2 ej.
28

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS TEMAS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Tesis Profesional

Que para obtener el título de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

CELIA MONTERO NUÑEZ

México, D. F. 1986

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

P R O L O G O .

La enseñanza del Cálculo en la Escuela Nacional Preparatoria tiene características muy especiales, ya que está dedicada a estudiantes cuyo principal interes no es necesariamente la matemática y que por lo mismo, estan en general, poco motivados. En estas condiciones resulta difícil cubrir completamente un programa que debe llenar la doble tarea de preparar al alumno para proseguir sus estudios adecuadamente por una parte y por la otra de proporcionar una pieza de conocimiento integrada y que, por lo tanto contenga temas completos, tan variados como sea posible y que sin embargo conserve su unidad como materia curricular.

Los antecedentes de esta asignatura son los que corresponden al álgebra de secundaria, que se revisan en 4° y la geometría analítica que se ve en 5°.

Los "temas selectos de álgebra" se llevan simultáneamente al cálculo y con todo esto, debe resultar claro que el alumno no ha podido adquirir la madurez que se requiere para un aprendizaje razonable de la materia.

El rigor de las demostraciones matemáticas le suena "extraño", por decir lo menos. No debe extrañarnos entonces que el muchacho rechace de plano el método "teorema-demostración" en sus estudios. El siente que "tiene" en cierta manera tanto a los números como a sus operaciones, cuyas propiedades "ni modo que no se cumplan".

A esto hay que agregar que los contenidos programáticos son extensos y que si se "pierde tiempo" demostrando todos los resultados y teoremas según van apareciendo, una buena parte de los temas se podría quedar definitivamente afuera, a menos que se "sacrificaran" los ejercicios, (lo que de todos modos se hace en par te), y que finalmente redundaria en un aprovechamiento mínimo, si no es que nulo, de toda la materia.

No existen libros de cálculo (con excepción quizá de uno o dos) que se hallan escrito explícitamente para este nivel y que sean adecuados para utilizarse como textos. Algunos tienen errores conceptuales graves y otros no tienen suficientes ejercicios. Ante esta situación, he pensado que resulta valioso cualquier esfuerzo que se haga tendiente a remediar el problema que se analiza, y en este pequeño trabajo, he buscado de presentar algunas ideas sobre la forma que se podría tratar de organizar una parte del curso a que se hace referencia.

He tratado de exponer los conceptos principales del tema, como el de "diferencial", "integral definida", e "integral indefinida" entre otros, de manera que sin estar recargados de teoría, si sean correctos y he buscado presentar también algunas aplicaciones y ejercicios que complementen el aprendizaje.

Deliberadamente he dejado afuera a todas las "demostraciones", porque, como ya dije, considero que el alumno no tiene aún la madurez que se requiere para que le resulten de utilidad. Algunas partes como "técnicas de integración" por ejemplo, se han visto reducidas a su mínima expresión y en algunas instancias, ni siquiera se revisan los casos importantes. Sin embargo se incluyen algunos ejercicios cuya resolución podría ayudar a visualizar el tema más adecuadamente. Quiero dejar constancia de mi deseo de que estas notas puedan ser de utilidad para mis compañeros profesores y por último me permito expresar mi agradecimiento a todas las personas que en una forma u otra colaboraron en la realización de ellas.

México D.F., noviembre de 1985

Celia.

1. I N T R O D U C C I O N.

En el siglo XVII se considero como inventor del Cálculo Diferencial al Matemático francés Pedro de Fermat (1601-1665) a quien se debe la aplicación del Cálculo para obtener las tangentes, publicó el método de "Maximis et Minimis".

Comparte con Pascal el descubrimiento del Cálculo de Probabilidades.

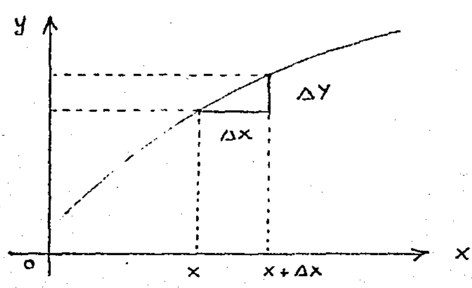
Como descubridores del Cálculo Integral se consideran a Sir --- Isaac Newton y a Guillermo Godofredo Leibniz.

Isaac Newton ilustre Matemático, Físico, Astrónomo y Filósofo - inglés nacido en Wolsthorpe (1642-1727), descubre las bases del -- "Cálculo Infinitesimal" al mismo tiempo que Leibniz.

Leibniz Filósofo y Matemático alemán nacido en Leipzig (1646-1716) publica "Nova Methodus pro Maximis et Minimis" en las Actas Eruditorum en 1684, crea los procedimientos "infinitesimales".

En 1673 identifica el problema de las tangentes e introduce el signo integral como la "ese alargada", considerando que este símbolo representa la suma de las áreas de los rectángulos cuyas dimensiones son "Δx" de ancho y "y" de altura. Considera la integración como operación inversa de la diferenciación.

Isaac Barrow Filólogo, Matemático y Teólogo inglés (1630-1677), maestro de Newton, establece el triángulo "característico", que - tiene por hipotenusa un arco infinitesimal de la curva y como catetos, los incrementos "infinitesimales" en que difieren las abscisas y las ordenadas de los puntos extremos del arco considerado.



René Descartes Filósofo, Matemático y Físico francés (1596-1650) introdujo el método de "Coeficientes indeterminados" para el Cálculo Integral.

Jacobo Bernoulli miembro de una familia de Matemáticos suizos - (1654-1705), descubrió el Cálculo Exponencial y el método para integrar las "funciones racionales" (1690), el metodo "por substitución", que más tarde Cauchy lo llamaría "cambio de variable".

Agustín Luis de Cauchy Matemático francés (1789-1857) fué el -- primero en demostrar de manera rigurosa los principios fundamentales del Cálculo Integral.

Silvestre F. Lacroix (1765-1843) presentó la "integración por - partes". También la utilizó José Fourier (1768-1830).

2. LA DIFERENCIAL.

Sea $y=f(x)$ una función real de variable real.

Considerando $f(x)$ como una curva representada en el plano y $P(x_0,f(x_0))$ un punto de la curva, se define la tangente a $f(x)$ en el punto P como la recta que pasa por P y tiene como pendiente $f'(x_0)$ en caso de que ésta exista; si $f'(x_0)$ no existe, se dice que la curva $f(x)$ no tiene tangente en P.

Observación: De la definición anterior resulta que $f'(x_0)$ es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

La derivada se ha definido como el "límite del cociente del incremento de la función entre el incremento de la variable independiente, cuando éste último tiende a cero".

Notación:

$$f'(x) = D_x y = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si $f(x) = x$, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

Definición: la diferencial de una función en el punto x_0, es el producto de su derivada en ese punto, por el incremento de la variable independiente.

$$df(x_0;\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Nótese que la diferencial depende tanto de x_0 como de Δx

La diferencial de x es $dx(x_0,\Delta x) = 1\cdot\Delta x$ y por lo tanto se puede escribir

$$df(x) = f'(x_0)dx$$

"La diferencial de una función es igual al producto de su derivada, por la diferencial de la variable independiente".

FORMULAS DE DIFERENCIALES

Funciones Algebráicas. Sean u,v,w, funciones de x.

Suma. $d(u + v + w) = du + dv + dw$

Potencia $du^n = nu^{n-1}du$

Producto $d(uv) = udv + vdu$

Cociente $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Funciones trascendentes.

$$dLu = \frac{du}{u}$$

$$de^u = e^u du$$

$$da^u = a^u La\ du$$

trigonométricas directas

$$d \text{ sen } u = \cos u\ du$$
$$d \cos u = -\text{sen } u\ du$$
$$d \tan u = \sec^2 u\ du$$
$$d \cot u = -\csc^2 u\ du$$
$$d \sec u = \sec u \tan u\ du$$
$$d \csc u = -\csc u \cot u\ du$$

trigonométricas inversas

$$d \text{ ang sen } u = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$d \text{ ang cos } u = -\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

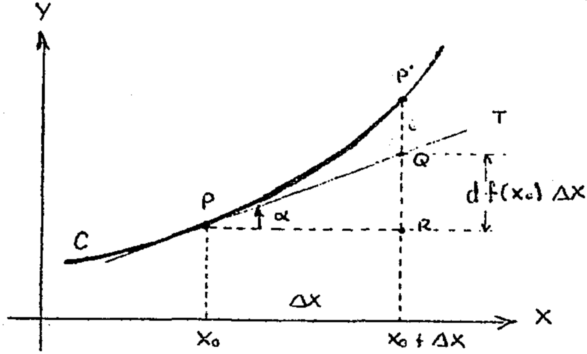
$$d \text{ ang tan } u = \frac{du}{1 + u^2}$$

$$d \text{ ang cot } u = -\frac{du}{1 + u^2}$$

$$d \text{ ang sec } u = \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$d \text{ ang csc } u = -\frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

Interpretación Geométrica



La curva C representa una función $f(x)$, derivable en el punto $P(x_0,f(x_0))$ y T la tangente en ese punto

Sea $P'(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ otro punto sobre la curva C

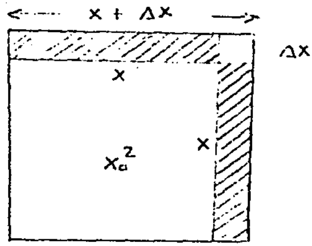
Dado que $\tan\alpha = \frac{\overline{QR}}{\Delta x} = f'(x_0)$ se tiene que $\overline{QR} = f'(x_0)\Delta x = df(x_0,\Delta x)$ por lo tanto, si llamamos $\varepsilon(\Delta x)$ al error al aproximar con la diferencial a la función $\varepsilon(\Delta x) = f(x_0+\Delta x) - (f(x_0) + f'(x_0)\Delta x)$ y entonces $\varepsilon(\Delta x)$ tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$; pero lo más importante es que lo hace "más rapidamente que Δx"; es decir:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} = 0$,lo que se expresa diciendo que "la diferencial aproxima bien a la función"

$$f(x_0+\Delta x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$$

Ejemplo 1. Aproximar el área del cuadrado de lado $x + \Delta x$ usando diferenciales y suponiendo conocido x

Sea $A(x) = x^2$; $dA(x) = 2x\, dx$



El área del cuadrado original es $A(x) = x^2$
El incremento del área es la diferencia del área del cuadrado cuyo lado es $x_0 + \Delta x$ y la del cuadrado de lado x_0.

$$\Delta A = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\Delta A = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2$$

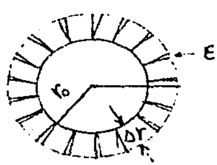
$$\Delta A = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

como se vé en este caso el error $\varepsilon = (\Delta x)^2$ y

$$dA = 2x\ dx \cong \Delta A$$

$\varepsilon(\Delta x) = (\Delta x)^2$, tiende a cero más rápidamente que Δx

Ejemplo 2. Se desea calcular aproximadamente el área del círculo de radio $x_0 + \Delta x$, conocido el valor correspondiente al de radio r_0



Sea $A(r) = \pi r^2$; $dA = 2\pi r\ dr$

Si obtenemos directamente $A(r + \Delta r) = \pi(r + \Delta r)^2$

$$A(r_0 + \Delta r) = \pi(r_0 + \Delta r)^2 = \pi r_0^2 + 2\pi r_0\Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

$$A(r_0 + \Delta r) = A(r_0) + 2\pi r_0\Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

$$A(r_0 + \Delta r) \cong A(r_0) + 2\pi r_0\Delta r = A(r_0) + dA$$

se puede ver que el error es $\pi(\Delta r)^2$ y obviamente

$$\frac{\varepsilon(\Delta r)}{\Delta r} = \pi\Delta r \to 0 \qquad \text{si} \qquad \Delta r \to 0$$

En la figura se ve que el error es la suma de las áreas de los "tri anqulitos"que están entre las circunferencias.

