24.
22

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# ESPACIOS TOPOLOGICOS LINEALMENTE ORDENADOS

## TESIS PROFESIONAL

**Que para obtener el título de:**

**M A T E M A T I C O**

**P r e s e n t a n**


**ARMANDO MARTINEZ GARCIA y**

**MANUEL IBARRA CONTRERAS**


**México, D. F.** **1986**

# PREFACIO

En este trabajo nos dedicamos a desarrollar los conceptos fundamentales de los espacios topológicos linealmente ordenados. El material que aquí se presenta presupone que el lector ha estudiado a fondo los cursos de topología I y II que se imparten en la facultad.

El objetivo principal de esta tesis ha sido la de recopilar en un fascímil, hasta donde fuera posible, un material de mucha importancia que solo aparece en la literatura de manera dispersa y poco explícita.

En el primer capitulo se presentan las nociones básicas de teoría de conjuntos que se utilizarán en el libro y se definen los espacios en cuestión así como también se dan algunos ejemplos que seran tratados en la mayoría de los capítulos. Concluimos el capítulo con el estudio del comportamiento de los subespacios de un espacio lineal ordenado.

En el capitulo dos el resultado principal es que todo espacio lineal ordenado es un espacio colectivamente normal y hereditariamente colectivamente normal.

En el tercer capítulo se demuestra una caracterización de compacidad en términos de la estructura de orden y se prueba que todo espacio linealmente ordenado puede ser inmerso en un espacio lineal ordenado compacto, llamado la compactación natural de $X$. Se enuncian condiciones necesarias y suficientes para que $\beta X$, la compactación de Stone-Čech de $X$, sea un espacio lineal ordenado, así como también discutimos cuándo $\beta X$ coincide con la compactación natural de $X$. Concluimos el capítulo probando que, conceptos referentes a compacidad, que en general no coinciden, en la categoría de los espacios lineales son equivalentes.

En el cuarto capítulo hacemos un breve estudio de las funciones cardinales para espacios topológicos linealmente ordenados.

En el capítulo quinto probamos que los conceptos de paracompacidad fuerte, paracompacidad y metacompacidad coinciden en esta clase de espacios que estudiamos. También se dan dos caracterizaciones de paracompacidad; una, en términos de su estructura de orden y otra que introduce el concepto de conjunto estacionario de ordinales.

En el capítulo 6 damos una caracterización de los espacios topológicos linealmente ordenados conexos en términos de su estructura de orden; estudiamos algunas propiedades sencillas de estos espacios y finalizamos con un teorema de ordenabilidad para espacios conexos.

En el séptimo capítulo estudiamos los espacios linealmente ordenados que son susceptibles de ser metrizables, dando una caracterización sencilla de éstos, en términos de la diagonal en el producto topológico. También probamos algunos teoremas para metrizabilidad presuponiendo que los espacios tienen base puntual-numerable, y finalmente damos una caracterización de metrizabilidad que se basa esencialmente en la estructura de orden.

Al final de la tesis viene un apéndice en donde se da la lista de resultados de topología general que fueron utilizados directamente en el desarrollo del trabajo.

En la idea original de este trabajo estaba previsto otro capítulo en donde se estudiarían los espacios topológicos ordenables, es decir, aquellos espacios para los cuales existe un orden con la propiedad de que la topología inducida por éste coincide con la topología original. Sin embargo, dado que este problema ya fué tratado en una tesis de la Facultad [A] remitimos al lector interesado en este estudio a ella ó bién si se quiere una información bibliográfica más completa sobre el tema, ver [$L_3$] pp 248-252.

Finalmente, deseamos agradecer al Profesor Angel

Tamaríz su apoyo y dirección en la realización del presente trabajo; y a los Profesores Adalberto García-Máynez, Sylvia de Neymet, Alejandro Bravo y Javier Páez el haber revisado el material aquí tratado.

# LISTA DE SIMBOLOS

$<$ : relación de orden

$(A,B)$ : cortadura de $X$ con sección inferior $A$ y sección superior $B$.

$\mathrm{Card}(X)$ : cardinalidad de $X$

$W(\alpha)$ : conjunto de todos los ordinales menores que $\alpha$.

$\sup A$ : supremo de $A$

$\inf A$ : ínfimo de $A$

$\tau_<$ : topología inducida por "$<$"

$\mathcal{L}$: La clase de espacios topológicos linealmente ordenados

$\tau_<^{(Y)}$: topología relativa inducida en $Y$ por $\tau_<$

$\bar{A}$ : la cerradura del conjunto $A$

$\bar{A}^{\beta X}$: la cerradura de $A$ con respecto a $\beta X$

$\omega_1$ : primer ordinal no numerable

$X^+$: compactación natural de $X$

$\mathbb{N}$: conjunto de números naturales

$\mathbb{R}$ : conjunto de números reales

$\beta X$: compactación de Stone-Čech de $X$.

$\mathrm{cof}\,\Omega$ : cofinalidad de $\Omega$

$\mathcal{C}(X)$: conjunto de funciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}^*(X)$: conjunto de funciones continuas y acotadas de $X$ en $\mathbb{R}$.

$\tau_-(u)$ : tipo izquierdo de $u$

$\tau_+(u)$ : tipo derecho de $u$

$\chi(x, X)$: carácter de $x$ en $X$

$\chi(X)$: carácter de $X$

$c(X)$: celularidad de $X$

$\ell(X)$: número de Lindelöf de $X$

$h\ell(X)$: número hereditario de Lindelöf de $X$

$d(X)$: densidad de $X$

$hd(X)$: número hereditario de densidad de $X$.

$\tau(x, X)$: estrechez de $x$ en $X$

$\tau(X)$: estrechez de $X$

$\psi(x, X)$: pseudocarácter de $x$ en $X$

$\psi(X)$: pseudocarácter de $X$

$w(X)$ : peso de $X$

$nw(X)$: peso neto de $X$

$St(x, \mathcal{A})$: estrella de $x$ con respecto a $\mathcal{A}$.

$B(m)$ : Espacio de Baire de peso $m$.

$\Delta$ : diagonal de $X$.

# CONTENIDO

# CAPITULO 1

# NOCIONES BASICAS

## 1.- CONJUNTOS.

El material de esta sección nos servirá como una revisión de algunos conceptos de Teoría de Conjuntos que serán usados a lo largo de este trabajo. No nos dedicamos a discutir cada-uno de los conceptos pues esto es material de otro trabajo; al lector interesado en estudiar más a fondo este tema puede consultar [Ku-Mo] ó [Ka].

1.1.1.- DEFINICION. Sea $X$ un conjunto

(1) Una relación $<$ en $X$ es un subconjunto del producto cartesiano $X\times X$. (si $(x,y)\in <$ escribiremos $x<y$)

(2) Si $<$ es una relación en $X$, diremos que $<$ ordena linealmente a $X$, o que $<$ es un orden lineal en $X$, si $<$ tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $x<y$ y $y<z$ entonces $x<z$

(b) Si $x<y$ entonces $y<x$ no se cumple

(c) si $x\neq y$ entonces $x<y$ ó $y<x$.

A la pareja $(X,<)$ le llamaremos conjunto lineal-

<u>mente ordenado</u>. Cuando no haya lugar a confusión llamaremos a $(X,<)$ simplemente como $X$.

(3) Si $\leq$ es una relación en $X$, diremos que $\leq$ <u>ordena parcialmente</u> a $X$ o que $\leq$ es un <u>orden parcial</u> si $\leq$ satisface:

(a) para toda $x \in X$ $x \leq x$

(b) si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$

(c) si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$. ∎

A la pareja $(X, \leq)$ le llamaremos <u>conjunto parcialmente ordenado</u> (cuando no exista confusión simplemente $X$).

Diremos que $x_0 \in X$, con $X$ conjunto linealmente ordenado, es el <u>elemento mínimo ó primer elemento</u> (<u>elemento máximo ó último elemento</u>) de $X$ si $x_0 < x$ $(x < x_0)$ para toda $x \in X - \{x_0\}$. Como todo subconjunto de un conjunto linealmente ordenado es él mismo linealmente ordenado, los elementos mínimo y máximo de un subconjunto de un conjunto linealmente ordenado están bien definidos. Claramente, los elementos mínimo y máximo no necesariamente existen, como por ejemplo el caso de la recta real $\mathbb{R}$ con el orden usual en donde no existe ni mínimo ni máximo.

<u>1.1.2.- DEFINICION</u>: Una <u>cortadura</u> de un conjunto linealmente ordenado $(X,<)$ es un par $(A,B)$ de sub-

conjuntos de $X$ tal que $X = A \cup B$ y si $x \in A$ y $y \in B$ entonces $x < y$. $(A,B)$ es una cortadura trivial si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$ y si $A \neq \emptyset \neq B$ diremos que $(A,B)$ es una cortadura propia ó interior.

En la definición anterior $A$ y $B$ son llamadas la sección inferior y la sección superior, respectivamente, de la cortadura. Claramente las secciones no se intersectan. Para toda cortadura interior $(A,B)$ de un conjunto linealmente ordenado exactamente una de las siguientes cuatro condiciones se satisface:

(1) $A$ tiene último elemento y $B$ tiene primer elemento,
(2) $A$ tiene último elemento y $B$ no tiene primer elemento,
(3) $A$ no tiene último elemento y $B$ tiene primer elemento,
(4) $A$ no tiene último elemento y $B$ no tiene primer elemento.

Cuando la condición (1) se satisface diremos que la cortadura es un <u>salto</u> y si (4) se satisface diremos que la cortadura es un <u>hueco interior</u>. El caso en que $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$ y $X$ no tenga primero ni último elemento, $(A,B)$ será llamada un hueco extremo izquierdo ó un hueco extremo derecho, respectivamente.

<u>1.1.3.- DEFINICION</u>: Sea $(X,<)$ un conjunto linealmente ordenado.

(1) Diremos que $X$ es <u>densamente ordenado</u> si nin-

guna cortadura de $X$ es un salto.

(2) $X$ es continuamente ordenado si ninguna cortadura de $X$ es salto ó hueco interior.

Es claro que se cumple lo siguiente:
$X$ es densamente ordenado si y solo si para todo par $x, y \in X$ tal que $x < y$ existe $z \in X$ con la propiedad de que $x < z < y$, es decir, si $X$ no contiene cualquier par de elementos consecutivos. Además, $X$ es continuamente ordenado si y solo si además de lo anterior, para todo subconjunto no vacío $X_0 \subseteq X$, el conjunto $\{x \in X : a < x$ para cada $a \in X_0 - \{x\}\}$ es vacío ó tiene un elemento mínimo

1.1.4.-DEFINICION: Sean $(X, <)$, $(Y, <')$ conjuntos linealmente ordenados.

(1) "<" es llamado un "buen orden, y $(X, <)$ bien ordenado, si $<$ cumple con la propiedad de que todo subconjunto no vacío $X_0 \subseteq X$ tiene un elemento mínimo.

(2) Una función $f: X \to Y$ es preservadora de orden si para cada par $x, y \in X$ tal que $x < y$ se tiene que $f(x) <' f(y)$.

(3) Si $f: X \to Y$ es una función suprayectiva y preservadora de orden entonces $f$ será llamada un isomorfismo de orden (y diremos que $X$ y $Y$ son similares)

(4) Si $f: X \to Y$ es una función inyectiva entonces $f$ es un isomorfismo de antiorden si $x < y$ es equivalente a $f(y) <' f(x)$.

Los conjuntos $X$ y $Y$ se dice que son <u>equipotentes</u> si existe una función biyectiva $f: X \to Y$. La relación "$X$ es equipotente a $Y$" es una relación de equivalencia en la clase de todos los conjuntos y el cardinal de $X$, denotado por $\mathrm{card}(X)$, es igual a su clase de equivalencia. Entonces, la igualdad $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ se cumple si y sólo si $X$ y $Y$ son equipotentes. El número cardinal asignado al conjunto de los números naturales es denotado por $\aleph_0$ (aleph zero) y el número cardinal asignado al conjunto de todos los números reales es denotado por $\mathfrak{c}$. Un conjunto es numerable si es finito o tiene cardinalidad $\aleph_0$.

Por otro lado, a todo conjunto bien ordenado $X$ le asignamos un número ordinal $\alpha$ el cual es llamado el <u>tipo de orden</u> de $X$. Los tipos de orden de conjuntos bien ordenados $X$ y $Y$ son iguales si y sólo si son similares.

Dado que toda función preservadora de orden es inyectiva, si $X$ y $Y$ son similares, entonces $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$. Por lo tanto, a todo número ordinal $\alpha$ le corresponde un número cardinal, la cardinalidad de cualquier conjunto bien ordenado de tipo $\alpha$; este número cardinal es llamado la <u>cardinalidad de $\alpha$</u>. Si $\mathrm{card}(\alpha) \leq \aleph_0$ diremos que el número ordinal $\alpha$ es <u>numerable</u>.

Sean $\alpha, \beta$ dos números ordinales que son los tipos de orden de $X$ y $Y$, respectivamente. Diremos que $\alpha$ es <u>menor que</u> $\beta$, ó que $\beta$ <u>es mayor que</u> $\alpha$, y escribiremos $\alpha < \beta$ ó $\beta > \alpha$, si existe $y_0 \in Y$ tal que los conjuntos $X$ y $\{y \in Y : y <_Y y_0\}$ son similares. Se puede probar que todo conjunto de números ordinales es bien ordenado por la relación $<$. Cualquier conjunto bien ordenado de tipo $\alpha$ es similar al conjunto de todos los números ordinales menores que $\alpha$ linealmente ordenados por la relación $<$.

<u>1.1.5.- DEFINICION</u>: (1) Un número ordinal $\lambda$ es un <u>número límite</u> si para toda $\xi < \lambda$ existe un número ordinal $\alpha$ tal que $\xi < \alpha < \lambda$.

(2) Si el número ordinal $\xi$ no es un número límite, es decir, si existe $\alpha$ número ordinal que inmediatamente precede a $\xi$, entonces diremos que $\xi$ <u>es el sucesor de</u> $\alpha$ y $\alpha$ es <u>el predecesor de</u> $\xi$ y escribimos $\xi = \alpha + 1$ (es conocido que todo número ordinal tiene un sucesor).

(3) Si el conjunto de todos los números ordinales menores que un número límite $\lambda$ contiene un subconjunto $A$ de tipo $\alpha$ tal que para todo $\xi < \lambda$ existe $\xi' \in A$ con $\xi < \xi' < \lambda$, entonces diremos que el número $\alpha$ es <u>cofinal</u> con $\lambda$.

(4) Un número ordinal infinito $\lambda$ (es decir, el tipo de orden de un conjunto infinito bien ordenado) es un <u>numero inicial</u> si $\lambda$ es el mínimo entre todos los números ordinales $\alpha$ que satisfacen $card(\alpha) = card(\lambda)$

(5) Un número ordinal inicial $\lambda$ es <u>regular</u> si no existe $\alpha < \lambda$ el cual es cofinal con $\lambda$.

Para todo número cardinal $\mathfrak{m}$ existe un número ordinal inicial $\lambda$ tal que $card(\lambda) = \mathfrak{m}$ y este $\lambda$ es único. En este sentido un número cardinal $\mathfrak{m}$ es <u>regular</u> si el número ordinal inicial $\lambda$ que satisface $card(\lambda) = \mathfrak{m}$ es regular. El número inicial de cardinalidad $\aleph_0$ es denotado por $\omega_0$; este es el tipo de orden del conjunto de todos los enteros positivos con el orden natural.

El mínimo número ordinal de cardinalidad mayor que $\aleph_0$, es decir, el mínimo número ordinal no numerable, es denotado por $\omega_1$ y la cardinalidad de $\omega_1$ es denotada por $\aleph_1$. El mínimo número ordinal de cardinalidad mayor que $\aleph_1$ es denotado por $\omega_2$ y la cardinalidad de $\omega_2$ es denotada por $\aleph_2$. Más generalmente, a cualquier número ordinal $\alpha$ le corresponde un número cardinal $\aleph_\alpha$ y un número ordinal $\omega_\alpha$ el cual es el número inicial de cardinalidad $\aleph_\alpha$; se puede probar que todo número cardinal es igual a $\aleph_\alpha$ para algún $\alpha$.

<u>1.1.6.- DEFINICION</u>: Sea $\alpha$ un número ordinal y $X$ un conjunto arbitrario; por una <u>sucesión transfinita de tipo $\alpha$</u> con valores en $X$ entenderemos cualquier función $f : W(\alpha) \longrightarrow X$ donde <u>$W(\alpha)$</u> es el conjunto de todos los números ordinales menores que $\alpha$.

<u>1.1.7.- OBSERVACION</u>.- El elemento de $X$ asignado al número ordinal $\xi < \alpha$ es denotado por $x_\xi$ en lugar de $f(\xi)$ y la sucesión transfinita misma es denotada por $x_0, x_1, \ldots, x_\xi, \ldots \quad \xi < \alpha$.

Para definir las sucesiones transfinitas usualmente se aplica el

<u>1.1.8.- TEOREMA</u>: Supongamos que son dados un conjunto $Z$ y un número ordinal $\alpha$. Sea $G$ el conjunto de todas las sucesiones transfinitas de tipos menores que $\alpha$ con valores en $Z$. Para cada función $h$ que asigna a todo $g \in G$ un elemento de $Z$ existe exactamente una sucesión transfinita $f$ de tipo $\alpha$ tal que

$$f(\xi) = h(f|_{W(\xi)}) \quad \text{para toda } \xi < \alpha$$

donde $f|_{W(\xi)}$ es la sucesión transfinita de tipo $\xi$ obtenida restringiendo $f$ al conjunto $W(\xi)$ de todos los números ordinales menores que $\xi$.

<u>1.1.9.- DEFINICION</u>: Sea $X$ un conjunto linealmente ordenado y sea $A \subseteq X$.

(1) $u \in X$ es el <u>supremo de A</u> ($\sup A$) si $x \leq u$ para toda $x \in A$ y si para cualquier $v \in X$ tal que $x \leq v$ para toda $x \in A$ se satisface que $u \leq v$. ($x \leq u$ significa que $x < u$ ó $x = u$).

(2) $u \in X$ es el <u>ínfimo de A</u> ($\inf A$) si $u \leq x$ para toda $x \in A$ y si para cualquier $v \in X$ tal que $v \leq x$ para toda $x \in A$ se satisface que $v \leq u$

(3) A es <u>cofinal</u> en $X$ si para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $x \leq a$.

(4) $x_0 \in X$ es un <u>elemento maximal</u> de $X$ si $x_0 \leq x$ con $x \in X$ implica que $x_0 = x$.

<u>AXIOMA DE ELECCION</u>: Para toda familia $\{X_s\}_{s \in S}$ de conjuntos no vacíos existe una función $f: S \longrightarrow \bigcup_{s \in S} X_s$ tal que $f(s) \in X_s$ para cada $s \in S$.

Otras dos formas alternativas de enunciar este axioma y que son teoremas importantes dentro de la teoría de conjuntos son las siguientes:

<u>1.1.10.- TEOREMA DE ZERMELO</u>: Sobre todo conjunto $X$ existe una relación $<$ que bien ordena a $X$.

<u>1.1.11.- LEMA DE ZORN</u>: Si para cada subconjunto linealmente ordenado $A$ de un conjunto $X$ parcialmente ordenado por $\leq$ existe $x_0 \in X$ tal que $x \leq x_0$ para toda $x \in A$ entonces existe un elemento maximal en $X$.

## 2.- ESPACIOS TOPOLOGICOS LINEALMENTE ORDENADOS.

En la presente sección daremos las definiciones y propiedades elementales de los espacios en cuestión.

Sea $X$ un conjunto linealmente ordenado por $<$ y conteniendo al menos dos elementos. Para $a, b \in X$ tal que $a<b$ sean

$$(a,b) = \{x \in X : a < x < b\}$$

$$(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}$$

$$(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}.$$

Estos conjuntos serán llamados intervalos abiertos.

A continuación mostraremos que la familia $\beta$ de todos los intervalos abiertos en $X$ tiene las propiedades:

(1) Para cualesquiera $I_1, I_2 \in \beta$ y todo punto $x \in I_1 \cap I_2$ existe $I \in \beta$ tal que $x \in I \subseteq I_1 \cap I_2$.

(2) Para toda $x \in X$, existe $I \in \beta$ tal que $x \in I$.

Para probar (1) vamos a dividirla en casos. Sean $I_1, I_2 \neq \emptyset$

(i) $I_1 = (a,b)$, $a<b$ ; $I_2 = (c,d)$, $c<d$

Si $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ (el caso $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ es inmediato) vamos a suponer que $a<c<b<d$ ; entonces $x \in I_1 \cap I_2$ implica que $a<x<b$ y $c<x<d$ y como $a<c<b<d$ entonces $c<x<b$. Por tanto, si $I = (c,b)$ entonces $x \in I \subseteq I_1 \cap I_2$ y $I \in \beta$. Si $c<a<b<d$ entonces $(a,b)$ satisface lo deseado. otros casos son similares.

(ii) $I_1 = (a,b)$, $a<b$ ; $I_2 = (\leftarrow, c)$.

Supongamos que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, entonces para $x \in I_1 \cap I_2$ se cumple que : $a<x<b$ y $x<c$. Por tanto, si $a<c<b$, $I=(a,c)$ ; ó $a<b<c$, $I=(a,b)$ cumple con lo requerido.

(iii) $I_1 = (a,b)$, $I_2 = (c, \rightarrow)$ es análogo a (ii).

(iv) $I_1 = (\leftarrow, a)$, $I_2 = (\leftarrow, b)$ con $a<b$.

Si $x \in I_1 \cap I_2$, entonces $x<a$ y $x<b$. Por tanto $I = (\leftarrow, a)$ es el intervalo que se requiere.

(v) Si $I_1 = (a, \rightarrow)$, $I_2 = (b, \rightarrow)$ con $a<b$, $I = (b, \rightarrow)$ es el intervalo deseado.

(vi) Cuando $I_1 = (a, \rightarrow)$, $I_2 = (\leftarrow, b)$ y $a<b$ entonces $I=(a,b)$ satisface $x \in I \subseteq I_1 \cap I_2$.

Para demostrar (2) sea $x \in X$; como $X$ consta de al menos dos puntos existe $y \in X - \{x\}$ y de aquí $x<y$ ó $y<x$ ; cuando $x<y$, $x \in (\leftarrow, y) \in \beta$ ; si $y<x$ entonces $x \in (y, \rightarrow) \in \beta$.

La <u>topología inducida sobre $X$ por el orden lineal</u> $\leq$ es la topología generada sobre $X$ por la base $\beta$. En este sentido damos la siguiente:

<u>1.2.1.- DEFINICION</u>: Un <u>espacio topológico linealmente ordenado</u> es un espacio cuya topología puede ser inducida por un orden lineal.

<u>1.2.2.- OBSERVACION</u>: (1) Todo espacio linealmente ordenado es $T_1$. En efecto, si $X$ es un espacio topológico linealmente ordenado basta probar que

para toda $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado; pero $X-\{x\} = (\leftarrow, x) \cup (x, \rightarrow)$ es un conjunto abierto, es decir, $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(2) Enseguida probaremos que si $X$ es un espacio topológico linealmente ordenado entonces $X$ satisface el ser $T_2$. Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x < y$. Si existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, entonces $(\leftarrow, z)$ y $(z, \rightarrow)$ son dos abiertos en $X$ tal que no se intersectan y $x \in (\leftarrow, z)$ y $y \in (z, \rightarrow)$. Si no existen puntos entre $x$ y $y$, los intervalos abiertos $(\leftarrow, y)$ y $(x, \rightarrow)$ cumplen con lo requerido.

<u>1.2.3-EJEMPLOS</u>: (1) $(\mathbb{R}, \tau_<)$ donde $<$ es el orden usual en $\mathbb{R}$ y $\tau_<$ es la topología inducida sobre $\mathbb{R}$ por $<$. Este espacio resulta ser el espacio de los números reales con su topología usual.

(2) Sea $X = I \times I$ donde $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ con el siguiente orden lineal: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ ó $x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2$ (este orden es llamado el orden lexicográfico). Entonces $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado. De aquí en adelante nos referiremos a él como el cuadrado lexicográfico. Más adelante probaremos que este espacio es compacto y primero numerable pero no separable ni perfectamente normal.

(3) $(W(\omega_1), \tau_<)$ es otro ejemplo de espacio topológico linealmente ordenado.

CONVENCION: $\mathcal{L} = \{X : X$ es un espacio topológico linealmente ordenado$\}$.

1.2.4.- DEFINICION: Sea $X$ un espacio topológico. Diremos que $X$ es un espacio secuencial si: Un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y solo si dada cualquier sucesión en $A$ todos sus puntos límite están en $A$.

Es conocido que todo espacio primero numerable es un espacio secuencial pero en general el inverso no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo ([Fe] pp 18-19): $X = \{0\} \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i\right)$ donde para cada $i \in \mathbb{N}$ $X_i = \{1/i\} \cup \left(\bigcup_{j=i^2}^{\infty} \{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\}\right)$; la topología sobre $X$ se genera por el sistema de vecindades $\beta(x)$ siguiente: si $x = \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$ entonces $x$ es punto aislado de $X$, es decir $\beta(x) = \{\{x\}\}$; si $x = \frac{1}{i}$ entonces $\beta(x) = \left\{X_i - \bigcup_{j=i^2}^{k}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right)\right\}_{k=i^2}^{\infty}$ si $x = 0$ entonces $\beta(x)$ constará de todos los subconjuntos que se pueden obtener de $X$ removiendo un número finito de $X_i$'s y un número finito de puntos de la forma $\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\}$ en todos los restantes $X_i$'s. Entonces $X$ es un espacio secuencial que no es primero numerable, pues el cero no tiene base local numerable.

Sin embargo en espacios linealmente ordenados estas dos clases de espacios coinciden como lo muestra el siguiente:

1.2.5.- TEOREMA: Si $X \in \mathcal{L}$ es secuencial, entonces $X$ es primero numerable.

Antes de pasar a la demostración mencionaremos lo siguiente: Sea $(A,B)$ una cortadura en $X$ que es un salto; si $x$ es el último elemento de $A$ y $y$ el primer elemento de $B$ entonces diremos que $x$ tiene un salto a la derecha y que $y$ tiene un salto a la izquierda. Con esto en mente pasemos a la

Demostración de 1.2.5: Sea $x \in X$. Si no existen saltos a la izquierda de $x$, entonces $x \in \overline{(\leftarrow, x)}$ y por lo tanto existe una sucesión de elementos en $(\leftarrow, x)$ tal que $\lim \{a_n\} = x$. En efecto, si suponemos que para cualquier sucesión convergente $\{a_n\} \subseteq (\leftarrow, x)$ $x \neq \lim \{a_n\}$ entonces tendríamos que $(\leftarrow, x)$ es un conjunto no cerrado en donde toda sucesión convergente tiene su límite en $(\leftarrow, x)$ lo cual contradice la secuencialidad de $X$. Análogamente existe $\{b_n\}_{n \in N}$ sucesión de elementos en $(x, \rightarrow)$, si $x$ no tiene saltos a la derecha, tal que $x = \lim \{b_n\}$; por tanto, si $x$ no tiene saltos ni a la izquierda ni a la derecha existen tales sucesiones que, sin pérdida de generalidad podemos suponer creciente y decreciente, respectivamente; de aquí obtenemos que $\{(a_n, b_n)\}_{n \in N}$ es una base local numerable en $x$. En el caso de que $x$ tenga un salto a la izquierda pero no a la derecha existen $\{b_n\} \subseteq (x, \rightarrow)$ sucesión decreciente tal que

$\lim_{n\to\infty} b_n = x$ y $a \in X$ predecesor inmediato de $x$ en $X$; entonces $\{(a,b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable en $x$. Si $x$ tiene un salto a la derecha y no tiene saltos a la izquierda la obtención de la base local en $x$ es análoga al caso anterior. Finalmente si $x$ tiene un salto a la derecha y otro a la izquierda entonces existen $a, b \in X$ tal que $a < x < b$ con $a$ predecesor inmediato de $x$ y $b$ sucesor inmediato de $x$ en $X$. Por tanto $\{(a,b)\}$ es una base local numerable en $x$. Hemos probado entonces que $X$ es primero numerable. †

En lo que resta de esta sección nos dedicaremos a estudiar el comportamiento de los subespacios de un espacio topológico linealmente ordenado. De aquí en adelante usaremos la siguiente notación: si $(X,\tau_<) \in \mathcal{L}$ y $Y$ es un subconjunto de $X$, entonces la topología relativa inducida en $Y$ por $\tau_<$ será denotada por $\tau_<^{(Y)}$ y la topología en $Y$ generada por el orden lineal de $X$ restringido a $Y$ será denotada por $\tau_{<_Y}$. Entonces veremos que en general los espacios $(Y, \tau_<^{(Y)})$ y $(Y, \tau_{<_Y})$ no coinciden y daremos algunas condiciones suficientes para que estos espacios coincidan.

<u>1.2.6.- PROPOSICION</u>: Sea $X$ un espacio con la topo-

$\lim_{n\to\infty} b_n = x$ y $a \in X$ predecesor inmediato de $x$ en $X$; entonces $\{(a, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable en $x$. Si $x$ tiene un salto a la derecha y no tiene saltos a la izquierda la obtención de la base local en $x$ es análoga al caso anterior. Finalmente si $x$ tiene un salto a la derecha y otro a la izquierda entonces existen $a, b \in X$ tal que $a < x < b$ con $a$ predecesor inmediato de $x$ y $b$ sucesor inmediato de $x$ en $X$. Por tanto $\{(a, b)\}$ es una base local numerable en $x$. Hemos probado entonces que $X$ es primero numerable. $\dagger$

En lo que resta de esta sección nos dedicaremos a estudiar el comportamiento de los subespacios de un espacio topológico linealmente ordenado. De aquí en adelante usaremos la siguiente notación: si $(X, \tau_<) \in \mathcal{L}$ y $Y$ es un subconjunto de $X$, entonces la topología relativa inducida en $Y$ por $\tau_<$ será denotada por $\tau_<^{(Y)}$ y la topología en $Y$ generada por el orden lineal de $X$ restringido a $Y$ será denotada por $\tau_{<_Y}$. Entonces veremos que en general los espacios $(Y, \tau_<^{(Y)})$ y $(Y, \tau_{<_Y})$ no coinciden y daremos algunas condiciones suficientes para que estos espacios coincidan.

