UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ESTRUCTURA DE DATOS PARA ANÁLISIS ECONÓMICA DE UNA EMPRESA ELÉCTRICA DE SERVICIO PÚBLICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

PRESENTA:

DOMÍNGUEZ TORRES, JORGE ARTURO

PICAZO CASTELÁN, FRANCISCO JAVIER

OLIVARES PIÑA, ANGEL

LÓPEZ HERNÁNDEZ, MARCO ANTONIO

Ciudad Universitaria, México, Distrito Federal, 1979

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

ESTRUCTURA DE DATOS PARA ANALISIS ECONOMICA DE UNA EMPRESA ELECTRICA DE SERVICIO PUBLICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P r e s e n t a n

JORGE ARTURO DOMINGUEZ TORRES
FCO. JAVIER PICAZO CASTELAN
ANGEL OLIVARES PIÑA
MARCO ANTONIO LOPEZ HERNANDEZ

MEXICO, D. F. [illegible]

I N D I C E

PAG.

P R O L O G O

En México, la vida profesional de un Ingeniero, está- en la mayoría de los casos, ligada a la dirección de la empresa es decir a la administración de ella.

Por tal motivo, un Ingeniero que aspire a desempeñar- se eficientemente en su trabajo, deberá poseer una amplia base- de conocimientos administrativos y económicos aparte de sus co- nocimientos técnicos, que le permitan desarrollar con éxito sus actividades.

Es así, que el plan de estudios para la carrera de In geniero en sus diferentes ramas comprenden varias materias de - carácter económico-administrativo, sin embargo, ellas constitu- yen sólo una introducción a estos aspectos, siendo necesario -- que el Ingeniero amplie por su parte estos conocimientos.

La inquietud por adquirir conocimientos más amplios - de la forma en que se maneja una empresa, nos llevó a realizar- éste trabajo.

El lector no encontrará aquí un panorama general de - la organización empresarial, sino solo una forma particular de- organizar la información relativa a la empresa.

Este trabajo fué desarrollado en la Compañía de Luz - y Fuerza del Centro S.A. y la información relativa a ella fué - tomada para elaborarlo, aunque desde luego dicho trabajo es --- aplicable a cualquier empresa.

Deseamos expresar nuestro más profundo y sincero agradecimiento al Ingeniro Guillermo López Portillo, Gerente Comercial de la Compañía de Luz y Fuerza del Centro S.A. gracias a cuya ayuda y dirección ha sido posible realizar esta tesis.

Queremos también agradecer al Lic. Ruben Pérez H. y al Ing. Jorge Durán quienes con su ayuda y grandiosa cooperación, han contribuido a que este trabajo sea una realidad, así como al personal de la Compañía que cooperó con nosotros.

INTRODUCCION

Como ya se mencionó solo trataremos en esta obra una forma particular de organizar la información relativa a la empresa. Esta organización se hace en base a un modelo matricial conocido como Matriz de Insumo-Producto.

En el modelo mencionado, se toman en cuenta todas las transacciones entre los sectores productivos de un país y las de éste con el extranjero, es decir, exportaciones e importaciones.

Aquí la empresa es tratada como una entidad económica independiente y sus relaciones con otras empresas de los sectores productivos constituyen en el modelo las exportaciones e importaciones.

Para el estudio dividimos la empresa en la misma forma que lo hace la Compañía de Luz y Fuerza del Centro S.A. esto es, en ramas, denominadas Ramas de la Organización.

La forma en que se estructuran los datos de la empresa es atractiva, ya que nos permite una rápida y directa disponibilidad de la información en un documento sencillo. Cabe mencionar que por estas características, la estructura es empleada para manejar entidades económicas mucho más complejas como lo es la producción nacional.

Antes de entrar en materia será necesario contar con algunos conocimientos previos para la buena comprensión de la obra, mismos que se darán más adelante.

O B J E T I V O

El fin que perseguimos, es el de realizar una estructura de datos económicos de la Compañía de Luz y Fuerza del Centro S.A. de tal forma que nos permita conocer las relaciones entre ramas de la organización, así como las relaciones con el sector externo.

Esta estructura no es otra cosa, más que la organización de los datos económicos, de tal forma que sea fácil la disponibilidad y el procesamiento de los mismos.

Es digno de hacer notar que tal estructuración nos posibilita para hacer simulaciones respecto a posibles fenómenos que se dan en la empresa y cuyos efectos podrían predecirse.

D E F I N I C I O N G E N E R A L D E L P R O Y E C T O

Para llevar a cabo el trabajo (proyecto) que nos hemos propuesto, consideramos que en principio es necesario hacer un estudio de ciertos conceptos de Economía, de los cuales nos ayudaremos para poder entender y estructurar los datos a que se hace referencia en la definición del objetivo.

La forma en que estructuramos dichos datos es mediante una Matríz de Insumo-Producto que es un modelo económico, en seguida se hace necesario un estudio de la estructura económico-administrativa de la Compañía de Luz y Fuerza, para saber como ope ra, cuales son sus elementos y que datos de ella, habrá que estructurar, después de haber reunido estos elementos básicos, se empezará la captación de datos y la organización de los mismos- según los requerimientos de la estructura paralelamente habrá - de elaborarse un método de computo para manejar dichos datos.

C A P I T U L O I

R U T A C R I T I C A

Tenemos que la ruta crítica, es un método usado por las personas que ejercen la dirección para palnificar los proyectos - a fin de lograr los objetivos con éxito.

Cabe mencionar que tendremos que indicar la ruta crítica de nuestro proyecto, para esto usaremos el Método del Camino - Crítico; que es un proceso administrativo de planeación, programa ción, ejecución y control de todas las actividades componentes de un proyecto que debe desarrollarse dentro de un tiempo crítico y- un costo óptimo.

El método del camino crítico es aplicable y útil a cual quier situación en la que se tenga que llevar a cabo una serie de actividades o tareas relacionadas entre si para alcanzar un obje- tivo detemrinado. Un beneficio primordial que nos brinda el méto- do del camino crítico es que resume en un solo documento la ima-- gen general de todo el proyecto.

A C T I V I D A D E S

Las actividades pueden ser físicas o mentales, como - construcciones, trámites, estudios, inspecciones, dibujos, cálcu- los, étc. El grado de detalles de las actividades dependerá de la necesidad de control del proyecto.

En términos generales, se considera actividad a la serie de operaciones realizadas por una persona o grupo de personas en forma continua, sin interrupciones y con tiempos determinados de iniciación y terminación. Uno de los principios básicos del método de ruta crítica es el trato en forma separada de las operaciones de planeación y programación.

A cada uno de los trabajos involucrados en un proyecto se le denomina actividad, las actividades se representan por medio de flechas. Hay que tomar en cuenta que las flechas no son vectores ni tienen dimensión escalar, solo representan gráficamente el desarrollo de una actividad.

A cada punto de terminación o iniciación de una actividad se le llama Evento y se representa por un círculo que puede incluir diversos datos. Cabe hacer notar que las actividades ficticias (flechas de relación) no tienen duración.

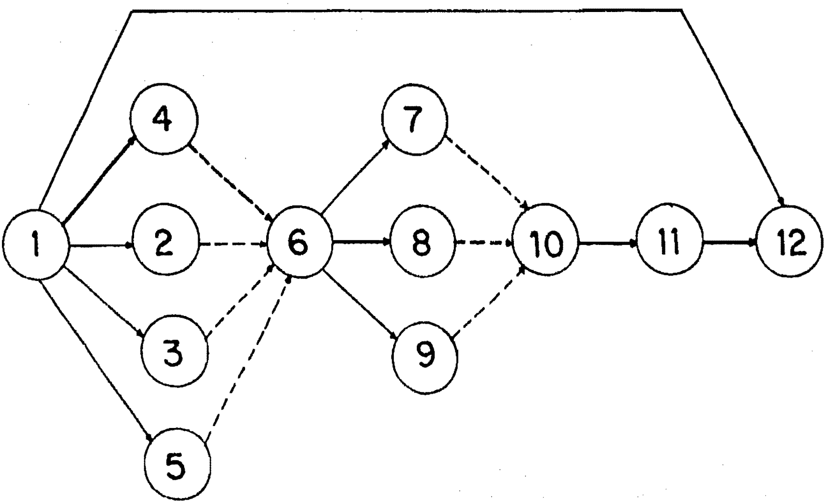
La ruta crítica que llevaremos a cabo para el desarrollo de nuestro proyecto se llamará "Ruta Crítica de una Estructura de Datos", en el cual se analizará un método para información gerencial. Para poder realizar esto se plantearán tres conceptos:

A).- Objetivo de La Técnica (estructura de datos)

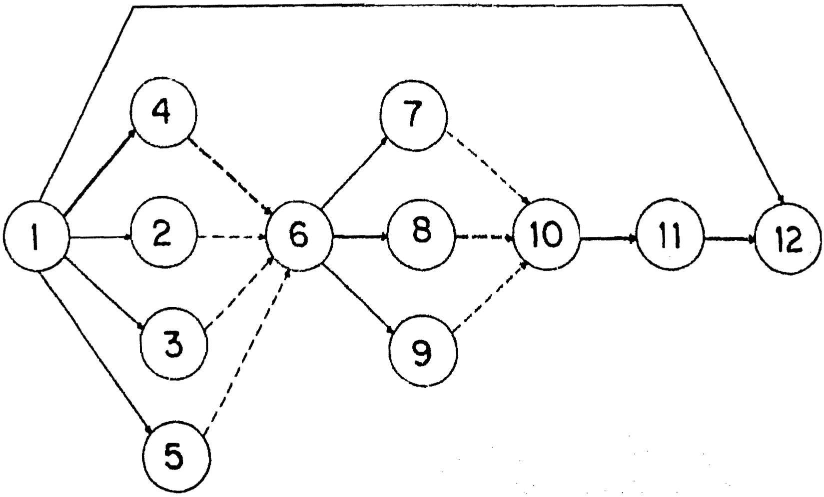
B).- La Utilización del Concepto Económico de la Matriz de Insumo-Producto.

C).- La Metodología para la Implementación de la Estructura Matricial.

Ahora bien, la ruta crítica que llevaremos a cabo como guía en la realización de nuestro trabajo estará representada -- por un diagrama de flechas que se desarrollará como sigue:



La siguiente figura nos muestra la ruta crítica a seguir.



EVENTOS

1.- Inicio.

2.- Declaración del Objetivo.

3.- Inicio del Proyecto.

4.- Fin del Estudio de la Matriz Insumo-Producto.

5.- Fin del Estudio de la Metodología.

6.- Principio de la Primera Etapa de Trabajo.

7-8-9.- Principio de la Segunda Etapa de Trabajo.

10.- Disponibilidad de los Elementos para la Construc--

ción de la matriz.

11.- Disponibilidad de la Matriz.

12.- Fin.

A C T I V I D A D E S

1-2.- Definición del Objetivo.

1-3.- Definición General del Proyecto.

1-4.- Estudio de la Matriz de Insumo-Producto.

1-5.- Estudio de la Metodología para Implementar el - Sistema.

1-6.- Actividad Ficticia.

3-6.- Actividad Ficticia.

4-6.- Actividad Ficticia.

5-6.- Actividad Ficticia.

6-7.- Adopción de un Método para Manejar la Matriz.

6-8.- Captación de Datos.

6-9.- Organización de Datos.

7-10.- Actividad Ficticia.

8-10.- Actividad Ficticia.

9-10.- Actividad Ficticia.

10-11.- Construcción de la Matriz.

11-12.- Recomendación para la Puesta en Operación del- Sistema.

1-12.- Elaboración de la Tesis.

DEFINICION DE LAS ACTIVIDADES

1-2.- Definición del Objetivo. Esta definición ya fue dada al inicio de este capítulo.

1-3 Definición General del Proyecto. Esta definición también ya ha sido dada en este capítulo.

1-4.- Estudio de la Matriz de Insumo Producto. -- Más adelante daremos una amplia explicación de lo que consta este estudio.

1-5.- Estudio de Metodología para Implementar el - Sistema. En la Fig. No. I se ilustra la sucesión de pasos -- a seguir para llevar a cabo la implementación del sistema.

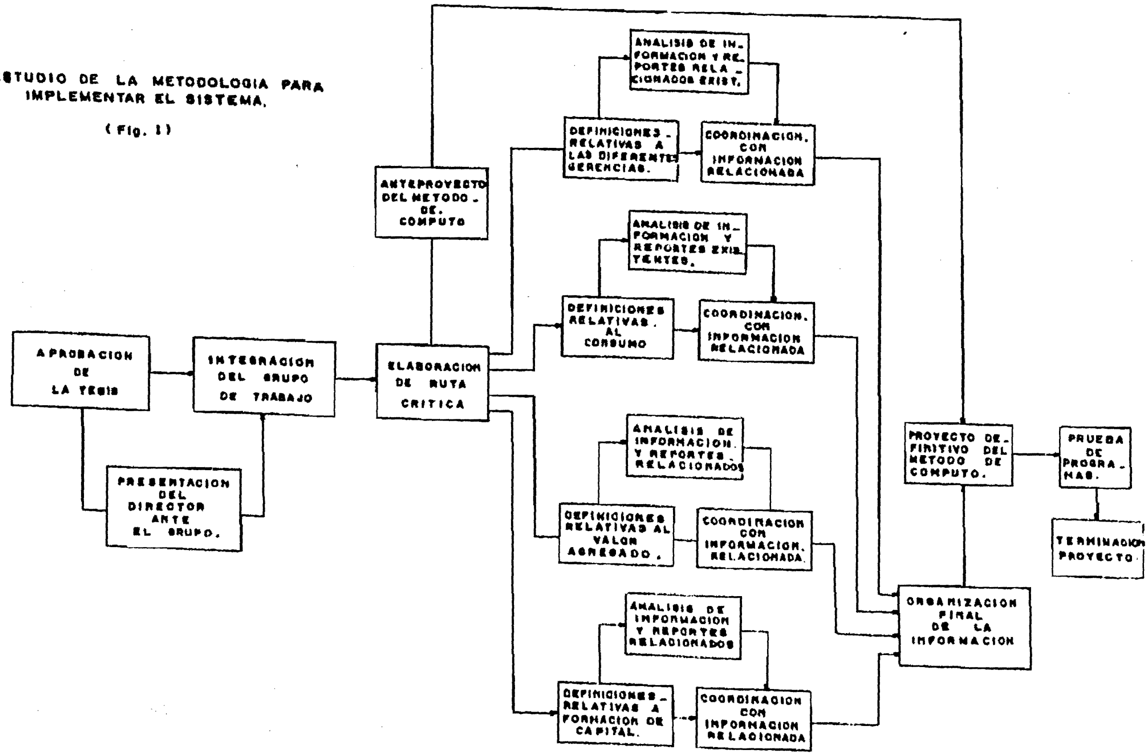
A continuación daremos una breve explicación del - cuadro de la figura anterior.

A).- Aprobación del Tema para la Elaboración de la Tesis.

El consejo técnico de la Facultad de Ingeniería -- de la Universidad Nacional Autonoma de México debe dar su -- aprobación para la realización de ésta tesis, con el objeto- de observar que por su contenido sea adecuada para el nivel- de licenciatura de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, dicha aprobación prevee también que no sea un trabajo estéril, sino que sea aplicable en la practica y ademas que-

ESTUDIO DE LA METODOLOGIA PARA IMPLEMENTAR EL SISTEMA.

(Fig. 1)



dicho trabajo no haya sido realizado anteriormente en la facultad.

B).- Integración del Grupo de Trabajo. Esta integración se llevo a cabo por los alumnos interesados por el tema.

C).- Presentación del Director de la Tesis Ante el Grupo.

D).- Ruta Critica.- Es un método a seguir para la mejor elaboración del proyecto.

E).- Método de Computo. Se hace necesario debido a la enoerme cantidad de datos que se deberán procesar.

F).- Conocimiento de la Organización y Operación de la Compañía de Luz y Fuerza del Centro S.A.

F-1).- Definiciones Relativas a la Organización. - La Cia. de Luz esta organizada en ramas dependientes de una dirección y subdirección general, las cuales son: siete gerencias, una contraloria general y tres departamentos.

GERENCIAS

1.- Producción.

2.- Transmición y Distribución.

3.- Comercial.

4.- Planeación.

5.- Construcción.

6.- Administrativa.

7.- Personal.

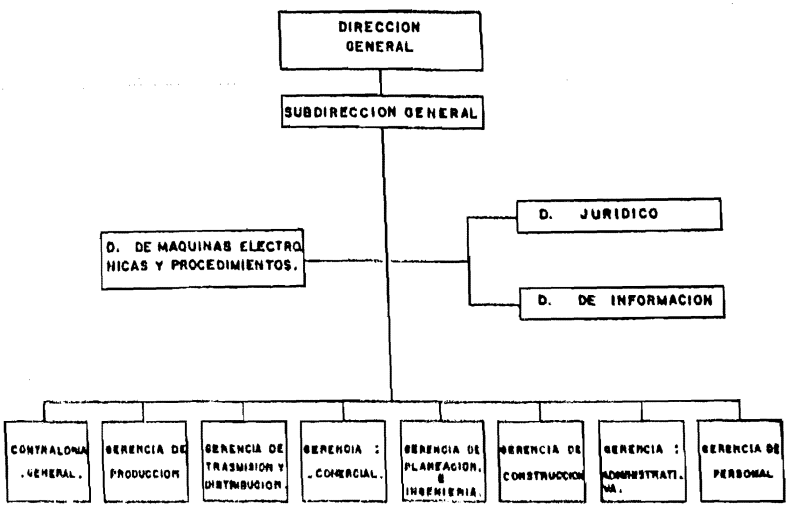
DEPARTAMENTOS

1.- Maquínas Electronicas y Procedimientos.

2.- Jurídico.

3.- Información.

En el siguiente organigrama representamos cómo está organizada básicamente la Compañía de Luz y Fuerza del Centro.



Cada una de las ramas tiene una función principal y varias funciones secundarias, las cuales habremos de conocer.

F-2).- Definiciones Relativas al Consumo.- Se tomaron en cuenta todos los productos que consume la Compañía.

F-3).- Definiciones Relativas al Valor Agregado. Se consideran los pagos que efectúa la Compañía a los factores - de la producción que intervienen en la producción de energía-eléctrica.

F-4).- Definiciones Relativas a la Formación de Capital. Consideraremos en este punto las inversiones necesa -- rias que se hagan, para la más eficiente realización del objetivo de la Compañía.

De cada uno de los cuatro incisos anteriores se hace necesario un análisis de información y una coordinación relacionada.

G).- Proyecto Definitivo del Método de Computo. Será seleccionado entre varias alternativas.

H).- Organización de los Datos de Entradas al Sistema.

Esta organización deberá estar acorde con la estructura matricial de datos.

I).- Elaboración de Programas. Aquí se realizarán - los programas requeridos para el manejo de una estructura matricial.

J).- Pruebas de Programas. Aquí se verificará el --- buen funcionamiento de los programas y se corregirán en caso - necesario.

K).- Terminación del proyecto, Puesta en Operación -

2-6.- Actividad Ficticia

3-6.- Actividad Ficticia

4-6.- Actividad Ficticia

5-6.- Actividad Ficticia

6-7.- Adopción de un Método de Computo para Manejar la Matriz

6-8.- Captación de Datos. Aquí llevaremos a cabo toda la recolección de datos que nos pudieran - servir

6-9.- Organización de Datos. Tendremos que organi - zar los datos de entrada al sistema según su- importancia para eliminar los irrelevantes y- clasificarlos como elementos de la matriz

7-10.- Actividad Ficticia

8-10.- Actividad Ficticia

9-10.- Actividad Ficticia

10-11.- Construcción de la Matriz. Una vez realiza- da la organización de los datos se construye la matriz

11-12.- Recomendación para la Puesta en Operación - del Sistema

1-12.- Elaboración de la Tesis.

CAPITULO II

CONCEPTOS ECONOMICOS QUE NOS SERAN UTILES PARA LLEVAR A CABO EL TRABAJO QUE PRETENDEMOS DESARROLLAR

1.- VALOR MONETARIO.

Es la expresión en dinero del valor.

2.- INSUMO.

Son los bienes y servicios que se emplean en la producción, tales como materias primas, energía eléctrica, combustibles y lubricantes; empaques y envases; reparaciones y mantenimiento, etc.

3.- VALOR AGREGADO.

Son las retribuciones a los factores de la producción y constituyen el valor que se incorpora a los insumos para llevar a cabo el proceso productivo y son entre otros: Sueldos y salarios, Seguro Social, depreciación, intereses, alquiler étc.

4.- DEMANDA INTERMEDIA.

Es la parte de la producción vendida a otros sectores productivos.

5.- DEMANDA FINAL.

Está constituída por aquellos bienes no sujetos a -- transformaciones ulteriores dentro del país y nos representan la parte de la producción destinada fuera de los sectores productivos tales como: Unidades familiares, gobierno, variación-de existencias y formación de capital, la cual es el incremento neto de los activos fijos de un país, o sea los bienes que no se consumen integramente en un proceso productivo.

6.- PRODUCTO NACIONAL BRUTO.

Se define como la suma de los valores monetarios netos calculados a precios de mercado, de los bienes y servicios producidos en una sociedad durante un determinado lapso, que generalmente es un año.

El Producto Nacional Bruto está determinado por el valor total de los insumos, mas el valor que se le incorpora a estos para llevar a cabo el proceso productivo, o sea el valor agregado.

$$P\ N\ B = I + V.A.$$

PNB..... Producto Nacional Bruto.

I ..... Insumos.

V.A..... Valor Agregado.

Otra forma de determinar el Producto Nacional Bruto es tomando en cuenta la demanda intermedia, mas la demanda final es decir.

$$PNB = D\ I + D\ F$$

D I ..... Demanda Intermedia

D F ..... Demanda Final

Este Producto Nacional lo podemos medir en unidades físicas o en unidades monetarias. Los valores monetarios se - calculan tomando como base los precios de los bienes y servicios que éstos alcanzan en el mercado.

Ahora bien, si pretendemos sumar los valores mone-- tarios de todos los bienes y servicios producidos, podemos -- caer en el error de cuantificar dos veces muchos de ellos, - por lo tanto solo deberán de computarse los bienes finales, - que son los que rebasan las fronteras de la producción.

Una manera de evitar la duplicidad en el cómputo -- del Producto Nacional Bruto es la de mostrar únicamente el valor agregado por cada proceso productivo, el que se realiza - deduciendo del valor total de la producción de dicho proceso, el costo de todas las partidas de insumos que se compraron a- otros sectores. Estas deducciones se deben a que tales insu - mos ya se habían considerado en las producciones de aquellos- sectores.

En el siguiente cuadro presentamos los factores de- la producción y sus correspondientes retribuciones.

TIERRA	RENTA
FUERZA DE TRABAJO	SUELDOS, SALARIOS
CAPITAL	INTERESES

ORGANIZACION .... BENEFICIO

Algunos de los bienes sólo una vez son utilizables en el proceso productivo, por ejemplo: harina, algodón, petróleo- etc. y se dice por lo mismo que se consumen al primer uso.

Otros, los durables tardan mas en consumirse y pueden utilizarse en multiples ocasiones tales como: edificios, ma --- quinaria, útiles de trabajo etc. Muchos de los bienes de esta - última clase que se emplean dentro del período que se considera y en la producción a él correspondiente, fueron creados en pe-- ríodos anteriores, y todos constituyen la clase denominada Bie- nes de Capital.