Ejemplo 3. Se quiere aproximar el valor de $\sqrt[3]{28}$ usando diferenciales.

$$\text{Sea} \quad f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

su diferencial $\quad df(x_0) = \frac{1}{3} x_0^{-\frac{2}{3}} \, dx$

dado que conocemos $\sqrt[3]{27}$ llamamos $x_0 = 27$ entonces $28 = 27 + 1$, es decir $\Delta x = 1$

$\therefore \quad f(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$

$$\sqrt[3]{28} \cong \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(1) + \sqrt[3]{27} = \frac{1}{27} + 3 = 3.037$$

$= 27^{\frac{1}{3}} +$

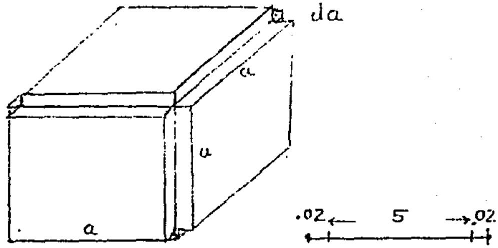
por otra parte $\sqrt[3]{28} = (27 + \Delta x)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} 27^{\frac{2}{3}} \Delta x +$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} 27^{-\frac{5}{3}} (\Delta x)^2 + \ldots = f(x_0) + df + \ldots +$$ suma de términos que contienen a Δx como factor)

como $\Delta x = 1$

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} + \ldots = 3 + \frac{1}{27} + \ldots = 3.037$$

Ejemplo 4. Se desea recubrir un cubo de 5m de arista con una capa de plomo de 2 cm de espesor, para guardar material radiactivo. - Suponiendo que el plomo pesa 11.5 veces más que el agua, calcular usando diferenciales, el peso aproximado del plomo que se necesita.



Sea $V_{(a)} = a^3$

la arista con plomo será $5 + .04$ $V(5 + .04) \cong V(5) + dV$

como $dV = 3\ a^2 da$

$V_{(5)} + dV = 125 + 3(5)^2(.04) = 125 + 75(.04) = 128$

El peso aproximado del plomo que se necesita es

$$3(11.5) = 34.5 \text{ kg}$$

Nótese que el valor exacto del volúmen es

$$V(5.04) = (5.04)^3 = 128.024064$$

$$\Delta V = V(5.04) - V(5) = 128.024064 - 125 \cong 3 \text{ m}^2$$

Ejemplo 5. Obtener la diferencial de la función

$$y = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$dy = (3x^2 + 4x + 1)\ dx$$

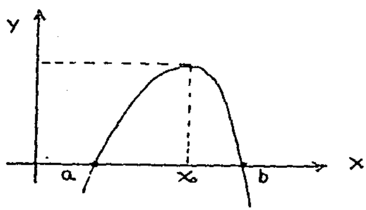
Ejemplo 6. Dada la relación $xy + x - y = 3$ obtener dy diferenciando implícitamente

$$x\ dy + y\ dx + dx - dy = 0$$

$$dy = -\frac{y + 1}{x - 1}\ dx \qquad\qquad x \neq 1$$

Enunciaremos ahora dos teoremas del Cálculo diferencial que son muy importantes:

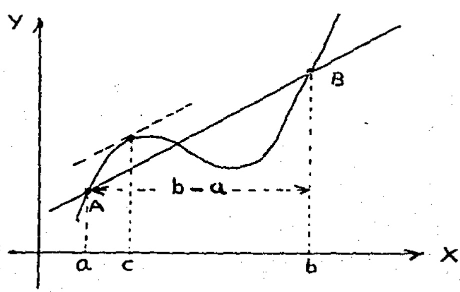
TEOEMA DE ROLLE : Si f(x) es continua en el intervalo [a,b], $f(a) = f(b) = 0$ y existe $f'(x)$ en todo el intervalo, excepto posiblemente en los extremos, entonces $f'(x) = 0$ al menos para un valor de $x = x_0$ entre a y b. Lo que significa que si la curva es continua, interseca al eje de las "x" en x = a y x = b, y tiene una tangente en cada punto entre a y b, entonces hay al menos un punto $x = x_0$ del interior de ese intervalo, donde la tangente es paralela al eje de las "x".



TEOREMA DEL VALOR MEDIO: Si una función f(x) es diferenciable en el intervalo (a,b) y continua en [a,b] entonces existe por lo menos un valor c dentro del intervalo tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es decir existe un punto $P\varepsilon(a,b)$ cuya tangente es paralela a la - secante AB



Consecuencias:

1) Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) es decir, satisface las hipótesis del T.V.M. y es tal que $f'(x) = 0$ para toda x en (a,b), entonces f es constante.

2) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a,b), entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en $[a,b]$; es decir, para toda x_1, x_2 en $[a,b]$, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

2') Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a,b) entonces $f(x)$ es estrictamente decreciente.

3) Si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las hipótesis del T.V.M. en $[a,b]$ y $f'(x) = g'(x)$ para toda x en (a,b) entonces $f(x) - g(x) =$ constante, es decir, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall\, x \in [a,b]$ $f(x) = g(x) + c$.

Obtener la diferencial de las siguientes funciones:

1) $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

2) $y = (x + 3)\sqrt{2 - x^2}$

3) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

4) $y = (7x^2 - 5)^3$

5) $y = \frac{1}{2}\tan^2 x$

6) $y = L\,\frac{x}{2}$

7) $y = \text{ang sec } 5x$

8) $y = e^{3x}$

9) $xy = 2$

10) $x^2 + y^2 = 25$

11) $x^3 + y = 2x$

12) $\frac{x}{y} = 1 + x$

3. LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Se desea resolver la ecuación (diferencial)

$\qquad y' = f(x)$

en donde f es una función continua en el intervalo $[a,b]$; es decir deseamos conocer todas las funciones $y:[a,b] \to \mathbb{R}$, tales que su derivada sea $f(x)$.

Al proceso de resolver este problema se le conoce como INTEGRACION INDEFINIDA.

Si conocemos alguna solución F de la ecuación, es decir que sabemos que $F'(x) = f(x)$, entonces el corolario del T.V.M. asegura que la solución completa de la ecuación # es $y = F(x) + \text{cte}$.

En efecto si $y = F(x) + c$ es una de ellas

$y' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$, lo que dice que todo elemento de esta familia es una solución de la ecuación # y recíprocamente, si $G(x)$ es tal que $G'(x) = f(x)$, entonces ya que $G'(x) = F'(x)$ para toda x en (a,b) se tiene que (corolario)

$\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) - F(x) = c$ o sea

$$G(x) = F(x) + \text{cte}.$$

De acuerdo con esto, a cada fórmula de derivación le podemos hacer corresponder una de integración.

Por ejemplo:

puesto que $\qquad d(u^n) = nu^{n-1}\, du$

$$\int nu^{n-1}\, du = u^n$$

FORMULAS MAS USUALES DE INTEGRACION DIRECTA

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

$$\int e^u\, du = e^u + c$$

$$\int \frac{du}{u} = Lu + c$$

$$\int a^u\, La\, du = a^u + c$$

$$\int \text{sen } u\, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u\, du = \text{sen } u + c$$

$$\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$$

$$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$$

$$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + c$$

$$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{ang sen } \frac{u}{a} + c$$

$$-\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{ang cos } \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ ang tan } \frac{u}{a} + c$$

$$-\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ ang cot } \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ ang sec } \frac{u}{a} + c$$

$$-\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ ang csc } \frac{u}{a} + c$$

EJEMPLOS DE INTEGRACION INDEFINIDA:

1) $\int \frac{2x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} + c$

2) $\int \frac{(2x + 1)}{x^2 + x}\, dx = L(x^2 + x) + c$

3) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

4) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{ang } \tan x + c$

5) $\int \frac{2 \cos x^2}{\text{sen } x^2}\, x\, dx = L \text{ sen}^2 x + c$

EJERCICIOS:

Integrar las siguientes diferenciales:

1) $\int 5x^4\, dx =$

2) $\int \sec x \tan x\, dx =$

3) $- \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$

4) $\int (x^3 - x^2 + 3)\, dx =$

5) $\int (5x^2 - 3)^2\, 10x\, dx =$

4. LA INTEGRAL DEFINIDA.

Se desea asignar una "medida" a una colección de superficies. (tal medida se llamará el área de la superficie).

¿ Qué es una medida ?

Una medida M es una función que a cada conjuto "medible" le asigna un número real <u>no</u> negativo, o infinito, es decir:

$$M : \{ A \mid A \text{ es un conjunto}\} \to \mathbb{R}^* \qquad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$$

Al dominio de la función M se le conoce como " los conjuntos - Medibles".

La función M debe ser tal que:

1) Si $A \subset B$ y ambos son medibles , $M(A) \leq M(B)$

2) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos medibles con medidas $M(A_i)$, y ajenos 2 a 2 (es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $A_i \neq A_j$) entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es medible y su medida

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$$

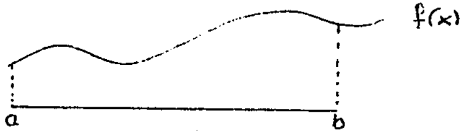
Entre los conjuntos que se pueden medir están los rectángulos, y su medida es: $m(R) = \text{base} \times \text{altura}$

Por lo tanto se pueden medir los triángulos rectángulos (que son "mitades" de rectángulos) y por lo tanto su medida es:

$$m(\Delta) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

y como todo triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos ajenos, todo triángulo es medible y por tanto todo polígono (triangulándolo).

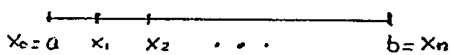
Quisiéramos extender la medida a superficies más generales. - Tomemos una región limitada por tres rectas perpendiculares y una "curva decente". Es decir que si escogemos las rectas como: eje de las x , $x = a$ y $x = b$, la curva puede expresarse como una fun - ción contínua de x en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$.



Aproximamos la superficie que queremos medir por medio de unos - rectángulos que se construyen adecuadamente.

Precisando :

Def 1) Una partición de $[a,b]$ es un conjunto de puntos contenidos - en $[a,b]$ entre los que están a y b



$$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

Al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ lo denotamos como $\mathcal{P}\,[a,b]$

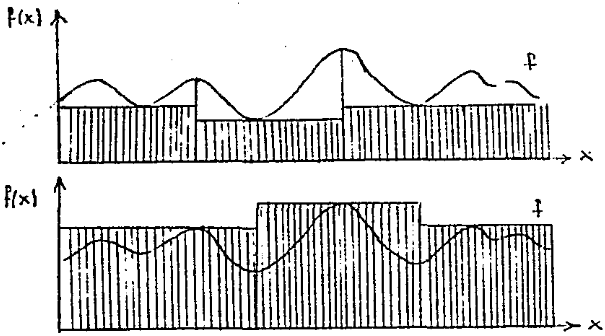
Dada $P \in \mathcal{P}[a,b]$ (una partición de $[a,b]$), tomamos en cada - subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,\ldots,n$

$m_i = \text{mín}\,\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\}$ y

$M_i = \text{máx}\,\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\}$ y formamos las sumas

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i[x_i - x_{i-1}]$$

$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i|x_i-x_{i-1}|$; $|x_i-x_{i-1}| = \Delta x_i$ es la longitud del iésimo intervalo



$\underline{S}(f,P)$

$\overline{S}(f,P)$

Nótese que como la superficie A que queremos medir contiene a- los rectángulos de las sumas inferiores y está contenido en la --- unión de los rectángulos de las sumas superiores, debe tenerse -- en el caso en que A se pueda medir, que $\forall$ P $\in \mathcal{P}[a,b]$

$$\underline{S}\,(f,P) \leq M(A) \leq \overline{S}\,(f,P)$$

Otra observación importante es que si se agregan puntos a las- particiones (se refinan las particiones) en general las sumas in- feriores aumentan y las superiores disminuyen por lo que $M(A)$ -- queda encerrada en intervalos cada vez más pequeños.

Como toda suma inferior es menor ó igual que cualquiera suma - superior, el conjunto $\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$ está acotado por arriba y por lo tanto tiene un supremo

$\underline{\int}_b^a f$ que también se llama "integral inferior de f desde a hasta b"

Análogamente el conjunto de las sumas superiores tiene ínfimo

$\overline{\int}_a^b f$ ó "suma superior".

Si $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$ se dice que f es integrable (o que A es medible) y en ese caso $M(A) = \underline{I} = \overline{I}$ y al valor comun $\underline{I} = \overline{I}$ se le conoce como "la integral definida" de f, desde a hasta b, y se denota

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots \text{ etc.}$$

Si $\exists \int_a^b f$, diremos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (f es integrable en $[a,b]$).

Como sucede con frecuencia, el concepto supera al problema que lo originó y así el concepto de "integral definida" sobrepasa a sus aplicaciones para medir superficies.

En general, si f es una función continua en $[a,b]$ no necesariamente mayor o igual a cero, al valor común (si es el caso)

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

se le conoce como "la integral definida de f desde a hasta b" aunque en este caso no deba interpretarse como área de una superficie.

Aceptaremos sin demostración el hecho de que TODA FUNCION CONTINUA ES INTEGRABLE, y también:

ALGUNAS OBSERVACIONES IMPORTANTES.

