2 ej
10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

METODOS MATEMATICOS EN LA SOLUCION DE CIRCUITOS ELECTRICOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

MARIA TERESA ISLAS PIEDRAS

MEXICO, D. F. 1986

Indice

INTRODUCCION

En la sociedad tecnológica moderna existe una gran variedad de aparatos electromecánicos de uso generalizado , por ejemplo : los aparatos domésticos , elevadores de máquinas rotatorias que intervienen para que se efectúe el arranque en los automóviles , máquinas industriales , el metro , computadoras , hasta las máquinas que desempeñan una función importante en los sistemas aeroespaciales con fines pacíficos y bélicos .El control de dichos aparatos requiere ser efectivo y confiable.

Un ejemplo simple de circuitos es el de una plancha o un calefactor eléctrico , en el que aparece entre otros elementos una resistencia (al pasar la corriente a través de ésta , la energía eléctrica se transforma en energía calorífica).En los timbres eléctricos de las casas y en las gruas tenemos entre los elementos que forman sus circuitos eléctricos la bobina , así como los capacitores en los circuitos eléctricos del radio y la televisión .

El diseño y análisis de los circuitos eléctricos pueden ser representados por un modelo matemático que generalmente es una ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones diferenciales ó lineales algebraicas ; que al ser resuelto nos permitirá : predecir su funcionamiento y aumentar su economía al mejorar su eficiencia .

Este trabajo tiene como objetivo servir de guía en los métodos de solución de ecuaciones diferenciales que aparecen en circuitos eléctricos , así como un manual de apoyo en el curso de Ecuaciones Diferenciales de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica .Para lograr lo anterior el método y desarrollo del trabajo consistirá de los siguientes pasos : planteo de un problema , obtención del modelo del problema , interpretación de la solución y los fundamentos teóricos en los que se basan los métodos propuestos de solución .

El contenido de este trabajo es como sigue:Capítulo 1 Conceptos Básicos de Circuitos Eléctricos , el cual se incluye para facilitar la lectura a aquellas personas que los desconocen.

En el Capítulo 2 se tratan los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales .En el Capítulo 3 , se estudiará la Transformada de Laplace, la cual es trascendental en el análisis de circuitos cuando la fuente de excitación es una función discontinua , además de que proporciona la solución total quedando las condiciones iniciales incluídas desde el principio en vez de al final como sucede con otros métodos .

El Capítulo 4 , trata de la Integral de Convolución ,que data desde 1833 y sus principales aplicaciones se encuentran en Teoría de los Circuitos (en donde permite evaluar la respuesta de un circuito a una entrada arbitraria , de acuerdo con la respuesta de impulso del circuito) y en Control Automático .

Los fundamentos teóricos de los métodos de solución utilizados se presentan en los apéndices que complementan el material tratado en los diferentes capítulos .

Al menos parcialmente el presente trabajo representa la síntesis de algunas experiencias didácticas con los cursos que he impartido en la E.S.I.M.E..

Capítulo 1

Conocimientos Básicos.

Elementos Básicos que intervienen en circuitos eléctricos .En circuitos eléctricos podemos considerar cinco elementos básicos , en la siguiente tabla I, daremos estos elementos , así como los símbolos y unidades usuales para representarlos.

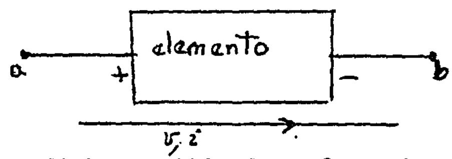
Nombre	Símbolo	Notación	Unidades	Inverso	Unidades del Inverso	Nombre del Inverso
Resistor		R	Ω (ohms)	Si $R \neq 0 \Rightarrow G = \frac{1}{R}$	$\mho$ (mhos)	conductancia
Capacitor		C	Fd (faradios)	si $C \neq 0 \Rightarrow S = \frac{1}{C}$	darafs	elastancia
Bobina		L	Hy (Henrios)	Si $L \neq 0 \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{L}$	Yrnehs	invertancia
Fuente de Voltaje		fv.	voltios			
Fuente de Corriente		fc.	amperios			

Tabla I. Elementos Básicos de Circuitos

La teoría de circuitos eléctricos se basa en el estudio de dichos elementos y sus interconecciones .Cualquier otro elemento , como "elemento de circuito " , puede representarse mediante un circuito equivalente constituido por elementos básicos .

Por convencionalismo se considera que la corriente fluye de un potencial mayor a un potencial menor y que la caída de voltaje es en el mismo sentido , por lo tanto una subida de voltaje será cuando la corriente fluye de un potencial menor a un potencial mayor.

Sentido asociado a un elemento .Cada elemento básico lo podemos considerar como un cajón de dos terminales al que se asocia arbitrariamente un sentido de referencia , representado mediante una flecha , para denotar su caída de voltaje y corriente .



Para dicho sentido de referencia , un valor positivo de la corriente en cierto instante significa que hay una razón positiva del fluido de cargas positivas de "a" hacia "b" .Por otra parte un valor positivo de la caída de voltaje significa que el potencial del punto "a" es mayor que el potencial del punto "b" , o sea que en efecto hay una caída de potencial o de voltaje a través del elemento.

En un circuito eléctrico constituido por varios elementos no es posible en ocasiones predecir con certeza cual será el sentido de la corriente y el voltaje en cada elemento del circuito .Por ello se le asigna arbitrariamente a cada elemento un sentido de referencia , y después al resolver el circuito * pueden encontrarse valores positivos

---

* Por resolver un circuito entenderemos encontrar las corrientes y voltajes en todos los elementos del circuito.

para el voltaje y la corriente , lo cual querría decir que el sentido asociado coincide con el sentido real , mientras que si se encuentran valores negativos para el voltaje y la corriente en cierto elemento , entonces el sentido real en este elemento es opuesto al asignado .

Los elementos básicos se pueden clasificar en dos grupos :
Elementos activos; funte de voltaje, fuonte de corriente.
Elementos pasivos ; resistor , capacitor y bobina.

Los elementos activos se caracterizan porque producen energía en el circuito a que se conectan .La fuente de corriente proporciona energía con una corriente específica $i(t)$ a través de las terminales .La fuente de voltaje proporciona energía con un voltaje terminal específico $v(t)$ que es independiente de la corriente de la fuente .

Los elementos pasivos requieren excitación para manifestar sus propiedades y se considerarán con parámetros constantes , entonces las ecuaciones diferenciales que definen a los elementos son lineales y se dice que el cicuito es lineal.

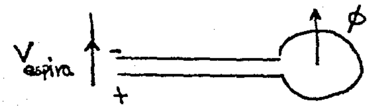
Las relaciones de voltaje-corriente para los parámetros de capacitancia ,resistencia e inductancia están dados en la tabla II.

Parámetro	Relación Básica	Relaciones voltaje-corriente
R	$v = R\,i$ *	$v_R = R\,i_R \quad i_R = G\,v_R$
L	$\Psi = L\,i$	$v_L = L\frac{di_L}{dt} \quad i_L = \Gamma\int_{-\infty}^{t} v_L\,dt$
C	$q = C\,v$	$v_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C\,dt \quad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

Tabla II . Relaciones voltaje-corriente

Acoplamiento de Bobinas .La ley de inducción de Faraday establecida para una espira la cuál es atravesada por un flujo magnético dice :"la fuerza electromotríz (f.e.m.) inducida en la espira es igual a la derivada, cambiada de signo del flujo magnético que la atraviesa".

$$V_{espira} = f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt}$$



Una espira atravesada por un flujo magnético ϕ

Una bobina es un conjunto de N espiras ,considerándose cada espira como una vuelta completa , por ello se simboliza ,el voltaje inducido en la bobina será

$$V = N\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(N\phi) \tag{1}$$

si $N\phi = \Psi$

---

* En este trabajo consideraremos que tal relación es cierta, es decir, el caso lineal.

$$V = \frac{d\Psi}{dt}$$; Ψ es función de la corriente y del tiempo

$$\Psi = \Psi(i, t) \qquad t \to i(t) \to \Psi$$

$$V = \frac{d\Psi}{di}\,\frac{di}{dt} \tag{2}$$

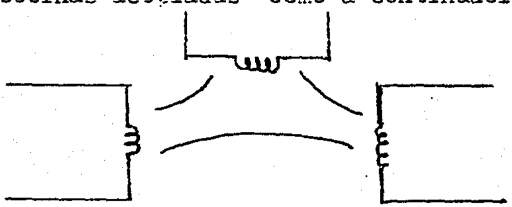
donde $\frac{d\Psi}{di}$ que es la variación del flujo magnético respecto a la corriente, es una constante para cada bobina , se le denomina "inductancia" denotada por L

$$L = \frac{d\Psi}{di} = N\,\frac{d\phi}{di}$$

sustituyendo en la ecuación (2) , tenemos

$$V = L\,\frac{di}{dt}$$

Dadas las propiedades de inducción magnética de las bobinas , en la práctica en muchas ocasiones no se les encuentra aisladas dentro de un circuito , sino que están acopladas magnéticamente con otras, formando todas ellas un sistema de bobinas acopladas magnéticamente .Los acoplamientos magnéticos se indican simbólicamente mediante lazos entre las bobinas acopladas como a continuación se muestra.



Las inductancias mutuas se denotan por L ;la inductancia mutua entre dos bobinas k y l es una constante -

que mide la variación de flujo magnético en la bobina k debida a la corriente aplicada a la bobina l.

Los voltajes en función de las corrientes para un sistema de N bobinas acopladas magnéticamente están dadas por

$$V_K = \sum_{l=1}^{N} L_{Kl} \frac{di_l}{dt} \qquad K = 1, 2, \ldots, N$$

Un circuito eléctrico o red eléctrica es cualquier interconección de elementos básicos , en los que se cumplen las leyes de Kirchhoff en todo instante (excepto en ciertos casos en el instante de un cambio de estado con condiciones iniciales).

Elemento General Tipo Serie. Si interconectamos los elementos básicos uno a continuación de otro , podemos formar un arreglo como el de la fig.4 , al que se denomina "elemento general tipo serie ", en el que se cumple :

1°) Como consecuencia de aplicar la ley de Kirchhoff de corrientes (LKI) ,la cuál dice "La suma algebraica de las corrientes que salen (o que entran)en un punto de unión de elementos básicos (llamado nodo) es igual a cero en todo instante " , la corriente en todos los elementos básicos de la agrupación es la misma, es decir,

$$i = i_R = i_C = i_L = i_{fv} = i_{fc}$$

2°) Como consecuencia de aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes (LKV) que dice "La suma algebraica de las caídas de voltaje (o de las subidas) tomadas en una trayectoria cerra da formada por elementos básicos y recorrida en cierto sentido (llamada malla), es igual a cero en todo instante", la caída de voltaje entre los extremos del elemento general será igual a la suma de las caídas de voltaje de los elementos básicos que lo constituyen. O sea

$$V = V_R + V_C + V_L - a - d$$

los voltajes de las fuentes tienen asociado un signo menos, debido a que no producen una caída de voltaje en el sentido asociado , sino una subida de voltaje , donde
e : representa la subida de voltaje en la fuente de voltaje,
d : representa la subida de voltaje en la fuente de corriente.

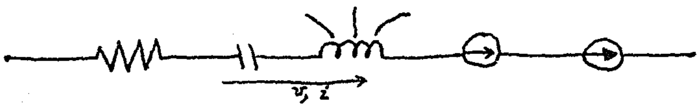


figura 4. Elemento General Tipo Serie.

Si existen acoplamientos magnéticos en la bobina del elemento general tipo serie , con las bobinas de otros elementos generales , la expresión anterior queda como

$$V_k = R_k i_k + S_k \int i_k(t)dt + \sum_{l=1}^{\lambda} L_{kl} \frac{di_l}{dt} - a_k - d_k \quad \text{para } k=1,2,\ldots,\lambda$$

donde λ es el número de elementos generales tipo serie en el circuito .Ejemplos de circuitos tipo serie en los cuales se aplica la LKV se verán en el Capítulo III .