<u>1.2.6.- PROPOSICION</u>: Sea $X$ un espacio con la topo-

logía inducida por el orden lineal $<$. Si $Y \subseteq X$ contiene al menos dos elementos entonces la topología de $Y$ como subespacio de $X$ es más fina que la topología inducida sobre $Y$ por la restricción del orden lineal $<$ a $Y$.

Demostración: Queremos probar que $\tau_{<_Y} \subseteq \tau_<^{(Y)}$. Observemos que una base para $\tau_<^{(Y)}$ es:

$$\beta_<^{(Y)} = \{ I \cap Y : I \text{ es un intervalo abierto en } X \}$$

y una base para $\tau_{<_Y}$ es:

$$\beta_{<_Y} = \{ I : I \text{ es un intervalo en } Y \}.$$

Sea $A \in \tau_{<_Y}$, entonces deseamos mostrar que para cada $x \in A$ existe $H \in \beta_<^{(Y)}$ tal que $x \in H \subseteq A$. Pero $x \in A \in \tau_{<_Y}$ implica que existe $I_x^Y$ intervalo en $Y$ tal que $x \in I_x^Y \subseteq A$. Por tanto, si $I_x^{(Y)} = (a,b)_Y = \{y \in Y : a < y < b\}$ con $a, b \in Y \subseteq X$ entonces $H = (a,b)_X \cap Y$ cumple con $x \in H \subseteq A$ y $H \in \beta_<^{(Y)}$. Ahora, si $I_x^Y = (a,\rightarrow)_Y$ ó $I_x^Y = (\leftarrow, b)_Y$ con $a, b \in Y$ entonces tenemos que $H = (a,\rightarrow)_X \cap Y$ ó $H = (\leftarrow, b)_X \cap Y$, respectivamente, cumplen con lo requerido. Por tanto, en cualquier caso si $A \in \tau_{<_Y}$ entonces para cada $x \in A$ existe $H \in \beta_<^{(Y)}$ tal que $x \in H \subseteq A$ y esto implica que $A \in \tau_<^{(Y)}$, es decir, hemos probado que $\tau_{<_Y} \subseteq \tau_<^{(Y)}$. †.

Notemos que en la demostración anterior $(a,b)_Y$, $(\leftarrow,a)_Y$ y $(a,\rightarrow)_Y$ significa que estamos considerando el intervalo respectivo en $Y$ y que $(a,b)_X$, $(a,\rightarrow)_X$ ó $(\leftarrow,a)_X$ significa que estamos considerando intervalos en $X$. De aquí en adelante usaremos, cuando sea necesario, esta notación.

Ahora daremos un ejemplo de un subconjunto $Y$ de un espacio linealmente ordenado $X$ tal que las dos topologías consideradas arriba sobre $Y$ son distintas. Para este efecto consideremos $X = \mathbb{R}$ con la topología inducida por el orden usual y $Y = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. Para $z \in Y$ con $z > 1$, $[1,z) \in \mathcal{T}_<^{(Y)}$ y sin embargo todo intervalo abierto de $Y$ que contiene a $1$ contiene puntos menores que cero. Por tanto $[1,z) \notin \mathcal{T}_{<_Y}$, es decir $\mathcal{T}_<^{(Y)}$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}_{<_Y}$.

La pregunta natural que surge inmediatamente es: ¿podemos encontrar condiciones sobre el subconjunto $Y$ de tal manera que las dos topologías coincidan? La respuesta es afirmativa pero antes de pasar a tratar este punto necesitamos la siguiente

<u>1.2.7.- DEFINICION</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$. Diremos que $Y \subseteq X$ es <u>denso en $X$ en el sentido del orden</u> si para toda $x, y \in X$ que satisfacen $x < y$ existe $z \in Y$ tal que $x < z < y$.

<u>1.2.8.- PROPOSICION</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$ y $Y \subseteq X$ denso en $X$ en el sentido del orden. Entonces $\mathcal{T}_{<_Y} = \mathcal{T}_<^{(Y)}$.

<u>Demostración</u>: Es suficiente mostrar que $\mathcal{T}_<^{(Y)} \subseteq \mathcal{T}_{<_Y}$. Sean $A \in \mathcal{T}_<^{(Y)}$ y $x \in A$, entonces existe un

intervalo $I_x$ en $X$ tal que $x \in I_x \cap Y \subseteq A$. Si $x$ no es un extremo de $X$ entonces existen $a, b \in X$ tal que $a < x < b$; dado que $a, x, b \in X$ y $Y$ es denso en el sentido del orden existen $s, t \in Y$ con la propiedad de que $a < s < x < t < b$ y de aquí que $x \in (s,t)_Y \subseteq$ $\subseteq Y \cap I_x \subseteq A$. Si $x$ es un extremo de $X$ entonces $I_x = (\leftarrow, y)$ ó $I_x = (z, \rightarrow)$ para algunos $y, z \in X$ y como $Y$ es denso en el sentido del orden existen $s, t \in Y$ tal que $x < s < y$, $z < t < x$, respectivamente. Por lo tanto $x \in (\leftarrow, s)_Y \subseteq A$ ó $x \in (t, \rightarrow)_Y \subseteq A$. Por consiguiente $A \in \mathcal{T}_{<_Y}$. †

Observemos que este resultado puede ser falso si solo suponemos a $Y$ denso en $X$ en el sentido topológico, es decir, si $\overline{Y} = X$. En efecto, sea $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0$ ó $1 \leq x \leq 2$ ó $x \geq 3\}$ donde $X$ tiene la topología inducida por el orden usual en $\mathbb{R}$ restringido a $X$; sea $Y = \{x \in \mathbb{R} : x < 0$ ó $1 \leq x < 2$ ó $x > 3\}$. Claramente $\overline{Y} = X$. Ahora bien, $A = [1,2) \in \mathcal{T}_<^{(Y)}$ ya que $A = (0,2)_X \cap Y$, pero $A \notin \mathcal{T}_{<_Y}$ debido a que cualquier intervalo en $Y$ que contenga a $1$ intersecta al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Por tanto $\mathcal{T}_{<_Y}$ y $\mathcal{T}_<^{(Y)}$ no coinciden. Observemos que $Y$ no es denso en el sentido del orden en $X$ pues para $0, 1 \in X$ no existe $z \in Y$ tal que $0 < z < 1$.

<u>1.2.9.- DEFINICION</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$. $C \subseteq X$ es convexo si

$(x,y)_X \subseteq C$ para cualesquiera $x,y \in C$.

<u>1.2.10- OBSERVACION</u>: (1) Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos convexos de un espacio $X \in \mathcal{L}$ tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$ entonces $\cup\mathcal{C}$ es un conjunto convexo. En efecto, sean $x,y \in \cup\mathcal{C}$; si $x,y \in C$ para algún $C \in \mathcal{C}$ y $x<y$ entonces $(x,y) \subseteq C \subseteq \cup\mathcal{C}$. Si $x \in C_1$, $y \in C_2$ y $x<y$, como $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$ existe $z \in X$ tal que $z \in C$ para toda $C \in \mathcal{C}$. Por tanto si $x<z<y$, $(x,z) \subseteq C_1$ y $(z,y) \subseteq C_2$ de aquí que $(x,y) \subseteq$ $\subseteq C_1 \cup C_2 \subseteq \cup\mathcal{C}$. Si $z<x<y$ entonces $(z,y) \subseteq C_2$ y $(x,y) \subseteq$ $\subseteq (z,y) \subseteq C_2 \subseteq \cup\mathcal{C}$. Si $x<y<z$ analogamente $(x,y) \subseteq (x,z)$ $\subseteq C_1 \subseteq \cup\mathcal{C}$.

(2) Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces todo $Y \subseteq X$ puede ser representado como la unión de conjuntos convexos maximales ajenos dos a dos. Para probar esto sean $x \in Y$ y $\mathcal{C}$ la familia de conjuntos convexos que contienen a $x$; $\mathcal{C} \neq \emptyset$ ya que $\{x\} \in \mathcal{C}$. Obviamente $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$ porque $x \in C$ para toda $C \in \mathcal{C}$. Por tanto, por la observación (1) $C_x = \cup\mathcal{C}$ es convexo y de aquí que $Y = \bigcup_{x \in Y} C_x$. Finalmente sean $x \neq x'$; probaremos que $C_x \cap C_{x'} = \emptyset$ ó $C_x = C_{x'}$; supongamos que $C_x \cap C_{x'} \neq \emptyset$ entonces existe $y \in C_x \cap C_{x'}$ por lo cual podemos concluir que $C_x \cup C_{x'}$ es un conjunto convexo que contiene a $x$ y a $x'$; por construcción de $C_x$ y $C_{x'}$ esto implica que $C_x \cup C_{x'} \subseteq C_x$ y $C_x \cup C_{x'} \subseteq C_{x'}$ de donde $C_x = C_{x'}$. A estos conjuntos convexos disjuntos se les conoce como las

componentes convexas de $\mathbb{Y}$.

Es interesante hacer notar que el concepto de convexidad nos da otra condición suficiente para que $\tau_{<_Y} = \tau_<^{(Y)}$. Más precisamente:

1.2.11.- PROPOSICION: Sea $\mathbb{X} \in \mathcal{L}$. Si $Y \subseteq \mathbb{X}$ es un conjunto convexo con al menos dos elementos, entonces $\tau_{<_Y} = \tau_<^{(Y)}$.

Demostración: Basta probar que $\tau_<^{(Y)} \subseteq \tau_{<_Y}$. Sean $A \in \tau_<^{(Y)}$ y $x \in A$, entonces si $x$ no es un extremo de $\mathbb{X}$ existen $a, b \in \mathbb{X}$ tal que $x \in I_x = (a,b)_{\mathbb{X}}$ y $x \in I_x \cap Y \subseteq A$, y como $Y$ tiene al menos dos puntos existe $y \in Y - \{x\}$ y claramente $y<x$ ó $x<y$. Además $y \in (a,b)_{\mathbb{X}} \cap Y \subseteq A$ ó $y \notin (a,b)_{\mathbb{X}} \cap Y$. Consideremos $y<x$ y $y \in (a,b)_{\mathbb{X}} \cap Y \subseteq A$. Si existen puntos de $Y$ entre $x$ y $b$ sea $z_1 \in (x,b)_{\mathbb{X}}$ y entonces tendremos que $x \in (y, z_1)_Y \subseteq A$. Si no es este el caso pero $(b, \rightarrow)_Y \neq \emptyset$ sea $z \in (b,\rightarrow)_Y$ y por ser $Y$ convexo $(y,z)_{\mathbb{X}} \subseteq Y$ y por consiguiente $b \in Y$ y en este caso $x \in (y,b)_Y \subseteq A$. Si $(x,\rightarrow)_Y = \emptyset$ entonces $x \in (y,\rightarrow)_Y \subseteq A$. Es un caso análogo cuando $x<y$ y $y \in (a,b)_{\mathbb{X}} \cap Y \subseteq A$. Ahora supongamos que $y \notin (a,b)_{\mathbb{X}} \cap Y$ con $y<x$. Como $x, y \in Y$ esto implica que $(y,x) \subseteq Y$ y por lo tanto $a \in Y$; si $(x,b)_{\mathbb{X}} \cap Y \neq \emptyset$ entonces $x \in (a,z)_Y \subseteq A$ para algún $z \in (x,b)_X \cap Y$. Supongamos que $(x,b)_{\mathbb{X}} \cap Y = \emptyset$ pero que existe $z \in$

$\in (b,\rightarrow)_X \cap Y$; por tanto $b \in Y$ por ser $Y$ convexo y de aquí que $x \in (a,b)_Y \subseteq A$. Si $(x,\rightarrow)_X \cap Y = \emptyset$ entonces $x \in (a,\rightarrow)_Y \subseteq A$. Similarmente se trata el caso cuando $y \notin (a,b)_X \cap Y$ y $x<y$. En el caso en que $x$ sea un extremo de $X$, entonces $I_x = (\leftarrow,a)_X$ o $I_x = (a,\rightarrow)_X$. Supongamos que $I_x = (a,\rightarrow)$ para algún $a \in X$. Sabemos que existe $y \in Y - \{x\}$ y como $x$ es el extremo derecho entonces necesariamente $y<x$. Si $a<y<x$ entonces $x \in (y,\rightarrow)_Y \subseteq A$ y si $y<a<x$ entonces $a \in Y$; por lo tanto $x \in (a,\rightarrow)_Y \subseteq A$. Analogamente se prueba si $x$ es un extremo izquierdo. $\dagger$

Para finalizar demostraremos la siguiente proposición que usaremos más adelante:

<u>1.2.12</u>.- Sea $X \in \mathcal{L}$ y $Y \subseteq X$ abierto. Entonces las componentes convexas de $Y$ son conjuntos abiertos de $X$.

<u>Demostración</u>: Sea $C$ una componente convexa de $Y \subseteq X$ y sea $x \in C \subseteq Y$. Como $Y$ es abierto en $X$ existe $I_x$ intervalo abierto en $X$ tal que $x \in I_x \subseteq Y$. Ahora bien $I_x$ es un conjunto convexo en $X$, $x \in I_x$ y además $C$ es el máximo convexo de $X$ que contiene a $X$. Por lo tanto $x \in I_x \subseteq C$ y esto implica que $C$ es un conjunto abierto de $X$. $\dagger$

# CAPITULO 2

## NORMALIDAD

En este capítulo el objetivo principal es probar que todo espacio linealmente ordenado es un espacio topológico colectivamente normal y hereditariamente colectivamente normal.

<u>2.1.- DEFINICION</u>: Sea $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico $X$.

(1) $\mathcal{A}$ es <u>localmente finita</u> si para toda $x\in X$ existe una vecindad $U$ tal que el conjunto $\{s\in S : U\cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito.

(2) Si todo punto $x\in X$ tiene una vecindad que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{A}$ entonces diremos que la familia $\mathcal{A}$ es <u>discreta</u>.

Claramente toda familia discreta es localmente finita.

<u>2.2.- LEMA</u>: Sea $X\in \mathcal{L}$ y $\mathcal{A} = \{\{x_s\}\}_{s\in S}$ una familia discreta de subconjuntos singulares de $X$. Entonces existe una familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abier

tos de $X$ tal que $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ para toda $s \neq s'$ y $x_s \in U_s$ para toda $s \in S$.

<u>Demostración</u>: Para cada $t \in S$ sea $V_{x_t}$ una vecindad de $x_t$ dada por la discreción de la familia $\mathcal{A}$. Ahora sea $s \in S$ y consideremos el correspondiente $x_s$. Si $x_s$ es un punto aislado entonces $U_s = \{x_s\}$. Si $x_s$ no es aislado procedemos como sigue: si existen $t, t' \in S$ tal que $x_t < x_s < x_{t'}$ entonces sean $I_t, I_s, I_{t'}$ intervalos abiertos en $X$ tal que $x_j \in I_j \subseteq V_{x_j}$ para $j = s, t, t'$. Si $I_t \cap I_s = \emptyset$ y $I_{t'} \cap I_s = \emptyset$ sea $U_s = I_s$. Si $I_t \cap I_s = \emptyset$ y $I_{t'} \cap I_s \neq \emptyset$ entonces consideremos $U_s = I_s \cap (\leftarrow, x_s]$ cuando $x_s$ tenga un elemento consecutivo y $U_s = I_s \cap (\leftarrow, x')$ con $x' \in I_s - I_{t'}$ cuando $x_s$ no tenga un salto a la derecha. Si $I_t \cap I_s \neq \emptyset = I_{t'} \cap I_s$ la construcción de $U_s$ es análoga al caso anterior. Si $I_t \cap I_s \neq \emptyset \neq I_{t'} \cap I_s$ entonces si $x_s$ tiene un salto a la derecha consideramos $U_s = I_s \cap (x, x_s]$ donde $x \in I_s - I_t$. Si $x_s$ tiene un salto a la izquierda se procede similarmente. Si $x_s$ no tiene saltos a la izquierda ni a la derecha consideramos $U_s = I_s \cap (x, x')$ donde $x \in I_s - I_t$ y $x' \in I_s - I_{t'}$ y $x < x_s < x'$. Otros casos son tratados analogamente. Por lo tanto dado que la familia $\{U_s\}_{s \in S}$ así construida cumple con lo requerido, queda probado el lema. †

<u>2.3.- DEFINICION</u>: Un espacio Topológico $X \cdot T_{r}$ es <u>colectivamente normal</u> si y solo si para toda familia discreta $\{F_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos cerrados de $X$ existe una familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de $X$ tal que $F_s \subseteq U_s$ para toda $s\in S$ y $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ siempre que $s \neq s'$.

Claramente todo espacio colectivamente normal es normal. A continuación probaremos que todo espacio lineal ordenado es colectivamente normal.

<u>2.4.- TEOREMA</u>. Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces $X$ es colectivamente normal. En particular $X$ es normal.

<u>Demostración</u>: Sea $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia discreta de subconjuntos cerrados de $X$. Deseamos probar que existe $\{U_s\}_{s\in S}$ tal que para toda $s\in S$, $U_s \subseteq X$ es abierto en $X$, $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ para toda $s\neq s'$ y $F_s \subseteq U_s$ para cada $s\in S$.

Para probar esto sea $s\in S$ y consideremos

$$W_s = \bigcup \{ (a,b) : a,b \in F_s \ \text{ y } \ (a,b) \cap (\bigcup_{s'\neq s} F_{s'}) = \emptyset \}$$

Observemos que $W_s \cap W_{s'} = \emptyset$ para toda $s \neq s'$. En efecto si $y \in W_s \cap W_{s'}$ entonces existen $a_s, b_s \in F_s$ y $a_{s'}, b_{s'} \in F_{s'}$ tal que $a_s < y < b_s$ y $a_{s'} < y < b_{s'}$, $(a_s, b_s) \cap (\bigcup_{s'\neq s} F_{s'}) = \emptyset$ y $(a_{s'}, b_{s'}) \cap (\bigcup_{t\neq s'} F_t) = \emptyset$. Dado que $\{F_s\}_{s\in S}$ es una familia discreta tenemos que $a_s \neq a_{s'}$ y esto implica que $a_s < a_{s'}$ ó $a_{s'} < a_s$. Si $a_s < a_{s'}$ entonces $a_{s'} \in$ $\in (a_s, b_s)$, es decir $(a_s, b_s) \cap (\bigcup_{s'\neq s} F_{s'}) \neq \emptyset$, contradicción. Analogamente si $a_{s'} < a_s$. Por consiguiente

$W_s \cap W'_{s'} = \emptyset$.

Se afirma ahora que $\{W_s\}_{s\in S}$ es una familia discreta. Para probarlo sea $x \in X$. Si $x \in \bigcup_{s\in S} W_s$ entonces $W_s$ es abierto y no intersecta a ningún $W_{s'}$ con $s' \neq s$; por tanto existe una vecindad de $x$ en $X$ - (a saber, $W_s$) que intersecta a lo más a un elemento de la familia $\{W_s\}_{s\in S}$. Si $x \in X - \bigcup_{s\in S} W_s$ entonces sea $I_x$ el intervalo en $X$ que contiene a $x$ y que intersecta a lo más a un $F_s$, digamos $F_{s_0}$; se afirma que $I_x$ intersecta a lo más a $W_{s_0}$. Supongamos que $I_x \cap W_s \neq \emptyset$ para $s \neq s_0$, entonces $I_x \cap F_s \neq \emptyset$. En efecto, si $y \in W_s \cap I_x$ entonces $y \neq x$ pues $x \notin W_s$ y por tanto $a < y < b$ para algún $a, b \in F_s$ y $y \in I_x$ y esto implica que $a \in I_x$ ó $b \in I_x$: si $a \notin I_x$ y $b \notin I_x$, como $y \in (a,b) \cap I_x$, entonces $I_x \subseteq W_s$ y por tanto $x \in W_s$, contradicción. Por consiguiente $a \in I_x \cap F_s$ ó $b \in I_x \cap F_s$, es decir $I_x \cap F_s \neq \emptyset$, contradiciendo la elección de $I_x$. De aquí que $I_x$ intersecta a lo más a $W_{s_0}$. Por tanto $\{W_s\}_{s\in S}$ es una familia discreta.

Ahora probaremos que $F_s \cap (\overline{\bigcup_{s'\neq s} W_{s'}}) = \emptyset$. Supongamos que existe $y \in F_s \cap (\overline{\bigcup_{s'\neq s} W_{s'}})$ entonces por (A.1) $y \in F_s$ y $y \in \bigcup_{s'\neq s} \overline{W}_{s'}$, pero:

$$\bigcup_{s'\neq s} \overline{W}_{s'} = \bigcup_{s'\neq s} \left[ (\overline{W}_{s'} - W_{s'}) \cup W_{s'} \right]$$

$$= \left[\bigcup_{s'\neq s}(\overline{W}_{s'} - W_{s'})\right] \cup \left[\bigcup_{s'\neq s} W_{s'}\right].$$

De aquí que $y \in \bigcup_{s'\neq s}\overline{W}_{s'}$ implica que $y \in \bigcup_{s'\neq s}(\overline{W}_{s'} - W_{s'})$ ó $y \in \bigcup_{s'\neq s} W_{s'}$. Supongamos que $y \in F_s$ y $y \in \bigcup_{s'\neq s} W_{s'}$, entonces $y \in F_s$ y $y \in W_{s'}$ para algún $s' \neq s$. Por tanto existen $a, b \in F_{s'}$ tal que $y \in (a,b)$ y $y \in F_s$ y esto implica que $y \in (a,b) \cap F_s$, contradicción pues $(a,b) \subseteq \subseteq W_{s'}$. Supongamos ahora que $y \in F_s$ y $y \in \bigcup_{s'\neq s}(\overline{W}_{s'} - W_{s'})$ entonces $y \in F_s$ y $y \in \overline{W}_{s'} - W_{s'}$ para algún $s' \neq s$ y esto implica que todo intervalo abierto $I_y$ que contiene a $y$ satisface que $I_y \cap W_{s'} \neq \phi$ y dado que $y \notin \bigcup_{s'\neq s} W_{s'}$, por la discusión dada cuando se probó la discreción de la familia $\{W_s\}_{s\in S}$ tenemos que $I_y \cap F_{s'} \neq \phi$. Por tanto, toda vecindad de $y$ intersecta al menos a $F_s$ y $F_{s'}$; entonces $\{F_s\}_{s\in S}$ no es discreta, contradicción. Por tanto $F_s \cap (\overline{\bigcup_{s'\neq s} W_{s'}})$ es vacía.

Enseguida probaremos que $\{\{x\} : x \in \bigcup_{s\in S}(F_s - W_s)\}$ es una familia discreta. Sea $z \in X$ y supongamos que $z$ no es un punto de acumulación de $\bigcup_{s\in S}(F_s - W_s)$, entonces existe $V$ vecindad de $z$ tal que $V \cap (\bigcup_{s\in S}(F_s - W_s))$ es vacía. Si $z$ es un punto de acumulación de $\bigcup_{s\in S}(F_s - W_s)$ entonces todo intervalo $I_z$ que contiene a $z$ cumple con $\operatorname{card}(I_z \cap (\bigcup_{s\in S}(F_s - W_s))) \geq \aleph_0$. Como $\{F_s\}_{s\in S}$ es discreta existe $I_z^*$ intervalo abierto de $X$ que contiene a $z$ y tal que: ó $I_z^* \cap (\bigcup_{s\in S}(F_s - W_s)) = \phi$

(en cuyo caso $I_z^*$ es una vecindad de $z$ que intersecta a lo más a un miembro de la familia en cuestión) ó bién existe $s \in S$ tal que se cumple $\operatorname{card}(I_z^* \cap \cap (F_s - W_s)) \geq \aleph_0$ y $I_z^* \cap F_{s'} = \emptyset$ para toda $s' \neq S$; en este caso sean $x_1, x_2, x_3 \in I_z^* \cap (F_s - W_s)$ tal que $x_3 \in (x_1, x_2)$ entonces existe $s' \neq s$ tal que $(x_1, x_2) \cap \cap F_{s'} \neq \emptyset$ (pues si no fuera así tendríamos que $(x_1, x_2) \cap (\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}) = \emptyset$) y de aquí que $(x_1, x_2) \subseteq W_s$ y por tanto obtendriamos que $x_3 \in W_s \cap (F_s - W_s)$.), pero esto es una contradicción ya que esto implica que $I_z^* \cap F_{s'} \neq \emptyset$. Por lo tanto $z$ no puede ser punto de acumulación de $\bigcup_{s \in S} (F_s - W_s)$. Entonces, hemos probado que $\{\{x\} : x \in \bigcup_{s \in S} (F_s - W_s)\}$ es una familia discreta. Por tanto, de (2.2) existen conjuntos abiertos $\{U_x' : x \in \bigcup_{s \in S} (F_s - W_s)\}$ tal que $U_x' \cap U_y' = \emptyset$ para $x \neq y$ y $x \in U_x'$ para toda $x \in \bigcup_{s \in S} (F_s - W_s)$.

Finalmente definimos $U_s = W_s \cup A_s$ donde $A_s = = (\bigcup_{x \in F_s - W_s} U_x') \cap (X - \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s'}})$. Claramente $F_s \subseteq U_s$ para cada $s \in S$ Resta probar que $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ para $s \neq s'$. Es suficiente probar que para toda $s \neq s'$ $A_s \cap A_{s'} = \emptyset$ y $W_s \cap A_{s'} = \emptyset$. Pero $A_s \cap A_{s'} = \emptyset$ ya que $U_x'$ con $x \in F_s - W_s$ y $U_y'$ con $y \in F_{s'} - W_{s'}$ son ajenas. Ahora sea $z \in A_{s'}$, entonces $z \in X - \overline{\bigcup_{t \neq s'} W_t}$, esto implica que $z \in X$ y $z \notin \overline{\bigcup_{t \neq s'} W_t} = \bigcup_{t \neq s'} \overline{W_t}$, es decir, $z \notin \overline{W_t}$ para toda $t \neq s'$, por tanto $z \notin W_t$ para toda $t \neq s'$. Por consiguiente $A_{s'} \cap W_s = \emptyset$ para toda $s \neq s'$. Por tanto $\{U_s\}_{s\in S}$ es la familia buscada. $\dagger$.

Además, la clase de espacios lineales ordenados cumplen también con tener como una propiedad hereditaria el ser colectivamente normales y por tanto también resultan ser hereditariamente normales. Esto es precisamente lo que probaremos a continuación:

<u>2.5.- TEOREMA</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces $X$ es hereditariamente colectivamente normal y en particular hereditariamente normal.

<u>Demostración</u>: Por (A-2) basta probar que si $Y \subseteq X$ es un subespacio abierto de $X$ entonces $Y$ es colectivamente normal. Como $Y \subseteq X$ es abierto entonces por (1.2.10.2) y (1.2.12), $Y = \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ donde para cada $\alpha \in I$, $C_\alpha$ es una componente convexa de $Y$ y $C_\alpha$ es un subconjunto abierto de $X$. Además, dado que para cada $\alpha \in I$ $C_\alpha$ es convexo por (1.2.11) tenemos que $C_\alpha \in \mathcal{L}$. Por consiguiente, por (2.4) $C_\alpha$ es colectivamente normal. Con esta idea en mente, sea $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia discreta de subconjuntos cerrados de $Y$; entonces tenemos que para cada $\alpha \in I$, $\{F_s \cap C_\alpha\}_{s\in S}$ es una familia discreta de cerrados en $C_\alpha$ y dado que ésta es colectivamente normal obtenemos, por (2.3),

$\{W_s^\alpha\}_{s\in S}$ familia de subconjuntos abiertos de $C_\alpha$ tal que $(F_s\cap C_\alpha)\subseteq W_s^\alpha$ para cada $s\in S$ y $W_s^\alpha \cap W_{s'}^\alpha=\emptyset$ siempre que $s\neq s'$. Además, para cada $s\in S$ $W_s^\alpha$ es un conjunto abierto de $Y$ pues $C_\alpha$ es abierto en $X$. Entonces, si para cada $s\in S$ consideramos $U_s=\bigcup\limits_{\alpha\in I} W_s^\alpha$ obtenemos una familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de $Y$ tal que $F_s\subseteq U_s$ para toda $s\in S$ y $U_s\cap U_{s'}=\emptyset$ si $s\neq s'$. En efecto, la primera propiedad es inmediata y para ver la segunda sean $s,s'\in S$ tal que $s\neq s'$; entonces, si $x\in U_s\cap U_{s'}$ esto implica que existen $\alpha_1,\alpha_2\in I$ tal que $x\in W_s^{\alpha_1}\cap W_{s'}^{\alpha_2}$ y esto implica que $C_{\alpha_1}=C_{\alpha_2}$, es decir $\alpha_1=\alpha_2$ y de aquí que $W_s^{\alpha_1}\cap W_{s'}^{\alpha_1}\neq\emptyset$ lo cual contradice la construcción de $\{W_s^{\alpha_1}\}_{s\in S}$. Por tanto, de (2.3), concluimos que $Y$ es colectivamente normal. †.

Como un caso particular de este último resultado obtenemos que los ejemplos (1.2 3.1-3) son normales. Ahora bien, recordemos que un espacio topológico $X$ es llamado <u>perfectamente normal</u> si $X$ es normal y todo subconjunto cerrado de $X$ es un conjunto $G_\delta$ (es decir, intersección numerable de conjuntos abiertos de $X$). Entonces, de (2.4) obtenemos el siguiente corolario:

<u>2.6-COROLARIO</u>: $X\in\mathcal{L}$ es perfectamente normal si

todo subconjunto cerrado de $X$ es un conjunto $G_\delta$.

2.7.- EJEMPLOS: (1) Es bien conocido que el ejemplo (1.2.3.1) es un espacio perfectamente normal. Ahora bien, existen espacios topológicos linealmente ordenados que no son perfectamente normales, como muestran los siguientes ejemplos.

(2) El ejemplo (1.2.3.2) es un espacio que no es perfectamente normal. En efecto, en el siguiente capítulo probaremos que este espacio es compacto y por tanto Lindelöf. Por consiguiente, si fuera perfectamente normal, por (A.3), sería hereditariamente Lindelöf pero $Y = \{(x,y) : x \in I, y = \frac{1}{2}\}$ es un subespacio de $I^2$ que resulta tener la topología discreta y que por tanto no es Lindelöf, contradicción. Por tanto $I^2$ con la topología inducida por el orden lexicográfico no es perfectamente normal.

(3) En el capítulo 5 probaremos que (1.2.3.3) no es un espacio perfectamente normal.

