categoría de programa cerrado, i.e. es autosuficiente. Después de ejecutar un problema pregunta si es necesario ejecutar otro. En caso de dar por terminada la sesión debe darse una entrada inválida tal como se describió en la sección 4.2.2 incisos 1 y 2.

4.3 DISPONIBILIDAD DEL PROGRAMA

Este programa se encuentra disponible para ejecución, en la programoteca de la asignatura Dinámica de Sistemas Lineales, de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la U. N. A. M., con el nombre de DSL/DESAC. Para hacer uso de él es recomendable consultar la referencia [7].

4.4 EJEMPLOS DE APLICACION DEL PROGRAMA

A continuación se ilustran los resultados importantes de la caracterización de Gilbert para el desacoplamiento de sistemas multivariables mediante realimentación estática del vector de estado.

El procedimiento general puede resumirse en los siguientes términos:

Se desea obtener un par de matrices de realimentación $\{F, G\}$ que desacople a un sistema $S = \{A, B, C\}$, con la alternativa de ubicar los polos del sistema desacoplado en algún lugar específico del plano complejo.

La aplicación del programa proporciona los datos necesarios para encontrar F y G , según las expresiones (3.38) y (3.39), y, de acuerdo con las expresiones (3.40) a (3.51), ubicar los polos de manera arbitraria.

EJEMPLO 4.4.1

El sistema $S = \{A, B, C\}$:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

tiene una matriz de transferencia no diagonal y polos en $s = \{1, 1, 2\}$. Obviamente es inestable. Se desea estabilizarlo localizando sus polos en $s = \{-1, -2 \pm j\}$, y desacoplarlo simultaneamente. Encontrar el par de matrices $\{F, G\}$ para tal efecto.

Obsérvense los resultados de la computadora en las dos hojas siguientes:

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

3
2
1,1,0
0,2,0
0,1,1
1,-1
-1,1
1,-1
1,0,0
-1,1,0

N= 3 M= 2
TOLERANCIA PARA CERO= .1E-05

MATRIZ A

1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	2.00000	0.00000
0.00000	1.00000	1.00000

MATRIZ B

1.00000	-1.00000
-1.00000	1.00000
1.00000	-1.00000

MATRIZ C

1.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	1.00000	0.00000

LA MATRIZ D ES SINGULAR

DETERMINANTE DE LA MATRIZ D= 0.

MATRIZ D

1.00000	-1.00000
-2.00000	2.00000

D-SUB- 1= 0

D-SUB- 2= 0

SISTEMA NO DESACOPLABLE

El resultado es determinante: este sistema no puede des-
coplarse porque no cumple con la condición necesaria y suficien-
te para ello (ec. 2.1):

$$\det D \neq 0$$

esto es, la matriz D es singular.

EJEMPLO 4.4.2

El sistema $S = \{A, B, C\}$:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -14 & 49 & 3 & 0 \\ -4 & 14 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -88 & -4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

tiene una matriz de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^4 - s^3 + 8s^2 + 268s + 624} \begin{bmatrix} s+2 & 12(s-10) \\ s^3 - s^2 + s + 2 & -120s^2 + 276s - 3864 \end{bmatrix}$$

con polos en $s = \{-3, -4, 4 \pm 6j\}$

Como puede verse este sistema es inestable. Se desea estabilizarlo y desacoplarlo. Los polos del sistema desacoplado deberán estar localizados en $s = \{-5, -10, -3 \pm 5j\}$. El problema consiste en determinar el par de matrices de desacoplamiento $\{F, G\}$.

Al introducir este sistema al programa de computadora fueron arrojados los siguientes resultados:

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

*P
4
2
-14,49,3,0
-4,14,1,0
0,0,1,1
-88,-4,-8,0
0,1
0,0
0,4
1,0
0,1,0,0
0,1,0,1

N= 4 M= 2
TOLERANCIA PARA CERO= .1E-05

MATRIZ A

-14.00000	49.00000	3.00000	0.00000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	1.00000
-88.00000	-4.00000	-8.00000	0.00000

MATRIZ B

0.00000	1.00000
0.00000	0.00000
0.00000	4.00000
1.00000	0.00000

MATRIZ C

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

DETERMINANTE DE LA MATRIZ D= $-.120E+02$

MATRIZ D

1.00000	12.00000
1.00000	0.00000

MATRIZ D-INVERSA

0.00000	1.00000
0.08333	-0.08333

D-SUB- 1= 2

D-SUB- 2= 0

MATRIZ A-STAR

-88.00000	-4.00000	-5.00000	3.00000
-92.00000	10.00000	-7.00000	0.00000

MATRIZ ABAR

-14.33333	50.16667	2.83333	-0.25000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
-1.33333	4.66667	0.33333	0.00000
4.00000	-14.00000	-1.00000	0.00000

MATRIZ BBAR

0.08333	-0.08333
0.00000	0.00000
0.33333	-0.33333
0.00000	1.00000

MATRIZ CBAR

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ D-INVERSA*ASTAR

-92.00000	10.00000	-7.00000	0.00000
0.33333	-1.16667	0.16667	0.25000

MATRIZ H=(B,AB,...,A(N-1)B) TRANSPUESTA

0.08333	0.00000	0.33333	0.00000
-0.08333	0.00000	-0.33333	1.00000
-0.25000	0.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3.58333	1.00000	0.33333	-1.00000
-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000

EL SISTEMA ES CONTROLABLE, MATRIZ T1=I

P-SUB- 1= 3

P-SUB- 2= 1

MATRIZ T2

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	3.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ T2 INVERSA

3.58333	-0.25000	0.08333	-0.08333
1.00000	0.00000	-0.00000	0.00000
0.33333	0.00000	0.33333	-0.33333
-1.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ A-HAT

-0.00000	1.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ B-HAT

0.00000	0.00000
0.00000	0.00000
1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ C-HAT

1.00000	0.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ G-SUB 1

0.00000	0.00000
0.08333	0.00000

MATRIZ G-SUB 2

0.00000	1.00000
0.00000	-0.08333

I= 1 P-SUB-I= 3

Q 1 1= -.237E-09

Q 1 2= .142E-09

Q 1 3= -.370E-09

LA MATRIZ K ES

1.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

LA MATRIZ V ES

1.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	1.00000

MATRIZ EJ1

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.08333	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T2

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	3.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	0.08333	0.00000	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ M $\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} =$

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ J $\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} =$

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	0.08333	0.00000	0.00000

MATRIZ EJ1

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.00000	0.08333	0.00000	0.00000

MATRIZ T2

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	3.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.33333	1.16667	0.08333	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ N

-0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ J

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.33333	1.16667	0.08333	0.00000

MATRIZ EJ1

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	0.08333	0.00000

MATRIZ T2

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	3.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	0.25000	0.08333

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ M

0.00000	-0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ J

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	0.25000	0.08333

I= 2 P-SUB-I= 1

Q 2 1= 0.

LA MATRIZ K ES

1.00000

LA MATRIZ V ES

1.00000

MATRIZ EJ1

0.00000	0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	-0.08333

MATRIZ T2

0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
-4.00000	14.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	3.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
0.00000	-0.08333	0.00000	-0.08333

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ M

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ J

0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
0.00000	-0.08333	0.00000	-0.08333

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

-0

ENTRADA INVALIDA

FIN DEL PROGRAMA

#ET=7:42.3 PT=2.8 IO=0.2

La manera de determinar el par $\{F, G\}$ que logra el desacoplamiento y ubicación de polos es la siguiente:

Se sabe que:

$$n = 4, \quad m = 2$$

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = 0$$

$$p_1 = 3$$

$$p_2 = 1$$

$$n_c = 4 \quad (\text{el sistema original es controlable})$$

$$q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{21} = 0$$

Con estos datos se calcula:

$$r_1 = p_1 - 1 - d_1 = 0$$

$$r_2 = p_2 - 1 - d_2 = 0$$

como $\sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^m (d_i + 1) = n_c, \quad k=1, \dots, m$ entonces $r_3 = r_4 = 0$

$$p_4 = r_4 = n - n_c = 4 - 4 = 0$$

$$\pi_{11} = \pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{21} = 0$$

$$\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = \alpha_3(s) = \alpha_4(s) = 1 \quad (\text{ya que } r_i = 0 \text{ para } i=1, 2, 3, 4)$$

Las funciones de transferencia del sistema desacoplado deben ser de la forma:

$$h_{11}(s, F, G) = \frac{\lambda_1 \alpha_1(s)}{\psi_1(s, \sigma_1)}$$

$$h_{22}(s, F, G) = \frac{\lambda_2 \alpha_2(s)}{\psi_2(s, \sigma_2)}$$

donde

$$\psi_1(s, \sigma_1) = s^3 - \sigma_{11}s^2 - \sigma_{12}s - \sigma_{13}$$

$$\psi_2(s, \sigma_2) = s - \sigma_{21}$$

Así pues, para localizar los polos en $s = \{-5, -10, -3 \pm 5j\}$ puede escogerse

$$\Psi_1(s, \sigma_1) = (s+5)(s+3+5j)(s+3-5j) = s^3 + 11s^2 + 64s + 170$$

$$\Psi_2(s, \sigma_2) = (s+10)$$

de donde

$$\sigma_{11} = -11$$

$$\sigma_{12} = -64$$

$$\sigma_{13} = -170$$

$$\sigma_{21} = -10$$

si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, entonces las matrices F y G están dadas por (3.38) y (3.39) de la siguiente manera:

$$G = \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i = 1 \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0000 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & -0.0833 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0833 & -0.0833 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F = -D^{-1} A^* + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} (\sigma_{ik} - \pi_{ik}) J_k^i$$

$$= \begin{bmatrix} 92 & -10 & 7 & 0 \\ -1/3 & 7/6 & -1/6 & -1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11/4 & -11/12 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64/3 & -448/5 & -64/12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -170/12 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10/12 & 0 & 10/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92 & -20 & 7 & -10 \\ 21 & -521/6 & -33/4 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Este par $\{F, G\}$ logra una matriz de transferencia del sistema realimentado:

$$H(s, F, G) = C [Is - A - BF]^{-1} BG =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 64s + 170} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+10} \end{bmatrix}$$

como se especificó con anterioridad, desacoplado y con polos en $s = \{-5, -10, -3 \pm 5j\}$.

Este mismo ejemplo se desarrolla en la sección 6.3.3.4 de la referencia [6] con el procedimiento de Falb y Wolovich [8] llegando a las mismas matrices F y G.

EJEMPLO 4.4.3

El sistema $S = \{A, B, C\}$:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

tiene una matriz de transferencia:

$$H(s) = C [Is - A]^{-1} B = \frac{1}{(s-1)(s^2-3s-2)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s+1 & s^2-3s-2 \end{bmatrix}$$

con polos en $s = \left\{ 1, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}$ por lo que es inestable.

Se desea desacoplar al sistema y que tenga polos en $s = \{-2, -3, -4\}$.

Después de introducir los datos a la computadora, se obtuvieron los siguientes resultados:

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

3
2
0,1,0
2,3,0
1,1,1
0,0
1,0
0,1
1,1,0
0,0,1

N= 3 M= 2
TOLERANCIA PARA CERO= .1E-05

MATRIZ A

0.00000	1.00000	0.00000
2.00000	3.00000	0.00000
1.00000	1.00000	1.00000

MATRIZ B

0.00000	0.00000
1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ C

1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

DETERMINANTE DE LA MATRIZ D= .100E+01

MATRIZ D

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ D-INVERSA

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

D-SUB- 1= 0

D-SUB- 2= 0

MATRIZ A-STAR

2.00000	4.00000	0.00000
1.00000	1.00000	1.00000

MATRIZ ABAR

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ BBAR

0.00000	0.00000
1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ CBAR

1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ D-INVERSA*ASTAR

2.00000	4.00000	0.00000
1.00000	1.00000	1.00000

MATRIZ H=(B,AB,...,A(N-1)B) TRANSPUESTA

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
1.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

EL SISTEMA ES CONTROLABLE, MATRIZ T1=I

P-SUB- 1= 2

P-SUB- 2= 1

MATRIZ T2

1.00000	1.00000	0.00000
-1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ T2 INVERSA

0.50000	-0.50000	0.00000
0.50000	0.50000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ A-HAT

0.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ B-HAT

1.00000	0.00000
1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ C-HAT

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ G-SUB 1

1.00000	0.00000
0.00000	0.00000

MATRIZ G-SUB 2

0.00000	0.00000
0.00000	1.00000

I= 1 P-SUB-I= 2

R 1 1= -.100E+01

Q 1 2= 0.

VALORES CARACTERISTICOS NO NULOS DE
LA MATRIZ A-HAT-SUB- 1

PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

-.100E+01 0.

LA MATRIZ K ES

1.00000	1.00000
-1.00000	1.00000

LA MATRIZ V ES

0.50000	-0.50000
0.50000	0.50000

MATRIZ EJ1

0.50000	-0.50000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T2

1.00000	1.00000	0.00000
-1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ M

0.50000	-0.50000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ J

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ EJI

0.50000	0.50000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T2

1.00000	1.00000	0.00000
-1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMPI

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ M

0.50000	0.50000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ J

0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

I= 2 P-SUB-I= 1

Q 2 1= 0.