Si interconectamos los elementos básicos entre dos puntos comunes podemos formar un arreglo como el de la fig. 5 , que se llama"elemento general tipo paralelo",en el que se cumple :

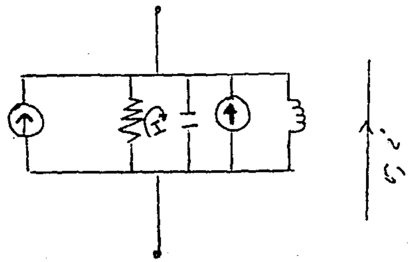


Figura 5 .Elemento General Tipo Paralelo.

1°) Al aplicar LKV a las mallas internas , la caída de voltaje es la misma en todos los elementos básicos de la agrupación esto es porque el elemento general tipo paralelo se le ha asignado un sentido para la corriente y voltaje .Si consideramos la malla interna I de la figura 5 , por LKV tenemos que en esa malla $V_R - V_c = 0 \Rightarrow V_R = V_C$, haciendo lo mismo para cada una de las otras mallas tenemos que

$$V = V_R = V_C = V_L = -a = -d$$

2°) Al palicar LKI al elemento general tipo paralelo , la corriente que entra y sale del elemento general será igual a la suma de las corrientes de los elementos básicos que lo forman .

$$i = i_R + i_C + i_L + i_{f.e.} + i_{f.v.}$$

Con el fin de obtener un sistema de ecuaciones requerido para resolver un circuito debemos definir los siguientes conceptos :

1. Un elemento general cualquiera , ya sea tipo serie ó tipo paralelo , puede representarse mediante un segmento orientado arbitrariamente en cuyos extremos hay dos puntos denominados nodos .
2. Como los elementos pueden estar interconectados entre sí, en un nodo pueden incidir varios elementos .Por tanto un "nodo" es la terminal común de uno ó varios elementos generales.
3. Los elementos pueden conectarse unos a continuación de otros , pudiendo formar trayectorias cerradas .
4. Una malla es una trayectoria cerrada arbitraria formada por elementos , la cuál al recorrerla en cierto sentido , no pasamos dos veces por el mismo elemento , no existen tres elementos de la secuencia que incidan en el mismo nodo.
5. El sentido de la malla es el orden que se sigue al recorrerla .
6. Al representar los elementos de la red* mediante segmentos orientados , obtenemos la llamada gráfica de la red.
7. Dos nodos son mutuamente accesibles cuando partiendo de uno de ellos ,se puede llegar al otro siguiendo una trayectoria formada por elementos .
8. Una parte conexa de un circuito es aquella en la que todos sus nodos son mutuamente accesibles .
9. Una parte conexa máxima se denomina componente.
10. Un elemento esencial es aquel que al quitarlo del circuito , lo reduce en una malla y no rompe a la componente en dos partes .
11. Un árbol es una gráfica que no tiene mallas.
12. El número de incidencia del elemento k respecto al nodo

---

* red es equivalente de circuito .

n , denotado por (k,n) se define como:

(k,n)= +1   si el elemento k tiene una sola terminal en el nodo n , y está orientado de tal forma que sale del nodo n.

(k,n) = -1   si el elemento k tiene una sola terminal en el nodo n , y está orientado de tal forma que llega al nodo n.

(k,n) = 0   en cualquier otro caso.

13. El número de incidencia del elemento k respecto a la malla m, denotado por [k,m], se define como:

[k,m] =+1   si el elemento k pertenece a la malla m y está orientado de tal forma que su sentido coincide con el de la malla.

[k,m] =-1   si el elemento k pertenece a la malla m , y está orientado de tal forma que su sentido es opuesto al de la malla.

[k,m] =0   en cualquier otro caso.

Para un circuito en el que hay ν nodos en c componentes , se establece lo siguiente.

14. En el circuito habrá $\nu - c$ nodos independientes .

15. En cada componente se elimina un nodo , a los cuales se llama nodo de referencia y se denotarán por : o_1 , o_2 , ... o_c .

16. El resto de los nodos serán independientes y se numeran.

17. Para cada nodo independiente se escribe una ecuación de LKI.

18. El número de mallas independientes denotado por μ en un circuito con λ elementos en c componentes , con $r-c$ nodos independientes es

$$\mu = \lambda - (r-c) .$$

Un método para elegir un conjunto de mallas independientes es el siguiente:

a) Se elige de la gráfica una malla y se escribe su ecuación LKV.

b)Se quita de tal malla un elemento esencial .

c)de la gráfica reducida ,se elige una malla y se escribe su ecuación LKV.

d)Se quita de tal malla un elemento esencial.

e)Se repite el procedimiento hasta obtener un árbol.

Una vez definidos los conceptos necesarios daremos el procedimiento para obtener el sistema de ecuaciones de un circuito.

I. Se agrupan los elementos básicos en elementos generales tipo serie ó tipo paralelo , según convenga .Se numeran y orientan.

II.Se deduce el número de nodos y mallas independientes .

III.Se escriben las ecuaciones de los elementos.

IV.Se dibuja la gráfica de la red.
V. Se escriben las ecuaciones LKI aplicadas a los nodos independientes .
VI.Se escriben las ecuaciones LKV aplicadas a las mallas independientes siguiendo el procedimiento descrito en el número 18.

Una vez escrito el sistema de ecuaciones se procede a resolverlo , a fin de obtener todos los voltajes y corrientes .Si se trata de resolverlo directamente en el dominio del tiempo , pueden hacerse derivaciones a fin de obtener ecuaciones diferenciales en lugar de ecuaciones integro-diferenciales.

Capítulo 2

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se encuentran entre otros en la aplicación de las leyes de Kirchhoff ,(LKV, LKI),a los circuitos eléctricos .En este capítulo se tratará la situación más simple , aquella en la cual los circuitos están formados por elementos que sólo - contienen resistencias y un capacitor o resistencias y un inductor .

Partiremos del circuito de la figura 2 , para el cual se desea determinar la corriente $i(t)$ en la resistencia R_1 .

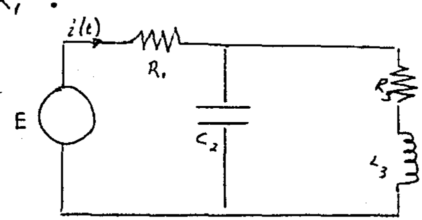
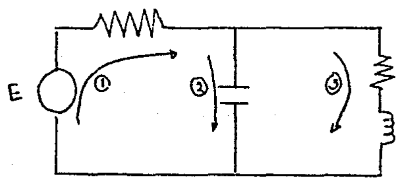


Figura 2 . Circuito de dos mallas.

Siguiendo el procedimiento dado en el capítulo anterior obtendremos el sistema de ecuaciones que describen el circuito mencionado .

I. Agrupamos los elementos , en este caso , los consideraremos tipo serie , ya que los elementos básicos están conectados uno a continuación del otro .

Si los elementos básicos fueran conectados a un mismo par de nodos , la agrupación se consideraría tipo paralelo .



numeramos los elementos y los orientamos .

II. número de componentes :

$c = 1.$

Número de elementos : $\lambda = 3$

Número total de nodos : $\nu = 2$

Número de nodos independientes : $\nu - c = 1$

Número de mallas independientes : $\lambda - (\nu - c) = 2$

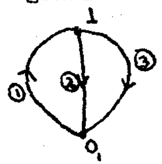
III. Escribimos las ecuaciones de los elementos

$$v_1(t) = R_1\, i_1(t) - E$$

$$v_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t)\, dt$$

$$v_3(t) = R_3\, i_3(t) + L_3 \frac{di_3}{dt}$$

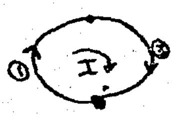
IV. Dibujamos la gráfica de la red.

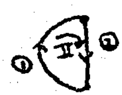


V. Como solo hay un nodo independiente, se selecciona cualquiera de los dos, que aparecen en la gráfica, seleccionamos el nodo de arriba para aplicar LKI, tenemos ;para tal nodo

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

VI. Escribimos LKV para las dos mallas independientes





para la malla I $\quad v_1 + V_3 = 0$

para la malla II $\quad v_2 + v_1 = 0$

Sustituyendo las ecuaciones que aparecen en el punto III , en las ecuaciones del punto VI ,tenemos

$$\begin{aligned} R_1 i_1(t) + R_3 i_3(t) + L_3 \frac{di_3(t)}{dt} &= E \\ R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt &= E \end{aligned} \qquad (A)$$

Derivando la segunda ecuación del sistema (A) obtenemos

$$\begin{aligned} R_1 i_1(t) + R_3 i_3(t) + L_3 \frac{di_3}{dt} &= E \\ R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2(t) &= \frac{dE}{dt} \end{aligned} \qquad (B)$$

ordenando el sistema (B) ,tenemos

$$\begin{aligned} \frac{di_3(t)}{dt} &= -\frac{R_1}{L_3} i_1(t) - \frac{R_3}{L_3} i_3(t) + \frac{E}{L_3} \\ \frac{di_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{C_2 R_1} i_2(t) + \frac{1}{R_1}\frac{dE}{dt} \end{aligned} \qquad (C)$$

de la LKI tenemos para $i_2(t) = i_1(t) - i_3(t)$ que al sustituirla en el sistema (C) , éste se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{di_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{C_2 R_1} i_1(t) + \frac{1}{C_2 R_1} i_3(t) + \frac{1}{R_1}\frac{dE}{dt} \\ \frac{di_3(t)}{dt} &= -\frac{R_1}{L_3} i_1(t) - \frac{R_3}{L_3} i_3(t) + \frac{E}{L_3} \end{aligned} \qquad (D)$$

que podemos expresar como ;

$$I' = A\,I + B \qquad (E)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_2 R_1} & \frac{1}{C_2 R_1} \\ -\frac{R_1}{L_3} & \frac{-R_3}{L_3} \end{pmatrix} , \quad I = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix}$$

Donde A es una matríz constante de 2x2 debido a que en este caso sunonemos los parámetros constantes bajo variaciones de corriente y de carga .

La ley de Ohm que gobierna la relación entre el voltaje y la corriente a través de un resistor , es una relación lineal debido a que el voltaje a través de un resistor es proporcional- (linealmente) a la corriente a través de éste; aunque la relación lineal no es aplicable bajo todas las condiciones .Por ejemplo , cuando la corriente en un resistor es grandemente incrementada , el valor de su -resistencia será incrementado debido al calor desarrollado en el resistor , la cantidad de incremento depende de -la magnitud de la corriente ; y no es correcto decir que el voltaje a través del resistor sostiene una relación lineal con la corriente a través de éste.

Ahora B debe escribirse de acuerdo a quien sea la fuente de excitación ; que generalmente es alguna fun - ción de la forma

$$\epsilon(t) = \begin{cases} a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = P_n(t) \\ e^{at} P_n(t) \\ e^{at} [P_n(t) \cos \omega t + Q_n(t) \sin \omega t] \\ u(t) \quad ** \\ \delta(t) \end{cases}$$

Para resolver el sistema (E) se considera primero la ecuación homogénea

$$I' = A I \tag{F}$$

que se obtiene de la ecuación (E) haciendo $B = 0$.

La solución del sistema (F) se obtiene encontrando primero los valores propios y vectores propios de A; para resolver el caso no homogéneo (ecuación (E)) puede usarse el método de variación de parámetros o el método de coeficientes indeterminados .Sin embargo este método no considera la posibilidad de manejar algunas funciones de excitación , como el impulso unitario , muy empleado en análisis de circuitos . En tal caso la solución depende de quien sea la fuente de excitación .