(4) Si $X = W(\omega_1) \cup \{\omega_1\}$ es el espacio de los ordinales menores o iguales al primer ordinal no numerable con la topología del orden entonces $X$ no es perfectamente normal pues $\{\omega_1\}$ es un conjunto cerrado que no es un conjunto $G_\delta$. En efecto, $\{\omega_1\}$ es cerrado pues $X - \{\omega_1\} = (\leftarrow, \omega_1) = [0, \omega_1)$ es un conjunto abierto; y no es un conjunto $G_\delta$ dado que para cualquier

colección numerable $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contienen a $\omega_1$ podemos encontrar una colección de elementos básicos de la forma $(\alpha_n, \omega_1] \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \gamma < \omega_1$ dado que cada $\alpha_n$, o equivalentemente, cada $[0, \alpha_n)$ es numerable y la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq (\gamma, \omega_1] \neq \{\omega_1\}$. Por tanto $X$ no es perfectamente normal.

# CAPITULO 3

# COMPACIDAD

El objetivo del presente capitulo es estudiar los espacios linealmente ordenados compactos. Primero son caracterizados por medio de propiedades sencillas y despues se pasa al estudio de algunas de sus compactaciones.

3.1.- DEFINICION: Sea $X$ un espacio topológico.

(1) Una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de $X$ es una cubierta abierta de $X$ si $X = \bigcup_{s\in S} A_s$ y $A_s$ es abierto en $X$ para toda $s\in S$.

(2) Una cubierta $\{A_s^{\prime}\}_{s\in S'}$ de $X$ es una subcubierta de otra cubierta $\{A_s\}_{s\in S}$ de $X$ si $S' \subseteq S$ y $A_s^{\prime} = A_s$ para toda $s\in S'$.

(3) $X$ es un espacio compacto si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta finita.

3.2.- TEOREMA: Sea $(X, \tau_c) \in \mathcal{L}$. $X$ es compacto si y solo si todo subconjunto $A \subseteq X$ tiene supremo e ínfimo.

Demostración: Necesidad: Primero observemos que si $A \subseteq X$ no está acotado superiormente entonces para cada $x \in X$ existe $p(x) \in A$ tal que $x < p(x)$. Entonces, si $z_0 \in A$ es fijo obtenemos la siguiente cubierta abierta de $X$:

$$\mathcal{U} = \{(z_0, x) : x \in X \text{ y } z_0 < x\} \cup \{(\leftarrow, p(z_0))\}$$

que no tiene subcubierta finita. En efecto, para toda familia finita $\{(z_0, x_i)\}_{i=1}^{n} \cup \{(\leftarrow, p(z_0))\}$ consideremos a $x = \text{máx}\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$, entonces existe $p(x) \in A$ tal que $x < p(x)$ y esto implica que $p(x) \notin \bigcup_{i=1}^{n} (z_0, x_i) \cup (\leftarrow, p(z_0))$. Un resultado análogo se sigue si $A \subseteq X$ no está acotado inferiormente. Por consiguiente, si $A \subseteq X$ no tiene supremo (ínfimo), los conjuntos $(\leftarrow, a)$ con $a \in A$ y $(b, \rightarrow)$ y $(b, \rightarrow)$ con $b$ una cota superior de $A$ ($\{(\alpha, \rightarrow) : \alpha \in A\} \cup \{(\leftarrow, \beta) : \beta$ es una cota inferior$\}$) constituyen una cubierta abierta de $X$ que no tiene ninguna subcubierta finita; entonces, por la observación hecha anteriormente $X$ es no compacto.

<u>Suficiencia</u>. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X$ y $y_0$ el primer elemento de $X$. Consideremos el conjunto $S = \{y \in X : [y_0, y)$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}\}$. Por hipótesis podemos considerar $\alpha = \sup S$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U$ y por tanto existe un intervalo $I_\alpha$ tal que $\alpha \in I_\alpha \subseteq U$. Si $I_\alpha = (a, b)$ entonces -

$a<\alpha<b$ y esto implica que $\alpha \in S$ y por tanto $(\alpha, b)=\phi$ ya que si $z \in (\alpha, b)$ entonces $z \in S$, contradiciendo a la definición de $\alpha$. Pero esto significa que $b \in S$ lo cual también es imposible. Por consiguiente $I_\alpha = (a, \rightarrow)$ para alguna $a<\alpha$. Entonces $[y_0, a)$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ y $(a, \rightarrow) \subseteq U$. Por tanto $X$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, i.e, $X$ es compacto. /.

3.3.- EJEMPLOS. (1) La recta real $\mathbb{R}$ no es un espacio compacto pues $\mathbb{R}$ mismo no tiene supremo ni ínfimo.

(2) El cuadrado lexicográfico $X$ es un espacio compacto. En efecto, sea $A \subseteq X$. Mostraremos que $A$ tiene supremo e ínfimo en $X$. Consideremos $\alpha = \sup(P_1(A))$ donde $P_1(A)$ es la primera proyección de $A$ sobre $I$. Entonces, si $\alpha \in P_1(A)$ consideremos $D=\{y \in [0,1] : (\alpha, y) \in A\}$ y $\beta = \sup D$; y para $\alpha \notin P_1(A)$ consideremos $\beta = 0$. Entonces $(\alpha, \beta) = \sup A$. En efecto, $(\alpha, \beta)$ es cota superior de $A$ pues si $(x,y) \in A$ entonces $x \leq \alpha$. Si $x<\alpha$ entonces $(x,y)<(\alpha,\beta)$ y si $x=\alpha$ entonces $(x,y) \in D$ y por tanto $y \leq \beta$, i.e, $(x,y) \leq (\alpha, \beta)$. Si ahora $(s,t)$ es cota superior de $A$ entonces para todo $(x,y) \in A$ se tiene que $(x,y) \leq (s,t)$, es decir $x<s$ ó $x=s$ y $y \leq t$. Si $x<s$ entonces $\alpha \leq s$ pues $\alpha = \sup(P_1(A))$ y por lo tanto $(\alpha, \beta) \leq (s,t)$. Si $x=s$ y $y \leq t$ entonces para $y<t$ tenemos, por definición de $\beta$, $\beta \leq t$ y por lo tanto $(\alpha,\beta) \leq (s,t)$; para $y=t$, $(s,t) \in A$ y por tanto $\beta \leq t$, es decir, $(\alpha, \beta) \leq (s,t)$. Por tanto $(\alpha,\beta) = \sup A$. Análogamente se obtiene $\inf A$. Por teorema anterior, el cuadrado lexicográfico

es compacto.

(3) El espacio de ordinales $W(\omega_1)=[0,\omega_1)$ con la topología del orden no es compacto pues el subconjunto $[\alpha,\omega_1)$ para $\alpha<\omega_1$ no tiene supremo.

(4) En general si $\lambda$ es un ordinal límite utilizando un mismo razonamiento como en (3.3.3) podemos demostrar que $[0,\lambda)$ con la topología del orden es un espacio que no es compacto. Sin embargo $[0,\lambda]$ si es compacto ya que todo subconjunto de él tiene ínfimo y supremo.

Otro resultado interesante que se refiere a subespacios compactos de espacios linealmente ordenados es el siguiente:

<u>3.4.- TEOREMA</u>: Sea $(X,\tau_<)\in\mathcal{L}$ y $A\subseteq X$ compacto. Entonces se tiene que $\tau_{<_A}=\tau_<^{(A)}$.

<u>Demostración</u>: Sabemos que $\tau_{<_A}\subseteq\tau_<^{(A)}$; es suficiente probar que $\tau_<^{(A)}\subseteq\tau_{<_A}$: Sea $U\in\tau_<^{(A)}$, entonces existe $U'\in\tau_<$ tal que $U=U'\cap A$. Para $z\in U$ existe $I_z^X$ intervalo abierto en $X$ tal que $z\in I_z^X\cap A\subseteq U$. Sean $z_1=\inf\{y\in I_z^X : y<z \text{ y } y\in A\}$ y $z_2=\sup\{y\in I_z^X : z<y \text{ y } y\in A\}$; entonces $z_1$, $z_2$ existen por hipótesis y aplicando (3.2). Por tanto, tenemos que $z\in I_z^{(A)}=$ $=(z_1,z_2)_A\subseteq I_z^X\cap A\subseteq U'\cap A$. Por consiguiente $U=\bigcup_{z\in U} I_z^{(A)}$ y esto implica que $U\in\tau_{<_A}$. Queda probado el teorema.†.

Recordemos ahora la siguiente:

<u>3.5.- DEFINICION</u>: (1) Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Entonces $f: X \to Y$ es <u>una inmersión de $X$ en</u> $Y$ si $f$ es un homeomorfismo sobre su imágen.

(2) Una <u>compactación del espacio $X$</u> es un par $(Y, c)$ donde $Y$ es un espacio compacto y $c: X \to Y$ es una inmersión de $X$ en $Y$ tal que $\overline{c(X)} = Y$.

<u>3.6.- TEOREMA</u>: Sea $(X, \tau_<) \in \mathcal{L}$. Entonces $X$ tiene una compactación $cX$ cuya topología es inducida por un orden lineal $<'$ y tal que $x < y$ si y sólo si $c(x) <' c(y)$ para cada $x, y \in X$.

<u>Demostración</u>: Consideremos

$cX = \{(A, B) : (A, B)$ es una cortadura y $A$ tiene último elemento$\} \cup \{(A, B) : (A, B)$ es un hueco interior ó extremo de $X\}$.

Definimos en $cX$ el siguiente orden:

$$(A, B) <' (C, D) \quad \text{si} \quad A \subsetneq C$$

y dotamos a $cX$ con la topología inducida por este orden. Probaremos que $cX$ con esta topología es un espacio compacto. Sea $\mathcal{A} = \{(A_\alpha, B_\alpha) : \alpha \in I\}$ un subconjunto de $cX$, entonces $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha, X - \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ es el ínfimo de $\mathcal{A}$ pues $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq A_\alpha$ para toda $\alpha \in I$ y esto implica que $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha, X - \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \leq (A_\alpha, B_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$ y si $(C, D)$ fuera otra cota inferior entonces $C \subseteq A_\alpha$ para toda $\alpha \in I$ y esto implica que $C \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, es decir, $(C,D) \leq' (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha , X - \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$. Además $(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha , X - \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$ es el sup$A$ ya que claramente $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ para toda $\alpha\in I$ y por tanto $(A_\alpha, B_\alpha) \leq' (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha , X - \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$ y si $(E,F)\in cX$ tal que para toda $\alpha\in I$ $(A_\alpha, B_\alpha)\leq'$ $(E,F)$ esto implica que $A_\alpha \subseteq E$ para toda $\alpha\in I$ y por consiguiente $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq E$, es decir $(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha , X - \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \leq'$ $\leq' (E,F)$. Por lo tanto, de (3.2) obtenemos que $cX$ es compacto.

Ahora probaremos que $c: X \longrightarrow cX$ dada por $c(x) = (A,B)$ donde $A = \{y\in X : y \leq x\}$ y $B = X - A$ es una inmersión de $X$ en $cX$. Sea $I = (\leftarrow, (A,B))$ un sub-básico de $cX$; si $(A,B) = u$ es un hueco de $X$ entonces $c^{-1}(I) = \{x\in X : c(x)\in I\} = A$ que es un elemento sub-básico en $X$ y si $(A,B)$ es tal que $A$ tiene último elemento, digamos $x$, entonces $c^{-1}(I) = (\leftarrow, x)$ que también resulta ser un sub-básico en $X$. Por lo tanto concluimos que $c$ es continua.

Como $c$ es inyectiva entonces existe $g = c^{-1}|_{c(X)} : c(X)\to X$ la cual probaremos que es continua: Sea $I = (a,b)$ un intervalo en $X$; entonces $g^{-1}(I) = \{(z,w)\in c(X) : c^{-1}((z,w))\in$ $\in I = (a,b)\} = ((A,B),(C,D))_{cX} \cap c(X)$ en donde $A = (\leftarrow, a]$, $B = X - A$, $C = (\leftarrow, b]$ y $D = X - C$. Por lo tanto $g = c^{-1}|_{c(X)}$ es continua. Hemos probado entonces que $c$ es una inmersión.

Finalmente probaremos que $\overline{c(X)} = cX$. Sea $u = (A,B)\in$

$cX - c(X)$, entonces $u$ es un hueco de $X$; consideremos $I$ un intervalo abierto en $cX$ tal que $u \in I$. Queremos probar que $I \cap c(X) \neq \emptyset$. Si suponemos que $I \cap c(X) = \emptyset$ entonces existen $a, b \in X$ tal que no existe $x \in X$ con la propiedad de que $a < x < b$, es decir, el intervalo en $cX$, $I$ es igual al intervalo $(((\leftarrow, a], (a, \rightarrow)), ((\leftarrow, b], (b, \rightarrow))) = \{u\}$. Por lo tanto $a$ es el último elemento de $A$ y $b$ es el primer elemento de $B$, contradiciendo el hecho de que $(A, B)$ es un hueco. Por lo tanto $I \cap c(X) \neq \emptyset$; es decir, hemos probado que $\overline{c(X)} = cX$. Por consiguiente $cX$ es una compactación de $X$ tal que $x < y$ si y solo si $c(x) <' c(y)$ para toda $x, y \in X$. $\dagger$

A $cX$ en el teorema anterior se le conoce como la completación de Dedekind de $X$ (ó compactación natural de $X$); de aquí en adelante nos referiremos a ella como $X^+$ y al orden $<'$ como $<_+$.

Como un corolario inmediato de (3.2) y (3.6) obtenemos:

<u>3.7.-COROLARIO</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces $X$ es compacto si y sólo si $X$ no tiene huecos.

Ahora, recordemos que el elemento máximo de la familia $\mathcal{C}(X)$ de todas las compactaciones de un espacio completamente regular $X$ es llamado la <u>com-</u>

pactación de Stone-Čech y es denotado por $\beta X$ (para más detalles ver [E] pp 225-233). Las caracterizaciones de $\beta X$ usadas aquí están enunciadas en (A-4)

El siguiente lema lo probaremos en el próximo capítulo y aquí lo usaremos para probar algunos resultados.

3.8.- LEMA: Sea $X \in \mathcal{L}$ tal que existe $S \subseteq X$ denso en $X$ con card $(S) = m \geq \aleph_0$; entonces para cada $x \in X$ existe una base de vecindades $\mathcal{V}$ de $x$ tal que card$(\mathcal{V}) \leq m$.

3.9.- COROLARIO: Si $X \in \mathcal{L}$ es separable entonces $X$ es primero numerable.

Demostración: Inmediata del lema anterior. $\dagger$

3.10.- EJEMPLO: El inverso del corolario (3.9) no necesariamente es cierto pues el cuadrado lexicográfico $(I^2, \tau_l)$ es un espacio lineal ordenado primero numerable y que no es separable. En efecto, si $z = (x,y) \in I^2 \setminus \{(x,y) \in I^2 : y = 0$ ó $y = 1\}$ entonces $\{((x,y-\frac{1}{n}),(x,y+\frac{1}{n}))\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable de $z$. Si ahora $z = (x,y) \in I^2$ con $y = 1$ y $x \neq 0,1$ entonces una base local numerable para $z$ es $\{((x,1-\frac{1}{n}),(x+\frac{1}{n},\frac{1}{n}))\}_{n\in\mathbb{N}}$. Analogamente para $z = (x,y) \in I^2$ con $y = 0$ y $x \neq 0,1$. Si $z = (0,0)$ entonces la familia de intervalos $\{(\leftarrow,(0,1/n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma una base local numerable para $z = (0,0)$. Si $z = (0,1)$ entonces la base local deseada es la familia de intervalos —

$\{((0,1-\frac{1}{n}),(\frac{1}{n},\frac{1}{n}))\}_{n\in\mathbb{N}}$. Otros casos son tratados analogamente. Por tanto $(I^2,\tau_<)$ es un espacio lineal ordenado primero numerable.

Si $(I^2,\tau_<)$ fuera separable, entonces consideremos D denso numerable en $I^2$ y para cada $0<x<1$ y $x$ irracional el intervalo abierto $A_x=((x,0),(x,1))$; entonces como D es denso en $I^2$ existe $a_x\in D\cap A_x$ para cada $0<x<1$ y $x$ irracional; entonces $A=\{a_x : 0<x<1$ y $x$ irracional$\}$ es un conjunto de cardinalidad más que numerable y $A\subseteq D$, contradicción. Por tanto $(I^2,\tau_<)$ no es separable.

Ahora estamos interesados en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que $\beta X$ sea ordenable. Como un resultado inmediato de (3.8) y (3.9) tenemos que:

<u>3.11.- PROPOSICION</u>: Si $\mathbb{N}$ es el espacio discreto de los números naturales entonces $\beta\mathbb{N}$ no es ordenable.

<u>Demostración</u>: Claramente $\beta\mathbb{N}$ es separable, entonces si $\beta\mathbb{N}$ fuera ordenable, por (3.9) tendriamos que $\beta\mathbb{N}$ satisface el primer axioma de numerabilidad contradiciendo (A.5). †.

Antes de enunciar el siguiente teorema necesitamos de la siguiente:

<u>3.12.- DEFINICION</u>: Un espacio topológico $X$ es lla-

mado <u>pseudocompacto</u> si toda función continua realvaluada definida sobre $X$ es acotada.

<u>3.13.- TEOREMA</u>: Sea $X$ un espacio topológico completamente regular y Hausdorff. Si $\beta X$ es ordenable entonces $X$ es normal y pseudocompacto.

<u>Demostración</u>: Si $\beta X$ es ordenable entonces, por (2.5) $\beta X$ es hereditariamente normal y por tanto $X$ es normal. Supongamos ahora que $X$ no es pseudocompacto, entonces existe $f: X \to \mathbb{R}$ continua y no acotada. Considerando $|f|$ si es necesario, podemos suponer que $f$ es no negativa. Entonces podemos encontrar una sucesión $x_1, x_2, \dots$ en $X$ tal que $f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_n) < \cdots$ y

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| > 1 \qquad \text{——} (1)$$

por ser $f$ no acotada. Entonces, si $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ vamos a tener que $A$ es discreto como subespacio y es un subconjunto cerrado de $X$. En efecto, $A$ no tiene puntos de acumulación: si $x$ fuera un punto de acumulación de $A$ entonces existe $\{x_k\} \subseteq A$ tal que $x_k \to x$ y como $f$ es continua $f(x_k) \to f(x)$; Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_k) - f(x)| < \epsilon$ para toda $k > N$. Entonces $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq |f(x_{k+1}) - f(x)| + |f(x_k) - f(x)| < 2\epsilon$. Por lo tanto $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 1$ contradiciendo (1). Por consiguiente $A$ no tiene puntos de acumulación, es decir, $A$ es cerrado y discreto. Por tanto $A$ es homeomorfo a $\mathbb{N}$ y por (A.7) $\overline{A}^{\beta X}$ (cerradura de $A$ con respecto a $\beta X$) es igual a $\beta A$. Pero $A$ es homeomorfo a $\mathbb{N}$, esto implica que $\overline{A}^{\beta X}$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Como $\beta X$ es ordenable y $\overline{A}^{\beta X}$ es compacto entonces por (3.4) $\overline{A}^{\beta X}$ es ordenable y de aquí que $\beta\mathbb{N}$ es ordenable contradiciendo (3.11). Por tanto $X$ es pseudocompacto. ┼

El siguiente teorema enuncia varias condiciones suficientes para que $\beta X$ no sea ordenable. Antes enunciamos la siguiente:

<u>3.14.- DEFINICION</u>: Un espacio topológico $X$ es <u>contablemente compacto</u> si toda cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita.

<u>3.15.- TEOREMA</u>: Sea $X$ un espacio topológico no compacto, Hausdorff y completamente regular. Entonces $\beta X$ no es ordenable si una de las siguientes condiciones se satisface:

(1) $X$ es metrizable

(2) $X$ es paracompacto

(3) $X$ es $\sigma$-compacto

(4) $X$ es Lindelöf

(5) $X$ es separable.

<u>Demostración</u>: Como $X$ no es compacto entonces $\beta X - X \neq \emptyset$.

Supongamos que $\beta X$ es ordenable, entonces por (3.13) y (A.6) $X$ debe ser contablemente compacto. Pero un espacio contablemente compacto y paracompacto es compacto, por locual $X$ no puede satisfacer (2). Dado que todo espacio métrico es paracompacto $X$ no puede satisfacer (1). Como $X$ es regular y un espacio regular y Lindelöf es paracompacto $X$ no puede satisfacer (4) y como (3) implica (4) $X$ no puede satisfacer (3). Si $X$ es separable entonces $\beta X$ es separable y por (3.9) $\beta X$ es primero numerable pero ningún punto de $\beta X - X$ satisface el primer axioma de numerabilidad (A.5), contradicción. Por tanto $X$ no puede satisfacer (5). Hemos probado el teorema. $\dagger$

De aquí en adelante vamos a estar interesados en mostrar cuándo tenemos la igualdad $\beta X = X^+$. Antes de pasar a discutir directamente esto necesitaremos estudiar algunos propiedades de los espacios de ordinales. Primero daremos la siguiente:

<u>3.16.- DEFINICION</u>: Si $\Omega$ es un ordinal entonces definimos la cofinalidad de $\Omega$, denotada por cof $\Omega$, como el mínimo número cardinal $m$ tal que $m =$ $=$ card(S) y S es cofinal con $\Omega$.

De aquí en adelante usaremos la siguiente notación: para $\Omega$ un ordinal escribiremos $\Omega = W(\Omega)$ y $\Omega^* =$

$= W(\Omega+1)$.

3.17.- OBSERVACION: Si $\alpha$ es un ordinal límite entonces un subconjunto $A$ es cofinal con $\alpha$ si y solo si es no acotado en $\alpha$.

Demostración. Es obvio que si $A$ es cofinal entonces es no acotado en $\alpha$. Si $x<\alpha$ y $A$ es no acotado entonces existe $a\in A$ tal que $x<a<\alpha$. Por consiguiente $A$ es cofinal. $\dagger$

3.18.- PROPOSICION: Si $\Omega$ es un ordinal tal que $\mathrm{cof}\,\Omega > \omega_0$ entonces $\Omega$ es contablemente compacto

Demostración: Como $\mathrm{cof}(\Omega) > \omega_0$ entonces todo conjunto numerable $A \subseteq \Omega$ esta contenido en un subespacio compacto. En efecto, sea $\alpha = \sup A$ entonces $\alpha\in\Omega$ y $A \subseteq W(\alpha+1)$ que es compacto. Por consiguiente, todo conjunto infinito numerable tiene un punto de acumulación. Por tanto, de (A.8) concluimos que $\Omega$ es contablemente compacto.

3.19.- PROPOSICION Sea $\Omega$ tal que $\mathrm{cof}(\Omega) > \omega_0$. Entonces si $H, K \subseteq \Omega$ son subconjuntos cerrados de $\Omega$ tal que $H\cap K = \emptyset$ entonces uno de ellos es acotado.

Demostración. Si $H$ y $K$ son conjuntos cerrados cofinales elijamos $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\alpha_n \in H$ si $n$ es par y $\alpha_n\in K$ si $n$ es impar, entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \in H\cap K$, contradicción. Por tanto $H$ ó $K$

es un conjunto acotado. †

3.20.- TEOREMA: Si $f:\Omega \to \mathbb{R}$ es continua tal que $\Omega$ es un ordinal con $cof(\Omega) > \omega_0$, entonces $f$ es constante sobre un segmento final.

Demostración: Primero observemos que para todo segmento final $\Omega - W(\sigma)$, éste es contablemente compacto (En efecto, todo subespacio cerrado de un contablemente compacto es contablemente compacto). Por consiguiente $f(\Omega - W(\sigma))$ es contablemente compacto en $\mathbb{R}$ (por (A.9)) y como $\mathbb{R}$ es un espacio hereditariamente Lindelöf por (A.11) $f(\Omega - W(\sigma))$ es compacto así que la intersección $F = \bigcap_{\sigma \in \Omega} f(\Omega - W(\sigma))$ es no vacía. Sea $r \in F$. Entonces $f^{-1}(r)$ es cofinal en $\Omega$ (pues es no acotado). Ahora bién, para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in \Omega : |f(x) - r| \geq 1/n\}$ es disjunto de $f^{-1}(r)$. Por consiguiente, por (3.19) $A_n$ es acotado; sea $\alpha_n \in \Omega$ una cota superior. Entonces para cualquier ordinal $\alpha$ con $card(\alpha) > \aleph_0$ y $\alpha > \sup \alpha_n$ tenemos que $f(\Omega - W(\alpha)) = \{r\}$. En efecto, si $r_1 \in f(\Omega - W(\alpha)) - \{r\}$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tq. $|r_1 - r| \geq \frac{1}{N}$ y $\sigma_1 \geq \alpha$ tal que $f(\sigma_1) = r$, es decir, $\sigma_1 \in A_N$ pero esto implica que $\sigma_1 < \sup \alpha_n < \alpha$, contradicción. Por consiguiente $f(\Omega - \{W(\alpha)\}) = \{r\}$. †

Antes de continuar, necesitamos de la siguiente:

3.21.- DEFINICION: Sea $X$ un espacio topológico.

(1) $\mathcal{C}(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$; $\mathcal{C}^*(X) = \{ f \in \mathcal{C}(X) :$ $f$ es acotada$\}$.

(2) Diremos que un subespacio $S$ de $X$ está $\mathcal{C}$-inmerso en $X$ si toda función $f \in \mathcal{C}(S)$ puede ser extendida a una función $g \in \mathcal{C}(X)$. Igualmente, diremos que $S$ está $\mathcal{C}^*$-inmerso en $X$ si toda función $f \in \mathcal{C}^*(S)$ puede ser extendida a una función $g \in \mathcal{C}^*(X)$.

Por lo tanto de (3.20) y (3.21) tenemos que si $\Omega$ es un ordinal con $cof(\Omega) > \omega_0$ entonces $\Omega$ está $\mathcal{C}$-inmerso en $\Omega^*$. En efecto, extendemos $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ a $f_\beta \in \mathcal{C}(\Omega^*)$ definiendo $f_\beta(\Omega)$ como el valor constante final de $f$.

3.22.- DEFINICION: Sea $X \in \mathcal{L}$ y $u \in X^+ - X$. Definimos el tipo izquierdo de $u$, $\tau_-(u)$, como sigue: $\tau_-(u) = 0$ si $u$ es el hueco extremo izquierdo ó si $u$ es el límite de huecos interiores. De otra manera $\tau_-(u)$ es el mínimo ordinal $\alpha$ tal que existe una sucesión estrictamente creciente $\{ x_\lambda : \lambda < \alpha \} \subseteq X$ la cual es cofinal en $(\leftarrow, u)$. El tipo derecho de $u$, denotado por $\tau_+(u)$ se define análogamente.

Supongamos ahora que $X$ no tiene huecos interiores y que $u$ y $v$ son sus dos huecos extremos, si es que existen, tal que, siendo $u$ el hueco extremo izquierdo y $v$ el hueco extremo derecho, $\tau_+(u)=\omega_\alpha$ y $\tau_-(v)=\omega_\beta$ con $cof(\omega_\alpha)$, $cof(\omega_\beta)>\omega_0$. Entonces obtenemos lo siguiente: sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $X$ tiene primer elemento pero no último. Por lo tanto, dado que $X$ no tiene huecos interiores existe un homeomorfismo entre $X$ y $[0,\omega_\beta)$. Entonces como toda función continua $f:[0,\omega_\beta)\to \mathbb{R}$ tiene una extensión continua a $[0,\omega_\beta]$ esto implica que toda función continua de $X$ en $\mathbb{R}$ tiene una extensión continua a $X^+$. En particular, $X$ esta $C^*$-inmerso en $X^+$ y por (A·4) tenemos que $X^+=\beta X$.

Ahora, supongamos que $X$ tiene un hueco interior $(A,B)$, es decir $A,B\neq\emptyset$, para toda $a\in A$ y $b\in B$ $a<b$ y $X=A\cup B$. Entonces definimos $\varphi: X\to\mathbb{R}$ de la siguiente manera: $\varphi(x)=c_1$, si $x\in A$ y $\varphi(x)=c_2$ si $x\in B$ donde $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ y $c_1\neq c_2$. Claramente $\varphi\in C^*(X)$ y es tal que no tiene ninguna extensión continua a $X^+$. Por lo tanto, si $X$ tiene un hueco criterior, entonces siempre se tendrá $X^+\neq\beta X$. Resumiendo la discusión, hemos probado el siguiente:

<u>3.23.- TEOREMA</u>: Sea $X\in\mathcal{S}$

(1) Si $X$ no tiene huecos interiores y si $u,v$ son sus huecos extremos izquierdo y derecho, respectivamente, cuando existan, tal que $\tau_+(u)=\omega_\alpha$ y $\tau_-(v)=\omega_\beta$ con $cof(\omega_\alpha)$, $cof(\omega_\beta)>\omega_0$ entonces $\beta X=X^+$.

(2) Si $X$ tiene al menos un hueco interior, entonces $\beta X\neq X^+$.

Observemos que las condiciones sobre $\omega_\alpha$ y $\omega_\beta$ en (1) son esenciales pues si $cof(\omega_\alpha) = cof(\omega_\beta) = \omega_0$ entonces el resultado no necesariamente se cumple como lo muestra el siguiente:

<u>3.24.- EJEMPLO</u>: Sea $(\mathbb{R}, \tau_<)$ donde $<$ es el orden usual en $\mathbb{R}$. Sabemos que $-\infty, \infty$ son sus huecos extremos y son tal que $\tau_+(-\infty) = \omega_0 = \tau_-(\infty)$ y $\beta\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^+$ pues card$(\beta\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph_0}}$ (Ver [G-J]) y card $(\mathbb{R}^+) = 2^{\aleph_0}$.

La compacidad secuencial es tambien otra propiedad relacionada con la compacidad.

<u>3.25.- DEFINICION</u>: Un espacio topológico $X$ es <u>secuencialmente compacto</u> si toda sucesión de puntos de $X$ tiene una subsucesión convergente.