LA MATRIZ K ES

1.00000

LA MATRIZ V ES

1.00000

MATRIZ EJ1

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ T2

1.00000	1.00000	0.00000
-1.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ M

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ J

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

Para determinar el par $\{F, G\}$ que permite el desacoplamiento y localización de polos en $s = \{-2, -3, -4\}$ es conveniente observar:

$$n = 4, \quad m = 2$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 0$$

$$p_1 = 2$$

$$p_2 = 1$$

$n_c = 3$ (el sistema es controlable)

$$a_{11} = -1$$

$$a_{12} = 0$$

cero fijo en $s = -1$) $|\lambda I - \hat{A}_1| = \lambda + 1$ (implica que existe un

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto se determinan:

$$r_1 = p_1 - 1 - d_1 = 2 - 1 - 0 = 1$$

$$r_2 = p_2 - 1 - d_2 = 1 - 1 - 0 = 0$$

como $\sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k-1}^m (d_i + 1) = n_c$, $k=1, \dots, m$ entonces $r_3 = p_3 = 0$

$$r_4 = p_4 = n - n_c = 3 - 3 = 0$$

$$\pi_{11} = \alpha_{11} = a_{11} = -1$$

$$\pi_{12} = 0$$

$$\pi_{21} = 0$$

observe que $r_3 = r_4 = 0$ implica que pueden ser asignados tres polos.

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de transferencia del sistema desacoplado son de la forma:

$$h_{11}(s, F, G) = \frac{\alpha_1(s) \lambda_1}{\psi_1(s, \sigma_1)} = \frac{(s - \alpha_{11}) \lambda_1}{s^2 - \sigma_{11}s - \sigma_{12}} = \frac{(s + 1) \lambda_1}{s^2 - \sigma_{11}s - \sigma_{12}}$$

si se ubican los polos $s = \{-2, -3\}$ en $h_{11}(s, F, G)$ y si $\lambda_1 = 2$, entonces

$$h_{11}(s, F, G) = \frac{2(s + 1)}{s^2 + 5s + 6}, \text{ de donde } \begin{matrix} \sigma_{11} = -5 \\ \sigma_{12} = -6 \end{matrix}$$

De la misma manera:

$$h_{22}(s, F, G) = \frac{\alpha_2(s) \lambda_2}{\psi_2(s, \sigma_2)} = \frac{\lambda_2}{s - \sigma_{21}}$$

Resta ubicar el polo $s = -4$ en $h_{22}(s, F, G)$; si además, $\lambda_2 = 3$

$$h_{22}(s, F, G) = \frac{3}{s + 4}, \text{ de donde } \sigma_{21} = -4$$

Por otra parte, el polinomio característico del sistema desacoplado es:

$$q(s, F) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i) = (1)(1)(s^2 + 5s + 6)(s + 4)$$

Por tanto, de (3.38) y (3.39)

$$G = \sum_{i=1}^m G_i \lambda_i = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F = -D^{-1}A^* + (\sigma_{11} - \pi_{11})J_1^1 - (\sigma_{12} - \pi_{12})J_2^1 - (\sigma_{21} - \pi_{21})J_1^2$$

$$\text{i.e. } F = - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-6-0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ + (-4-0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Así pues:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

desacoplan al sistema original y le ubican polos en $s = \{-2, -3, -4\}$.

En efecto:

$$H(s, F, G) = C [I s - A - B F]^{-1} B G = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+4} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4.4.4

Desacople el mismo sistema del Ejem. 4.4.3, ubicando ahora los polos del sistema desacoplado en $s = \{-1, -2 \pm j\}$.

En este caso, se tiene:

$$h_{11}(s, F, G) = \frac{\alpha_1(s) \lambda_1}{\psi_1(s, \sigma_1)} = \frac{\lambda_1(s+1)}{s^2 - \sigma_{11}s - \sigma_{12}} = \frac{2(s+1)}{s^2 + 4s + 5}$$

de donde: $\lambda_1 = 2$, $\sigma_{11} = -4$ y $\sigma_{12} = -5$

$$\text{y } h_{22}(s, F, G) = \frac{\alpha_2(s) \lambda_2}{\psi_2(s, \sigma_2)} = \frac{\lambda_2}{s - \sigma_{21}} = \frac{3}{s + 1}$$

de donde: $\lambda_2 = 3$ y $\sigma_{21} = -1$

Entonces:

$$G = \sum_{i=1}^m G_i \lambda_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F = - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + [-4 - (-1)] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-5 - 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1 - 0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

De modo que $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ desacoplan al sistema y ubican sus polos en $s = \{-1, -2 \pm j\}$, ya que:

$$H(s, F, G) = C [I s - A - BF]^{-1} B G = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{s^2+4s+5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+1} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4.4.5

Sea el sistema $S = \{A, B, C\}$:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Se desea desacoplarlo y ubicar sus polos en

$$s = \{-1, -3, -4\}$$

Para determinar el par $\{F, G\}$ se introdujeron los datos de este sistema a la computadora y se obtuvo:

PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO
DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR RENGLONES

3
2
0,0,0
0,0,0
0,-1,0
1,0
0,0
0,1
1,0,0
0,0,1

N= 3 M= 2

TOLERANCIA PARA CERO= .1E-05

MATRIZ A

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000

MATRIZ B

1.00000	0.00000
0.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ C

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

DETERMINANTE DE LA MATRIZ D= .100E+01

MATRIZ D

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ D-INVERSA

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000

D-SUB- 1= 0

D-SUB- 2= 0

MATRIZ A-STAR

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000

MATRIZ ABAR

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ BBAR

1.00000	0.00000
0.00000	0.00000
0.00000	1.00000

MATRIZ CBAR

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ D-INVERSA*ASTAR

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000

MATRIZ H=(B, AB, ..., A(N-1)B) TRANSPUESTA

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

EL SISTEMA NO ES CONTROLABLE NC= 2

MATRIZ L

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ ATIL

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ BTIL

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000
0.00000	0.00000

MATRIZ CTIL

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000

P-SUB- 1= 1

P-SUB- 2= 1

MATRIZ T2

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ T2 INVERSA

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ A-HAT

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ B-HAT

1.00000	0.00000
0.00000	1.00000
0.00000	0.00000

MATRIZ C-HAT

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ G-SUB 1

1.00000	0.00000
0.00000	0.00000

MATRIZ G-SUB 2

0.00000	0.00000
0.00000	1.00000

I= 1 P-SUR-I= 1

R 1 1= 0.

LA MATRIZ K ES

1.00000

LA MATRIZ U ES

1.00000

MATRIZ EJ1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T2

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ H

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

MATRIZ J

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000

I= 2 - P-SUB-I= 1

R 2 1= 0.

LA MATRIZ K ES

1.00000

LA MATRIZ V ES

1.00000

MATRIZ EJI

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ T2

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

MATRIZ TEMP1

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ T1

1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ H

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000

MATRIZ J

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000

Anotando aquí nuevamente algunos datos de interés que proporcionó la computadora:

$$n = 3, \quad m = 2$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 0$$

$n_c = 2$ (el sistema no es completamente controlable)

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 1$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \alpha_{11} = 0$$

$$a_{21} = \alpha_{21} = 0$$

Con esto se calculan:

$$r_1 = p_1 - 1 - d_1 = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$r_2 = p_2 - 1 - d_2 = 1 - 1 - 0 = 0$$

como $\sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^m (d_i + 1) = n_c$, $k=1, \dots, m$ entonces $r_3 = p_3 = 0$

$$r_4 = p_4 = n - n_c = 3 - 2 = 1 \quad (\text{implica que existe}$$

un polo fijo en $s=0$)

$$\pi_1 = \pi_{11} = 0$$

$$\pi_2 = \pi_{21} = 0$$

π_3 no está definido

$$\pi_4 = \pi_{41} = \alpha_{41} = 0$$

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de transferencia del sistema desacoplado son:

$$h_{11}(s, F, G) = \frac{\alpha_1(s) \lambda_1}{\psi_1(s, \sigma_1)} = \frac{\lambda_1}{s - \sigma_{11}}$$

$$h_{22}(s, F, G) = \frac{\alpha_2(s) \lambda_2}{\psi_2(s, \sigma_2)} = \frac{\lambda_2}{s - \sigma_{21}}$$

Como puede verse sólo pueden asignarse dos polos al sistema desacoplado puesto que, como $r_4 = 1$, existe un polo fijo en $s = 0$. En efecto, el polinomio característico del sistema desacoplado es de la forma:

$$q(s, F) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i) = (1)(s)(s - \sigma_{11})(s - \sigma_{21})$$

Así pues se ubicarán solamente dos polos, $s = -1$ y $s = -3$; entonces, si $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 3$, se puede escoger:

$$h_{11}(s, F, G) = \frac{4}{s + 1}, \text{ de donde } \sigma_{11} = -1$$

$$\text{y } h_{22}(s, F, G) = \frac{3}{s + 3}, \text{ de donde } \sigma_{21} = -3$$

Por tanto:

$$G = \sum_{i=1}^m G_i \lambda_i = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y \quad F = -D^{-1}A^* + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{P_i} (\sigma_{ik} - \pi_{ik}) J_k^i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{r_{m+2}} \rho_{ik} K_{ik}$$

i.e.

$$F = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + (-1-0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-3-0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \rho_{11} K_{11} + \rho_{21} K_{21}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \rho_{11} K_{11} - \rho_{21} K_{21} \quad \dots\dots\dots(I)$$

Por otro lado, según (3.34)

$$F = -D^{-1}A^* + D^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \theta_1^u \\ 0 & \theta_2 & \theta_2^u \end{bmatrix} T_2 T_1$$

$$= -D^{-1}A^* + D^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \rho_{11} \\ 0 & \theta_2 & \rho_{21} \end{bmatrix} T_2 T_1$$

donde $\theta_i = (\sigma_i - \pi_i) v_i, \quad i = 1, \dots, m$

i.e. $\theta_1 = (\sigma_{11} - \pi_{11}) v_1 = (-1-0)1 = -1$

$\theta_2 = (\sigma_{21} - \pi_{21}) v_2 = (-3-0)1 = -3$

por tanto:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & \rho_{11} & 0 \\ 0 & 1 + \rho_{21} & -3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(II)$$

Al igualar (I) y (II) se desprende que:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\rho_{21}} & 0 \end{bmatrix}$$

Como ρ_{11} y ρ_{21} son números reales arbitrarios, se verán dos casos particulares:

$$a) \rho_{11} = \rho_{21} = 0$$

$$\text{En este caso: } F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces, } G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

desacoplan al sistema y ubican los polos en $s = \{-1, -3\}$.

En efecto:

$$H(s, F, G) = C [Is - A - BF]^{-1} BG = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+3} \end{bmatrix}$$

b) Asignar cualquier valor a ρ_{11} y ρ_{21} , como por ejemplo:

$$\rho_{11} = \rho_{21} = 1, \quad \text{entonces:}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así pues: } G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

desacoplan al sistema y ubican los polos en $s = \{-1, -3\}$.

En efecto:

$$H(s, F, G) = C [Is - A - BF]^{-1} BG = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+3} \end{bmatrix}$$

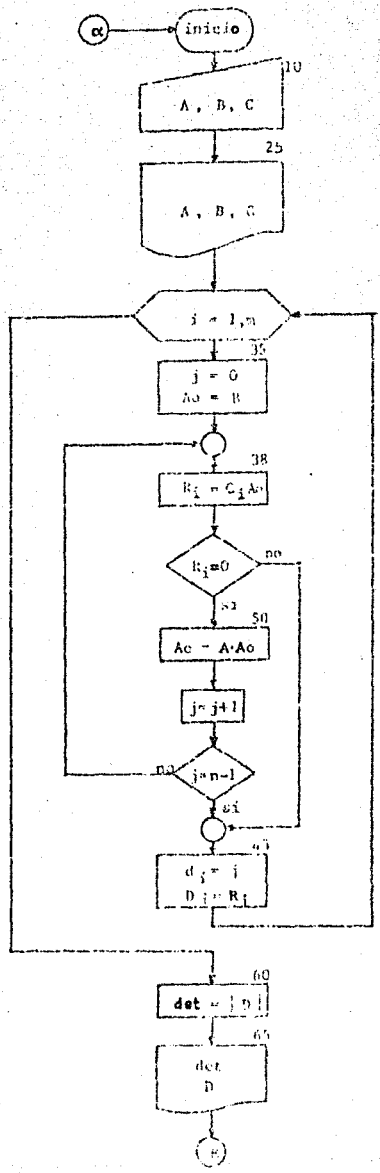
ANEXO A

DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

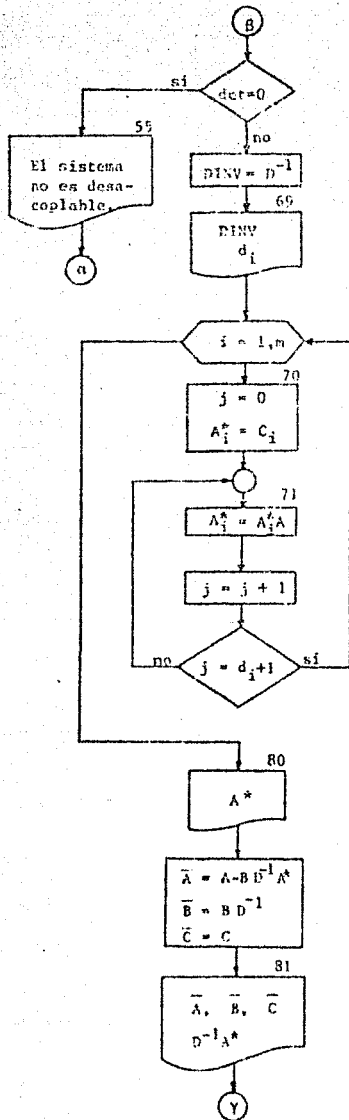
El diagrama de flujo que se presenta a continuación ilustra, de manera simplificada, el algoritmo para encontrar los datos necesarios para caracterizar la clase de matrices de desacoplamiento $\{F,G\}$ de un sistema $S = \{A,B,C\}$.

Los números que aparecen en la parte superior de algunos símbolos de computación corresponden a números de proposiciones que ejecutan esas instrucciones, y que aparecen en el listado general del programa en el Anexo B.