Una forma alternativa de solución del problema anterior es el método de transformada de Laplace * que consiste en lo siguiente : al plantear las ecuaciones que describen un circuito dado , en general se obtiene como en este caso , (sistema A) , sistemas de ecuaciones integro-diferenciales , si a cada una de ellas aplicamos transformada de Laplace entonces obtenemos un sistema de ecuaciones

---

* La forma de hacerlo se verá en el siguiente capítulo.

** Funciones escalón unitario e impulso unitario definidas en el siguiente capítulo.

algebraicas que una vez resuelto para cada una de las transformadas de las funciones desconocidas , se aplica transformada inversa para hallar la solución deseada .

Con base en las experiencias didácticas con los alumnos de la E.S.I.M.E. y con las experiencias que los mismos alumnos me han reportado de sus cursos de Teoría de de los Circuitos , el método más apropiado para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales es el de Transformada de Laplace .La razón de lo anterior pudiera deberse a que desde el punto de vista didáctico , los parámetros en los circuitos no corresponden a situaciones reales , ya que el objetivo es que el alumno aprenda a manejar los circuitos .

Para ejemplificar el uso de este método , daremos el siguiente problema cuyo modelo matemático puede considerarse como una muestra de los sistemas que aparecen en circuitos que son susceptibles de ser resueltos , determinando los valores y vectores propios de la matríz de coeficientes constantes del sistema.

Problema . (M.E. VAN VALKENBURG) 3 .

El doctor L.A. Woodburry de la escuela de medicina de la Universidad de Utah utilizó una analogia eléctrica en el estudio de las convulciones .En el circuito que se muestra en la figura 2.1 , las siguientes cantidades son duales :

C_1 :representa el volúmen del fluido que contiene drogas,

R_1 :es la "resistencia" al paso de la droga del estómago al torrente sanguíneo ,

C_2: representa el volúmen del torrente sanguíneo ,

es equivalente al mecanismo de excreción del cuerpo(el riñón , etc.),

V_0: la concentración de dosis de droga ,

$V_a(t)$: es el equivalente a la cantidad de droga en el torrente sanguíneo.

si las constantes tienen los siguientes valores :

$C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 8\mu F$, $R_1 = 9 M\Omega$ y $R_2 = 5 M\Omega$

si $V_0 = 100$ v y el interruptor se cierra para t=0 , encuentre la concentración de droga en el torrente sanguíneo en función del tiempo .

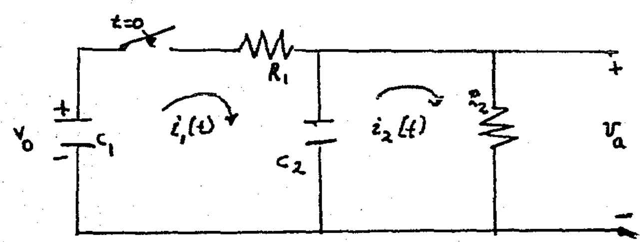


Figura 2.1 Circuito del problema de la concentración de droga en el torrente sanguíneo .

Solución : $v_a(t)$ está dado por : $v_a(t) = R_2\, i_2'(t)$ (0)

para hallar $i_2(t)$, aplicamos LKV a las mallas del circuito , obteniéndose

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{C_1}\int i_1(t)\,dt + R_1\, i_1(t) + \frac{1}{C_2}\int [\, i_1(t) - i_2(t)]\,dt = 0 \\
&\frac{1}{C_2}\int [\, i_2(t) - i_1(t)]\,dt + R_2\, i_2(t) = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

derivando cada una de las ecuaciones del sistema (1)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{C_1}\, i_1(t) + R_1\,\frac{d i_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_2}\,[\, i_1(t) - i_2(t)] = 0 \\
&\frac{1}{C_2}\,[\, i_2(t) - i_1(t)] + R_2\,\frac{d i_2(t)}{dt} = 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

reordenando el sistema (2) , tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d i_1(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2}\right) i_1(t) + \frac{1}{R_1 C_2}\, i_2(t) \\
&\frac{d i_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2}\, i_1(t) - \frac{1}{R_2 C_2}\, i_2(t)
\end{aligned}
\qquad (2a)
$$

sustituyendo valores, tenemos:

$$I' = A\, I \qquad (3)$$

con $A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{72} & \frac{1}{72} \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{40} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$

Buscamos soluciones del sistema dado en (1) .Lo haremos proponiendo soluciones no triviales de la forma

$$i_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda t}$$
$$i_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda t}$$

donde α_1, α_2 y λ son constantes .Si hacemos

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

se ve que la forma vectorial de la solución deseada es

$$I = \alpha e^{\lambda t} \qquad (4)$$

donde α es un vector constante $\neq 0$ y λ un número , susceptible de ser determinado .
sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (3) tenemos

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{72} & \frac{1}{72} \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

para obtener

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{72} - \lambda & \frac{1}{72} \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{40} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

obtenemos la ecuación característica de la ecuación (5) dada por

$$\lambda^2 - \frac{432}{2880} \lambda + \frac{8}{2880} = 0$$

de donde $\lambda_1 = -.021$ y $\lambda_2 = -.128$
al sustituir el valor característico λ_1 en la ecuación (5), tenemos

$$\begin{pmatrix} -.125 + .0216 & .0138 \\ .025 & -.025 + .0216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde al resolverlo se reduce a una ecuación

$$-.1033\,\alpha_1 + .0138\,\alpha_2 = 0$$

si $\alpha_2 = 1 \Longrightarrow \alpha_1 = .134$ con lo que

$$\alpha = \begin{pmatrix} .1343 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es el vector propio correspondiente al valor propio λ_1
Para el valor característico λ_2 tenemos

$$\begin{pmatrix} -.125 + .128 & .0138 \\ .025 & -.025 + .128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$.0033\,\alpha_1 + .0138\,\alpha_2 = 0$$
$$.025\,\alpha_1 + .1033\,\alpha_2 = 0$$

este sistema se reduce a la ecuación

$$.025\alpha_1 + .1033\alpha_2 = 0$$

si $\alpha_2 = 1 \Longrightarrow \alpha_1 = -4.13$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -4.13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es el vector propio correspondiente al valor propio λ_2

las soluciones correspondientes a la ecuación diferencial son :

$$\alpha^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} .1343 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-.021t} , \quad \alpha^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -4.13 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-.128t}$$

donde , el wronskiano de $\alpha^{(1)}(t)$ y $\alpha^{(2)}(t)$

$$W\left(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\right) = 4.268\, e^{-.149t}$$

que núnca es cero .En consecuencia , las soluciones $\alpha^{(1)}$ y $\alpha^{(2)}$ forman un conjunto fundamental y la solución general del sistema (2a) es:

$$i(t) = c_1 \begin{pmatrix} .134 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-.021t} + c_2 \begin{pmatrix} -4.1343 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-.128t} \qquad (6)$$

para hallar el valor de las constantes c_1 y c_2 , aplicamos las condiciones iniciales en t=0+ que son:

$$i_1(0+) = \frac{V_a}{R_1} = \frac{100}{9 \times 10^6} = 1.111 \times 10^{-5} \qquad (7)$$

$$i_2(0+) = 0 \qquad (8)$$

sustituyendo las condiciones iniciales (7) y (8) en (6) ,tenemos :

$$.134\, c_1 - 4.134\, c_2 = 1.111 \times 10^{-5}$$
$$c_1 + c_2 = 0$$

equivalente a

$$.134\, c_1 - 4.134 c_2 = 1.111 \times 10^{-5}$$
$$4.134 c_1 + 4.134\, c_2 = 0$$
$$4.268\, c_1 = 1.111 \times 10^{-5} \Rightarrow$$

$$c_1 = +2.6 \times 10^{-6}$$

con lo cual $c_2 = -2.6 \times 10^{-6}$

sustituyendo c_1 y c_2 en la ecuación (6) tenemos que

$$i_2(t) = (2.6 \times 10^{-6})\, e^{-.021 t} - (2.6 \times 10^{-6})\, e^{-.128 t}$$

sustituyendo en la ecuación (a) tenemos

$$v_a(t) = (5 \times 10^{6})(2.6 \times 10^{-6}) \left[e^{-.021 t} - e^{-.128 t} \right]$$
$$= 13 \left(e^{-.021 t} - e^{-.128 t} \right)$$

$v_a(t)$ nos proporciona la concentración de droga en el torrente sanguíneo en función del tiempo, su gráfica aparece en la figura 2.2 .

La función $e^{-.021 t}$ decrece de tal manera que cuando $t = 4 \frac{(1000)}{21}$ * se ha extinguido .A éste término se le considera como transitorio , ya que tiende a cero cuando t crece.

---

* **Definimos la constante de tiempo , denotada por T , como el valor del tiempo para el cual la respuesta es 1/e , de su valor inicial ; este concepto es muy útil para precisar la duración del transitorio producido.Después de 4T el tran**

También $e^{-.128t}$ es un término transitorio, ya que decrece cuando t aumenta, en éste caso para $t=4\left(\frac{1000}{128}\right)$ este término se ha extinguido ; con lo que concluimos que - la concentración de droga en el torrente sanguineo se extingue con el tiempo .Existe un valor del tiempo para el cuál la cantidad de droga en el torrente sanguineo , es máxima.

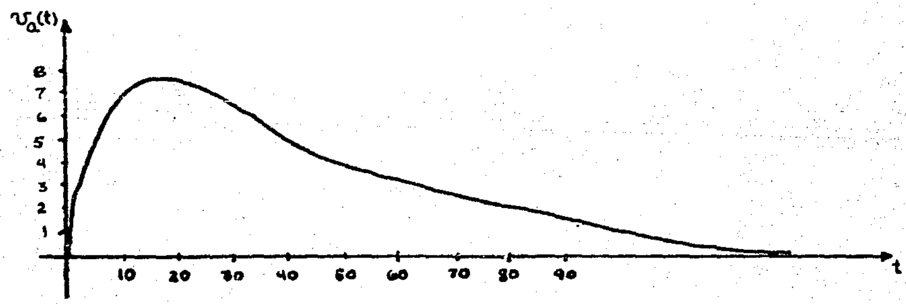
Para hallar el instante en el que el valor de con - centración de droga en el torrente sanguíneo es máxima ,obtenemos la derivada de $V_a(t)$ e igualando a cero obtenemos el valor del tiempo de máxima concentración de droga.

$$V_a'(t)= -.273e^{-\frac{21}{1000}t}+1.664e^{-\frac{128}{1000}t}=0 \Longrightarrow$$

$$t=16.82$$

donde el valor de máxima concentración es

$$V_a(16.82)=7.70 .$$



Gráfica de la concentración de droga $V_a(t)$ del problema 1.

sitorio se ha extinguido.

Capítulo 3

Transformada de Laplace

En este capítulo se aplicará un concepto que es especialmente útil en la solución de problemas de valor inicial, este concepto es la transformada de Laplace, que transforma una función f de variable real t en una función F de variable s (pudiendo ser s compleja). Al aplicar transformada a un problema de valor inicial que consta de una ecuación diferencial con coeficientes constantes que contiene una función desconocida de variable t, la transformada de Laplace convierte el problema de valor inicial dado en un problema algebraico que contiene la variable s; una vez resuelto el problema algebraico para la función transformada de la función desconocida, se aplica transformada inversa para hallar la función desconocida de variable t.

Un sistema es un conjunto de elementos relacionados entre sí con un propósito definido.

El sistema es físico cuando los elementos que lo forman son materiales y su comportamiento se puede predecir por medio de leyes físicas.

Tomemos como punto de partida un sistema físico.