O.1) Si f es integrable en $[a,b]$ y $C \in (a,b)$, entonces existen tanto

$$\int_a^b f \quad \text{como} \quad \int_c^b f \quad \text{y además} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

lo que es geométricamente evidente en el caso de que las integrales representen áreas. (En el caso general, es demostrable).

Quisiéramos extender este resultado para puntos a,b,c cualesquiera de $\mathbb{R}$. Para esto necesitamos las definiciones siguientes:

D1) $\int_b^a f = - \int_a^b f$

(para invertir los límites de integración en una integral definida, se cambia el signo de ésta).

D2) $\int_a^a f = 0$

Ahora podemos escribir:

0.2) Teorema: Sean a,b,c ε $\mathbb{R}$. Si existen 2 de las 3 integrales siguientes

$$\int_a^b f \text{ , } \int_a^c f \text{ , } \int_c^b f$$

entonces existe la tercera y además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

La integral definida tiene las dos propiedades siguientes:

P.1) Si f y g $\varepsilon \mathcal{P}[a,b]$ entonces $f + g \ \varepsilon \mathcal{P}[a,b]$ y

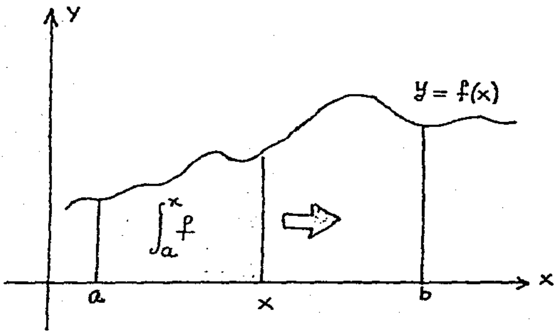
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_b^c g$$

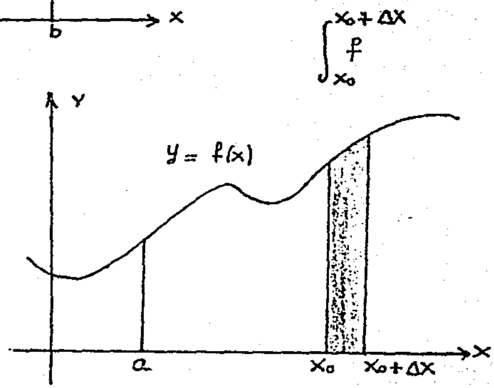
P.2) Si f $\varepsilon \mathcal{P}[a,b]$ y c ε $\mathbb{R}$, entonces cf $\varepsilon \mathcal{P}[a,b]$ y

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

Las propiedades P.1, P.2 se resumen diciendo que "la integral definida, es una funcional (u operador) lineal de las funciones integrables en $\mathbb{R}$ ".

5. LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO





En vista de la primera observación (0.1) del párrafo anterior, Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, y por lo tanto integrable, entonces para cada $x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

es un número bien determinado y por lo tanto se puede definir:

$F:[a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$F(x) = \int_a^x f \qquad \text{Nótese que en este caso}$$

$$F(a) = \int_a^a f = 0 \quad ; \quad F(b) = \int_a^b f$$

Entonces F resulta derivable en (a,b) y

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\ x \in (a,b)$$

Este resultado se conoce como el primer teorema fundamental del Cálculo, y es el que permite definir funciones tan importantes como la función $L: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, (la función logaritmo natural) simplemente tomando

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^+,$$

con lo que se obtiene una función derivable en $\mathbb{R}^+$ tal que:

1) $\frac{d}{dx} L(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\ x > 0$

2) $L(1) = 0$

Propiedades a partir de las cuales se pueden derivar TODAS las propiedades conocidas de la función logaritmo natural, como por ejemplo:

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

$$L(a^n) = n\,L(a)$$

$$L(\tfrac{a}{b}) = L(a) - L(b)$$

$$a < b \to L(a) < L(b)$$

$$L(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$$

L es biyectiva de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y por lo tanto existe

$$L^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad , (L^{-1} = \exp) \qquad \text{y entonces}$$

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \qquad \text{etc.}$$

En particular puesto que $1 \in \mathbb{R}$, $\exp(1) \in \mathbb{R}$ y se define como e.

Def. $\exp(1) = e$

$$\therefore L(e) = 1$$

y si se define para $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

$$a^b = \exp(b\,L(a)),$$

resulta que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$

2o. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, contínua. Si $G:[a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $\forall\, x$,

$$G'(x) = f(x), \text{ entonces } \int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Una función como G tal que $G' = f$ se llama una "primitiva" o "antiderivada" de f. (ver integración indefinida)

Y el 2o. T.F.C. permite evaluar integrales definidas sin pasar por el proceso de límite que las define, sino que basta conocer una primitiva G del integrando, evaluar $G(b)$, $G(a)$ y restar.

La demostración de este teorema que es muy simple, se basa en el 1er. T.F.C. que dice que $F(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de f y en la observación 3 del T.V.M. que asegura que si $G' = F'$ $\forall\, x \in (a,b)$, entonces F y G difieren en una constante que se puede hacer ver que es $-G(a)$.

Es decir $\forall\, x \in [a,b]$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

en particular, si $x=b$,

$$F(b) = \int_a^b f = G(b) - G(a).$$

EJEMPLOS:

1) $\int_3^4 4x^3\, dx = \left]\frac{4x^4}{4}\right]_3^4 = (4)^4 - (3)^4 = 256 - 81 = 175$

2) $\int_0^\pi \text{sen } x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0° = -(-1) + 1 = 2$

3) $\int_1^e \frac{dx}{x} = \left]L\ x\right]_1^e = L\ e - L\ 1 = 1 - 0 = 1$

4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = [\text{ang sen } x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \text{ang sen } \frac{\sqrt{2}}{2} - \text{ang sen } \frac{1}{2} =$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} = 45° - 30° = 15°$

EJERCICIOS:

Obtener las siguientes integrales definidas.

1) $-\int_1^9 \frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}} =$

2) $\int_1^2 \frac{2x^3 - 3x + 2}{x}\, dx =$

3) $\int_0^3 3\sqrt{3x}\, dx =$

4) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} \sec^2 x\, dx =$

6. FORMAS DE INTEGRACION:

6.1 ANTI-DERIVADAS.

Con algunos ejemplos vamos a ver integrales que se resuelven inmediatamente, con alguna transformación de la expresión dada, o multiplicando por un factor que se necesite, o separando en sumandos, efectuando alguna operación indicada, o substituyendo alguna función trigonométrica que facilite la integración.

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$

se aplicó directamente la fórmula con n = 3

2) $\int (2x+3)x^{\frac{2}{3}}\,dx = \int 2x^{\frac{5}{3}}\,dx + \int 3x^{\frac{2}{3}}\,dx =$

$$= \frac{2x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$$

$$= \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c = \sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3x^2}{4} + \frac{9x}{5}\right) + c$$

se realizó la operación indicada y se efectuó como suma.

3) $\int e^{-x}\,dx = -\int (-1)e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$

se multiplicó por -1 dentro de la integral, y también antes de la integral para que no se altere.

4) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + c$

se consideró sen x como una función y cos x dx su diferen--cial.

5) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -L\cos x + c$

se sustituyó la tan x por $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y se multiplicó por -1, se estableció $-\frac{du}{u}$

6) $\int a^x \, dx = \frac{1}{L\,a} \int a^x \, La \, dx = \frac{1}{L\,a} a^x + c$

se multiplicó por La para completar la diferencial

7) $\int (\sec 4x - 1)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int \sec^2 4x \, 4dx - \frac{2}{4} \int \sec 4x \, dx + \int dx =$

$= \frac{1}{4} \tan 4x - \frac{1}{2} \int \frac{\sec 4x \, (\sec 4x + \tan 4x)}{\sec 4x + \tan 4x} \, dx + \int dx =$

$= \frac{1}{4} \tan 4x - \frac{1}{2} \frac{\sec 4x \tan 4x + \sec^2 4x}{\sec 4x + \tan 4x} \, dx + x =$

$= \frac{1}{4} \tan 4x - \frac{1}{2} L \, (\sec 4x + \tan 4x) + x + c$

se desarrolló el binomio cuadrado para integrar como suma. Se utilizó el artificio de multiplicar y dividir por la expresión (sec 4x + tan 4x) para obtener la diferencial en el numerador y la función en el denominador, e integrar.

EJERCICIOS:

Integrar las siguientes diferenciales:

1) $\int 6x^3 \, dx =$

2) $\int \frac{dx}{(x + 3)^2} =$

3) $\int \frac{x - 2}{x + 1} \, dx =$

4) $\int \frac{x^3}{x - 1} \, dx =$

5) $\int x(x + 1)^2 \, dx =$

6) $\int \frac{dx}{x^4} =$

7) $\int (x^2 - 5x)(2x - 5)\, dx =$

8) $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} =$

9) $\int e^{2x}\, dx =$

10) $\int a^x\, La\, dx =$

11) $\int 2 \tan x \sec^2 x\, dx =$

12) $\int (- \cot x)\, dx =$

6.2 INTEGRACION POR PARTES.

Sean u, v funciones de x. La diferencial del producto es:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

despejando

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

integrando la igualdad tenemos

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

por lo tanto

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Se utilizará como una fórmula, escogiendo como dv la expresión que se pueda integrar más facilmente y como u la expresión restante de la diferencial dada.

EJEMPLOS:

1) $\int x\,e^x\,dx =$

escogemos $u = x \quad ; \quad dv = e^x\,dx$

$du = dx \quad ; \quad v = e^x$

aplicando la fórmula

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c = e^x(x - 1) + c$$

2) $\int x^2\,Lx\,dx =$

escogemos $u = Lx \quad ; \quad dv = x^2\,dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$

substituyendo

$$\int x^2\,Lx\,dx = \frac{x^3}{3}Lx - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}Lx - \frac{1}{9}x^3 + c$$

3) $\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx =$

escogemos $u = x^2$; $dv = \text{sen } x\, dx$

$du = 2x\, dx$; $v = -\cos x$

substituyendo

$$\int x^2 \text{ sen } x\, dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x)\, 2x\, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

volviendo a aplicar la integración por partes,

escogemos $u = x$; $dv = \cos x\, dx$

$du = dx$; $v = \text{sen } x$

$$\int x \cos x\, dx = x \text{ sen } x - \int \text{sen } x\, dx = x \text{ sen } x + \cos x + c$$

substituyendo en la integral dada

$$\int x^2 \text{ sen } x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x + 2 \cos x + c =$$

$$= 2x \text{ sen } x + (2 - x^2) \cos x + c$$

4) $\int x \text{ ang tan } x\, dx =$

escogemos $u = \text{ang tan } x$; $dv = x\, dx$

$du = \frac{dx}{1 + x^2}$; $v = \frac{x^2}{2}$

aplicando la integración por partes

$$\int x \text{ ang tan } x\, dx = \frac{x^2}{2} \text{ang tan } x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx =$$

en la última integral efectuando la división indicada

$$\int x \text{ ang tan } x\, dx = \frac{x^2}{2} \text{ang tan } x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ ang tan } x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \text{ ang tan } x + c =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{2} \text{ ang tan } x - \frac{x}{2} + c$$

5) $\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx =$

escogemos $\quad u = \sec x \quad ; \quad dv = \sec^2 x \, dx$

$\quad du = \sec x \tan x \, dx; \quad v = \tan x$

substituyendo

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx =$$

substituyendo $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx =$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx =$$

se suman en el primer miembro las $\sec^3 x \, dx$, y se usará el artificio de multiplicar y dividir a la sec x por (sec x + tan x)

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \sec x \tan x + \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

por lo tanto

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} L(\sec x + \tan x) + c$$

6) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \, dx =$

escogemos $\quad u = \operatorname{sen} x \quad ; \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx$

$\quad du = \cos x \, dx \quad ; \quad v = - \cos x$

aplicando la fórmula y substituyendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$$\int sen^2 x\, dx = -\, senx \cos x + \int dx - \int sen^2 x\, dx$$

sumando las integrales iguales en el primer miembro

$$2\int sen^2 x\, dx = -\, sen\, x \cos x + x + c$$

substituyendo 2 sen x cos x = sen 2x

$$\therefore \quad \int sen^2 x\, dx = \frac{1}{4}\, sen\, 2x + \frac{x}{2} + c$$

EJERCICIOS:

Integrar por partes las siguientes diferenciales:

1) $\int Lx\, dx =$

2) $\int x^3 \sqrt{2 - x^2}\, dx =$

3) $\int x\, e^x\, dx =$

4) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 + x^2}} =$

5) $\int \cos x\, e^{-x}\, dx =$

6) $\int x^3\, L^2 x\, dx =$

7) $\int ang\, tan\, x\, dx =$

8) $\int x^2 \cos 3x\, dx =$

9) $\int x\, sen\, \frac{x}{2}\, dx =$

10) $\int x\, sen^2\, 3x\, dx =$

6.3 INTEGRACION POR FRACCIONES PARCIALES.

El integrando es un cociente de polinomios cuyo denominador es factorizable en factores lineales.