Es bien conocido que todo espacio secuencialmente compacto es contablemente compacto pero no al revés: $\beta\mathbb{N}$ es un espacio compacto y por tanto contablemente compacto que no es secuencialmente compacto ([E] pp 266). Igualmente existen espacios pseudocompactos que no son contablemente compactos y que por tanto no son tampoco secuencialmente compactos como lo muestra el siguiente espacio $X$: Sea $\{N_s\}_{s\in S}$, donde $S \cap \mathbb{N} = \emptyset$, una familia infinita de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que card $(N_s \cap N_{s'}) < \aleph_0$ para todo par $s, s' \in S$ con $s \neq s'$ y $\{N_s\}_{s\in S}$ siendo maximal con respecto a la última propiedad ([E] pp

229, 235). Se genera una topología sobre el conjunto $X = \mathbb{N} \cup S$ por el sistema de vecindades $\{\beta(x)\}_{x \in X}$ donde $\beta(x) = \{\{n\}\}$ si $x = n \in \mathbb{N}$ y $\beta(x) = \{\{s\} \cup (N_s - \{1, 2, \ldots, i\})\}_{i=1}^{\infty}$ si $x = s \in S$. Se puede demostrar que $X$ con esta topología resulta ser un espacio pseudocompacto que no es contablemente compacto ni secuencialmente compacto ([E], pp 271). Por lo tanto, en general vamos a tener que no son equivalentes estos tres conceptos. Sin embargo, mostraremos que en la clase de espacios topológicos linealmente ordenados estos tres conceptos coinciden.

<u>3.26.- TEOREMA</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $X$ es secuencialmente compacto

(2) $X$ es contablemente compacto

(3) $X$ es pseudocompacto.

<u>Demostración</u>: (1) implica (2) se cumple en general (A.12). (2) si y sólo si (3) se sigue de (2.4), (A.11) y (A.6). Finalmente probaremos (2) implica (1). Para esto supongamos que $X$ no es secuencialmente compacto; entonces existe una sucesión $S = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que toda subsucesión de $S$ no converge. Mostraremos entonces que existe una subsucesión de $S$ creciente y/ó una subsucesión de $S$ decreciente:

Si no existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{M_1}$, entonces construimos una subsucesión creciente de la siguiente manera: sea $x_{m_1}=x_1$, entonces existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que $x_1<x_{n_2}$; sea $x_{m_2}=x_{n_2}$; en general, dado $x_{m_{k-1}}$ existe $n_k\in\mathbb{N}$ tal que $x_{m_{k-1}}<x_{n_k}$; consideremos $x_{m_k}=x_{n_k}$. Entonces, $\{x_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión creciente de $S$. Si existe $M_1\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ $x_n\leq x_{M_1}$, entonces sea $x_{n_1}=x_{M_1}$. Ahora bien, si no existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que $x_{N_1}\leq x_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$, entonces, de una manera análoga al caso anterior podemos construir una subsucesión decreciente de $S$; si no es este el caso, es decir, si existe $N_1\in\mathbb{N}$ tal que $x_{N_1}\leq x_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$ entonces sea $x_{n_2}=x_{N_1}$. En general; si no existe $M_k\in\mathbb{N}-\{M_i\}_{i=1}^{k-1}$ tal que $x_n\leq x_{M_k}$ para toda $n\in\mathbb{N}-\{M_i\}_{i=1}^{k-1}$ entonces, como en el primer caso, construimos una subsucesión creciente de $S$; si no es este el caso, sea $x_{n_{2k-1}}=x_{M_k}$. Ahora, si tenemos que no existe $N_k\in\mathbb{N}-\{N_i\}_{i=1}^{k-1}$ tal que para toda $n\in\mathbb{N}-\{N_i\}_{i=1}^{k-1}$ $x_{N_k}\leq x_n$ entonces construimos de manera análoga al primer caso una subsucesión decreciente de $S$. Si existe $N_k\in\mathbb{N}$ con tal propiedad entonces elegimos a $x_{n_{2k}}=x_{N_k}$.

Si este proceso es finito obtenemos una subsucesión creciente ó decreciente, de $S$. Si es infinito obtenemos dos subsucesiones de $S$, $\{x_{n_k}\}_{k\text{ es par}}$ y $\{x_{n_k}\}_{k\text{ es impar}}$, creciente y decreciente, resp.

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que la subsucesión de $S$ que obtuvimos, digamos $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, es creciente. Consideremos ahora el conjunto $C=\{c\in X: c$ es cota superior de $\{x_{n_k}\}\}$; entonces $C$ es un conjunto abierto ya que si para $c\in C$ no existieran $a,b\in C$ con $a<c<b$ y $(a,b)\subseteq C$, entonces $c=$

$=\sup\{x_{n_k}\}$ lo cual implicaria que $x_{n_k}$ converge a $c$, contradiciendo el hecho de que ninguna subsucesión de $S$ converge. Por lo tanto $C$ es un conjunto abierto en $X_r$. Por consiguiente la familia de conjuntos abiertos $\{(\leftarrow, x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$ es una cubierta abierta numerable que no tiene ninguna subcubierta finita. Por lo tanto $X$ no es contablemente compacto. †

# C A P I T U L O 4
# F U N C I O N E S C A R D I N A L E S

En este capítulo se introduce el concepto de función cardinal, se definen aquellas más básicas y se demuestran algunas relaciones existentes entre ellas en espacios topológicos linealmente ordenados.

<u>4.1.- DEFINICION</u>: Una <u>función cardinal</u> es una función $f$ que asigna a cada espacio topológico $X$ un número cardinal $f(X)$ y tal que $f(X)=f(Y)$ para cualquier par $X, Y$ de espacios homeomorfos.

<u>4.2.- DEFINICION</u>: Sea $X$ un espacio topológico.

(1) El <u>carácter de $x$ en $X$</u>, $\chi(x,X)$, se define como el número cardinal $\aleph_0 \cdot \min\{card(\beta(x)) : \beta(x)$ es base local de $x$

(2) El <u>carácter de $X$</u>, $\chi(X)$, es igual a el $\sup\{\chi(x,X) : x\in X\}$.

(3) La <u>celularidad de $X$</u>, $c(X)$, es igual a $\aleph_0 \cdot \sup\{ card(\mathcal{A}) : \mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de $X$ y que son ajenos por pares$\}$.

<u>4.3.- TEOREMA</u>: Sea $X\in\mathcal{S}$. Entonces $\chi(X)\leq c(X)$.

<u>Demostración</u>: Se probará que cada $x\in X$ admite una

base local que contiene a lo más $c(X)$ elementos. Esto es claro si $x$ es un punto aislado. Supongamos entonces que $x$ es no aislado; sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x$ es un punto de acumulación de $(\leftarrow, x)$. Entonces existe una sucesión transfinita $x_0 < x_1 < \cdots < x_\xi < \cdots$ con $\xi < \eta$ tal que cada intervalo $(x_\xi, x_{\xi+1})$ es no vacío y $x = \sup_{\xi<\eta}\{x_\xi\}$. En efecto, sea $x_0$ el primer elemento de $X$ (en caso de que exista); si $x$ no tiene primer elemento sea $x_0 \in X$ con $x_0 < x$; entonces $A_0 = (x_0, x) \cap (\leftarrow, x) \neq \emptyset$. Sea $x_1 \in A_0$ tal que $(x_0, x_1)$ sea un intervalo no vacío; como $x$ es un punto de acumulación de $(\leftarrow, x)$ tenemos que $A_1 = (x_1, x) \cap (\leftarrow, x) \neq \emptyset$; sea $x_2 \in A_1$ tal que $(x_1, x_2) \neq \emptyset$; una vez elegido $x_{\xi-1}$ elegimos $x_\xi \in A_{\xi-1}$ tal que $(x_{\xi-1}, x_\xi) \neq \emptyset$. Si $\xi$ es un ordinal límite, entonces sea $B = \{y \in X : y$ es cota superior de $\{x_\lambda : \lambda < \xi\}\}$. Si $B \cap (\leftarrow, x) = \emptyset$ entonces $\lim_{\lambda<\xi} x_\lambda = x$. Si $B \cap (\leftarrow, x) \neq \emptyset$ sea $x_\xi \in B \cap (\leftarrow, x)$. Dado que para toda $\xi < \eta$ $(x_\xi, x_{\xi+1}) \neq \emptyset$ entonces tenemos que $\operatorname{card}(\eta) \leq c(X)$; es decir $x$ es el límite de una sucesión de a lo más $c(X)$ puntos. De una manera análoga, si $x$ es también un punto de acumulación de $(x, \rightarrow)$ obtenemos una sucesión decreciente de a lo más $c(X)$ puntos y con $x = \inf_{\xi'<\mu}\{y_{\xi'}\}$ y $\operatorname{card} \mu \leq c(X)$. Entonces $\beta(x) = \{(x_\xi, y_{\xi'})\}_{\xi<\eta, \xi'<\mu}$ es una base local de $x$ en $X$. En efecto, si $I$ es un intervalo de $X$ que contiene a $x$, entonces $I \cap (\leftarrow, x) \neq \emptyset \neq I \cap (x, \rightarrow)$; sean $a, b \in X$ tal que $a \in I \cap (\leftarrow, x)$ y $b \in I \cap (x, \rightarrow)$ y como $\sup_{\xi<\eta}\{x_\xi\} = x = \inf_{\xi'<\mu}\{y_{\xi'}\}$

entonces existen $\xi<\eta$ y $\xi'<\delta$ tal que $a<x_\xi<x<y_{\xi'}<b$ y por tanto $x\in(x_\xi,y_{\xi'})\subseteq I$. Además $\operatorname{card}(\beta(x))\leq c(X)\cdot c(X)=c(X)$.

En caso de que $x$ tenga un salto a la derecha, la familia $\beta(x)=\{(x_\xi,y)\}_{\xi<\eta}$, donde $y$ es el sucesor inmediato de $X$, resulta ser la base deseada; la prueba es análoga al caso anterior.

Finalmente si $x$ tiene un salto a la izquierda, la familia $\{(a,y_{\xi'})\}_{\xi'<\delta}$ con $a$ el predecesor inmediato de $x$ en $X$ es una base local de $x$ en $X$ de cardinal menor ó igual a $c(X)$. Por consiguiente tenemos que $\chi(X)\leq c(X)$ - †.

<u>4.4.-DEFINICION</u>: (1) Para una función cardinal $f$ denotamos por <u>$hf$</u> la función cardinal cuyo valor sobre un espacio $X$ es igual al $\sup f(M)$ donde el supremo es tomado sobre todos los subespacios $M$ de $X$.

(2) El <u>número de Lindelöf</u> de $X$, $\ell(X)$, es el mínimo número cardinal $m\geq\aleph_0$ tal que toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto de cardinalidad menor ó igual a $m$.

(3) De (1) y (2) obtenemos la definición del <u>número hereditario de lindelöf</u>: $h\ell(X)=\sup\limits_{M\subseteq X}\ell(M)$.

Ahora estamos interesados en demostrar que $h\ell(X)\leq c(X)$. Para esto necesitamos probar el siguiente:

<u>4.5.-LEMA</u>: Sea $X\in\mathcal{L}$ con $c(X)=m$. Supongamos que $Y\subseteq X$ y $z\in Y$. Entonces existen subconjuntos $P$ y $Q$ de cardinalidad a lo más $m$, $P\subseteq(\leftarrow,z]\cap Y$ y $Q\subseteq[z,\rightarrow)\cap Y$ tal que si $y\in Y$, entonces existen puntos $p\in P$ y $q\in Q$ con la propiedad de que $p\leq y\leq q$.

*Demostración*: Sea $z \in Y$. Si $(\leftarrow, z) \cap Y = \emptyset$ entonces $P = \{z\}$. Supongamos que $(\leftarrow, z) \cap Y \neq \emptyset$ y sea $z_1 \in (\leftarrow, z) \cap Y$. Si $(\leftarrow, z_1) \cap Y = \emptyset$, entonces $P = \{z, z_1\}$. Si $(\leftarrow, z_1) \cap Y \neq \emptyset$ entonces sea $z_2 \in (\leftarrow, z_1) \cap Y$. De esta manera obtenemos la sucesión $z > z_1 > z_2 > \dots > z_\xi > \cdots$ con $\xi < \eta$. Para justificar la existencia de esta sucesión ver la demostración de (4.3). Analogamente existe $\{w_{\xi'}\}_{\xi'<\lambda}$ tal que $z < w_1 < w_2 < \cdots < w_{\xi'} < \cdots$ con $\xi' < \lambda$. Entonces $P = \{z_\xi\}_{\xi<\eta}$ y $Q = \{w_{\xi'}\}_{\xi'<\lambda}$ satisfacen lo pedido en el teorema. †.

*4.6.- DEFINICION*: Sea $m$ un número cardinal infinito. Diremos que $X$ espacio topológico es *$m$- Lindelöf* si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta con cardinalidad menor ó igual que $m$.

~~Por otro lado~~, se puede demostrar que para todo espacio topológico, $X$ se satisface que $c(X) \leq d(X)$ y que $c(X) \leq hl(X)$. Además, vamos a tener que existen espacios en donde $c(X) < hl(X)$. En efecto, sea $X = \mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ (línea de Sorgenfrey) y consideremos $X \times X = Z$ con la topología producto. Entonces $Z$ es separable y por tanto $d(Z) = \aleph_0$, es decir, $c(Z) = \aleph_0$, mientras que $hl(Z) \geq 2^{\aleph_0}$ pues $Y = \{(x,y) : y = -x\}$ como subespacio de $Z$ tiene la topología discreta y por consiguiente $l(Y) = \text{card}(Y) = 2^{\aleph_0}$. Lo que hacemos a continuación es mostrar que en el reino de los espacios linealmente ordenados $c(X) = hl(X)$.

<u>4.7.-TEOREMA</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$ tal que $c(X) = m$. Entonces $X$ es hereditariamente $m$-Lindelöf.

<u>Demostración</u>: Por (A.13) es suficiente mostrar que si $\mathcal{V}$ es cualquier colección de intervalos abiertos en $X$ entonces existe una subcolección $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ de cardinalidad $\leq m$ que cubre al conjunto $\bigcup \mathcal{V}$. Sea $M = \bigcup \mathcal{V}$. Para cada $x \in M$ definimos $I(x) = \{y \in M$ : el conjunto de todos los puntos de $M$ que están entre $x$ y $y$ puede ser cubierto por una subcolección de $\mathcal{V}$ de cardinalidad $\leq m\}$. Entonces obtenemos lo siguiente:

(1) $I(x)$ es abierto en $X$. En efecto, si $z \in I(x)$ entonces existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ tal que card$(\mathcal{W}) \leq m$ y $\mathcal{W}$ cubre a todos los $y \in M$ tal que $x < y < z$. Como $z \in I(x) \subseteq M = \bigcup \mathcal{V}$ entonces existe $J \in \mathcal{V}$, intervalo abierto en $X$ tal que $z \in J$. Se afirma que $J \subseteq I(x)$: sea $\mathcal{W}' = \mathcal{W} \cup \{J\}$; entonces card$(\mathcal{W}') \leq m$. Si $a \in J$ entonces el conjunto de puntos de $M$ que están entre $x$ y $a$ puede ser cubierta por $\mathcal{W}'$; por tanto $a \in I(x)$, es decir, $z \in J \subseteq I(x)$. Por tanto $I(x)$ es un conjunto abierto en $X$.

(2) Para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $I(x) = I(y)$ ó $I(x) \cap I(y) = \emptyset$. En efecto, supongamos que $I(x) \neq I(y)$, entonces existe $z \in I(x)$ tal que $z \notin I(y)$. Deseamos probar que $I(x) \cap I(y) = \emptyset$. Si existe $p \in I(x) \cap I(y)$ consideremos los siguientes casos (sin pérdida de generalidad vamos a suponer $x < y$):

(a) cuando $z < p$.

(i) Si $x < z < p$ entonces como $p \in I(x)$, $p < y$ ya que si $x < y < p$ entonces tendríamos que los puntos de $M$ que estan entre $y$ y $z$

pueden ser cubiertos por una subfamilia de $\mathcal{V}$ de cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$, es decir, $z \in I(y)$), lo cual es una contradicción. Por lo tanto $p<y$, pero $p\in I(y)$, es decir, los puntos de $M$ que están entre $y$ y $p$ pueden ser cubiertos por una subfamilia de $\mathcal{V}$ de card $\leq \mathfrak{m}$ y dado que $p \in I(x)$ los puntos de $M$ que están entre $x$ y $p$, y por consiguiente los que están entre $z$ y $p$, pueden ser cubiertos por una subfamilia de $\mathcal{V}$ de card $\leq \mathfrak{m}$. En consecuencia, los puntos de $M$ que estan entre $z$ y $y$ pueden ser cubiertos por una subfamilia de $\mathcal{V}$ de card $\leq \mathfrak{m}$, es decir, $z \in I(y)$), contradicción.

(ii) Si $z<x<p$ entonces por argumentos similares a los dados en (i), $p<y$. Ahora, $p \in I(x) \cap I(y)$ implica que los puntos de $M$ que están entre $x$ y $y$ pueden ser cubiertos por una subfamilia de $\mathcal{V}$ de card $\leq \mathfrak{m}$ y como $z \in I(x)$, los puntos que estan entre $x$ y $z$ tambien pueden ser cubiertos por una subfamilia de $\mathcal{V}$ de card $\leq \mathfrak{m}$. Por lo tanto $z \in I(y)$ lo cual es una contradicción.

(iii) $z<p<x<y$ es análogo a los anteriores.

(b) Si $p<z$. Haciendo un análisis similar al caso (a) se llega también a que $z \in I(y)$ lo cual es una contradicción. Por consiguiente, de (a) y (b) se obtiene que $I(x) \cap I(y) = \emptyset$. Por lo tanto de (1) y (2) y por hipótesis la colección $\mathcal{A} = \{I(x) : x \in M\}$ tiene card $\leq \mathfrak{m}$. Fijemos $x \in M$. Por lema (4.5) existen $P(x)$ y $Q(x)$ de card $\leq \mathfrak{m}$ tal que $P(x) \subseteq I(x) \cap (\leftarrow, x]$ y $Q(x) \subseteq I(x) \cap [x, \rightarrow)$ tal que si $y \in I(x)$ existen $p \in P(x)$ y $q \in Q(x)$ con $p \leq y \leq q$. Por definición de $I(x)$, para cada $p \in P(x)$ y $q \in Q(x)$ existen subcolecciones $\mathcal{V}(x,p)$ y $\mathcal{V}(x,q)$ de $\mathcal{V}$ con card $\leq \mathfrak{m}$ que cubren a los con-

juntos $M\cap[p,x]$ y $M\cap[x,q]$ respectivamente. Sea $\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{V}(x,r): r\in P(x)\cup Q(x)$ y $x\in M\}$. Entonces $\mathcal{U}$ resulta ser una subcolección de $\mathcal{V}$ de cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$ que cubre a $M$.

Por tanto $X$ es hereditariamente $\mathfrak{m}$-Lindelöf. $\dagger$.

Como en general se cumple la desigualdad $c(X)\leq hl(X)$ tenemos que para un espacio lineal ordenado se cumple lo siguiente:

4.9.-COROLARIO: Si $X\in\mathcal{L}$ entonces $hl(X)=c(X)$.

4.10.-DEFINICION: Sea $X$ un espacio topológico y $\mathfrak{m}$ un num. cardinal

(1) $X$ es $\mathfrak{m}$-separable sii contiene un subconjunto denso de cardinalidad $\leq\mathfrak{m}$.

(2) La densidad de $X$, $d(X)$, se define como $\aleph_0\cdot\min\{\mathrm{card}(D): D\subseteq X$ es denso en $X\}$.

4.11.-TEOREMA: Sea $X\in\mathcal{L}$ tal que $d(X)=\mathfrak{m}$, entonces $X$ es hereditariamente $\mathfrak{m}$-separable.

Demostración: Sea $A\subseteq X$ y consideremos $I(A)=\{a\in A: \{a\}$ es relativamente abierto en $A\}$. Claramente, tenemos que $\mathrm{card}(I(A))\leq\mathfrak{m}$ pues $I(A)$ es un subespacio discreto y $\mathrm{card}(I(A)) = l(I(A))\leq hl(X)=c(X)\leq d(X)=\mathfrak{m}$. Ahora, sea $D\subseteq X$ denso en $X$ con $\mathrm{card}(D)=\mathfrak{m}$ y consideremos $\mathcal{D}=\{(r,s)_X : r,s\in D, r<s$ y $A\cap(r,s)_X\neq\emptyset\}$. Para cada intervalo $J\in\mathcal{D}$ elijamos un punto $a(J)\in A\cap J$. Sea $E=I(A)\cup\{a(J): J\in\mathcal{D}\}$. Entonces resulta que $E$ es un conjunto de card $\leq\mathfrak{m}$. Para probar que $E$ es denso en $A$ es suficiente mostrar que si $U$ es un abierto en $X$ tal que $A\cap U\neq\emptyset$ entonces $E\cap U\neq\emptyset$. Elijamos $a\in A\cap U$.

Si $a \in I(a)$ entonces $a \in E$. Si $a \notin I(a)$ entonces $a$ no es punto aislado de $A$ y por lo tanto se cumple que:

ó (1) $(\leftarrow, a)_X \neq \emptyset$ y $(x, a) \cap A \neq \emptyset$ siempre que $x < a$ ó

(2) $(a, \rightarrow)_X \neq \emptyset$ y $(a, y) \cap A \neq \emptyset$ para toda $a < y$.

Consideraremos solo el primer caso (el segundo es análogo). Dado que $\mathcal{U}$ es una vecindad de $a$ en $X$, existe $z < a$ tal que $(z, a) \subseteq U$; entonces aplicando (1) elegimos puntos $x_1 \in (z, a) \cap A$, $x_2 \in (x_1, a) \cap A$ y $x_3 \in (x_2, a) \cap A$; Como $D$ es denso en $X$ y $(z, x_2) \neq \emptyset \neq (x_2, a)$ entonces existen puntos $r \in (z, x_2) \cap D$ y $s \in (x_2, a) \cap D$. Sea $J = (r, s) \in \mathcal{D}$; entonces $a(J) \in (z, a) \cap E \subseteq U \cap E$. Por lo tanto $E \cap U \neq \emptyset$, es decir, $E$ es denso en $A$. Por consiguiente $A$ es $m$-separable. †

<u>4.12.-COROLARIO</u>: Si $X \in \mathcal{S}$ es un espacio separable, entonces $X$ es hereditariamente separable.

<u>4.13.-COROLARIO</u>: Si $X \in \mathcal{S}$, entonces $hd(X) = d(X)$.

<u>4.14.-DEFINICION</u>: Sea $X$ un espacio topológico.

(1) <u>La estrechez de $x$ en $X$</u>, $\tau(x, X)$, es el mínimo número cardinal $m \geq \aleph_0$ con la propiedad de que si $x \in \overline{C}$, entonces existe $C_0 \subseteq C$ tal que $\operatorname{card}(C_0) \leq m$ y $x \in \overline{C_0}$.

(2) <u>La estrechez de $X$</u>, $\tau(X)$, es el $\sup\{\tau(x, X) : x \in X\}$.

(3) El <u>pseudocarácter de $x$ en $X$</u>, $\Psi(x, X)$, es el número cardinal $\aleph_0 \cdot \min\{\operatorname{card}(\mathcal{U}) : \mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $X$ tal que $\cap \mathcal{U} = \{x\}\}$

(4) El <u>pseudocarácter</u> de $X$, $\Psi(X)$, es el $\sup\{\Psi(x, X) : x \in X\}$.

Se puede probar que para todo espacio $X$, $T_1$, $\Psi(X) \leq \chi(X)$ y además se puede tener que $\Psi(X) < \chi(X)$ como lo muestra el siguiente ejemplo: Sea $X$ la unión de $\aleph_0$ copias ajenas del intervalo cerrado de racionales $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Denotamos la n-ésima copia de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ como $I_n = [0_n, 1_n]$. Dotamos a $X$ de la topología suma, es decir, $A \subseteq X$ es abierto en $X$ sii $A \cap I_n$ es abierto en $I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, consideremos la siguiente relación de equivalencia $\sim$ en $X$: para $x \in X - \{0_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \sim y$ sii $x = y$ y si $x = 0_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ $x \sim 0_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Entonces, si $X/\sim$ es el conjunto de clases de equivalencia de $X$ bajo $\sim$, definimos $p: X \to X/\sim$ tal que $p(x) = \tilde{x}$ donde $\tilde{x}$ es la clase de equivalencia tal que $x \in \tilde{x}$. A $X/\sim$ le damos la siguiente topología: $A \subseteq X/\sim$ es abierto si y solo si $p^{-1}(A)$ es abierto en $X$. Se afirma que $\Psi(X) < \chi(X)$. En efecto, para $\tilde{0} \in X/\sim$ la familia $\{C_{1/n}(\tilde{0})\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $C_{1/n}$ es la bola abierta que contiene a $\tilde{0}$ y de radio $1/n$, es una familia tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{1/n}(\tilde{0}) = \{\tilde{0}\}$; sin embargo, dada $\mathcal{F} = \{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ familia numerable de abiertos tal que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m = \{\tilde{0}\}$ tenemos lo siguiente: para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $x_m \in \mathbb{N}$ tal que $0_m \in [0_m, x_m) \subseteq I_m \cap p^{-1}(B_m)$; sea $y_m \in (0_m, x_m)_{\mathbb{Q}}$; entonces, si $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [0_m, y_m)_{\mathbb{Q}}$, $p(A)$ es un abierto en $X/\sim$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$ $B_m \cap p(A)^c \neq \emptyset$, es decir, $\{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ no es base local de $\tilde{0}$ en $X/\sim$. Por consiguiente $\Psi(X/\sim) < \chi(X/\sim)$. Más adelante nos referiremos a este espacio como el "$\aleph_0$-erizo racional".

Sin embargo, para espacios lineales ordenados obtenemos:

<u>4.15-TEOREMA</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$; entonces $\chi(X) = \psi(X)$.

<u>Demostración</u>: Basta probar que $\chi(X) \le \psi(X)$. Sea $x \in X$

(1) Si $x$ es un punto aislado, entonces es claro que $\chi(x,X) \le \psi(X)$

(2) Supongamos que $x$ no es aislado y que no tiene saltos a la izquierda ni a la derecha; supongamos además que $x$ no es punto extremo. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia de intervalos abiertos de $X$ tal que $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha = \{x\}$ y $\operatorname{card}(\mathcal{V}) \le \psi(X)$; consideremos los conjuntos $A = \{y \in X : y < x$ y $y$ es extremo de algún intervalo $V_\alpha\}$, $B = \{z \in X : x < z$ y $z$ es extremo de algún intervalo de $\mathcal{V}\}$; entonces $A, B \neq \emptyset$. En efecto, si alguno de ellos fuera vacío, digamos $A$, entonces tendríamos que para toda $\alpha \in I$, $V_\alpha = (\leftarrow, z_\alpha)$ con $x < z_\alpha$ y como $x$ no es punto extremo tendríamos que existe $y \in \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha - \{x\}$, contradicción. Consideremos la familia $\beta(x) = \{(a,b)\}_{a \in A, b \in B}$; entonces $\operatorname{card}(\beta(x)) \le \operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(B) \le \operatorname{card}(\mathcal{V}) \le \psi(X)$. Además $\beta(x)$ resulta ser una base local de $x$ en $X$. En efecto, sea $J$ un intervalo abierto de $X$ con $x \in J$. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $J = (u,v)$. Deseamos probar que existe $a \in A$ tal que $u < a < x$. En efecto, si no fuera así, tendríamos que $u \in \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha - \{x\}$, contradicción. Análogamente existe $b \in B$ tal que $x < b < v$. En consecuencia $x \in (a,b) \subseteq J$ y $(a,b) \in \beta(x)$. Por lo tanto $\beta(x)$ es una base local de $x$ en $X$.

(3) Si $x$ es un punto extremo, entonces, sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x$ es el primer elemento de $X$. Entonces, para $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia de intervalos abiertos

en $X$ con $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$ y card $(\mathcal{V}) \leq \Psi(X)$ vamos a tener que para toda $\alpha \in I$, $V_\alpha = [x, x_\alpha)$. En este caso probaremos que $\mathcal{V}$ misma resulta ser una base local de $x$ en $X$. En efecto, si $J$ es un intervalo tal que $x \in J$, entonces $J = [x, z)$ con $z \in X$; entonces existe $\alpha \in I$ tal que $x < x_\alpha < z$ (si no fuera así, $z \in \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha - \{x\}$), es decir $x \in V_\alpha \subseteq J$. Por tanto $\mathcal{V}$ es base local en $x$.

(4) Si $x$ tiene un salto a la derecha ó a la izquierda. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x$ tiene un salto a la izquierda y sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ como en (2) y (3). Sea $z$ el predecesor inmediato de $x$ en $X$. Por argumentos similares a los dados en (2) y (3) se prueba que $\{(z, b)\}_{b \in B}$ con $B$ igual que en (2), es una base local de $x$ de card $\leq \Psi(X)$.

Por consiguiente, de (1)-(4) tenemos que para todo $x \in X$, $\chi(x, X) \leq \Psi(X)$, es decir, $\chi(X) \leq \Psi(X)$. Con esto queda probado el teorema. †

Se puede demostrar que para todo espacio topológico $\tau(X) \leq \chi(X)$ y además podemos tener el caso en que $\tau(X) < \chi(X)$ como lo muestra el siguiente ejemplo: Sean $X = \mathbb{R}$ y $Y = (\mathbb{R} - \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$ dondo $y_0 \notin \mathbb{R}$; asígnese a cada punto $x \in X$ el punto $f(x) = x$, si $x \in X - \mathbb{N}$ y $f(x) = y_0$ si $x \in \mathbb{N}$ y considerese en $Y$ la topología generada por la familia de conjuntos cerrados $\mathcal{C} = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A)$ es cerrado en $X\}$ (i.e, todos los cerrados en $Y$). Entonces $Y$ resulta ser, con esta topología, un espacio tal que para cada subconjunto $A \subseteq Y$ de $Y$ y cada $y \in \bar{A}$ existe una sucesión numerable de puntos de $A$ que converge a $y$, es decir, $\tau(X)=\aleph_0$ y que además $X$ no es primero numerable en $y_0$, es decir, $\chi(X)>\aleph_0$ (Ver [Fe] pp 16-17).

Sin embargo para elementos de $\mathcal{L}$ tenemos el siguiente

<u>4.16.- TEOREMA</u>: Para $X\in\mathcal{L}$ tenemos que $\tau(X)=\chi(X)$.

<u>Demostración</u>: Es suficiente probar que para cada $x\in X$, $\chi(x,X)\leq\tau(X)$. Sea $x\in X$; consideremos los siguientes casos:

(1) Si $x$ es un punto aislado entonces $\chi(x,X)\leq\tau(X)$.