Modelo Cero

Consideremos el sistema mecánico cuyo diagrama funcional , está dado en la figura 1.El resorte,está caracterizado por el coeficiente de rigidez k , fijo al techo y solo puede moverse en la dirección vertical , lo cual se_logra gracias al sistema de rodillos que corren en las paredes y que en este caso será considerado sin fricción .

Supongamos que una masa m_1 está sujeta al resorte de la figura 1 , cuando m_1 se remplaza por una masa diferente m_2 , el alargamiento del resorte será por supuesto,diferente .

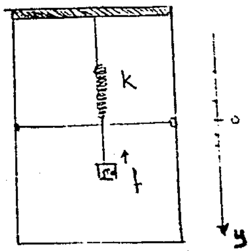


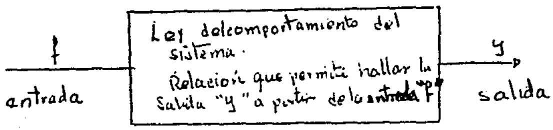
figura 1. Del modelo cero

Por la ley de Hooke , el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución f opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional al alargamiento total y .Dicho simplemente $f = ky$.

Aunque masas de distinto peso producen distintos alargamientos del resorte , éste está esencialmente caracterizado por el número k .Por ejemplo si una masa que pe sa 5 lb. alarga el resorte 1/4 pie , entonces $5\,lb = k(\frac{1}{4}\,pie)$

$\Rightarrow$ $k = 20\frac{lb}{pie}$. Luego , necesariamente una masa que pesa 7 lb. alarga el mismo resorte en 7/20pie.

Esquemáticamente tenemos el siguiente sistema

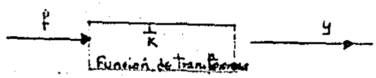


La relación entre la fuerza de restitución y el alargamiento está dada por la ley de Hooke

$$f = ky$$

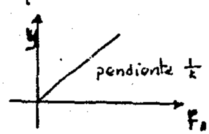
$y = [\frac{1}{k}]\,f$ aquí el corchete actúa como una multiplicación , las propiedades del sistema quedan caracterizadas por el parámetro k.

o sea



si en particualar $f = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ f_1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

entonces $\frac{y}{f} = \frac{1}{k}$



Espacio fase f_1 vs y característica de la amplitud.

aquí y reproduce f , luego y depende sólo de f y explícitamente no depende del tiempo.Tales sistemas quedan des - critos por ecuaciones algebraicas y son llamados Sistemas de Orden Cero.

Modelo Uno

Supongamos el mismo esquema que el modelo cero , - pero ahora admitamos que el sistema de rodillos tenga una - cierta fricción , con lo cual tendremos que al moverse el re sorte la contracción sería la suma de dos fuerzas :la de re sistencia del resorte $f_{resist.}$ y la de la fricción de los ro- dillos $f_{fricc.}$, es decir

$$f_{fricc.} + f_{resist.} = f \qquad (1)$$

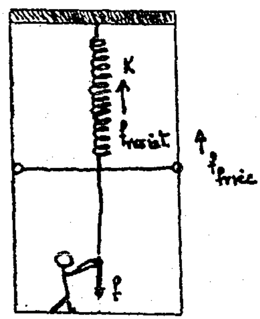


Figura 2. Del modelo uno.

pero empíricamente se sabe que la f_{fricc} es proporcional a la velocidad de movimiento, o sea que $f_{fricc.} = R\,v = R\,\frac{dy}{dt}$. Por lo tanto la ecuación de donde habría ahora que determi - narse la ley del comportamiento del sistema es (figura 2):

$$R \frac{dy}{dt} + k y = f \qquad (2)$$

Ahora las propiedades del sistema se caracterizan por los parámetros R y K y pasamos al mundo de las ecuaciones diferenciales .En éste caso el sistema queda caracterizado por una ecuación diferencial de primer orden ,por lo que a tales sistemas se les conoce como Sistemas de Primer Orden.

Como obtener la solución de (2) es un problema de los métodos propios de solución de ecuaciones diferenciales , aquí lo que nos interesa ver es la posibilidad de hacer una cosa similar a la hecha en los Sistemas de Orden Cero que nos sirva de motivación a las técnicas de Transformada de Laplace, por lo cual denotamos por el símbolo

$$s(y) = \frac{dy}{dt}$$

pues entonces la ecuación (2) se reduce a

$$(R s + k) y = f$$

$$\left(\frac{R}{K} s + 1\right) y = \left[\frac{1}{k}\right] f$$

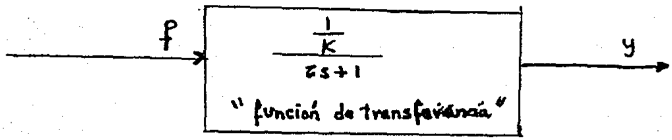
denotando por $\tau = \frac{R}{K}$

$$(\tau s + 1) y = \left[\frac{1}{k}\right] f$$

$$y = \left[\frac{\frac{1}{k}}{\tau s+1}\right] f$$

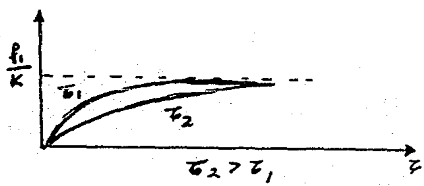
claro que el problema de la solución de (2) no se avanzó - pues **s** es un simple símbolo y ahora el corchete está - aplicado a **f** y no es una multiplicación.

Esquemáticamente tenemos el siguiente sistema



si ahora

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t < 0 \\ f_1 & , \text{ si } t \geq 0 \end{cases} \quad , \text{ entonces } \qquad y = \left[\frac{\frac{1}{K}}{\tau s+1}\right] f_1$$



o sea que ahora la respuesta **y** no es inmediata y ésta alcanza un valor estacionario $\frac{f_1}{K}$ con un cierto retardo en el tiempo.

Modelo Dos

Agreguemos al resorte con rodillos y fricción una masa M (figura 3)

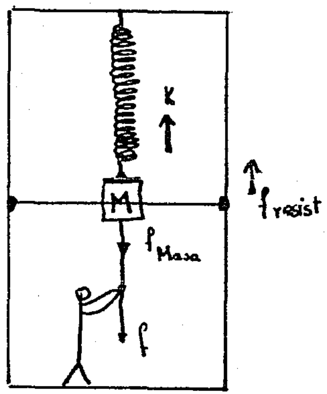


Figura 3. Del modelo dos

Ahora tendremos por la segunda ley de Newton, (fuerza = masa x aceleración)y por el modelo uno

$$f_{Masa} + f_{fricc.} + f_{resist.} = f$$

es decir

$$M\alpha + Rv + ky = f$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + R \frac{dy}{dt} + Ky = f \tag{3}$$

A los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de segundo orden se les llama Sistemas de Segundo Orden.

La ecuación (3) puede transformarse de manera que el sistema no dependa de los parámetros originales M, R y K, sino de la frecuencia angular propia ω y del coeficiente de amortiguamiento ξ,

$$\omega = \left(\frac{K}{M}\right)^{1/2} \qquad y \qquad \xi = \frac{R}{2(KM)^{1/2}}$$

obteniéndose

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega} \frac{dy}{dt} + y = \left[\frac{1}{K}\right] f \tag{4}$$

y si de nuevo introducimos las notaciones simbólicas del caso, a saber

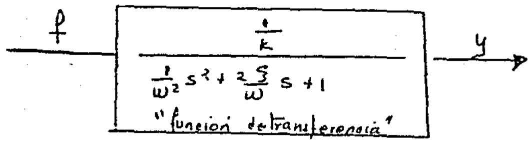
$$s(y) = \frac{dy}{dt} \qquad , \qquad s^2(y) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

entonces (5) toma la forma

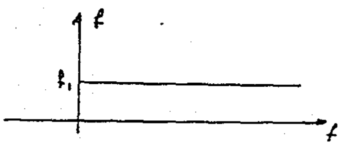
$$\left(\frac{1}{\omega^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega} s + 1\right) y = \left[\frac{1}{K}\right] f$$

$$y = \left[\frac{\frac{1}{K}}{\frac{1}{\omega^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega} s + 1} \right] f$$

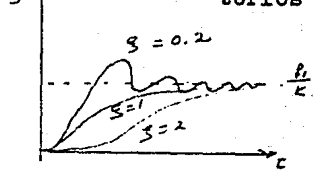
Y de nuevo esquemáticamente



Si en particular la fuerza esta dada por



genera incluso comportamientos oscilatorios



Modelo ene

El seguir agregando fuerzas propicia el surgimiento de ecuaciones diferenciales de ordenes superiores a dos, llamados sistemas de orden ene, pero si el sistema permanece lineal , si la parte izquierda depende linealmente de las funciones $(y, \dot{y}, \ddot{y}, .., y^{(n)})$, enton -

ces no importa que tan complicado sea, siempre es posible expresarlo como una combinación lineal de sistemas de primero y segundo orden .Por lo anterior no es necesario estudiar los sistemas de orden n en sí mismos , puesto que son reducibles a sistemas de los que ya mencionamos sus comportamientos principales .

Sistemas Análogos

Resulta que muchos sistemas de naturaleza muy diversa ,pueden ser expresados por el mismo modelo , o sea su planteamiento nos lleva a ecuaciones diferenciales del mismo tipo .A tales sistemas se les llama Sistemas Análogos. Por ejemplo hemos estado tratando con un ejemplo particular de sistema físico y sus modificaciones , pero si quisiéramos pasar a estudiar un circuito eléctrico tendríamos que empezar de nuevo y obtendríamos ecuaciones de tipos completamente análogas a las obtenidas en los sistemas anteriores .Agraciadamente resulta que no hay necesidad de empezar de nuevo pues llegaríamos a los mismos modelos .

Una explicación que subyace en todos aquellos sistemas que resultan ser análogos a uno dado ; consiste en que en todos ellos actúa una misma"unidad" energética .Resulta que la energía en cualquiera de tales sistemas puede ser expresada como un producto de dos factores : uno de los cuales describe la intensidad del gasto ó la acumulación de energía y el otro caracteriza los resultados cualitativos de éste proceso .En nuestro sistema físico analizado tendremos como primer factor aparece la fuerza f y como segundo factor el desplazamiento y .Para un circuito eléctrico las funciones análogas correspondientes son la fuerza electromotríz , (f.e.m.) , E y la carga eléctrica q.

Si como entrada del sistema mecánico analizado le aplicamos una cierta fuerza , entonces como salida ocurre un cierto desplazamiento , o sea que en el sistema en su conjunto - ocurre un cierto cambio en la posición de alguno(s) elemento(s) .Como resultado del movimiento ocurrido surgen fuerzas de reacción proporcionales al mismo desplazamiento en el resorte+ , a la velocidad del desplazamiento y a la aceleración de la masa respectivamente .En forma similar , si damos una f.e.m. como entrada en un sistema eléctrico entonces en dicho sistema ocurren cambios en la carga eléctrica del mismo . Como resultado de lo anterior aparecen f.e.m. de reacción , que para el capacitor es proporcional a la misma carga, para la resistencia proporcional a la velocidad de cambio de la carga (o sea a la intensidad de la corriente I) y para la bobina proporcional a la velocidad de cambio de la intensidad de la corriente (aceleración de la carga) .

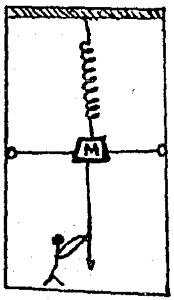
Para el sistema mecánico al aplicarle las leyes de Newton , igualamos las fuerzas exteriores aplicadas a la suma de fuerzas de reacción y análogamente para el sistema eléctrico aplicamos las leyes de Kirchhoff , las f.e.m. exte-

---

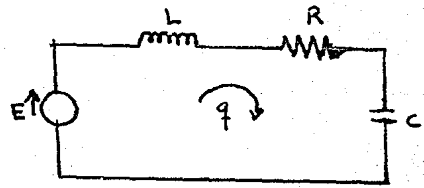
+ Esto es cierto para resortes que satisfacen la ley de Hooke.

riores se igualan a la suma de las diferencias de potencial (caidas de voltaje) en el circuito eléctrico .Ambos tipos de leyes son casos particulares de Principios de Equilibrio y continuidad más generales .Es por ésto que las ecuaciones que describen tales sistemas resultan ser las mismas en cuanto a su forma , aunque difieren los contenidos de sus variables y parámetros .