Se factoriza el denominador y la fracción dada se transforma en una suma de fracciones cuyos denominadores son los factores obtenidos y cuyos numeradores son constantes que se tienen que calcular, igualando la suma con la fracción dada.

EJEMPLOS:

1) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} =$

igualando $\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{1}{(u - a)(u + a)} =$

$$= \frac{A}{u + a} + \frac{B}{u - a} = \frac{A(u - a) + B(u + a)}{(u + a)(u - a)} =$$

$$= \frac{Au - Aa + Bu + Ba}{(u + a)(u - a)} = \frac{(A + B)u - (A - B)a}{u^2 - a^2}$$

igualando coeficientes del numerador

$$(A + B)u = 0 \quad ; \quad A + B = 0$$

$$-a(A - B) = 1 \quad ; \quad A - B = \frac{1}{a}$$

sumando

$$\begin{array}{rl} A + B &= 0 \\ A - B &= -\frac{1}{a} \\ \hline 2A &= -\frac{1}{a} \end{array}$$

$$\therefore \quad A = -\frac{1}{2a}$$

restando

$$\begin{array}{rl} A + B &= 0 \\ -A + B &= \frac{1}{a} \\ \hline 2B &= \frac{1}{a} \end{array}$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{2a}$$

substituyendo en la integral dada

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{-du}{u + a} + \int \frac{du}{u - a}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[- L\,(u + a) + L\,(u - a) \right] = \frac{1}{2a}\, L\, \frac{u - a}{u + a} + c$$

2) $\int \frac{(3x + 2)\, dx}{x^2 - 9x + 8} =$

factorizando el denominador e igualando la suma

$$\frac{3x + 2}{x^2 - 9x + 8} = \frac{3x + 2}{(x - 8)(x - 1)} = \frac{A}{x - 8} + \frac{B}{x - 1} =$$

$$= \frac{Ax - A + Bx - 8B}{(x - 8)(x - 1)} = \frac{(A + B)x - A - 8B}{(x - 8)(x - 1)}$$

igualando coeficientes

$$\begin{array}{rl} A + B &= 3 \\ -A - 8B &= 2 \\ \hline -7B &= 5 \\ \therefore\ B &= -\frac{5}{7} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 8A + 8B &= 24 \\ -A - 8B &= 2 \\ \hline 7A &= 26 \\ \therefore\ A &= \frac{26}{7} \end{array}$$

substituyendo en la integral dada

$$\int \frac{(3x + 2)\, dx}{x^2 - 9x + 8} = \frac{1}{7}\left[26 \int \frac{dx}{x - 8} - 5 \int \frac{dx}{x - 1} \right] =$$

$$= \frac{1}{7}\left[L(x - 8)^{26} - L(x - 1)^5\right] = L\, \sqrt[7]{\frac{(x - 8)^{26}}{(x - 1)^5}} + c$$

3) $\int \frac{(2x^2 + 5x - 4)\, dx}{(x - 3)^3} =$

factorizando e igualando la suma de fracciones

$$\frac{2x^2 + 5x - 4}{(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{C}{(x - 3)^3} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx - 3B + C}{(x - 3)^3} =$$

$$= \frac{Ax^2 + (-6A + B)x + 9A - 3B + C}{(x - 3)^3} =$$

igualando coeficientes

$$A = 2$$

$$-6A + B = 5 \quad ; \quad -6(2) + B = 5 \quad ; \quad B = 17$$

$$9A - 3B + C = -4 \quad ; \quad 9(2) - 3(17) + C = -4 \quad ; \quad C = 29$$

substituyendo

$$\int \frac{(2x^2 + 5x - 4)\,dx}{(x - 3)^3} = 2\int\frac{dx}{x - 3} + 17\int\frac{dx}{(x - 3)^2} + 29\int\frac{dx}{(x - 3)^3} =$$

$$= 2\,L\,(x - 3) - 17(x - 3)^{-1} - \frac{29}{2}(x - 3)^{-2} + c$$

$$\therefore \int \frac{(2x^2 + 5x - 4)\,dx}{(x - 3)^3} = 2\,L(x - 3) - \frac{17}{x - 3} - \frac{29}{2(x - 3)^2} + c$$

EJERCICIOS:

Integrar las siguientes diferenciales, utilizando el método de fracciones parciales.

1) $\int \frac{dx}{3x^2 - 7x + 4} =$

2) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8} =$

3) $\int \frac{(18 - 5x - 3x^2)}{x(x - 3)^2}\, dx =$

4) $\int \frac{(2x + 1)}{(x + 5)(x - 2)}\, dx =$

5) $\int \frac{(5x + 2)\, dx}{x^2 - 11x + 18} =$

6) $\int \frac{3\, dx}{x^2 \pm 1} =$

7) $\int \frac{(x^2 + 4x - 4)\, dx}{x^3 - 4x} =$

8) $\int \frac{(2x^2 - 3x + 7)}{x(x - 3)(x - 4)}\, dx =$

6.4 INTEGRACION DE FRACCIONES DE LOS TIPOS SIGUIENTES:

(I) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$; (II) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$

(III) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 2ax - c^2}$; (IV) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 2ax + 2a^2}$

$$\text{(I)} \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$$

tomamos $u^2 \pm a^2 = z^2$; la diferencial $2u\,du = 2z\,dz$

$$\therefore \quad \frac{du}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du + dz}{u + z}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \int \frac{du}{z} = \int \frac{du + dz}{u + z} = L(u + z) + c$$

$$= L(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + c$$

EJEMPLO:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 - 4}}$$

tomamos $u^2 = (x + 1)^2$; $u = x + 1$

la diferencial $2u\,du = 2(x + 1)\,dx$

$$dx = \frac{u\,du}{x + 1}$$

substituyendo en la integral dada:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4}} = L(u + \sqrt{u^2 - 4}\,) + c$$

$$= L\left(x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 - 4}\right) + c$$

$$= L\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right) + c$$

$$\text{(II)} \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - a^2 + 2ax - x^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x^2 - 2ax + a^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} =$$

$$= \frac{1}{a} \text{ ang sen } \frac{x - a}{a} + c$$

EJEMPLO:

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2}}$$

separando en dos integrales

$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2}} =$$

en la primera integral substituímos

$$x = -\left(-\frac{2x}{2}\right) + 3 - 3 = -\frac{1}{2}(-2x - 6) - 3$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x-6)\,dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2}} - \int \frac{3\,dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (2 - 6x - x\ )^{-\frac{1}{2}}(-2x - 6)\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - x^2 + 9 - 9}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(2 - 6x - x\ )^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{11 - (9 + 6x + x^2)}} =$$

$$= - \sqrt{2 - 6x - x^2} - \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{11}}}{\sqrt{1 - \frac{(x+3)^2}{11}}} =$$

$$= - \sqrt{2 - 6x - x^2} - \frac{1}{\sqrt{11}} \text{ ang sen } \frac{x+3}{\sqrt{11}} + c$$

$$\text{(III)} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - 2ax - c^2} =$$

completando cuadrado y factorizando el denominador

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2ax + a^2 - (a^2 + c^2)} = \int \frac{dx}{(x-a)^2 - (a^2 + c^2)} =$$

es del tipo $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$ y se resuelve por fracciones parciales

EJEMPLO:

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2 - 8x + 31} = \int \frac{3x\,dx}{x^2 - 8x + 31} - \int \frac{2\,dx}{x^2 - 8x + 31} =$$

en la primera integral substituímos

$$3x = \frac{3(2x)}{2} = \frac{3}{2}(2x - 8 + 8) = \frac{3}{2}(2x - 8) + 12$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{(2x-8)\,dx}{x^2 - 8x + 31} + \int \frac{10\,dx}{(x^2 - 8x + 16) + 15} =$$

$$= \frac{3}{2} L(x^2 - 8x + 31) + \frac{10}{15} \int \frac{dx}{\frac{(x-4)^2}{15} + 1} =$$

$$= \frac{3}{2} L\,(x^2 - 8x + 31) + \frac{10}{15} \text{ ang tan } \frac{(x-4)}{\sqrt{15}} + c$$

$$\text{(IV)} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - 2ax + 2a^2} =$$

completando cuadrado y factorizando

$$= \int \frac{dx}{x^2 - 2ax + a^2 + a^2} = \int \frac{dx}{(x - a)^2 + a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{(x - a)^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a^2} \text{ ang tan } \left(\frac{x - a}{a} \right) + c$$

EJEMPLO:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18} = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9 + 9} = \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 9} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{(x - 3)^2}{9} + 1} =$$

$$= \frac{1}{9} \text{ ang tan } \left(\frac{x - 3}{3} \right) + c$$

EJERCICIOS:

Integrar las siguientes diferenciales de los tipos I, II, III, IV

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 12}} =$

2) $\int \frac{(x - 4)\, dx}{\sqrt{x^2 - 10x}} =$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 6x - x^2}} =$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 32x}} =$

5) $\int \frac{(x - 5)\, dx}{x^2 + 12x + 45} =$

6) $\int \frac{dx}{x^2 - 12x - 13} =$

7) $\int \frac{(2x - 3)\, dx}{\sqrt{x^2 + 8x - 1}} =$

8) $\int \frac{x^3\, dx}{x^4 + x^2 + 1} =$

6.5 INTEGRACION POR SUBSTITUCION.

Consiste en reemplazar una expresión por otra equivalente con un cambio de variable.

En los ejemplos que presentaremos se verá que existen diferentes substituciones.

EJEMPLOS:

1) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$$

substituímos $\sqrt{x-2} = u$; $x - 2 = u^2$; $x = u^2 + 2$

su diferencial es $dx = 2u\,du$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}} = \int \frac{(u^2+2)\,2u\,du}{u} = \int 2\,u^2du + \int 4\,du =$$

$$= \frac{2\,u^3}{3} + 4\,u + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + 4\sqrt{x-2} + c$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

substituímos $x = \frac{1}{z}$; $dx = -\frac{dz}{z^2}$

$x^2 = \frac{1}{z^2}$; $z^2 = \frac{1}{x^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,(z^2+1)^{\frac{1}{2}}\,2z\,dz = -\frac{1}{2}\,\frac{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z^2+1} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c$$

3) $$\int \frac{x\ e^x\ dx}{(1 + x)^2} =$$

substituímos $1 + x = u$; $x = u - 1$; $dx = du$

$$\int \frac{x\ e^x\ dx}{(1 + x)^2} = \int \frac{(u - 1)\ e^{u-1}\ du}{u^2} = \underset{a}{\int \frac{e^{u-1}\ du}{u}} - \underset{b}{\int \frac{e^{u-1}\ du}{u^2}}$$

en la integral "a" se utiliza integrando por partes

$$\int v\ dw = vw - \int w\ dv$$

hacemos el cambio de variable

$$v = u^{-1} \quad ; \quad dw = e^{u-1}\ du$$

$$dv = -u^{-2} du \quad ; \quad w = e^{u-1}$$

a) $$\int \frac{e^{u-1}\ du}{u} = e^{u-1}\ u^{-1} - \int e^{u-1}\ \left(-\frac{du}{u^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{u-1}}{u} + \int \frac{e^{u-1}\ du}{u^2} + c$$

la segunda integral es igual a la integral "b" con signo contrario, entonces se eliminan y la integral dada queda:

$$\int \frac{x\ e^x\ dx}{(1 + x)^2} = \frac{e^{u-1}}{u} + c = \frac{e^x}{x + 1} + c$$

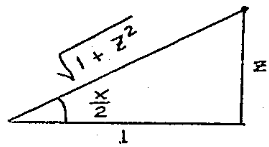
4) $$\int \frac{dx}{\text{sen } x} =$$

como: $$\text{sen } 2A = 2 \text{ sen } A \cos A$$

$$\text{sen } x = 2 \text{ sen } \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen } x} = \int \frac{dx}{2 \text{ sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

en el triángulo rectángulo



$$\text{sen } \frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \quad ; \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \quad .$$

$$\tan \frac{x}{2} = z \quad ; \quad \frac{x}{2} = \text{ang tan } z \quad ; \quad x = 2 \text{ ang tan } z \quad ; \quad dx = \frac{2\ dz}{1 + z^2}$$

substituyendo

$$\int \frac{dx}{\text{sen } x} = \int \frac{\frac{2\ dz}{1 + z^2}}{2\left(\frac{z}{1 + z^2}\right)\left(\frac{1}{1 + z^2}\right)} = \int \frac{dz}{z} = \text{L } z + c$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen } x} = \text{L } \tan \frac{x}{2} + c$$

EJERCICIOS:

Integrar las siguientes diferenciales por substitución

1) $\int \frac{x\ dx}{3 + 2x} =$

2) $\int \frac{(x + 2)\ dx}{x\ \sqrt{x}} =$

3) $\int x\ \sqrt{x + 2}\ dx =$

4) $\int \frac{8x\ dx}{(x^2 - 6)\ \sqrt{x^2 + 7}} =$

5) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} =$

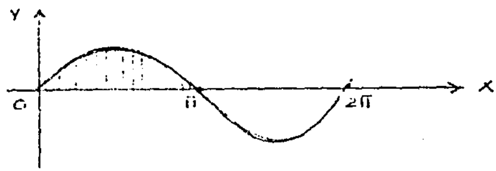
6) $\int \cos^3 x\ dx =$

7) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}\ dx}{x^4} =$

7. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL.