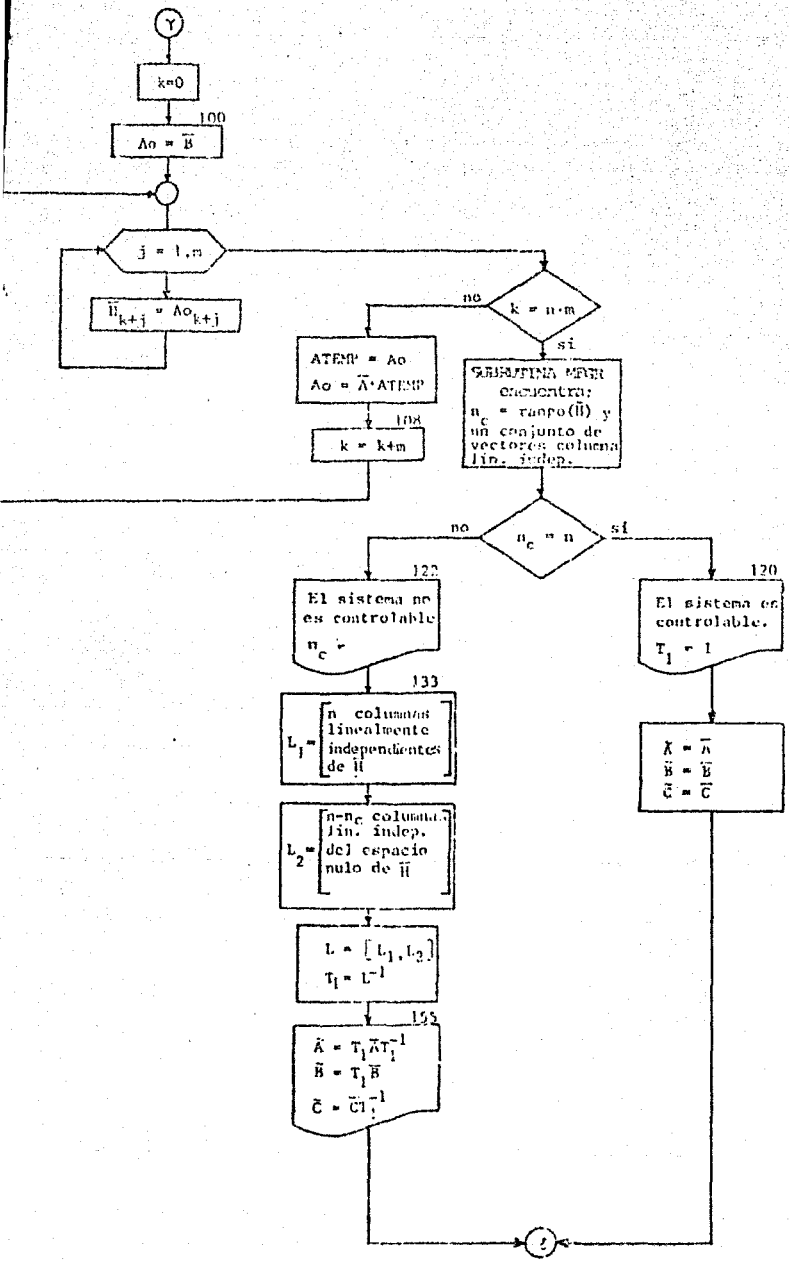
Calcula los parámetros d_i y la matriz D



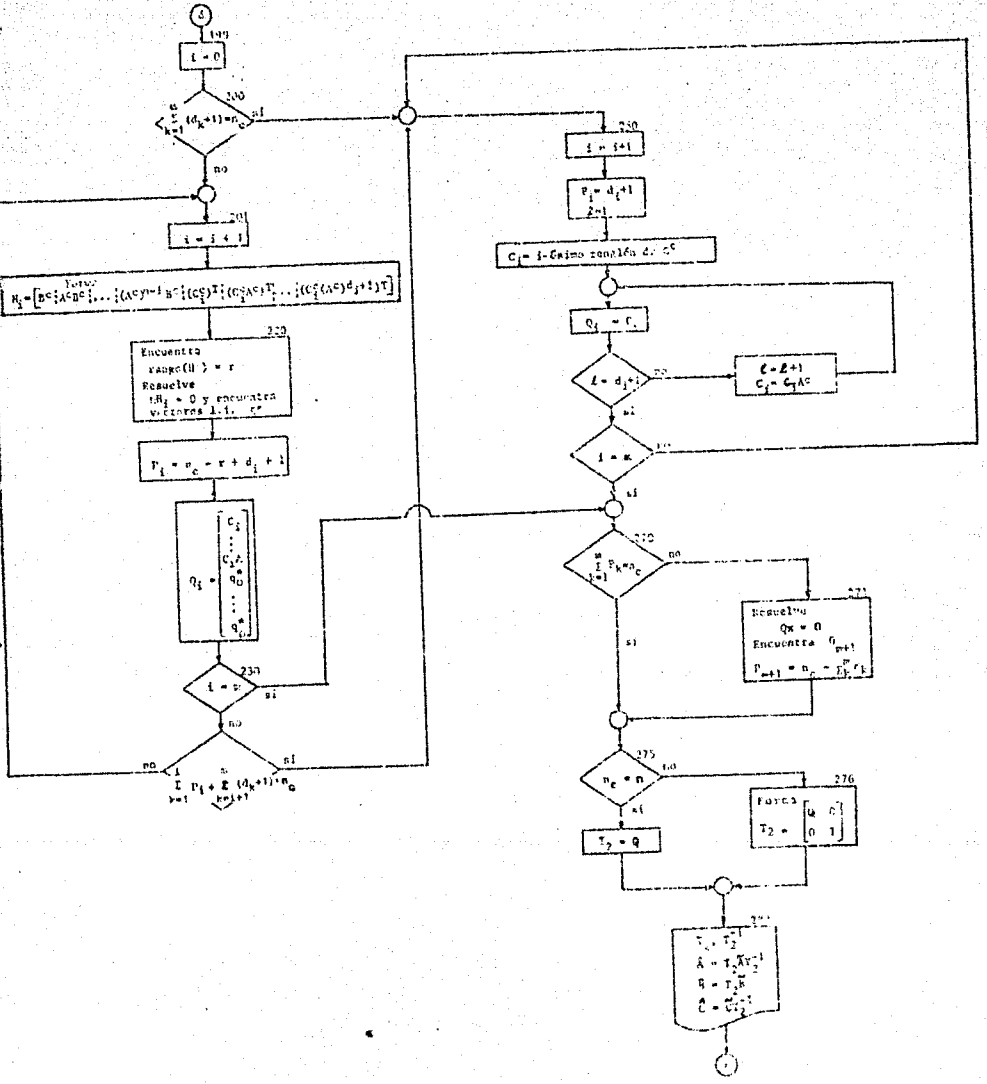
Verifica $|D| \neq 0$, calcula las matrices D^{-1} , A^* , $D^{-1}A^*$, \bar{A} , \bar{B} , \bar{C}



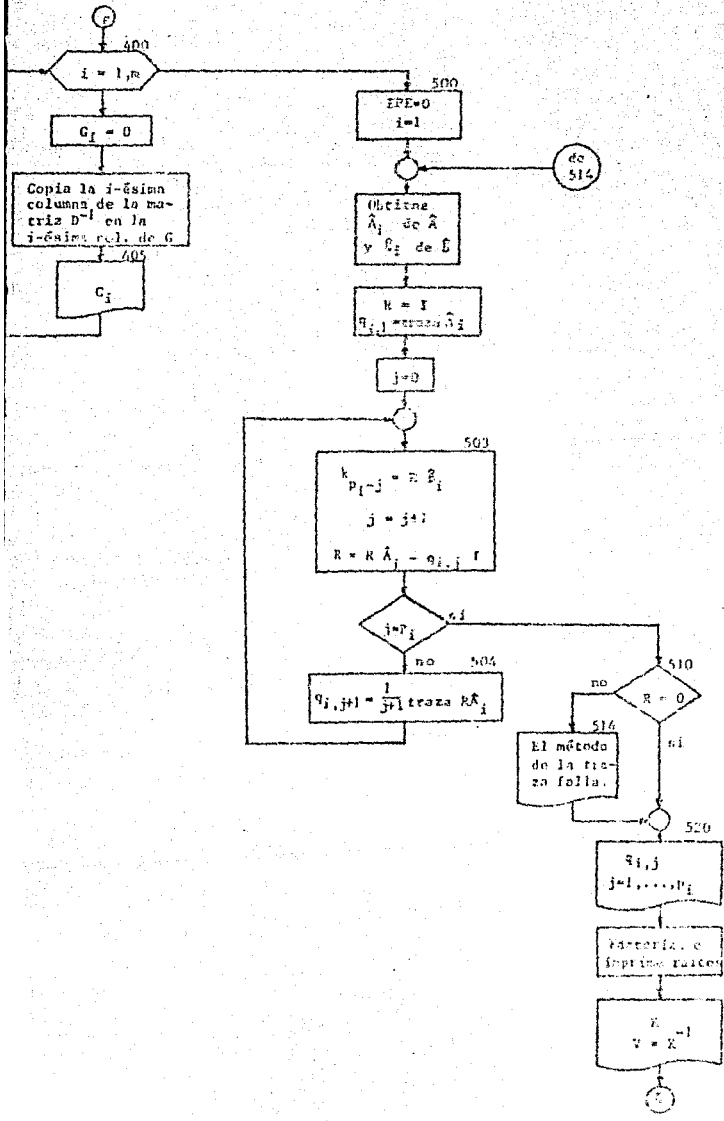
Calcula las matrices $T_1, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$



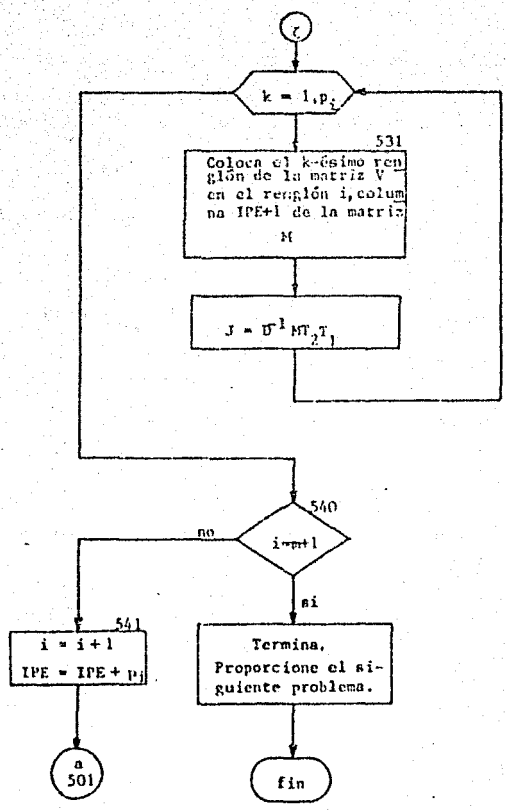
Calcula las matrices Q , T_2 , \hat{A} , \hat{B} , \hat{Q}



Calcula las matrices G_i , K y V



Calcula las matrices J_k^1



ANEXO B

LISTADO GENERAL DEL PROGRAMA DE COMPUTADORA

DOCUMENTACION

Nombre del programa: DSL/DESAC

Descripción: Obtiene un par de matrices de realimentación {F,G} para llevar a cabo el desacoplamiento y ubicación de polos de los sistemas multivariables lineales e invariables de la forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = C \underline{x}(t)$$

Lenguaje: FORTRAN IV (versión Burroughs 6700).

Categoría: Programa cerrado (auto-suficiente).

Fuente: Cinta magnética DSL 1688. Archivo DSL/DESAC.

Tarjetas: No. Sólo cinta.

Modificaciones: Ninguna (diciembre de 1978)

Records: 1391

Rango: 100 - 146 300.

Subrutinas:

NOMBRE	RANGO
ARRAY	80500-83400
LOC	83700-85600
MCPY	85900-86700
RCPY	87000-88000
DCPY	88300-89200
XCPY	89500-91100
GMSUB	91400-92300
GMFRD	92600-94500
GMTRA	94800-95800
SCLA	96100-96700
DCLA	97000-97600
RADD	97900-99200
CADD	99500-100800
SRMA	101100-102800
MINV	103100-113400
MFGR	113700-124800
PRQD	125100-146300

Instructivo de datos: Datos proporcionados desde el teletipo

- 1) N (orden del sistema)
- 2) M (número de entradas o salidas)
- 3) Matriz A por renglones
- 4) Matriz B por renglones
- 5) Matriz C por renglones

Formato: Libre (separación por comas).

Resultados: Los imprime el teletipo. Primero escribe los datos proporcionados, luego los cálculos y resultados descritos en las referencias [1], [12], [30].