En consecuencia, el Producto Nacional Bruto no expre- sa con exactitud la ventaja real que ha sacado la sociedad de - la actividad productora desarrollada durante el año a que co -- rresponde dicho producto; para medir esa ventaja tenemos que -- restar del P N B la cantidad que en total perdieron de su va-- lor al desgastarse mientras se usaban en crearlo, los bienes de capital producidos en años anteriores, que son el fruto de la - actividad económica desplegada durante dichos años.

La diferencia entre el Producto Nacional Bruto y el - valor monetario del desgaste experimentado por los bienes du -- rables que se utilizaron para obtenerlo, constituye el Produc--

to Nacional Neto.

P N N = P N B - DESGASTE (depreciación)

P N N .... Producto Nacional Neto.

Al computarse el Producto Nacional Bruto se debe de tomar en cuenta que las siguientes clases de bienes y servi - cios no deberán de ser considerados, ya que son de difícil -- cuantificación.

1.- Bienes consumidos por quienes lo producen, como los productos agrícolas que se consumen en la granja.

2.- Los servicios que prestan las casas ocupadas -- por sus propietarios.

3.- Servicios gratuitos proporcionados por el go--- bierno tales como: defensa, educación, salubridad etc.

4.- Servicios personales no remunerados, principal- mente los prestados por las amas de casa.

7.- BALANZA DE PAGOS.

La balanza de pagos es un documento donde quedan -- registradas las transacciones que un país realiza con otros.- Dichas transacciones pueden ser de Mercancías (bienes visi--- bles), de Servicios (bienes invisibles) y de Capitales.

Dentro de los servicios o bienes invisibles tendremos entre otros: Turismo, Fletes, Pasajes, Gastos del gobierno en el extranjero, Intereses, Beneficios y dividendos.

La balanza de pagos esta constituida por dos balanzas; Balanza Comercial y Balanza de Capitales. En la primera se registran las transacciones de bienes visibles y servicios, en la segunda se registran las transacciones de capital, dichas transacciones pueden ser a corto y a largo plazo según el tiempo que se requiera para amortizar el capital.

- BALANZA DE PAGOS
  - BALANZA COMERCIAL
    - BALANZA MERCANTIL
    - BALANZA DE SERVICIOS
  - BALANZA DE CAPITALES
    - A CORTO PLAZO
    - A LARGO PLAZO

8.- CONTABILIDAD SOCIAL.

Se refiere a la forma de presentar contablemente la actividad económica de la nación, a la vez que señala la riqueza de la misma y el camino por el que se consigue. La contabilidad nacional o social es un método de representar cuantita--

tivamente la actividad económica de un país en forma global -- y sintética, mediante un sistema de cuentas correspondientes - a un determinado periódo.

Sujetas a las limitaciones del sistema y a la con--- fianza de los datos, las cuentas permiten la comparación del - presente con el pasado reciente; además pueden proporcionar -- una información estadística muy útil y obtener cierta guia pa- ra una política futura.

Las funciones de la contabilidad nacional son: pro - porcionar un registro de las operaciones económicas de la comu nidad, medir los resultados de la economía y ser un inventario periodico indicativo de las condiciones económicas de un país. Así pues tenemos que en cierta forma la contabilidad social es- a la nación lo que la contabilidad comercial es a la empresa; - ambas, contabilidad social y contabilidad comercial solo se di ferencian a primera vista por el campo macroeconómico o micro económico en que se desarrollan.

Todas las formas de la actividad económica pueden re- ducirse a tres categorias, estas son: Producción, Consumo y -- Acumulación; esta última se añade a la riqueza de capital.

Ahora bien, si cada comprador y vendedor de la econo-- mía tuvieran las tres cuentas, se podrían anotar en ellas todas las transacciones como sigue:

1.- La primera registraría los ingresos y los egresos referentes a la actividad productiva, presentando la renta neta como el saldo entre los dos.

2.- La segunda registraría la forma en que se dividiría la renta neta, mas cualquier otro pago que se recibiera, las salidas y el ahorro.

3.- La tercera registraría la forma en que se emplearía el ahorro, además de todos los otros fondos de capital que se recibierán para financiar la inversión o realizar prestamos.

Si éstas tres cuentas se consolidasen en tres cuentas nacionales, las transacciones de los individuos dentro y entre las cuentas nacionales se cancelarían y nada más se tendría la posición neta de la economía en conjunto, en relación con la producción, el consumo y la acumulación.

Este sistema de cuentas está incompleto puesto que no toma en cuenta las transacciones entre la economía nacional y el resto del mundo; para que esté completo tendremos que incluir una cuarta cuenta que registre las transacciones que el país realiza con el exterior, esta cuarta cuenta la denominaremos Resto del Mundo.

Las relaciones que existen entre las cuentas nacionales pueden presentarse en forma matricial como se muestra--

en el siguiente cuadro.

Entradas / Pagos	Producción	Consumo	Acumulación	Resto de mundo	Entradas totales
Producción		C	I	X	C+I+X
Consumo	Y				Y
Acumulación		S			S
Resto del mundo	M		I(f)		M+I(f)
Pagos totales	Y+M	C+S	I+I(f)	X	C+I+X +Y+S+ M+I(f)

C............................ Gastos de consumo;

I............................ Inversión.

X .... Exportaciones.

Y .... Rentas pagasas a los factores de producción.

S............................ Ahorro.

M............................ Importaciones

I(f) .... Inversiones en el exterior (+) Desinversión (-)

Cada transacción económica interna con el resto del mundo tiene un renglón de entradas y una columna de pagos. -- Por ejemplo, el renglón de la producción consiste en el con - sumo más la inversión, mas las exportaciones y el total de -- las entradas financian el total de los pagos a los factores - de la producción y a las importaciones en la columna de la -- producción.

Cuando las exportaciones son superiores a las importaciones el país está invirtiendo.

Cuando las importaciones superan a las exportacio - nes el país está desinvirtiendo.

Teniendo en cuenta que los ahorros brutos deben de-ser iguales a la inversión bruta tendremos lo siguiente. Cuando las exportaciones son superiores a las importaciones, el - ahorro es igual a la inversión interior más la inversión en - el extranjero. Cuando las importaciones son superiores a las-exportaciones el ahorro es igual a la inversión interior me-- nos la desinversión en el extranjero.

El criterio que se ha seguido para saldar las cuentas nacionales, considera la actividad económica por sectores de la producción y por su composición organica.

Todo ello nos implica que cada cuenta sectorial por actividad económica se presenta según el principio de la partida doble, registrando todas las entradas que proceden y van a todas las otras cuentas sectoriales que van a proceder de - todos los otros sectores. En cada cuenta se deben de equili - brar los cobros y los pagos.

El analisis de insumo producto por sectores de la - producción constituye en esencia un complemento de la conta-- bilidad social. En el caso de ésta, se esta interesado en el- resultado final de la actividad económica nacional, prescin - diendo a fin de evitar duplicidad en el computo del ingreso - nacional, de las transacciones que han tenido lugar entre los- distintos sectores productivos. En cambio, el examen de esas- transacciones, y por lo tanto de las interdependencias exis-- tentes entre los sectores es lo que constituye el principal - objetivo de un modelo de insumo-producto.

C A P I T U L O III

MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO

Este modelo de insumo-producto es conocido también - como analisis de relaciones inter-industriales y no solo es un concepto teórico sino un instrumento práctico para hacer frente a algunos de los problemas reales más complejos de nuestra economía.

En nuestros días, se ha intentado utilizar el modelo como instrumento de análisis de trabajos orientados principalmente, hacia la comprensión de problemas más generales del desarrollo económico como son: la cuantificación de las necesidades de inversión y su distribución para el logro de determinados objetivos.

Lo que se propone con el modelo, es; lustrar la naturaleza y cuantificar la interrelación que existe entre los diversos sectores de la economía, en las que dificilmente se conciben modificaciones de alguna actividad que no exijan de una manera directa o indirecta, variaciones de otras actividades.

Por ejemplo, que se plantee la necesidad de incrementar la producción de un artículo manufacturado cualquiera, a fin - de satisfacer una mayor demanda del mismo. Para aumentar dicha producción en esa magnitud, la industria afectada necesitara -

también aumentar sus compras de aquellas materias primas (insumos) y productos intermedios que son necesarios para esa mayor producción. Por lo que, este crecimiento de los insumos de esa actividad exigiría un aumento en la producción de las industrias que lo suministran. Como se comprobará a su debido tiempo, diremos que las necesidades de materias primas que surgirian en tal situación son directamente proporcionales al incremento en la producción de la industria afectada; es decir que dependen del incremento de producción destinada a abastecer la mayor demanda y de ciertos coeficientes que se suponen constantes.

Estos coeficientes técnicos de insumo-producto son un reflejo de la estructura de costos de cada industria, ya que indican la magnitud de las compras de materias primas, que son necesarios para producir una unidad de un bien determinado.

De lo dicho anteriormente, si se quiere satisfacer un aumento de la demanda de un producto cualquiera, los coeficientes técnicos de insumo-producto permiten determinar en cuanto tendría que aumentar la producción no sólo de la industria correspondiente, sino también todos los otros sectores de la economía que le proporcionan los bienes o servicios que requiere para desarrollar su actividad productora.

Este conjunto de modificaciones debe de considerarse como una consecuencia directa de la variación de la demanda de que se trate.

El problema no termina aquí, la mayor producción de los otros sectores, destinada a proporcionar las materias primas y servicios que requiere la industria afectada, exije a su vez el abastecimiento de variedad de insumos, lo que repercutirá sobre las necesidades de producción. La interdependencia existe entre las distintas actividades económicas da origen así a una cadena de reacciones, en la que se involucran cada vez nuevos sectores.

En si el problema es conocer una manera de cuantificar, no solo los efectos directos sino también los indirectos que puede tener la variación en la actividad productora de un sector determinado.

La respuesta la da el modelo de insumo-producto mediante los requerimientos directos o indirectos, por unidad de demanda final. Así como los coeficientes técnicos de insumo producto permiten cuantificar las mayotes necesidades de materias primas y productos intermedios que demndaría de modo directo la expansión de cualquier industria, los coeficientes de requerimientos directos e indirectos hacen posible determinar todas las repercusiones que tendría sobre las necesidades de la producción de cada sector, un aumento en la actividad -

de cualquier industria destinada a satisfacer una mayor demanda de la comunidad.

CARACTERISTICAS DE UN CUADRO DE INSUMO PRODUCTO

Un cuadro de Insumo-Producto constituye un registro de todas las transacciones efectuadas en la economía durante un cierto período, comprendiendo tanto las que han tenido lugar entre los sectores productivos como las ventas a sectores de demanda final.

El registro mismo se efectúa en forma de un cuadro de doble entrada, en cuyos renglones (sentido horizontal) se indica la distribución de la producción, o sean las ventas de cada sector; mientras que en las columnas (sentido vertical) quedan indicados los insumos, o compras de cada sector.

Por supuesto, las sumas totales en uno y otro sentido deben coincidir, puesto que las ventas de un sector determinado constituyen compras efectuadas por otro sector.

En el siguiente cuadro se muestra una forma general de la matríz de Insumo-Producto.

COMPOSICION DE INSUMOS / DISTRIBUCION DE LA PRODUCCION	TRANSACCIONES INTER-INDUSTRIALES A	B	C....	DEMANDA FINAL	PRODUCCION BRUTA
A	X_{11}	X_{12}	X_{13}...	Y_1	X_1
B	X_{21}	X_{22}	X_{23}	Y_2	X_2
C	X_{31}	X_{32}	X_{33}	Y_3	X_3
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

En términos generales, X_{ij} representa las ventas de una industria cualquiera i a una industria cualquiera j; o -- bién considerando desde el punto de vista de los insumos, las compras de una industria cualquiera j provenientes de una industria cualquiera i.

Y_i representa la demanda final para productos provenientes de una industria cualquiera i.

X_i representa el valor bruto de la producción de -- cualquiera de los sectores incluídos en el modelo.

En el análisis del insumo-producto, el valor total del producto bruto está determinado por el valor total de los insumos más el valor que se le incorpora a estos para llevar a cabo el proceso productivo, o sea, el valor agregado.

Producto Nacional Bruto= Insumo + Valor Agregado.

En una matríz de insumo producto la producción bruta tiene dos destinos que son: la demanda intermedia y la demanda final.

Producto Nacional Bruto= Demanda Intermedia + Demanda Final.

Debemos observar que tanto el concepto de contabilidad social como el de matríz de insumo producto, es aplicable a una empresa cualquiera.

La forma en que se ordenan los datos de una matríz de insumo producto, es parecida a la forma en que se ordenan en un cuadro de cuentas nacionales.

COEFICIENTES TECNICOS DE INSUMO - PRODUCTO

Como se dijo anteriormente, el modelo de insumo producto ilustra la forma enque tiene que modificarse todo el -- flujo de transacciones inter-industriales y, por lo tanto, los niveles de producción bruta para poder hacer frente a un cam-- bio dado del nivel o composición de la demanda final, así como proporcionar los instrumentos de cálculo que permite cuantificar esas modificaciones.

En el modelo de insumo-producto tomdremos escencialmente dos características importantes.

1.- Para llevar a cabo una determinada producción de requiere de cierto tipo de insumos, los cuales pueden sustituir se por otros diferentes, para nuestro caso supondremos que no- ocurrirán estas sustituciones, lo anterior se limita a los cam bios que afecta a la composición de los insumos de los diver-- sos sectores, pero no necesariamente a los equipos y técnicas- utilizadas en la producción.

2.- Para la simplificación supondremos que la rela-- ción funcional entre insumos y producción bruta es de carácter lineal, es decir, que todos los insumos correspondientes a cada uno de los sectores tendránque variar en la misma propor- - ción en que se modifique la producción bruta de ese sector. Es ta última condición se indica mediante la siguiente expresión.

$$x_{ij} = a_{ij} \; X_j$$

La expresión anterior nos indica las compras que una industria cualquiera j debe de efectuar de productos intermedios provenientes de un sector cualquiera i, estas compras son iguales a la producción bruta de la industria j multiplicada por un cierto coeficiente que se supone constante. Estos coeficientes son los designados "Coeficientes Técnicos de Insumo-Producto" y naturalmente su número será igual al número de elementos contenidos en la parte de relaciones inter-industriales del cuadro anterior.

De la definición anterior, los coeficientes técnicos se definen como cocientes entre cada insumo y el valor bruto de la producción del respectivo sector.

Un coeficiente técnico representa el monto de las compras de productos intermedios que tiene que efectuar un sector y que provengan de otro sector determinado para producir una unidad.

Esta condición puede resumirse en la siguiente expresión

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Estos coeficientes técnicos de insumo-producto reflejan la estructura de costos de cada industria y, en consecuencia dependen de los insumos y de la producción bruta de cada-sector, sin estar relacionado directamente con la demanda final de productos provenientes del mismo.

Generalmente una matriz de coeficientes técnicos queda representada de la siguiente forma.

Ventas de bienes Intermedios. \ Compras de bienes Intermedios.	A	B	C
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}
B	a_{21}	a_{22}	a_{23}
C	a_{31}	a_{32}	a_{33}

R E Q U E R I M I E N T O S   D I R E C T O S E   I N D I R E C T O S.

Como se ha visto, la complejidad del problema es - - grande, especialmente si se piensa en los términos que se plantearían al trabajador con una matriz que contenga un número -- grande de sectores, y en que se admitan variaciones de la de-- nanda final de cada una de ellos. Por lo tanto, resulta imprescindible operar sobre la base de una solución de orden más general.

Tendremos que la producción bruta de un sector cualquiera es igual a sus ventas a la demanda final más sus ventas a otros sectores productivos, que a su vez dependen de las producciones brutas de los mismos y de sus coeficientes técnicos.

Para un sector cualquiera (k) la producción bruta- se podrá expresar en términos albebráicos en la forma que si-- gue:

$$X_k = a_{kj}X_j + Y_k$$

Si suponemos conocidos los coeficientes técnicos de- insumo producto y se admite una hipótesis cualquiera sobre la- demanda final de cada uno de los sectores, se podrá formar un- sistema de ecuaciones, cuya solución permitirá obtener los valores de la producción bruta de cada sector que serán necesa-- rios para satisfacer al mismo tiempo esas demandas finales y -

los insumos correspondientes.

Despejando las demandas finales, el sistema de ecuaciones será el siguiente:

$$Y_1 = X_1 - z_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \ldots - a_{1n}X_n$$

$$Y_2 = X_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - a_{23}X_3 - \ldots - a_{2n}X_n$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$Y_n = X_n - a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - a_{n3}X_3 - \ldots - a_{nn}X_n$$

a_{kj} . . . . Coeficientes Técnicos de Insumo-Producto.

$Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ Demanda Final

$X_1, X_2 \ldots X_n$ Valor Bruto de la Producción.

En el sistema serían conocidos todos los cieficientes (a_{ij}) y se adoptarán hipótesis sobre las demandas finales $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$. Las n ecuaciones del sistema permitirán entonces encontrar el valor de la n incógnitas, o seanlos valores brutos de la producción $X_1, X_2, \ldots X_n$.

En teoría, estaría así resuelto el problema fundamental en el cual fijada una variación de la demanda final, podrán cuantificarse sus repercusiones sobre la producción --

bruta de cada uno de los sectores; calculadas éstas se podrá a su vez utilizando la matriz de coeficientes técnicos determinar todas las transacciones inter-industriales que serán necesarias.

Ahora bien, si lo vemos de un punto de vista práctico no habríaposibilidades de operar en la forma descrita, ya que cualquier supuesto diferente sobre las demandas finales exigirá la solución de un nuevo sistema de ecuaciones, labor muy agobiadora a incluso irrealizable en un tiempo corto con máquinas calculadoras, aún para un número relativamente moderado de sectores.

Puesto que lo que se determina en forma autónoma son las demandas finales, lo que se requiere practicamente no es llegar a relacionar la producción bruta de un sector con su propia demanda final y con las producciones brutas de los sectores, sino con las demandas finales de todos los sectores. Esto puede hacerse mediante la operación matemática de invertir la matriz de coeficientes técnicos con lo que llegaremos a las siguientes ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= A_{11} Y_1 + A_{21} Y_2 + A_{31} Y_3 + \dots + A_{n1} Y_n \\
X_2 &= A_{12} Y_1 + A_{22} Y_2 + A_{32} Y_3 + \dots + A_{n2} Y_n \\
&\ \vdots \\
X_n &= A_{1n} Y_1 + A_{2n} Y_2 + A_{3n} Y_3 + \dots + A_{nn} Y_n
\end{aligned}
$$

Como puede observarse, el valor bruto de la producción de cada sector aparece expresado ésta vez en función de las demandas finales de todos los sectores y de ciertos coeficientes (A_{ji}) que se obtienen mediante la inversión de la matriz mencionada. Conocidos estos coeficientes se podrá formular cualquier hipótesis sobre la demanda final y calcular con gran sencillez la producción bruta que sería necesaria alcanzar en cada sector para satisfacerla.

Esto quiere decir que tales coeficientes toman en cuenta no solo las necesidades de producción para satisfacer la demanda final, sino también toda la cadena de reacciones que ello determina en las transacciones inter-sectoriales; de ahí que se le designe como coeficientes de requerimientos directos e indirectos por unidad de demanda final.

C A P I T U L O   IV

M E T O D O L O G I A   P A R A   D E T E R M I N A C I O N   D E   L A   M A T R I Z   D E   I N S U M O - P R O D U C T O.

A continuación desarrollaremos la metodología para - determinar la matríz de insumo-producto. Dicha metodología es- tá basada en la estructura que nos muestra la figura (II).

Como se observa, para obtener dicha matríz es necesa rio dividir la metodología en dos partes:

1.- Matríz de Explotación.

2.- Matríz de Inversión o Formación de Capital.

Las dos matrices son simétricas y la obtención de ca da una de ellas es similar a la otra. La división anterior, se hace, ya que para llevar una buena administración de una empre sa, es necesario que se lleve la contabilidad en dos cuentas a saber, cuentas de explotación y cuentas de inversión.

Matríz de Explotación.- La matríz de explotación es- aquella en la cual están registrados todos los gastos que se - hacen por conceptos de operación de cada una de las diferentes ramas de la organización de que consta la Compañía de Luz y -- Fuerza, incluyendo aquellos de tipo administrativo, así como - los diferentes gastos de mantenimiento.

Matríz de Inversión.- En la matríz de inversión se -

registran todos los gastos que contribuyen a la formación de bienes de capital, entre ellos, los que se hacen por concepto de adquisición de equipos diversos, los pagos de salarios a los trabajadores que los instalan, etc.

D E T E R M I N A C I O N   D E   L A   M A T R I Z   D E   E X P L O T A C I O N.

Para determinar la matríz de explotación, se ha dividido el trabajo en etapas, con el objeto de facilitarlo.

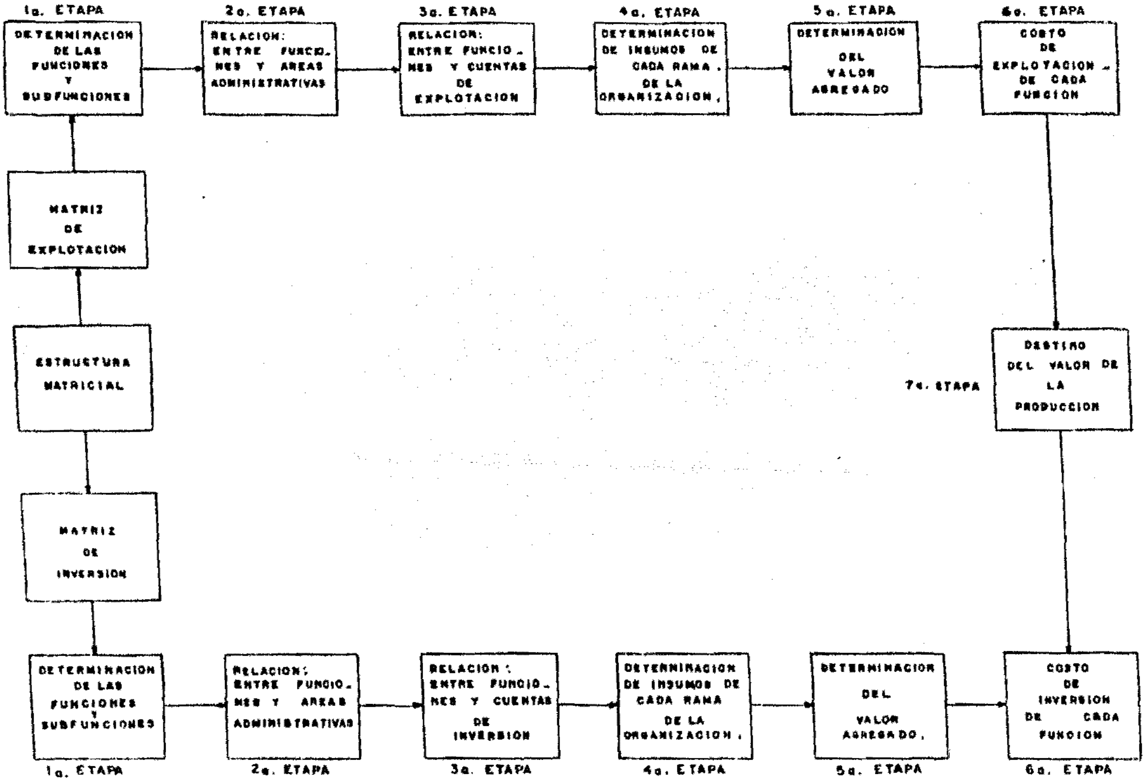
Primera Etapa de Trabajo.