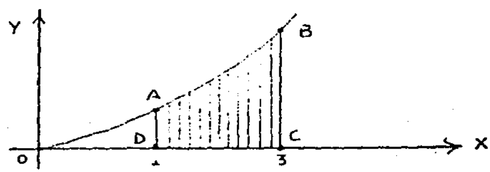
7.1 CALCULO DE AREAS PLANAS.

Ejemplo 1: Obtener el área limitada por la senoide $y = \text{sen } x$, el eje de las x, entre los valores $x = 0$, $x = \pi$



$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0° = -(-1) + 1 = 2 \ u^2$$

Ejemplo 2: Obtener el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x = 1$, $x = 3$



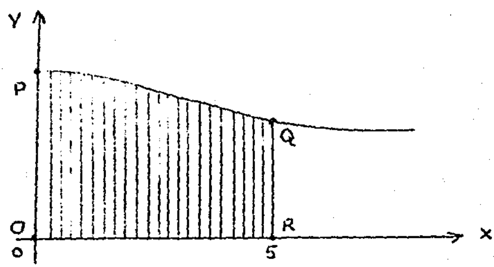
$$\text{Area ABCD} = \int_1^3 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{26}{3} \ u^2$$

Ejemplo 3: Obtener el área limitada por el eje de las x, el eje de las y, la ordenada correspondiente a $x = 5$ y la curva --- cuya ecuación es

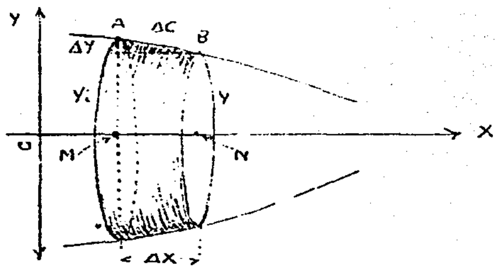
$$y = \frac{8 a^3}{x^2 + 4a^2}$$

$$\text{Area OPQR} = \int_0^5 \frac{8\ a^3\ dx}{x^2 + 4a^2} = 2a\int_0^5 \frac{dx}{\frac{x^2}{4a^2} + 1} =$$

$$= 2a\left[\text{ang tan } \frac{x}{2a}\right]_0^5 = 2a \text{ ang tan } \frac{5}{2a}$$



7.2 SUPERFICIES DE REVOLUCION.



Son las superficies generadas por la curva que representa a la ecuación de una función, al girar saliendo del plano y tomando como eje de giro el eje de las x ó el de y.

Sea $f(x) = y$ la ecuación dada, dividiendo en n intervalos de longitud Δx

$\overline{NB}$ es el radio de la circunferencia descrita al girar el punto B de la curva, y cualquier radio será $\overline{MA} = y + \Delta y$ el incremento de la curva Δc es el arco AB, que corresponde a un tronco de cono y su área es la semisuma de las circunferencias de las bases multiplicada por la generatriz Δc

$$s = \frac{2\pi y_i + 2\pi(y_i + \Delta y_i)}{2} \Delta c = 2\pi y\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

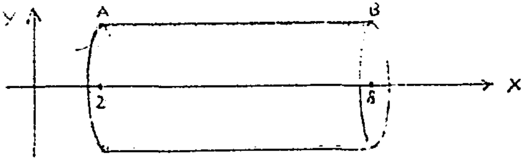
El área será el límite de la suma de esos incrementos generados por la curva:

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi\int_a^b y \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx$$

es decir: $\text{Area} = 2\pi\int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ rotación con xx'

$\text{Area} = 2\pi\int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$ rotación con yy'

Ejemplo 1: Calcular el área de la superficie generada por la recta $y = 3$, desde $x = 2$ hasta $x = 8$ alrededor de xx'



$y' = 0$

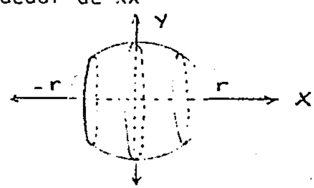
$$\text{Area} = 2\pi\int_2^8 3\ \sqrt{(1 + 0^2)}\ dx$$

$$\text{Area} = 2\pi\int_2^8 3\ dx = 6\pi[x]_2^8 = 6\pi(8 - 2) = 36\pi\ u^2$$

El segmento $\overline{AB}$ genera la superficie de un cilindro circular recto cuya base tiene 3 unidades de radio y 6 de altura:

$$\text{Area} = 2\pi r\ a = 2\pi(3)(6) = 36\pi$$

Ejemplo 2: Calcular el área generada por la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de xx'



$$2x + 2yy' = 0 \quad ; \quad y' = -\frac{x}{y} \quad ; \quad \text{Area} = 2\pi\int_{-x}^{x} y\ \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)^2}\ dx$$

$$\text{Area} = 2\pi\int_{-r}^{r} y\ \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\ dx = 2\pi r\int_{-r}^{r} dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 2\pi r[r - (-r)] =$$

$$\text{Area} = 4\pi r^2 \text{ unidades cuadradas}$$

EJERCICIOS:

1) Obtener el área de la superficie generada por la recta $y = \frac{2x}{3} + 1$ girando alrededor de xx' entre $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$

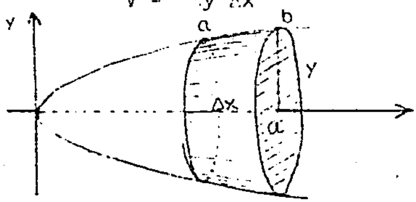
2) Obtener el área de la superficie generada por la parábola $x^2 = 8y$ girando alrededor de yy' entre $y_1 = 0$ y $y_2 = 6$

3) Obtener el área de la superficie generada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ girando alrededor de xx' entre $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$

7.3 VOLUMENES DE REVOLUCION:

Son los volúmenes generados en una curva al girar alrededor del eje de las x, describiendo círculos cuya área multiplicada por las diferenciales de abscisas, dará los volúmenes de n cilindros; el - radio de cada círculo es y, el área es πy^2, entonces el volúmen es

$$V = \pi y^2 \Delta x$$

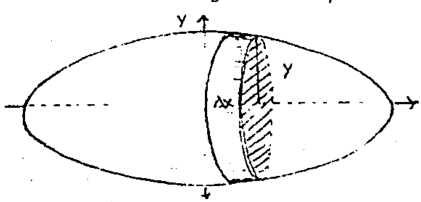


Aplicando el teorema fundamental, el límite de la suma de esos cilindros cuando $n \to \infty$ es la integral

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

Ejemplo: Obtener el volúmen generado por la elipse, entre 0 y a



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

despejando $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$$\frac{1}{2} V = \pi \int_0^a y^2 \, dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} [a^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^a = \pi \frac{b^2}{a^2} [a^3 - \frac{a^3}{3}] =$$

$$\frac{1}{2} V = \frac{2}{3} \pi b^2 a$$

$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

EJERCICIOS:

1) Obtener el volúmen generado por la recta $y = -\frac{3}{5}x + 4$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{20}{3}$ girando alrededor de xx'

2) Obtener el volúmen generado por la parábola $y^2 = 8x$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$

3) Obtener el volúmen generado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$

8. RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS.

2. Obtener las siguientes diferenciales

1) $$y = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

$$dy = 3x^2\,dx - 8x\,dx + 3\,dx$$

$$dy = (3x^2 - 8x + 3)\,dx$$

2) $$y = (x + 3)\sqrt{2 - x^2}$$

$$dy = (x + 3)\tfrac{1}{2}(2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,dx) + \sqrt{2 - x^2}\,dx$$

$$dy = -\frac{(x^2 + 3x)}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx + \sqrt{2 - x^2}\,dx$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}(-2x^2 - 3x + 2)dx$$

3) $$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$dy = \frac{x(2x\,dx) - (x^2 + 1)dx}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx$$

4) $$y = (7x^2 - 5)^3$$

$$dy = 3(7x^2 - 5)^2(14x\,dx)$$

$$dy = 42x\,(7x^2 - 5)^2dx$$

5) $$y = \tfrac{1}{2}\tan^2x$$

$$dy = \tan x\sec^2x\,dx$$

$$dy = \frac{\text{sen}\,x}{\cos^3x}\,dx$$

6) $$y = L\,\frac{x}{2}$$

$$dy = \frac{\frac{dx}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{dx}{x}$$

$y = \text{ang sec } 5x$

$dy = \dfrac{5\ dx}{5x\sqrt{25x^2 - 1}}$

$dy = \dfrac{dx}{x\sqrt{25x^2 - 1}}$

$y = e^{3x}$

$dy = e^{3x}\ 3\ dx = 3\ e^{3x}\ dx$

$xy = 2$

$x\ dy + y\ dx = 0$

$dy = -\dfrac{y}{x}\ dx$

$x^2 + y^2 = 25$

$2x\ dx + 2y\ dy = 0$

$dy = -\dfrac{x}{y}\ dx$

$x^3 + y = 2x$

$3x^2\ dx + dy = 2\ dx$

$dy = (2 - 3x^2)\ dx$

$\dfrac{x}{y} = 1 + x$

$\dfrac{y\ dx - x\ dy}{y^2} = dx$

$y\ dx - x\ dy = y^2 dx$

$dy = -\dfrac{(y^2 - y)}{x}\ dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} \sec^2 x\, dx = [\tan x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{12}} = \tan \frac{5\pi}{12} - \tan \frac{\pi}{3} =$$

$$= \tan 75° - \tan 60° = 3.7320 - 1.7320 = 2$$

Integrar las siguientes diferenciales.