(2) Si $x$ no es aislado, no es extremo y no tiene saltos a la derecha ni a la izquierda, consideremos: $A_1\subseteq\{a\in X : a<x\}$ tal que $x\in\overline{A_1}$ y card $(A_1)\leq\tau(X)$, $A_2\subseteq\{a\in X : x<a\}$ tal que $x\in\overline{A_2}$ y card $(A_2)\leq\tau(X)$. Sea $\beta(x)=\{(a,b): a\in A_1$ y $b\in A_2\}$, entonces card $(\beta(x))\leq\tau(X)$; además, $\beta(x)$ es base local de $x$ en $X$. En efecto, si $J$ es un intervalo de $X$ tal que $x\in J$, entonces como $x\in\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ tenemos que existen puntos $a\in J\cap A_1$ y $b\in J\cap A_2$ con $a,b\neq x$. Por lo tanto $x\in(a,b)\subseteq J$ y $(a,b)\in\beta(x)$, es decir, $\beta(x)$ es base local de $x$.

(3) Si $x$ tiene un salto a la derecha o a la izquierda. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x$ tiene un salto a la izquierda (el otro caso es similar); entonces sea $z$ el predecesor inmediato de $x$ en $X$ y sea $A\subseteq\{a\in X : x<a\}$ tal que $x\in\overline{A}$ y card $(A)\leq\tau(X)$. Entonces, como en el caso anterior, obtenemos que para $\beta(x)=\{(z,a) : a\in A\}$, card$(\beta(x))$ $\leq\tau(X)$ y $\beta(x)$ es una base local de $x$ en $X$.

(4) Si $x$ es un punto extremo. Supongamos que $x$ es el último elemento de $X$; entonces consideremos $A\subseteq\{a\in X : a<x\}$

tal que $x \in \bar{A}$ y card $(A) \le \tau(X)$. Como en los casos anteriores, $\beta(x) = \{(a, x] : a \in A\}$ resulta ser una base local de $x$ en $X$ tal que card $(\beta(x)) \le \tau(X)$.

Por lo tanto, de (1)-(4) obtenemos el resultado. †

Antes de enunciar el siguiente teorema necesitamos de la siguiente:

4.17.- DEFINICION: Sea $X$ un espacio topológico.

(1) El peso de $X$, $w(X)$, es $\aleph_0 \cdot \min\{\text{card}(\beta) : \beta \text{ es base de } X\}$.

(2) Una familia $\mathcal{N} = \{M_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de $X$ es una red (network) para $X$ si para cada $x \in X$ y cualquier vecindad $U$ de $x$ existe $s \in S$ tal que $x \in M_s \subseteq U$.

(3) El peso neto de $X$, $nw(X)$, es el número cardinal $\aleph_0 \cdot \min\{\text{card}(\mathcal{N}) : \mathcal{N} \text{ es una red para } X\}$.

Observemos que toda base de $X$ es una red para $X$, es decir, $nw(X) \le w(X)$ y que el "$\aleph_0$- erizo racional" es un ejemplo de un espacio $X$ tal que $nw(X) < w(X)$ pues es un espacio que no es segundo numerable y con card $(X) = \aleph_0$, es decir $nw(X) = \aleph_0$ y $w(X) > \aleph_0$.

4.18.- TEOREMA: Si $X \in \mathcal{L}$, entonces $w(X) = nw(X)$.

Demostración: Dado que $nw(X) \le w(X)$ se satisface en general basta probar que $w(X) \le nw(X)$. Sea $\mathcal{N} = \{N_s\}_{s \in S}$ una red para $X$ tal que card $(\mathcal{N}) = nw(X)$; para cada $s \in S$ consideremos $\mathcal{A}_s = \{I : I \text{ es un intervalo abierto en } X \text{ con } N_s \subseteq I\}$; sea $A_s = \bigcap \mathcal{A}_s$; entonces $N_s \subseteq A_s$ para cada $s \in S$.

Se afirma que la familia de intervalos abiertos $\beta=\{A_s\}_{s\in S}$ es una base de $X$. En efecto, si $J$ es un intervalo abierto en $X$ y $x\in J$, entonces existe $s\in S$ tal que $x\in N_s\subseteq J$ y por tanto $J\in \mathcal{A}_s$ y de aquí que $x\in N_s\subseteq A_s\subseteq J$. Por lo tanto $\beta$ es una base de $X$ y $card(\beta)\leq nw(X)$. Por tanto $w(X)\leq nw(X)$. $\top$

<u>4.19. TEOREMA</u>: Para $X\in\mathcal{S}$, $U=\{u\in X^+ : u$ es un salto de $X\}$ y $g(X)=card(U)$ tenemos que $w(X)=d(X)+g(X)$.

<u>Demostración</u>: Sea $S\subseteq X$ denso con $card(S)=d(X)$. Recordemos que si $(A,B)=u$ es un salto de $X$ entonces existen $a,b\in X$ tal que $a$ es el último elemento de $A$ y $b$ es el primer elemento de $B$; sea $e(u)=\{a,b\}$ y consideremos $H=\bigcup\{e(u): u\in U\}$. Probaremos que $\beta=\{(a,b): a,b\in S\cup H\}\cup\{\{x\}: x$ es punto aislado$\}$ es una base para $X$.

(1) Si $x$ es un punto aislado, entonces para cualquier intervalo abierto $I$ en $X$ tal que $x\in I$, se tiene que $x\in\{x\}\subseteq I$.

(2) Sea $x$ no aislado, no extremo y que no tiene saltos a la derecha ni a la izquierda. Sea $I=(p,q)$ un intervalo abierto de $X$ tal que $x\in I$; entonces existen $a\in S\cap(p,x)$ y $b\in S\cap(x,q)$ ya que $S$ es denso en $X$. Por lo tanto $x\in(a,b)\subseteq I$.

(3) Si $x$ tiene un salto a la izquierda pero no a la derecha, sea $\underline{a}$ su predecesor inmediato y sea $I=(p,q)$ un intervalo abierto en $X$ tal que $x\in I$. Como $S$ es denso en $X$, existe $b\in S\cap(x,q)$ y de aquí que $x\in(a,b)\subseteq I$. Si $x$ tiene un salto a la derecha, analogamente encontramos $a,b\in S\cup H$ tal que $x\in(a,b)\subseteq I$.

(4) Si $x$ es un punto extremo la demostración es análoga.

Por consiguiente, de (1)-(4) concluimos que $\beta$ es una base para $X$, es decir, $w(X) \leq \mathrm{card}(S \cup H) \leq d(X) + g(X)$.

Ahora, deseamos probar que $g(X) \leq w(X)$. Para este fin, sean $\beta$ una base de $X$ tal que $\mathrm{card}(\beta) = w(X)$ y $u = (A, B)$ salto de $X$ con $a \in X$ último elemento de $A$. Entonces $(\leftarrow, a]$ es un intervalo abierto en $X$ y como $\beta$ es una base entonces existe $B_a \in \beta$ tal que $a \in B_a \subseteq (\leftarrow, a]$. Entonces tenemos que $\varphi: U \to \beta$ tal que $\varphi((A,B)) = B_a$ es una función inyectiva; en consecuencia $g(X) \leq w(X)$ y como en general se satisface $d(X) \leq w(X)$ obtenemos que $d(X) + g(X) \leq 2w(X) = w(X)$. Por tanto $w(X) = d(X) + g(X)$. †

Finalmente obtenemos la siguiente cota para $\mathrm{card}(X)$ con $X \in \mathcal{S}$:

<u>4.20.- TEOREMA</u>: Si $X \in \mathcal{S}$ entonces $\mathrm{card}(X) \leq 2^{c(X)}$.

<u>Demostración</u>: es una consecuencia inmediata de (A.14) y (4.9). †

El siguiente cuadro resume las relaciones existentes entre las funciones cardinales en espacios linealmente ordenados, tratadas en este capítulo:

$$\begin{tikzcd}
 & \{\mathrm{Card}\ X\} \arrow[d] & \\
 & \{w(X) = nw(X)\} \arrow[d] & \\
 & \{d(X) = hd(X)\} \arrow[d] & \\
 & \{c(X) = hc(X) = hl(X)\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\{\chi(X) = \psi(X) = \tau(X)\} & & \{l(X)\}
\end{tikzcd}$$

Nota: $f(X) \longrightarrow g(X)$ en el cuadro anterior significa $f(X) \geq g(X)$.

Finalmente, mostraremos por medio de ejemplos que las desigualdades mostradas en este cuadro pueden ser estrictas.

(a) Si $X = (\mathbb{R}, \tau_<)$ con "<" el orden usual en $\mathbb{R}$, entonces $\mathrm{card}(X) = 2^{\aleph_0}$ y dado que $X$ es segundo numerable, $w(X) = \aleph_0$, es decir, $w(X) < \mathrm{card}(X)$.

(b) Sea $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ con la *topología inducida por el orden* lexicográfico. Entonces $d(X) = \aleph_0$ pues $\mathbb{Q} \times \{0,1\}$ es denso en $X$ y $w(X) > \aleph_0$ pues si $w(X) = \aleph_0$ entonces $X$ es segundo numerable y por tanto el subespacio $Y = \mathbb{R} \times \{1\}$ tiene una base numerable, pero $Y$ es homeomorfo a la línea de Sorgenfrey que no es segundo numerable, contradicción. Por lo tanto $w(X) > \aleph_0$, es decir $d(X) < w(X)$.

(c) Consideremos $X = (I^2, \tau_<)$ el cuadrado lexicográfico. Entonces, por la discusión dada en (2.7.2) resulta que $hl(X) = 2^{\aleph_0}$ y por (3.3.2) $l(X) = \aleph_0$. Además, de (3.10) resulta que $\chi(X) = \aleph_0$. Por lo tanto éste es un ejemplo de un espacio tal que $\chi(X) < hl(X)$ y $l(X) < hl(X)$.

(d) *Finalmente observemos que un espacio de Souslin, digamos* $S$, *es un espacio lineal ordenado tal que* $e(S) = \aleph_0$ y $d(X) > \aleph_0$ (Ver [Be]).

# CAPITULO 5

# PARACOMPACIDAD

En el presente capítulo probaremos la equivalencia de tres conceptos relacionados con la paracompacidad que en general no coinciden y además encontramos dos caracterizaciones del concepto que da nombre al capítulo; una de ellas se da en términos de los huecos del espacio y la segunda en términos del concepto de un conjunto estacionario de ordinales.

5.1.- DEFINICION: Sea $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de un conjunto $X$.

(1) Una cadena de $A_s$ a $A_{s'}$ es una sucesión finita $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_k}$ de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $s_1 = s$, $s_k = s'$ y $A_{s_i} \cap A_{s_{i+1}} \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

(2) Diremos que la familia $\mathcal{A}$ es conectada si para cada par $A_s, A_{s'}$ de elementos de $\mathcal{A}$ existe una cadena de $A_s$ a $A_{s'}$.

(3) Una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ es conectada maximal si no es subconjunto propio de alguna subfamilia conectada de $\mathcal{A}$.

(4) Las componentes de $\mathcal{A}$ se definen como las subfamilias conectadas maximales.

5.2.- OBSERVACION: (1) Las componentes de una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ existen por el lema de Zorn.

(2) Toda familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ se descompone en la unión de sus componentes. Además, si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son componentes distintas de $\mathcal{A}$ se tiene que: $(\cup\mathcal{A}_1) \cap (\cup\mathcal{A}_2) = \emptyset$.

El próximo resultado es una propiedad importante que nos servirá para demostrar algunas propiedades de los espacios linealmente ordenados.

5.3.- LEMA: Sea $\mathcal{A}$ una familia conectada de subconjuntos convexos de $X \in \mathcal{L}$ (Sea "$<$" el orden en $X$). Entonces, existen en $\cup\mathcal{A}$ sucesiones, finitas o infinitas, $x_1, x_2, \ldots$ y $y_1, y_2, \ldots$ tal que:

(1) $x_1 = y_1$, $x_k < x_{k+1}$, $y_{k+1} < y_k$ para $k \in \mathbb{N}$,

(2) $x_{k+1} \notin St(x_k, \mathcal{A})$ y $y_{k+1} \notin St(y_k, \mathcal{A})$ para $k \in \mathbb{N}$,

(3) $St(x_k, \mathcal{A}) \cap St(x_{k+1}, \mathcal{A}) \neq \emptyset \neq St(y_k, \mathcal{A}) \cap St(y_{k+1}, \mathcal{A})$ para $k \in \mathbb{N}$.

(4) $\bigcup_{k=1}^{\infty} St(x_k, \mathcal{A}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} St(y_k, \mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$.

Demostración: Sea $\alpha$ un buen orden en $\cup\mathcal{A}$ y sea $y_1$ el $\alpha$-primer elemento de $\cup\mathcal{A}$. Consideremos $St(y_1, \mathcal{A})$. Si existen puntos que $<$-preceden a

$y_1$ en $\cup\mathcal{A} - St(y_1,\mathcal{A})$ consideremos el $\alpha$-primer elemento de estos, tal que:

$y_2 \notin St(y_1,\mathcal{A})$ y $St(y_2,\mathcal{A}) \cap St(y_1,\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Esto es posible hacerlo dada la conectividad de la familia: sea $u \in \cup\mathcal{A} - St(y_1,\mathcal{A})$ con $u < y_1$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $u \in A$. Consideremos $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq St(y_1,\mathcal{A})$, entonces existen $A_1, \ldots, A_s \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 = A$, $A_s = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ con $i = 1,2,\ldots,s-1$. Por lo tanto, existe $k_0 \in \{1,2,\ldots,s-1\}$ tal que $A_{k_0+1} \subseteq St(y_1,\mathcal{A})$ y $A_{k_0} \cap (\cup\mathcal{A} - St(y_1,\mathcal{A})) \neq \emptyset$; sea $z \in A_{k_0} \cap (\cup\mathcal{A} - St(y_1,\mathcal{A}))$, entonces obtenemos: $St(z,\mathcal{A}) \cap St(y_1,\mathcal{A}) \neq \emptyset$ y $z \notin St(y_1,\mathcal{A})$.

Inductivamente, si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ han sido definidos de esta manera, sea $y_{k+1}$, si es que existe, el $\alpha$-primer elemento de $\cup\mathcal{A}$ tal que:

(a) $y_{k+1} < y_k$,

(b) $y_{k+1} \notin St(y_k,\mathcal{A})$ y

(c) $St(y_{k+1},\mathcal{A}) \cap St(y_k,\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Además, observemos que este proceso inductivo es a lo más numerable: si existiera $y_\infty \in \cup\mathcal{A}$ tal que

(i) $y_\infty < y_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$

(ii) $y_\infty \notin St(y_k,\mathcal{A})$ para toda $k \in \mathbb{N}$

(ii) $St(y_\infty,\mathcal{A}) \cap (\cup\{St(y_k,\mathcal{A}) : k \in \mathbb{N}\}) \neq \emptyset$,

entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $St(y_k,\mathcal{A}) \cap St(y_\infty,\mathcal{A}) \neq \emptyset$; sea $y$ un elemento de esta intersección; entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $y_\eta\, y_K \in A_1$ y $y, y_\infty \in A_2$. Si $y_K < y$ entonces $(y_\infty, y) \subseteq A_2$ por ser $A_2$ convexo y esto implica que $y_{K+1} \in (y_\infty, y) \subseteq A_2$. Por tanto $y_{K+1} \in A_2$ y $y_\infty \in A_2$ lo cual implica que $y_\infty \in St(y_{K+1}, \mathcal{A})$ que contradice a (ii). Por consiguiente $\{y_K\}$ es en efecto numerable. Finalmente, sea $x_1 = y_1$ y de una manera análoga elegimos una sucesión $\{x_K\}$ tal que:

(a) $x_K < x_{K+1}$,

(b) $x_{K+1} \notin St(x_K, \mathcal{A})$,

(c) $St(x_K, \mathcal{A}) \cap St(x_{K+1}, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ para toda $K \in \mathbb{N}$.

Claramente, estas sucesiones cumplen con lo pedido en el lema. †

Antes de pasar a demostrar algunos resultados sobre espacios linealmente ordenados recordemos algunos conceptos básicos.

5.4.- DEFINICION (ver también 2.1.1). Sea $\{A_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de un conjunto $X$.

(1) $\{A_s\}_{s\in S}$ es puntual-finita (puntual-numerable) si para cada $x \in X$ el conjunto $\{s \in S : x \in A_s\}$ es finito (numerable).

(2) $\{A_s\}_{s\in S}$ es estrella finita (estrella-numerable) si para todo $s_0 \in S$, el conjunto $\{s \in S : A_s \cap A_{s_0} \neq \emptyset\}$ es finito (numerable).

5.5.- COROLARIO: si $\mathcal{A}$ es una familia conectada, puntual-numerable de subconjuntos convexos de $X \in \mathcal{S}$ entonces existe una subcolección numerable $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\cup \mathcal{B} = \cup \mathcal{A}$.

<u>Demostración</u>: Se sigue del hecho que para cada $k \in \mathbb{N}$ $St(x_k, \mathcal{A})$ y $St(y_k, \mathcal{A})$ que aparecen en la parte (4) del lema (5.3) contienen solamente un número numerable de elementos de $\mathcal{A}$. $\dagger$

<u>5.6.- DEFINICION</u>: Sea $X$ un espacio topológico

(1) $X$ es <u>paracompacto</u> si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto localmente finito.

(2) $X$ es <u>débilmente paracompacto</u> (ó <u>metacompacto</u>) si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto puntual-finito.

(3) $X$ es <u>fuertemente paracompacto</u> si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto estrella-finito.

Es claro de la definición (5.4) que toda familia de abiertos estrella-finita es localmente finita y cualquier familia de subconjuntos abiertos de $X$ localmente finita es puntual finita, es decir, si $X$ es fuertemente paracompacto entonces $X$ es paracompacto y esto implica que $X$ es metacompacto. Ahora bién, en general estos conceptos no son equivalentes: (1) Sea $X = \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ los reales positivos excluyendo $\mathbb{N}$. La topología $\tau$ sobre $X$ es generada por los conjuntos $S_n = (0, 1/n) \cup (n, n+1)$ como base con $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(X, \tau)$ es un espacio metacompacto que no es paracompacto ([S-S] pp. 77-78). (2) Sea para cada $n \in \mathbb{N}$ $X_n = D(m)$: espacio discreto de cardinalidad igual a $m \geq \aleph_0$. Entonces $B(m) = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n = [D(m)]^{\aleph_0}$ es el llamado espacio de Baire de peso $m$. Entonces el producto topológico del intervalo unitario abierto $(0,1)$ y el espacio de Baire $B(\aleph_1)$ es un espacio paracompacto que no es fuertemente paracompacto ([E] pp. 407).

Sin embargo, en la clase de espacios topológicos linealmente ordenados vamos a tener que estos tres conceptos coinciden.

5.7.- TEOREMA: Sea $X \in \mathcal{S}$. Entonces es equivalente:

(1) $X$ es fuertemente paracompacto

(2) Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X$ tiene un refinamiento abierto puntual-numerable.

Demostración: (1) implica (2). Por hipótesis y (A-15) tenemos que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto estrella-numerable y por tanto $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto puntual-numerable.

(2) implica (1) Supongamos que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto puntual numerable $\mathcal{A}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de $\mathcal{A}$ son convexos. Sea $\mathcal{A} = \cup\{\mathcal{C}_\alpha : \alpha \in I\}$

donde cada $\mathcal{C}_\alpha$ es una componente de $\mathcal{A}$ (ver 5.1.4). Entonces por la observación (5.2.2) y el corolario (5.5) tenemos que:

(i) si $\alpha \neq \beta$ $(\bigcup \mathcal{C}_\alpha) \cap (\bigcup \mathcal{C}_\beta) = \emptyset$ y

(ii) para cada $\alpha \in I$ existe una subcolección numerable $\mathcal{D}_\alpha = \{O(\alpha, n) : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcup \mathcal{D}_\alpha = \bigcup \mathcal{C}_\alpha$.

Entonces, se sigue que $\mathcal{H}_n = \{O(\alpha, n) : \alpha \in I\}$ es una colección de conjuntos ajenos dos a dos y por tanto $\mathcal{H} = \bigcup\{\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto estrella numerable de $\mathcal{U}$ y por consiguiente, de (A-15) se tiene que $X$ es un espacio fuertemente paracompacto. †

Entonces también hemos demostrado el siguiente

5.8.- TEOREMA: Si $X \in \mathcal{L}$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $X$ es fuertemente paracompacto

(2) $X$ es paracompacto

(3) $X$ es débilmente paracompacto (metacompacto)

(4) Toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto puntual numerable.

Demostración: (1) implica (2) implica (3) implica (4) se cumplen en general y (4) implica (1) es el teorema (5.7). †

Como una consecuencia inmediata obtenemos también el siguiente:

5.9.- COROLARIO: Si $X \in \mathcal{S}$ con una base puntual numerable, entonces $X$ es hereditariamente paracompacto.

Demostración: Por (A-16) es suficiente probar que todo subespacio abierto de $X$ es paracompacto. Observemos que todo subespacio abierto de $X$ lo podemos obtener como la unión de sus componentes convexas cada una de las cuales es abierta. De aquí que cada una de sus componentes convexas es paracompacto ya que es un lineal ordenado con su topología relativa y tiene una base puntual numerable. †.

A continuación daremos una caracterización de paracompacidad para espacios linealmente ordenados en términos de sus huecos. Antes de pasar directamente a esto necesitamos definir algunos conceptos y probar dos lemas.

5.10.- DEFINICION: Sea $X \in \mathcal{S}$ y $J$ un intervalo de $X$.

(1) Un hueco $u$ de $J$ es cubierto en $J$ por un intervalo $K = (x, y)_{X^+} \cap X$ de $X$ sii $x <_+ u <_+ y$ ó bién, $x$ ó $y$ es un hueco extremo de $J$ y coincide con $u$.

(2) El hueco $u$ es cubierto en $J$ por un subconjunto abierto $U$ de $X$ si existe un intervalo $K$ de $X$ contenido en $U$ y tal que $u$ es cubierto en $J$ por $K$.

(3) El hueco $u$ es <u>cubierto en $\mathcal{J}$ por una familia $\mathcal{U}$</u> de subconjuntos abiertos de $X$ si es cubierto en $\mathcal{J}$ por algún elemento de $\mathcal{U}$.

<u>5.11.- OBSERVACION</u>: Si un hueco $u$ de $\mathcal{J}$ es cubierto en $X$ por $\mathcal{U}$ entonces es cubierto en $\mathcal{J}$ por $\mathcal{U}$. El inverso no necesariamente se cumple pues un hueco extremo de $\mathcal{J}$ puede ser un hueco interior de $X$.

<u>5.12.- LEMA</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$. Toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X$ tal que todo hueco de $X$ es cubierto en $X$ por $\mathcal{U}$, tiene una subcubierta finita.

<u>Demostración</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$ y consideremos $\mathcal{U}^+ = \{U^+\}_{U \in \mathcal{U}}$ donde $U^+$ es obtenido uniendo a $U \in \mathcal{U}$ todo hueco de $X$ que es cubierto en $X$ por $U$. Como $\mathcal{U}$ cubre a todo hueco de $X$, $\mathcal{U}^+$ es una cubierta abierta de $X^+$, la compactación natural de $X$ dada en (3.6). Por lo tanto existe una subfamilia finita $\{U_k^+\}_{k=1}^n$ de $\mathcal{U}^+$ que cubre a $X^+$. Entonces, la subfamilia correspondiente $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^n$ de $\mathcal{U}$ cubre a $X$. $\dagger$

Serán fundamentales para nuestros próximos resultados las nociones de $\Phi$-sucesión y $\Phi$-hueco.

<u>5.13.- DEFINICION</u>: Sea $X \in \mathcal{L}$ y $X^+$ su compactación natural definida en (3.6)

(1) Una sucesión creciente ó decreciente $S = \{x_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$

de puntos de $\mathfrak{X}^+$ es llamada una Q-sucesión si para todo ordinal límite $\lambda < \omega_\alpha$, el límite en $\mathfrak{X}^+$ del segmento $\{x_\xi\}_{\xi<\lambda}$ de $S$ es un hueco de $\mathfrak{X}$.

(2) Si $S$ es una Q-sucesión y si el hueco $u$ es el límite de la sucesión $S$, hablaremos de $S$ como una Q-sucesión en $u$.

(3) Un hueco $u$ es llamado un Q-hueco a la izquierda (derecha) si existe una Q-sucesión en $u$ creciente (decreciente).

(4) Un hueco $u$ es llamado un Q-hueco si es un Q-hueco a la izquierda y a la derecha (ó solo uno de ellos en caso de que $u$ sea un hueco extremo).

5.14.-LEMA: Sea $\mathfrak{X} \in \mathcal{L}$ y $J = (p, v)_{\mathfrak{X}^+} \cap \mathfrak{X}$ un intervalo de $\mathfrak{X}$ donde $v$ es un hueco que no es un Q-hueco a la izquierda. Sea $\alpha$ el primer ordinal para el cual $v$ es un $\omega_\alpha$-límite a la izquierda. Sea $\mathcal{U}$ cualquier cubierta abierta de $J$ que no cubre al hueco $v$. Entonces $\mathcal{U}$ tiene una subfamilia de potencia $\aleph_\alpha$ con intersección no vacía.

Demostración: Podemos suponer que todo $U \in \mathcal{U}$ es un subconjunto de $J$. Entonces toda componente convexa de $U$ es un sub-intervalo abierto $K = (x, z)$ de $J$ (por 1.2.12). Sea $\mathcal{K} = \{K : K$ es una componente convexa de $U$ con $U \in \mathcal{U}\}$. Dado que el hueco $v$

no es cubierto por $\mathcal{U}$ tenemos que $z <_+ v$ para todo $K = (x, z) \in \mathcal{K}$. Ahora, sea $\{y_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$ cualquier sucesión creciente de puntos de $J$ cuyo límite es $v$. Cada punto $y_\xi$ es cubierto por al menos un $u \in \mathcal{U}$ y por tanto por al menos un $K \in \mathcal{K}$; entonces sea $\mathcal{K}_\xi = \{K \in \mathcal{K} : K \text{ cubre a } y_\xi\}$. Definimos $K_\xi = (x_\xi, z_\xi) = \bigcup\{K : K \in \mathcal{K}_\xi\}$ y vamos a suponer que el lema es falso. Entonces el cardinal de $\mathcal{K}_\xi$ debe ser menor que $\aleph_\alpha$. Pero $z <_+ v$ para toda $K = (x, z) \in \mathcal{K}$; por lo tanto, dado que $\alpha$ es el primer ordinal tal que $v$ es un $\omega_\alpha$-límite a la izquierda tenemos que $z_\xi <_+ v$. Ahora como $y_\xi < z_\xi$ construimos la siguiente sucesión:

$$S = \{y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_\xi, z_\xi, \ldots\} \quad \xi < \omega_\alpha .$$

El límite de esta sucesión es $v$, así que por hipótesis $S$ no puede ser una $Q$-sucesión. Acorde con esto existe un punto $y' \in J$ que es el límite de un segmento de $S$ con tipo de orden el ordinal límite $\lambda < \omega_\alpha$. Sea $K' = (x', z')$ cualquier elemento de $\mathcal{K}$ que cubre a $y'$. Entonces $x' < y' < z'$; como $\lim_{\xi < \lambda} y_\xi = y'$ existe un ordinal $\eta < \lambda$ tal que $x' < y_\eta < y'$, lo cual implica que $y_\eta \in K'$, por tanto $K' \in \mathcal{K}_\eta$. En consecuencia $K' \subseteq K_\eta$, es decir, $(x', z') \subseteq (x_\eta, z_\eta)$. Pero esto es imposible ya que $y' = \lim_{\xi < \lambda} z_\xi$ lo cual implica que $z_\xi < y'$ de donde $z_\xi < z'$ con $\xi < \lambda$. Por lo tanto el lema es válido. $\dagger$

El siguiente teorema se refiere a la caracterización de espacios paracompactos mencionada anteriormente.

<u>5.15-TEOREMA</u>: Sea $X \in \mathcal{S}$. $X$ es paracompacto si y solo si todo hueco de $X$ es un $0$-hueco.

<u>Demostración</u>: <u>Necesidad</u>. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que existe un hueco $v$ que no es el hueco extremo izquierdo y supongamos que no es un $0$-hueco a la izquierda. Sea $\{y_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$ - cualquier sucesión creciente de puntos de $X^+$ cuyo límite es $v$ en donde $y_0$ es el primer punto ó hueco de $X$. Sea $\omega$ el último punto ó hueco de $X$. Consideremos la siguiente cubierta abierta de $X$:

$$\mathcal{U} = \{[y_0, y_\xi) \cap X ;\ 0<\xi<\omega_\alpha\} \cup \{(v, \omega] \cap X\}.$$

Sea $\mathcal{C}$ un refinamiento arbitrario de $\mathcal{U}$. Entonces el hueco $v$ no es cubierto por $\mathcal{C}$. Por tanto, de (5.14) $\mathcal{C}$ no puede ser localmente finita y de aquí que $X$ no sea paracompacto.

<u>Suficiencia</u>: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X$ y supongamos que todo hueco de $X$ es un $0$-hueco. Deseamos encontrar un refinamiento de $\mathcal{U}$ localmente finito. Sea $F^* = \{$huecos de $X$ que no son cubiertos en $X$ por $\mathcal{U}\}$. Claramente, todo pun-

to límite en $X^+$ de huecos no cubiertos es un hueco no cubierto. En consecuencia $F^*$ es cerrado en $X^+$, es decir $X^+ - F^*$ lo podemos expresar como la unión de intervalos abiertos ajenos $K^*$ de $X^+$. Cada punto frontera de cualquier intervalo $K^*$ es, o bien, un hueco no cubierto o un punto extremo de $X$. Los intervalos correspondientes $K = K^* \cap X$ son intervalos abiertos ajenos (y además cerrados) de $X$, cuya unión es $X$. Acorde con esto podemos tratar independientemente cada uno de estos $K$; para cada $U \in \mathcal{U}$ definimos $U_K = U \cap K$; es suficiente encontrar un refinamiento localmente finito de la familia — $\mathcal{U}_K = \{U_K\}_{U \in \mathcal{U}}$. Consideremos entonces cualquier $K$ fijo. Escribamos $K = [u, v]$. Sea $p$ cualquier punto interior de $K$ y sea $H = [u, p]$ y $J = [p, v]$. Si existen refinamientos localmente finitos $\mathcal{W}_H$ y $\mathcal{W}_J$ de $\mathcal{U}_K$ que cubran respectivamente a $H$ y a $J$, entonces existe un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubre a $K$. Entonces hemos reducido el problema a encontrar un refinamiento localmente finito $\mathcal{W}_J$ de $\mathcal{U}_K$ que cubra a $J = [p, v]$. Ahora bién, por construcción de $K$, todo hueco interior de $J$ es cubierto por $\mathcal{U}$ y por tanto por $\mathcal{U}_K$. Por consiguiente si $v$ mismo es cubierto por $\mathcal{U}_K$ entonces la existencia del refinamiento deseado lo da el lema 5.12.