Resumiendo,el sistema análogo eléctrico al sistema mecánico



es



que representa un circuito RLC en serie , es decir formado por una bobina con inducción L , con una resistencia R y un condensador de capacidad C unidos sucesivamente. La señal de entrada de un tal cicuito lo forma una f.e.m. E y su salida lo constituye la carga q del condensador. El modelo de tal sistema se plantea con base en la Ley de Kir - chhoff de voltajes , a saber , la suma de las caidas de voltaje propiciadas por el inductor ,resistencia y capacitor es igual a la f.e.m. exterior, esto es

$$L \frac{d^2q}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = E \qquad (6)$$

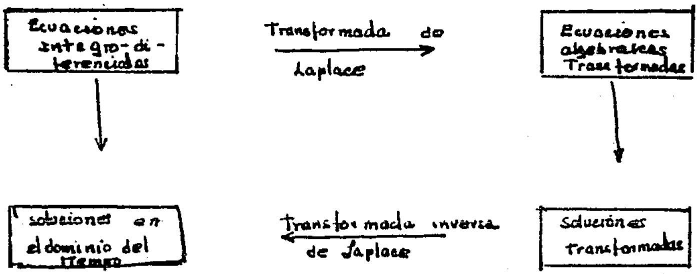
el análogo completo de la ecuación (3) para el sistema me - cánico analizado .

Tabla comparativa de los Sistemas Análogos Analizados.

Sistema Mecánico	Sistema Eléctrico	Sistema en general
fuerza : F	fuerza electromotriz : E	Indice de intensidad de almacenamiento o consumo de energía : P
desplazamiento : y	carga : q	Cantidad utilizada de energía : Q
energía : Fy	energía : Eq	energía : PQ
dureza (resorte): $K = \frac{F}{y}$	condensador	almacenador de energía potencial elasticidad : $\frac{P}{Q}$
masa de inercia $M = \frac{F}{\ddot{y}(t)}$	capacitancia : $C = \frac{q}{E}$	almacenador de energía cinética inercialidad $\equiv \frac{P}{\ddot{Q}(t)}$
	bobina inductancia: $L = \frac{E}{\ddot{q}(t)}$	movilidad $\equiv \frac{\ddot{Q}(t)}{P}$
		absorbedor de energía, resistividad $\equiv \frac{P}{\dot{Q}(t)}$
amortiguador, coeficiente de perdidas activas : $R = \frac{F}{\dot{y}}$	resistencia ómica, resistencia activa: $R = \frac{E}{\dot{q}}$	conductividad : $\frac{\dot{Q}}{P}$

Se usarán letras mayúsculas para denotar las transformadas de las funciones de variable real t y letras minúsculas para éstas.

En general el proceso consiste en lo siguiente



La idea central de la transformación será que operaciones complicadas para las funciones de variable t sean llevadas a operaciones más simples con sus transformadas funciones de s.

Los problemas que a continuación se presentan como se indicó en el capítulo I , son del tipo serie y para hallar el modelo matemático que describe su comportamiento es necesario aplicar LKV.

Los problemas que se tratarán aquí son casos particulares de un tipo especial de problemas que consisten de un circuito simple , que tienen como fuerza de excitación una función de naturaleza impulsiva , pudiendo presentarse este tipo de circuitos en los modernos aparatos electro-médicos. Para éste tipo especial de problemas es recomendable el método de Transformada de Laplace.

Problema 1. Para el circuito mostrado en la figura 3.1 el cual es excitado en t=0 por una fuente de voltaje , mostrada en la figura 3.2. .Obtenga la corriente que circula en el circuito , suponiendo que la corriente inicial es cero.

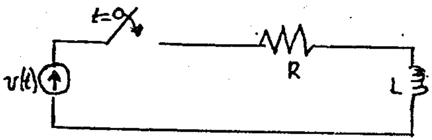


Figura 3.1 Circuito RL del Problema 1.

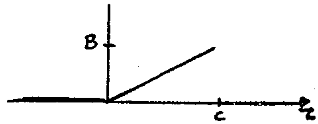


Figura 3.2 Voltaje aplicado en t=0 al circuito RL del problema 1.

La excitación está dada por la función $v(t) = \begin{cases} \frac{B}{c} t & \text{si } 0 \leq t < c \\ 0 & \text{si } c \leq t \end{cases}$

Aplicando LKV al circuito , tenemos

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = \begin{cases} \frac{B}{c} t & \text{si } 0 \leq t < c \\ 0 & \text{si } c \leq t \end{cases} \qquad (I)$$

con la condición inicial $i(0) = 0$

Procedemos a resolver la ecuación (I) para obtener la corriente .El método que usaremos para su solución es el de transformada de Laplace , ya que es el adecuado para resolver problemas con términos no homogéneos de naturaleza discontinua ó impulsiva, tales problemas son relativamente complicados de resolver por medio de los métodos tradicionales , los cuales comprenden la reunión de soluciones válidas en intervalos diferentes.

Antes de tomar la transformada de la ecuación - conviene escribir el término no homogéneo en forma adecuada para obtener fácilmente su transformada (ver apéndice de transformada de Laplace).

$$v(t) = \frac{B}{c}t - \frac{B}{a}t\,u(t-c)$$

$$v(t) = \frac{B}{c}t - \frac{B}{a}(t-c+c)\,u(t-c)$$

$$v(t) = \frac{B}{a}t - \frac{B}{a}(t-c)\,u(t-c) - B\,u(t-c)$$

tomando transformada de la ecuación I tenemos

$$L[s\,I(s) - i(o)] + R\,I(s) = \frac{B}{c}\frac{1}{s^2} - \frac{B}{a}\frac{e^{-cs}}{s^2} - \frac{B}{s}e^{-cs}$$

$$I(s) = \frac{B}{c}\frac{1}{s^2(Ls+R)} - \frac{B}{c}e^{-cs}\frac{1}{s^2[Ls+R]} - \frac{B\,e^{-cs}}{s[Ls+R]}$$

Hemos obtenido una expresión para la transformada de Laplace de la corriente , para determinar la función $i(t)$ debemos encontrar la función cuya transformada de Laplace es $I(s)$;ésto se conoce como el problema de inversión de la transformada de Laplace .Existe una fórmula general para la transformada inversa de Laplace , pero obtenerla de esa manera no simplifica la solución del problema .Dado que existe una correspondencia uno a uno entre las funciones y sus transformadas de Laplace , ya existen tablas (parecidas a las de integrales) ,llamada tabla de pares transformadas que contiene las transformadas de las funciones que aparecen con mayor frecuencia (ver apéndice de Transformada de Laplace)

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ I(s) \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{B}{LC} \frac{1}{s^2(s+\frac{R}{L})} \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{B}{CL} e^{-cs} \frac{1}{s^2(s+\frac{R}{L})} \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ Be^{-cs} \frac{1}{Ls(s+\frac{R}{L})} \right\}$$

Hallaremos la transformada inversa de cada sumando , desarrollandolos en fracciones parciales .Ver apéndice B, los teoremas de Heaviside.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{B}{LC} \frac{1}{s^2(s+\frac{R}{L})} \right\} = \frac{B}{LC} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{L}{R} \frac{1}{s^2} - \frac{L^2}{R^2} \frac{1}{s} + \frac{L^2}{R^2} \frac{1}{s+\frac{R}{L}} \right\}$$

$$= \frac{B}{CR} t - \frac{BL}{CR^2} + \frac{BL}{CR^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{B}{CL} e^{-cs} \frac{1}{s^2(s+\frac{R}{L})} \right\} = \frac{B}{CL} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{L}{R} \frac{1}{s^2} - \frac{L^2}{R^2} \frac{1}{s} + \frac{L^2}{R^2} \frac{1}{s+\frac{R}{L}} \right\}$$

$$= \left[\frac{B}{CR}(t-c) - \frac{BL}{CR^2} + \frac{BL}{CR^2} e^{-\frac{R}{L}(t-c)} \right] u(t-c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Be^{-cs}\frac{1}{Ls(s+\frac{R}{L})}\right\} = \frac{B}{L}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}\left(\frac{L}{R}\frac{1}{s} - \frac{L}{R}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)\right\}$$

$$= \left[\frac{B}{R} - \frac{B}{R}e^{-\frac{R}{L}(t-c)}\right]u(t-c)$$

de donde $i(t)$ es:

$$i(t) = \frac{B}{cR}t - \frac{BL}{cR^2} + \frac{BL}{R^2C}e^{-\frac{R}{L}t} - u(t-c)\left[\frac{B}{cR}(t-c) - \frac{BL}{cR^2} + \frac{BL}{cR^2}e^{-\frac{R}{L}(t-c)} + \frac{B}{R} - \frac{B}{R}e^{-\frac{R}{L}(t-c)}\right]$$

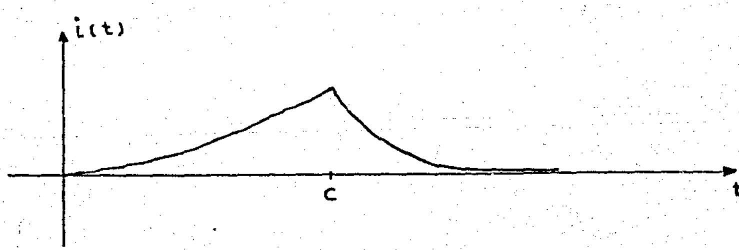
finalmente

$$i(t) = \begin{cases} \frac{B}{cR}t - \frac{BL}{cR^2} + \frac{BL}{R^2C}e^{-\frac{R}{L}t} & \text{si } 0 \le t < c \\ \frac{B}{cR}t - \frac{BL}{cR^2} + \frac{BL}{R^2C}e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{B}{cR}(t-c) + \frac{BL}{cR^2} - \frac{BL}{cR^2}e^{-\frac{R}{L}(t-c)} - \frac{B}{R} + \frac{B}{R}e^{-\frac{R}{L}(t-c)} & \text{si } c \le t \end{cases}$$

El problema con valor inicial que se acaba de resolver incluye una ecuación diferencial con un forzamiento que tiene discontinuidad por salto .Este problema no queda incluido en el teorema fundamental de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales de primer órden .

La corriente presenta discontinuidad , en los mismos puntos que la función de excitación

La gráfica de la solución de este problema se encuentra en la parte de abajo , donde podemos observar que aumenta a partir de cero , hasta alcanzar su máximo en el punto $t=c$,donde también la excitación alcanza su máximo, para después decrecer en forma exponencial.



Problema 2. Dado el circuito RC, para el cuál el interruptor se cierra para t=0 , con el capacitor sin carga alguna figura 3.3 , si se le aplica una excitación dada por un tren de pulsos cuya magnitud disminuye exponencialmente , tal excitación aparece en la figura 3.4 .

Encuentre la corriente del circuito , suponiendo que se encuentra desenergizado para $t<0$

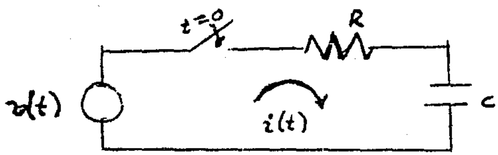


Figura 3.3 Circuito RC del problema 2.