Anti-derivadas.

$$\int 6x^3 dx = 6 \int x^3 dx = 6 \frac{x^4}{4} + c = \frac{3}{2} x^4 + c$$

$$\int \frac{dx}{(x + 3)^2} = (x + 3)^{-2}\, dx = \frac{(x + 3)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{x + 3} + c$$

$$\int \frac{x - 2}{x + 1}\, dx = dx - \int \frac{3}{x + 1}\, dx = x - 3\, L(x + 1) =$$

$$= x - L(x + 1)^3 + c$$

$$\int \frac{x^3}{x - 1}\, dx = \int (x^2 + x + 1 + \frac{1}{x - 1})\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + L(x - 1) + c$$

$$\int x(x + 1)^2\, dx = \int x(x^2 + 2x + 1)\, dx =$$

$$\int x^3\, dx + \int 2x^2\, dx + \int x\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}\, dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3x^3} + c$$

$$\int (x^2 - 5x)(2x - 5) dx = \frac{(x^2 - 5x)^2}{2} + c$$

$$\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int (e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} (e^x\, dx) =$$

3. Integrar las siguientes anti-derivadas:

1) $\int 5x^4\, dx = x^5 + c$

2) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

3) $-\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{ang} \cos x + c$

4) $\int (x^3 - x^2 + 3)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x + c$

5) $\int (5x^2 - 3)^2\, 10x\, dx = \frac{(5x^2 - 3)^3}{3} + c$

4. Obtener las siguientes integrales definidas:

1) $-\int_1^9 \frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \int_1^9 x^{-\frac{3}{2}} dx = [x^{-\frac{1}{2}}]_1^9 =$

$= \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^9 = \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

2) $\int_1^2 \frac{2x^3 - 3x + 2}{x}\, dx = \int_1^2 (2x^2 - 3 + \frac{2}{x})\, dx =$

$= [\frac{2x^3}{3} - 3x + 2\, Lx]_1^2 = \frac{2(2)^3}{3} - 3(2) + 2\, L2 -$

$- \frac{2(1)^3}{3} - 3(1) - 2\, L1 = \frac{16}{3} - 6 + 2\, L2 + 3 - 2\, L1 - \frac{2}{3} =$

$= \frac{5}{3} + 2\, L\, \frac{2}{1} = \frac{5}{3} + 2\, L\, 2$

3) $\int_0^3 3\sqrt{3x}\, dx = 3\sqrt{3}\int_0^3 \sqrt{x}\, dx = \left[3\sqrt{3}\ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 =$

$= 2\sqrt{3^4} - 2\sqrt{0} = 18$

$$\frac{(e^x - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x - 1} + c$$

9) $$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,2\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

10) $$\int a^x\,L\,a\,dx = a^x + c$$

11) $$\int 2\tan x\sec^2 x\,dx = \frac{2\tan^2 x}{2} + c = \tan^2 x + c$$

12) $$\int (-\cot x)\,dx = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = -L\operatorname{sen} x + c$$

6.2 Integrar por partes

1) $$\int Lx\,dx = x\,Lx - \int x\frac{dx}{x} = x\,Lx - x = x(Lx - 1) + c$$

$$u = Lx \quad ; \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$$

2) $$\int x^3\sqrt{2 - x^2}\,dx = \int x^2\sqrt{2 - x^2}\,x\,dx =$$

$$u = x^2 \quad ; \quad dv = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2 - x^2}(-2x\,dx)$$

$$du = 2x\,dx \quad ; \quad v = -\frac{1}{2}\frac{(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(2-x^2)^3}$$

$$-\frac{x^2}{3}\sqrt{(2 - x^2)^3} + \frac{1}{3}\int(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}(-2x\,dx) =$$

$$-\frac{x^2}{3}\sqrt{(2 - x^2)^3} + \frac{1}{3}\frac{(2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c =$$

$$= \quad - \frac{x^2}{3} \sqrt{(2 - x^2)^3} \quad + \frac{2}{15} \sqrt{(2 - x^2)^5} \quad + \quad c$$

3) $$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x = e^x(x - 1)$$

$$u = x \qquad ; \qquad dv = e^x\, dx$$

$$du = dx \qquad ; \qquad v = e^x$$

4) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}\, x = x\sqrt{1 + x^2} - \int \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

$$u = x \qquad ; \qquad dv = \tfrac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2x\, dx$$

$$du = dx \qquad ; \qquad v = \sqrt{1 + x^2}$$

multiplicando y dividiendo por $\sqrt{1 + x^2}$

$$= \quad x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{(1 + x^2)}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$$

entonces la integral pedida

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 + x^2}} = x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

pasando al primer miembro las dos integrales iguales

$$2 \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 + x^2}} = x\sqrt{1 + x^2} - L(x + \sqrt{1 + x^2}) + c$$

5) $$\int \cos x\, e^{-x}\, dx = -e^{-x} \cos x - \int (-e^{-x})(-\mathrm{sen}\ x)\, dx$$

$$u = \cos x \qquad ; \qquad dv = -e^{-x}\, (-dx)$$

$$du = -\ \mathrm{sen}\ x \qquad ; \qquad v = -e^{-x}$$

esta última integral se vuelve a integrar por partes

$$\int (-e^{-x})(-\text{sen } x)\, dx = -e^{-x} \text{ sen } x - \int(-e^{-x}) \cos x\, dx =$$

$$u = -\text{sen } x \quad ; \quad dv = e^{-x}\, dx$$

$$du = \cos x\, dx \quad ; \quad v = -e^{-x}$$

en la integral dada quedará:

$$\int \cos x\, e^{-x}\, dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \text{ sen } x - \int e^{-x} \cos x\, dx$$

$$\therefore \quad 2 \int \cos x\, e^{-x}\, dx = e^{-x}(\text{sen } x - \cos x) + c$$

$$\int \cos x\, e^{-x}\, dx = \frac{e^{-x}}{2} (\text{sen } x - \cos x) + c$$

6) $$\int x^3 L^2 x\, dx = \frac{x^4}{4} L^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 Lx\, dx =$$

$$u = L^2 x \quad ; \quad dv = x^3 dx$$

$$du = 2\, Lx \frac{dx}{x} \quad ; \quad v = \frac{x^4}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \int x^3 Lx\, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} Lx - \int \frac{x^3}{4}\, dx \right] = -\frac{x^4}{8} Lx + \frac{x^4}{32} + c$$

en la integral dada: $u = Lx \; ; \; dv = x^3 dx$; $du = \frac{dx}{x} \; ; \; v = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 L^2 x\, dx = \frac{x^4}{4} L^2 x - \frac{x^4}{8} Lx + \frac{x^4}{32} + c$$

$$\frac{x^4}{4} (L^2 x - Lx + \frac{1}{8}) + c$$

7) $$\int \text{ang tan } x\, dx = x \text{ ang tan } x - \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{1 + x^2} =$$

$$u = \text{ang tan } x \quad ; \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \quad ; \quad v = x$$

$$= x \text{ ang tan } x - \frac{1}{2} L(1 + x^2) + c$$

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{x^2}{3}\text{sen } 3x - \frac{2}{3}\int x \text{ sen } 3x\,dx$$

$$u = x^2 \quad ; \quad dv = \frac{1}{3}\cos 3x\,(3\,dx)$$

$$du = 2x\,dx \quad ; \quad v = +\frac{1}{3}\text{sen } 3x$$

la última integral se integra por partes

$$u = x \quad ; \quad dv = \frac{1}{3}\text{sen } 3x\,(3\,dx)$$

$$du = dx \quad ; \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

$$-\frac{2}{3}\int x \text{ sen } 3x\,dx = \frac{2}{9}x\cos 3x + \frac{2}{9}\int(-\frac{1}{3})\cos 3x\,(3\,dx)$$

en la integral dada:

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{x^2}{3}\text{sen } 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\text{sen } 3x + c$$

$$\int x \text{ sen } \frac{x}{2}\,dx = -2x\cos\frac{x}{2} + 2\int 2\cos\frac{x}{2}\,(\frac{1}{2}\,dx) =$$

$$u = x \quad ; \quad dv = 2 \text{ sen } \frac{x}{2}\,(\frac{1}{2}\,dx)$$

$$du = dx \quad ; \quad v = -2\cos\frac{x}{2}$$

$$\int x \text{ sen } \frac{x}{2}\,dx = -2x\cos\frac{x}{2} + 4 \text{ sen } \frac{x}{2} + c$$

$$\int x \text{ sen}^2 3x\,dx = \frac{x^2}{2}\text{ sen}^2 3x - \int x^2 \text{sen}^{\frac{1}{2}} 3x\cos 3x\; 3\,dx =$$

$$u = \text{sen}^2 3x \quad ; \quad dv = x\,dx$$

$$du = 2 \text{ sen } 3x\cos 3x\; 3\,dx \quad ; \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{sen}^2 3x - \frac{1}{2}\int x^2 \text{sen } 6x \; 3 \; dx$$

la última integral se hace otra vez por partes

$$u = x^2 \qquad ; \qquad dv = \frac{1}{2} \text{ sen } 6x \; (2) \; 3 \; dx$$

$$du = 2x \; dx \qquad ; \qquad v = -\frac{1}{2} \cos 6x$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2 \text{sen } 6x \cdot 3 \; dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\cos 6x + \int x \cos 6x \; dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{4}\cos 6x - \frac{1}{2}\int x \cos 6x \; dx$$

la última integral por partes:

$$-\frac{1}{2}\int x \cos 6x \; dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{6} \text{ sen } 6x - \frac{1}{36}\int \text{sen } 6x \; 6 \; dx\right] =$$

$$u = x \qquad ; \qquad dv = \frac{1}{6} \cos 6x \; 6 \; dx$$

$$du = dx \qquad ; \qquad v = \frac{1}{6} \text{ sen } 6x$$

$$= -\frac{x}{12} \text{ sen } 6x - \frac{1}{72} \cos 6x$$

en la integral dada

$$\int x \text{ sen}^2 3x \; dx = \frac{x^2}{2}\text{sen}^2 3x + \frac{x^2}{4}\cos 6x - \frac{x}{12} \text{ sen } 6x - \frac{1}{72} \cos 6x + c$$

6.3 Integrar por el método de fracciones parciales las siguientes:

1)
$$\int \frac{dx}{3x^2 - 7x + 4} = \int \frac{dx}{(3x - 4)(x - 1)} =$$

$$\frac{1}{(3x - 4)(x - 1)} = \frac{A}{3x - 4} + \frac{B}{x - 1} =$$

$$= \frac{A(x - 1) + B(3x - 4)}{(3x - 4)(x - 1)} = \frac{(A + 3B)x - A - 4B}{(3x - 4)(x - 1)}$$

$$A + 3B = 0 \qquad -A - 4B = 1 \qquad A = -3(-1)$$

$$A = -3B \qquad 3B - 4B = 1 \qquad A = 3$$

$$-B = 1$$

$$B = -1$$

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 7x + 4} = \int \frac{3\ dx}{3x - 4} + \int \frac{(-1)}{x - 1}\, dx =$$

$$= L(3x - 4) - L(x - 1) = L\,\frac{3x - 4}{x - 1} + c$$

2)
$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8} = \int \frac{dx}{(x - 2)(x - 4)}$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} =$$

$$\frac{A(x - 4) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{x(A + B) - 4A - 2B}{(x - 2)(x - 4)}$$

$$A + B = 0 \qquad -4A - 2B = 1$$

$$A = -B \qquad 4B - 2B = 1$$

$$B = \tfrac{1}{2} \ ; \ A = -\tfrac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 4} =$$

$$= -\frac{1}{2}L(x - 2) + \frac{1}{2}L(x - 4) = \frac{1}{2}L\left(\frac{x - 4}{x - 2}\right) = L\sqrt{\frac{x - 4}{x - 2}}$$

3) $$\int \frac{(18 - 5x - 3x^2)\,dx}{x(x-3)^2} =$$

$$\frac{-3x^2 - 5x + 18}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A}{x(x-3)^2}$$

igualando coeficientes

$$A + B = -3 \qquad A = 2 \qquad -6(2) - 3(-5) + C = 5$$

$$-6A - 3B + C = -5 \qquad 2 + B = -3 \qquad C = -5 + 12 - 15$$

$$9A = 18 \qquad B = -5 \qquad C = -8$$

$$\int \frac{(18 - 5x - 3x^2)}{x(x-3)^2}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{5}{x-3}\,dx - \int \frac{8}{(x-3)^2}dx =$$

$$= 2\,Lx - 5\,L(x-3) + 8(x-3)^{-1} + c =$$

$$= L\,\frac{x^2}{(x-3)^5} + \frac{8}{x-3} + c$$

4) $$\int \frac{(2x+1)}{(x+5)(x-2)}\,dx =$$

$$\frac{2x+1}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+5)}{(x+5)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + 5B}{(x+5)(x-2)}$$

identificando coeficientes

$$A + B = 2 \qquad -2A + 5B = 1 \qquad 7B = 5$$

$$A = 2 - B \qquad -2(2 - B) + 5B = 1 \qquad B = \frac{5}{7}$$

$$-4 + 2B + 5B = 1 \qquad A = 2 - \frac{5}{7}$$

$$A = \frac{9}{7}$$

$$\int \frac{(2x+1)}{(x+5)(x-2)}\,dx = \frac{9}{7}\int\frac{dx}{x+5} + \frac{5}{7}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{9}{7}L(x+5) + \frac{5}{7}L(x-2) = L\sqrt[7]{(x+5)^9} + L\sqrt[7]{(x-2)^5}$$

$$= L\sqrt[7]{(x+5)^9(x-2)^5}$$

5) $$\int \frac{(5x+2)}{x^2-11x+18}\,dx =$$

$$\frac{5x+2}{x^2-11x+18} = \frac{5x+2}{(x-9)(x-2)} =$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x-9)}{(x-9)(x-2)} = \frac{x(A+B)-2A-9B}{(x-9)(x-2)}$$