Observaciones:

- 1) El máximo de N es 25
- 2) El máximo de M es 10
- 3) Un valor negativo de N o M termina la ejecución del programa.

```

100 FILE      1=DATOS,UNIT=REMOTE
200 FILE      6=RESUL,UNIT=REMOTE,RECORD=22
300 C*
400 C*
500 C*
600 C*          PROGRAMA DESACOPPLAMIENTO SISTEMAS MULTIVARIABLES.
700 C*
800 C*
900 C*
1000 DIMENSION A(25,25),B(25,10),C(10,25),AD(25,10)
1100 DIMENSION D(10,10),CI(25),R(10),ID(10)
1200 DIMENSION ATEMP(25,10),TEMP(25,25)
1300 DIMENSION DINV(10,10),EL(10),EN(25)
1400 DIMENSION ASTAR(10,25)
1500 DIMENSION ATIL(25,25),BTIL(25,10),CTIL(10,25),IROW(275),ICOL(25)
1600 DIMENSION H(275,25),ELL(25,25),T1(25,25),IP(12)
1700 DIMENSION ABAR(25,25),BBAR(25,10),CBAR(10,25)
1800 DIMENSION AC(25,25),BC(25,10),CC(10,25),Q(25,25),T2(25,25)
1900 DIMENSION AHAT(25,25),BHAT(25,10),CHAT(10,25)
2000 DIMENSION G(10,10)
2100 DIMENSION AI(25,25),BI(25),RI(25,25),RIK(25),FK(25,25)
2200 DIMENSION TEMP1(25,25),EM(25),EM1(10,25),EJ1(10,25)
2300 DIMENSION V(25,25)
2400 DIMENSION PC(25),PQ(25),PE(25),POL(25)
2500 C*
2600 C*
2700 C*          LECTURA DE DATOS
2800 C*
2900 C*
3000 10 WRITE(6,3)
3100 3 FORHAT(1X,///,7X,'PROPORCIONE: EL ORDEN DEL SISTEMA, EL NUMERO',
3200 * 1X,/,2X,'DE ENTRADAS, Y LAS MATRICES A, B Y C POR ',
3300 * 1X,'RENGLONES',///)
3400 READ(1,/)N
3500 IF(N)1111,1111,4
3600 4 IF(N-25)1119,1119,1113
3602 1113 WRITE(6,1114)
3604 1114 FORMAT(1X,/,2X,'EL ORDEN DEL SISTEMA ES MAYOR QUE LA',
3606 * 1X,'CAPACIDAD',/,2X,'MAXIMA DEL PROGRAMA = 25')
3608 GO TO 10
3610 1119 READ(1,/)M
3612 IF(M-10)1115,1115,1116
3614 1116 WRITE(6,1117)
3616 1117 FORMAT(1X,/,2X,'EL NUMERO DE ENTRADAS DEL SISTEMA ES',
3618 * 1X,'MAYOR QUE',/,2X,'LA CAPACIDAD MAXIMA DEL PROGRAMA = 10')
3620 GO TO 10
3622 1115 IF(M)1111,1111,1118
3624 1118 CONTINUE

```

```

00 15 FORMAT(6(F11.5,2X))
00 DO 20 I=1,N
00 20 READ(1,/)(A(I,J),J=1,N)
00 DO 21 I=1,M
00 21 READ(1,/)(B(I,J),J=1,M)
00 DO 22 I=1,M
00 22 READ(1,/)(C(I,J),J=1,N)
00 C*
00 C*
00 C*      ASIGNACION DE LA TOLERANCIA PARA CERO
00 C*      EN TODO EL PROGRAMA
00 C*
00 C*
000 TOL=1.0E-06
00 C*
00 C*
00 C*      IMPRIME LOS DATOS PROPORCIONADOS
00 C*
00 C*
00 C*      WRITE(6,6)N,M,TOL
00 6 FORMAT(2X,2HN=,I2,3X,2HM=,I2,/,2X,21HTOLERANCIA PARA CERO=,E8.1,/)
00 25 FORMAT(2X,/,/,10X,8HMATRIZ A,/)
00 WRITE(6,25)
00 DO 26 I=1,N
00 26 WRITE(6,15)(A(I,J),J=1,N)
00 27 FORMAT(2X,/,/,10X,8HMATRIZ B,/)
00 WRITE(6,27)
00 DO 28 I=1,M
00 28 WRITE(6,15)(B(I,J),J=1,M)
00 29 FORMAT(2X,/,/,10X,8HMATRIZ C,/)
00 WRITE(6,29)
00 DO 30 I=1,M
00 30 WRITE(6,15)(C(I,J),J=1,N)
00 C*
00 C*
00 C*      CALCULA C(I)*B=R
00 C*
00 C*
00 C*      I=1
00 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,A,A)
00 CALL ARRAY(2,N,M,25,10,B,B)
00 CALL ARRAY(2,M,N,10,25,C,C)
00 35 J=0
00 CALL MCPY(B,AD,N,M,0)
00 CALL RCPY(C,I,CI,M,N,0)
00 38 CALL GMPRD(CI,AD,R,1,N,M)
00 39 K=0
00 40 K=K+1

```

```

8500 C*
8600 C*
8700 C*      COMPARA R CON TOLERANCIA
8800 C*
8900 C*
9000 IF(R(K)-TOL)41,41,43
9100 41 IF(R(K)+TOL)43,42,42
9200 42 IF(M-K)48,50,40
9300 43 ID(I)=J
9400 C*
9500 C*
9600 C*      CALCULA DI'S Y MATRIZ D
9700 C*
9800 C*
9900 DO 44 K=1,M
10000 44 D(I,K)=R(K)
10100 IF(M-I)48,60,45
10200 45 I=I+1
10300 GO TO 35
10400 48 WRITE(6,49)
10500 49 FORMAT(2X,///,2X,20HERROR EN EL PROGRAMA,///)
10600 GO TO 10
10700 50 CALL GMPRD(A,AD,ATEMP,N,N,M)
10800 CALL MCPY(ATEMP,AD,N,M,0)
10900 J=J+1
11000 CALL GMPRD(CI,AD,R,1,N,M)
11100 IF(N-1-J)48,43,39
11200 C*
11300 C*
11400 C*      CALCULA D INVERSA Y SU DETERMINANTE
11500 C*
11600 C*
11700 60 CALL ARRAY(2,M,M,10,10,D,D)
11800 CALL MCPY(D,DINV,M,M,0)
11900 CALL MINV(DINV,M,DET,EL,R)
12000 JDTEST=0
12100 IF(DET-TOL)61,61,65
12200 61 IF(DET+TOL)65,62,62
12300 62 WRITE(6,58)
12400 58 FORMAT(2X,///,2X,23HLA MATRIZ D ES SINGULAR,///)
12500 JDTEST=1
12600 65 WRITE(6,67)DET
12800 67 FORMAT(2X,///,2X,28HDETERMINANTE DE LA MATRIZ D=,E10.3)
12900 C*
13000 C*
13100 C*      IMPRIME D Y D INVERSA
13200 C*
13300 C*

```

```

3400 CALL ARRAY(1,M,M,10,10,D,D)
3500 CALL ARRAY(1,M,M,10,10,DINV,DINV)
3600 68 FORMAT(2X,///,10X,BHMATRIZ D,/)
3700 WRITE(6,68)
3800 DO 968 I=1,M
3900 968 WRITE(6,15)(D(I,J),J=1,M)
4000 IF(JDTEST)48,9970,9971
4100 69 FORMAT(2X,///,10X,16HMATRIZ D-INVERSA,/)
4200 9970 WRITE(6,69)
4300 DO 969 I=1,M
4400 969 WRITE(6,15)(DINV(I,J),J=1,M)
4500 971 FORMAT(2X,///,10X,6HD-SUB-,I2,1H=,I2)
4600 9971 DO 972 K=1,M
4700 972 WRITE(6,971)K,1D(K)
14800 C*
14900 C*
15000 C*          CALCULA MATRIZ A-STAR
15100 C*
15200 C*
15300 I=1
15400 IF(JDTEST)48,70,55
15500 55 WRITE(6,56)
15600 56 FORMAT(2X,///,2X,23HSISTEMA NO DESACOPLABLE///)
15700 GO TO 10
15800 70 J=0
15900 CALL RCPY(C,I,CI,M,N,0)
16000 71 CALL GMPRD(CI,A,EN,1,N,N)
16100 CALL MCPY(EN,CI,1,N,0)
16200 J=J+1
16300 IF(J-ID(I)-1)71,72,48
16400 72 DO 73 K=1,N
16500 73 ASTAR(I,K)=CI(K)
16600 74 IF(I-M)75,980,48
16700 75 I=I+1
16800 GO TO 70
16900 C*
17000 C*
17100 C*          IMPRIME MATRIZ A-STAR
17200 C*
17300 C*
17400 80 FORMAT(2X,///,10X,13HMATRIZ A-STAR,/)
17500 980 WRITE(6,80)
17600 DO 981 I=1,M
17700 C*
17800 C*
17900 C*          CALCULA:  ABAR=A-B*DINV*ASTAR,  BBAR=B*DINV
18000 C*                   CBAR=C      Y      DINV*ASTAR
18100 C*
18200 C*

```

```

18300  981 WRITE(6,15)(ASTAR(I,J),J=1,N)
18400  CALL ARRAY(2,M,N,10,25,ASTAR,ASTAR)
18500  CALL ARRAY(2,M,M,10,10,DINV,DINV)
18600  CALL GMPRD(B,DINV,BBAR,N,M)
18700  CALL GMPRD(BBAR,ASTAR,TEMP,N,M,N)
18800  CALL GMSUB(A,TEMP,ABAR,N,N)
18900  CALL MCPY(C,CBAR,M,N,0)
19000  CALL GMPRD(DINV,ASTAR,TEMP,M,M,N)
19100  CALL ARRAY(1,M,N,25,25,TEMP,TEMP)
19200  CALL ARRAY(1,N,N,25,25,ABAR,ABAR)
19300  CALL ARRAY(1,N,M,25,10,BBAR,BBAR)
19400  CALL ARRAY(1,M,N,10,25,CBAR,CBAR)
19500  C*
19600  C*
19700  C*           INPRIME  ABAR,  BBAR,  CBAR  Y  DINV*ASTAR
19800  C*
19900  C*
20000  B1 FORMAT(2X,///,10X,11HMATRIZ ABAR,/)
20100  WRITE(6,B1)
20200  DO 982 I=1,N
20300  982 WRITE(6,15)(ABAR(I,J),J=1,N)
20400  82 FORMAT(2X,///,10X,11HMATRIZ BBAR,/)
20500  WRITE(6,82)
20600  DO 983 I=1,N
20700  983 WRITE(6,15)(BBAR(I,J),J=1,M)
20800  83 FORMAT(2X,///,10X,11HMATRIZ CBAR,/)
20900  WRITE(6,83)
21000  DO 84 I=1,M
21100  84 WRITE(6,15)(CBAR(I,J),J=1,N)
21200  85 FORMAT(2X,///,10X,22HMATRIZ D-INVERSA*ASTAR,/)
21300  WRITE(6,85)
21400  DO 86 I=1,M
21500  86 WRITE(6,15)(TEMP(I,J),J=1,N)
21600  C*
21700  C*
21800  C*           CALCULA MATRIZ T1
21900  C*
22000  C*           I) FORMA MATRIZ CONTROLABILIDAD H=(B,AB,...,A(N-1)B)
22100  C*
22200  C*
22300  C*
22400  K=0
22500  CALL ARRAY(2,N,M,25,10,BBAR,BBAR)
22600  CALL ARRAY(2,N,N,25,25,ABAR,ABAR)
22700  CALL MCPY(BBAR,A0,N,M,0)
22800  CALL SCLA(H,0.0,N*M,N,0)
22900  100 CALL GMTRA(A0,TEMP,N,M)
23000  DO 101 J=1,M
23100  101 CALL RADD(TEMP,J,H,K+J,M,N,0,N*M)

```



```

00 IF(K-((N-1)*M))108,109,48
00 108 K=K+M
00 CALL MCPY(A0,ATEMP,N,M,0)
00 CALL GMPRD(ABAR,ATEMP,A0,N,N,M)
00 GO TO 100
00 109 WRITE(6,90)
00 90 FORMAT(2X,///,2X,39HMATRIZ H=(B,AB,.,.,A(N-1)B) TRANSPUESTA,/)
00 CALL ARRAY(1,M*N,N,275,25,H,H)
00 NM=N*M
00 DO 91 I=1,NM
00 91 WRITE(6,15)(H(I,J),J=1,N)
00 CALL ARRAY(2,M*N,N,275,25,H,H)
00 C*
00 C*           RANGO DE H=NC
00 C*
00 CALL MFGR(H,M*N,N,TOL,NC,IROW,ICOL)
00 IF(NC-N)122,120,48
00 C*
00 C*
00 C*           II) ESTE BLOQUE SE USA CUANDO EL SISTEMA (ABAR,BBAR,CBAR)
00 C*           ES CONTROLABLE
00 C*
00 C*
00 C*
00 120 IP(M+2)=0
00 CALL MCPY(ABAR,ATIL,N,N,0)
00 CALL MCPY(BBAR,BTIL,N,M,0)
00 CALL ARRAY(2,M,N,10,25,CBAR,CBAR)
00 CALL MCPY(CBAR,CTIL,M,N,0)
00 CALL SCLA(T1,0.0,N,N,0)
00 CALL DCLA(T1,1.0,N,0)
00 CALL MCPY(T1,ELL,N,N,0)
00 121 FORMAT(2X,///,2X,38HEL SISTEMA ES CONTROLABLE, MATRIZ T1=I,/)
00 121 WRITE(6,121)
00 121 GOTO 199
00 C*
00 C*
00 C*           III) ENCUENTRA L1 Y L2, L=(L1,L2) CUANDO EL SISTEMA
00 C*           (ABAR,BBAR,CBAR) NO ES CONTROLABLE
00 C*
00 C*
00 C*
00 122 WRITE(6,123)NC
00 123 FORMAT(2X,///,2X,32HEL SISTEMA NO ES CONTROLABLE NC=,I2,/)
00 C*
00 C*           FORMA L2 CON (N-NC) VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES
00 C*           DEL ESPACIO NULO DE H
00 C*
00 CALL SCLA(ELL,0.0,N,N,0)
00 CALL ARRAY(1,N*M,N,275,25,H,H)
00 125 WRITE(7,125)