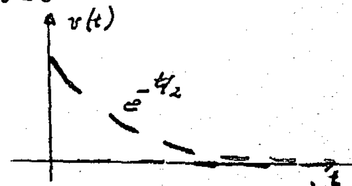


Figura 3.4 voltaje aplicado al circuito del problema 2.

$$v(t)=\begin{cases} e^{-t/2} & \text{si } 2n \le t < 2n+1 \\ 0 & \text{si } 2n+1 \le t < 2n+2 \end{cases}$$

Solución .Por LKV , tenemos para $t \geq 0$

$$R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = v(t)$$

aplicamos transformada de Laplace a la ecuación anterior

$$R\,I(s) + \frac{1}{cs}\,I(s) = V(s) \qquad II$$

donde $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$. Calculando $V(s)$ tenemos:

$$V(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, v(t)\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} e^{-st} e^{-t/2}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} e^{-(s+\frac{1}{2})t}\, dt$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\, e^{-(s+\frac{1}{2})t}\Big|_{2n}^{2n+1}$$

$$= -\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\left[\left(e^{-(s+\frac{1}{2})} - e^{0}\right) + \left(e^{-3(s+\frac{1}{2})} - e^{-2(s+\frac{1}{2})}\right) + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\left[1 - e^{-(s+\frac{1}{2})} + e^{-2(s+\frac{1}{2})} - e^{-3(s+\frac{1}{2})} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n(s+\frac{1}{2})}$$

$$\therefore\quad V(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}$$

sustituyendo V(s) en la ecuación II tenemos

$$R\,I(s) + \frac{1}{cs}\,I(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}$$

$$I(s) = \frac{1}{\left(R+\frac{1}{cR}\right)}\;\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}$$

$$I(s) = \frac{s}{R\left(s+\frac{1}{cR}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right)}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}$$

descomponiendo el primer factor en fracciones parciales y distribuyendo el producto

$$I(s) = \frac{-2}{RC-2}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}\right] + \frac{c}{RC-2}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}\right]$$

la transformada inversa del primer sumando la obtenemos a continuación

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{RC-2}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\;\frac{1}{1+e^{-(s+\frac{1}{2})}}\right]\right. = \frac{-2}{RC-2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\left[1-e^{-(s+\frac{1}{2})}+e^{-2(s+\frac{1}{2})}-\dots\right]\right.$$

$$= \frac{-2}{RC-2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{e^{-s}e^{-\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{e^{-2s}e^{-1}}{s+\frac{1}{RC}} - \dots\right\}$$

$$= \frac{-2}{RC-2}\left[e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{RC}(t-1)}u(t-1) + e^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{RC}(t-2)}u(t-2) - \dots\right]$$

$$= \frac{-2}{RC-2}\, e^{-\frac{1}{RC}t}\left[1 - e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)} u(t-1) + e^{\left(\frac{2}{RC}-\frac{2}{2}\right)} u(t-2) - e^{\left(\frac{3}{RC}-\frac{3}{2}\right)} u(t-3) + \cdots\right]$$

la transformada inversa del segundo sumando es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{c}{RC-2} \left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(1+e^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)}\right)}\right] \right\} = \frac{c}{RC-2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\left[1 - e^{-\left(s+\frac{1}{2}\right)} + e^{-2\left(s+\frac{1}{2}\right)} - \cdots\right]\right\}$$

$$= \frac{c}{RC-2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}} - \frac{e^{-s}e^{-\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{2}} + \frac{e^{-2s}e^{-\frac{2}{2}}}{s+\frac{1}{2}} - \frac{e^{-3s}e^{-\frac{3}{2}}}{s+\frac{1}{2}} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{c}{RC-2}\left[e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)} u(t-1) + e^{-\frac{2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t-2)} u(t-2) - \cdots\right]$$

$$= \frac{c}{RC-2}\, e^{-\frac{1}{2}t}\left[1 - u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) + \cdots\right]$$

con lo que $i(t)$ queda dada por:

$$i(t) = \frac{-2}{RC-2}\, e^{-\frac{1}{RC}t}\left[1 - e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)} u(t-1) + e^{\left(\frac{2}{RC}-\frac{2}{2}\right)} u(t-2) - e^{\left(\frac{3}{RC}-\frac{3}{2}\right)} u(t-3) + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{c}{RC-2}\, e^{-\frac{1}{2}t}\left[1 - u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) + \cdots\right]$$

Es importante hacer notar que el lado derecho de la ecuación anterior , no es una serie infinita , ya que en el intervalo $[0,1)$ solo el primer término de cada suma existe y los otros términos son cero ; debido a la presencia de la función escalón unitario desplazada ; en el intervalo $[1,2)$ sólo los dos primeros términos de cada sumando existen , etc .

Podemos escribir la solución como:

$$i(t) = \frac{1}{RC-2}\left[-2e^{-\frac{1}{RC}t} + Ce^{-\frac{1}{2}t}\right] \qquad en\ [0,1)$$

$$i(t) = \frac{1}{RC-2}\left[-2e^{-\frac{1}{RC}t}\left(1-e^{-\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad en\ (1,2)$$

$$i(t) = \frac{1}{RC-2}\left[-2e^{-\frac{1}{RC}t}\left(1-e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}+e^{2\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}\right)+Ce^{-\frac{1}{2}t}\right]$$

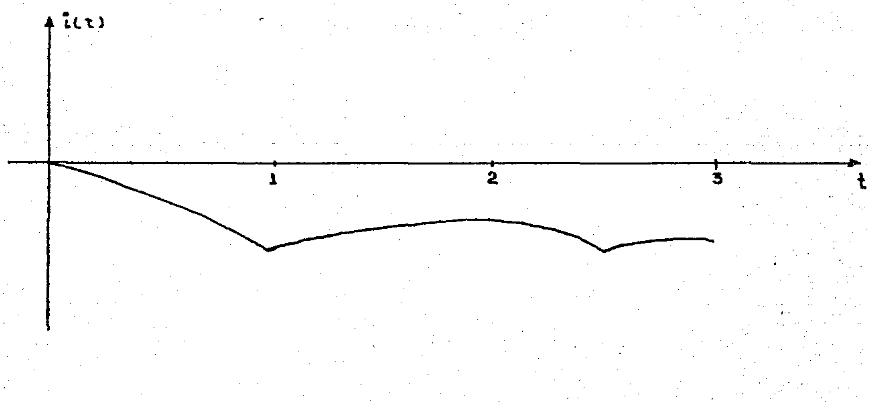
$$en\ (2,3)$$

en el n-ésimo pulso tenemos que la corriente es:

$$i(t) = \frac{1}{RC-2}\left[-2e^{-\frac{1}{RC}t}\left(1-e^{\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}+e^{2\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}-\cdots+(-1)^{2(n-1)}e^{(2)(n-1)\left(\frac{1}{RC}-\frac{1}{2}\right)}\right)\right.$$

$$\left.+\ Ce^{-\frac{1}{2}t}\right]$$

La gráfica de la corriente que circula en el circuito del problema 2 , está dada en la parte inferior de esta hoja , donde podemos ver que a medida que la excitación disminuye hasta desaparecer la corriente también tiende a desaparecer.



Problema 3. Dado el circuito RLC en la figura 3.5 , estando la bobina y el capacitor inicialmente desenergizados , el interruptor se conecta en t=0 , quedando aplicado un voltaje dado por el tren de pulsos mostrado en la figura 3.6 . Hallar el voltaje en el capacitor si $R = 1\Omega$, $L = 1$ Hy , $C = 2$ Fd

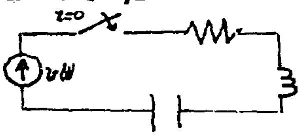


Figura 3.5 Circuito RLC del problema 3.

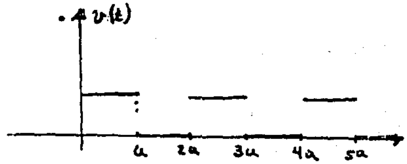


Figura 3.6 Voltaje en forma de tren de pulsos aplicado al circuito del problema 3.

Solución . Aplicando LKV tenemos

$$R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + L\frac{di(t)}{dt} = v(t) \qquad \text{III}$$

el voltaje inicial en el capacitor $v_c(0) = \frac{q_0(0)}{C} = 0$ donde q_0 es la carga inicial en el capacitor que es $q_0 = 0$, $v_c'(0) = \frac{1}{C}\, i(0) = 0$ donde $i(0)$ es la corriente inicial en la bobina ; sustituyendo

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \quad , \quad C\frac{dv_c(t)}{dt} = i(t) \quad , \quad C\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} = \frac{di(t)}{dt}$$

en la ecuación III, tenemos

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_c(t)}{dt} + v_c(t) = v(t) \qquad \text{IIIa.}$$

aplicando transformada de Laplace a la ecuación *IIIa*

$$LC\left[s^2V_c(s) - s\,V_c(0) - v_c'(0)\right] + RC\left[sV_c(s) - v_c(0)\right] + V_c(s) = \frac{1}{s(1+e^{-sa})}$$

$$\left[LC\,s^2 + RCs + 1\right]V_c(s) = \frac{1}{s(1+e^{-sa})}$$

sustituyendo valores de R, L y C, y despejando $V_c(s)$

$$V_c(s) = \frac{1}{2s^2+2s+1}\;\frac{1}{s(1+e^{-sa})}$$

$$V_c(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s} - \frac{2s+2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{1+e^{-sa}}$$

$$V_c(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sa} + e^{-2sa} - e^{-3sa} + \dots\right) - \left[\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2\left((s+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2\right)}\right]\Big($$

$$\left(1 - e^{-sa} + e^{-2sa} - e^{-3sa} + \dots\right)$$

tomando transformada inversa, tenemos :

$$v_c(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\right) \qquad \text{en } [0,a)$$

$$v_c(t) = -e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\right) + e^{-\frac{1}{2}(t-a)}\left[\cos\tfrac{1}{2}(t-a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(t-a)\right]u(t-a) \qquad \text{en } (a, 2a)$$

Haremos hincapié sobre algunos aspectos generales del método tratado aquí .

Considere el problema con valores iniciales , que consiste de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad \text{IV}$$

donde a, b y c son constantes reales y $f(t)$ es una función dada, y las condiciones iniciales

$$y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y_0' \qquad \text{V}$$

La transformada de Laplace de la ecuación IV es

$$(as^2 + bs + c)\,Y(s) - (as + b)\,y(0) - a\,y'(0) = F(s)$$

donde $Y(s)$ y $F(s)$ son las transformadas de $y(t)$ y $f(t)$ respectivamente .Usando las condiciones iniciales V y despejando $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{F(s) + (as+b)\,y_0 + a y_0'}{as^2 + bs + c} \qquad \text{VI}$$

Notese que el denominador es la ecuación caracteristica de la ecuación IV

si tomamos $\quad H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1} \qquad$ VII

y $\quad G(s) = F(s) + (as + b)\,y_0 + a y_0' \qquad$ VIII

entonces $Y(s)$ puede considerarse como el producto de las funciones $H(s)$ y $G(s)$

$$Y(s) = H(s)\,G(s) \qquad \text{IX}$$

La función $H(s)$ está completamente caracterizada por las propiedades del sistema que se considera y puede llamarse función del sistema .Para un circuito eléctrico es común dar el nombre de impedancia del circuito a la función $\frac{1}{SH(s)}$. La función $G(s)$ depende de la función de fuerza y de las condiciones iniciales y puede llamarse función de excitación total y está formada por dos partes :la función $F(s)$ que es la transformada de la función de fuerza $f(t)$ y la función $(as+b)y_0 + a y_0'$ que depende de las condiciones iniciales .