$A + B = 5 \qquad -2A - 9B = 2 \qquad B = -\frac{12}{7}$

$A = 5 - B \qquad -2(5-B) - 9B = 2 \qquad A = 5 + \frac{12}{7}$

$-7B = 12 \qquad A = \frac{47}{7}$

$$\int \frac{(5x+2)}{x^2-11x+18}\,dx = \frac{47}{7}\int\frac{dx}{x-9} - \frac{12}{7}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{47}{7}L(x-9) - \frac{12}{7}L(x-2) =$$

$$L\sqrt[7]{\frac{(x-9)^{47}}{(x-2)^{7}}} + c$$

6) $$\int \frac{3}{x^2-1}\,dx =$$

$$\frac{3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

$$A + B = 0 \qquad\qquad A + B = 0$$

$$\underline{A - B = 3} \qquad\qquad \underline{-A + B = -3}$$

$$2A = 3 \qquad\qquad 2B = -3$$

$$A = \frac{3}{2} \qquad\qquad B = -\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{3}{x^2 - 1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x + 1} =$$

$$= \frac{3}{2} L(x - 1) - \frac{3}{2} L(x + 1) =$$

$$L \sqrt[2]{\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^3}$$

7) $$\int \frac{(x^2 + 4x - 4)}{x^3 - 4x}\, dx = \int \frac{(x^2 + 4x - 4)}{x(x - 2)(x + 2)}\, dx$$

$$\frac{x^2 + 4x - 4}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2} =$$

$$= \frac{A(x^2 - 4) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)}{x(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \frac{(A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A}{x(x - 2)(x + 2)} =$$

igualando coeficientes

$$A + B + C = 1 \qquad\qquad B - C = 2 \qquad\qquad 2C = -2$$

$$2B - 2C = 4 \qquad\qquad B = 2 + C \qquad\qquad C = -1$$

$$-4A = -4 \qquad\qquad 1 + 2 + C + C = 1 \qquad\qquad B = 2 - 1$$

$$A = 1 \qquad\qquad B = 1$$

$$\int \frac{(x^2 + 4x - 4)}{x^3 - 4x}\, dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x - 2} - \int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$= Lx + L(x - 2) - L(x + 2) =$$

$$L\left(\frac{x(x-2)}{x+2}\right) + c$$

8) $$\int \frac{(2x^2 - 3x + 7)}{x(x-3)(x-4)}\, dx =$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 7}{x(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4} =$$

$$= \frac{A(x^2 - 7x + 12) + B(x^2 - 4x) + C(x^2 - 3x)}{x(x-3)(x-4)} =$$

$$= \frac{(A + B + C)x^2 + (-7A - 4B - 3C)x + 12A}{x(x-3)(x-4)}$$

$$A + B + C = 2 \qquad \frac{7}{12} + B + C = 2 \qquad 7\left(\frac{7}{12}\right) + 4B + 3C = 3$$

$$-7A - 4B - 3C = -3 \qquad B + C = \frac{17}{12} \qquad 4B + 3C = \frac{36}{12} - \frac{49}{12}$$

$$12\,A = 7$$

$$A = \frac{7}{12}$$

$$4B + 3C = -\frac{13}{12} \qquad C = \frac{81}{12}$$

$$-4B - 4C = -\frac{68}{12} \qquad B = \frac{17}{12} - \frac{81}{12}$$

$$-C = -\frac{81}{12} \qquad B = -\frac{64}{12}$$

$$\int \frac{(2x^2 - 3x + 7)}{x(x-3)(x-4)}\, dx = \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x} - \frac{64}{12}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{81}{12}\int \frac{dx}{x-4}$$

$$= \frac{7}{12}\, L\, x - \frac{64}{12}\, L(x-3) + \frac{81}{12}\, L(x-4) + c$$

$$L\sqrt[12]{\frac{x^7(x-4)^{81}}{(x-3)^{64}}} + c$$

6.4 Integrar las siguientes fracciones tipo I,II,III,IV

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 12}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 8}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x - 2)^2 + 8}} = L[(x - 2) + \sqrt{(x - 2)^2 + 8}] + c$$

$$= L[(x - 2) + \sqrt{x^2 - 4x + 12}\,] + c$$

2) $$\int \frac{(x - 4)\, dx}{\sqrt{x^2 - 10x}} = \frac{1}{2}\int (x^2 - 10x)^{-\frac{1}{2}}(2x - 10)\, dx + \int \frac{6\, dx}{\sqrt{x^2 - 10x}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2 - 10x}}{\frac{1}{2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 10x + 25 - 25}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x - 5)^2 - 25}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x} + L(x - 5 + \sqrt{x^2 - 10x}\,) + c$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 6x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{13 - (x^2 - 6x + 9)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{13 - (x - 3)^2}} = \text{ang sen } \frac{x - 3}{\sqrt{13}} + c$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 32\,x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 32x + 16^2 - 16^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 16)^2 - 16^2}} = L(x + 16 + \sqrt{x^2 + 32x}\,) + c$$

5) $$\int \frac{(x - 5)\,dx}{x^2 + 12x + 45} = \int \frac{(x - 5)\,dx}{x^2 + 12x + 36 + 9} =$$

$$\int \frac{(x - 5)\,dx}{(x + 6)^2 + 9} = \int \frac{x\,dx}{(x + 6)^2 + 9} - 5\int \frac{dx}{(x + 6)^2 + 9} =$$

$$z = x + 6 \quad ; \quad x = z - 6$$

$$z^2 = (x + 6)^2 \quad ; \quad dx = dz$$

$$2z\,dz = 2(x + 6)\,dx$$

$$= \int \frac{(z - 6 - 5)\,dz}{z^2 + 9} = \int \frac{z\,dz}{z^2 + 9} - 11\int \frac{dz}{z^2 + 9} =$$

$$= \frac{1}{2} L(z^2 + 9) + \frac{11}{3} \text{ ang cot } \frac{z}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} L[(x + 6)^2 + 9] + \frac{11}{3} \text{ ang cot } \frac{x + 6}{3} + c$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2 - 12x - 13} = \int \frac{dx}{x^2 - 12x + 36 - 49} =$$

$$\int \frac{dx}{(x - 6)^2 - 49}$$ por fracciones parciales

$$\frac{1}{(x - 6)^2 - 49} = \frac{A}{(x - 6 + 7)} + \frac{B}{(x - 6 - 7)} =$$

$$= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 13} = \frac{A(x - 13) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 13)} =$$

$$= \frac{(A + B)x + (-13A + B)}{(x + 1)(x - 13)}$$

igualando coeficientes

$$A + B = 0 \qquad -13A + B = 1 \qquad B = \frac{1}{14}$$

$$A = -B \qquad 13B + B = 1$$

$$14B = 1 \qquad A = -\frac{1}{14}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12x - 13} = -\frac{1}{14}\int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{14}\int \frac{dx}{x - 13} =$$

$$-\frac{1}{14} L(x + 1) + \frac{1}{14} L(x - 13) =$$

$$L \sqrt[14]{\frac{x - 13}{x + 1}} + c$$

7) $$\int \frac{(2x - 3)\,dx}{\sqrt{x^2 + 8x - 1}} = \int \frac{(2x + 8 - 11)\,dx}{\sqrt{x^2 + 8x - 1}} =$$

$$= \int (x^2 + 8x - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x + 8)\,dx - 11\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x - 1}}$$

$$= 2\sqrt{x^2 + 8x - 1} - 11\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 16 - 17}} =$$

$$= 2\sqrt{x^2 + 8x - 1} - 11\int \frac{dx}{\sqrt{(x + 4)^2 - 17}} =$$

$$= 2\sqrt{x^2 + 8x - 1} - 11\, L\left[(x + 4) + \sqrt{x^2 + 8x - 1}\, \right] + c$$

8) $$\int \frac{x^3\,dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{4}\int \frac{(4x^3 + 2x - 2x)\,dx}{x^4 + x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(4x^3 + 2x)\,dx}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

la segunda integral, por fracciones parciales.

$$\frac{2x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x}{x^4 + x^2 + 1 - x^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 - x^2} =$$

$$= \frac{A}{x^2 + 1 - x} + \frac{B}{x^2 + 1 + x} = \frac{Ax^2 + A + Ax + Bx^2 + B - Bx}{(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)} =$$

$$= \frac{(A + B)x^2 + (A - B)x + (A + B)}{x^4 + x^2 + 1}$$

igualando coeficientes

$$A + B = 0 \qquad A - B = 2 \qquad A + B = -B + B = 0$$

$$A = -B \qquad A = 2 + B \qquad -B = 2 + B$$

$$A + B = 0 \qquad -2B = 2$$

$$A = -B \qquad B = -1 \quad ; \quad A = 1$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{2x\ dx}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + 1 - x} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + 1 + x} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}\ \text{ang tan}\ \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}\ \text{ang tan}\ \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{12}}\left[\text{ang tan}\ \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \text{ang tan}\ \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right] + c$$

por lo tanto la integral pedida es:

$$\int \frac{x^3\ dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{4}L(x^4 + x^2 + 1) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{12}}\left[\text{ang tan}\ \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \text{ang tan}\ \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right] + c$$

6.5 Integrar por substitución

1) $$\int \frac{x\ dx}{3 + 2x} =$$

$$u = 2x \quad ; \quad x = \frac{u}{2}$$

$$du = 2\ dx \qquad ; \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{x\ dx}{3 + 2x} = \frac{1}{4} \int \frac{u\ du}{u + 3}$$

efectuando la división

$$= \frac{1}{4} \int du - \frac{3}{4} \int \frac{du}{u + 3} = \frac{1}{4} u - \frac{3}{4} L(u + 3) =$$

$$= \frac{1}{4} [\ 2x - 3L(2x + 3)\ ] + c = \frac{x}{2} - L \sqrt[4]{(2x + 3)^3} + c$$

2) $$\int \frac{(x + 2)\ dx}{x\ \sqrt{x}} =$$

$$u = \sqrt{x} \qquad u^2 = x$$

$$2u\ du = dx$$

$$\int \frac{(x + 2)\ dx}{x\ \sqrt{x}} = \int \frac{(u^2 + 2)\ 2u\ du}{u^3} = \int 2\ du + 4 \int \frac{du}{u^2} =$$

$$= 2u - \frac{4}{u} + c = 2\ \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + c$$

3) $$\int x\ \sqrt{x + 2}\ dx$$

$$x + 2 = u^2 \qquad ; \qquad x = u^2 - 2$$

$$dx = 2u\ du \qquad ; \qquad u = \sqrt{x + 2}$$

$$\int x\ \sqrt{x + 2}\ dx = (u^2 - 2)\ u\ 2u\ du = 2 \int (u^4 - 2u^2)\ du =$$

$$= \frac{2\ u^5}{5} - \frac{4\ u^3}{3} + c = \sqrt{(x + 2)^3} \left[\frac{2(x + 2)}{5} - \frac{4}{3} \right] + c$$

4) $$\int \frac{8x\ dx}{x^2 - 6\sqrt{x^2 + 7}} =$$

$$x^2 + 7 = u^2 \qquad 2x\ dx = 2u\ du$$

$$x^2 = u^2 - 7 \qquad x\ dx = u\ du$$

substituyendo

$$\int \frac{8u\ du}{u^2 - 7 - 6u} = 4 \int \frac{(2u - 6 + 6)\ du}{u^2 - 6u - 7} =$$

$$= 4 \int \frac{(2u - 6)\ du}{u^2 - 6u - 7} + 24 \int \frac{du}{u^2 - 6u + 9 - 16} =$$

$$= 4 \int \frac{(2u - 6)\ du}{u^2 - 6u - 7} + 24 \int \frac{du}{(u - 3)^2 - 16} =$$

$$= 4\ L(u^2 - 6u - 7) + 24 \int \frac{du}{(u - 3)^2 - 16} =$$

esta última integral se resuelve por parciales:

$$\frac{1}{(u - 3)^2 - 16} = \frac{A}{u - 3 + 4} + \frac{B}{u - 3 - 4} =$$

$$= \frac{Au - 7A + Bu + B}{(u + 1)(u - 7)} = \frac{(A + B)u - 7A + B}{(u + 1)(u - 7)}$$

igualando coeficientes

$$A + B = 0 \qquad -7A + B = 1 \qquad -8A = 1$$

$$A = -B \qquad -7A - A = 1 \qquad A = -\frac{1}{8}\ ;\ B = \frac{1}{8}$$

$$24 \int \frac{du}{(u - 3)^2 - 16} = -\frac{24}{8} \int \frac{du}{u + 1} + \frac{24}{8} \int \frac{du}{u - 7} =$$

$$= -3\ L\ (u + 1) + 3\ L\ (u - 7) + c$$

$$\int \frac{8x\ dx}{x^2 - 6\sqrt{x^2 + 7}} = 4L(u^2 - 6u - 7) + L\frac{(u - 7)^3}{(u + 1)^3} + c$$

$$\int \frac{8x\ dx}{x^2 - 6\sqrt{x^2 + 7}} = 4L(x^2 + 7 - 6\sqrt{x^2 + 7} - 7) +$$

$$+ L\frac{(\sqrt{x^2 + 7} - 7)^3}{(\sqrt{x^2 + 7} + 1)^3} + c$$

5)
$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} =$$

$$z = e^{\frac{x}{2}} \qquad dx = \tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\, dz$$

$$z^2 = e^x \qquad dx = \frac{2\ dz}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$z^{-1} = e^{\frac{-x}{2}} \qquad dx = \frac{2\ dz}{z}$$

substituyendo

$$\int \frac{2\ dz}{z(z + z^{-1})} = \int \frac{2\ dz}{z^2 + 1} = 2 \text{ ang tan } z + c = 2 \text{ ang tan } e^{\frac{x}{2}} + c$$