Para conseguir sus fines, la Cía. de Luz y Fuerza del Centro realiza varias actividades de las cuales algunas por su importancia tienen una mayor jerarquía que otras, teniéndose así funciones primarias y secundarias para la compañía.

Pero por otro lado, la compañía está organizada en ramas y, cada rama tiene su fin particular. Para alcanzar cada rama su fin particular, precisa desarrollar diversas actividades a las que también podemos dividir en primarias y secundarias.

Entonces tenemos funciones primariasy secundarias para la compañía y para cada una de las ramas en que está organizada, las cuales no necesariamente son comunes a ambas, esto

(FIGURA II)


1a. ETAPA
DETERMINACION DE LAS FUNCIONES Y SUBFUNCIONES
2a. ETAPA
RELACION: ENTRE FUNCIO_ NES Y AREAS ADMINISTRATIVAS
3a. ETAPA
RELACION: ENTRE FUNCIO_ NES Y CUENTAS DE EXPLOTACION
4a. ETAPA
DETERMINACION DE INSUMOS DE CADA RAMA. DE LA ORGANIZACION.
5a. ETAPA
DETERMINACION DEL VALOR AGREGADO
6a. ETAPA
COSTO DE EXPLOTACION DE CADA FUNCION
MATRIZ DE EXPLOTACION
ESTRUCTURA MATRICIAL
MATRIZ DE INVERSION
7a. ETAPA
DESTINO DEL VALOR DE LA PRODUCCION
DETERMINACION DE LAS FUNCIONES Y SUBFUNCIONES
1a. ETAPA
RELACION: ENTRE FUNCIO_ NES Y AREAS ADMINISTRATIVAS
2a. ETAPA
RELACION: ENTRE FUNCIO_ NES Y CUENTAS DE INVERSION
3a. ETAPA
DETERMINACION DE INSUMOS DE CADA RAMA DE LA ORGANIZACION.
4a. ETAPA
DETERMINACION DEL VALOR AGREGADO.
5a. ETAPA
COSTO DE INVERSION DE CADA FUNCION
6a. ETAPA

es, puede haber una función primaria para una rama que no constituya una función primaria para la compañía.

En esta etapa se determinarán las funciones primarias y secundarias de cada una de las ramas que integran a la Cía.- de Luz y Fuerza del Centro.

Funciones Primarias:

Son aquellas actividades que definen a cada una de - las ramas ó justifican la existencia de ellas en la compañía,- por ejemplo, la actividad primaria de las gerencias de distribución, es la de distribuir la energía eléctrica a voltajes medios desde las subestaciones eléctricas hasta los consumidores.

Funciones Secundarias:

Son aquellas que permiten el mejor cumplimiento del- principal objetivo de cada rama de la organización, siendo éstas comunes a todas ellas, por ejemplo, compras, mantenimiento, -- etc.

Segunda Etapa de Trabajo.

En ésta segunda etapa encontraremos las relaciones - existentes entre las funciones y las áreas administrativas.

La finalidad de designar una área para cada una de - las funciones, una área por sí sola no demuestra ninguna información a la administración, debido a que cada área administrativa tiene un número para definir una función, es decir una --

función que exista en dos áreas ó más tendrá dos números diferentes ó más y habrá que encontrar ésta relación.

Tercera Etapa de Trabajo.

En ésta etapa se encontrará la relación entre funciones y cuentas de cargo o de explotación.

La Compañía de Luz y Fuerza, presenta las cuentas de cargo en forma muy general, o sea, se muestran en forma global a toda la empresa y se desea presentarlas como una cuenta de cargo por función. Así por ejemplo; la cuenta de mantenimiento actualmente se registra en forma global, pero no existe un desglose de sus elementos, por ejemplo: Mantenimiento mecánico, eléctrico, civil, etc. seg´un se desee controlar por cada gerencia.

Cuarta Etapa de Trabajo.

Esta etapa ésta dedicada a la determinación de los insumos de cada rama de la organización.

Actualmente las compras de los insumos que realiza la Compañía de luz y fuerza, se reportan a la gerencia administrativa en forma trimestral. Este reporte índica los insumos requeridos por cada una de las ramas, las compras de los insumos se registrarán de la siguiente forma, para facilitar el análisis de insumos requeridos.

1.- Caja Chica.

2.- Requisición de Entrega Directa.

3.- Comprobante de Pasivo.

La primera representa las adquisiciones menores que se llevan a cabo en efectivo.

La segunda son los pedidos de material que se encuentran en el almacén general.

La tercera son aquellas adquisiciones mayores que se realizan a través del departamento de contraloria.

Los insumos requeridos por cada una de las ramas de la organización bastará con vaciarlos en la matríz en la parte de insumos, siendo esto una forma analítica de control.

Quinta Etapa de Trabajo.

Esta etapa se dedicará a la determinación del valor agregado.

El valor agregado comprende los pagos efectuados a los factores de la producción y constituyen el valor que se incorpora a los insumos para llevar a cabo el proceso productivo, estos son: salarios, beneficios sociales, depreciación, etc.- Para la determinación de éste, se considera importante utilizar como base el presupuesto por programa ya existente, dándole la estructura matricial.

Sexta Etapa de Trabajo.

Consiste en la determinación del costo total de cada función, para ello bastará sumar cada una de las columnas, o - sea insumos más valor agregado.

Séptima Etapa de Trabajo.

Destino del valor de la producción en cada una de -- las funciones.

Una vez determinados el costo total en cada una de - las funciones, el siguiente paso es encontrar el destino, o -- sea el valor de la producción de cada función, así el destino- del valor productivo de la construcción de una nueva sucursal, será cargada a la gerencia comercial y la construcción de un - almacén será cargada a la gerencia administrativa.

D E T E R M I N A C I O N   D E   L A   M A T R I Z   D E   I N V E R S I O N.

Para determinar la matríz de inversión, se seguirán- las mismas etapas de trabajo que nos llevaron a determinar la- matríz de explotación.

Cuantificación del Costo Total de Cada Una de Las -- Funciones.

Mediante la formación de la matríz de inversión y de explotación determinaremos los costos totales de cada una de -

las funciones. Esto determina el valor bruto de la producción- conociendo la demanda intermedia y la demanda final de la producción de la energía eléctrica.

Determinación de Otro Tipo de Datos que se Encuen-- tran Fuera de la Matríz, (Determinación de Indices).

La determinación de estos índices nos sirven para - encontrar la eficiencia de productividad en cada una de las - gerencias en base a sus funciones, por ejemplo, al tener un grupo de trabajadores en una función y relacionándolo con -- los costos encontraremos el grado de productividad de cada- uno de ellos.

Forma de ordenar los datos relacionados (Indices).

	DESTINO / ORIGEN	GERENCIA DE PRODUCCION.	GERENCIA DE TRANSMISION Y DISTRIBUCION.	GERENCIA - COMERCIAL	GERENCIA DE PLANEACION E INGENIERIA.	GERENCIA DE CONSTRUCCION.	GERENCIA ADMINISTRATIVA.	GERENCIA DE PERSONAL
DATOS PARA OBTENCION DE INDICES	No. DE TRABAJADORES							
	No. DE VEHICULOS.							
	No. DE CENTROS DE TRABAJO.							
	.							
	.							

Estos datos son proporcionados por cada una de las áreas en estudio según los índices que se deseen obtener.

CAPITULO V

SOLUCION DEL SISTEMA

En álgebra de matrices ha llegado a ser en la actualidad un elemento esencial de los conocimientos matemáticos -- necesarios para ingenieros y científicos.

De ésta manera, nuestro principal interes es proporcionar el conocimiento básico del álgebra matricial con la tendencia a la solución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas, que se nos presenta.

A continuación damos una breve explicación de las -- características de las matrices y operaciones que se pueden -- realizar con ellas.

Una matríz es un arreglo de elementos que pueden - - ser: números reales, números complejos, funciones etc. A continuación daremos ejemplos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2j & -3 & -1 \\ 4 & -3j & -j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} t & \text{Cos } t & 2 \\ 3 & \text{Sent} & \text{Cos } 2t \\ -3 & & \text{Sen } 5t \end{bmatrix}$$

Una matríz está compuesta por renglones (lineas - horizontales) y por columnas (lineas verticales). Se dice - que una matríz de " m " renglones y " n " columnas, es de -- orden " m " por " n " (m x n); un arreglo rectangular de -

números se escribe de la siguiente manera.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 1n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 2n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \ldots (E_1)$$

Con a_{ij} designaremos el elemento del renglón i y la columna j de la matríz A.

En forma más compacta.

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

Los elementos a_{ij} de una matríz cuando $i = j$, forman la diagonal principal de dicha matríz.

C L A S I F I C A C I O N D E M A T R I C E S

A) Matriz Cuadrada.

La matriz cuyo número de renglones es igual al número de columnas recibe el nombre de matriz cuadrada. Una matriz con "n" renglones y "n" columnas es una matriz cuadrada de orden "n". Debemos observar que la matriz cuadrada es un caso especial de la matriz rectangular, definido por (E_1).

B) Matriz Renglon.

Una matriz A de orden " 1 x n " se escribe como sigue.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Esta matriz que contiene " n " elementos y es de - - orden " 1 x n " se llama vector renglón.

c) Matriz Columna.

Un vector columna es una matriz de orden " m x 1 "- que contiene " m " renglones y una columna. Se escribirá un- vector columna como sigue.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

D) Matriz Diagonal.

Una matriz cuadrada D cuyos elementos $d_{ij} = 0$, cuando $i \neq j$ se le llama matriz diagonal, y se escribe como sigue.

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & d_{nn} \end{bmatrix}$$

E) Matriz Unitaria.

Se conoce con este nombre a una matriz diagonal cuadrada de cualquier orden para la cual $a_{ij} = 1$, cuando $i = j$ para todo valor del índice i. Se representa y esta dada por.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

F) Matriz Nula.

Una matriz con todos sus elementos iguales a cero - recibe este nombre.

G) Matriz Triangular Superior.

Una matriz cuadrada $[A]$ cuyos elementos $a_{ij} = 0$, para - $i > j$ se llama matriz triangular superior y se escribe como - sigue.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

H) Matriz Triangular Inferior.

Una matriz cuadrada $[B]$ cuyos elementos $b_{ij} = 0$ para - $i < j$ se llama matriz triangular inferior y para una matriz- de orden " n " se muestra como sigue.

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

I) Matriz Simétrica.

Como su nombre lo indica, es una matriz cuadrada $[A]$ on la que los elementos de la matriz son tales que $a_{ij} = a_{ji}$ es - decir, el elemento a_{ij} en el i-ésimo renglón y la j-ésima - --- columna es igual al elemento a_{ji} en el j-ésimo renglon e i-ésima columna. Una matriz simétrica de orden 2 se puede regis--- trar como sigue.

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

En donde es necesario que $a_{12} = a_{21}$

J) Matriz Traspuesta.

La matriz de orden " n x m ", que se obtiene al in-- tercambiar los renglones y las columnas de una matriz A de or- den " m x n " se le llama traspuesta de A se representa por- A'. Otra notación común para la traspuesta de A es A^t . El -- a_{ij}-ésimo elemento de la matriz A es el a_{ji}-ésimo elemento de- la matriz traspuesta A^t . Observe que si el orden de la ma--- triz A es " m x n ", entonces el orden de la matriz traspuesta es " n x m ". Por ejemplo.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad [A]^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O P E R A C I O N E S   C O N   M A T R I C E S

Primero estudiaremos y estableceremos el concepto de igualdad de matrices.

Se dice que dos matrices $[A]$ y $[B]$ son iguales entre si, si y solo si tienen el mismo orden y cada elemento de una de - ellas es igual al elemento correspondiente de la otra. Por lo tanto, $[A]=[B]$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, para todas las combinaciones posibles de i y j.

Por ejemplo, la siguiente igualdad.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2t & -t^2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Implica que: $a_{11} = 3$; $a_{12} = -2$; $a_{21} = 2t$; $a_{22} = -t^2$;

$a_{31} = 0$; $a_{32} = 5$

A) Adición.

La adición de dos matrices es posible solo cuando son del mismo orden. Se dice que tales matrices tienen conformabilidad para la adición, (en ésta definición, conformabilidad -- significa apropiado o adecuado). La suma de dos matrices $[A]$ y - $[B]$ de orden " m x n ", es otra matriz $[C]$ de orden " m x n " - en la que cada elemento se obtiene como la suma de los corres-- pondientes elementos de $[A]$ y $[B]$. Por lo tanto, la suma de $[A]$ y $[B]$- representada como la matriz $[C]$ se puede escribir como sigue.

$$[C] = [A] + [B]$$

Donde: $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Para: $i = 1, 2, \ldots m$.
$j = 1, 2, \ldots n$.

$$[C] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 6 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

En el álgebra de números, el hecho de que a + b = b + c para cualesquiera dos números se conoce como ley conmutativa de la adición. El hecho de que a + (b + c) = (a + b) + c para cualesquiera tres números escalares a, b, c, se conoce como ley asociativa de la adición. No es dificil observar que al efectuar la adición de matrices el proceso es conmutativo y asociativo. Por lo tanto el proceso de la adición de- matrices se puede efectuar sumando las matrices en cualquier-orden y agruparlas en forma deseada. En notación matricial se-tiene.

Ley Conmutativa. $A + B = B + A$

Ley Asociativa. $A + (B + C) = (A + B) + C$

B) Resta de Matrices.

De manera similar a la adición se define la resta de matrices.

C) Multiplicación de Matrices.

Cuando se usan matrices para resolver un sistema de-ecuaciones lineales la operación de multiplicación es especialmente útil. Por lo tanto, la multiplicación de matrices, es - particularmente adecuada para ecuaciones lineales en forma de-matrices.

La multiplicación de una matriz por un escalar es,-- por definición, una segunda matriz cuyos elementos son los --- productos de los elementos de la matriz original por el esca-- lar; o sea si:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$K\,[A] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & Ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Dos matrices $[A]$ y $[B]$ se pueden multiplicar, si y - solamente si, el número de columnas de la primera es igual al- número de renglones de la segunda. Dos matrices con esa pro-- piedad se llaman conformables. En éste caso el elemento (i,- j) del producto se calcula empleando la siguiente relación:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}\ . \quad \text{Para:} \quad \begin{matrix} i = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ m \\ j = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ n \end{matrix}$$

De acuerdo con ésta fórmula, si el primer factor - - del producto, la matriz $[A]$, es de orden " m x n " y el se-- gundo factor, la matriz $[B]$, es de orden " n x r ", el produc to, la matriz $[C]$, es de orden " m x r ".

En general el producto de dos matrices no es conmuta tivo es decir:

$$[A]\,[B] \neq [B]\,[A]$$

Ejemplo:

$$[C] = [A][B] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 4\ (3) - 1\ (2) + 0\ (0) & 4\ (4) - 1\ (1) + 0\ (2) \\ 2\ (3) + 3\ (2) + 8\ (0) & 2\ (4) + 3\ (1) + 8\ (2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$$

D) Determinante de una Matriz.

El determinante de una matriz de orden " n x n " es- un número escalar único que se asocia con $[A]$ por medio de una- regla de operación bien definida. Los determinantes tienen -- una gran importancia en la solución de ecuaciones simultáneas- así como en otras operaciones con matrices.

Para establecer la definición de determinante tendre mos que introducir primero los conceptos de Menor y Cofactor.

Si una matriz se eliminan el renglón i, y la colum- na j, se obtiene una nueva matriz cuyo determinante se llama- menor del elemento a_{ij} y se denota con el simbolo $|M_{ij}|$

El cofactor de un elemento de un determinante se - - encuentra al dar un signo adecuado (más o menos) al menor-- que se obtiene cuando se elimina el renglón y la columna del - elemento correspondiente. En otras palabras, el menor indica-do con un signo.

$$(-1)^{i+j} \quad \left| M_{ij} \right|$$

Se llama cofactor de a_{ij} y se representa por α_{ij}.

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden - -- " n x n " se puede evaluar empleando cualquiera de las siguientes formulas.

$$\left| A \right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; \alpha_{ij} \qquad \text{para cualquier} \quad i .$$

$$\left| A \right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \; \alpha_{ij} \qquad \text{para cualquier} \quad j .$$

Ejemplo: encontrar el determinante de la siguiente - matriz.

$$\left[A \right] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para evaluar los tres menores que se obtienen del -- primer renglón de la matriz $\left[A \right]$, se hace lo siguiente. El primer menor $\left| M_{11} \right|$, que es otro determinante, se obtiene al eliminar el primer renglón y primera columna de $\left[A \right]$ de tal manera que

$$\left| M_{11} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 (3) -1 (2) = -2$$

en forma semejante $\left| M_{12} \right|$

$$\left| M_{12} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \ (3) - 1 \ (8) = 1$$

que se obtiene al eliminar el primer renglón y segunda columna de $\left[A \right]$. Para evaluar $\left| M_{13} \right|$.

$$\left| M_{13} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ (2) - 0 \ (8) = 6$$

el cual se obtiene eliminado el renglón y la tercera columna - de $\left[A \right]$. Ahora determinando el valor de los cofactores.

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \left| M_{11} \right| = 1 \ (-2) = -2$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \left| M_{12} \right| = -1 \ (1) = -1$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \left| M_{13} \right| = 1 \ (6) = 6$$

Encontrados los cofactores es posible evaluar el determinante (det $\left[A \right]$).

$$\det \left[A \right] = 6 \ (-2) + 2 \ (-1) + 1 \ (6) = -12 - 2 + 6$$

$$= -8 \qquad \det \left[A \right] = -8$$

Es evidente que el desarrollo de determinantes de - orden superior es un proceso laborioso y, por tanto, se hace- necesario utilizar una computadora digital para encontrar el- valor numérico de estos determinantes.

El determinante de una matriz cuadrada $\left[A\right]$ tiene varias propiedades de mucho interés. Dado $\left[A\right]$ y la traspuesta - A^t, se encuentra que.

$$\det \left[A\right] = \det \left[A\right]^t$$

En resumen para dos matrices cuadradas $\left[A\right]$ y $\left[B\right]$ de orden n se tienen:

$$\det \left[A\right]\left[B\right] = \det \left[A\right] \det \left[B\right]$$

Existen varias condiciones para que un determinante - sea igual a cero. Una condición importante tanto para que un - determinante sea igual a cero tiene lugar cuando son proporcionales dos renglones (o columnas). Esto quiere decir que -- los elementos correspondientes de dos renglones éstan relacionados en forma proporcional por el mismo factor.

Por ejemplo:

$$\det \left[A\right] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = 4 (2) -1 (8) = 0$$

en donde los elementos del segundo renglón son el doble de los del primer renglón.

A continuación introducimos una importante definición: Si el determinante de una matriz cuadrada $\left[A\right]$, es nulo, se dice que la matriz es singular.

Ahora se mostrará como expresar un sistema de ecuaciones lineales simultáneas como una ecuación matricial. Sea el -

siguiente sistema de " m " ecuaciones con " n " incognitas.

$$
\begin{array}{l}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n = b_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n = b_m
\end{array}
$$

Se puede representar como $\left[A\right]\left[x\right] = \left[b\right]$

en donde

$$
\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .
$$

Y su representación es:

$$[A][x]=[b]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

En donde $[A]$ es una matriz " m x n ", $[x]$ es una matriz " n x 1" y $[b]$ es una matriz " m x 1 ". Cuando m = n se tiene una matriz cuadrada $[A]$.

La ecuación matricial $[A]\,[x] = [b]$ se llama ecuación no homogénea.

La ecuación $[A]\,x] = 0$ se llama ecuación homogénea cuando $0]$ es la matriz columna cero.

E) Rango de una Matriz.

El Rango de una matriz se define como el orden del mayor determinante diferente de cero que podemos obtener de los elementos de una matriz. Esta definición es aplicable tanto a la matriz cuadrada como a la rectangular. Por lo tanto, se dice que una matriz $[A]$ no nula tiene rango r si al menos uno de sus r menores cuadrados es diferente de cero, mientras que todo menor cuadrado de orden mayor, es igual a cero.

El rango de una matriz $[A]$ se puede encontrar a partir de los determinantes de orden mayor m calculando el valor numérico para comprobar si uno de ellos es diferente de cero.

Si es así, entonces el rango de la matriz es igual a m .

Si todos los determinantes de orden m son iguales a cero, entonces se evalúan los determinantes de orden m-1. Y al continuar de esta manera encontramos el rango r de la matriz, que es el orden del mayor determinante diferente de cero.

Ejemplo: Encontrar el rango de la matriz.

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det [A] = 6 - 6 = 0$$

$$\det [A] = 0$$

De esto, tenemos que el rango de $[A] = 1$, ya que el orden del mayor menor de $[A]$ diferente de cero es igual a 1.- En realidad existen cuatro menores diferentes de cero de orden 1 que podemos escoger, por ejemplo $M_{12} = 2$

Una matriz cuadrada $[A]$ de orden " n " se llama no singular si su rango es igual a n (r = n) y por lo tanto, $\det [A] \neq 0$. De lo contrario $[A]$ es singular y $\det [A] = 0$.

El rango de una matriz diagonal $[D]$ (n x n) = n y la matriz es no singular.

Para un sistema de ecuaciones lineales simultáneas,-

se dice que, este sistema es consistente si existe una solución, y es inconsistente si no existe una solución.

Para determinar si las ecuaciones son consistentes -- basta comparar el rango de los coeficientes de la matriz $[A]$ -- con la matriz aumentada. Sea una ecuación lineal en forma de - matriz para representar a un sistema de n ecuaciones lineales:

$$[A]\ [x] = [b]$$

La matriz aumentada es la matriz que se obtiene al -- aumentar la matriz $[A]$ con la columna $b]$ para obtener.

$$[A]\ b] = A^{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{n} \end{bmatrix}$$

que tiene n renglones y n + 1 columnas.

Un conjunto de n ecuaciones simultáneas con n incógnitas es consistente si el rango de la matriz de los coeficientes $[A]$ es igual al rango de la matriz aumenta $[A]^{b}$. Si el-- rango de $[A]$ es menor que el rango de $[A]^{b}$, las ecuaciones - no son consistentes y por lo tanto no existe una única solu---

ción.

De lo anterior tenemos que, la solución de un sistema, de n ecuaciones consistentes es única cuando el rango de $[A]$ es igual al rango de $[A]^b$ y el rango es igual a n.

La solución de un sistema de n ecuaciones no es única cuando $r([A]) = r([A]^b) = m$ y $m < n$. Hay "n - m" incognitas a las que se asignan valores arbitrarios obteniéndose entonces valores únicos para las m incógnitas restantes.

F) Traza de una Matriz.

La suma de los elementos de la diagonal mayor (o principal) de cualquier matriz cuadrada $[A]$ se llama traza de $[A]$ y se escribe como $tr([A])$.

Por lo tanto, sea la matriz general $[A]$ en donde.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se obtiene.

$$tr([A]) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

G) Matriz Cofactor.