Supongamos entonces que $v$ es un hueco y que $v$ no es cubierto por $\mathcal{U}_K$. Entonces, por hipótesis $v$ es un $Q$-hueco [*], en particular deber ser un $Q$-hueco a la izquierda. Sea entonces $S=\{y_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$ una $Q$-sucesión creciente en $v$. Podemos tomar $y_0=p$ y podemos suponer además que los límites de los segmentos de $S$ han sido incorporados a la sucesión, así que $y_\lambda = \lim_{\xi<\lambda} y_\xi$ para todo ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$ y $y_\lambda$ es un hueco. Ahora, para cada $\xi<\omega_\alpha$ definimos el intervalo cerrado $E_\xi=[y_\xi, y_{\xi+1}]$. Recordemos ahora que el único hueco de $J$ que no es cubierto por $\mathcal{U}_K$ es su hueco extremo $v$. Por lo tanto, para cada $\xi<\omega_\alpha$ todo hueco de $E_\xi$ es cubierto por $\mathcal{U}_K$. Por (5.12) existe una subfamilia finita $\mathcal{W}_\xi$ de $\mathcal{U}_K$ que cubre a $E_\xi$. Dado que cualesquiera dos intervalos sucesivos $E_\xi$, $E_{\xi+1}$ tienen justamente un punto en común y dado que $y_\lambda$ es un hueco para todo ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$ podemos fácilmente refinar toda familia $\mathcal{W}_\xi$ a una familia $\mathcal{W}_\xi'$ tal que tenga las siguientes propiedades:

(1) (a) para toda $\xi<\omega_\alpha$, $\mathcal{W}_\xi' \cup \mathcal{W}_{\xi+1}' \cup \mathcal{W}_{\xi+2}'$ es una cubierta abierta finita de $E_{\xi+1}$.

(b) Para todo ordinal límite $\lambda<\omega_\alpha$, $\mathcal{W}_\lambda' \cup \mathcal{W}_{\lambda+1}'$ es una cubierta abierta finita de $E_\lambda$

(2) Para toda $\xi<\omega_\alpha$ y toda $\eta \geq \xi+2$, $W_\xi \cap W_\eta = \emptyset$

para toda $W_\xi \in \mathcal{W}_\xi^{\rho'}$ y toda $W_\eta \in \mathcal{W}_\eta^{\rho'}$.
En efecto, basta tomar $\mathcal{W}_\xi^{\rho'} = \{(y_\xi, y_{\xi+2}) \cap W_\xi : W_\xi \in \mathcal{W}_\xi^{\rho}\}$. Entonces la familia $\mathcal{W}_J^{\rho} = \cup\{\mathcal{W}_\xi^{\rho'} : \xi < \omega_\alpha\}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_K$ que cubre a $J$. †.

Observemos que (ver [*]) si en la demostración anterior suponemos que $\mathcal{U}_K$ es numerable y si probamos que $v$ es un 0-hueco de la izquierda entonces haciendo la misma demostración obtenemos que $X$ es contablemente paracompacto. El que $v$ sea un 0-hueco a la izquierda en efecto se cumple ya que si no fuera así no existiría una 0-sucesión creciente en $v$. Entonces como $v$ es un $\omega_\alpha$-límite para algún $\alpha > 0$, el lema (5.14) requiere que $\mathcal{U}_K$ contenga una subfamilia de potencia $\aleph_\alpha$ así que $\mathcal{U}_K$ no puede ser numerable. Por lo tanto hemos probado el

<u>5.16.- TEOREMA</u>: Si $X \in \mathcal{S}$, entonces $X$ es contablemente paracompacto.

Las siguientes afirmaciones surgen como corolarios de (5.15):

<u>5.17.- COROLARIO</u>: Si $X \in \mathcal{S}$ es separable entonces $X$ es paracompacto.

<u>Demostración</u>: Sean $u$ un hueco de $X$ y $D \subseteq X$ denso numerable en $X$. Entonces existe una sucesión en $D$

que converge a $u$. Por tanto como toda $\omega_0$-sucesión es una $Q$-sucesión, $X$ es paracompacto. $\dagger$

5.18.- COROLARIO: Si $X \in \mathcal{S}$ es paracompacto y primero numerable entonces $X$ es hereditariamente paracompacto.

Demostración: Es suficiente mostrar que todo subespacio abierto $Y \subseteq X$ es paracompacto (por A.16). Además, dado que un subespacio abierto de un lineal ordenado es homeomorfo a la unión ajena de sus componentes convexas es suficiente considerar el caso especial cuando $Y$ mismo es convexo. Por tanto, $Y$ con su topología relativa y la del orden heredado de $X$ coinciden y en consecuencia $Y$ es un espacio lineal ordenado tal que un hueco $u$ de $Y$ es un hueco de $X$ ó es un hueco extremo de $Y$ que es un elemento de $X$. En el último caso $u$ es el límite de una $\omega_0$-sucesión de puntos de $Y$, por ser $X$ primero numerable. En el primer caso probaremos solamente que si $u$ no es el hueco extremo izquierdo de $Y$ entonces $u$ es un $Q$-hueco a la izquierda en $Y$. Los sub-casos restantes se procede de una manera análoga. Como $X$ es paracompacto existe $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$ $Q$-sucesión en $X$ tal que $\lim\limits_{\xi<\omega_\alpha} x_\xi = u$. Si existe $\beta<\omega_\alpha$ ordinal límite tal que $\lim\limits_{\xi<\beta} x_\xi = v$ con $v$ hueco de $Y$ entonces sea $y_1 = x_{\beta+1}$, $y_2 = x_{\beta+2}$, $\ldots$, $y_\mu = x_{\beta+\mu}$, $\ldots$ con $\beta+\mu < \omega_\alpha$. Entonces $\{y_\mu\}_{\beta+\mu<\omega_\alpha}$ resulta ser una $\Theta$-sucesión en $Y$ por ser $Y$ convexo. En caso de que no exista tal ordinal $\beta$ entonces $u$ es el límite de una $\omega_0$-sucesión en $Y$, es decir, $u$ es un $\Theta$-hueco a la izquierda en $Y$. Si además $u$ no es el hueco extremo derecho de $Y$ se demuestra analogamente que $u$ es un $\Theta$-hueco a la derecha en $Y$. Por tanto $u$ es un $\Theta$-hueco de $Y$. Otros subcasos, como se dijo antes, son similares.

Por consiguiente todo hueco de $Y$ es un $\Theta$-hueco, es decir, $Y$ es paracompacto. †

A continuación daremos otra caracterización de paracompacidad en espacios linealmente ordenados que dependerá del concepto de un conjunto estacionario de ordinales.

5.19.- DEFINICION: Sea $\Omega$ un ordinal límite, entonces $S \subseteq \Omega$ es estacionario en $\Omega$ si para cada subconjunto cofinal cerrado $C$ de $\Omega$, $S \cap C \neq \emptyset$ (Ver 1.19)

5.20.- OBSERVACION: Si $cof(\Omega) > \omega_0$ (ver 3.16) y si $S \subseteq \Omega$ contiene un conjunto cofinal cerrado $D$, entonces $S$ es estacionario en $\Omega$.

Demostración: supongamos que la observación es falsa, entonces existe $C \subseteq \Omega$ cofinal cerrado en $\Omega$ con $C \cap S = \emptyset$ y esto implica que $C \cap D = \emptyset$ lo cual es imposible. En efecto, dado que $C$ y $D$ son cofinales en $\Omega$, existen sucesiones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(a) $c_n \in C$ y $d_n \in D$ para toda $n \in \mathbb{N}$

(b) para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n < c_n < d_{n+1}$.

Dado que $cof(\Omega) > \omega_0$, $\{c_n\} \cup \{d_n\}$ no es cofinal en $\Omega$ de donde concluimos que $\lim_{n\in\mathbb{N}} c_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} d_n = y \in \Omega$, es decir $y \in C \cap D$. Por consiguiente $S$ es estacionario. ⊥

5.21: PROPOSICION: Sea $\Omega$ un ordinal tal que $cof\,\Omega > \omega_0$ y supongamos que $S$ es un subconjunto estacionario de $\Omega$. Para cada $s \in S$, sea $I(s)$ un subconjunto abierto de $\Omega$ tal que $s \in I(s)$ y sea $\mathcal{I} = \{I(s) : s \in S\}$. Entonces existe $x \in S$ tal que $[x, \rightarrow) \subseteq St(x, \mathcal{I})$.

Demostración: Supongamos que el lema es falso y construyamos las siguientes sucesiones. Sea $x_1 \in S$ y consideremos $St(x_1, \mathcal{I})$, entonces como el lema no se cumple sea $y_1 \in S$ el primer elemento en $S$ tal que $y_1 > x_1$ y $y_1 \notin St(x_1, \mathcal{I})$. Sea $x_2$ el primer elemento en $S$ mayor que $y_1$. Ahora, si $1 < \alpha < cof\,\Omega$ tenemos que: (i) en el caso de que $\alpha$ no es un ordinal límite consideramos $x_\alpha$ y como el lema es falso podemos considerar $y_\alpha$ y luego $x_{\alpha+1}$ como lo hicimos en los primeros pasos. (ii) Si $\alpha$

es un ordinal límite, supongamos que $\bigcup_{\lambda<\alpha} St(x_\lambda, \mathcal{Q})$ es cofinal con $\Omega$, entonces tendríamos que $\{y_\lambda\}_{\lambda<\alpha}$ es cofinal con $\Omega$ lo cual es una contradicción ya que $\Omega$ no tiene conjuntos cofinales de cardinal menor que $\operatorname{cof}\Omega$. Por tanto, podemos encontrar sucesiones $\{x_\gamma\}$ y $\{y_\gamma\}$ con $\gamma<\tau=\operatorname{cof}\Omega$ tal que:

(a) si $\gamma<\delta<\tau$ entonces $x_\gamma<y_\gamma<x_\delta$,

(b) si $\gamma<\tau$ entonces $y_\gamma \notin St(x_\gamma, \mathcal{Q})$,

(c) $\{x_\gamma : \gamma<\tau\}$ es cofinal en $\Omega$.

Por otro lado, dado que $\operatorname{cof}\Omega>\omega_0$ y como $\overline{\{x_\gamma : \gamma<\tau\}}$ es un subconjunto de $\Omega$ que contiene a un subconjunto cofinal cerrado entonces por (5.20) $\overline{\{x_\gamma : \gamma<\tau\}}$ es estacionario. Por consiguiente $C=\overline{\{x_\gamma : \gamma<\tau\}}\cap \overline{\{y_\gamma : \gamma<\tau\}} = A\cap B \neq \emptyset$. Además $C$ es cofinal. En efecto, si no lo fuera tendríamos que existe $z\in\Omega$ tal que $\{x\in B : x>z\}\cap A=\emptyset$. Pero $\{x\in B : x>z\}$ es un cofinal cerrado que no intersecta a $A$, contradicción (pues $A$ es estacionario). Por tanto $C$ es un cofinal cerrado. Notemos ahora que si $z\in C\cap S$ entonces existe $\alpha$ ordinal límite $x_\gamma<z$ si y solo si $\gamma<\alpha$ (por ser $z$ punto de acumulación de $A$), por consiguiente $y_\gamma<z$ si y solo si $\gamma<\alpha$. En efecto, si existiera $\gamma<\alpha$ tal que $y_\gamma>z$ entonces $x_{\gamma+1}<z$ ya que $\gamma+1<\alpha$ contradiciendo la construcción de $\{x_\gamma\}$ y $\{y_\gamma\}$. Por otra parte, si $y\in\bigcup_{\gamma<\alpha} St(x_\gamma,\mathcal{Q})$ entonces $y < z$ ya que $y \in St(x_\gamma, \mathcal{Q})$ para algún $\gamma < \alpha$ y esto implica que $y < y_\gamma < z$. Consideremos $I(z)$, entonces $x_\gamma, y_\gamma \in I(z)$ para algún $\gamma < \alpha$, pero $I(z) \subseteq St(x_\gamma, \mathcal{Q})$ y por (b) $y_\gamma \notin St(x_\gamma, \mathcal{Q})$ contradicción. Por tanto $C \cap S = \phi$ que contradice el hecho de que $S$ es estacionario. Hemos probado la proposición. $\dagger$

5.22.- PROPOSICION: Sea $S$ un subconjunto estacionario de $\Omega$ ordinal tal que $\operatorname{cof}\Omega > \omega_0$. Entonces ninguna cubierta abierta (abiertos relativos de $S$) de $S$ por subconjuntos acotados de $\Omega$ puede tener un refinamiento abierto (relativo) puntual-finito.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta con la propiedad mencionada y supongamos que $\mathcal{R} = \{R_\alpha \cap S\}_{\alpha\in I}$ es un refinamiento abierto puntual finito de $\mathcal{U}$ (es decir $R_\alpha$ es un abierto acotado en $\Omega$ para toda $\alpha \in I$). Ahora, para cada $s \in S$ consideremos $\mathcal{R}_s = \{R_\alpha : \alpha \in I$ y $s \in R_\alpha\}$ y $\mathcal{R}' = \bigcup_{s\in S}\mathcal{R}_s$. Por lo tanto, por (5.21) existe $x \in S$ tal que $[x, \rightarrow) \subseteq st(x, \mathcal{R}')$ pero esto es imposible pues mientras $[x, \rightarrow)$ es no acotado $st(x, \mathcal{R}')$ si lo es. En efecto, para cada $s \in S$, $R(s)$ es un subconjunto abierto y acotado de $\Omega$ y $st(x, \mathcal{R}')$ es la unión de solo un número finito de estos conjuntos, es decir, es acotado. Por consiguiente, se cumple lo enunciado en la proposición. †

5.23.- PROPOSICION : Sea $X \in \mathcal{S}$ no paracompacto; entonces algún subespacio cerrado de $X$ es homeomorfo a un subconjunto estacionario de un ordinal $\Omega$ donde $\Omega = cof(\Omega) > \omega_0$.

Demostración: Sea $X^+$ la compactación natural de $X$. Como $X$ no es paracompacto existe $u \in X^+ - X$ tal que $u$ no es un $Q$-hueco de $X$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que no es un $Q$-hueco a la izquierda. Entonces, para cualquier sucesión estrictamente creciente $\{x_\alpha : \alpha < \Omega\}$ en $X$ cuyo límite (en $X^+$) es $u$ existe un ordinal límite $\lambda_0 < \Omega$ tal que $\lim\limits_{\alpha < \lambda_0} \{x_\alpha\} \in X$ donde el límite es tomado en $X^+$ y $\Omega$ es el único ordinal que es cofinal con $\{x \in X : x < u\}$, $cof\,\Omega = \Omega$ y $\Omega \neq \omega_0$ ya que de lo contrario sería un $Q$-hueco. Fijemos cualquier sucesión de este estilo; entonces para cualquier ordinal límite $\lambda < \Omega$, $\sup\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es ó bién $x_\lambda \in X$ ó un hueco de $X$. Sea $S = \{\lambda < \Omega : \lambda$ es ordinal límite y $\lim\limits_{\alpha < \lambda} \{x_\alpha\} = x_\lambda \in X\}$. Entonces $S$ es estacionario en $\Omega$ dado que si algún conjunto cofinal cerrado $C \subseteq \Omega$ fuera ajeno con $S$ entonces podríamos usar la sucesión $\{x_\alpha : \alpha \in C\}$ para mostrar que $u$ es un $Q$-hueco a la izquierda. Definimos $f : S \to X$

dada por $f(\lambda) = x_\lambda$ para $\lambda \in S$. Claramente $f$ es biyectiva sobre $f(S)$ que es un subconjunto cerrado de $X$ pues es el conjunto de puntos límite de una sucesión en $X$. $f$ es abierta pues $f$ es preservadora de orden, es decir, manda intervalos en intervalos. Vamos a ver que $f$ es continua. Sean $\lambda \in S$ y $J$ un intervalo en $X$ tal que $f(\lambda) = x_\lambda \in J$. Consideremos los conjuntos $A = \{x \in X : x = x_\mu \text{ con } x_\mu < x_\lambda\}$ y $B = \{x \in X : x = x_\delta \text{ y } x_\lambda < x_\delta\}$. Sea $\mu_0$ tal que $x_{\mu_0}$ es el primer elemento de $A$ que cumpla con que el intervalo $(x_{\mu_0}, x_\lambda)$ en $f(S)$ es vacío y $\delta_0$ el primer elemento en $B$ tal que $(x_\lambda, x_{\delta_0}) \cap f(S)$ es vacío; entonces $\lambda \in (\mu_0, \delta_0)$ y $f(\lambda) \in f((\mu_0, \delta_0)) \subseteq J$. Por tanto $f$ es continua en $\lambda$. Por consiguiente $f$ es un homeomorfismo de $S$ sobre un subespacio cerrado de $X$. $\dagger$

5.24.- TEOREMA: Sea $X \in \mathcal{L}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) $X$ no es paracompacto

(2) para algún ordinal $\Omega$ con $\operatorname{cof} \Omega = \Omega > \omega_0$ algún subconjunto estacionario de $\Omega$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X$.

(3) para algún ordinal $\Omega$ con $\operatorname{cof} \Omega > \omega_0$ algún subconjunto estacionario de $\Omega$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X$.

Demostración: (1) implica (2) es (5.23). (2) implica (3) es trivial y para (3) implica (1) observemos que (5.22) implica que si $S$ es un subconjunto estacionario de un ordinal $\Omega$ con $\operatorname{cof}\Omega > \omega_0$ entonces $S$ no es metacompacto y por lo tanto de (5.8) $S$ no es paracompacto. Por lo tanto si $X$ fuera paracompacto entonces por (A-17) y dado que $S$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X$, $S$ sería también paracompacto. †.

5.25.- LEMA: Sea $S$ un subconjunto estacionario de un ordinal $\Omega$ con $\operatorname{cof}(\Omega) > \omega_0$ y sea $T \subseteq S$ un subconjunto cofinal relativamente cerrado de $S$. Entonces $T$ es también estacionario en $\Omega$. En particular, el conjunto de puntos no aislados del subespacio $S$ es estacionario.

Demostración: Supongamos que $T$ no es estacionario, entonces existe $D \subseteq \Omega$ cofinal cerrado tal que $T \cap D = \emptyset$. Como $T$ es cerrado relativo a $S$ existe $C \subseteq \Omega$ cerrado tal que $T = S \cap C$. Como $T$ es cofinal en $\Omega$ entonces por (3.13) $C$ es cofinal cerrado en $\Omega$ y por la demostración en (5.20) $D \cap C \neq \emptyset$. Probaremos que $C \cap D$ también es cofinal. En efecto, si no lo fuera entonces existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\{z \in \Omega : z \geq z_0\} \cap (C \cap D) = \emptyset$. Definimos $W = \{x \in D : x \geq z_0\}$

el cual es un cofinal cerrado, pues $D$ lo es; por lo tanto $C\cap W=\emptyset$, contradicción pues $C$ y $W$ son dos cofinales cerrados en $\Omega$. Por lo tanto $C\cap D$ es un cofinal cerrado en $\Omega$ y $\emptyset=T\cap D=(S\cap C)\cap D=S\cap(C\cap D)$ contradiciendo el hecho de que $S$ es estacionario. Por consiguiente $T$ es estacionario. $\dagger$

<u>5.26.- TEOREMA</u>: Si $X\in\mathcal{S}$ es perfectamente normal entonces $X$ es paracompacto.

<u>Demostración</u>: Por (A.18) y (5.24) es suficiente probar que si $\Omega$ es un ordinal con $\mathrm{cof}\,\Omega>\omega_0$ y $S\subseteq\Omega$ es un subconjunto estacionario de $\Omega$ entonces $S$ no puede ser perfectamente normal. En esta dirección consideremos $T$ el conjunto de puntos no aislados de $S$ el cual es no vacío y cerrado en $S$ y supongamos que $T$ es un conjunto $G_\delta$ de $S$, es decir, $T=\bigcap_{n=1}^{\infty}(S\cap U_n)$ donde cada $U_n$ es un abierto de $\Omega$. Ahora, supongamos que para toda $t\in T$, $[t,\rightarrow)\nsubseteq U_n$ entonces existe $v_t\in[t,\rightarrow)$ tal que $v_t\notin U_n$; entonces $C=\{v_t: t\in T\}$ es cofinal en $\Omega$. En efecto, si no fuera así tendríamos que existe $z_0\in\Omega$ tal que $v_t<z_0$ para toda $t\in T$. Sea $A\subseteq\Omega$ cofinal cerrado; como, por (5.25) $T$ es estacionario y $A'=\{x\in A: z_0<x\}$ es cofinal cerrado en $\Omega$, $A'\cap T\neq\emptyset$. Si $t\in A'\cap T$ entonces $z_0<t<v_t$ contradiciendo el hecho de que $v_t<z_0$

para toda $t\in T$. Por tanto $C$ es cofinal. Además $\bar{C}\cap T=\emptyset$ ya que si $y$ es un punto de acumulación de $C$ y $y\in U_n$ entonces existe $I_n$ intervalo tal que $y\in I_n\subseteq U_n$ y esto implica que $\{v_t\}_{t\in T}\cap U_n\neq\emptyset$, contradicción. Por lo tanto $\bar{C}\cap T=\emptyset$, que no puede ser pues $T$ es estacionario. Resumiendo: existe $t_n\in T$ tal que $[t_n,\rightarrow)\subseteq U_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por otro lado, dado que $\mathrm{cof}\,\Omega>\omega_0$ existe $t'\in T\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty}[t_n,\rightarrow))$ pues $\Omega$ es contablemente compacto y por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty}[t_n,\rightarrow)$ es un cofinal cerrado y $T$ es estacionario. Entonces $[t',\rightarrow)\subseteq U_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y esto implica que $S\cap[t',\rightarrow)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}(S\cap U_n)=T$. Pero esto es imposible ya que si $t''$ es el primer elemento de $S$ mayor que $t'$ entonces $\{t''\}=(t',t''+1)\cap S$ es abierto en $S$ así que $t''\notin T$ y $t''\in S\cap[t',\rightarrow)$. Por tanto $T$ no es un conjunto $G_\delta$ de $S$ y por consiguiente $S$ no es perfectamente normal, lo cual queríamos probar. †

<u>5.27.- EJEMPLOS</u>: (1) El cuadrado lexicográfico, es decir, $X=(I^2,\tau_<)$ es un ejemplo de un espacio lineal ordenado paracompacto. En efecto, por (3.32) este espacio es compacto y por tanto se sigue el resultado. Además, por (3.10) este ejemplo no es separable, de aquí que el inverso de (5.17) no es válido. Como $X$ también es primero numerable (por (3.10)), entonces

por (5.18) es hereditariamente paracompacto; además $\mathbb{X}$ no es perfectamente normal (2.3.2); por consiguiente el inverso de (5.26) no es válido.

(2) $(W(\omega_1), \tau_c) = \mathbb{X}$ es un espacio que no es paracompacto. En efecto, por (3.18) y (3.3.3) tenemos que $\mathbb{X}$ es contablemente compacto pero no compacto; por consiguiente, de (A-19), $\mathbb{X}$ no puede ser metacompacto y en consecuencia de (5.8) concluimos que no es paracompacto. Por tanto, de (5.26) obtenemos que $\mathbb{X}$ no es perfectamente normal.

# C A P I T U L O 6

# C O N E X I D A D

A continuación daremos una caracterización de conexidad para espacios linealmente ordenados y después pasaremos a demostrar algunas propiedades referentes a este concepto. Empezaremos recordando la definición de espacio conexo.

6.1.- DEFINICION: Un espacio topológico $X$ es conexo si no existen conjuntos abiertos $A, B \subseteq X$ no vacios tal que $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$.

Nuestro primer teorema, como dijimos al principio, se refiere a una caracterización de los espacios lineales ordenados conexos, en términos de sus cortaduras.

6.2.- TEOREMA: Sea $(X, \tau_<) \in \mathcal{L}$. $X$ es conexo si y solo si $X$ es continuamente ordenado por $<$.

Demostración: Necesidad: Supongamos que $X$ no es continuamente ordenado, entonces $X$ tiene un salto $(A, B)$ ó un hueco $(D, E)$. Si se da la primera situación sea $x$ el último elemento de $A$ y $y$

el primer elemento de $B$ ; entonces $X=(\leftarrow,y)\cup(x,\rightarrow)$ lo cual implica que $X$ es no conexo. En el segundo caso $X=D\cup E$ y $D\cap E=\emptyset$ con $D$ y $E$ abiertos en $X$. Por tanto $X$ es no conexo.

Suficiencia: Supongamos ahora que $X$ es no conexo, entonces existen abiertos no vacios $A, B\subseteq X$ tal que $X=A\cup B$ y $A\cap B=\emptyset$. Sean $x\in A$ y $y\in B$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $x<y$. Sea $z=\sup(A\cap[x,y])$. Como $A$ es cerrado y $X$ no tiene huecos, $z\in A=\bar{A}$ y esto implica que $z\notin B=\bar{B}$ y dado que $X$ no tiene saltos existe $z_1\in X$ tal que $z_1\notin B$ con $z<z_1<y$ (en efecto, si $(z,y)\subseteq B$ esto implicaria que $z\in\bar{B}$). Luego entonces existe $z_1\in X$ tal que $z_1\notin A\cup B$, contradicción. Por tanto $X$ es conexo. ⊥

6.3.-OBSERVACION: (1) Hagamos notar con referencia al teorema anterior que al pedir que $X$ sea continuamente ordenado, es decir, que $X$ no tenga saltos ni huecos, estamos excluyendo el caso de los huecos extremos; en otras palabras $X$ puede tener huecos extremos y ser conexo como es el caso de $(\mathbb{R},\tau_<)$ con $<$ el orden usual, que es un espacio conexo con huecos extremos.

(2) De (3.7), (6.2) y la observación anterior concluimos que un espacio lineal ordenado conexo y

que tenga primer y último elemento es compacto.

6.4.- EJEMPLOS: (1) $(I^2, \tau_<)$ con $<$ el orden lexicográfico. Dado que en este espacio no hay elementos consecutivos y como por (3.3.2) y (3.7) $(I^2, \tau_<)$ no tiene huecos entonces de (6.2) concluimos que este espacio es conexo.

(2) $W(\omega_1) \cup \{\omega_1\}$ con la topología del orden es un espacio lineal ordenado que no es conexo pues tiene una infinidad de saltos, es decir, este es un espacio lineal ordenado compacto pero no conexo.

6.5.- LEMA: Un conjunto ordenado $A$ es isomorfo en el sentido del orden al intervalo $[0,1]$ de racionales si y solo si $A$ es numerable, totalmente ordenado, sin saltos y tiene primer y último elemento. Si $A$ carece de primer ó último elemento ó de ambos, entonces es isomorfo en el sentido del orden al intervalo semiabierto correspondiente ó al intervalo abierto.

Demostración: Necesidad: El intervalo racional $[0,1]$ ciertamente posee las propiedades alistadas arriba y todas ellas son invariantes bajo isomorfismos de orden.

Suficiencia: Supongamos que $A$ tiene tales propiedades. Sean $a_1, a_2, \ldots$ una lista fija de $A$ donde $a_1$ es el primer elemento y $a_2$ el último elemento en el orden de $A$. Igualmente sean $r_1, r_2, r_3, \ldots$

una lista fija del intervalo racional $[0,1]$ con $r_1=0$ y $r_2=1$. Daremos una definición inductiva de una función $\varphi: A \to [0,1]$ la cual mostraremos que es preservadora de orden: $\varphi(a_1)=r_1$ y $\varphi(a_2)=r_2$. Si $\varphi$ ya ha sido definida como una función estrictamente monótona para los elementos $a_1,\dots,a_n$ $(n\geq 2)$ sea $p$ el elemento más grande entre $a_1,\dots,a_n$ tal que $p<_A a_{n+1}$ y sea $q$ el mínimo de $a_1,\dots,a_n$ tal que $q \geq_A a_{n+1}$. Dado que los racionales no tienen saltos existe $r\in[0,1]$ tal que $\varphi(p)<r<\varphi(q)$. Sea $\varphi(a_{n+1})$ el primer número racional $r$ en la lista previamente fijada tal que $\varphi(p)<r<\varphi(q)$. Probaremos que $\varphi$ así construida mapea $A$ sobre $[0,1]$. Si no fuera así, sea $n$ el índice mínimo para el cual $r_n$ no aparece como una imágen bajo $\varphi$. Claramente $n>2$. Entre los números $r_1,\dots,r_{n-1}$ sea $s$ el mayor tal que $s<r_n$ y sea $t$ el mínimo tal que $r_n<t$. Dado que $A$ no tiene saltos existe al menos un $\alpha\in A$ tal que $\varphi^{-1}(s)<\alpha<$ $<\varphi^{-1}(t)$. Sea $k$ el primer índice tal que $s<\varphi(a_k)<t$. Entonces $\varphi(a_k)=r_n$, contradicción. Por tanto $\varphi$ es estrictamente monótona de $A$ sobre $[0,1]$ y por (A.20) debe ser un isomorfismo de orden. †

<u>6.6.-TEOREMA</u>: Un conjunto infinito ordenado $(X,<)$ es isomorfo en el sentido del orden a uno de los inter-

valos de la recta real $[0,1]$, $(0,1]$, $[0,1)$ ó $(0,1)$ si y solo si es conexo y separable en la topología del orden.

Demostración: Necesidad: Dado que cualquier intervalo de la recta real tiene las propiedades alistadas arriba y como tales propiedades son preservadas bajo isomorfismos en el sentido del orden obtenemos el resultado.