6)
$$\int \cos^3 x\ dx = \int \cos^2 x \cos x\ dx =$$

como $\quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ; \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$$\int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\ dx = \int \cos x\ dx - \frac{1}{3} \int 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x\ dx =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + c$$

7)
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\ dx =$$

$$x^2 - a^2 = z^2 \qquad x^2 = z^2 + a^2 \qquad 2x\ dx = 2z\ dz$$

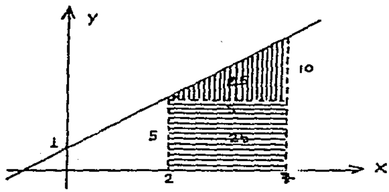
substituyendo

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2z\ dz}{(z^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2}\ \frac{1}{z^2 + a^2} = -\frac{1}{2\ x^2} + c$$

7.1 Area bajo la curva.

1) Calcular el área limitada por la recta $y = 2x + 1$, el eje de las x, y las ordenadas correspondientes a las abscisas -- $x = 2$ y $x = 7$.

$$\text{Fórmula} \qquad A = \int_a^b y\,dx$$

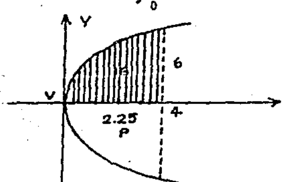


$$A = \int_2^7 (2x + 1)\,dx = [x^2 + x]_2^7 = 7^2 + 7 - 2^2 - 2 = 50\ u^2$$

2) Calcular el área limitada por el eje de las x, la parábola $y^2 = 9x$ y la ordenada correspondiente a $x = 4$

$$y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

$$A = 3\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 3\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$



$$A = [2x^{\frac{3}{2}}]_0^4 = 2\sqrt{4^3} = 16\ u^2$$

$$V(0,0)\ ;\ \text{l.r.} = 9 = 4p\ ;\quad p = \frac{9}{4}\ ;\ p = 2.25$$

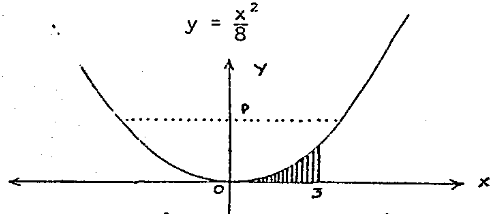
$$\text{para } x = 4\ ;\ y = \sqrt{36} = 6$$

3) Calcular el área limitada por la parábola $x^2 = 8y$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

$V(0,0)$; l.r. = 8

$4p = 8$; $p = 2$

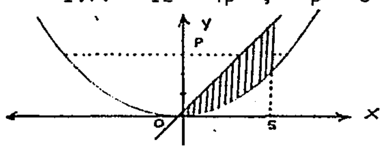
$\therefore \quad y = \frac{x^2}{8}$



$$\text{Area} = \int_0^3 \frac{x^2}{8}dx = \frac{1}{8}\int_0^3 x^2\, dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{8}\ \frac{(3)^3}{3} = \frac{9}{8} = 1.12\ u^2$$

4) Calcular el área comprendida entre la recta $y = x$, la parábola $x^2 = 12\,y$ y la ordenada correspondiente a la abscisa $x = 5$

l.r. = 12 = 4p ; p = 3



Area bajo la recta $y = x$: $A_1 = \int_0^5 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} = 12.5\ u^2$

Area bajo la curva $y = \frac{x^2}{12}$: $A_2 = \int_0^5 \frac{x^2}{12}\, dx = \left[\frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^5 = \frac{1}{12}\left(\frac{5^3}{3}\right) = \frac{125}{36} = 3.4\ u^2$

Area entre la curva y la recta : $A = A_1 - A_2 = 12.5 - 3.4$

$A = 9.1\ u^2$

7.2 Areas de superficie de revolución:

1) Obtener el área de la superficie generada por la recta $y = \frac{2x}{3} + 1$ girando alrededor de xx' entre $x = 2$ y $x = 6$

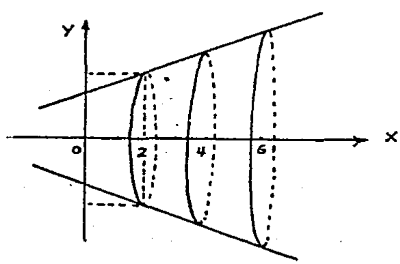
$$\text{Fórmula} \quad \text{Area} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad ; \; y' = \frac{2}{3}$$

$$\text{Area} = 2\pi \int_2^6 \left(\frac{2x}{3} + 1\right)\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_2^6 \left(\frac{2x}{3} + 1\right)\sqrt{\frac{9 + 4}{9}}\, dx = \frac{2\pi\sqrt{13}}{3} \int_2^6 \left(\frac{2x}{3} + 1\right) dx =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{13}}{3} \left[\frac{x^2}{3} + x\right]_2^6 = \frac{2\pi\sqrt{13}}{3} \left[\frac{(6)^2}{3} + (6) - \frac{(2)^2}{3} - 2\right] =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{13}}{3} \; \frac{44}{3} = \frac{88\sqrt{13}\,\pi}{9} = 110.75 \text{ u}^2$$



2) Obtener el área de la superficie generada por la parábola $x^2 = 8y$ entre $y = 0$ y $y = 6$ girando alrededor de yy'

$$\text{Fórmula: Area} = 2\pi \int_e^d x\sqrt{1 + (x')^2}\, dy$$

despejando $x = \sqrt{8y}$; $2xx' = 8$; $x' = \dfrac{4}{x}$.

$$(x')^2 = \frac{16}{x^2} = \frac{16}{8y} = \frac{2}{y}$$

$$\text{Area} = 2\pi\int_0^6 x\sqrt{1 + \frac{16}{x^2}}\, dy = 2\pi \int_0^6 \sqrt{x^2 + 16}\, dy$$

$$\text{Area} = 2\pi\int_0^6 \sqrt{8y + 16}\, dy = 2\pi \sqrt{8} \int_0^6 \sqrt{y + 2}\, dy =$$

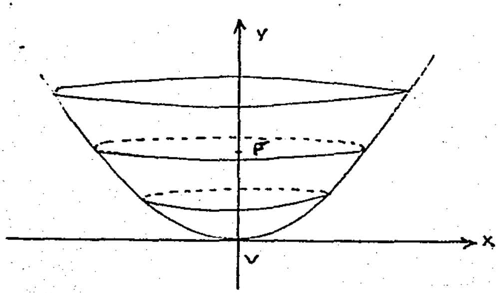
$$= \left[2\pi \sqrt{8}\, \frac{(y + 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^6 = \frac{4\sqrt{8}\pi}{3} \left[\sqrt{(y + 2)^3} \right]_0^6 =$$

$$= \frac{4\sqrt{8}\pi}{3} \left(\sqrt{8^3} - \sqrt{2^3} \right) = \frac{4\pi}{3} (64 - 8) =$$

$$= \frac{224\pi}{3} = 234.57 \ u^2$$

$v(0,0)$; $l.r. = 8$; $p = 2$

para $y = 6$; $x = \sqrt{48} = 6.9$



3) Obtener el área de la superficie generada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ girando alrededor de xx' entre $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$

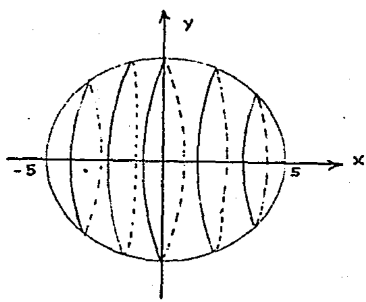
$$2x + 2yy' = 0 \quad ; \quad y' = -\frac{x}{y}$$

$$\text{Area} = 2\pi \int_{-5}^{5} y\sqrt{1 + \left[-\frac{x}{y}\right]^2}\, dx = 2\pi \int_{-5}^{5} y\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-5}^{5} 5\, dx = 10\pi[x]_{-5}^{5} = 10\pi[5 - (-5)] =$$

$$= 100\,\pi$$

$$\text{Area} = 314.16\ u^2$$



7.3 Volúmenes de Revolución

1) Obtener el volúmen generado por la recta $y = -\frac{3}{5}x + 4$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{20}{3}$ girando alrededor de xx'

$$\text{Fórmula} \quad V = \int_a^b \pi y^2\, dx$$

$$y^2 = \frac{9x^2}{25} - \frac{24x}{5} + 16$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{20}{3}} \left(\frac{9x^2}{25} - \frac{24x}{5} + 16\right) dx = \pi\left[\frac{9}{25}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{24}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right) + 16x\right]_0^{\frac{20}{3}} =$$

$$= \pi\left[\ \frac{3}{25}\left(\frac{20}{3}\right)^3 - \frac{12}{5}\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 16\left(\frac{20}{3}\right)\right] \qquad =$$

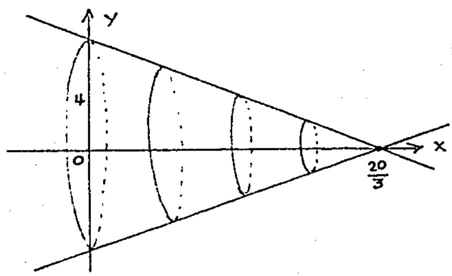
$$V = \pi(35.55 - 106.66 + 106.66) = 111.70\ u^3$$

por geometría el cono tiene

$$V = \frac{1}{3}\,S_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi\ 4^2 \cdot \frac{20}{3}$$

$$V = \frac{1}{9}(3.1416)(16)(20)$$

$$V = 111.70\ u^3$$

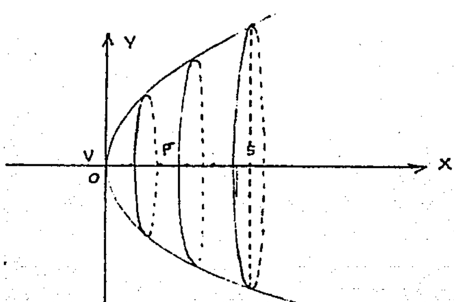


2) Obtener el volúmen generado por la parábola $y^2 = 8x$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$

$$V = \int_a^b \pi y^2\ dx = \pi\int_0^5 8x\ dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^5 = \pi[4(5)^2] = 314.16\ u^3$$

$V(0,0)$; l.r. $= 8$; $p = 2$

$y = \pm\sqrt{8(5)}$ $\qquad$ $y = \pm 6.3$



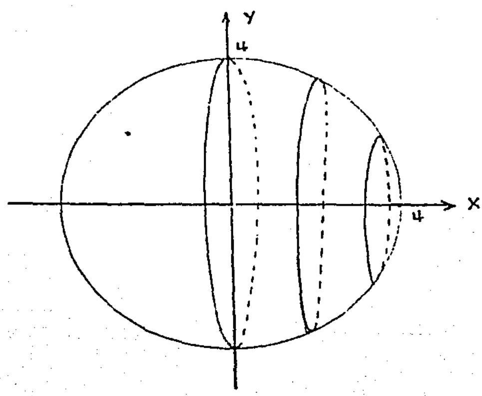
3) Obtener el volúmen generado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$

$$V = \pi\int_0^4 (16 - x^2)\ dx = \pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 =$$

$$V = \pi[16(4) - \frac{4^3}{3}] = 134.04\ u^3$$

por geometría $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,(3.1416)(4^3) = \frac{1}{2}(268.08) = 134.04\ u^3$$



9. B I B L I O G R A F I A

1.- APOSTOL, T.M. calculus. REVERTE. 1972

2.- FRALEIGH,J.B. cálculo con geometría analítica. FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO. 1984

3.- LEITHOLD, L. el cálculo con geometría analítica.HARLA. 1973

4.- SPIVAK, M. calculus, calculo infinitesimal. REVERTE. 1981

5.- SWOKOWSKI, E.W. cálculo con geometría analítica. IBEROAMERICA. 1982