```

```

28100 125 FORMAT(2X,/,2X,18HSQLUCION DE LITR*X,/)
28200 NM=N*M
28300 DO 127 L=1,NM
28400 127 WRITE(7,15)(H(L,L1),L1=1,N)
28500 9127 FORMAT(2X,/,2X,5HICOL=,20I3,/)
28600 WRITE(7,9127)(ICOL(L),L=1,N)
28700 IN=N-NC
28800 DO 129 J=1,IN
28900 CALL SCLA(EN,0.0,1,N,0)
29000 LA=ICOL(NC+J)
29100 EN(LA)=1.0
29200 DO 128 L=1,NC
29300 LE=ICOL(L)
29400 128 EN(LE)=H(L,NC+J)
29500 129 CALL CADD(EN,I,ELL,NC+J,N,1,0,N)
29600 K=0
29700 CALL MCPY(BBAR,AD,N,M,0)
29800 CALL SCLA(H,0.0,N*M,N,0)
29900 130 CALL GMTRA(AD,TEMP,N,M)
30000 DO 131 J=1,M
30100 131 CALL RADD(TEMP,J,H,K+J,M,N,0,N*M)
30200 IF(K-(N*M))132,133,48
30300 132 K=K+H
30400 CALL MCPY(AD,ATEMP,N,M,0)
30500 CALL GMPRD(ABAR,ATEMP,AD,N,N,M)
30600 GO TO 130
30604 C*
30605 C*      FORMA L1 CON NC VECTORES L.I. DE H
30606 C*
30700 133 DO 134 J=1,NC
30800 CALL RCPY(H,IROW(J),EN,N*M,N,0)
30900 134 CALL CADD(EN,I,ELL,J,N,1,0,N)
31000 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,ELL,ELL)
31100 C*
31200 C*      IMPRIME MATRIZ L
31300 C*
31400 WRITE(6,138)
31500 138 FORMAT(2X,/,10X,8HMATRIZ L,/)
31600 DO 139 I=1,N
31700 139 WRITE(6,15)(ELL(I,J),J=1,N)
31800 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,ELL,ELL)
31900 CALL MCPY(ELL,T1,N,N,0)
32000 C*
32100 C*      MATRIZ T1= L INVERSA
32200 C*
32300 CALL MINV(T1,N,DETER,CI,EN)
32400 IF(DETER-TOL)140,140,150
32500 140 IF(DETER+TOL)150,141,141
32600 141WRITE(6,142)
32700 142 FORMAT(2X,/,2X,23HLA MATRIZ L ES SINGULAR,/)
32800 GO TO 48

```

```

32900 150 CALL GMPRD(ABAR,ELL,TEMP,N,N,N)
33000 CALL GMPRD(T1,TEMP,ATIL,N,N,N)
33100 CALL GMPRD(T1,BBAR,BTIL,N,N,N)
33200 CALL ARRAY(2,M,N,10,25,CBAR,CBAR)
33300 IP(M+2)=M-NC
33400 CALL GMPRD(CBAR,ELL,CTIL,M,N,N)
33405 C*
33406 C*      IMPRIME LAS MATRICES T1, ATIL, BTIL Y CTIL
33407 C*
33500 155 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,ATIL,ATIL)
33600 CALL ARRAY(1,N,M,25,10,BTIL,BTIL)
33700 CALL ARRAY(1,M,N,10,25,CTIL,CTIL)
33800 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,T1,T1)
33900 WRITE(6,156)
34000 156 FORMAT(2X,///,10X,9HMATRIZ T1,/)
34100 DO 157 I=1,N
34200 157 WRITE(6,15)(T1(I,J),J=1,N)
34300 WRITE(6,158)
34400 158 FORMAT(1X,///,10X,11HMATRIZ ATIL,/)
34500 DO 159 I=1,N
34600 159 WRITE(6,15)(ATIL(I,J),J=1,N)
34700 WRITE(6,160)
34800 160 FORMAT(2X,///,10X,11HMATRIZ BTIL,/)
34900 DO 161 I=1,N
35000 161 WRITE(6,15)(BTIL(I,J),J=1,M)
35100 WRITE(6,162)
35200 162 FORMAT(2X,///,10X,11HMATRIZ CTIL,/)
35300 DO 163 I=1,M
35400 163 WRITE(6,15)(CTIL(I,J),J=1,N)
35500 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,ATIL,ATIL)
35600 CALL ARRAY(2,N,M,25,10,BTIL,BTIL)
35700 CALL ARRAY(2,M,N,10,25,CTIL,CTIL)
35800 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,T1,T1)
35900 C*
36000 C*
36100 C*      CALCULA MATRIZ T2
36200 C*
36300 C*
36400 199 I=0
36500 IPE=0
36600 ISUM=0
36700 CALL XCPY(ATIL,AC,1,1,NC,NC,N,N,0)
36800 CALL XCPY(BTIL,BC,1,1,NC,M,N,M,0)
36900 CALL XCPY(CTIL,CC,1,1,M,NC,M,N,0)
37000 CALL SCLA(Q,0.0,N,N,0)
37100 DO 200 K=1,M
37200 200 ISUM=ID(K)+1+ISUM
37300 IF (ISUM-NC)201,250,9201
37400 9201 WRITE(6,9202)
37500 9202 FORMAT(2X,///,2X,'LA SUMA (D-SUB-I+1) PARA I=1,...,M ES',
37600 *' HAYOR QUE NC')

```

```

37700 GO TO 48
37800 C*
37900 C*
38000 C*      FORMA MATRIZ HC=(BC,AC*BC,...,AC(N-1)*BC) TRANSPUESTA
38100 C*
38200 C*
38300 201 I=I+1
38400 202 CALL SCLA(H,0.0,NC*M+ID(I)+1,NC,0)
38500 K=0
38600 CALL MCPY(BC,AD,NC,M,0)
38700 210 CALL GMTRA(AD,TEMP,NC,M)
38800 DO 211 J=1,M
38900 211 CALL RADD(TEMP,J,H,K+J,M,NC,0,NC*M+ID(I)+1)
39000 K=K+M
39100 IF(K-NC*M)212,213,48
39200 212 CALL MCPY(AD,ATEMP,N,M,0)
39300 CALL GMPRD(AC,ATEMP,AD,NC,NC,M)
39400 GO TO 210
39500 C*
39600 C*
39700 C*
39800 213 NN=(NC-1)*M
39900 DO 214 L=0,NN,M
40000 214 CALL SRMA(H,0.0,NC*M+ID(I)+1,NC,I+L,0)
40100 217 CALL XCPY(CTIL,CC,1,1,M,NC,M,N,0)
40200 CALL RCPY(CC,I,CI,M,NC,0)
40300 II=ID(I)+1
40400 DO 219 J=1,II
40500 CALL RADD(CI,1,H,NC*M+J,1,NC,0,NC*M+ID(I)+1)
40600 CALL RADD(CI,1,G,IPE+J,1,NC,0,NC)
40700 CALL MCPY(CI,EN,1,NC,0)
40800 219 CALL GMPRD(EN,AC,CI,1,NC,NC)
40900 220 CALL MFGR(H,NC*M+ID(I)+1,NC,TOL,JR,IROW,ICOL)
41000 IP(I)=NC-JR+ID(I)+1
41100 WRITE(6,9220)I,IP(I)
41200 9220 FORMAT(2X,/,2X,6HP-SUB-,I2,1H=,3X,I2,/)
41300 IPE=IPE+IP(I)
41400 IF(IP(I)-ID(I)-1)48,230,221
41500 221 CALL ARRAY(1,NC*M+ID(I)+1,NC,275,25,H,H)
41600 WRITE(7,9221)I
41700 9221 FORMAT(2X,/,2X,25HSOLUCION DE ETA*H PARA I=,I2,/)
41800 INC=NC*M+ID(I)+1
41900 DO 9222 L=1,INC
42000 9222 WRITE(7,15)(H(L,L1),L1=1,NC)
42100 WRITE(7,9127)(ICOL(L),L=1,N)
42200 NNN=NC-JR
42300 DO 223 J=1,NNN
42400 CALL SCLA(EN,0.0,1,NC,0)

```

```

42500 LI=ICOL(JR+J)
42600 EN(LI)=1.0
42700 DO 222 L=1,JR
42800 LE=ICOL(L)
42900 222 EN(LE)=H(L,JR+J)
43000 223 CALL RADD(EN,1,Q, ID(I)+1+J+IPE-IP(I),1,NC,0,NC)
43100 230 IF(I-M)231,270,40
43200 231 ISUM=0
43300 III=I+1
43400 DO 232 J=III,M
43500 232 ISUM=ISUM+ID(J)+1
43600 IF(IPE+ISUM-NC)201,250,48
43700 250 I=I+1
43800 IP(I)=ID(I)+1
43900 WRITE(6,251)I,IP(I)
44000 251FORMAT(2X,/,2X,6HP-SUB-,I2,1H=,3X,I2,/)
44100 CALL RCPY(CC,I,CI,M,NC,0)
44200 II=ID(I)+1
44300 DO 252 L=1,II
44400 CALL RADD(CI,1,Q,IPE+L,1,NC,0,NC)
44500 CALL MCPY(CI,EN,1,NC,0)
44600 252 CALL GMPRD(EN,AC,CI,1,NC,NC)
44700 IPE=IPE+IP(I)
44800 IF(I-M)250,270,48
44900 270 IF(IPE-NC)271,275,48
45000 271 CALL MCPY(Q,TEMP,NC,NC,0)
45100 CALL MFGR(TEMP,NC,NC,TOL,JRANK,IROW,ICOL)
45200 IF(JRANK-IPE)48,272,48
45300 272 CALL ARRAY(1,NC,NC,25,25,TEMP,TEMP)
45400 WRITE(7,9272)
45500 9272 FORMAT(2X,/,2X,15HSOLUCION DE Q*X,/)
45600 DO 9273 L=1,NC
45700 9273 WRITE(7,15)(TEMP(L,L1),L1=1,NC)
45800 WRITE(7,9127)(ICOL(L),L=1,N)
45900 NNN=NC-IPE
46000 DO 274 J=1,NNN
46100 CALL SCLA(EN,0,0,1,NC,0)
46200 LO=ICOL(IPE+J)
46300 EN(LO)=1.0
46400 DO 273 L=1,IPE
46500 LE=ICOL(L)
46600 273 EN(LE)=TEMP(L,IPE+J)
46700 274 CALL RADD(EN,1,Q,IPE+J,1,NC,0,NC)
46800 IF(M+1)=NC-IPE
46900 MMM=M+1
47000 WRITE(6,9274)MMM,IP(M+1)
47100 9274 FORMAT(2X,/,2X,6HP-SUB-,I2,1H=,3X,I2,/)
47200 275 IF(NC-N)276,280,48
47300 276 CALL SCLA(TEMP,0,0,N,N,0)
47400 NCC1=NC+1
47500 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,TEMP,TEMP)

```

```

47600 DO 9276 J=NCC1,N
47700 9276 TEMP(J,J)=1.0
47800 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,TEMP,TEMP)
47900 DO 277 J=1,NC
48000 CALL SCLA(EN,0.0,1,N,0)
48100 CALL RCPY(Q,J,EN,NC,NC,0)
48200 277 CALL RADD(EN,1,TEMP,J,1,N,0,N)
48300 GO TO 281
48400 280 CALL MCPY(Q,TEMP,N,N,0)
48500 281 CALL MCPY(TEMP,T2,N,N,0)
48600 CALL MINV(TEMP,N,DETER,CI,EN)
48700 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,T2,T2)
48800 C*
48900 C*
49000 C*          IMPRIME MATRIZ T2
49100 C*
49200 C*
49300 WRITE(6,282)
49400 282 FORMAT(2X,///,10X,9HMATRIZ T2,/)
49500 DO 283 I=1,N
49600 283 WRITE(6,15)(T2(I,J),J=1,N)
49700 IF(DETER-TOL)284,284,287
49800 284 IF(DETER+TOL)287,285,285
49900 285 WRITE(6,286)
50000 286 FORMAT(2X,///,2X,24HLA MATRIZ T2 ES SINGULAR,/)
50100 GO TO 48
50200 C*
50300 C*
50400 C*          FORMA UN SISTEMA S-HAT CANONICAMENTE
50500 C*          DESACOPLADO (CD)
50600 C*
50700 C*
50800 287 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,T2,T2)
50900 CALL GMPRD(CTIL,TEMP,CHAT,M,N,N)
51000 CALL GMPRD(T2,BTIL,BHAT,N,N,M)
51100 CALL GMPRD(T2,ATIL,AHAT,N,N,N)
51200 CALL MCPY(AHAT,ELL,N,N,0)
51300 CALL GMPRD(ELL,TEMP,AHAT,N,N,N)
51400 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,TEMP,TEMP)
51500 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,AHAT,AHAT)
51600 CALL ARRAY(1,N,M,25,10,BHAT,BHAT)
51700 CALL ARRAY(1,M,N,10,25,CHAT,CHAT)
51800 WRITE(6,288)
51900 288 FORMAT(2X,///,10X,17HMATRIZ T2 INVERSA,/)
52000 DO 289 I=1,N
52100 289 WRITE(6,15)(TEMP(I,J),J=1,N)
52200 WRITE(6,290)
52300 290 FORMAT(2X,///,10X,12HMATRIZ A-HAT,/)
52400 DO 291 I=1,N
52500 291 WRITE(6,15)(AHAT(I,J),J=1,N)
52600 WRITE(6,292)
52700 292 FORMAT(2X,///,10X,12HMATRIZ B-HAT,/)