De la ecuación IX , y de acuerdo con el teorema de Convolución obtenemos

$$y(t) = \int_0^t h(t-z)\, g(z)\, dz$$

como la solución de la ecuación IV con las condiciones iniciales V .Sin embargo , la función $(as+b)y_0 + a y_0'$ no puede ser transformada de Laplace de alguna función ordinaria , sin embargo es posible interpretarla como la transformada de la función $s(t)$ y su"derivada".

Si escribimos $Y(s)$ como

$$Y(s) = H(s)F(s) + \frac{(as+b)y_0 + a y_0'}{as^2+bs+c}$$

entonces podemos obtener la siguiente expresión para $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t h(t-z) f(z)\, dz + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{(as+b)y_0 + a y_0'}{as^2+bs+c} \right\} \qquad \text{X}$$

Una vez que se asignan valores a las constantes a, b y c , la transformada inversa indicada en la ecuación X puede determinarse por el método de fracciones parciales.

Usando el carácter lineal de la transformada inversa podemos escribir la ecuación X como

$$y = \int_0^t h(t-z)f(z)dz + y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\} + y_0' \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\} \quad XI$$

si en la ecuación XI llamamos

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\} \quad y \quad y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\} \quad XII$$

sustituyendo las expresiones XII en XI obtenemos

$$y(t) = \int_0^t h(t-z)\, f(z)dz + y_0 y_1(t) + y_0' y_2(t) \quad XIII$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación XIII es la respuesta del sistema a la función de fuerza $f(t)$. Que en la terminología de Ecuaciones diferenciales de segundo orden , corresponde a una solución particular de la ecuación no homogénea IV .Los términos restantes del segundo miembro de la ecuación XIII representan la respuesta del sistema a las condiciones iniciales . Si consideramos a y_0 y y_0' como constantes arbitrarias , estos términos comprenden la función complementaria ó la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación IV .

Capítulo 4

Convolución

4.1 La integral de convolución está relacionada con el producto de transformadas de Laplace, el cual es interesante , tanto en la parte teórica como práctica .

Definición . Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones que son seccionalmente continuas en todo el intervalo cerrado finito $0 \leq t \leq b$ y de orden exponencial. La función representada por $(f * g)(t)$ y definida por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

se llama convolución de las funciones f y g .

Teorema. Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones seccionalmente continuas en $0 \leq t \leq b$ y de orden exponencial e^{at} , entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\ \mathcal{L}\{g\} \text{ ⊛}$$

La aplicación mas inmediata de éste teorema es cuando se desea obtener la transformada inversa de un producto de transformadas , un camino para hacerlo es precisamente la integral de convolución, así si nuestro objetivo es hallar $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ donde $H(s)$ es el producto de $F(s)\,G(s)$ · donde cada factor es la transformada de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente, entonces la transformada inversa de $H(s)$ que denotaremos por $h(t)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$h(t) = f(t) * g(t)$$

⊛ **La demostración se encuentra en el apéndice C**

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

$$= \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

las operaciones que se describen en la integral de convolu - ción se pueden interpretar gráficamente ,(ver sección 4.4), de acuerdo con los cuatro pasos siguientes: 1)doblamiento , 2)traslación ,3) Multiplicación e 4) integración.Estos cuatro pasos son equivalentes al vocablo alemán " faltung " . El propósito de esta interpretación gráfica es hacer ver - que la convolución de dos funciones puede ser evaluada grá - ficamente ó numéricamente , la evaluación gráfica es sobre todo útil , cuando las funciones $f(t)$ y $g(t)$ sean tan compli - cadas que no hay fórmula para la integración analítica de la integral de convolución , ó cuando $f(t)$ y $g(t)$ son curvas experimentales que no pueden ser representadas por funciones analíticas .

La aplicación más importante en análisis de circuitos del teorema de convolución es para determinar el voltaje de salida en un circuito eléctrico , conociendo el voltaje de entrada y la función de transferencia ,(que es igual al recíproco de la función característica de la ecuación diferencial que representa al circuito ; siempre que éste sea lineal.Es decir , la función de transferencia es una función que relaciona corrientes y voltajes en diferentes partes del circuito.

Si se considera un circuito arbitrario formado en su totalidad por elementos pasivos , lo representaremos mediante un rectángulo .Si al circuito se le conecta un conductor a cualquier nodo que se saca de la caja para que sea accesible , el extremo de éste conductor se designa con el nombre de terminal .Las terminales se necesitan para conectar las fuentes de excitación .El mínimo número de terminales que es útil es dos;las terminales se asocian en pares , llamados puertos , uno para cada fuente de excitación .

Como ejemplo considere la figura 4.1 de dos puertos; si todas las condiciones iniciales del circuito son cero ,entonces la transformada del voltaje de entrada y la transformada del voltaje de salida se relacionan mediante la ecuación

$$V_2(s) = H(s)\,V_1(s) \tag{2}$$

donde

$V_2(s)$:Es la transformada del voltaje de salida .

$H(s)$:Es la transformada de la función de transferencia del sistema.

$V_1(s)$:Es la transformada del voltaje de entrada,(fuente de excitación).

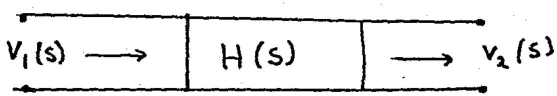


Figura 4.1 Red de dos puertos descrita por la ecuación (2)

Como $V_2(s)$ de la ecuación (2) está expresada como un producto de transformadas ,aplicando la integral de convolución dada por la ecuación (1) podemos obtener la respuesta $v_2(t)$ del circuito que es:

$$v_2(t) = \int_0^t h(\tau)\, v_1(t-\tau)\, d\tau \qquad (3)$$

$$= \int_0^t h(t-\tau)\, v_1(\tau)\, d\tau$$

esto indica que si se conoce $h(t)$ la transformada inversa de la función de transferencia , sólo se necesita especificar - el voltaje $v_1(t)$ para determinar el voltaje de salida usando las ecuaciones (3) ; esto siempre que el circuito esté inicialmente en reposo .Si el circuito no está inicialmente en reposo no podemos usar la integral de convolución para hallar el voltaje de salida; ya que las condiciones iniciales equivalen a tener fuentes de excitación en diferentes lugares del circuito , las cuales no se pueden combinar para obtener una $v_1(t)$ que podría llamarse"función de excitación total" .

4.2 Aquí cabe mencionar un importante teorema de teoria de los circuitos que es el teorema de Borel,el cual dice : "La respuesta de un circuito lineal a una excitación arbitraria (que tenga transformada de Laplace)es la convolución de su respuesta impulso y la función de excitación ". este es un caso de especial atención y se presenta cuando la función de entrada $v_1(t)$es $\delta(t)$ *,podemos aplicar el siguiente

---

* Para describir una fuerza electromotriz de gran magnitud que solamente actúa por un período de tiempo muy corto se

teorema para hallar la función de salida .

Teorema 1 . La convolución de cualquier función con la función impulso unitario $\delta(t)$ es la función misma.

En nuestro caso tenemos

$$v_2(t) = h(t) * \delta(t)$$

aplicando transformada de Laplace

$$V_2(s) = H(s) \cdot 1$$

tomando transformada inversa

$$v_2(t) = h(t) = h(t) * \delta(t) \qquad (4)$$

así la convolución de $h(t)$ con $\delta(t)$ es $h(t)$.

A la función $v_2(t)$ se le conoce como la respuesta al impulso del circuito .Esto nos indica que la respuesta de un circuito inicialmente en reposo a una excitación de un impulso es igual a la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia.Las ecuaciones (3) indican que si se conoce $h(t)$, la respuesta al impulso sólo se necesita especificar el voltaje de entrada $v_1(t)$ para determinar el voltaje de salida por convolución.

---

creó la "función $\delta(t)$" llamada " impulso unitario ", como un ejemplo de éste tipo de fuerza tenemos:una descarga eléctrica que cae sobre un ala de avión , ó el golpe seco con un martillo que se dá a un peso sujeto a un resorte .Esta función formalmente definida dió origen a una rama de la matemática conocida como "Teoría de las Funciones Generalizadas " ó " Teoria de las Distribuciones ".

Problema 4.1 Dado el siguiente circuito ,figura 4.A , el cual está inicialmente desenergizado para el cual $RC = 1$, se desea calcular el voltaje $v_2(t)$ a través de la resistencia R, al aplicar un voltaje $v_1(t) = e^{-t}$ en el instante t=0 en que se cierra el interruptor .

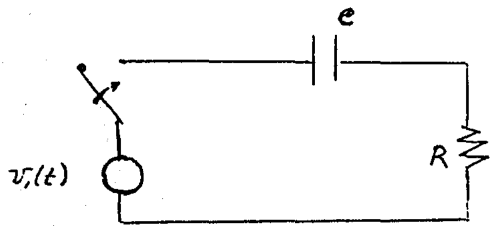


Figura 4.A. Circuito RC del problema 4.1

Solución . Para resolver este problema se ha seleccionado el método que utiliza la integral de convolución , para ejemplificar tanto el uso de esta integral , como la obtención de la función de transferencia .

Sea $v_2(t)$:el voltaje de salida , $v_2(t) = R\,i(t) \Longrightarrow$

$$V_2(s) = R\,I(s) \qquad (5)$$

$v_1(t)$:el voltaje de entrada , $v_1(t) = e^{-t} \Longrightarrow V_1(s) = \frac{1}{s+1}$

la función de transferencia está dada por

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$

aplicando LKV al circuito anterior

$$R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = v_1(t)$$

tomando transformada de Laplace a la ecuación anterior , obtenemos :

$$R\,I(s) + \frac{1}{cs}\,I(s) = V_1(s)$$

$$\left[R + \frac{1}{cs}\right] I(s) = V_1(s) \qquad (6)$$

la función de transferencia $H(s)$ esta dada por el cociente $\frac{v_2(t)}{v_1(t)}$ de las ecuaciones (5) y (6)

$$H(s) = \frac{R\,I(s)}{\left[R+\frac{1}{cs}\right]I(s)}$$

$$H(s) = \frac{R}{R+\frac{1}{cs}}$$

y multiplicando numerador y denominador por $\frac{s}{R}$

$$H(s) = \frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

como $RC = 1$ entonces $H(s) = \frac{s}{s+1}$

sustituimos $H(s)$ en la ecuación (2) para obtener el voltaje de salida

$$V_2(s) = \frac{s}{s+1} \quad \frac{1}{s+1}$$

si hacemos

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{1}{s+1}\right\} = \delta(t) - e^{-t}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$$

así $v_2(t)$ se puede obtener , tomando convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$

$$v_2(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$v_2(t) = [\delta(t) - e^{-t}] * e^{-t} \qquad (7)$$

cor el teorema 1 $\quad \delta(t) * e^{-t} = e^{-t}$

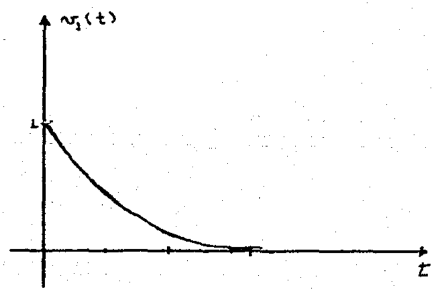
calculando $\quad e^{-t} * e^{-t} = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\, e^{-\tau}\, d\tau \qquad (8)$

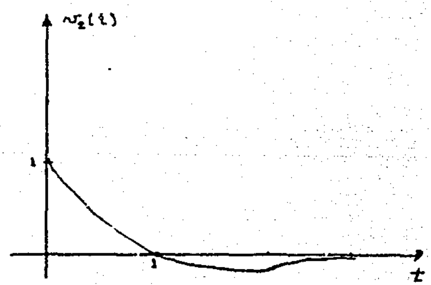
$$= t\, e^{-t} \qquad (9)$$

sustituyendo las ecuaciones (8) y (9) en la ecuación (7)

$$v_2(t) = e^{-t} - t\, e^{-t}$$

graficando el voltaje de entrada $v_1(t)$ y el voltaje de salida $v_2(t)$.





se observa que el voltaje de entrada tiende a cero cuando el tiempo aumenta , la misma situación se presenta en el voltaje de salida , el cual está formado solamente por terminos transitorios .