Para decir como se obtiene la inversa de una matriz - empezamos por definir una matriz cofactor. Una matriz cofactor, $[A]^C$ se obtiene al substituir cada elemento de una matriz cua-- drada $[A]$ por su correspondiente cofactor α_{ij} . Por lo tanto, al sustituir cada elemento a_{ij} por α_{ij}, en donde α_{ij} se- determinó anteriormente como:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{(i+j)} \left| M_{ij} \right|$$

en donde $\left| M_{ij} \right|$ es el menor correspondiente al eliminar el - -- i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Ejemplo: Encontrar la matriz cofactor para.

$$[B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (E_2)$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= (-1)^2 \quad (-1) = -1 \\
\alpha_{12} &= (-1)^3 \quad (4) = -4 \\
\alpha_{21} &= (-1)^3 \quad (2) = -2 \\
\alpha_{22} &= (-1)^4 \quad (3) = 3
\end{aligned}$$

de ahí que:

$$[B]^C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

H) Matriz Adjunta.

Si tenemos una matriz cuadrada $[A]$ y su matriz cofactor $[A]^c$ en donde.

$$[A]^c = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & . & . & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces, la matriz adjunta de $[A]$ se define como la traspuesta de la matriz cofactor, así que:

$$\text{adj } [A] = [A]^{ct}$$

$$\text{adj } [A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & . & . & . & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: encuentre la matriz adjunta de (E_2)

Tenemos que.

$$[B]^C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Y la adjunta:

$$[B]^{c^t} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ya que:

$$\text{adj } [B] = [B]^{c^t}$$

La matriz adjunta posee una propiedad de la multiplicación muy importante. Cuando se multiplica la matriz $[A]$ por su adjunta tenemos:

$$|A| \cdot (\text{adj } |A|) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot (\text{adj } [A]) = |A| \; [I] \quad \ldots \quad (\text{II})$$

En donde $[I]$ es la matriz identidad. La multiplicación en éste caso, es conmutativa y podemos escribir.

$$[A] \cdot (\text{adj } [A]) = (\text{adj } [A]) \cdot ([A]) = |A| [I]$$

Por lo tanto, al multiplicar a $[A]$ por la adjunta de $[A]$ obtene--

mos una matriz que tiene el valor del determinante de $[A]$ en - la diagonal principal, así que.

$$[A] \cdot (\text{adj } [A]) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & |A| & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & |A| \end{bmatrix}$$

Ahora obtengamos el determinante de la relación.

$$[A] \cdot (\text{adj } [A]) = (\text{adj } [A]) \cdot [A] = |A| \, [I] \, \ldots\ldots \quad (E_3)$$

Para obtener.

$$\Big| [A] \cdot (\text{adj } [A]) \Big| = \Big| \text{adj } [A] \cdot [A] \Big| = |A|^n .$$

Obsérvese que el determinante de $|A| \, [I]$ es $|A|^n$ ya que.

$$\det (|A| [I]) = \det \begin{bmatrix} |A| & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & |A| & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & |A| \end{bmatrix} = |A|^n$$

para una matríz de orden n.

I) Inversa de una Matríz.

La determinación de la inversa de una matríz es una operación - muy útil e importante en el álgebra de matrices.

En el álgebra elemental se define la división como la solución para la ecuación algebraica $AX = B$, la cual se denota $X = B/A$

La operación matricial que es análoga a la división - es la multiplicación por la matriz inversa. Aquí mostramos un - método para encontrar la inversa de una matriz.

La inversa de una matriz cuadrada $[A]$ se escribe como $[A]^{-1}$ y se define como la matriz que al multiplicarla por la matríz original $[A]$, da la matriz identidad. Por lo tanto.

$$[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [I] \quad --- \quad (E_4)$$

en donde la matríz y su inversa son conmutativas.

En el álgebra elemental, escribimos $ab = 1$, y se dice que b es lo inverso (o recíproco) de a.

En el álgebra de matrices tenemos que el $[A][B] = 1$, entonces $[B]$ es la inversa de $[A]$; en forma de ecuación:

$$[B] = [A]^{-1}$$

al resolver una ecuación lineal $AX = B$, tenemos que:

$$X = \frac{B}{A}$$

Una ecuación matricial análoga que representa a un sistema de " n " ecuaciones lineales simultáneas con " n " incógnitas se escribe.

$$[A][X] = [B]$$

en donde $[A]$ es una matriz cuadrada de coeficiente. Al multiplicarse ambos lados de la ecuación anterior por $[A]^{-1}$ se obtiene.

$$[A]^{-1} [A] [X] = [A]^{-1} [B]$$

ya que $[A]^{-1} [A] = [I]$ se encuentra que.

$$[X] = [A]^{-1} [B]$$

que es la solución de la ecuación matricial.

$$[A][X] = [B]$$

Hemos de mencionar que la matriz adjunta tiene relación con la matriz inversa.

Para mostrar que la matriz adjunta ésta relacionada con la operación de inversión, multipliquemos la matriz $[A]$ por su adjunta, adj $[A]$.

Por ejemplo. completar la multiplicación de la matriz $[A]$ de segundo orden y su adjunta para determinar los elementos de $[B]$ en la ecuación $[A]$, $\cdot$ adj $[A] = [B]$

$$\left[A\right] \cdot \operatorname{adj}\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21}$$

$$b_{12} = a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22}$$

$$b_{21} = a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21}$$

$$b_{22} = a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22}$$

Observe que la ecuación para el primer elemento, b_{11}, consta de los elementos del primer renglón de $\left[A\right]$ multiplicados por los cofactores correspondientes de los mismos elementos.

Recordamos que b_{11} es idéntico al desarrollo del determinante de $\left[A\right]$ por sus cofactores a lo largo del primer renglón, y por lo tanto.

$$b_{11} = \det\left[A\right]$$

El elemento b_{12} contiene también los elementos del primer renglón; pero no están multiplicados por los cofactores correspondientes. Para la matriz cuadrada $\left[A\right]$ de orden dos se tiene:

$$\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Y podemos calcular la matriz adjunta específica para obtener

$$\operatorname{adj}\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Al completar, la multiplicación matricial escribimos.

$$\left[A\right] \cdot \operatorname{adj}\left[A\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\left[A\right] \cdot \operatorname{adj}\left[A\right] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Otra vez se observa que.

$$b_{11} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{12} = \left| A \right|$$

$$b_{12} = a_{11}\,(-a_{12}) + a_{12}\,(a_{11}) = 0$$

$$b_{21} = a_{21}\,(a_{22}) + a_{22}\,(-a_{21}) = 0$$

$$b_{22} = a_{21}\,(-a_{12}) + a_{22}\,(a_{11}) = \left| A \right|$$

En general, se puede demostrar que si los elementos de un renglón de una matriz se multiplican por los cofactores de un renglón diferente y los productos se suman, el resultado es cero. También, los elementos de la diagonal principal del-producto de $[A]$ por adj $[A]$ son iguales a $[A]$. Por lo tanto, para una matriz $[A]$ de n-ésimo orden se tiene:

$$[A] \cdot \operatorname{adj}[A] = \begin{bmatrix} |A| & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & |A| & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & & & & |A| \end{bmatrix} = |A| \; [I]$$

De la ecuación (E_3)

$$[A] \cdot \operatorname{adj}[A] = |A| \, [I]$$

Y al dividir ambos miembros de ésta ecuación por el determinante de $|A|$ se obtiene.

$$[A] \operatorname{adj}[A] / |A| = [I]$$

Hay que recordar que la ecuación (E_4) establece que.

$$[A] \, [A]^{-1} = [I]$$

Y encontramos que la inversa de $[A]$ puede escribir como.

$$[A]^{-1} = \operatorname{adj}[A] / |A|$$

Ejemplo: dado que, la imversa de una matriz cuadrada es igual a la matriz adjunta dividida entre el determinante de la ma--

triz. Encuentre la inversa de la siguiente matríz.

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya que: $|A| = 2$

$$[A]^{-1} = \text{adj}\,[A] / |A| = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\,[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

encontramos que la inversa de una matriz existe solo si el determinante de la matriz es diferente de cero y la matríz es no singular. Si la matriz es singular, det $A = 0$, por lo tanto, no se puede encontrar la inversa.

Para comprobar la inversa determinada en el ejemplo anterior, pruebe que. $[A]\,[A]^{-1} = 1$

por lo tanto:

$$[A]\,[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El método para encontrar la inversa de una matriz no no es muy práctico para matrices de orden mayor que cuatro, porque- es mayor el número de operaciones que se necesitan. Para ma-- trices de orden superior se utiliza una computadora digital - para efectuar todas las operaciones.

Las propiedades de la inversa de una matriz son importantes para aislarlas. Primero, observamos que la inversa- de una matriz cuadrada no singular de orden n es única. Además, si $[A]$ es no singular, entonces.

$$[A][B] = [A][C]$$

implica que $[B] = [C]$. Este resultado se obtiene cuando multiplicamos (se debe multiplicar en el lado izquierdo de las - matrices) ambos miembros la ecuación por $[A]^{-1}$.

Una propiedad evidente de una matriz es que,

$$([A]^{1})^{-1} + A$$

cuando $[A]$ es no singular.

Ya que $[I]$ es la matriz identidad, encontramos que la inver-- sa de lamatriz identidad es:

$$[I]^{-1} = [I]$$

La inversa de una matriz diagonal $[D]$ es:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & & & & d_{nn} \end{bmatrix} \quad [D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/d_{nn} \end{bmatrix}$$

Ahora, ya que hemos desarrollado un método para la determinación de la inversa de una matriz, podemos utilizar el proceso de inversión para resolver un sistema de n ecuaciones simultáneas.

La matriz que representa a un sistema de n ecuaciones simultáneas con n incógnitas se escribe.

$$[A][X] = [B]$$

Para encontrar la solución única se multiplica por $[A]^{-1}$ a la ecuación y obtenemos.

$$[A]^{-1} [A] [X] = [A]^{-1} [B]$$

o bien.

$$[X] = [A]^{-1} [B]$$

Ejemplo: Encontrar la solución para el sistema de ecuaciones.

$$3 x_1 + 2 x_2 = 1$$

$$2 x_1 + 4 x_2 = 2$$

En forma de matriz, las ecuaciones se escriben.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ya que.

$$[A]^{-1} = [1/8] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtenemos.

$$[X] = [A]^{-1} [B]$$

$$|X| = [1/8] \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [1/8] \begin{bmatrix} (4 & - & 4) \\ (-2 & + & 6) \end{bmatrix} = [1/8] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de donde tenemos que.

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1/2$$

Este método para obtener la solución de un sistema - de ecuaciones simultáneas es útil cuando las incognitas x_1, - x_2 . . . x_n, se van evaluar para varios conjuntos de constan tes b_1, b_2 . . . b_n.

Ejemplo: Encuentre la solución del ejemplo anterior cuando:

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución.

Ya que.

$$\left[X\right] = \left[A\right]^{-1} \left[B\right] = 1/8 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = 1/8 \begin{bmatrix} 14 \\ \\ - \end{bmatrix}$$

de donde.

$$x_1 = 14/8$$

$$x_2 = 5/8$$

A continuación haremos un resumen de la inversa de una matriz.

1.- La inversa de una matriz cuadrada $\left[A\right]$ se escribe $\left[A\right]^{-1}$ y satisface la relación.

$$\left[A\right]^{-1} \left[A\right] = \left[A\right]\left[A\right]^{-1} = \left[I\right]$$

en donde el producto de la matriz por su inversa es conmutativo.

2.- La ecuación matricial que representa a un sistema de n - ecuaciones simultáneas con n incognitas se escribe.

$$[A]\,[X] = [B]$$

Y la solución única:

$$[X] = [A]^{-1}\,[B]$$

3.- La inversa de una matriz $[A]$ es.

$$[A]^{-1} = \text{adj}\,[A]\,/\,|A|$$

en donde adj $[A]$ es la adjunta de $[A]$ y $|A|$ es el determinante de $[A]$. La inversa existe solo cuando el determinante de $[A]$ es diferente a cero.

4.- Si $[A]$ es no singular, entonces.

$$[A]\,[B] = [A]\,[C]$$

Implica que $[B] = [C]$

5.- La inverxa de una matriz diagonal.

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

es:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/d_{nn} \end{bmatrix}$$

C A P I T U L O VI

ADOPCION DE UN METODO DE COMPUTO PARA MANEJAR LA MATRIZ.

INTRODUCCION

En este capítulo abordamos la cuestión de como manejar la estructura matricial con ayuda de una computadora, para lo -- cual, tratamos primero el fondo matemático, ocupándonos poste--- riormente de la elección del método más conveniente para el mane jo del tipo de matriz que tenemos, tratando después las caracte- rísticas y facilidades del método escogido:

Para ejemplificar la aplicación del método escogido, - tomamos a la matriz de insumo producto nacional de 1950 como - - fuente de datos.

Elegimos para este ejemplo, arbitrariamente, una deman da final supuesta igual a la demanda final real, con lo que de-- bía obtenerse un producto bruto ficticio igual al producto bruto real para cada sector de la producción.

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES SIMULTA- NEAS.

Entendemos por un sistema de ecuaciones algebraicas -- lineales simultáneas un conjunto de n ecuaciones con n incogni-- tas en cada ecuación y donde en cada ecuación las incognitas es- tán elevadas a la primera potencia.

Resolver este sistema es encontrar un valor para cada-incognita que al sustituirlos en cada una de las ecuaciones las satisface todas.

Dependiendo del valor del determinante de la matriz - de coeficientes y de si el sistema es homogéneo, como se explicó en el capítulo anterior, podemos tener para la solución tres casos, a saber:

1.- No existe solución para el sistema de ecuaciones.

2.- Existen múltiples soluciones para el sistema. de ecuaciones.

3.- La solución para el sistema de ecuaciones existe y es única.

Existen en general dos métodos para solucionar estos -- sistemas de ecuaciones, los métodos directos o finitos y los -- indirectos o infinitos. Lo anterior significa que un método directo, despreciando los errores por redondeo, llegará a una solución exacta en un número finito de ecuaciones aritméticas, si es que la solución existe, en tanto que un método indirecto requiere teóricamente un número infinito de operaciones aritméticas para llegar a una solución. Sin embargo los errores por redondeo inherentes a todas las computadoras hacen que los métodos indirectos tengan ventajas sobre los directos en algunos -- casos.

Se expone a continuación una ligera explicación de el método de eliminación de Gauss como ejemplo de los métodos directos, y del método de Gauss-Seidel como ejemplo de los métodos indirectos.

METODO DE ELIMINACION DE GAUSS.

El procedimiento para llegar a la solución del sistema de ecuaciones es el siguiente:

Primeramente se le agrega a la matriz de coeficientes del sistema una columna adicional que es el vector columna independiente del sistema, con lo que se tiene una matriz aumentada de n renglones y n + 1 columnas.

Posteriormente, aplicando las operaciones elementales para matrices a esta matriz aumentada, se obtiene otra en la -- que sus elementos A (I,J) valen cero para I mayor que J, en - - otras palabras, los elementos abajo de la diagonal principal -- valen cero. Con lo anterior se llega a una matriz triangular - aumentada que es equivalente a la matriz aumentada original y - la cual representa a una sistema de ecuaciones que en su última ecuación sólo tiene una incógnita, en la penúltima dos, en la - antepenúltima tres y así sucesivamente.

Entonces sigue un proceso denominado comúnmente "sustitución hacia atrás" y que consiste en obtener el valor de la-enésima incógnita de la enésima ecuación de este nuevo sistema-equivalente y sustituirlo en la penúltima ecuación para obtener el valor de la penúltima incógnita y así sucesivamente hasta -- encontrar el valor de la primera incógnita. Dandose así por -- concluido el proceso.

Existen variantes a este método y entre las más - - -

importantes está el intercambio de filas o renglones que se hace con el objeto de escoger a los elementos más grandes de cada columna como pivotes, aumentando así notablemente la exactitud- de la solución. El método de Gauss así expuesto, es adecuado - para resolver sistemas de hasta veinte ecuaciones simultáneas,- para sistemas más grandes se hace necesario utilizar tecnicas - de refinamiento de la solución.

METODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

En este método se llega a la solución en la forma que sigue:

Se asigna primeramente un valor arbitrario inicial para cada incognita del sistema, haciendo si es posible una suposición razonable de estos valores, los valores iniciales no - - afectarán la convergencia en sí, pero si en cambio el número de iteraciones requeridas para la convergencia.

Se soluciona así con estos valores supuestos, la primera ecuación para un nuevo valor de la incógnita que tenga el- más grande coeficiente en esta ecuación, usando los valores - - supuestos para las otras incógnitas. Se resuelve entonces la - segunda ecuación para la incógnita de mayor coeficiente, usando el valor de la incógnita calculado en la primera ecuación y para el resto de las incognitas los valores supuestos.

Así se hace sucesivamente con el resto de las ecuacio nes, concluyendo así una iteración. Para la segunda iteración- se procede igual pero usando esta vez para la primera ecuación- los valores obtenidos de la primera iteración, el proceso con-- tinúa hasta que el valor de cada incógnita determinado en alguna iteración particular difiere del calculado en la iteración - precedente por una cantidad menor o igual a cierto valor fijado arbitrariamente, concluyendo así el proceso.

ALGUNOS COMENTARIOS ADICIONALES A LOS METODOS PARA SOLUCION- DE ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS.- Cuando los sistemas a so-- lucionar constan de cientos o tal vez miles de incógnitas, los- métodos directos no son prácticos por el almacenamiento en memo ria tan grande que se requiere empleandose entonces métodos indirectos, que en el caso particular del Gauss - Seidel sólo exi ge una ecuación a la vez. Sin embargo ninguno de estos métodos indirectos es completamente satisfactorio, en el caso del - - - Gauss-Seidel se tiene la desventaja de que no siempre el método converge a una solución y algunas veces, cuando lo hace, la - - convergencia es muy lenta. Se ha encontrado que este procedimiento siempre tiene convergencia cuando el coeficiente de una- incognita diferente en cada ecuación del conjunto, es suficientemente dominante con respecto a los valores absolutos de los - otros coeficientes en esa ecuación, pero es difícil establecer- el margen mínimo por el que dicho coeficiente debe dominar a -- los otros para asegurar convergencia y aún más difícil es predecir la razón de convergencia para alguna combinación de coefi-- cientes, cuando la convergencia existe.

Pero cuando el valor absoluto del coeficiente dominan te para una incognita diferente en cada ecuación es más grande- que la suma de los valores absolutos de los otros coeficientes- en esa ecuación, la covergencia es segura. Un conjunto tal de - ecuaciones simultáneas es conocido como un sistema diagonal y - un sistema así es condición suficiente pero no necesaria para - asegurar la convergencia. Afortunadamente muchos sistemas de -- ecuaciones derivados de problemas de ingeniería son de este ti- po.

Siempre que se pueda es preferible emplear los méto-- dos indirectos, ya que en éstos el trabajo requerido es propor- cional al número de ecuaciones al cuadro, en tanto que en elimi nación el trabajo es, proporcional a "dicho número al cubo, ade más aunque el trabajo adicional de computadora es mayor el --- error por redondeo es en general menor.

Hay algunos sistemas en que una gran parte de sus ele mentos son cero y en los cuales es preferible emplear los méto- dos indirectos si es que son aplicables, pues pudiera resultar- en un sistema altamente denso si se convierte a un sistema --- triangular por la eliminación y además por que se pueden verifi car los coeficientes y no efectuar la multiplicación cuando --- ellos son cero.

ELECCIÓN DEL METODO A SEGUIR PARA LA SOLUCION DEL SISTEMA DE --
ECUACIONES QUE NOS OCUPA.

De acuerdo al tipo de matriz que se presenta se debe-elegir el método. Nuestra matriz tiene las siguientes caracte-rísticas:

No obstante que aquí sólo nos ocupamos de un pequeño-sistema, si pensamos en aplicarlo a la matriz de insumo-produc-to nacional, tendremos que pensar en sistemas con más de cien -ecuaciones .

Los valores de los elementos de la matriz presentan -grandes diferencias entre sí, y aunque no hay gran cantidad de-elementos que sean cero, hay sin embargo elementos cuyo valor -relativo de acuerdo a los otros elementos es pequeño.

Tenemos también en cada fila un elemento que es más -grande en valor absoluto que todos los elementos restantes, en-el caso particular que se resuelve este elemento también es más grande que la suma de los valores absolutos de los elementos --restantes, pero si consideramos un sistema de cien ecuaciones,-tal vez ya no se tendrá esta característica.

Podriamos no obstante, esta última observación, optar por un método indirecto ya que la convergencia casi seguro ocu-rrirá, además el método indirecto es altamente preferible al --directo especialemtne en sistemas grandes de ecuaciones.

Pero he aquí un detalle que nos ha hecho inclinarnospor el método de descomposición LU, el cual es un método directo:

Como se dijo al principio se van a hacer suposiciones--sobre la demanda final, la cual constituye en nuestro sistema de-ecuaciones el vector independiente y para cada nuevo vector hay -que resolver nuevamente el sistema de ecuaciones., a menos de que se --cuente con la inversa de la matriz de coeficientes, pero el procedimiento para obtener esta matriz inversa, es laborioso e incon--veniente en nuestro caso sin embargo éste método de descomposi---ción LU nos dá la facilidad de obtener una nueva solución correspondiente a cada nuevo vector como si tuvieramos la inversa de la matriz de coeficientes, esto es, sin necesidad de resolver nuevamente el sistema.

Esto último es una ventaja que no tendriamos con los --métodos indirectos, pues utilizandolos tendriamos que resolver --nuevamente el sistema de ecuaciones.

FACILIDADES ESPECIFICAS DEL METODO UTILIZADO

El método directo que se emplea titulado "Descomposi---ción LU" es en escencia el método de eliminación de Gauss.

El programa puede manejar en principio sistemas de ecuaciones lineales de cualquier orden, pero su capacidad queda res--tringida por el almacenamiento requerido en la memoria de alta velocidad y tiempo empleado en la computadora.

Nos ofrece dos soluciones; una aproximada y otra refinada, la exactitud de ambas queda afectada por supuesto por el número -

de dígitos retenidos en los cálculos aritméticos y por el procedimiento de redondeo usado.

La exactitud de la primera solución depende además del número de ecuaciones. La exactitud de la segunda solución depende además de 2 parámetros que pueden ser fijados arbitrariamente ó hacerlos función de otros; ellos son:

a.- un valor "EPS" que es la precisión deseada.

b.- " ITMAX " que es el número máximo de iteraciones permitidas.

Ambos parámetros detienen el número de iteraciones efectuadas por el programa en el proceso de refinamiento de la solución.

En cada iteración se comparan los valores de las incógnitas con los valores encontrados en la iteración precedente, y si la diferencia máxima encontrada entre cada uno de ellos es igual o menor que el primer parámetro, el proceso se dá por concluido.

En el caso de que se llegara al máximo de iteraciones y aún no se cumpliera con la precisión deseada, el proceso es igualmente detenido.

En ambos casos, el programa nos permite conocer la precisión a la que se ha llegado y queda interpretada como ya se dijo, como la diferencia máxima encontrada entre los valores de una iteración, con los obtenidos en la iteración precedente. Sin embargo no nos indica el grado de exactitud de la solución.

La estructura del programa nos permite resolver el -- sistema de ecuaciones para varios vectores independientes pro-- puestos, sin necesidad de reiniciar la eliminación, aún más, -- nos permite resolverlo con el mismo número de operaciones arit- méticas que serían necesarias si contaramos con la inversa de - la matriz.