```

```

52800 DO 293 I=1,N
52900 293 WRITE(6,15)(BHAT(I,J),J=1,M)
53000 WRITE(6,294)
53100 294 FORMAT(2X,/,10X,12HMATRIZ C-HAT,/)
53200 DO 295 I=1,M
53300 295 WRITE(6,15)(CHAT(I,J),J=1,N)
53400 C*
53500 C*
53600 C*          CALCULA LAS MATRICES G-SUB-I
53700 C*
53800 C*
53900 400 DO 406 I=1,M
54000 CALL SCLA(G,0.0,M,M,0)
54100 CALL CADD(DINV,I,G,I,M,N,0,M)
54200 WRITE(6,405)I
54300 405 FORMAT(2X,/,2X,12HMATRIZ G-SUB,I2,/)
54400 CALL ARRAY(1,M,M,10,10,G,G)
54500 DO 406 J=1,M
54600 406 WRITE(6,15)(G(J,K),K=1,M)
54700 C*
54800 C*
54900 C*          CALCULA LAS CONSTANTES PI,I,K Y LAS MATRICES J
55000 C*
55100 C*
55200 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,AHAT,AHAT)
55300 CALL ARRAY(2,N,M,25,10,BHAT,BHAT)
55400 500 IPE=0
55500 I=1
55600 501 CALL XCPY(AHAT,AI,IPE+1,IPE+1,IP(I),IP(I),N,N,0)
55700 CALL XCPY(BHAT,BI,IPE+1,I,IP(I),1,N,M,0)
55800 CALL SCLA(RI,0.0,IP(I),IP(I),0)
55900 CALL DCLA(RI,1.0,IP(I),0)
56000 CALL DCPY(AI,EN,IP(I),0)
56100 SUM=0.0
56200 IPI=IP(I)
56300 DO 502 K=1,IPI
56400 502 SUM=SUM+EN(K)
56500 QIK(1)=SUM
56600 J=0
56700 CALL SCLA(FK,0.0,N,N,0)
56800 503 CALL GMPRD(RI,BI,EN,IP(I),IP(I),1)
56900 CALL CADD(EN,1,FK,IP(I)-J,IP(I),1,0,IP(I))
57000 J=J+1
57100 CALL SCLA(TEMP1,0.0,N,N,0)
57200 CALL DCLA(TEMP1,QIK(J),IP(I),0)
57300 CALL GMPRD(RI,AI,Q,IP(I),IP(I),IP(I))
57400 CALL GMSUB(Q,TEMP1,RI,IP(I),IP(I))
57500 IF(J-IP(I))504,510,48
57600 504 CALL GMPRD(RI,AI,Q,IP(I),IP(I),IP(I))
57700 CALL DCPY(Q,EN,IP(I),0)
57800 SUM=0.00
57900 DO 505 K= 1,IPI
58000 505 SUM=SUM+EN(K)

```

```

58100 QIK(J+1)=SUM/(J+1)
58200 GO TO 503
58300 S10 CALL ARRAY(1,IP(I),IP(I),25,25,RI,RI)
58400 DO 9513 K=1,IPI
58500 DO 9513 L=1,IPI
58600 S12 SUM=RI(K,L)
58700 IF(SUM-TOL)513,513,514
58800 S13 IF(SUM+TOL)514,9513,9513
58900 9513 CONTINUE
59000 9514 GO TO 520
59100 S14 WRITE(6,515)I
59200 S15 FORMAT(2X,///,2X,35HEL METODO DE LA TRAZA FALLA PARA I=,I2,/)
59300 S20 WRITE(6,521)I,IP(I)
59400 S21 FORMAT(2X,///,2X,2HI=,I2,3X,8HP-SUB-I=,I2,/)
59500 DO 523 K=1,IPI
59600 S23 WRITE(6,524)I,K,QIK(K)
59700 S24 FORMAT(2X,///,2X,1HQ,I2,I2,1H=,E10.3,/)
59800 GO TO 600
59900 9525 CONTINUE
60000 CALL MCPY(FK,V,IP(I),IP(I),0)
60100 CALL ARRAY(1,IP(I),IP(I),25,25,FK,FK)
60200 WRITE(6,9524)
60300 9524 FORMAT(2X,///,2X,14HLA MATRIZ K ES,/)
60400 DO 525 K=1,IPI
60500 S25 WRITE(6,15)(FK(K,L),L=1,IPI)
60600 CALL MINV(V,IP(I),DET,EN,EM)
60700 IF(DET-TOL)526,526,530
60800 S26 IF(DET+TOL)530,527,527
60900 S27 WRITE(6,528)
61000 S28 FORMAT(2X,///,2X,23HLA MATRIZ K ES SINGULAR,/)
61100 GO TO 48
61200 S30 K=0
61300 9530 FORMAT(2X,///,2X,14HLA MATRIZ V ES,/)
61400 WRITE(6,9530)
61500 CALL ARRAY(1,IP(I),IP(I),25,25,V,V)
61600 DO 9532 L=1,IPI
61700 9532 WRITE(6,15)(V(L,L1),L1=1,IPI)
61800 CALL ARRAY(2,IP(I),IP(I),25,25,V,V)
61900 9531 K=K+1
62000 CALL SCLA(EM,0.0,M,N,0)
62100 CALL RCPY(V,K,EN,IP(I),IP(I),0)
62200 CALL SCLA(EM,0.0,1,N,0)
62300 DO 531 L=1,IPI
62400 S31 EM(IPE+L)=EN(L)
62500 CALL RADD(EM,1,EM1,I,1,N,0,M)
62600 CALL GMPRD(DINV,EM1,EJ1,M,M,N)
62700 WRITE(6,1000)
62800 1000 FORMAT(2X,///,2X,10HMATRIZ EJ1,/)
62900 CALL ARRAY(1,M,N,10,25,EJ1,EJ1)
63000 DO 1001 L=1,M
63100 1001 WRITE(6,15)(EJ1(L,L1),L1=1,N)

```



```

63200 CALL ARRAY(2,M,N,10,25,EJ1,EJ1)
63300 WRITE(6,1006)
63400 1006 FORMAT(2X,/,2X,9HMATRIZ T2,/)
63500 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,T2,T2)
63600 DO 1007 L=1,N
63700 1007 WRITE(6,15)(T2(L,L1),L1=1,N)
63800 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,T2,T2)
63900 CALL GMPRD(EJ1,T2,TEMP1,M,N,N)
64000 WRITE(6,1002)
64100 1002 FORMAT(2X,/,2X,12HMATRIZ TEMP1,/)
64200 CALL ARRAY(1,M,N,25,25,TEMP1,TEMP1)
64300 DO 1003 L=1,M
64400 1003 WRITE(6,15)(TEMP1(L,L1),L1=1,N)
64500 CALL ARRAY(2,M,N,25,25,TEMP1,TEMP1)
64600 WRITE(6,1005)
64700 1005 FORMAT(2X,/,2X,9HMATRIZ T1,/)
64800 CALL ARRAY(1,N,N,25,25,T1,T1)
64900 DO 1004 L=1,N
65000 1004 WRITE(6,15)(T1(L,L1),L1=1,N)
65100 CALL ARRAY(2,N,N,25,25,T1,T1)
65200 CALL GMPRD(TEMP1,T1,EJ1,M,N,N)
65300 CALL ARRAY(1,M,N,10,25,EJ1,EJ1)
65400 CALL ARRAY(1,M,N,10,25,EM1,EM1)
65500 WRITE(6,535)I
65600 WRITE(6,532)
65700 532 FORMAT(2X,14HMATRIZ M =)
65800 KKKK=IP(I)+1-K
65900 WRITE(6,535)KKKK
66000 DO 533 L=1,M
66100 533 WRITE(6,15)(EM1(L,L1),L1=1,N)
66200 535 FORMAT(12X,I2)
66300 WRITE(6,535)I
66400 536 FORMAT(2X,14HMATRIZ J =)
66500 WRITE(6,536)
66600 KKKK=IP(I)+1-K
66700 WRITE(6,535)KKKK
66800 DO 537 L=1,M
66900 537 WRITE(6,15)(EJ1(L,L1),L1=1,N)
67000 IF(K-IP(I))531,540,48
67100 540 IF(I-M)541,550,48
67200 541 IPE=IPE+IP(I)
67300 I=I+1
67400 GO TO 501
67500 550 IPE=IPE+IP(I)
67600 IF(IPE-NC)560,10,48
67700 560 I=I+1
67800 GO TO 501
67900 600 IPI=IP(I)
68000 IF(I-M)627,627,626
68100 626 IRI=IPI
68200 GO TO 620
68300 627 IRI=IP(I)-ID(I)-1
68400 620 IF(IRI)48,623,621
68500 621 IF(ABS(QIK(IRI))-TOL)622,622,625
68600 622 IRI=IRI-1
68700 GO TO 620

```

```
68800 623 IF(I-M)9525,9525,10
68900 625 PC(IRI+1)=1.0
69000 DO 601 IA=1,IRI
69100 601 PC(IA)=-QIK(IRI+1-IA)
69200 CALL PRQD(PC,IRI+1,PQ,PE,POL,IR,IER)
69300 603 FORMAT(2X,///,2X,23HLA SUBROUTINA PRQD FALLA,/)
69400 604 WRITE(6,605)I
69500 605 FORMAT(2X,///,2X,'VALORES CARACTERISTICOS NO NULOS DE',/)
69600 * 2X,'LA MATRIZ A-HAT-SUB-',I2,/)
69700 IF(IER)606,606,610
69800 606 WRITE(6,606)
69900 606 FORMAT(2X,10HPARTE REAL,3X,16HPARTE IMAGINARIA,/)
70000 DO 607 IA=1,IR
70100 607 WRITE(6,608)PQ(IA),PE(IA)
70200 608 FORMAT(2X,E10.3,3X,E10.3,/)
70300 IF(I-M)9525,9525,10
70400 610 WRITE(6,603)
70500 IF(I-M)9525,9525,10
70600 1111 WRITE(6,1112)
70700 1112 FORMAT(2X,///,10X,'ENTRADA INVALIDA',///,10X,
70701 * 'FIN DEL PROGRAMA')
70800 CALL EXIT
70900 END
```

```

80000 C*
80100 C*
80200 C*          SUBROUTINAS DEL PROGRAMA
80300 C*
80400 C*
80500 C* SUBROUTINE ARRAY(MODE,I,J,N,M,S,D)
80600 C*
80700 C*   CONVIERTE LOS ARREGLOS MATRICIALES DE DOS DIMENSIONES EN
80800 C*   ARREGLOS DE UNA DIMENSION (VECTORES) O VICEVERSA, ESTA
80900 C*   SUBROUTINA SE USA PARA ENCADENAR EL PROGRAMA PRINCIPAL
81000 C*   QUE CONTIENE ARREGLOS DE DOS DIMENSIONES CON LAS SUBRU-
81100 C*   TINAS DEL PAQUETE SSP/IBM QUE OPERAN SOBRE ARREGLOS EN
81200 C*   FORMA DE VECTOR
81300   DIMENSION S(1),D(1)
81400   NI=N-I
81500   IF(MODE-1)100,100,120
81600   100 IJ=I*J+1
81700   NM=N*J+1
81800   DO 110 K=1,J
81900   NM=NM-NI
82000   DO 110 L=1,I
82100   IJ=IJ-1
82200   NM=NM-1
82300   110 D(NM)=S(IJ)
82400   GO TO 140
82500   120 IJ=0
82600   NM=0
82700   DO 130 K=1,J
82800   DO 125 L=1,I
82900   IJ=IJ+1
83000   NM=NM+1
83100   125 S(IJ)=D(NM)
83200   130 NM=NM+NI
83300   140 RETURN
83400   END
83500 C*
83600 C*
83700 C* SUBROUTINE LOC(I,J,IR,N,M,MS)
83800 C*
83900 C*   CALCULA EL SUBINDICE DE UN ELEMENTO ESPECIFICO DE UNA
84000 C*   MATRIZ ALMACENADA EN FORMA VECTOR
84100   IX=I
84200   JX=J
84300   IF(MS-1)10,20,30
84400   10 IRX=N*(JX-1)+IX
84500   GO TO 36
84600   20 IF(IX-JX)22,24,24
84700   22 IRX=IX+(JX*JX-JX)/2
84800   GO TO 36
84900   24 IRX=JX+(IX*IX-IX)/2
85000   GO TO 36
85100   30 IRX=0
85200   IF(IX-JX)36,32,36
85300   32 IRX=IX
85400   36 IR=IRX
85500   RETURN
85600   END

```

```

85700 C*
85800 C*
85900 SUBROUTINE MCPY(A,R,N,M,MS)
86000 C*
86100 C* COPIA LA MATRIZ A EN LA MATRIZ R
86200 DIMENSION A(1),R(1)
86300 CALL LOC(N,M,IT,N,M,MS)
86400 DO 1 I=1,IT
86500 1 R(I)=A(I)
86600 RETURN
86700 END
86800 C*
86900 C*
87000 SUBROUTINE RCPY(A,L,R,N,M,MS)
87050 C*
87055 C* COPIA UN RENGLON ESPECIFICO DE LA MATRIZ A EN EL VECTOR R
87100 DIMENSION A(1),R(1)
87200 DO 3 J=1,M
87300 CALL LOC(L,J,LJ,N,M,MS)
87400 IF(LJ)1,2,1
87500 1 R(J)=A(LJ)
87600 GO TO 3
87700 2 R(J)=0.0
87800 3 CONTINUE
87900 RETURN
88000 END
88100 C*
88200 C*
88300 SUBROUTINE DCPY(A,R,N,MS)
88400 C*
88500 C* COPIA LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL DE LA MATRIZ A EN
88600 C* EL VECTOR R
88700 DIMENSION A(1),R(1)
88800 DO 3 J=1,N
88900 CALL LOC(J,J,IJ,N,N,MS)
89000 3 R(J)=A(IJ)
89100 RETURN
89200 END
89300 C*
89400 C*
89500 SUBROUTINE XCPY(A,R,L,K,NR,MR,NA,MA,MS)
89600 C*
89700 C* COPIA UNA PARTICION DE LA MATRIZ A EN LA MATRIZ R
89800 DIMENSION A(1),R(1)
89900 IR=0
90000 L2=L+NR-1
90100 K2=K+MR-1
90200 DO 5 J=K,K2
90300 DO 5 I=L,L2
90400 IR=IR+1
90500 R(IR)=0.0
90600 CALL LOC(I,J,IA,NA,MA,MS)
90700 IF(IA)4,5,4
90800 4 R(IR)=A(IA)
90900 5 CONTINUE
91000 RETURN
91100 END