Suficiencia: Sea $(X, \tau_<)$ conexo y separable y sea $A \subseteq X$ denso numerable. Si $a_1, a_2 \in A$ y $a_1 < a_2$ entonces $(a_1, a_2) \neq \emptyset$ pues por (6.2) $X$ no tiene saltos. Como $A$ es denso existe $a \in A$ tal que $a_1 < a < a_2$, es decir $A$ tampoco tiene saltos. Por (6.5) existe un isomorfismo de orden $\varphi : A \longrightarrow [0,1]_{\mathbb{Q}}$ ó sobre uno de los intervalos racionales obtenidos de $[0,1]$ quitando uno ó ambos puntos extremos. Entonces

$$\psi(x) = \sup\{\varphi(a) : a \in A \text{ y } a \leq x\}$$

define una función de $X$ en $[0,1]$. Si $x < y$ entonces existe $a \in A$ tal que $x < a < y$ y por tanto $\psi(x) < \psi(y)$. En consecuencia $\psi$ es estrictamente monótona. Como $X$ no tiene huecos interiores dado cualquier $t \in [0,1]$ (salvo quizá $t = 0$ ó $t = 1$) podemos encontrar en $X$ el punto $x = \sup\{a : a \in A \text{ y } \varphi(a) \leq t\}$. El punto $x$ satisface $\psi(x) = t$ y por tanto $\psi$ es sobre en uno de los cuatro intervalos alistados en el enunciado del teorema. Por (A.20) $\psi$ es un isomorfismo de orden. †

6.7.- TEOREMA Sean $(X,\tau)$ y $(Y,\tau')$ espacios topológicos linealmente ordenados. Entonces todo isomorfismo de orden así como todo isomorfismo de antiorden de $X$ a $Y$ es un homeomorfismo de $(X,\tau)$ a $(X,\tau')$

Demostración: La sub-base $\{(\leftarrow,x) : x\in X\}\cup\{(x,\rightarrow) : x\in X\}$ es mapeada por el isomorfismo correspondiente sobre la sub-base correspondiente de $(Y,\tau')$. Por lo tanto, el resultado se sigue de (A·21). †

6.8.- OBSERVACION: No necesariamente todo homeomorfismo entre $X$ y $Y$ espacios lineales ordenados es un isomorfismo de orden ni de antiorden, es decir, el inverso de (6.7) no es válido en general. Por ejemplo $(\mathbb{N},\tau_<)$ con el orden usual $<$. $\tau_<$ coincide con la topología discreta sobre $\mathbb{N}$ y por tanto toda permutación de $\mathbb{N}$ es un homeomorfismo.

Sin embargo, si pedimos que la topología del orden sea conexa entonces el inverso del teorema anterior siempre se cumple, como lo probamos enseguida.

6.9.- TEOREMA: Sean $(X,\tau)$ y $(X,\tau')\in\mathcal{L}$ y $\varphi: X\rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $(X,\tau)$ es conexo entonces $\varphi$ es un isomorfismo de orden ó un isomorfismo de antiorden.

Demostración: Sean $x,y\in X$ tal que $x<y$. Como —

$(\leftarrow, x]$, $[x,y]$ y $[y, \rightarrow)$ son conexos, entonces sus imágenes bajo $\varphi$ son conexas, es decir, intervalos. Por lo tanto, si $\varphi(x) < \varphi(y)$ entonces $\varphi((\leftarrow, x]) = (\leftarrow, \varphi(x)]$, $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ y $\varphi([y,\rightarrow)) = [\varphi(y), \rightarrow)$ En efecto, primero probaremos que $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$: como $\varphi([x,y])$ es conexo entonces $[\varphi(x), \varphi(y)] \subseteq \varphi([x,y])$. Ahora, si $z \in [x,y]$ deseamos probar que $\varphi(z) \in [\varphi(x), \varphi(y)]$, supongamos que $\varphi(z) < \varphi(x) < \varphi(y)$, entonces como $\varphi([x,z])$ es conexo y $\varphi(x), \varphi(z) \in \varphi([x,z])$ esto implica que $(\varphi(z), \varphi(x)) \subseteq \varphi([x,z])$; además, dado que $\varphi([x,z])$ es conexo no existen elementos consecutivos, por tanto existe $p \in (\varphi(z), \varphi(x))$ y de aquí que existe $z_1 \in [x,z]$ tal que $\varphi(z_1) = p$. Analogamente como $\varphi([z,y])$ es conexo, $(\varphi(z), \varphi(y)) \subseteq \varphi([z,y])$ y dado que $(\varphi(z), \varphi(x)) \subseteq (\varphi(z), \varphi(y))$, $p \in (\varphi(z), \varphi(y))$ y por tanto existe $z_2 \in [z,y]$ tal que $\varphi(z_2) = p$. Por consiguiente existen $z_1, z_2 \in [x,y]$ con $z_1 \neq z_2$ tal que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = p$, contradiciendo la inyectividad de $\varphi$. Por lo tanto, no puede pasar que $\varphi(z) < \varphi(x) < \varphi(y)$; similarmente se prueba que no puede pasar que $\varphi(y) < \varphi(z)$. Por tanto concluimos que $\varphi(z) \in [\varphi(x), \varphi(y)]$; de aquí que — $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$. Ahora, para $z \leq x$, $\varphi(z) \notin [\varphi(x), \varphi(y)]$ pues $\varphi$ es biyectiva y $\varphi(z) \notin [\varphi(y), \rightarrow)$ pues $\varphi((\leftarrow, x])$ es conexo; por tanto $\varphi((\leftarrow, x]) =$

$(\leftarrow, \varphi(x)]$ ; analogamente $\varphi([y,\rightarrow)) = [\varphi(y),\rightarrow)$.

De la misma manera, si $\varphi(y) < \varphi(x)$, entonces concluimos que $\varphi((\leftarrow,x]) = [\varphi(x),\rightarrow)$, $\varphi([x,y]) = [\varphi(y),\varphi(x)]$ y $\varphi([y,\rightarrow)) = (\leftarrow, \varphi(y)]$. Por consiguiente, para cualesquiera tres puntos $x,y,v \in X$ donde $x<v<y$ debemos tener $\varphi(x)<\varphi(v)<\varphi(y)$ ó $\varphi(x)>\varphi(v)>\varphi(y)$.

En efecto, si por ejemplo se diera $\varphi(x)<\varphi(y)<\varphi(v)$ entonces tendríamos que $y<v$. Otros casos se tratan de la misma manera.

Podemos entonces decir justamente cual de esas dos posibilidades ocurre comparando el orden de cualesquiera dos imágenes de nuestros tres puntos. Entonces, por ejemplo, si $a<b$ y $\varphi(a)<\varphi(b)$, $\varphi$ es preservadora de orden, sin embargo, si $a<b$ y $\varphi(a)>\varphi(b)$ $\varphi$ invierte el orden. En ambos casos obtenemos, respectivamente, un isomorfismo de orden ó un isomorfismo de antiorden. †

<u>6.10.- TEOREMA</u>: Sea $X \in \mathcal{S}$ infinito. Entonces $X$ es homeomorfo a uno de los intervalos $[0,1]$, $(0,1]$ ó $(0,1)$ de la recta real si y solo si $X$ es conexo y separable.

<u>Demostración</u>: <u>Necesidad</u>. Cualquier intervalo de la recta real tiene las propiedades alistadas arriba y por tanto esta implicación es obvia.

<u>Suficiencia</u>: Si $X$ es conexo entonces por (6.2) $X$

no tiene saltos ni huecos interiores y dado que es separable entonces por (6.6) debe ser isomorfo en el sentido del orden a uno de los intervalos $[0,1]$, $(0,1]$, $[0,1)$ ó $(0,1)$ y por (6.7) estos isomorfismos son homeomorfismos. Finalmente, observemos que $[0,1)$ y $(0,1]$ son homeomorfos $\therefore f(x)=1-x$.

Otro concepto que se estudia en los textos de topología general es el de conexidad local cuya definición damos a continuación.

<u>6.11.- DEFINICION</u>: Un espacio topológico $\mathbb{X}$ es localmente conexo si para toda $x\in\mathbb{X}$ y cualquier vecindad $U$ del punto $x$ existe un conjunto conexo $C\subseteq U$ tal que $x\in \operatorname{Int} C$.

En los mencionados textos también se hace ver que en el caso general no existe relación alguna entre los conceptos de conexidad y conexidad local. Por ejemplo ([W]):

(1) $[0,1)\cup(1,2]$ es localmente conexo pero no conexo.

(2) $\mathbb{X}=\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}\cup\{(1,y):y\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,\frac{1}{n}):x\in[0,1] \text{ y } n\in\mathbb{N}\}$ $\cup\{(x,0);x\in[0,1]\}\subseteq\mathbb{R}^2$ es conexo pero no localmente conexo.

Sin embargo, en la clase de espacios topológicos linealmente ordenados tenemos la siguiente:

<u>6.12.- PROPOSICION</u>: Si $\mathbb{X}\in\mathcal{L}$ es conexo entonces $\mathbb{X}$ es localmente conexo.

Demostración: Sea $X \in \mathcal{S}$ conexo, entonces por (6.2) $X$ es continuamente ordenado y por consiguiente todo intervalo de $X$ también lo es, es decir, para toda $x \in X$ tenemos que $\{(a,b) : x \in (a,b)\}$ es una base local de vecindades abiertas y conexas. †.

El inverso de (6.12) no necesariamente se cumple, pues basta considerar a $X$ con un hueco interior y entonces $X$ no es conexo pero si localmente conexo.

Finalmente, para terminar con este capitulo, probaremos un teorema referente a la ordenabilidad de espacios topológicos conexos.

6.13- TEOREMA: Un espacio topológico conexo $(X,\tau)$ es ordenable si y solo si es $T_1$, localmente conexo y tal que dados cualesquiera tres subconjuntos propios no vacíos, conexos y distintos de $X$ existen siempre dos de ellos que no forman una cubierta de $X$.

Demostración: Necesidad: Supongamos que $(X,\tau)$ es ordenable, entonces $X$ es $T_1$ y por ser conexo $X$ es localmente conexo. Ahora, supongamos que $M \subseteq X$ es conexo en $X$ tal que $x \notin M$. Entonces $(x,\rightarrow) \cap M = \phi$ o $(\leftarrow,x) \cap M = \phi$ ya que de otra manera estos conjuntos formarían una separación de $M$. Por tanto, un subconjunto propio conexo de $X$ no puede contener simultáneamente a intervalos de la forma

$(\leftarrow, x]$ y $[y, \rightarrow)$. Por consiguiente, dados cualesquiera tres subconjuntos propios, no vacíos, conexos y distintos existen siempre dos de ellos tales que no cubren a $X$.

Suficiencia: Para probar esto usaremos los siguientes lemas, en donde siempre estaremos suponiendo las hipótesis del teorema.

Lema 1: Para toda $x \in X$ y toda componente $K$ de $X - \{x\}$ tenemos que $\bar{K} = K \cup \{x\}$.

En efecto, $X - \{x\}$ es un conjunto abierto en $X$ y por (A.22) $K$ es abierto. Además $K$ es cerrado en $X - \{x\}$ pues las componentes son cerradas. Por lo tanto $\bar{K} \subseteq K \cup \{x\}$. Si $x \notin \bar{K}$ entonces tendríamos que $K$ es cerrado en $X$, lo cual contradice el hecho de que $X$ es conexo.

Lema 2: Para cada $x \in X$, $X - \{x\}$ tiene a lo más dos componentes.

Sabemos que si $K$ es una componente entonces $\bar{K}$ es conexo. Por lo tanto la unión de las cerraduras de cualquier número de componentes de $X - \{x\}$ es conexa (pues $x$ es un elemento de cada una de ellas). Si $X - \{x\}$ tuviera más de dos componentes sean $K_1$ y $K_2$ cualesquiera dos de ellas y sea $V = \bigcup_{K \neq K_1, K_2} \bar{K}$ y $K \in \mathcal{K} = \{\text{componentes de } X - \{x\}\}$. Consideremos:

$M_1 = \bar{K}_1 \cup V$ ; $M_2 = \bar{K}_2 \cup V$ , $M_3 = \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2$ ,

entonces $M_1, M_2, M_3$ son diferentes subconjuntos propios no vacíos de $X$ y conexos con la propiedad de que cualesquiera dos de ellos forman una cubierta de $X$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X-\{x\}$ tiene a lo más dos componentes para cada $x \in X$.

Lema 3: Existen a lo más dos puntos en $X$ que tienen complementos conexos.

Si existieran tres puntos cuyos complementos fueran conexos entonces estos darían un ejemplo de tres conjuntos que contradirían la hipótesis.

Ahora bién, si $x \in X$ es tal que $X-\{x\}$ se descompone en dos componentes denotaremos éstas últimas por $K_x$ y $K_x^{\circ}$.

Lema 4: Si $x \neq y$, entonces exactamente uno de los conjuntos $K_x$, $K_x^{\circ}$ está contenido en $K_y$ o $K_y^{\circ}$.

Si $X-\{x\}$ es conexo, entonces como $y \in X-\{x\}$, $X-\{x\}$ no está contenido ni en $K_y$ ni en $K_y^{\circ}$; sin embargo $K_x^{\circ} = \emptyset \subseteq K_y, K_y^{\circ}$. Si $X-\{x\}$ es disconexo podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $x \in K_y$ y que $y \in K_x$. Como $y \in K_x$, entonces $K_x \nsubseteq K_y$ y $K_x \nsubseteq K_y^{\circ}$. Como $y \notin K_x^{\circ}$ entonces $K_x^{\circ} = (K_x^{\circ} \cap K_y) \cup (K_x^{\circ} \cap K_y^{\circ})$ y $(K_x^{\circ} \cap K_y)$ y $(K_x^{\circ} \cap K_y^{\circ})$ son conjuntos abiertos ajenos y como $K_x^{\circ}$ es conexo uno de ellos debe ser vacío, digamos $K_x^{\circ} \cap K_y = \emptyset$, lo cual implica que $K_x^{\circ} \subseteq K_y^{\circ}$. Queda probado el lema.

Antes de pasar al siguiente lema, detengamonos a hacer una pequeña discusión.

Sabemos que un espacio finito y $T_1$ es conexo si y solo si es singular. Entonces supongamos que el cardinal de $X$ es a lo menos infinito numerable. Entonces por lema 3 podemos elegir un punto fijo $z$ tal que $X-\{z\}$ es disconexo, y por el lema 4 a lo más uno de los conjuntos $K_x$ ó $K_x^2$ está contenido en $K_z$ con $x \neq z$. Si uno de ellos está, en efecto, contenido en $K_z$ denotaremos este conjunto por $K_x$. De otra manera $K_x$ ó $K_x^2$ está contenido en $K_z^2$. Luego entonces $K_z^2$ no está contenido en $K_x$ ni en $K_x^2$ (pues $K_z^2$ es no vacío). Además, por lema 4, debemos tener que $K_z \subseteq K_x$ ó $K_z \subseteq K_x^2$. En este caso elijamos nuestra notación tal que $K_z \subseteq K_x$. Con estas convenciones de notación exactamente uno de los casos $K_x \subseteq K_z$ ó $K_z \subseteq K_x$, respectivamente, puede ocurrir. Con esta discusión en mente enunciamos y probamos a continuación el

<u>Lema 5</u>: Para $x, y \in X$ definimos $x \leq y$ si y solo si $K_x \subseteq K_y$. Entonces $\leq$ es una relación de orden en $X$.

La reflexividad y transitividad se sigue inmediatamente de la definición. Ahora, si $x \leq y$ y $y \leq x$ tenemos que $K_x = K_y$ y por tanto $\bar{K}_x = \bar{K}_y$; entonces, por lema 1, debemos tener que $K_x \cup \{x\} =$

$= K_x \cup \{y\}$ y dado que $x \notin K_x$ se sigue que $x = y$. Finalmente, supongamos que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$. Entonces los conjuntos $M_1 = K_x \cup \overline{K}_y^{\circ}$ y $M_2 = \overline{K}_x^{\circ} \cup K_y$ son en cualquier caso no vacíos. Dado que $K_x \nsubseteq K_y$ tenemos que $K_x \cap \overline{K}_y^{\circ} \neq \emptyset$. Por tanto $M_1$ es conexo. Similarmente $M_2$ es conexo. Además $M_1$ y $M_2$ son subconjuntos propios de $X$ (pues si $M_1 = X$ entonces tendríamos que $K_y = X - \overline{K}_y^{\circ} \subseteq K_x$ contradiciendo la hipótesis). Existen ahora dos posibilidades, recordando la discusión dada más arriba: (a) — $K_x \subseteq K_z$ (donde $z$ es el mismo elemento de la discusión de arriba). En este caso también tenemos que $K_y \subseteq K_z$ pues de otra manera $K_z \subseteq K_y$ y esto implicaría que $K_x \subseteq K_y$ contrario a nuestra afirmación. Por tanto $\overline{K}_z^{\circ} \subseteq \overline{K}_x^{\circ} \cap \overline{K}_y^{\circ}$ y los conjuntos $M_1$, $M_2$ y $K_z$ sirven como una contradicción a la hipótesis del teorema. Siempre que el caso (a) no se cumpla el caso (b) debe cumplirse, es decir, $K_z \subseteq K_x$. Igual que arriba se deduce que $K_z \subseteq K_y$ y ahora $M_1, M_2$ y $\overline{K}_z^{\circ}$ llevan a una contradicción con la hipótesis del teorema. Por consiguiente, siempre tenemos que $x \leq y$ ó $y \leq x$. Observemos que si $X - \{x\}$ es conexo, entonces $x$ es el primer ó último elemento de $X$.

<u>Lema 6</u>: La topología dada $\tau$ sobre $X$ coincide con la

topología del orden sobre $(X, \leq)$.

Sea $x \in X$ y supongamos que $x$ no es el primero ni el último elemento de $X$, es decir, vamos a suponer que $X-\{x\}$ es disconexo. Si $a, b \in X$ tal que $a<x<b$ entonces vamos a considerar el intervalo $(a,b)$ que es una vecindad abierta de $X$ bajo la topología del orden. Observemos que si $y \in (a,b)$ entonces $y \in K_a \subseteq K_y$ implicaría que $y \in K_y$, contradicción; por tanto $y \in K_a^{\circ}$. Además, si $y \in K_b^{\circ}$ entonces como $b \neq y$ tenemos por lema 4 que $K_b$ ó $K_b^{\circ}$ está contenido en $K_y$ ó $K_y^{\circ}$; pero $K_y \subseteq K_b$ y por tanto $K_b \nsubseteq K_y$ y $K_b \nsubseteq K_y$, es decir $K_b^{\circ} \subseteq K_y$ ó $K_b^{\circ} \subseteq K_y^{\circ}$; sin embargo $K_b^{\circ} \subseteq K_y$ no puede pasar pues $K_y \subseteq K_b$. Por tanto $K_b^{\circ} \subseteq K_y^{\circ}$. Entonces si $y \in K_b^{\circ}$ tendríamos que $y \in K_y^{\circ}$, contradicción. Por consiguiente hemos mostrado que $y \in (a,b)$ si y solo si $y \in K_a^{\circ} \cap K_b$. Ahora, como $X$ es localmente conexo entonces $K_a^{\circ}$ y $K_b$ deben ser conjuntos abiertos en $(X, \tau)$ pues son componentes de conjuntos abiertos y por tanto $K_a^{\circ} \cap K_b$ es un conjunto abierto de $(X, \tau)$. Esto implica que $(a,b)$ es una vecindad abierta de $x$ con respecto a $\tau$. Inversamente, sea $U$ una vecindad abierta de $x$ con respecto a $\tau$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U$ es conexa. Por lema 1 $x \in \overline{K_x}$ y $x \in \overline{K_x^{\circ}}$; por

tanto $U \cap \bar{K}_x \neq \emptyset$ y $U \cap \bar{K}_x^i \neq \emptyset$, es decir, existen $a, b \in U$ con $a < x < b$. Si $(a,b) \not\subseteq U$ entonces existe $y \in (a,b)$ tal que $y \notin U$; pero entonces tendríamos que $(U \cap K_y) \cup (U \cap K_y^i) = U$ lo cual contradice la conexidad de $U$ dado que $a \in U \cap K_y$ y $b \in U \cap K_y^i$, por consiguiente $U \cap K_y \neq \emptyset$ y $U \cap K_y^i \neq \emptyset$. Por lo tanto $U$ es también una vecindad de $x$ bajo la topología del orden. Si $x$ es el último ó el primer elemento de $X$ entonces analogamente se llega a la misma construcción. †.

## C A P I T U L O 7
## M E T R I Z A B I L I D A D

En este capitulo tratamos los espacios lineales ordenados que son factibles de ser metrizables. Primero se da una caracterización simple para estos espacios en términos de la diagonal en el producto topológico. Despues pasamos a probar algunos teoremas referentes a espacios lineales con base puntual numerable para finalmente concluir con una caracterización de metrizabilidad basada esencialmente en la estructura de orden.

7.1.- EJEMPLOS: (1) $(I^2, \tau_L)$ el cuadrado lexicográfico no es metrizable pues si lo fuera entonces sería perfectamente normal (A.23), contradiciendo a (2.7.2)

(2) Si $\alpha$ es un ordinal tal que $\alpha < \omega_1$, entonces los espacios de ordinales $W(\alpha) \cup \{\alpha\}$ y $W(\alpha)$ con la topología del orden son segundo numerables dado que cada punto tiene una base local numerable y existe solo un número numerable de puntos. Por consiguiente, dado que todo lineal ordenado es regular, por

(A.24) tenemos que estos espacios son metrizables

(3) $W(\omega_1) \cup \{\omega_1\} = W(\omega_1+1)$, donde $\omega_1$ es el primer ordinal no numerable, no es metrizable ya que si lo fuera, dado que es compacto por (3.18), $W(\omega_1+1)$ sería segundo numerable por (A.25), contradicción. Por lo tanto $W(\omega_1+1)$ no es metrizable. Además $W(\omega_1)$ tampoco es metrizable pues si lo fuera, por (A.26) sería paracompacto contradiciendo a (5.27.2).

7.2.- DEFINICION: Sea $X$ un espacio topológico.

(1) Una sucesión $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots,$ de cubiertas de $X$ es un desarrolló para $X$ si $\mathcal{C}_n$ es abierta para toda $n \in \mathbb{N}$ y si para toda $x \in X$ y cualquier vecindad $U$ de $x$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $St(x, \mathcal{C}_n) \subseteq \mathcal{U}$.

(2) $X$ satisface la condición de la cadena contable (ccc) si y solo si cualquier colección ajena de conjuntos abiertos es numerable ó finita.

7.3.- TEOREMA: $X \in \mathcal{T}$ es metrizable si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ es un subconjunto $G_\delta$ de $X \times X$.

Demostración: Necesidad: Basta considerar las franjas de radio $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ alrededor de la diagonal.

Suficiencia: Como $\Delta$ es un $G_\delta$ entonces $\Delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ donde $G_n$ es abierto en $X \times X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $G_{n+1} \subseteq G_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces construimos la siguiente sucesión de cubiertas abiertas de $X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\mathcal{C}_n^{\circ} = \{V_n^{\circ}(x) : x \in X\}$ donde para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ $V_n'(x)$ es un intervalo abierto de $X$ que contiene a $x$ tal que $(x,x) \in$ $\in V_n'(x) \times V_n'(x) \subseteq G_n$. Consideremos ahora $\mathcal{C}_1 =$ $\mathcal{C}_1^{\circ} = \{V_1^{\circ}(x) : x \in X\} = \{V_1(x) : x \in X\}$ ; $\mathcal{C}_2 = \{V_2^{\circ}(x) \cap V_1(x) :$ $x \in X\} = \{V_2(x) : x \in X\}$ ; $\ldots$ ; $\mathcal{C}_n = \{V_n'(x) \cap V_{n-1}(x) :$ $x \in X\} = \{V_n(x) : x \in X\}$. Por lo tanto, tenemos que $V_{n+1}(x) \subseteq V_n(x)$ para toda $x \in X$ y de aquí que $\mathcal{C}_{n+1}$ refina a $\mathcal{C}_n$. Además, $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} St(x, \mathcal{C}_n)$ $= \{x\}$ para cada $x \in X$. En efecto, si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} St(x, \mathcal{C}_n)$ entonces $y \in St(x, \mathcal{C}_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in X$ tal que $x, y \in V_n(z_n)$ y por tanto $(x,y) \in V_n(z_n) \times V_n(z_n) \subseteq G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(x,y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \Delta$ lo cual implica que $y = x$. Finalmente, si $x \in (a,b)$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $St(x, \mathcal{C}_N)$ no contiene a $a$ ni a $b$; si no fuera así, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ — $St(x, \mathcal{C}_n)$ contiene a $a$ ó a $b$, es decir $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} St(x, \mathcal{C}_n)$ ó $b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} St(x, \mathcal{C}_n)$ lo cual contradice el hecho que $\{x\} =$ $= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} St(x, \mathcal{C}_n)$. Por consiguiente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a, b \notin St(x, \mathcal{C}_N)$, es decir $x \in St(x, \mathcal{C}_N) \subseteq (a,b)$. Hemos probado entonces que $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un desarrollo para $X$ y dado que $X \in \mathcal{S}$ es colectivamente normal, por (A-27) concluimos que $X$ es metrizable. $\dagger$

7.4.- OBSERVACIONES: (1) Se puede tener el caso de un espacio $X \in \mathcal{L}$ tal que todos los conjuntos cerrados sean $G_\delta$'s y que sin embargo $X$ no sea metrizable. Si $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ con la topología inducida por el orden lexicográfico entonces claramente $X$ es separable y por tanto satisface la ccc y por consiguiente $c(X) = \aleph_0$ y de aquí que por (4.7) $X$ es hereditariamente Lindelöf y por tanto perfectamente normal (A.3). Sin embargo, no es metrizable ya que $\mathbb{R} \times \{1\} \subseteq X$ es homeomorfo a la línea de Sorgenfrey que, sabemos, no es metrizable.

(2) $(\mathbb{R}, \tau_s)$ donde $\tau_s$ es la topología de la línea de Sorgenfrey tiene una diagonal $G_\delta$ pues $\tau_s$ contiene a la topología usual de $\mathbb{R}$ y con esta última $\mathbb{R}$ tiene una diagonal $G_\delta$ en el producto y, por lo tanto $(\mathbb{R}, \tau_s)$ también cumple esta propiedad, de aquí que $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin \mathcal{L}$ puesto que si lo fuera $(\mathbb{R}, \tau_s)$ sería metrizable por el teorema anterior.

A continuación trataremos el problema de metrización para espacios ordenados con una base puntual numerable.

7.5.- DEFINICION: (Ver también 5.4.1). Sea $X$ un espacio topológico.

(1) Si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de $X$ entonces diremos que $\mathcal{B}$ es una colección $\sigma$-puntual-finita

si $\mathcal{B}=\bigcup\{\mathcal{B}_n : n\in\mathbb{N}\}$ donde cada $\mathcal{B}_n$ es una colección puntual finita

(2) Una base $\mathcal{B}$ para $X$ es una base puntual-numerable (base σ-puntual-finita) si $\mathcal{B}$ es una colección puntual-numerable (σ-puntual-finita).

7.6.- OBSERVACION: Es claro que un espacio con una base σ-puntual-finita tiene una base puntual-numerable pero no inversamente como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $\omega_1$ el primer ordinal no numerable y sea $X$ el siguiente conjunto

$$X=\{\{x_\alpha\}_{\alpha\leq\lambda} : \lambda<\omega_1,\ x_\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \text{ si } \alpha<\lambda \text{ y } x_\lambda\in\mathbb{Q}\}.$$

Sean $x=\{x_\alpha : \alpha\leq\lambda\}$ y $y=\{y_\alpha : \alpha\leq\delta\}$ en $X$. Convenimos en que: (i) $L(x)=\lambda$ y (ii) $y$ extiende a $x$ si $L(y)\geq L(x)$ y $x_\alpha=y_\alpha$ para cada $\alpha<\lambda=L(x)$. Si $x\neq y$, entonces consideremos $\delta'$=primer ordinal tal que $x_{\delta'}\neq y_{\delta'}$ y definamos el siguiente orden en $X$: $x<y$ si y solo si $x_{\delta'}<_{\mathbb{R}} y_{\delta'}$ donde $<_{\mathbb{R}}$ es el orden usual en $R$. Se afirma que la topologia inducida por este orden sobre $X$ cumple con las propiedades requeridas.

Consideremos $U(x,n)=\{y\in X : y \text{ extiende a } x \text{ y } x_\lambda-\frac{1}{n}<_{\mathbb{R}} y_\lambda<_{\mathbb{R}} x_\lambda+\frac{1}{n} \text{ donde } \lambda=L(x)\}$ y $\mathcal{U}=\{U(x,n) : x\in X, n\in\mathbb{N}\}$. Entonces afirmamos que $\mathcal{U}$ es una base para $X$:

(a) $U(x,n)$ para $x\in X$ y $n\in\mathbb{N}$ fijos es un conjunto abierto en $X$. En efecto, sea $y\in U(x,n)$, entonces $x_\alpha=y_\alpha$ para toda $\alpha<L(x)$ y $x_{L(x)}-\frac{1}{n}<_{\mathbb{R}} y_{L(x)}<_{\mathbb{R}} x_{L(x)}+\frac{1}{n}$. Consideremos $u=\{u_\alpha\}_{\alpha\le L(u)}$, $v=\{v_\alpha\}_{\alpha\le L(v)}$ tal que $u_\alpha=x_\alpha$ para toda $\alpha<L(x)$ y $v_\alpha=x_\alpha$ para todo $\alpha<L(x)$ y $u_{L(x)}$, $v_{L(x)}$ elegidos de la siguiente manera.

$$x_{L(x)}-\tfrac{1}{n}<_{\mathbb{R}} u_{L(x)}<_{\mathbb{R}} y_{L(x)}<_{\mathbb{R}} v_{L(x)}<_{\mathbb{R}} x_{L(x)}+\tfrac{1}{n}.$$

Entonces $y\in(u,v)\subseteq U(x,n)$; claramente $y\in(u,v)$ pues $L(x)$ = primer ordinal tal que $u_{L(x)}\neq y_{L(x)}\neq v_{L(x)}$ y además $u_{L(x)}<_{\mathbb{R}} y_{L(x)}<_{\mathbb{R}} v_{L(x)}$, es decir $u<y<v$. Ahora probaremos que $U(x,n)\supseteq(u,v)$. Sea $w\in(u,v)$, entonces, por construcción $x_{L(x)}-\frac{1}{n}<_{\mathbb{R}} w_{L(x)}<_{\mathbb{R}} x_{L(x)}+\frac{1}{n}$. Basta probar que $w$ extiende a $x$; para esto, supongamos que este no es el caso y sea $\delta_0$ = primer ordinal menor que $L(x)$ tal que $w_{\delta_0}\neq x_{\delta_0}=u_{\delta_0}=v_{\delta_0}$. Por lo tanto no puede pasar que $u_{\delta_0}<_{\mathbb{R}} w_{\delta_0}<_{\mathbb{R}} v_{\delta_0}$ pues $u_{\delta_0}=v_{\delta_0}$, contradicción. Por tanto $w$ extiende a $x$, es decir, hemos probado que $(u,v)\subseteq U(x,n)$. Por lo tanto $U(x,n)$ es un conjunto abierto en $\mathfrak{X}$.