LA ELIMINACION GAUSSIANA Y LA DESCOMPOSICION LU

El método aquí utilizado para resolver el sistema de- ecuaciones se basa en el teorema de descomposición LU, el cual- dice lo siguiente:

"Dada una matriz cuadrada A de orden N donde A(K) in- dica la matriz principal menor, hecha de las primeras K filas y columnas, supongamos que el determinante de A(K) es diferente - de cero para K igual a 1,2,.....N-1 luego, existe una matriz -- triangular inferior única L=M (I,J), en la cual todos sus ele-- mentos diagonales son unitarios y una matriz triangular supe- - rior única U=U (I,J), de manera que LU=A, además el determinan- te de A es igual al producto de los elementos diagonales de U.

La matriz A del teorema es nuestra matriz de coefi--- cientes y entonces el sistema Ax=b puede escribirse LUx=b lo - cual representa dos sistemas triangulares Ly=b y Ux=y donde el-vector y es una solución intermedia y el vector x es el vector - solución del sistema.

El factoreo de A en las matrices triangulares L y U es la base de la eliminación gaussiana. El cálculo de L y U junto- con la solución de Ly=b es conocido como la eliminación anterior y la solución de Ux=y es conocida como la sustitución hacia - -- atrás.

Supongamos el sistema Ax=b donde A=A(I,J) , x=x(I), -- b=b(I) donde I,J=1,N.

Queremos llegar de acuerdo a la eliminación gaussiana- a un arreglo como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & ------ & a_{1n}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & ------ & a_{2n}' \\ 0 & 0 & a_{33}' & ------ & a_{3n}' \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Para poner ceros abajo del primer elemento en la primera columna, multiplicamos el primer renglón por M (I,1)=A(I,1)/-

A(1,1) y lo restamos del iesimo renglón, obteniendose así una matriz A_2 cuyos elementos de la primera columna excepto A(1,1) son cero. Esto lo podemos expresar de la forma siguiente:

Si

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 0 & 1 & . \\ -m_{31} & 0 & 1 & . \\ . & . & 0 & . \\ -m_{11} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ -m_{n1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

premultiplicando el sistema Ax=b por M_1 tendremos:

$M_1 A_x = M_1 b \Rightarrow A_2 x = b_2$ donde:

$$A_2 = M_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tenemos ahora que poner ceros a los elementos abajo de la diagonal en la segunda columna, para lo cual multiplicamos el segundo renglón de ésta matriz por $M_2(I,2)$ / A(2,2) y lo restamos del enésimo renglón de donde resulta una matriz A_3 cuyos elementos de la primera y segunda columna abajo de la diagonal son cero. Ello lo podemos expresar así:

Si

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots\ldots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1\ldots\ldots & 0 \\ . & -m_{42} & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & -m_{n2} & 0\ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}$$

y premultiplicamos el sistema $A_2X = b_2$ por M_2, tenemos $M_2 A_2 x =$ -

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -M_{32} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & -M_{42} & 0 & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -m_{n2} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 \; b_2 \approx A_3 x = b_3 \quad \text{donde:}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Y así continuamos hasta obtener una matriz An cuyos elementos abajo de su diagonal principal son cero.

Esta matriz An es una matriz triangular superior y se puede expresar así:

$$A_n = M_{n-1} \; A_{n-1} = M_{n-1} \; M_{n2} \; A_{n-2} = M_{n-1} \; M_{n-1} \; M_{n-2} \ldots M_1 \; A$$

sea $M = M_{n-1} \, M_{n-2} \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; M_1$

entonces $A_n = M A$; de donde $A = M^{-1} \; A_n$

pusto que M=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -M_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ -M_{31} & -M_{32} & \cdots & 0 \\ -M_{41} & -M_{42} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -M_{n1} & -Mn_2 & & 1 \end{bmatrix}$$

M^{-1} es simplemente:

$$M^{-1} = M_{n-1}^{-1} \quad M_{n-2}^{-1} \; . \; . \; . \quad M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ M_{21} & 1 & \dots & 0 \\ M_{31} & M_{32} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Si designamos a $M^{-1} = L$ y $A_n = U$, $A = LU$

Sustituyendo en nuestro sist. original:

$Ax = b$

$LUx = b$

y tenemos entonces los 2 sist. triangulares anteriormente citados y que pueden ser resueltos fácilmente.

$Ux = y$ $\qquad\qquad$ $Ly = b$

ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

El programa principal "JDAKA", tomado de la obra de -- G.E.Forsyte y C.B. Moler titulada "Solución Mediante Computadoras de Sistemas Algebraicos lineales" consta de una serie de -- instrucciones que tienen por objeto, llamar adecuadamente a --- cuatro subprogramas, que son los que nos permiten llegar a una - solución, ellos son: Decompose, Solve, Improve, y Sing. He -- aquí las funciones de cada subprograma:

DECOMPOSE

Este subprograma es el que ocupa más tiempo de máquina que todos, y es además el que realiza casi todo el trabajo.

Aquí la matriz de coeficientes "A" es descompuesta en dos submatrices, una matriz triangular superior "U" y una matriz - - triangular "L". Estas matrices cumplen con la propiedad de que LU=PA donde "P" es una matriz en que cada uno de sus renglones y columnas contiene sólo un uno, o sea que es la matriz identidad con sus renglones intercambiados y por ende PA es la matriz " A " con sus renglones intercambiados.

En Decompose, hallamos un elemento de mayor valor - - absoluto en cada fila de la matriz y registramos su reciproco - en "Scales".

El arreglo global "PS" se inicia de manera que PS(I)= I, durante la eliminación se elige al mayor elemento en la columna como elemento pivote, pero las filas no se intercambian - realmente, en cambio se intercambian los elementos correspondientes de PS. Podemos luego referirnos a PS(I) en vez de A(I,J), esto no implica gran pérdida de tiempo mientras todos los lazos internos figuren en el subíndice de la columna j, pues así se - gana tiempo que se necesitaría para llevar a cabo el intercambio.

SOLVE

En este subprograma se utiliza la factorización L,U - de decompose para hallar una solución aproximada a un sistema -

simple de ecuaciones Ax=b. Solve consiste de dos etapas: la primera resuelve el sistema triangular inferior Ly=b y la segunda es - la solución del sistema triangular superior Ux=y, el vector intermedio "y" se almacena en "x" y el miembro derecho no se altera.

IMPROVE

Trata de mejorar la solución encontrada por Solve. - Lleva a cabo el proceso de mejoramiento iterativo, hasta que, - si es posible, x es exacta con la precisión de la maquina. Proporciona también una estimación "DIGITS" de la exactitud de la primera aproximación. El valor "DIGITS" es aproximadamente el número de dígitos decimales de x que no se cambian por la iteración, ésta es una medida de la condición de A.

Los residuos "r" se calculan usando variables de doble precisión, luego se encuentran las correcciones dx usando - el subprograma Solve y se agregan a x. Este proceso se itera - hasta que mas ó menos, el cambio en x es menor que la precisión de sistema de computadoras ó hasta que se alcance el número superior de iteraciones permitidas.

SING

Este subprograma nos permite conocer, cuándo tenemos una matriz que tiene un renglón de ceros, ó cuando la matriz -- es singular ó si no es posible un mejoramiento de la solución - por no haber convergencia.

ALIMENTACION DE DATOS AL PROGRAMA

Se expuso en el capítulo II pág. 20 que:

Producto Bruto = Demanda Intermedia + Demanda Final

Lo cual podíamos expresarlo así:

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} \cdots\cdots + X_{1n} + Y_1$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} \cdots\cdots + X_{2n} + Y_2$$

$$\vdots$$

$$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots\cdots\cdots + X_{nn} + Y_n$$

donde:

X_i = Producto bruto del sector i

X_{ij} = Insumos del sector j provenientes del sector i

Y_i = Demanda final del sector i

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ = Demanda intermedia del sector i

Además se definió $\quad A_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}$

donde aij = coeficientes técnicos de insumo producto, con la definición anterior, el arreglo matricial pudo expresarse así:

$$X_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots\cdots a_{1n} X_n + Y_1$$

$$X_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots\cdots a_{2n} X_n + Y_2$$

$$\vdots$$

$$X_n = a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots\cdots a_{nn} X_n + Y_n$$

Si despejamos la demanda final Y_i en cada una de estas ecuaciones, tendremos:

$$Y_1 = (1-a_{11})\ X_1 - a_{12}\ X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -a_{1n}\ X_n$$

$$Y_2 = -a_{21}\ X_1 + (1-a_{22})\ X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots -a_{2n}\ X_n$$

$$Y_3 = -a_{31}\ X_1 - a_{32}\ X_2 + (1-a_{33})\ X_3 \ldots -a_{3n}\ X_n$$

$$Y_n = -a_{n1}\ X_1 - A_{n2}\ X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (1-a_{nn})\ X_n$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) & \ldots\ldots\ldots\ldots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Esta última matriz de coeficientes, es la que se alimenta al programa, en éste sistema el vector independiente es - la demanda final y el producto bruto de cada sector queda como vector incógnita, así, para cada demanda final supuesta, se obtendrá, al resolver el sistema, un producto bruto ficticio correspondiente a cada sector.

A continuación se dá el ejemplo para mostrar el método de computo adoptado.

EJEMPLO

Veamos ahora como los datos de la matriz nacional de- insumo producto de 1950 se alimentan al programa.

Dicha matriz se muestra en la figura (1), en ella podemos distinguir una submatriz que es la que nos muestra las -- relaciones entre las diferentes ramas de la producción nacional. Estas ramas productoras (primarias, secundarias y terciarias) - se identifican con letras minúsculas que van de la "a" a la - - "m".

Si tal matriz la leemos por columnas diríamos así: -- "Agricultura ("a") consumió 939 unidades (En este caso millones de pesos) de agricultura, una unidad de otras actividades primarias ("b"), 106 unidades de petróleo y carbón ("c"), étc."

Si la leyeramos por renglones diríamos: "Agricultura- vendió: 939 U. a agricultura, 3U. a otras actividades primarias, 4 U. a petróleo y carbón, etc".

La suma de lo que el sector agricultura vendió a cada uno de los otros sectores de la producción se denomina demanda- intermedia y se encuentra representada en la matriz en la co--- lumna titulada "Total de entregas a las ramas productoras". Enseguida se muestran las aportaciones del sector agricultura a - sectores de destino final tales como unidades familiares, go--- bierno, exportaciones, etc. La suma de estas aportaciones - -- constituyen la demanda final que sumada a la demanda intermedia nos da el producto bruto del sector agricultura (11357 U.). Los productos brutos para cada sector se muestran en la columna - - "Total general" y la suma de todos ellos constituyen el producto nacional bruto.

Presentamos enseguida la submatriz que muestra las relaciones intersectoriales y las demandas finales de cada sector- así como su producto bruto.

La forma de esta matriz coincide con la de la matriz - presentada en el inciso anterior, ó sea:

A partir de esta matriz se construye la matriz de coeficientes técnicos A(I,J), de la manera que se explica en esa -- sección, y la cual presentamos en la figura 3.

Finalmente, la matriz que ha de suministrarse como dato al programa, se presenta en la figura 4 y su obtención también - se explica en el inciso anterior.

Por supuesto hay que proporcionar también como dato al- programa el vector independiente, que es la demanda final supuesta, la cual se muestra en la fig. 5.

Cuadro 11. Matriz del inducto-producto para México, 1950
(Millones de pesos)

Sectores de origen (inducción) / Sectores de destino (producción)		Ramas productoras: Primarias: Agricultura	Primarias: Otras actividades primarias	Secundarias: Petróleo y carbón	Secundarias: Productos metálicos	Secundarias: Industria química	Secundarias: Industria alimenticia	Secundarias: Otras industrias de transformación	Secundarias: Energía eléctrica	Secundarias: Construcción	Terciarias: Transportes, etc.	Terciarias: Comercio	Terciarias: Alquileres	Terciarias: Otros servicios	Total de entregas a las ramas productoras	Sectores de destino final: Consumo: Unidades familiares (casas)	Consumo: Gobierno	Exterior (exportaciones)	Formación interna del capital: Capital fijo: Empresas	Capital fijo: Gobierno	Incremento de inventarios	Total general
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m								
Agricultura	a	939	3	4	12	156	2 142	749	-	3	8	14	-	17	4 027	5 702	9	1 208	54	1	358	11 357
Otras actividades primarias	b	1	1	29	22	4	10	62	13	5	3	-	-	1	147	15	-	20	-	-	−8	180
Petróleo y carbón	c	104	4	70	128	20	94	104	88	21	344	-	-	1	978	231	40	491	-	-	−20	1 640
Productos metálicos	d	14	6	9	471	18	55	148	26	326	88	66	-	117	1 544	673	25	1 431	491	32	21	4 017
Industria química	e	65	2	4	51	179	25	231	-	23	2	8	-	17	607	936	40	38	-	2	45	1 888
Industria alimenticia	f	140	-	3	2	23	949	9	-	-	3	9	-	10	1 156	5 443	1	484	-	-	65	7 131
Otras industrias de transformación	g	52	2	24	87	63	129	1 331	-	681	119	370	-	96	2 934	4 700	46	383	24	26	219	8 332
Energía eléctrica	h	29	3	12	82	17	65	111	20	-	10	102	-	10	459	130	10	-	-	-	-	599
Construcción	i	-	1	-	5	1	3	5	3	-	5	-	250	19	288	-	13	-	1 698	1 001	-	3 000
Transportes etc.	j	326	11	116	81	15	88	77	-	-	41	860	-	48	1 641	1 162	16	117	-	5	-	2 941
Comercio	k	233	9	52	240	154	577	786	35	243	127	138	-	157	2 773	6 739	16	787	338	5	-	10 679
Alquileres	l	1	2	10	27	10	42	83	6	8	16	188	-	65	492	2 049	5	-	-	3	-	2 543
Otros servicios	m	78	-	58	19	9	15	37	-	10	51	588	-	82	437	2 583	22	277	-	4	-	4 053
Gobierno		8	-	4	2	1	2	4	-	-	13	11	-	8	53	28	1	-	-	-	-	82
Exterior: Importaciones		113	6	191	407	274	424	541	40	419	139	112	-	197	2 863	1 465	64	4	1 082	6	35	5 535
Exterior: Servicios de turismo		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	−1 633	-	1 633	-	-	-	-
Utilización de capital interno: Depreciación		152	8	191	82	27	87	143	55	106	132	87	233	108	1 441	-	-	-	-	-	-	1 441
TOTAL DE BIENES Y SERVICIOS		2 283	58	749	1 724	851	4 691	4 419	284	1 825	1 121	2 331	505	587	22 130	33 561	312	6 011	3 687	1 085	719	45 307
Unidades familiares (casas): Sueldos, salarios, etc.		1 030	67	354	681	242	742	1 432	188	816	985	1 420	-	1 827	9 786	-	1 238	168	-	58	-	11 248
Unidades familiares (casas): Otros ingresos privados		7 225	51	277	1 135	402	1 318	2 201	105	313	805	5 681	1 881	1 142	23 444							
Gobierno: Impuestos		89	4	298	461	73	271	280	42	48	30	1 088	159	107	2 764							
Gobierno: Subsidios		-	-	-	-	-	−95	-	-	-	-	-	-	-	−99							
TOTAL GENERAL		11 357	180	1 640	4 017	1 888	7 131	8 332	399	3 000	2 941	10 678	2 543	4 053	58 229							

FIG. 1

	Agricultura	Otras Actividades Primarias	Petróleo y Carbón	Productos Métalicos	Industria Química	Industria Alimenticia	Otras Ind. de Transf.	Energía Eléctrica	Construcción	Transportes, étc	Comercio	Alquileres	Otros Servicios	Demanda Intermedia	Demanda Final	Producto Bruto
Agricultura	939	3	4	12	136	2142	749	--	3	8	14	---	17	4027	7330	11357
Otras Actividades Primarias	1	1	25	22	4	10	62	13	5	3	--	---	1	147	33	180
Petróleo y Carbón	106	4	70	128	20	94	104	86	21	344	--	---	1	978	702	1680
Productos Métalicos	14	6	9	471	18	55	148	26	326	88	66	---	117	1344	2673	4017
Industria Química	65	2	4	51	179	25	231	--	23	2	8	---	17	607	1061	1668
Industria Alimenticia	148	--	3	2	23	949	9	--	--	3	9	---	10	1156	5975	7131
Otras Inds. de Transformación	52	2	24	87	63	129	1331	--	661	119	370	---	96	2934	5398	8332
Energía Eléctrica	29	3	12	82	17	63	111	20	--	10	102	---	10	459	140	599
Construcción	--	1	--	3	1	3	3	3	--	5	--	250	19	288	2712	3000
Transportes, étc	326	11	114	81	15	68	77	--	--	41	860	---	48	1641	1300	2941
Comercio	253	9	52	248	158	577	786	35	243	127	138	---	167	2793	7905	10698
Alquileres	1	2	10	27	10	42	83	6	8	16	188	---	69	482	2061	2543
Otros Servicios	76	--	36	19	5	15	37	--	10	51	566	---	82	897	3186	4083

Producto Nal. Bruto... 58229

FIG. # 2

MATRIZ DE COEFICIENTES TECNICOS

0.08268	0.01666	0.00238	0.00298	0.08153	0.30037	0.08989	0.00000	0.00100	0.00272	0.00130	0.00000	0.00416
0.00008	0.00555	0.01488	0.00547	0.00239	0.00140	0.00744	0.02170	0.00166	0.00102	0.00000	0.00000	0.00024
0.00933	0.02222	0.04166	0.03186	0.01199	0.01318	0.01248	0.14357	0.00700	0.11696	0.00000	0.00000	0.00024
0.00123	0.03333	0.00535	0.11725	0.01074	0.00771	0.01776	0.04340	0.10866	0.02992	0.00616	0.00000	0.02065
0.00572	0.01111	0.00238	0.01269	0.10731	0.00350	0.02772	0.00000	0.00766	0.00068	0.00074	0.00000	0.00416
0.01303	0.0000	0.00178	0.00049	0.01378	0.13308	0.00108	0.00000	0.00000	0.00102	0.00084	0.00000	0.00244
0.00457	0.11111	0.01428	0.02165	0.03776	0.01809	0.15974	0.00000	0.22033	0.04046	0.03458	0.00000	0.02351
0.00255	0.01666	0.00714	0.02041	0.91019	0.00883	0.01332	0.03338	0.00000	0.00340	0.00953	0.00000	0.00244
0.00000	0.00555	0.00000	0.00074	0.00059	0.00042	0.00036	0.00500	0.00000	0.00170	0.00000	0.09830	0.00465
0.02870	0.06111	0.06785	0.02016	0.00899	0.00953	0.00924	0.00000	0.00000	0.01394	0.08038	0.00000	0.01175
0.02227	0.05000	0.03095	0.06173	0.09472	0.08091	0.09433	0.05893	0.08100	0.04318	0.012899	0.00000	0.04090
0.00008	0.01111	0.00595	0.06672	0.00599	0.00588	0.00996	0.01001	0.00266	0.00544	0.01752	0.00000	0.01689
0.00669	0.0000	0.02142	0.00472	0.00299	0.00210	0.00444	0.00000	0.00333	0.01734	0.05290	0.00000	0.02008

FIG. # 3

STATISTICS
PROGRAM LENGTH

.91732	-.01666	-.00238	-.00298	-.08153	-.30037	-.08989	0.00000	-.00100	-.00272	-.00130	0.00000	-.00416
-.00008	.9945	-.01488	-.00547	-.00239	-.00140	-.00744	-.02170	-.00166	-.00102	0.00000	0.00000	-.00024
-.00933	-.02222	.95834	-.03186	-.01199	-.01318	-.01248	-.14357	-.00700	-.11696	0.00000	0.00000	-.00024
-.00123	-.03333	-.00535	.88275	-.01079	-.00771	-.01776	-.04340	-.10866	-.02992	-.00616	0.00000	-.02865
-.00572	-.01111	-.00238	-.01269	.89269	-.00350	-.02772	0.00000	-.00766	-.00068	-.00074	0.00000	-.00416
-.01303	0.00000	-.00178	-.00049	-.01378	.86692	-.00108	0.00000	0.00000	-.00102	-.00084	0.00000	-.00244
-.00457	-.01111	-.01428	-.02165	-.03776	-.01809	.84026	0.00000	-.22033	-.04046	-.03458	0.00000	-.02351
-.00255	-.01666	-.00714	-.02041	-.01019	-.00883	-.01332	.96662	0.00000	-.00340	-.00953	0.00000	-.00244
0.00000	-.00555	0.00000	-.00074	-.00059	-.00042	-.00036	-.00500	1.00000	-.00170	0.00000	-.09830	-.00465
-.02870	-.06111	-.06785	-.02016	-.00899	-.00953	-.00924	0.00000	0.00000	.98606	-.08038	0.00000	-.01175
-.02227	-.05000	-.03095	-.06173	-.09472	-.08091	-.09433	-.05843	-.08100	-.04318	.98711	0.00000	-.04090
-.00008	-.01111	-.00595	-.00672	-.00599	-.00588	-.00996	-.01001	-.00266	-.00544	-.01757	1.00000	-.01689
-.00669	0.00000	-.02142	-.00472	-.00299	-.00210	-.00444	0.00000	-.00333	-.01734	-.05290	0.00000	.97992

FIG. # 4

7330.0000
33.0000
702.0000
2673.0000
1061.0000
5975.0000
5398.0000
140.0000
2712.0000
1300.0000
7905.0000
2061.0000
3186.0000

FIG. # 5

D I A G R A M A

D E

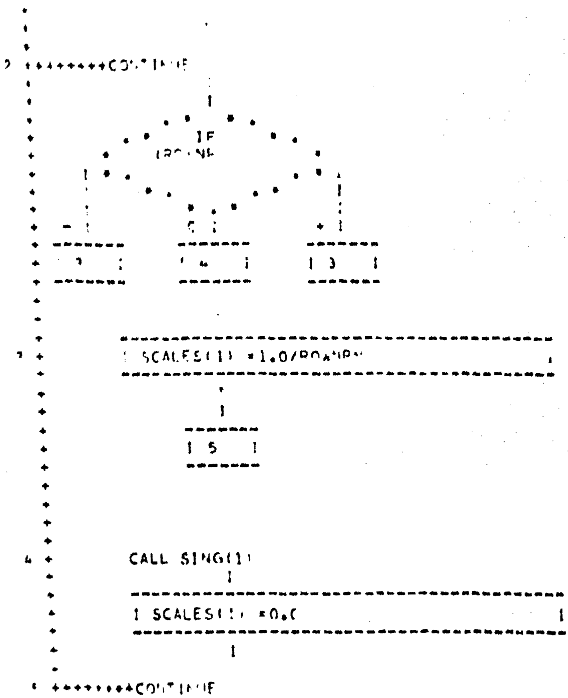
F L U J O

```
                  I
        ***READ(5,100)N
100           FORMAT(I3)
        ***READ(5,110) (B(I),I=1,N)
110           FORMAT(8F10.5)
        ***READ(5,110) ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
                        I
                +-------------+
               + DO            +
    ++++++++++     10           +
    +          + I=1,N         +
    +           +-------------+
    +                I
    +
 10 ++++++***WRITE(6,120)(A(I,J),J=1,N)
 120          FORMAT(5X,10F9.5//)
                        I
                +-------------+
               + DO            +
    ++++++++++     20           +
    +          + I=1,N         +
    +           +-------------+
    +                I
    +
 20 ++++++***WRITE(6,125) B(I)
 125          FORMAT(20X,F10.4)
 130          FORMAT(20X,7F10.5,//)
        ***WRITE(6,140)
 140          FORMAT(20X,*LA SOLUCION [illegible] DE ECUACIONES LINEALES ES*,//)
              CALL DECOMP(N,A,UL)
              CALL SOLVE(N,UL,B,X)
        ***WRITE(6,150)
 150          FORMAT(20X,*LA RESPUESTA SIN REFINAMIENTO*,//)
        ***WRITE(6,160)(I,X(I),I=1,N)
 160          FORMAT(3H X(I2,2H)=F16.4)
              CALL IMPRUV(N,A,UL,B,X,DIGITS)
        ***WRITE(6,170)
 170          FORMAT(///,20X,*LA RESPUESTA REFINADA ES*,//)
                  I
```