```

```

91200 C*
91300 C*
91400 SUBROUTINE GMSUB(A,B,R,N,M)
91500 C*
91600 C*  RESTA LA MATRIZ B A LA MATRIZ A PARA FORMAR LA MATRIZ
91700 C*  RESULTANTE R
91800 DIMENSION A(1),B(1),R(1)
91900 NM=N*M
92000 DO 10 I=1,NM
92100 10 R(I)=A(I)-B(I)
92200 RETURN
92300 END
92400 C*
92500 C*
92600 SUBROUTINE GMPRD(A,B,R,N,M,L)
92700 C*
92800 C*  POST-MULTIPLICA LA MATRIZ A POR LA MATRIZ B PARA FORMAR
92900 C*  LA MATRIZ RESULTANTE R
93000 DIMENSION A(1),B(1),R(1)
93100 IR=0
93200 IK=-M
93300 DO 10 K=1,L
93400 IK=IK+M
93500 DO 10 J=1,N
93600 IR=IR+1
93700 JI=J-N
93800 IB=IK
93900 R(IR)=0.0
94000 DO 10 I=1,M
94100 JI=JI+N
94200 IB=IB+1
94300 10 R(IR)=R(IR)+A(JI)*B(IB)
94400 RETURN
94500 END
94600 C*
94700 C*
94800 SUBROUTINE GMTRA(A,R,N,M)
94850 C*
94860 C*  FORMA LA MATRIZ TRANSFUESTA DE LA MATRIZ A
94900 DIMENSION A(1),R(1)
95000 IR=0
95100 DO 10 I=1,N
95200 IJ=I-N
95300 DO 10 J=1,M
95400 IJ=IJ+N
95500 IR=IR+1
95600 10 R(IR)=A(IJ)
95700 RETURN
95800 END

```

```

95900 C*
96000 C*
96100 SUBROUTINE SCLA(A,C,N,M,MS)
96150 C*
96155 C*   FORMA LA MATRIZ A CUYOS ELEMENTOS SON TODOS IGUALES
96160 C*   A UN ESCALAR C
96200 DIMENSION A(1)
96300 CALL LOC(N,M,IT,N,M,MS)
96400 DO 1 I=1,IT
96500 1 A(I)=C
96600 RETURN
96700 END
96800 C*
96900 C*
97000 SUBROUTINE DCLA(A,C,N,MS)
97050 C*
97055 C*   IGUALA TODOS LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL
97060 C*   DE LA MATRIZ A CON UN ESCALAR C
97100 DIMENSION A(1)
97200 DO 3 I=1,N
97300 CALL LOC(I,I,ID,N,N,MS)
97400 3 A(ID)=C
97500 RETURN
97600 END
97700 C*
97800 C*
97900 SUBROUTINE RADD(A,IRA,R,IRR,N,M,MS,L)
98000 C*
98100 C*   SUMA UN RENGLON ESPECIFICO DE LA MATRIZ A
98200 C*   A OTRO RENGLON ESPECIFICO DE LA MATRIZ R
98300 DIMENSION A(1),R(1)
98400 IR=IRR-L
98500 DO 2 J=1,M
98600 IR=IR+L
98700 CALL LOC(IRA,J,IA,N,M,MS)
98800 IF(IA)1,2,1
98900 1 R(IR)=R(IR)+A(IA)
99000 2 CONTINUE
99100 RETURN
99200 END

```

```
99300 C*
99400 C*
99500 SUBROUTINE CADD(A,ICA,R,ICR,N,M,MS,L)
99600 C*
99700 C*  SUMA UNA COLUMNA ESPECIFICA DE LA MATRIZ A
99800 C*  A OTRA COLUMNA ESPECIFICA DE LA MATRIZ R
99900 DIMENSION A(1),R(1)
100000 IR=N*(ICR-1)
100100 DO 2 I=1,N
100200 IR=IR+1
100300 CALL LOC(I,ICA,IA,N,M,MS)
100400 IF(IA)1,2,1
100500 1 R(IR)=R(IR)+A(IA)
100600 2 CONTINUE
100700 RETURN
100800 END
100900 C*
101000 C*
101100 SUBROUTINE SRMA(A,C,N,M,LA,LB)
101200 C*
101300 C*  MULTIPLICA POR UN ESCALAR C UN RENGLON ESPECIFICO
101400 C*  DE LA MATRIZ A Y LO SUMA A OTRO RENGLON DE LA MISMA
101500 C*  MATRIZ
101600 DIMENSION A(1)
101700 LAJ=LA-N
101800 LBJ=LB-N
101900 DO 3 J=1,M
102000 LAJ=LAJ+N
102100 LBJ=LBJ+N
102200 IF(LB)1,2,1
102300 1 A(LBJ)=A(LAJ)*C+A(LBJ)
102400 GO TO 3
102500 2 A(LAJ)=A(LAJ)*C
102600 3 CONTINUE
102700 RETURN
102800 END
```

```

102900 C*
103000 C*
103100 SUBROUTINE MINV(A,N,D,L,M)
103200 C*
103300 C*   INVIERTE LA MATRIZ A POR EL METODO
103400 C*   DE GAUSS-JORDAN
103500 C*
103600 DIMENSION A(1),L(1),M(1)
103700 D=1.0
103800 NK=-N
103900 DO 80 K=1,N
104000 NK=NK+N
105100 L(K)=K
105200 M(K)=K
105300 KK=NK+K
105400 BIGA=A(KK)
105500 DO 20 J=K,N
105600 IZ=N*(J-1)
105700 DO 20 I=K,N
105800 IJ=IZ+I
105900 10 IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ)))15,20,20
106000 15 BIGA=A(IJ)
106100 L(K)=I
106200 M(K)=J
106300 20 CONTINUE
106400 J=L(K)
106500 IF(J-K)35,35,25
106600 25 KI=K-N
106700 DO 30 I=1,N
106800 KI=KI+N
106900 HOLD=-A(KI)
107000 JI=KI-K+J
107100 A(KI)=A(JI)
107200 30 A(JI)=HOLD
107300 35 I=N(K)
107400 IF(I-K)45,45,38
107500 38 JP=N*(I-1)
107600 DO 40 J=1,N
107700 JK=NK+J
107800 JI=JP+J
107900 HOLD=-A(JK)
108000 A(JK)=A(JI)
108100 40 A(JI)=HOLD
108200 45 IF(BIGA)48,46,48
108300 46 D=0.0
108400 RETURN
108500 48 DO 55 I=1,N
108600 IF(I-K)50,55,50
108700 50 IK=NK+I
108800 A(IK)=A(IK)/(-BIGA)
108900 55 CONTINUE
109000 DO 65 I=1,N
109100 IK=NK+I
109200 HOLD=A(IK)

```



```
109300 IJ=I-N
109400 DO 65 J=1,N
109500 IJ=IJ+N
109600 IF(I-K)60,65,60
109700 60 IF(J-K)62,65,62
109800 62 KJ=IJ-I+K
109900 A(IJ)=HOLD*A(KJ)+A(IJ)
110000 65 CONTINUE
110100 KJ=K-N
110200 DO 75 J=1,N
110300 KJ=KJ+N
110400 IF(J-K)70,75,70
110500 70 A(KJ)=A(KJ)/BIGA
110600 75 CONTINUE
110700 D=D*BIGA
110800 A(KK)=1.0/BIGA
110900 80 CONTINUE
111000 K=N
111100 100 K=(K-1)
111200 IF(K)150,150,105
111300 105 I=L(K)
111400 IF(I-K)120,120,108
111500 108 JQ=N*(K-1)
111600 JR=N*(I-1)
111700 DO 110 J=1,N
111800 JK=JQ+J
111900 HOLD=A(JK)
112000 JI=JR+J
112100 A(JK)=-A(JI)
112200 110 A(JI)=HOLD
112300 120 J=M(K)
112400 IF(J-K)100,100,125
112500 125 KI=K-N
112600 DO 130 I=1,N
112700 KI=KI+N
112800 HOLD=A(KI)
112900 JI=KI-K+J
113000 A(KI)=-A(JI)
113100 130 A(JI)=HOLD
113200 GO TO 100
113300 150 RETURN
113400 END
```

```

3500 C*
3600 C*
3700 SUBROUTINE MFGR(A,M,N,EPS,IRANK,IROW,ICOL)
3800 C*
3900 C*   CALCULA PARA UNA MATRIZ A NO NECESARIAMENTE CUADRADA:
4000 C*   I) RANGO DE A
4100 C*   II) UN CONJUNTO DE VECTORES COLUMNA LINEALMENTE INDEPENDIENTES
4200 C*   III) LA BASE DEL ESPACIO NULO DE A
4300 DIMENSION A(1),IROW(1),ICOL(1)
4400 IF(N)2,2,1
4500 1 IF(N)2,2,4
4600 2 IRANK=-1
4700 3 RETURN
4800 4 IRANK=0
4900 PIV=0.0
5000 JJ=0
5100 DO 6 J=1,N
5200 ICOL(J)=J
5300 DO 6 I=1,M
5400 JJ=JJ+1
5500 HOLD=A(JJ)
5600 IF(ABS(PIV)-ABS(HOLD))5,6,6
5700 5 PIV=HOLD
5800 IR=I
5900 IC=J
6000 6 CONTINUE
6100 DO 7 I=1,M
6200 7 IROW(I)=I
6300 TOL=ABS(EPS*PIV)
6400 NM=N*M
6500 DO 19 NCOL=M,NM,M
6600 8 IF(ABS(PIV)-TOL)20,20,9
6700 9 IRANK=IRANK+1
6800 JJ=IR-IRANK
6900 IF(JJ)12,12,10
7000 10 DO 11 J=IRANK,NM,M
7100 I=J+JJ
7200 SAVE=A(J)
7300 A(J)=A(I)
7400 11 A(I)=SAVE
7500 JJ=IROW(IR)
7600 IROW(IR)=IROW(IRANK)
7700 IROW(IRANK)=JJ
7800 12 JJ=(IC-IRANK)*M
7900 IF(JJ)15,15,13
8000 13 KK=NCOL
8100 DO 14 J=1,M
8200 I=KK+JJ
8300 SAVE=A(KK)
8400 A(KK)=A(I)
8500 KK=KK-1
8600 14 A(I)=SAVE

```

```
118700 JJ=ICOL(IC)
118800 ICOL(IC)=ICOL(IRANK)
118900 ICOL(IRANK)=JJ
119000 15 KK=IRANK+1
119100 MM=IRANK-M
119200 LL=NCOL+MM
119300 IF(MM)16,25,25
119400 16 JJ=LL
119500 SAVE=PIV
119600 PIV=0.0
119700 DO 19 J=KK,M
119800 JJ=JJ+1
119900 HOLD=A(JJ)/SAVE
120000 A(JJ)=HOLD
120100 L=J-IRANK
120200 IF(IRANK-N)17,19,19
120300 17 II=JJ
120400 DO 19 I=KK,N
120500 II=II+M
120600 MM=II-L
120700 A(II)=A(II)-HOLD*A(MM)
120800 IF(ABS(A(II))-ABS(PIV))19,19,18
120900 18 PIV=A(II)

121000 IR=J
121100 IC=I
121200 19 CONTINUE
121300 20 IF(IRANK-1)3,25,21
121400 21 IR=LL
121500 DO 24 J=2,IRANK
121600 II=J-1
121700 IR=IR-M
121800 JJ=LL
121900 DO 23 I=KK,M
122000 HOLD=0.0
122100 JJ=JJ+1
122200 MM=JJ
122300 IC=IR
122400 DO 22 L=1,II
122500 HOLD=HOLD+A(MM)*A(IC)
122600 IC=IC-1
122700 22 MM=MM-M
122800 23 A(MM)=A(MM)-HOLD
122900 24 CONTINUE
123000 25 IF(N-IRANK)3,3,26
123100 26 IR=LL
123200 KK=LL+M
123300 DO 30 J=1,IRANK
123400 DO 29 I=KK,NM,M
123500 JJ=IR
```

```
123600 LL=I
123700 HOLD=0.0
123800 II=J
123900 27 II=II-1
124000 IF(II)29,29,28
124100 28 HOLD=HOLD-A(JJ)*A(LL)
124200 JJ=JJ-M
124300 LL=LL-1
124400 60 TO 27
124500 29 A(LL)=(HOLD-A(LL))/A(JJ)
124600 30 IR=IR-1
124700 RETURN
124800 END
```

```

124900 C*
125000 C*
125100 SUBROUTINE PRQD(C,IC,Q,E,POL,IR,IER)
125200 C*
125300 C*   CALCULA (TODAS) LAS RAICES (REALES Y COMPLEJAS)
125400 C*   DE UN POLINOMIO CON COEFICIENTES REALES
125500 DIMENSION E(1),Q(1),C(1),POL(1)
125600 IER=0
125700 IR=IC
125800 EPS=1.E-6
125900 TOL=1.E-3
126000 LIMIT=10*IC
126100 KOUNT=0
126200 1 IF(IR-1)79,79,2
126300 2 IF(C(IR))4,3,4
126400 3 IR=IR-1
126500 GO TO 1
126600 4 O=1./C(IR)
126700 IEND=IR-1
126800 ISTA=1
126900 NSAV=IR+1
127000 JBEG=1
127100 DO 9 I=1,IR
127200 J=NSAV-I
127300 IF(C(I))7,5,7
127400 5 GO TO (6,8),JBEG
127500 6 NSAV=NSAV+1
127600 Q(ISTA)=0.0
127700 E(ISTA)=0.0
127800 ISTA=ISTA+1
127900 GO TO 9
128000 7 JBEG=2
128100 8 Q(J)=C(I)*O
128200 C(I)=Q(J)
128300 9 CONTINUE
128400 ESAV=0.0
128500 Q(ISTA)=0.0
128600 10 NSAV=IR
128700 EXPT=IR-ISTA
128800 E(ISTA)=EXPT
128900 DO 11 I=ISTA,IEND
129000 EXPT=EXPT-1.0
129100 POL(I+1)=EPS*ABS(Q(I+1))+EPS
129200 11 E(I+1)=Q(I+1)*EXPT
129300 IF(ISTA-IEND)12,20,60
129400 12 JEND=IEND-1
129500 DO 19 I=ISTA,JEND
129600 IF(I-ISTA)13,16,13
129700 13 IF(ABS(E(I))-POL(I+1))14,14,16
129800 14 NSAV=I
129900 DO 15 K=I,JEND
130000 IF(ABS(E(K))-POL(K+1))15,15,80
130100 15 CONTINUE
130200 GO TO 21