(b) $\mathcal{U}$ es una base para $\mathfrak{X}$. En efecto, sea $(x,y)$ un intervalo en $\mathfrak{X}$ y sea $w\in(x,y)$. Queremos probar que existe $z\in\mathfrak{X}$ y $N\in\mathbb{N}$ tal que $w\in U(z,N)\subseteq(x,y)$.

Sean:

$\delta_0$ = primer ordinal tal que $x_{\delta_0}\neq y_{\delta_0}$ $(x_{\delta_0}<_{\mathbb{R}} y_{\delta_0})$,

$\delta_1$ = primer ordinal tal que $x_{\delta_1}\neq w_{\delta_1}$ $(x_{\delta_1}<_{\mathbb{R}} w_{\delta_1})$,

$\delta_2$ = primer ordinal tal que $y_{\delta_2}\neq w_{\delta_2}$ $(w_{\delta_2}<_{\mathbb{R}} y_{\delta_2})$.

Entonces se afirma que $\delta_0=\delta_1=\delta_2$. En efecto, si $\delta_1<\delta_0$ entonces $x_{\delta_1}<_{\mathbb{R}} w_{\delta_1}$; pero $x_{\delta_1}=y_{\delta_1}<_{\mathbb{R}} w_{\delta_1}$ entonces

$\gamma_2 < \gamma_1$ y esto implica que $w_{\gamma_2} <_{\mathbb{R}} y_{\gamma_2} = x_{\gamma_2}$, contradicción. Por lo tanto $\gamma_0 \leq \gamma_1$. Ahora, si $\gamma_0 < \gamma_1$ entonces $x_{\gamma_0} \neq y_{\gamma_0}$ y $w_{\gamma_0} = x_{\gamma_0}$, por tanto $w_{\gamma_0} \neq y_{\gamma_0}$ y esto implica que $\gamma_2 < \gamma_0$, es decir $x_{\gamma_2} = w_{\gamma_2} <_{\mathbb{R}} y_{\gamma_2}$, contradicción. Por lo tanto $\gamma_0 = \gamma_1$. Analogamente se prueba que $\gamma_0 = \gamma_2$. Entonces definimos $z$ tal que $\ell(z) = \gamma_0$, $z_\alpha = x_\alpha = y_\alpha = w_\alpha$ para $\alpha < \gamma_0$ y $z_{\gamma_0} = q \in \mathbb{Q}$ tal que existe $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $x_{\gamma_0} <_{\mathbb{R}} z_{\gamma_0} - \frac{1}{N} <_{\mathbb{R}} w_{\gamma_0} <_{\mathbb{R}} z_{\gamma_0} + \frac{1}{N} <_{\mathbb{R}} y_{\gamma_0}$. Entonces $w \in U(z, N)$. Además si $u \in U(z, N)$ entonces $u_\alpha = z_\alpha = x_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha < \gamma_0$ y $z_{\gamma_0} - \frac{1}{N} <_{\mathbb{R}} u_{\gamma_0} <_{\mathbb{R}} z_{\gamma_0} + \frac{1}{N}$ lo cual implica que $x_{\gamma_0} \neq u_{\gamma_0} \neq y_{\gamma_0}$. Por lo tanto $\gamma_0 =$ primer ordinal tal que $x_{\gamma_0} \neq u_{\gamma_0} \neq y_{\gamma_0}$ y además $x_{\gamma_0} <_{\mathbb{R}} u_{\gamma_0} <_{\mathbb{R}} y_{\gamma_0}$, es decir $u \in (x, y)$.

Ahora, como cada $x \in X$ puede extender a lo más a un número numerable de elementos de $X$ se sigue que $\mathcal{U}$ es una base puntual-numerable para $X$. Falta probar que $X$ no tiene una base $\sigma$-puntual-finita. Basta mostrar que si $\mathcal{B}$ es una base para $X$ entonces $\mathcal{B}$ contiene una sub-familia monótona decreciente (con respecto a la inclusión de conjuntos) y no numerable; consideremos $B_1 \in \mathcal{B}$ y $x_1 \in B_1$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \in U(x_1, n_1) \subseteq B_1$. Sea $x_2$ una extensión de $x_1$ tal que $x_2 \in U(x_1, n_1)$ y $\ell(x_2) = \ell(x_1) + 1$. Entonces existe $B_2 \in \mathcal{B}$ y $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $U(x_2, n_2) \subseteq B_2 \subseteq U(x_1, n_1)$. Supongamos que $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots$ y $B_1, \ldots, B_\alpha, \ldots$ han sido elegidos para cada $\alpha < \beta < \omega_1$ y tal que para cada $\alpha < \beta$

(i) $x_\alpha$ extiende a $x_\mu$ si $\mu<\alpha$

(ii) $U(x_\alpha, n_\alpha) \subseteq B_\alpha$

(iii) $B_1 \supseteq U(x_1, n_1) \supseteq \cdots \supseteq B_\alpha \supseteq U(x_\alpha, n_\alpha) \supseteq \cdots$

Elijamos $x_\beta \in X$ tal que $x_\beta$ extiende a $x_\alpha$ si $\alpha<\beta$ y $\ell(x_\beta) = \sup\{\ell(x_\alpha) \cdot \alpha<\beta\}+1$ ; se sigue que $U(x_\beta, 1) \subseteq U(x_\alpha, n_\alpha)$ para cada $\alpha<\beta$. En efecto, si $y = \{y^\delta\}_{\delta\leq\epsilon} \in U(x_\beta, 1)$ entonces $y$ extiende a $x_\alpha$ para toda $\alpha \leq\beta$ y dado que $\alpha+1\leq\beta$ tenemos que $y^{\ell(x_\alpha)} = x_{\alpha+1}^{\ell(x)}$ y por hipótesis de inducción $x_\alpha^{\ell(x_\alpha)} - \frac{1}{n_\alpha} <_{\mathbb{R}} x_{\alpha+1}^{\ell(x_\alpha)} <_{\mathbb{R}} x_\alpha^{\ell(x_\alpha)} + \frac{1}{n_\alpha}$, es decir $x_\alpha^{\ell(x_\alpha)} - \frac{1}{n_\alpha} <_{\mathbb{R}} y^{\ell(x_\alpha)} <_{\mathbb{R}} x_\alpha^{\ell(x_\alpha)} + \frac{1}{n_\alpha}$ lo que implica que $y \in U(x_\alpha, n_\alpha)$. Por lo tanto $U(x_\beta, 1) \subseteq U(x_\alpha, n_\alpha)$ para toda $\alpha<\beta$. En consecuencia $U(x_\beta, 1) \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha<\beta$. Sea $B_\beta \in \mathcal{B}$ tal que $x_\beta \in B_\beta \subseteq U(x_\beta, 1)$ entonces existe $n_\beta \in \mathbb{N}$ tal que $U(x_\beta, n_\beta) \subseteq B_\beta$. Hemos completado la inducción. Por lo tanto $\mathcal{B}$ contiene una subfamilia monótona decreciente no numerable — $\mathcal{B}' = \{B_\alpha : \alpha<\omega_1\}$. En consecuencia $\mathcal{B}$ no es una base $\sigma$-puntual-finita.

Ahora, dado que todo espacio lineal ordenado es colectivamente normal, de (A-28) obtenemos el siguiente

<u>7.7.- TEOREMA</u>: Si $X \in \mathcal{L}$ tiene una base $\sigma$-puntual-finita entonces $X$ es metrizable si $X$ es perfectamente normal.

<u>7.8.- COROLARIO</u>: Sea $X$ con las hipótesis del teorema

anterior. Entonces $X$ es metrizable si $X$ satisface la CCC.

<u>Demostración</u>: Si $X$ satisface la CCC entonces $X$ es hereditariamente Lindelöf (ver 7.4.1) y por lo tanto perfectamente normal (A-3) y de (7.7) metrizable. †

Si además imponemos otras condiciones a los espacios en cuestión obtenemos otros teoremas de metrización para espacios lineales ordenados con base puntual-numerable. Una de esas condiciones es la de P-espacio.

<u>7.9.- DEFINICION</u>: Un espacio completamente regular $X$ es un P-espacio si para alguna compactación Hausdorff $Y$ de $X$ existe una sucesión $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \}$ de colecciones de subconjuntos abiertos de $Y$ cada uno de los cuales cubre a $X$ y tal que si $x \in X$, entonces — $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} St(x, \mathcal{P}_n) \subseteq X$.

<u>7.10.- TEOREMA</u>: $X \in \mathcal{S}$ es metrizable si y solo si es un p-espacio con una base puntual-numerable.

<u>Demostración</u>: <u>Necesidad</u>: Por (A-29) $X$ es un p-espacio y dado que toda familia $\sigma$-discreta es puntual numerable, se sigue de (A-30) el resultado.

<u>Suficiencia</u>: Por (5.9) $X$ es paracompacto y por (A31) $X$ es metrizable. †

A continuación estableceremos una caracterización de metrizabilidad esencialmente basada en la estructura de orden. Sea $X \in \mathcal{L}$ y $Y$ un subespacio de $X$; definimos los siguientes dos subespacios de $Y$:

$E(Y) = \{p \in Y : [p, \rightarrow)_Y$ ó $(\leftarrow, p]_Y$ es un subconjunto abierto de $Y\}$,

$N(Y) = \{p \in Y :$ existe $q \in Y$ tal que $p$ y $q$ son elementos consecutivos en $Y$ y ni $p$ ni $q$ son aislados en $Y\}$.

Observemos que $N(Y) \subseteq E(Y)$ y que en general $N(Y) \neq E(Y)$ igualmente en el caso de que $Y = X$.

<u>7.11.- TEOREMA</u>: Las siguientes propiedades de $X \in \mathcal{L}$ son equivalentes:

(1) $X$ es metrizable

(2) Existe un subconjunto denso $A$ en $X$ con $E(X) \subseteq A$ y tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ donde para toda $n \in \mathbb{N}$

(i) $A_n$ es un subconjunto cerrado de $X$,

(ii) $(A_n, \tau_<^{(A_n)})$ es un espacio discreto.

(3) Existe un subconjunto denso $A$ en $X$ con $N(X) \subseteq A$ y tal que. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donde para toda $n \in \mathbb{N}$:

(i) $A_n$ es un subconjunto cerrado de $X$,

(ii) $(A_n, \tau_<^{(A_n)})$ es un espacio discreto.

<u>Demostración</u>: (1) implica (2). Dado que $X$ es metrizable, por (A-30) $X$ tiene una base abierta $\sigma$-discreta $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{B}_n$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos de $X$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $B \in \mathcal{B}_n$ seleccionamos uno ó dos puntos como sigue: si $B$ contiene al $\sup(B)$

y/ó al $\inf(B)$ con el orden heredado de $X$ entonces seleccionamos este, o éstos, punto(s) de $B$; y si $B$ no contiene al $\sup B$ ni al $\inf B$ entonces elegimos un punto arbitrario de $B$. Sea $A_n$ el conjunto de puntos así seleccionados y consideremos $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Entonces $A$ satisface las condiciones requeridas:

$A$ es denso en $X$ pues si $x \in X - A$ y $V$ es una vecindad de $x$ entonces existe $B \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in B \subseteq V$ y esto implica que $V \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, $x$ es un punto de acumulación de $A$ y por lo tanto para todo $x \in X$, $x \in A$ ó $x$ es un punto de acumulación de $A$, es decir $\overline{A} = X$. Además $E(X) \subseteq A$ ya que si $[p, \rightarrow) \in \tau_X$ entonces para $p \in [p, \rightarrow)$ existe $B \in \mathcal{B}_n$ básico tal que $p \in B \subseteq [p, \rightarrow)$, es decir, $p$ es el primer elemento de $B$. Por tanto $p \in A_n$, es decir, $p \in A$.

(i) $A_n$ es cerrado en $X$. Supongamos que $A_n = \{x_{ns}\}_{s \in S}$ y sea $y \in X$ tal que $y \notin A_n$, entonces $y \in B \in \mathcal{B}_n$ ó $y \notin \bigcup \mathcal{B}_n$. En ambos casos, como $\mathcal{B}_n$ (ó $\mathcal{B}_k$, con $k \neq n$ en el segundo caso) es una familia discreta entonces existe $V$ abierto en $X$ con $y \in V$ tal que $V \cap B^* = \emptyset$ para toda $B^* \neq B$. Además $X \in \mathcal{S}$ implica que existen $U, U' \in \tau_X$ tal que $x^* \in U$, $y \in U'$ y $U \cap U' = \emptyset$. Por lo tanto

$W = U' \cap V$ es un abierto tal que $y \in W \subseteq X - A_n$.

(ii) $(A_n, \tau_<^{(A_n)})$ es un espacio discreto. En efecto, pues si $x \in A_n$ entonces $x \in B$ para algún $B \in \mathcal{B}_n$ y entonces:

(a) Si $B$ no contiene al $\sup B$ ni al $\inf B$ ó contiene a uno solo de ellos tenemos que $\{x\} = A_n \cap B \in \tau_<^{(A_n)}$;

(b) Si $B$ contiene al $\sup B$ y al $\inf B$, supongamos que $y \in X$ es el otro extremo (sup ó inf) de $B$. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x < y$; si $x$ no es el extremo de $X$ entonces $W = B \cap (z, y)_X$ con $z \in X$ tal que $z < x$, es un abierto en $X$ tal que $x \in W$ y $y \notin W$ y cumple con que $\{x\} = W \cap A_n \in \tau_<^{(A_n)}$ y si $x$ es el extremo de $X$ entonces $W = B \cap [x, y)_X$ cumple con lo requerido.

(2) implica (3) es inmediato.

(3) implica (1). Como $X \in \mathcal{L}$ es colectivamente normal, entonces, por (A-27) basta probar que $X$ tiene un desarrollo. Para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in X$ se sigue del hecho que $A_n$ es cerrado en $X$ y discreto en la topología relativa que existe un intervalo abierto $I(x,n)$ en $X$ tal que $I(x,n) \cap (A_n - \{x\}) = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que, para toda $n \in \mathbb{N}$ $I(x,n) \supseteq I(x, n+1)$ y además si $x$ es un punto aislado de $X$, que

$I(x,n)=\{x\}$ y, si $x$ es un punto no aislado de $X$ teniendo un salto a la izquierda (derecha) que $I(x,n) = [x,p)$ para algún $p\in X$ (respectivamente $I(x,n) = (p,x]$ para algún $p\in X$). Definamos ahora para cada $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{U}_n=\{I(x,n) : x\in X\}$; entonces es claro que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de $X$ y por tanto completaremos la prueba si demostramos que para toda $x\in X$, la familia $\{St(x,\mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local en $x\in X$. Así pues, elijamos $x\in X$ y sea $P$ un intervalo abierto arbitrario en $X$ que contiene a $x$.

(a) Supongamos que $x$ es un punto aislado en $X$. Como $\bar{A}=X$ y $x$ no es un punto de acumulación de $A$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\in A_n$. Queremos que $St(x,\mathcal{U}_n)\subseteq P$. En efecto, si $x\in I(y,n)$ para algún $y\in X$, entonces como $I(y,n)\cap(A_n-\{y\})=\emptyset$ y $x\in I(y,n)\cap A_n$ se sigue que $x=y$. Por lo tanto $St(x,\mathcal{U}_n)\subseteq I(x,n)=\{x\}\subseteq P$.

(b) Supongamos que $x$ tiene un salto a la izquierda y que $\bar{x}\in X$ es su predecesor inmediato. Sea $x$ no aislado en $X$. Ciertamente $\bar{x}\in A$ pues $N(X)\subseteq A$ y así $\bar{x}\in A_i$ para algún $i\in\mathbb{N}$. Dado que $x$ no es un punto aislado de $X$ podemos encontrar $j,k\in\mathbb{N}$ y puntos $a\in A_j\cap P$ y $b\in A_k\cap P$ tal que $i\leq j\leq k$ y $x<b<a$. Deseamos que $St(x,\mathcal{U}_k)\subseteq P$.

$I(x,n) = \{x\}$ y, si $x$ es un punto no aislado de $X$ teniendo un salto a la izquierda (derecha) que $I(x,n) = [x, p)$ para algún $p \in X$ (respectivamente $I(x,n) = (p, x]$ para algún $p \in X$). Definamos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_n = \{I(x,n) : x \in X\}$; entonces es claro que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de $X$ y por tanto completaremos la prueba si demostramos que para toda $x \in X$, la familia $\{St(x,\mathcal{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local en $x \in X$. Así pues, elijamos $x \in X$ y sea $P$ un intervalo abierto arbitrario en $X$ que contiene a $x$.

(a) Supongamos que $x$ es un punto aislado en $X$. Como $\bar{A} = X$ y $x$ no es un punto de acumulación de $A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Queremos que $St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq P$. En efecto, si $x \in I(y,n)$ para algún $y \in X$, entonces como $I(y,n) \cap (A_n - \{y\}) = \emptyset$ y $x \in I(y,n) \cap A_n$ se sigue que $x = y$. Por lo tanto $St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq I(x,n) = \{x\} \subseteq P$.

(b) Supongamos que $x$ tiene un salto a la izquierda y que $\bar{x} \in X$ es su predecesor inmediato. Sea $x$ no aislado en $X$. Ciertamente $\bar{x} \in A$ pues $N(X) \subseteq A$ y así $\bar{x} \in A_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Dado que $x$ no es un punto aislado de $X$ podemos encontrar $j, k \in \mathbb{N}$ y puntos $a \in A_j \cap P$ y $b \in A_k \cap P$ tal que $i \le j \le k$ y $x < b < a$. Deseamos que $St(x, \mathcal{U}_k) \subseteq P$.

Para ver esto si $x \in I(y,k)$ para algún $y \in \overline{X}$, entonces, como $I(y,k) \cap (A_k - \{y\}) = \emptyset$ y $b \in A_k$ se sigue que $y \leq b < a$ puesto que si $b < y$ entonces $b \in I(y,k) \cap (A_k - \{y\}) = \emptyset$, contradicción. Además, dado que $I(y,i) \cap (A_i - \{y\}) = \emptyset$, $\bar{x} \in A_i$ y $x \in I(y,k) \subseteq I(y,i)$ tenemos que $\bar{x} < y$ pues si $y \leq \bar{x}$ entonces para $y = \bar{x}$ tenemos que $x \in I(y,k)$ contradiciendo la constucción de $I(y,k)$ y si $y < \bar{x}$ entonces $y < \bar{x} < x$ y esto implica que $\bar{x} \in I(y,i)$ y $\bar{x} \in A_i$, contradicción. Por lo tanto, de $I(y,j) \cap (A_j - \{y\}) = \emptyset$ y $y < a$ se sigue que $a \notin I(y,j) \supseteq I(y,k)$ pues si $a \in I(y,j)$ entonces como $a \in A_j \cap P$ esto implica que $a \in I(y,j) \cap (A_j - \{y\})$, contradicción; analogamente, de $I(y,i) \cap (A_i - \{y\}) = \emptyset$ y $\bar{x} < y$ se sigue que $\bar{x} \notin I(y,i) \supseteq I(y,k)$. Por lo tanto $I(y,k) \subseteq P$, pues si existiera $z \in I(y,k)$ tal que $z > a$ (ó $z < \bar{x}$) entonces $a \in I(y,k)$ ($\bar{x} \in I(y,k)$), contradicción. En consecuencia $st(x, \mathcal{U}_k) \subseteq P$.

(c) Si $x$ es un punto extremo de $\overline{X}$ y no aislado en $\overline{X}$ entonces la demostración es una pequeña modificación del caso (b)

(d) Supongamos que $x$ es tal que no tiene saltos a la derecha ni a la izquierda; entonces consideremos los subespacios lineales ordenados $[x,\rightarrow)$ y $(\leftarrow, x]$; por el caso (c) anterior existen $m, n \in \mathbb{N}$

tal que $St(x,\mathcal{U}_m) \cap [x,\rightarrow) \subseteq P \cap [x,\rightarrow)$ y $St(x,\mathcal{U}_n) \cap (\leftarrow,x] \subseteq P \cap (\leftarrow,x]$. Si suponemos que $m \leq n$ entonces $St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq St(x,\mathcal{U}_m)$ y consecuentemente $St(x,\mathcal{U}_n) \subseteq P$. $\dagger$.

7.12- OBSERVACION: Ilustraremos este teorema mostrando que el espacio ordinal $W(\omega_1)$ es no metrizable. Dado que todo subconjunto infinito de $W(\omega_1)$ tiene un punto de acumulación (3.18), se sigue que ningun subconjunto infinito de $W(\omega_1)$ puede ser cerrado en $W(\omega_1)$ y al mismo tiempo discreto en su topología relativa. Además como $E(W(\omega_1)) = W(\omega_1)$ concluimos del teorema anterior que $W(\omega_1)$ es no metrizable.

# APENDICE

A continuación presentamos una lista de resultados de Topología General que fueron utilizados en el desarrollo del presente trabajo. Las demostraciones de estos pueden ser encontradas en los textos que aparecen como referencias al final.

<u>A.1.- TEOREMA</u>: Para toda familia localmente finita $\{A_s\}_{s\in S}$ tenemos la igualdad $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A}_s$.

<u>A.2.- TEOREMA</u>: Si $X$ es un espacio topológico $T_1$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $X$ es hereditariamente colectivamente normal.

(2) Todo subespacio abierto de $X$ es colectivamente normal.

<u>A.3.- TEOREMA</u>: Sea $X$ un espacio topológico Lindelöf. $X$ es perfectamente normal si y solo si $X$ es hereditariamente Lindelöf.

<u>A.4.- TEOREMA</u>: Sean $X, T$ espacios topológicos completamente regulares y Hausdorff con $X$ denso en $T$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) Toda función continua $f: X \to Y$ donde $Y$ es cualquier espacio compacto tiene una extensión continua a $T$,

(2) $X$ está $C^*$- inmerso en $T$,

(3) $\beta X = \beta T$.

<u>A.5.- PROPOSICION</u>: Sea $X$ completamente regular y Hausdorff entonces ningún punto de $\beta X - X$ tiene una base local numerable en $\beta X$.

<u>A.6.- TEOREMA</u>: Todo espacio normal pseudocompacto es contablemente compacto.

<u>A.7.- TEOREMA</u>: Para todo subespacio cerrado $A$ de un espacio normal $X$, $\bar{A}^{\beta X}$ es una compactación de $A$ equivalente a $\beta A$.

<u>A.8.- TEOREMA</u>: Para todo espacio Hausdorff $X$ es equivalente lo siguiente:

(1) $X$ es contablemente compacto

(2) Todo subconjunto infinito numerable de $X$ tiene un punto de acumulación

(3) Toda familia numerable de subconjuntos cerrados de $X$ que tiene la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

<u>A.9.- TEOREMA</u>: Si existe una función continua $f: X \to Y$ de un espacio contablemente compacto $X$ sobre un espacio Hausdorff $Y$ entonces $Y$ es un espacio contablemente compacto.

<u>A.10.- TEOREMA</u>: Un espacio topológico es compacto

si y solo si es un espacio contablemente compacto con la propiedad de Lindelöf.

A.11.- TEOREMA. Si $X$ es completamente regular y contablemente compacto entonces $X$ es pseudocompacto.

A.12.- TEOREMA. Todo espacio secuencialmente compacto es contablemente compacto.

A.13.- TEOREMA: Sea $X$ un espacio topológico. $X$ es hereditariamente $m$-Lindelöf si y solo si todo subespacio abierto de $X$ es $m$-Lindelöf.

A.14.- TEOREMA: Si $X$ es un espacio topológico Hausdorff entonces $\operatorname{Card}(X) \leq 2^{hl(X)}$.

A.15.- TEOREMA: Para todo espacio regular $X$ las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $X$ es fuertemente paracompacto

(2) Toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento cerrado localmente finito y estrella-finito.

(3) Toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento cerrado localmente finito y estrella-numerable.

(4) Toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto estrella-numerable.

A.16.- TEOREMA: $X$ espacio topológico es hereditariamente paracompacto si y solo si todo subespacio abierto de $X$ es paracompacto.

A.17.- TEOREMA: Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.

A.18.- TEOREMA: La propiedad de ser perfectamente normal es una propiedad hereditaria.

A.19.- TEOREMA: $X$ espacio topológico es compacto si y solo si es contablemente compacto y metacompacto.

A.20.- TEOREMA: Sea $X$ un conjunto linealmente ordenado; $Y$ un conjunto ordenado y $\varphi: X \to Y$ una función estrictamente monótona (es decir, $a_1 < a_2$ implica $\varphi(a_1) < \varphi(a_2)$). Entonces $\varphi$ es necesariamente inyectiva y si además $\varphi$ es sobre entonces $\varphi$ es un isomorfismo de orden (y por tanto B debe ser linealmente ordenado).

A.21.- TEOREMA: Sea $\varphi: X \to Y$ una biyección con $X, Y$ espacios topológicos. Entonces es equivalente

(1) $\varphi$ es un homeomorfismo de $X$ sobre $Y$

(2) $\varphi$ es abierta

(3) $\varphi$ mapea toda base (sub-base) de $X$ sobre una base (sub-base).

A.22.- TEOREMA: Un espacio topológico es localmente conexo si y solo si las componentes de todos sus subconjuntos abiertos son abiertas.

A.23.- TEOREMA: Todo espacio metrizable es perfectamente normal.

A.24.- TEOREMA: Un espacio segundo numerable es metrizable si y solo si es un espacio regular.

A.25.- TEOREMA: Un espacio compacto es metrizable si y solo si es un espacio segundo numerable.

A.26.- TEOREMA: Todo espacio metrizable es paracompacto.

A.27.- TEOREMA: Un espacio topológico es metrizable si y solo si es colectivamente normal y tiene un desarrollo.

A.28.- TEOREMA: Un espacio $T_1$ con una base $\sigma$-puntual finita es metrizable si y solo si es perfectamente normal y colectivamente normal.

A.29.- TEOREMA: Todo espacio métrico es un P-espacio.

A.30.- TEOREMA: Un espacio topológico regular es metrizable si y solo si tiene una base abierta $\sigma$-discreta.

A.31.- TEOREMA: Si $X$ es un P-espacio paracompacto con una base puntual-numerable entonces $X$ es metrizable.

# L I T E R A T U R A

[A].- Aguilar, M.A.- Espacios topológicos Ordenables. Tesis (1976) Fac. de Ciencias.

[B].- Ball, B.J.- Countable paracompactness in linearly ordered spaces. Proc. A.M.S 5 (1954) pp. 190-192.

[Be].-Bennett, H.R.- A note on point-countability in linearly ordered spaces. Proc. A.M.S vol. 28 No.2 (1971) pp 598-606.

[Br].- Braude, E.- $\mathcal{G}$-Souslin diagonals and a theorem of Lorch and Tong. Gen. Top. and Appl. 5 (1975) pp. 181-194.

[Bu].- Burke, D.K.- Spaces with a $G_\delta$-diagonal. Lecture Notes in Math. v. 378 Springer-Verlag (1974) pp. 95-100.

[Be-Lu].- Bennett, H.R y Lutzer, D.J.- Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces. Proc. A.M.S 23 (1969) pp 664-67.

[C].- Conover, R.A.- Normality and products of linearly ordered spaces. Gen Top. and Appl. 2 (1972) pp. 215-225.

[D]- Dugundji, J.- Topology. Allyn and Bacon. Boston Mass 1968.

[E]- Engelking, R.- General Topology. Warsawa 1977

[E-L]- Engelking, R y Lutzer, D.J.- Paracompactness in ordered spaces. Fund. Math 94 (1977) pp. 49-58.

[Fa].- Faber, M.J.- Metrizability of linearly ordered spaces. Colloquia Math. soc. János Bolyai. Topics in Top. Kezzthely (Hungary) 1972 pp. 257-265.

[Fe]- Fenton, V.M.- Espacios topológicos primero numerables, de Frechet y secuenciales. Tesis 1984. Fac. Ciencias.

[G-H]- Gillman, L y Henricksen. M- Concerning rings of continuos functions. Trans. A.M.S 77 (1954) pp. 340-362.

[G-J]- Gillman, L y Jerison, M.- Rings of continuos functions. Van Nostrand, Princeton 1960.

[H-J].- Hajnal, A y Juhász, I.- Some remarks on a property of topological cardinal functions. Acta Math. 20 (1969) pp. 25-37.

[Ju]- Juhasz, I.- Cardinal functions in topology. Math. Centre Tracts 34. Math. centrum, Amsterdam 1971.

[Ka].- Kamke, E.- Theory of sets. Dover Publ. New York. 1950.

[Ko].- Kowalski, H.J.- Topological spaces. Academic Press New York 1965

[Ku-Mo]- Kuratowski, K y Mostowski, A.- Set theory with an introduction to descriptive set theory. Warszawa 1976.

[L$_1$] Lutzer, D.J.- A metrization theorem for linearly ordered spaces. - Proc. A.M.S 22 (1969) pp. 557-558.

[L2]. - ____________ .- Ordinals and paracompactness ordered spaces. Proc. second Pittsburg Conf Dic 1972 Springer Lecture Notes in Math. 378 pp. 258-266.

[L3]. - ____________ .- Ordered topological spaces. Surveys in General Topology ed por G.M Reed. Academic Press New York 1980, pp. 247-295.

[Ly] - Lynn, I.L.- Linearly orderable spaces. Trans. A.M.S 113 (1964) pp. 189-218.

[Ma]. - Mansfield, M.J.- Some generalizations of full normality. Trans. A.M.S 86 (1957) pp. 489-505.

[Me]. - Meyer, P.- Sequential properties of ordered topological spaces. Comp. Math 21 (1969) pp. 102-106

[Ma-Pa] - Mardešic, S y Papič, P.- Continuos images of ordered compacta, the Souslin property and dyadic compacta. Glasnik Math - Fiz. I Ast. (1963) pp. 1-22.

[S]. - Steen, L.A.- A direct proof that a linearly ordered space is hereditarily collectionwise normal. Proc. A.M.S 24 (1970) pp. 727-728.

[S-S] - Steen, L.A y Seebach, J.A Jr.- Counterexamples in Topology. Holth-Rinehart and Winston Inc. 1970

[V-D] - Van Dalen, J y Wattel, E.- A topological characterization of ordered spaces. Gen. Top and Appl. 3 (1973) pp. 347-354.

[V-R-S] - Venkataraman, M y Rajagopalan, M y Soundara rajan, T.- Orderable topological spaces.- Gen. Top. and Appl. 2 (1972) pp. 1-10.

[W]. Willard, S.- General Topology. Adisson-Wesley P.C. 1970.

INDICE