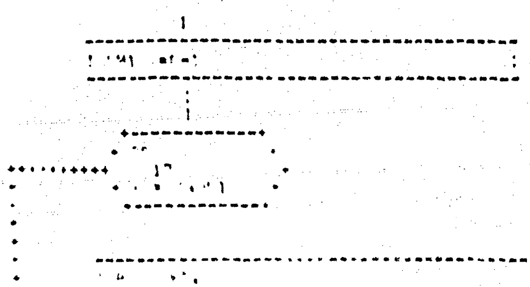
```
      1
*** RITE(6,160)(I,X(I),I=1,N)
***WRITE(6,120)DIGITS
180   FORMAT(///,20X,*LA RESPUESTA TIENE*,F10.2,*DIGITOS DE PRESICION*)
      CALL EXIT
END
```

```
              I

      SUBROUTINE DECOMP (NN,A,UL)

      DIMENSION A(13,13), SCALES(13), IPS(13), UL(13,13)

      COMMON IPS
                 I
      ----------------------------------------
      I N      =NN                           I
      ----------------------------------------
                 I



    INITIALIZE IPS, UL, AND SCALES

                 I
             +-------------+
             + DO          +
+++++++++++       5         +
+            + I=1,N       +
+            +-------------+
+                 I
+                 I
+      ----------------------------------------
+      I IPS(I) =I                            I
+      I ROWNRM =0.0                          I
+      ----------------------------------------
+                 I
+                 I
+            +-------------+
+            + DO          +
++++++++++++      2         +
+            + J = 1,N     +
+            +-------------+
+                 I
+                 I
+       ----------------------------------------
+       I UL(I,J) =A(I,J)                      I
+       ----------------------------------------
+                  I
+                  I
+                  I
+            .  .     .  .
+         .  .     IF      .  .
+        .(ROWNRM-ABS(UL(I,J)))
+      .  .                 .  .
+           .  .       .  .
+                  .
+    .                          .
+  -------      -------      -------
+        .            .           .
+  -------      -------      -------
+
+                  .
+       -------------------------------------------
```

```
1 +       I ROWNRM =ABS(UL(I,J))                    I
  +       -----------------------------------------
  +                   I
  +                   I
```
(CONTINUA EN PAGINA   2)



GAUSSIAN ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING



+ --
+ I

(CONTINUA EN PAGINA 3)

```
+
+                     I
+                     I
+              +------------+
+              + DO          +
++++++++++    11            +
+              + I = K,N     +
+              +------------+
+                     I
+                     I
+       -----------------------------------------
+       I IP    =IPS(I)                         I
+       I SIZE  =ABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)       I
+       -----------------------------------------
+                      I
+                      I
+                      I
+                 . *     * .
+             . *    IF      * .
+            *   (SIZE-BIG)     *
+        I * .               . * I
+        I     * .       . *     I
+        I         * . *         I
+      - I         0 I         + I
+     -------    -------    -------
+     I 11  I    I 11  I    I 10  I
+     -------    -------    -------
+
+                       I
+        -----------------------------------------
10 +     I BIG    =SIZE                          I
+        I IDXPIV =I                             I
+        -----------------------------------------
+                       I
+
11 ++++++++CONTINUE
 +                      I
 +                      I
 +                 . *     * .
 +             . *    IF      * .
 +            *      (BIG)       *
 +        I * .               . * I
 +        I     * .       . *     I
 +        I         * . *         I
 +      - I         0 I         + I
 +     -------    -------    -------
 +     I 12  I    I 12  I    I 13  I
 +     -------    -------    -------
 +
 +
12 +        CALL SING(2)
 +
```

(CONTINUA EN PAGINA 4)

```
 +
 +                 I
 +                 I
 +              -------
 +              I 17  I
 +              -------
 +
 +
 +
 +                 I
 +                 I
13 +          . *   * .
 +        . *   IF      * .
 +      *    (IDXPIV-K)    *
 +     I * .            . * I
 +     I     * .    . *     I
 +     I        * . *       I
 +   - I        0 I       + I
 +  -------  -------   -------
 +  I 14  I  I 15  I   I 14  I
 +  -------  -------   -------
 +
 +                I
 +        ---------------------------------------
14 +      I J      =IPS(K)                      I
 +        I IPS(K) =IPS(IDXPIV)                 I
 +        I IPS(IDXPIV) =J                      I
 +        ---------------------------------------
 +                I
 +        ---------------------------------------
15 +      I KP     =IPS(K)                      I
 +        I PIVOT=UL(KP,K)                      I
 +        I KP1    =K+1                         I
 +        ---------------------------------------
 +                 I
 +                 I
 +          +------------+
 +         + DO           +
 +++++++++       16        +
 +         + I = KP1,N    +
 +          +------------+
 +                 I
 +                 I
 +        ---------------------------------------
 +        I IP     =IPS(I)                      I
 +        I EM     =-UL(IP,K)/PIVOT             I
 +        I UL(IP,K) =-EM                       I
 +        ---------------------------------------
 +                 I
 +                 I
 +          +------------+
 +         + DO           +
 +++++++++       16        +
 +         + J = KP1,N    +
 +          +------------+
 +                 I
 +                 I
 +        ---------------------------------------
 +        I UL(IP,J) =UL(IP,J)+EM*...
```

```
+         ------------------------------------------
+                    I
+                    I
```
(CONTINUA EN PAGINA 5)

```
   +
   +               I
   +
   +   INNER LOOP. USE MACHINE LANGUAGE CODING IF COMPLILES
   +
   +
   +   DOES PRODUCE EFFICIENT CODE.
   +
   +
16 ++++++++CONTINUE
   +
17 ++++++++CONTINUF
                  I
        -----------------------------------------
        I KP    =IPS(N)                         I
        -----------------------------------------
                  I
                  I
                  I
              . *    * .
           . *   .IF      * .
         *    (UL(KP,N))      *
       I * .                . * I
       I     * .        . *     I
       I         * . *          I
     - I          0 I         + I
    -------     -------     -------
    I 19  I     I 18  I     I 19  I
    -------     -------     -------

 18         CALL SING(2)

 19      ***RETURN

END
```

```
        SUBROUTINE IMPRUV (NN, A, UL, B, X, DIGITS,

        DIMENSION A(13,13), UL(13,13),B(13), X(13), R(13), DX(13)

USES ABS(), AMAX1(), ALOG10()

        DOUBLE PRECISION SUM
                 I
        ------------------------------------------
        I N     =NN                              I
        ------------------------------------------
                 I


                 I
        ------------------------------------------
        I EPS   =1.0E-8                          I
        I ITMAX=16                               I
        ------------------------------------------
                 I

                 I
```

(CONTINUA EN PAGINA   2)

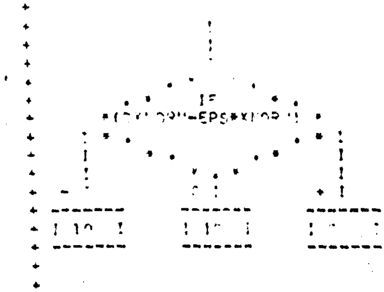
```
                I

   ** EPS AND ITMAX ARE MACHINE DEPENDENT ,***

                I
      ---------------------------------------
      I XNORM=0.0                           I
      ---------------------------------------
                I
                I
          +-------------+
         + DO            +
++++++++++      1         +
+        + I  =  1,N     +
+         +-------------+
+               I
+               I
+     ---------------------------------------
I ++++++++I XNORM=AMAX1(XNORM,ABS(X(I)))    I
      ---------------------------------------
                I
                I
                I
           . *     * .
       . *     IF      * .
      *      (XNORM)      *
   I *  .              .  * I
   I      * .      . *      I
   I          * . *         I
 - I           0 I          + I
 -------     -------     -------
 I 3   I     I 2   I     I 3   I
 -------     -------     -------

                I
      ---------------------------------------
2     I DIGITS =-ALOG10(EPS)                I
      ---------------------------------------
                I
                I
             -------
             I 10  I
             -------


                I
          +-------------+
3        + DO            +
++++++++++      9         +
+        + ITER=1,ITMAX  +
+         +-------------+
+               I
+               I
```

(CONTINUA EN PAGINA 3)

```
+
+                      I
+                      I
+                +-------------+
+               + DO            +
++++++++++            5          +
+               + I = 1,N       +
+                +-------------+
+                      I
+                      I
+            ---------------------------------------
-            I SUM   =0.0                          I
+            ---------------------------------------
+                      I
+                      I
+                +-------------+
+               + DO            +
++++++++++            4          +
+               + J = 1,N       +
+                +-------------+
+                      I
+                      I
+            ---------------------------------------
4 ++++++++++I SUM   =SUM+A(I,J)*X(J)               I
+            I SUM   =B(I)-SUM                      I
+            ---------------------------------------
+                      I
+            ---------------------------------------
5 ++++++++++I R(I)  =SUM                           I
+            ---------------------------------------
+                      I
+
+                      I
```

(CONTINUA EN PAGINA 4)

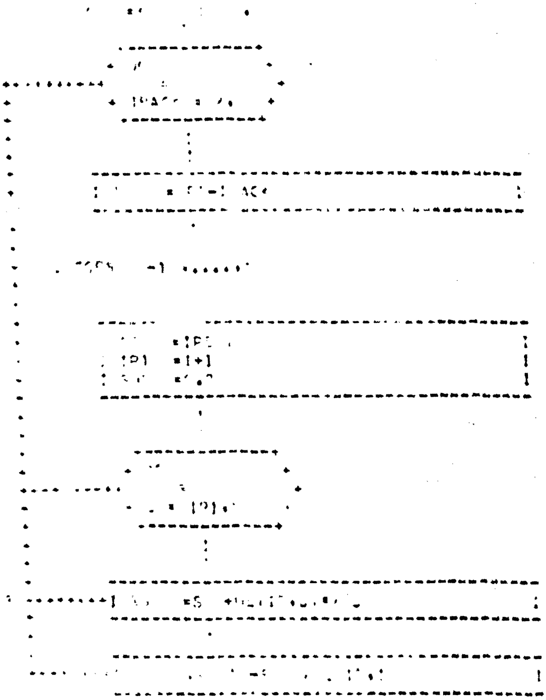
```
+
+               I
+
+    **IT IS ESSENTIAL THAT A(I,J)*X(J) YIELD A DOUBLE PRECISION
+
+
+   RESULT AND THAT THE ABOVE + AND - BE DOUBLE PRECISION. ***
+
+
+       CALL SOLVE (N,UL,R,DX)
+                I
+       -------------------------------------
+       I DXNORM =0.0                       I
+       -------------------------------------
+                I
+                I
+           +-----------+
+           + DO          +
++++++++++        6         +
+           + I = 1,N     +
+           +-----------+
+                I
+                I
+       -------------------------------------
+       I T     =X(I)                        I
+       I X(I)  =X(I)+DX(I)                  I
+       I DXNORM =AMAX1(DXNORM,ABS(X(I)-T))  I
+       -------------------------------------
+                I
+
6  ++++++++CONTINUE
+                I
+                I
+           .  .    .  .
+        .  .    IF      .  .
+       .     (ITER-1)       .
+     I  .  .            .  .  I
+     I     .         .  .     I
+     I          .  .  .       I
+  -  I           0 I       +  I
+  -------      -------    -------
+  I ?   I      I 7   I    I 8   I
+  -------      -------    -------
+
+                 I
+       ------------------------------------------
+       I DIGITS =-ALOG10(AMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
+       ------------------------------------------
+                 I
+                 I
+
   CONTINUA   PAGINA   
```




```
9 ++++++++CONTINUE

      ITERATION DID NOT CONVERGE

         CALL SIM[illegible](3)

10       ***RETURN

END
```

```
SUBROUTINE SOLVE (NN,UL,B,X)

DIMENSION UL(13,13), B(13), X(13), IPS(13)

COMMON IPS
             I
 --------------------------------------------
 I N     =NN                                I
 I NP1   =N+1                               I
 --------------------------------------------
             I



             I
 --------------------------------------------
 I IP    =IPS(1)                            I
 I X(1)  =B(IP)                             I
 --------------------------------------------
             I
             I
        +------------+
       + DO           +
++++++++++   2         +
+      + I = 2,N      +
+       +------------+
+            I
+            I
+   --------------------------------------------
+   I IP    =IPS(I)                            I
+   I IM1   =I-1                               I
+   I SUM   =0.0                               I
+   --------------------------------------------
+            I
+            I
+        +------------+
+       + DO           +
+++++++++   1           +
+       + J = 1,IM1    +
+        +------------+
+            I
+            I
+   --------------------------------------------
1 ++++++++I SUM    =SUM+ UL(IP,J)*X(J)         I
+   --------------------------------------------
+            I
+   --------------------------------------------
2 ++++++++I X(I)   =B(IP) -SUM                 I
    --------------------------------------------



    --------------------------------------------
```

I
(CONTINUA EN PAGINA 2)



```
      SUBROUTINE SING (IWHY)
11    FORMAT(35H0MATRIX WITH ZERO ROW IN DECOMPOSE.)
12    FORMAT(52H0SINGULAR MATRIX IN DECOMPOSE. ZERO DIVIDE IN SOLVE.)
13    FORMAT(53H0NO CONVERGENCE IN IMPRUV. MATRIX IS NEARLY SINGULAR.)
                  I
      ----------------------------------------
      I NOUT =6                              I
      ----------------------------------------
                  I
   NOUT = STANDARD OUTPUT UNIT

        GO TO (1,2,3),IWHY
1    ***WRITE (NOUT,11)
              I
           -------
           I 10  I
           -------

2    ***WRITE (NOUT,12)
              I
           -------
           I 10  I
           -------

3    ***WRITE (NOUT,13)
10   ***RETURN
END
```

P R O G R A M A

```
      PROGRAM JDAKA(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
C PROGRAMA PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
      DIMENSION A(13,13),UL(13,13),IPS(13),B(13),X(13)
      READ(5,100)N
  100 FORMAT(I3)
      READ(5,110) (B(I),I=1,N)
  110 FORMAT(8F10.5)
      READ(5,110) ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
      DO 10 I=1,N
   10 WRITE(6,120)(A(I,J),J=1,N)
  120 FORMAT(5X,15F8.5//)
      DO 20 I=1,N
   20 WRITE(6,125) B(I)
  125 FORMAT(20X,F10.4)
  130 FORMAT(20X,3F10.5,//)
      WRITE(6,140)
  140 FORMAT(20X,*LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES ES*,//)
      CALL DECOMP(N,A,UL)
      CALL SOLVE(N,UL,B,X)
      WRITE(6,150)
  150 FORMAT(20X,*LA RESPUESTA SIN REFINAMIENTO*,//)
      WRITE(6,160)(I,X(I),I=1,N)
  160 FORMAT(3H X(I2,2H)=F16.4)
      CALL IMPROV(N,A,UL,B,X,DIGITS)
      WRITE(6,170)
  170 FORMAT(///,20X,*LA RESPUESTA REFINADA ES*,//)
      WRITE(6,160)(I,X(I),I=1,N)
      WRITE(6,180)DIGITS
  180 FORMAT(///,20X,*LA RESPUESTA TIENE*,F10.2,*DIGITOS DE PRESICION*)
      CALL EXIT
      END
```

```
      SUBROUTINE DECOMP (NN,A,UL)
      DIMENSION A(13,13), SCALES(13), IPS(13), UL(13,13)
      COMMON IPS
      N=NN
C
C     INITIALIZE IPS, UL, AND SCALES
      DO 5 I=1,N
      IPS(I) = I
      ROWNRM = 0.0
      DO 2 J=1,N
      UL(I,J) = A(I,J)
      IF(ROWNRM-ABS(UL(I,J))) 1,2,2
    1 ROWNRM = ABS(UL(I,J))
    2 CONTINUE
      IF (ROWNRM) 3,4,3
    3 SCALES(I) = 1.0/ROWNRM
      GO TO 5
    4 CALL SING(1)
      SCALES(I) = 0.0
    5 CONTINUE
C
C     GAUSSIAN ELIMINATION WITH PARTIAL PIVOTING
      NM1 = N-1
      DO 17 K = 1,NM1
      BIG = 0.0
      DO 11 I = K,N
      IP = IPS(I)
      SIZE = ABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)
      IF (SIZE-BIG) 11,11,10
   10 BIG = SIZE
      IDXPIV = I
   11 CONTINUE
      IF (BIG) 13,12,13
   12 CALL SING(2)
      GO TO 17
   13 IF (IDXPIV-K) 14,15,14
   14 J = IPS(K)
      IPS(K) = IPS(IDXPIV)
      IPS(IDXPIV) = J
   15 KP = IPS(K)
      PIVOT = UL(KP,K)
      KP1 = K+1
      DO 16 I = KP1,N
      IP = IPS(I)
      EM = -UL(IP,K)/PIVOT
      UL(IP,K) = -EM
      DO 16 J = KP1,N
      UL(IP,J) = UL(IP,J) + EM*UL(KP,J)
C     INNER LOOP. USE MACHINE LANGUAGE CODING IF COMPILER
C     DOES NOT PRODUCE EFFICIENT CODE.
   16 CONTINUE
   17 CONTINUE
      KP = IPS(N)
      IF (UL(KP,N)) 19,18,19
   18 CALL SING(2)
   19 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE IMPROV (NN, A, UL, B, X, DIGITS)
      DIMENSION A(13,13), UL(13,13),B(13), X(13), R(13), DX(13)
C     USES ABS(), AMAX1(), ALOG10()
      DOUBLE PRECISION SUM
      N = NN
C
      EPS = 1.0E-8
      ITMAX = 16
C     *** EPS AND ITMAX ARE MACHINE DEPENDENT ,***
      XNORM = 0.0
      DO 1 I = 1,N
    1 XNORM = AMAX1(XNORM,ABS(X(I)))
      IF (XNORM) 3,2,3
    2 DIGITS = -ALOG10(EPS)
      GO TO 10
C
    3 DO 9 ITER=1,ITMAX
      DO 5 I = 1,N
      SUM = 0.0
      DO 4 J = 1,N
    4 SUM = SUM + A(I,J)*X(J)
      SUM = B(I) - SUM
    5 R(I) = SUM
C     ***IT IS ESSENTIAL THAT A(I,J)*X(J) YIELD A DOUBLE PRECISION
C     RESULT AND THAT THE ABOVE + AND - BE DOUBLE PRECISION.***
      CALL SOLVE (N,UL,R,DX)
      DXNORM = 0.0
      DO 6 I = 1,N
      T = X(I)
      X(I) = X(I)+ DX(I)
      DXNORM = AMAX1(DXNORM,ABS(X(I)-T))
    6 CONTINUE
      IF (ITER-1) 8,7,8
    7 DIGITS = -ALOG10(AMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
    8 IF (DXNORM-EPS*XNORM)10,10,9
    9 CONTINUE
C     ITERATION DID NOT CONVERGE
      CALL SING(3)
   10 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SOLVE (NN,UL,B,X)
      DIMENSION UL(13,13), B(13), X(13), IPS(13)
      COMMON IPS
      N = NN
      NP1 = N+1
C
      IP = IPS(1)
      X(1) = B(IP)
      DO 2 I = 2,N
      IP = IPS(I)
      IM1 = I-1
      SUM = 0.0
      DO 1 J = 1,IM1
    1 SUM = SUM + UL(IP,J)*X(J)
    2 X(I) = B(IP) - SUM
C
      IP = IPS(N)
      X(N) = X(N)/UL(IP,N)
      DO 4 IBACK = 2,N
      I = NP1-IBACK
C     I GOES (N-1),.....,1
      IP = IPS(I)
      IP1 = I +1
      SUM = 0.0
      DO 3 J = IP1,N
    3 SUM = SUM + UL(IP,J)*X(J)
    4 X(I) = (X(I)-SUM)/UL(IP,I)
      RETURN
      END
```

```
SUBROUTINE SING          73/173  OPT=1                          FTN 4.6+439        05/04/78  19.21.54        PAGE

      1                SUBROUTINE SING (IWHY)
                    11 FORMAT(54H0MATRIX WITH ZERO ROW IN DECOMPOSE.)
                    12 FORMAT(54H0SINGULAR MATRIX IN DECOMPOSE. ZERO DIVIDE IN SOLVE.)
                    13 FORMAT(56H0NO CONVERGENCE IN IMPRUV. MATRIX IS NEARLY SINGULAR.)
      5                NOUT = 6
                       NOUT = STANDARD OUTPUT UNIT
                       GO TO (1,2,3),IWHY
                     1 WRITE (NOUT,11)
                       GO TO 10
     10              2 WRITE (NOUT,12)
                       GO TO 10
                     3 WRITE (NOUT,13)
                    10 RETURN
                       END

CARD NR. SEVERITY  DETAILS    DIAGNOSIS OF PROBLEM

      7      I                AN IF STATEMENT MAY BE MORE EFFICIENT THAN A 2 OR 3 BRANCH COMPUTED GO TO STATEMENT.

          SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ENTRY POINTS
    3   SING

VARIABLES     SN   TYPE          RELOCATION
    0   IWHY       INTEGER         F.P.                 63   NOUT        INTEGER

STATEMENT LABELS
    16   1                                21   2                                 24   3
    26  10                                27  11        FMT                      35  12        FMT
    43  13        FMT

STATISTICS
  PROGRAM LENGTH                       64B      52
 .91732 -.01666 -.00230 -.00290 -.04153 -.30037 -.08904 0.00000 -.00100 -.00272 -.00180 0.00000 -.00416
-.03868  .00445 -.01800 -.00567 -.00259 -.00140 -.00744 -.02170 -.00166 -.00152 0.00000 0.00000 -.00024
-.00913 -.02220  .06534 -.03186 -.01194 -.01318 -.01248 -.14357 -.00740 -.11696 0.00000 0.00000 -.00024
-.00123 -.01111 -.00570  .88025 -.01079 -.00771 -.01770 -.04340 -.10064 -.02492 -.00616 0.00000 -.02865
-.03572 -.01111 -.00754 -.01286  .46264 -.00390 -.02773 0.00000 -.05764 -.00068 -.00074 0.00000 -.00416
-.01103 0.00000 -.00170 -.00069 -.01378  .06692 -.00100 0.00000 0.00000 -.00102 -.00084 0.00000 -.00244
-.00457 -.01111 -.01420 -.02145 -.03770 -.01809  .84026 0.00000 -.22033 -.04940 -.07950 0.00000 -.02351
-.04759 -.01666 -.00714 -.01042 -.07774 -.00683 -.01132  .70071 0.00000 -.00159 -.00953 0.00000 -.00244
-.00004 -.00556 0.00030 -.00074 -.00054 -.00042 -.00036 -.00500 1.00000 -.00170 0.00000 -.00830 -.00455
-.02070 -.00611 -.04705 -.02010 -.00609 -.00963 -.00924 0.00000 0.00000  .09600 -.04538 0.00000 -.01175
-.07227 -.05000 -.07609 -.06173 -.09472 -.00591 -.09433 -.05643 -.00108 -.04338  .98111 0.00000 -.04096
-.00000 -.01111 -.00595  .00672 -.00599 -.00566 -.00996 -.01001 -.00766 -.00944 -.81757 1.00000 -.01689
-.00069 0.00000 -.01140 -.00412 -.00299 -.00210 -.00444 0.00000 -.00133 -.00134 -.05295 0.00000  .97992
                 7110.0000
                   11.0000
                  102.0000
                 2671.0000
                 1061.0000
                  [illegible]
                  [illegible]
                  140.[illegible]
```

```
2712.0000
1100.0000
7404.0000
2061.0000
3186.0000
LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES ES

LA RESPUESTA SIN REFINAMIENTO

X( 1)=      11356.5283
X( 2)=        179.7696
X( 3)=       1679.6960
X( 4)=       4816.3827
X( 5)=       1667.6325
X( 6)=       7130.4284
X( 7)=       8110.9966
X( 8)=        598.7393
X( 9)=       2991.9823
X(10)=       2940.5917
X(11)=      10697.2519
X(12)=       2522.6571
X(13)=       4082.7003

LA RESPUESTA REFINADA ES

X( 1)=      11356.5283
X( 2)=        179.7696
X( 3)=       1679.6960
X( 4)=       4816.3827
X( 5)=       1667.6325
X( 6)=       7130.4284
X( 7)=       8330.4966
X( 8)=        598.7393
X( 9)=       2991.9823
X(10)=       2940.5917
X(11)=      10697.2519
X(12)=       2522.6571
X(13)=       4082.7003

LA RESPUESTA TIENE   1 8 DIGITOS DE PRECISION
```

```
19.21.52.EXPZAG  ...  ZAG
19.21.52.IP  00001000 WORDS - FILE INPUT  , DC 00
19.21.52.COPY.
19.21.52.          FAC ING     1008 *CECAFI*57170*
19.21.54.FTN.
19.21.55.FILE OPENED - LGO
19.21.55.FILE OPENED - COMPS
19.22.53.FILE OPENED - OUTPUT
19.22.41.      2.949 CP SECONDS COMPILATION TIME
19.22.41.MAP OFF.
19.22.44.LGO.
19.22.55. EXIT
19.22.55.      .347 CP SECONDS EXECUTION TIME
19.22.55.OP  00002432 WORDS - FILE OUTPUT , DC 40
19.22.55.MS     3584 WORDS (    14336 MAX USED)
19.22.55.CPA       4.912 SEC.         4.912 ADJ.
19.22.55.IO        2.980 SEC.         2.980 ADJ.
19.22.55.CM     145,626 KWS.          8.888 ADJ.
19.22.55.SS                          16.700
19.22.55.PP       17.383 SEC.     DATE 05/24/77
19.22.55.EJ  END OF JOB, AR
```