```

```

30300 16 DO 19 K=I,IEND
30400 E(K+1)=E(K+1)/E(I)
30500 Q(K+1)=E(K+1)-Q(K+1)
30600 IF(K-I)18,17,18
30700 17 IF(ABS(Q(I+1))-POL(I+1))80,80,19
30800 18 Q(K+1)=Q(K+1)/Q(I+1)
30900 POL(K+1)=POL(K+1)/ABS(Q(I+1))
31000 E(K)=Q(K+1)-E(K)
31100 19 CONTINUE
31200 20 Q(IR)=-Q(IR)
31300 21 E(ISTA)=0.0
31400 NRAN=NSAV-1
31500 22 E(NRAN+1)=0.0
31600 IF(NRAN-ISTA)24,23,31
31700 23 Q(ISTA+1)=Q(ISTA+1)+EXPT
31800 E(ISTA+1)=0.0
31900 24 E(ISTA)=ESAV
32000 IF(IR-NSAV)60,60,25
32100 25 ISTA=NSAV
32200 ESAV=E(ISTA)
32300 GO TO 10
32400 26 P=P+EXPT
32500 IF(Q)27,28,28
32600 27 Q(NRAN)=P
32700 Q(NRAN+1)=P
32800 E(NRAN)=T
32900 E(NRAN+1)=-T
33000 GO TO 29
33100 28 Q(NRAN)=P-T
33200 Q(NRAN+1)=P+T
33300 E(NRAN)=0.0
33400 29 NRAN=NRAN-2
33500 GO TO 22
33600 30 Q(NRAN+1)=EXPT+P
33700 NRAN=NRAN-1
33800 GO TO 22
33900 31 JBEG=ISTA+1
34000 JEND=NRAN-1
34100 TEPS=EPS
34200 TDELTA=1.E-2
34300 32 KOUNT=KOUNT+1
34400 P=Q(NRAN+1)
34500 R=ABS(E(NRAN))
34600 IF(R-TEPS)30,30,33
34700 33 S=ABS(E(JEND))
34800 IF(S-R)38,38,34
34900 34 IF(R-TDELTA)36,35,35
35000 35 P=0.0
35100 36 Q=P
35200 DO 37 J=JBEG,NRAN
35300 Q(J)=Q(J)+E(J)-E(J-1)-Q
35400 IF(ABS(Q(J))-POL(J))81,81,37
35500 37 E(J)=Q(J+1)*E(J)/Q(J)
35600 Q(NRAN+1)=-E(NRAN)+Q(NRAN+1)-Q
35700 GO TO 54

```

```

135800 38 P=0.5*(Q(NRAN)+E(NRAN)+Q(NRAN+1))
135900 0=P*P-Q(NRAN)*Q(NRAN+1)
136000 T=SQRT(ABS(O))
136100 IF(S-TEPS)26,26,39
136200 39 IF(O)43,40,40
136300 40 IF(P)42,41,41
136400 41 T=-T
136500 42 P=P+T
136600 R=S
136700 GO TO 34
136800 43 IF(S-TDELTA)44,35,35
136900 44 O=Q(JBEG)+E(JBEG)-P
137000 IF(ABS(O)-POL(JBEG))81,81,45
137100 45 T=(T/O)**2
137200 U=E(JBEG)*Q(JBEG+1)/(O*(1.0+T))
137300 V=O+U
137400 KOUNT=KOUNT+2
137500 DO 53 J=JBEG,NRAN
137600 O=Q(J+1)+E(J+1)-U-P
137700 IF(ABS(V)-POL(J))46,46,49
137800 46 IF(J-NRAN)81,47,81
137900 47 EXPT=EXPT+P
138000 IF(ABS(E(JEND))-TOL)48,48,81
138100 48 P=0.5*(V+O-E(JEND))
138200 0=P*P-(V-U)*(O-U*T-O*W*(1.0+T)/Q(JEND))
138300 T=SQRT(ABS(O))
138400 GO TO 26
138500 49 IF(ABS(O)-POL(J+1))46,46,50
138600 50 W=U*O/V
138700 T=T*(V/O)**2
138800 Q(J)=V+W-E(J-1)
138900 U=0,0
139000 IF(J-NRAN)51,52,52
139100 51 U=Q(J+2)*E(J+1)/(O*(1.0+T))
139200 52 V=O+U-W
139300 IF(ABS(Q(J))-POL(J))81,81,53
139400 53 E(J)=W*V*(1.0+T)/Q(J)
139500 Q(NRAN+1)=V-E(NRAN)
139600 54 EXPT=EXPT+P
139700 TEPS=TEPS*1.1
139800 TDELTA=TDELTA*1.1
139900 IF(KOUNT-LIMIT)32,55,55
140000 55 IER=1
140100 56 IEND=NSAV-NRAN-1
140200 E(ISTA)=ESAV
140300 IF(IEND)59,59,57
140400 57 DO 58 I=1,IEND
140500 J=ISTA+I
140600 K=NRAN+1+I
140700 E(J)=E(K)
140800 58 Q(J)=Q(K)
140900 59 IR=ISTA+IEND
141000 60 IR=IR-1

```

```
141100 IF(IR)78,78,61
141200 61 DO 62 I=1,IR
141300 Q(I)=Q(I+1)
141400 62 E(I)=E(I+1)
141500 POL(IR+1)=1.0
141600 IEND=IR-1
141700 JBEG=1
141800 DO 69 J=1,IR
141900 ISTA=IR+1-J
142000 O=0.0
142100 P=Q(ISTA)
142200 T=E(ISTA)
142300 IF(T)65,63,65
142400 63 DO 64 I=ISTA,IR
142500 POL(I)=O-P*POL(I+1)
142600 64 O=POL(I+1)
142700 GO TO 69
142800 65 GO TO(66,67),JBEG
142900 66 JBEG=2
143000 POL(ISTA)=0.0
143100 GO TO 69
143200 67 JBEG=1
143300 U=P*P+T*T
143400 P=P+P
143500 DO 68 I=ISTA,IEND
143600 POL(I)=O-P*POL(I+1)+U*POL(I+2)
143700 68 O=POL(I+1)
143800 POL(IR)=O-P
143900 69 CONTINUE
144000 IF(IER)78,70,78
144100 70 P=0.0
144200 DO 75 I=1,IR
144300 IF(C(I))72,71,72
144400 71 O=ABS(POL(I))
144500 GO TO 73
144600 72 O=ABS((POL(I)-C(I))/C(I))
144700 73 IF(P-O)74,75,75
144800 74 P=O
144900 75 CONTINUE
145000 IF(P-TOL)77,76,76
145100 76 IER=-1
145200 77 Q(IR+1)=P
145300 E(IR+1)=0.0
145400 78 RETURN
145500 79 IER=2
145600 IR=0
145700 RETURN
145800 80 IER=4
145900 IR=ISTA
146000 GO TO 60
146100 81 IER=3
146200 GO TO 56
146300 END
```


REFERENCIAS

- [1] A. ALONSO CONCHEIRO, "A complete set of independent decoupling invariants", *Int. Journal Control*, vol. 18, No. 6, pp. 1211-1220, 1973.
- [2] A. S. BOKSENBOM y R. HOOD, "General algebraic method applied to control analysis for complex engine types", *NACA, Rep. 980*, 1950.
- [3] M. J. DENHAM, "A necessary and sufficient condition for decoupling by output feedback", *IEE Trans. Aut. Control*, pp. 535-536, oct. 1973.
- [4] G. A. DESOER, Notes for a second course on linear systems, University of California, Berkeley, Van Nostrand Reinhold Co., 1970.
- [5] K. CHEN, R. A. MATHIAS y D. M. SAUTER, "Design of non-interacting control systems using Bode diagrams", *AIIEE Trans. (Appl. Ind.)*, Vol. 80, pp. 336-346, ene. 1962.
- [6] I. ESPINOSA ESPINOSA, Sistemas lineales multivariables, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 1978.
- [7] I. ESPINOSA ESPINOSA, Manual del usuario de la programoteca de sistemas lineales multivariables, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 1978.
- [8] P. L. FALB y W. A. WOLOVICH, "Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems", *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. AC-12, No. 6, pp. 651-659, dic. 1967.
- [9] A. S. FOSS, "Critique of chemical process control theory", *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. AC-18, pp. 646-652, Perspectives, dic. 1973.
- [10] H. FREEMAN, "Stability and physical realizability considerations in the synthesis of multipole control systems", *AIIEE Trans. (Appl. Ind.)*, Vol. 77, pp. 1-5, mar. 1958.
- [11] E. G. GILBERT, "The decoupling of multivariable systems by state feedback", *SIAM Journal Control*, Vol. 7, No. 1, pp. 50-63, feb. 1969.
- [12] E. G. GILBERT y J. R. PIVNICHNY, "A computer program for the synthesis of decoupled multivariable feedback systems", *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. AC-14, No. 6, pp. 652-659, dic. 1969.

- [13] J. W. HOWZE, "Necessary and sufficient condition for decoupling using output feedback", IEE Trans. Aut. Control, pp. 44-46, feb. 1973.
- [14] J. W. HOWZE y J. B. PEARSON, "Decoupling and arbitrary pole placement in linear systems using output feedback", IEEE Trans. Aut. Control (Short papers), Vol. AC-15 pp. 660-663, dic. 1970.
- [15] IBM Corp. IBM System/360 FORTRAN IV Language, Form # C28-6515-6, 1966.
- [16] IBM Corp. System/360 Scientific Subroutine Package (360A-OM-03X) Version IV Programmer's Manual, Form # H20-0205-3, 1968.
- [17] R. J. KAVANAGH, "Multivariable control systems synthesis", AIEE Trans. (Appl. Ind.), Vol. 77, pp. 425-429, nov. 1958.
- [18] C. K. LIU y N. J. BERGMAN, "A special class of decoupling matrices", Int. Journal Control, Vol. 12, No. 5, pp. 779-784, 1970.
- [19] D. G. LUENBERGER, "Observers for multivariable systems", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-11, pp. 190-197, abr. 1966.
- [20] A. G. J. MACFARLANE, "A survey of some recent results in linear multivariable feedback theory", Automatica, Vol. 8, pp. 455-492, Pergamon Press, Gran Bretaña, 1972.
- [21] M. V. MEEEROV, "Multivariable control systems", Trad. del ruso por Israel Program for Scientific Translations, 1968, ch. 6.
- [22] ——— "Some fundamental properties of multivariable systems and the use of these properties in optimisation", 2nd IFAC Symposium on multivariable technical control systems, Dusseldorf, paper No. 4.2, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [23] A. S. MORSE y W. M. WONHAM, "Status of noninteracting control", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-16, No. 6, dic. 1971.
- [24] ——— "Decoupling and pole assignment by dynamic compensation", SIAM Journal Control, Vol. 8, pp. 317-337, ago. 1970.
- [25] ——— "Triangular decoupling of linear multivariable systems", IEEE Trans. Aut. Control (Short papers), Vol. AC-15, pp. 447-449, ago. 1970.

- [26] B. S. MORGAN, "The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-9, pp. 405-411, oct. 1964.
- [27] I. H. MUFTI, "A note on the decoupling of multivariable systems", IEEE Trans. Aut. Control, pp. 415-416, ago. 1969.
- [28] ——— "Some results on the decoupling of multivariable systems", Int. Journal Control, Vol. 14, No. 3, pp. 477-485, 1971.
- [29] C. R. PAUL, "Pole specification in decoupled systems", Int. Journal Control, Vol. 15, No. 4, pp. 651-664, 1972.
- [30] J. R. PIVNICHNY, "A computer program for the design of multivariable decoupled feedback systems", United States Air Force, paper Grant No. AF-AFOSR 814-66, 1970.
- [31] ——— "Design of decoupled multivariable control systems", Automatic Control Conference, Joint, (JACC), paper 4-3, 1973.
- [32] L. M. SILVERMAN y H. J. PAYNE, "Input-output structure of linear systems with application to the decoupling problem", SIAM Journal Control, Vol. 9, No. 2, pp. 199-233, may. 1971.
- [33] S. M. SATO y P. V. LOPRESTI, "On partial decoupling in multivariable control systems", Proc. JACC, pp. 814-819, 1970.
- [34] ——— "On the generalization of state feedback decoupling theory", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-16, No. 2, pp. 133-139, abr. 1971.
- [35] Z. V. REKASIUS, "Decoupling of multivariable systems by means of state variable feedback", Proc. 3rd Ann. Alerton Conf., Urbana Ill., pp. 439-447, 1965.
- [36] W. M. WONHAM, "On pole assignment in multi-input controllable linear systems", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-12, No. 6, pp. 660-665, dic. 1967.
- [37] W. M. WONHAM y A. S. MORSE, "Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: A geometric approach", SIAM Journal Control, Vol. 8, No. 1, pp. 1-18 feb. 1970.
- [38] W. A. WOLOVICH y P. L. FALB, "On the structure of multivariable systems", SIAM Journal Control, Vol. 7, No. 3, pp. 437-451, ago. 1969.
- [39] L. A. ZADEH y C. A. DESOER, Linear Systems Theory, New York, McGraw-Hill, 1963.