137

FACULTAD DE INGENIERIA

CAPITULO VII

CAPTACION DE DATOS PARA ORGANIZARLOS EN FORMA MATRICIAL

Habiamos dicho que la captación de estos datos está enfocada a investigar los Insumos requeridos por la Compañía de Luz y Fuerza del Centro para realizar su función, así como el valor que se incorpora a dichos insumos para llevar a cabo el proceso productivo, es decir, el Valor Agregado.

Para facilitar el trabajo, esta captación se decidió hacerla para cada una de las Gerencias que componen la Compañía en estudio. Desafortunadamente, este plan de trabajo no se llevó totalmente a cabo, debido a que no tuvimos facilidad al acceso de datos de todas las Gerencias.

Los únicos datos que se pudieron investigar, fueron los correspondientes a la Gerencia Comercial. Lo anterior es muy importante, ya que sin el total de los datos, no podemos Estructurar la Matríz de Insumo-Producto de la Empresa en estudio que era nuestro principal objetivo al iniciar este trabajo.

Ahora bién, teniendo los datos correspondientes a la Gerencia Comercial, buscamos darles utilidad. Así que la información obtenida la ordenamos en forma matricial sin llegar a constituir la Matríz de Insumo Producto; hacemos un análisis de costos de dicha Gerencia y con los mismos datos obtenemos el Costo Comercial del KWH por tarifa, correspondiente a las ventas de energía de la Compañía de Luz.

FUNCIONES DE LA GERENCIA COMERCIAL

La Gerencia Comercial está integrada por cuatro Sugerencias y una Oficialía Mayor y se encarga de las relaciones -- directas con todos los consumidores de energía eléctrica, en la zona que sirve la empresa.

En las dependencias de la Gerencia Comercial se atienden los siguientes aspectos:

Celebración de contratos de nergía eléctrica

Conexiones y desconexiones

Lectura de medidores

Cobranza a consumidores

Cancelación de contratos

Aclaraciones sobre adeudos y consumos

Quejas acerca del servicio

Mantenimiento de las instalaciones de servicio

Electrificación de unidades habitacionales en el lado de alimentación de baja tensión

Asignación y cobro de cooperaciones por nuevos servicios (solicitudes de presupuesto).

Recuperación de adeudos de clientes morosos.

Atención de solicitudes de servicios nuevos o ampliaciones.

Cobro del Régimen de Cuotas por contratación.

Cobro de reconexiones.

Adiestramiento del personal operativo y administrativo

Estadística de consumidores

Estudios tarifarios

Análisis de costos

Interpretación de tarifas

Contratos Especiales

Relaciones con público y autoridades en todo lo relacionado con los servicios y la venta de energía eléctrica.

Relaciones del personal de la Gerencia que suma más de 4,000 trabajadores, siguiendo las directrices, en material laboral, del Departamento de Trabajo de la Gerencia de Personal y aplicando las disposiciones de la ley Federal del Trabajo, del Contrato Colectivo y Reglamento Interior de Trabajo, convenios departamentales y definiciones de labores de los puestos.

Las ramas en que se divide la Gerencia Comercial son:

Subgerencia Comercial de Sucursales

Subgerencia Comercial de Agencias Foráneas

Subgerencia Comercial de Cuentas Especiales

Subgerencia Comercial de Estudios Económicos y Oficialía Mayor.

Subgerencia Comercial de Sucursales.

La Subgerencia Comercial de Sucursales consta de dos - secciones: la Sección de Sucursales y la Sección de Conexiones - bajo la dirección de un Subgerente Comercial y un Jefe de Sucursales.

La Sección de Sucursales tiene a su cargo todas las -- funciones para la atención de los servicios ordinarios, o sean - los que se suministran en baja tensión dentro del área metropolitana, es decir, la Ciudad de México y parte del Estado de México, en los extremos oriental y occidental del Distrito Federal.

Para la atención de estos servicios, existen 28 sucursales en el área mencionada anteriormente, localizadas en forma conveniente en toda el área y cuya distribución se modifica de - acuerdo con el crecimiento del número de usuarios. En cada una- de ellas se revisan y concentran los documentos básicos para la- facturación y contabilidad de servicios, documentación que se -- envía para su proceso al Departamento de Máquinas Electrónicas y Procedimientos de la Subdirección general.

La Sección de Conexiones se encarga de la conexión y - desconexión de los servicios, instalación de concentraciones de- medidores en unidades habitacionales y edificios y de la conservación de las líneas de suministro y equipo de la empresa.

Subgerencia Comercial de Agencias Foráneas.

La Subgerencia Comercial de Agencias Foráneas consta -

de tres secciones: Sección de Oficinas Centrales, Sección de -- Agencias Foráneas y Sección de Conexiones, bajo la dirección de un Subgerente Comercial y un Jefe de Agencias Foráneas.

La Sección de Agencias Foráneas atiende todo lo relacionado con los servicios suministrados a los consumidores ordinarios, o sean aquellos que se suministran en baja tensión, en-las zonas no atendidas por las sucursales y también se encarga-parcialmente de los servicios especiales y de gobierno que se - suministran dentro del área que tiene asignada. Esto se efec-- túa por medio de 42 agencias foráneas, 12 oficinas auxiliares - de contratos, lecturas y cobros y las oficinas que atienden la-parte comercial de los Departamentos de Toluca y Pachuca.

Esta Subgerencia atiende a los consumidores en más de cien localidades entre las que se encuentran algunas ciudades - como las de Cuernavaca, Toluca y Pachuca, pueblos y otros cen-- tros de población.

La administración de las agencias foráneas se efec--- túa desde las oficinas centrales en donde además de concentran-y revisan los datos básicos para la contabilidad de consumido-- res y facturación de servicios que se procesan mecánicamente -- por el Departamento de Máquinas Electrónicas y Procedimientos -- dependiente de la Subdirección General.

La Sección de Conexiones tiene a su cargo la conexión y desconexión de los servicios y el mantenimiento de las líneas de suministro.

Subgerencia Comercial de Cuentas Especiales.

La Subgerencia Comercial de Cuentas Especiales consta de dos secciones: la Sección de Cuentas Especiales y la Sección de Presupuestos a Consumidores, bajo la dirección de un Subgerente Comercial y dos Jefes de Sección.

En esta Subgerencia Comercial se realizan las labores tendientes a la atención de los servicios de todos aquellos usuarios a quienes la Compañía estima que debe dar un tratamiento especial por presentar características diferentes a la mayoría ya sea por sus aspectos técnico, comercial o de relaciones públicas. En este grupo se encuentran incluídos los servicios importantes en baja tensión, todos los servicios que se suministran en alta tensión industriales y comerciales y todos los servicios que se suministran al gobierno y a las empresas y organismos descentralizados.

La sección de Presupuestos a Consumidores tiene a su cargo la tramitación de solicitudes de presupuestos, gestiones de cobro, de cooperciones, contratos, conexiones y desconexiones y todo lo relacionado con los usuarios en este aspecto.

Los Grupos de Conexiones que pertenecen a esta Sección se encargan de los trabajos de conexión, desconexión, matenimiento y operación de las líneas de suministro y equipos de medición en el Distrito Federal, en la jurisdicción de las

Secciones de Tlalnepantla, Santa Clara y Xochimilco del Departamento Foráneo de la Gerencia de Distribución y Transmisión y otras zonas aledañas al Distrito Federal.

La conexión y desconexión de servicios de Cuentas Especiales así como la conservación de las líneas de conexión y los equipos de medición en las zonas no atendidas por los grupos de conexiones anteriores, son atendidas por las Gerencias de Distribución y Transmisión y Producción de la Compañía.

La Sección de Cuentas Especiales se encarga de los trabajos de toma de lecturas, cobranza, facturación y de la elaboración de los datos básicos para la contabilidad que se ejecuta en forma mecanizada en el Departamento de Máquinas Electrónicas y Procedimientos.

Subgerencia Comercial de Estudios Económicos.

Esta Subgerencia es la auxiliar directa del Gerente Comercial en todos los asuntos tarifarios y comerciales y la apoya en diversos aspectos relacionados con las otras tres subgerencias. En algunas ocasiones, como en las revisiones bianuales del Contrato Colectivo, auxilia también a la Gerencia de Personal con los cálculos requeridos para las discusiones con el Sindicato Mexicano de Electricistas.

La Subgerencia Comercial de Estudios Económicos está constituída por dos secciones: La Sección de Tarifas y la Sección de Estadística, bajo la dirección de un Subgerente Comercial y dos Jefes de Sección.

La Sección de Tarifas ejecuta todos los trabajos que-tienen relación con las tarifas de la Compañía, tales como análisis del comportamiento de las tarifas vigentes, análisis de -costos, estudio de nuevas tarifas, solicitudes de cambios de tarifas, solución de consultas y resolución de los problemas que-surgen en relación con la interpretación y aplicación de las tarifas, comparación de las tarifas de la Compañía con las de - -empresas extranjeras y todos los estudios relacionados con este aspecto.

Se encarga de las relaciones en el aspecto tarifario-y de consumidores con las autoridades reguladoras y otras dependencias gubernamentales que requieren informaciones estadísti--cas y de los trámites que por ley debe efectuar la Compañía para cumplir con la legislación vigente en materia tarifaria.

Esta sección mantiene estadísticas de carácter gene--ral que utiliza para los estudios que tiene encargados tales como índice de costos, tarifas en otros países, generación en la-República, etc.

La Sección de Estadística tiene a su cargo la recopilación de datos y elaboración de las estadísticas de consumidores y ventas de energía eléctrica en Kwh e importe, tanto para-uso interno, como en relación con las autoridades y entidades -reguladoras. Igualmente elabora informes de recaudación consolidados y recopila información de los importes de los derechos-por inspección a instalaciones eléctricas para la Secretaría de Industria y Comercio. Asímismo concilia las cifras del Libro - Mayor contra las del Auxiliar de las Cuentas de Consumidores.

Oficialía Mayor

La Oficialía Mayor de la Gerencia Comercial consta de tres secciones: Sección Auxiliar de la Oficialía Mayor, Sección de Relaciones Públicas y Sección de Recuperación de Adeudos, bajo la dirección de un Oficial Mayor y tres Jefes de sección.

La Sección Auxiliar maneja los movimientos del personal que labora en todas las dependencias de la Gerencia Comercial incluyendo sustituciones por ausencias y enfermedades de - los trabajadores, hace la programación de vacaciones y los exámenes a los nuevos candidatos y sirve de enlace en todos los -- aspectos relacionados con el personal entre la Gerencia Comercial y la Contraloría General y los departamentos de Trabajo, - Personal y Máquinas Electrónicas y Procedimientos.

La Sección de Relaciones Públicas, independientemente de que en las Sucursales, Agencias Foráneas y Cuentas especiales se atiende a los consumidores en todo lo relativo a sus servicios, en casos especiales atiende las quejas de los consumidores tales como inconformidades en su facturación, reparto de -- avisos de adeudo, toma de lecturas, desperfectos en los equipos, interrupciones o variaciones de voltaje, fraudes o uso ilegal - de energía eléctrica, visitando a los clientes cuando la quejalo amérita después de hacer la correspondiente investigación y practicando también visitas periódicas a las industrias importantes. Esta sección coordina la atención al público en las demás dependencias de la Gerencia Comercial.

La Sección de Recuperación de Adeudos tiene como principales objetivos: el cobro de cooperaciones por electrificación y redes de alumbrado público, la recuperación de adeudos, foliación y refoliación y atención directa de los consumidores de energía eléctica. Además, esta Sección de Recuperación de Adeudos, por medio de la Oficina de Enlace con Bancos, concentra y revisa los pagos de los usuarios por conducto de estas instituciones.

CAPTACION DE DATOS CORRESPONDIENTES A LA GERENCIA COMERCIAL

La Gerencia Comercial como ya se mencionó, está integrado por cuatro Subgerencias y una Oficialía Mayor, y se encarga de las relaciones directas con todos los consumidores de energía eléctrica, en las zonas que sirve la empresa.

Para hacer un análisis de costos más completo y a la vez facilitar el trabajo de captación, se decidió hacer esta en forma independiente para cada una de las áreas que componen la Gerencia Comercial.

Como la Compañía tiene clasificados los servicios que atiende en Servicios Ordinarios y Servicios Especiales y que para su facturación los clasifican dentro de dos grupos de cuentas que son: Cuentas ordinarias y Cuentas Especiales; los datos de esta Gerencia se obtuvieron desglosados en estos dos grupos. Como veremos más adelante este desglose servirá para calcular el Costo Comercial del KWH para cada una de las tarifas.

A continuación se dará una descripción de los servicios que están clasificados dentro de cada grupo.

Cuentas Ordinarias:

Doméstico

Doméstico para localidades con clima muy cálido.

General hasta 40 KW de carga conectada.

Para molinos de nixtamal.

Temporal (exclusivamente donde y cuando la capacidad de las instalaciones del suministrador lo permitan).

Estos servicios se suministran en baja tensión y se facturan bimestralmente.

Cuentas Especiales:

General para más de 40 KW de carga conectada (en baja tensión).

Alumbrado Público.

Bobeo de aguas potables o negras.

General en alta tensión con demanda de 20 KW ó más -

Bombeo de agua para riego agrícola.

En alta tensión para reventa.

En alta tensión para minas.

General para 5000 KW ó más, de demanda contratada a - tensiones de 66 Kv. o superiores.

Servicios de Gobierno.

Estos servicios se suministran en baja y alta tensión y se facturan mensualmente.

Continuando con la captación, los datos que se obtu-- vieron son los que componen los Insumos y el Valor Agregado de la Gerencia Comercial.

OBTENSION DE LOS INSUMOS

Como Insumos requeridos por cada Subgerencia y la - - Oficialía Mayor, para llevar a cabo su función, se consideraron los Materiales y el Servicio de Máquinas Electronicas y Procedimientos.

Para conocer el costo de los Insumos por consumo de materiales, lo primero que se hizo fue investigar que materiales y que cantidad de ellos fueron consumidos por cada una de las Subgerencias y la Oficialía Mayor en el año 1977. Esto se logró recurriendo al listado de Relación de Materiales consumidos por la Gerencia Comercial en el año 1977; este listado describe los materiales y al mismo tiempo, indica la cantidad consumida por cada área. Terminada esta parte, lo que faltaba -- era conocer los precios unitarios de cada material, dichos precios se sacaron del Inventario de Almacén General de la - - -- Compañía.

Como los datos investigados son del año 1977, estos se actualizaron al año 1978 para poder utilizarlos, ya que el gasto por consumo de materiales de la Gerencia Comercial aumenta en cada año, este aumento se debe a dos razones que son:

El crecimiento de consumidores

La inflación.

El crecimiento de consumidores trae como consecuencia un aumento en la cantidad de materiales consumidos y la inflación un aumento en los precios de los mismos, por lo tanto, el gasto investigado deberá aumentarse en proporción al índice -- por crecimiento de consumidores y al índice de inflación para ser actualizados.

El índice por crecimiento de consumidores se calculó tomando el cociente de la diferencia del número de consumidores de 1978 con los de 1977 entre el número de consumidores de este último periodo, es decir:

$$\text{Indice por crecimiento de consumidores} = \frac{\text{No. de Consumidores de 1978} - \text{No. de Consumidores de 1977.}}{\text{No. de consumidores de 1977}}$$

$$IPCC = \frac{2\ 437\ 879 - 2\ 280\ 120}{2\ 280\ 120}$$

$$IPCC = 0.069$$

En por ciento: Indice por crecimiento de consumidores = 6.9%

El índice por inflación se calculó por medio del índice de precios, obtenido del Boletin Informativo del Banco de México, denominado "Indicadores Económicos", dicho Boletín es una publicación cuyo objetivo es poner a la disposición del público, en forma sistemática, información amplia y oportuna sobre la economía del país, este cálculo se hizo como sigue:

$$\text{Indice por inflación} = \frac{334.1 - 284}{284}$$

Indice por inflación = 0.1764

En por ciento: Indice por infalción = 17.64%

Con los índices calculados se actualizaron los datos al año - --

1978.

A continuación daremos la lista ya actualizada de gas tos por materiales consumidos por las Subgerencias y la Oficialía Mayor.

INSUMOS (MATERIALES)	SUCURSALES	AGENCIA FORANEAS	ESTUDIOS ECONOM.	CUENTAS ESPE.	OFICIALIA MAYOR
Cuero, piel y sus Manufacturas excep to calzado	136.61	53.22		14.75	
Papelería	28373.99	22637.31	142.47	3119.49	1859.75
Otros Papeles	103.20	53.03		7.00	
Calzado de Hule excepto dielectrico	2.49	1.66		0.02	
Productos elaborados con textiles	482.63	143.69		60.23	
Cables y alambres conductores	1226.70	2074.00		284.67	
Articulos de limpieza	298.30	215.43		23.64	
Equipos y Articulos de seguridad	330.39	202.15		38.54	
Herramientas de mano y accesorios	1106.89	670.55		220.70	28.73
Lubricantes y fluidos	0.53	1.26		0.11	
Produc. y Materiales eléc.diversos	2142.59	1570.03		1618.98	
Otros Materiales	2.59	24.95		2.99	
Refac. y partes para vehiculos automotores		65.39			
Ferretería	4368.43	1449.23		503.07	
Pinturas	12.30	7.38		0.20	
Otros articulos	47.29	41.17		16.40	
TOTAL DE MATERIALES	38634.93	29210.45	142.47	5874.79	1888.48

Nota: Todas las cantidades se dan en Miles de Pesos

Como la lista original de materiales es muy extensa, estos se agruparon de acuerdo a la semejanza de sus características, es esta la razón por la que unicamente aparecen dieciseis tipos de materiales.

El gasto por el servicio de Máquinas Electrónicas y Procedimientos que como ya dijimos, participa como insumo de la Gerencia Comercial, se calculó de acuerdo al presupuesto por programa de 1978, estos datos obtenidos para cada Area son los siguientes:

INSUMOS	SUCURSALES	AGENCIAS FORANEAS	ESTUDIOS ECONOM.	CUENTAS ESPE.	OFICIALIA MAYOR
Máquinas Electrónicas y Procedimientos	20714.29	11195.02		299.03	

De lo anterior podemos observar que este servicio es utilizado únicamente por las Subgerencias que realizan la función de facturación. Más adelante se hará el desglose de los Insumos en el grupo de cuentas ordinarias y el grupo de cuentas especiales.

OBTENCION DEL VALOR AGREGADO

El Valor Agregado, que es el valor que se incorpora a los insumos para llevar a cabo el proceso productivo de la Gerenica Comercial, lo hemos integrado en los pagos que se hacen por los siguientes conceptos: Salarios, Depreciación, Otras Remuneraciones, Beneficios Sociales y los Gastos Indirectos.

Lo anterior se investigó para cada Area. En seguida -

describiremos la captación de cada concepto, desglosando el total en los dos grupos de cuentas, es decir, cuentas ordinarias y cuentas especiales.

SALARIOS:

Los salarios para cada Area se obtuvierón por medio del presupuesto por programa del año 1978. A continuación se dará la lista de los mismos, la cual nos muestra la cantidad que corresponde a cada uno de los dos grupos de consumidores.

SUBGERENCIAS	CUENTAS ORDINARIAS	CUENTAS ESPECIALES	T O T A L
SUCURSALES			
Jefatura Sucursales	14 452.00		
Conexiones Sucursales	143 396.00		
Sucursales	140 845.00		
	298 693.00		298 693.00
AGENCIAS FORANEAS			
Subgerencia A. F.	456.00		
Jefatura A. For.	728.00		
Conexiones A. For	34 129.00		
Grupos Ordenes A. For.	13 901.00		
Agencias Foraneas	119 839.00		
	169 053.00		169 053.00
ESTUDIOS ECONOMICOS			
Subgerencia Est. Económicos	108.00	108.00	
Estadisticas	2 620.00	25.00	
	2 728.00	133.00	2 861.00
CUENTAS ESPECIALES			
Cuentas Especiales		27 499.00	
Presupuestos a Consumidores		1 043.00	
Grupos Alta Tensión		2 333.00	
		30 825.00	30 825.00
OFICIALIA MAYOR			
Oficialía Mayor	54 503.00	4 445.00	
Recuperación de Adeudos	36 638.00	346.00	
Relaciones Públicas	677.00	1 290.00	
GERENCIA COMERCIAL	77.00	147.00	
	91 895.00	6 228.00	98 123.00
T O T A L	562 369.00	37 186.00	599 555.00

DEPRECIACION

Se considera que a la Gerencia Comercial se le puede asignar parte de los activos fijos de Oficinas y Servicios Generales de la Compañía de Luz y Fuerza del Centro, S. A., por lo cual necesitamos conocer la depreciación con respecto a estos activos, esto se calculó de la siguiente manera.

$$\text{Depreciación correspondiente a Oficinas y Servicios Generales} = \frac{\text{Valor de Oficinas y Servicios Generales}}{\text{Valor Neto de los Activos Fijos}} \times \text{Provisión para depreciación y amortización en el año 1978.}$$

$$\text{Depreciación correspondiente a Oficinas y Servicios Generales} = \frac{973\ 107.00}{11\ 989\ 394.00} \times 480\ 000.00$$

Depreciación correspondiente a Oficinas y Servicios Generales = 38 958.71

Para calcular la depreciación correspondiente a la Gerencia Comercial se hizo lo siguiente:

$$\text{Depreciación correspondiente a la Gerencia Comercial} = \text{Depreciación de Oficinas y Servicios Generales} \times 40\ \%$$

$$\text{Depreciación correspondiente a la Gerencia Comercial} = 38\ 958.71 \times 0.40$$

Depreciación para la Gerencia Comercial = 15 583.48

El 40% se obtuvo en base a una estimación del área ocupada por la Gerencia Comercial en el edificio principal, las

Sucursales, Agencias Foraneas y otros locales propiedad de la - Compañía.

La estimación de la asignación de la Depreciación para cuentas ordinarias y cuentas especiales se realizó en forma- proporcional a los salarios, considerando que existe una cierta proporcionalidad entre el número de empleados y el espacio que- ocupan, y a su vez los salarios son proporcionales al número de empleados, aún cuando se sabe que esta estimación no es muy precisa debido a que los salarios no son uniformes.

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{\text{Total Salarios Cuentas Ordinarias}}{\text{Total de Salarios}} \times \text{Depreciación}$$

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{562\ 369.00}{599\ 555.00} \times 15\ 583.48$$

$$\text{Cuentas Ordinarias} = 14\ 616.95$$

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{\text{Total Salarios Cuentas Especiales}}{\text{Total Salarios}} \times \text{Depreciación}$$

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{37\ 186.00}{599\ 555.00} \times 15\ 583.48$$

$$\text{Cuentas Especiales} = 966.53$$

La depreciación global también se repartió en forma - proporcional a los salarios para cada una de las Subgerencias y la Oficialía Mayor.

Sucursales	7 763.69
Agencias Foraneas	4 392.98
Estudios Económicos	74.80

Cuentas Especiales	800.00
Oficialía Mayor	2 551.02
	15 583.48

OTRAS REMUNERACIONES

Estos pagos se hacen por el servicio que le da la Subgerencia de Inspección de la Gerencia Administrativa a la Gerencia Comercial . Esto se calculó de acuerdo al presupuesto por-programa para los salarios de Inspección, que fue de $ 44 314.00

La estimación en cuentas ordinarias y cuentas especiales se hizo proporcional al número de servicios como sigue:

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{\text{Número de Servicios Ordinarios}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Salarios de Inspección.}$$

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{2\ 415\ \ 089}{2437\ 879} \times 44\ 314.00$$

Cuentas Ordinarias = 43 899.74

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{\text{Número de Servicios Especiales}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Salarios de Inspección.}$$

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{22\ 790}{2\ 437\ 879} \times 44\ 314.00$$

Cuentas Especiales = 414.26

La repartición del total del Otras Remuneraciones en - las Subgerencias y la Oficialía Mayor, se efectuó unicamente para las Subgerencias de Sucursales, Agencias Foraneas y Cuentas Especiales, tomando en cuenta que son las únicas áreas que utilizan- el servicio de Inspección; esta repartición se efectuó proporcional a la facturación del número de servicios que atiende cada --

una de ellas, a continuación mostramos esta repartición.

Sucursales

$$\text{Otras Remuneraciones} = \frac{\text{2/3 del Número de Servicios Ordinarios}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Salarios Inspección.}$$

$$\text{Otras Remuneraciones} = \frac{2/3\ (2\ 415\ 089)}{2\ 437\ 879} \times 44\ 314.00$$

Otras Remuneraciones Sucursales = 29 266.49

Se estima que esta Subgerencia atiende dos terceras partes del total de los servicios ordinarios. Lo anterior no es exacto pero si nos da una aproximación aceptable.

Agencias Foraneas:

$$\text{Otras Remuneraciones} = \frac{\text{1/3 del Número de Servicios Ordinarios}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Salarios Inspección.}$$

$$\text{Otras Remuneraciones} = \frac{1/3\ (2\ 415\ 089)}{2\ 437\ 879} \times 44\ 314.00$$

Otras Remuneraciones Agencias Foranes = 14 633.25

Para lo anterior se consideró que Agencias Foraneas atiende una tercera parte de los Servicios Ordinarios, aquí cabe aclarar que esta Subgerencia también atiende parcialmente servicios especiales, pero el número de estos es despreciable comparado con los servicios ordinarios.

Cuentas Especiales:

$$\text{Otras Remuneraciones} = \frac{\text{Número de Servicios Especiales}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Salarios Inspección}$$

$$\text{Otras Remuneraciones} = \frac{22\ 790}{2\ 437\ 879} \times 44\ 314.00$$

Otras Remuneraciones Cuentas Especiales = 414.26

Se estimó así considerando que todos los servicios -- especiales los atiende esta Subgerencia, aunque como ya lo diji mos, Agencias Foraneas también atiende este tipo de servicios.

BENEFICIOS SOCIALES

Los Beneficios Sociales se calcularon mediante una estimación del 82.30% de los Salarios, Obteniendose los siguientes datos:

Cuentas Ordinarias	462 829.69
Cuentas Especiales	30 604.07
	493 433.76

Sucursales	245 824.34
Agencias Foraneas	139 130.62
Estudios Económicos	2 354.60
Cuentas Especiales	25 368.97
Oficialía Mayor	80 755.23
	493 433.76

GASTOS INDIRECTOS

Los Gastos Indirectos son aquellos que se hacen por - conceptos de Administración y Servicios, y se estimó en un - -- 4.914% de los salarios de la Gerencia Comercial como sigue:

Gastos Indirectos = Salarios Gerencia Comercial x Estimación.

Gastos Indirectos = 599 555.00 x 0.04914

Gastos Indirectos = 29 462.13

La repartición de los Gastos Indirectos para cuentas- ordinarias, cuentas especiales y para cada una de las áreas, se hizo proporcional a los salarios, obteniendose los siguientes - datos:

Cuentas Ordinarias	27 634.81
Cuentas Especiales	1 827.32
	29 462.13

Sucursales	14 678.03
Agencias Foraneas	8 305.37
Estudios Económicos	141.43
Cuentas Especiales	1 514.35
Oficialía Mayor	4 822.95
	29 462.13

Con la obtención de los Gastos Indirectos se da por - terminado el cálculo del valor Agregado, el cual se desglosó en los dos grupos de consumidores. A continuación se hará el desglose de los Insumos, los cuales ya fueron calculados.

El total de Insumos requeridos por Sucursales y Agencias Foraneas, entran en las cuentas ordinarias; los de la - -- Subgerencia de Cuentas Especiales, en cuentas especiales y, los pertenecientes a Estudios Económicos y Oficialía Mayor se dividirán en forma proporcional a los servicios, haciendo la consideración de que estas dos últimas Areas utilizan los materiales para realizar su función, como consecuencia del número de servicios que atiende la Empresa, esta división se muestra en seguida:

Estudios Económicos (Insumos)

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{\text{No. de Servicios Ordinarios}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Insumos de Estudios Económicos.}$$

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{2\ 415\ 089}{2\ 437\ 879} \times 142.47$$

Asignación de los Insumos de Estudios Económicos en cuentas - - ordinarias = 141.14.

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{\text{No. de Servicios Especiales}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Insumos de Estudios Económicos}$$

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{22\ 790}{2\ 437\ 879} \times 142.47$$

Asignación de los Insumos de Estudios Económicos en cuentas especiales = 1.33.

Oficialía Mayor (Insumos)

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{\text{No. de Servicios Ordinarios}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Insumos de Oficialía-Mayor}$$

$$\text{Cuentas Ordinarias} = \frac{2\ 415\ 089}{2\ 437\ 879} \times 1\ 888.48$$

Asignación de los Insumos de la Oficialía Mayor en cuentas ordinarias = 1 870.82

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{\text{No. de Servicios Especiales}}{\text{Total de Servicios}} \times \text{Insumos de Oficialía Mayor}$$

$$\text{Cuentas Especiales} = \frac{22\ 790}{2\ 437\ 879} \times 1\ 888.48$$

Asignación de los Insumos de la Oficialía Mayor en cuentas especiales = 17.65.

Por lo anterior, el valor de los Insumos asignado a los dos grupos de consumidores es el siguiente.

subgerencias	Cuentas Ordinarias	Cuentas Especiales
Sucursales	59 349.22	
Agencias Foraneas	40 405.47	
Estudios Económicos	141.14	1.33
Cuentas Especiales		6 173 .82
Oficialía Mayor	1 870.83	17.65
	101 766.66	6 192. 80

Total de Insumos = 107 959.46

Valor de los Insumos asignados al grupo de cuentas ordinarias = 101 766.66

Valor de los Insumos asignados al grupo de cuentas especiales -- = 6 192.80.

A continuación se da la lista de todos los datos obtenidos, desglosados en cuentas ordinarias y cuentas especiales.

	Cuentas Ordinarias	Cuentas Especiales
Máquinas Electrónicas y Procedimientos	31 909.31	299.03
Materiales	69 857.35	5 893.77
Salarios	562 369.00	37 186.00
Depreciación	14 616.95	966.53
Otras Remuneraciones	43 899.74	414.26

Beneficios Sociales	462 829.69	30 604.07
Gastos Indirectos	27 634.81	1 827.32
	1 213 116.85	77 190.98

Como se mensionó, el obtener desglosados los datos en los grupos de consumidores, es con el fin de calcular el Costo- Comercial del KWH para cada una de las tarifas, el cálculo de - este Costo se hace en seguida.

CALCULO DEL COSTO COMERCIAL DEL KWH POR TARIFA

Para poder obtener el Costo Comercial del KWH por tarifa, es necesario, primero, calcular el Costo Comercial por -- servicio y por año, recordando que el servicio puede ser ordinario o especial, dependiendo de sus características, para conocer este costo se requiere tener el dato de los gastos asignados al grupo de consumidores ordinarios o especiales y el número de servicios que se da a los grupos mencionados.

Después con el Costo Comercial/Servicio/año calculado y con el número de KWH consumidos en el año en cada tarifa, se- calcula el Costo Comercial del KWH por tarifa, El costo Comercial por servicio y por año se calculó de la siguiente forma.

Costo Comercial por Servicio y por Año

Número de Servicios Ordinarios por tarifa (1978)

Tarifa Ordinarios

1	2 086 900
1A	8 200
2	316 229
4	2 860
7	900
	2 415 089 (Servicios)

Costo Comercial del Servicio Ordinario por año.

$$\text{Costo Comercial/Servicio/año} = \frac{\text{Total de Gastos dentro del Cuentas Ordinarias (1978)}}{\text{No. de Servicios Ordinarios (1978)}}$$

$$\text{Costo Comercial/Servicio/año} = \frac{1\ 213\ 116.85 \times 10^3 \quad \text{(Pesos)}}{2\ 415\ 089}$$

Costo Comercial del Servicio Ordinario por año = 502.30 $/Servicio/año.

Número de Servicios Especiales por tarifa (1978)

Tarifa	Especiales
2	8 471
3	7 350
5	925
6	1 410
8	3 700
9	850
10	46
11	30
12	8
	22 790 (Servicios)

Costo Comercial del Servicio Ordinario por año

$$\text{Costo Comercial/Servicio/año} = \frac{\text{Total de Gastos dentro de Cuentas Especiales (1978)}}{\text{No. de Servicios Especiales (1978)}}$$

$$\text{Costo Comercial/Servicio/año} = \frac{77\ 190.98 \times 10^3 \quad \text{(Pesos)}}{22\ 790}$$

Costo Comercial del Servicio Especial por año = 3 387.05 $/Servicio/año.

Habiendo hecho lo anterior, el Costo Comercial del -- KWH por tarifa se obtuvo de la manera siguiente:

Costo Comercial del KWH por tarifa

Número del KWH consumidos por tarifa en el año (1978).

Tarifa	No. de KWH/ año
1	2 251 280 000
1A	6 910 000
2	1 203 720 000
3	1 014 390 000
4	58 040 000
5	697 910 000
6	755 950 000
7	5 530 000
8	6 122 260 000
9	41 460 000
10	418 750 000
11	163 080 000
12	1 080 720 000

Costo Comercial del KWH por tarifa.

$$\text{Costo Comercial/KWH/tarifa (x)} = \frac{\text{Costo Comercial/Servicio/año x No. de Servicios en la tarifa (x)}}{\text{No. de KWH consumidos en la tarifa (x)}}$$

Tarifa 1.- $\dfrac{502.30 \times 2\,086\,900}{2\,251\,280\,000 \text{ KWH/año}} = 46.56$ ¢ /KWH

1A.- $\dfrac{502.30 \times 8\,200}{6\,910\,000 \text{ KWH/año}} = 59.60$ ¢ /KWH

2.- $\dfrac{502.30 \times 316\,229 + 3\,391.77 \times 8.471}{1\,203\,720\,000 \text{ KWH/año}} = 15.58$ ¢ /KWH

3.- $\dfrac{3\,387.05 \times 7\,350}{1\,014\,390\,000 \text{ KWH/año}} = 2.45$ ¢ /KWH

4.- $\dfrac{502.30 \times 2\,860}{58\,040\,000 \text{ KWH/año}} = 2.47$ "

5.- $\dfrac{3\,387.05 \times 925}{697\,910\,000 \text{ KWH/año}} = 0.45$ "

6.- $\dfrac{3\,387.05 \times 1\,410}{755\,950\,000 \text{ KWH/año}} = 0.63$ "

7.- $\dfrac{502.30 \times 900}{5\,530\,000 \text{ KWH/año}} = 8.17$ "

8.- $\dfrac{3\,387.05 \times 3\,700}{6\,122\,260\,000 \text{ KWH/año}} = 0.20$ "

9.- $\dfrac{3\,387.05 \times 850}{41\,460\,000 \text{ KWH/año}} = 6.95$ "

10.- $\dfrac{3\,387.05 \times 46}{418\,750\,000 \text{ KWH/año}} = 0.04$ "

11.- $\dfrac{3\,387.05 \times 30}{163\,080\,000 \text{ KWH/año}} = 0.06$ "

12.- $\dfrac{3\,387.05 \times 8}{1\,080\,720\,000 \text{ KWH/año}} = 0.0025$ "

De lo anterior, se puede observar que atender un servicio especial es aproximadamente seis veces más caro que atender un ordinario, y también, que el costo del KWH consumido por los servicios especiales, es menor que el consumido por los servicios ordinarios, esto se debe a que para atender un servicio- especial, se requiere de mejor material y equipo y de personal- más especializado, que el necesario para atender un servicio -- ordinario; con lo que respecta a la diferencia del costo del -- KWH entre los dos tipos de servicios, esta se debe a que el número de servicios especiales es pequeño comparado con el de ordinarios y además el número de KWH consumidos por servicio, es- mayor en los servicios especiales.

Hacer el cálculo del KWH por tarifa, ordenar los datos en forma matricial y hacer un análisis de costos son las - utilidades que se le iban a dar a la captación; la primera ya - se ha hecho y las dos últimas se hacen en seguida.

FORMA EN QUE SE ESTRUCTURARON LOS DATOS CAPTADOS

Con los datos de la Gerencia Comercial, obtenidos en-la forma que se explicó, se procedió a formar una estructura --matricial en donde los Materiales, el Servicio de Computo del - Departamento de Máquinas Electrónicas y Procedimientos y el Valor Agregado representan los renglones y las Subgerencias y la-Oficialía Mayor las columnas.

Las columnas nos indican los insumos requeridos por - cada una de las áreas para llevar a cabo su función y los ren--glones la distribución de estos insumos. La estructura que se-formó fue la siguiente.

GERENCIA COMERCIAL
SUBGERENCIAS Y OFICIALIA MAYOR

	SUCURSALES	AGENCIAS FORANEAS	ESTUDIOS ECONOMICOS	CUENTAS ESPECIALES	OFICIALIA MAYOR	TOTAL
MAQUINAS ELEC-TRONICAS Y PROCE.	20714.29	11195.02		299.03		32208.34
CUERO PIEL Y SUS MANUF. EXCEP. CALZ.	136.61	53.22		14.75		204.58
PAPELERIA.	28373.99	22637.31	142.47	3119.49	1859.75	56133.01
OTROS PAPELES	103.20	55.03		7.00		165.23
CALZADO DE HULE EXCEP. DIELECTRIC.	2.49	1.66		0.02		4.17
CABLE Y ALAMBRES CONDUCTORES.	1226.70	2074.00		248.67		3549.37
ARTICULOS DE LIMPIEZA.	298.30	215.43		23.64		537.37
EQUIPOS Y ARTIC. DE SEGURIDAD	330.39	202.15		38.54		571.08
PRODUCTOS ELAB. CON TEXTILES	482.63	143.69		60.23		686.55
HERRAMIENTAS DE MANO Y ACCESORS.	1106.89	670.55		220.70	28.73	2026.87
LUBRICANTES Y FLUIDOS	0.53	1.26		0.11		1.90
PRODUCTS. Y MATS. ELECT. DIVERSOS.	2142.59	1570.03		1618.98		5331.60
OTROS MATERIALES	2.59	24.95		2.99		30.53
REFACS. Y PARTES P/VEHICULOS AUT.		65.39				65.39
FERRETERIA.	4368.43	1449.23		503.07		6320.73
PINTURAS.	12.30	7.38		0.20		19.88
OTROS ARTICULOS	47.29	41.17		16.40		104.86
TOTAL MATERIALES (NO INC. MEP.)	38834.93	29210.45	142.47	5874.79	1888.48	75751.12
SALARIOS.	298693.00	169053.00	2861.00	30825.00	98123.00	599555.00
DEPRECIACION	7763.69	4392.98	74.80	800.99	2551.02	15583.40
OTRAS REMUNERACIONES.	29266.49	14633.25		414.26		44314.00
BENEFICIOS SOCIALES.	245824.34	139130.62	2354.60	25368.97	80755.23	493433.76
GASTOS INDIRECTOS.	14678.03	8305.37	141.43	1514.35	4822.95	29462.13
TOTAL (INC. MEP.)	655574.77	375920.69	5574.30	68097.39	188140.68	1290307.83

Para hacer el análisis de costos nos vamos a apoyar - en la estructura matricial que se formó, este análisis se muestra enseguida:

1°) El gasto hecho en el Valor Agregado influye más que el que- se hace por Insumos en el costo de la Gerencía, lo cual se- justifica debido a que ésta no tiene como función principal llevar a cabo un proceso productivo donde se utilizan los - insumos en mayor cantidad, en algunas empresas sucede lo -- contrario.

2°) El gasto que se hace por pago de salarios es el que tiene - más peso en el Valor Agregado, esto se debe a que la Gerencía utiliza bastante personal.

3°) De las Subgerencias, la que realiza más gastos es la de Sucursales, que se justifíca ya que su función principal es - la de atender todos los servicios ordinarios suministrados- dentro del área Metropolitana que es el mayor número de - - servicios dentro del Area que atiende la Compañía.

4°) El servicio de Máquinas Electronicas y Procedimientos unicamente lo utilizan Sucursales, Agencias Foraneas y Cuentas - Especiales, es decir las Subgerencias que realizan la fun-- ción de facturación, del gasto que se hace por este concepto, el 99% lo hacen las dos primeras áreas, esto último se- debe a que los servicios ordinarios los cuales son atendi--

dos por estas dos áreas constituyen el 99% del total de los ser vicios que atiende la Compañía.

5 °) Las tres subgerencias mencionadas en el punto anterior son las que hacen más gastos por materiales consumidos, lo - - cual es consecuencia de las funciones que realizan.

6 °) De los materiales consumidos el que más influencia tiene en el gasto por Insumos, es el de papelería y además se observa que es el único utilizado por las cinco Subgerencias. Esto - se debe a que la relación entre la Gerencia y los consumidores que es la función principal, se hace mediante Oficios, - facturas, recibos y escritos, es decir utilizan papelería.

RECOMENDACIONES

Con lo anterior tratamos de demostrar la utilidad que un modelo de insumo-producto puede prestar en el análisis de -- los problemas económicos de las empresas. Por lo que se pudo - observar la construcción y utilización de un modelo de esta índole parece plantear algunas dificultades especiales, que se -- derivan principalmente de la mala organización en que se encuentran los datos. Pero también se concluye que esas mayores dificultades se compensan ampliamente como ya lo dijimos con las -- posibilidades y en algunos casos la necesidad de utilizar el modelo en el análisis de varios de los problemas básicos de las - empresas. Es por lo expuesto que recomendamos al personal -- que dirige esta Compañía y en general para todas las empresas,-

que para tener una mejor organización de la información relativa, esta organización se haga en base al modelo matricial de insumo- producto, es decir la Matriz de Insumo-Producto.

BIBLIOGRAFIA

1.- METODO DEL CAMINO CRITICO
EDITOR: RELACIONES INDUSTRIALES CIA.DE LUZ Y FUERZA.
EDICION: 1976

2.- FUNCIONES DE LA GERENCIA COMERCIAL
EDITOR: CIA. DE LUZ Y FUERZA.
EDICION: 1976

3.- TRATADO DE TEORIA ECONOMICA
EDITOR: FRANCISCO ZAMORA
EDITORIAL: FONDO DE CULTURA ECONOMICA
EDICION: DECIMO QUINTA 1977.

4.- DICCIONARIO DE ECONOMIA
EDITOR: SHELTON
EDICION: 1977

5.- MODELO DE INSUMO PRODUCTO
EDITOR: CEPAL.
EDICION: 1974.

6.- ESTRUCTURA MATRICIAL PARA COORDINACION DE INFORMACION.
EDITOR: CIA. DE LUZ Y FUERZA.
EDICION: 1977 MAY.

7.- INTRODUCCION AL ALGEBRA DE MATRICES
EDITOR : RICHARD C. DORF.
EDITORIAL: LIMUSA
EDICION: 1973

8.- ALGEBRA SUPERIOR
EDITOR: HUNBERTO CARDENAS, EMILIO LLUIS, FCO. ROGGI - FCO. THOMAS.
EDITORIAL: TRILLAS
EDICION: 1974.

9.- SOLUCION MEDIANTE COMPUTADORAS DE SISTEMAS ALGEBRAICOS LINEALES.
EDITOR : GEORGE F. FORSUTHE
CLEVE B. MOLER.
EDITORIAL: UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.
EDICION: 1973

10.- ARCHIVOS E INVENTARIOS DE LA GERENCIA COMERCIAL
EDITOR: CIA. DE LUZ Y FUERZA.
EDICION: 1977 y 1978.

11.- INDICADORES ECONOMICOS.
EDITOR: BANCO DE MEXICO, S.A.
EDICION: JULIO DE 1978 Vol. VI No. 8