Este problema también podría haberse resuelto a partir de las ecuaciones (5) y (6) , con el método tratado en el capítulo 3, obteniéndose la corriente $i(t)$ que circula por el circuito ; el voltaje a través de la resistencia R , ($v_R(t)$) se obtendría multiplicando la corriente $i(t)$ por la resistencia .Se eligió el método que utiliza la integral de convolución para ilustrar su uso . El uso de cualquiera de los dos métodos es indistinto ya que ninguno presenta ventajas con respecto al otro .

4.3 Otro caso especial se presenta cuando la función de excitación a un circuito inicialmente desenergizado es la función escalón unitario

$$E(t) = u(t)$$

denotamos por $v_u(t)$ a la respuesta que llamaremos "respuesta escalón unitario " de algún sistema representado en la figura 4.2

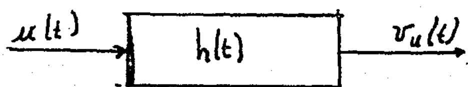


Figura 4.2 Un sistema en el cual la función de excitación es u(t)

de la ecuación (2) tenemos que

$$V_u(s) = \frac{1}{s} H(s) \quad (10)$$

donde :

$V_u(s)$:es la transformada de $v_u(t)$, llamada "respuesta escalón unitario "

$H(s)$: es la transformada de $h(t)$, función de transferencia.

$\frac{1}{s}$:es la transformada de la función de excitación $u(t)$

A continuación veremos el uso de la respuesta escalón unitario en un circuito inicialmente desenergizado para obtener la respuesta a una excitación arbitraria .

Sean :

$V_u(s)$: la transformada de la respuesta escalón unitario $v_u(t)$

$H(s)$: la transformada de la función de transferencia $h(t)$

$E(s)$: la transformada de la función de excitación $a(t)$

$V_2(s)$: la transformada de la respuesta $v_2(t)$ a la excitación arbitraria $a(t)$.

de la ecuación (2) sabemos que

$$V_2(s) = H(s)\, E(s) \quad (11)$$

deseamos obtener $v_2(t)$,para ésto procedemos como sigue: de la ecuación (11)

$$V_2(s) = s\left[\frac{1}{s} H(s) E(s)\right] \quad (12)$$

sustituyendo la ecuación (10) en la ecuación (11), tenemos

$$V_2(s) = s\,[\,V_u(s)\,E(s)\,] \tag{13}$$

hacemos

$$V_2(s) = s\,F(s) \tag{14}$$

donde

$$F(s) = V_u(s)\,E(s) \Longrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

aplicando el teorema de convolución

$$f(t) = \int_0^t v_u(t-\tau)\,a(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t v_u(\tau)\,a(t-\tau)\,d\tau$$

$$= v_u(t) * a(t)$$

Nótese que $f(0) = 0$

de la ecuación (14) y por la transformada de la derivada de una función dada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

tenemos que

$$V_2(t) = \frac{d}{dt}\left[v_u(t) * a(t)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t v_u(\tau)\,a(t-\tau)\,d\tau \tag{15}$$

ésta ecuación nos permite obtener la respuesta de un sistema conociendo únicamente la excitación y la respuesta escalón unitario, sin necesidad de conocer la función de transferencia.

Problema 4.3. Encuentre la salida de un circuito si se sabe que la función de excitación es $4e^{t} - 3$ y si se sabe que la respuesta escalón unitario es $-2e^{-t} + 4e^{-3t}$

Solución. Este problema cae dentro del modelo de solución dado por la ecuación (15) .Denotaremos

$$V_u(s) = \mathcal{L}\{-2e^{-t} + 4e^{-3t}\}$$

$$E(s) = \mathcal{L}\{4e^{t} - 3\}$$

$$V_2(s) = \mathcal{L}\{v_2(t)\}$$ donde $v_2(t)$ es la salida del circuito

$$V_2(s) = S\ [V_u(s)\,E(s)]$$

con $$F(s) = V_u(s)\,E(s)$$

aplicando el teorema de convolución , tenemos

$$f(t) = \int_0^t (-2e^{-\tau} + 4e^{-3\tau})(4e^{(t-\tau)} - 3)\,d\tau$$

$$= -2e^{-t} + 2$$

por la ecuación (15) se tiene que

$$v_2(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

así

$$v_2(t) = 2e^{-t}$$

Es importante hacer notar que no se requiere conocer la función de transferencia , ni obtener su transformada ; así como tampoco transformar la respuesta escalón unitario, ni la función de excitación.

4.4 Utilidad de la interpretación gráfica de la integral de convolución.

Esta se usa para hallar la función de salida de un circuito cuya respuesta al impulso del circuito y la función de excitación son funciones conocidas gráficamente pero cuya integral de convolución sería difícil de evaluar; una razón puede ser porque alguna ó ambas funciones (la respuesta al impulso y la función de excitación) sean difíciles de expresar en forma analítica .

Se mostrará por medio de un ejemplo la interpretación gráfica de la convolución .

Problema 4.4.

Considere una red cuya respuesta al impulso se puede aproximar por medio de las rectas que se muestran en la figura 4.3 (a) .Suponga que las condiciones iniciales de la

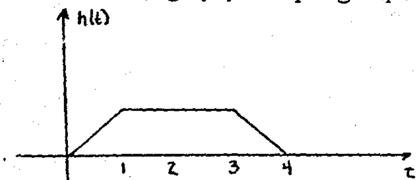


Figura 4.3: Respuesta de un circuito al impulso

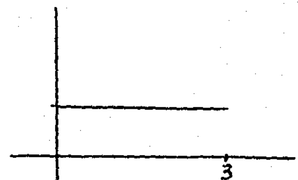


Figura 4.4 Voltaje de entrada del problema 4.4

red son cero .Por convolución determine la respuesta de la red al voltaje de entrada que se indica en la figura 4.4 .

Interpretamos la convolución por medio de los si -

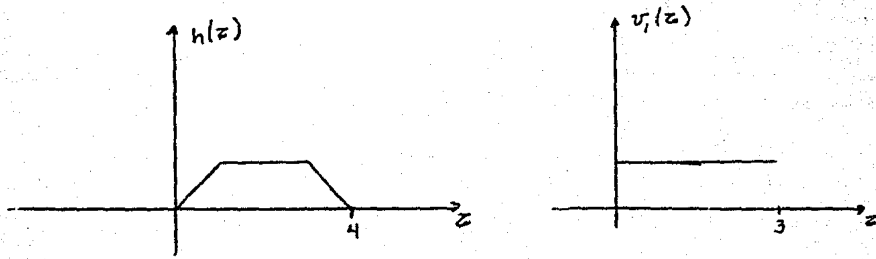
---

* Existen aparatos que miden gráficamente la respuesta de un circuito , llamados osciloscopios.

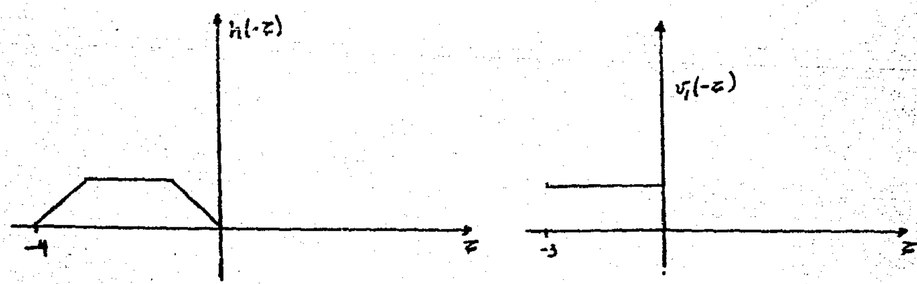
guientes cuatro pasos : 1) doblamiento, 2) traslación, 3) multiplicación, 4) integración.

Solución. La respuesta $v_2(t)$ está dada por la convolución de $h(t)$ y $v_1(t)$

$$v_2(t) = h(t) * v_1(t)$$
$$= \int_0^t h(z)\, v_1(t-z)\, dz$$
$$= \int_0^t h(t-z)\, v_1(z)\, dz$$

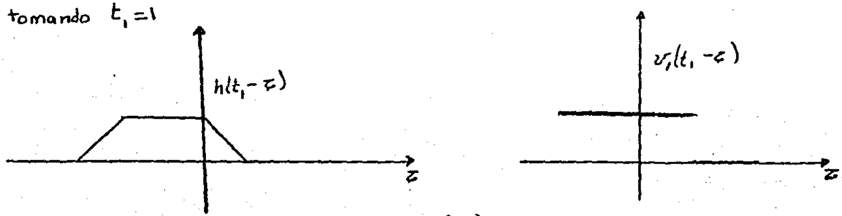


(a)

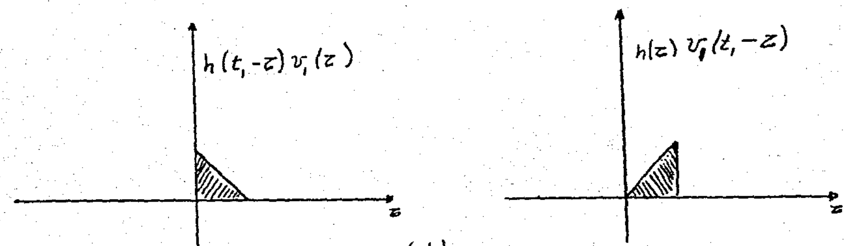


(b)

tomando $t_1 = 1$

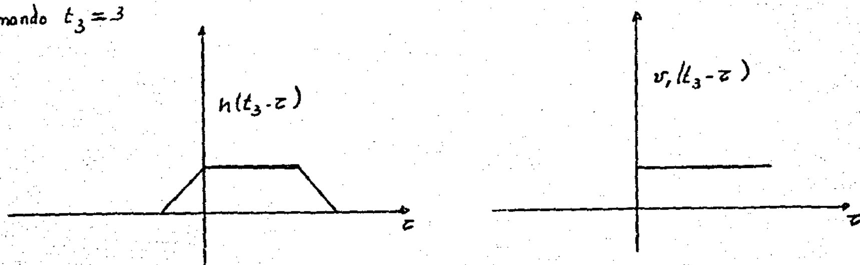


(c)

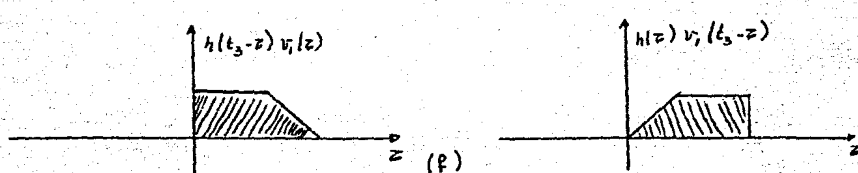


(d)

tomando $t_3 = 3$



(e)



(f)

figura 4.5 Muestra la convolución de $h(t)$ con $v_1(t)$ para diferentes valores de t .

En la parte (a) de la figura 4.5 se muestran las funciones $h(\tau)$ y $v_1(\tau)$ la parte (b) muestra el doblamiento de la funciones $h(\tau)$ y $v_1(\tau)$, es decir , su reflexión respecto al eje vertical, la parte (c) muestra el desplazamiento de $h(\tau)$ y $v_1(\tau)$ para un valor fijo de $t_1 =$ 1 , la parte (d) muestra el producto de las funciones $h(t_1-\tau)v_1(\tau)$ en el lado izquierdo,mientras que el lado derecho muestra el producto $h(\tau)v_1(t_1-\tau)$.

El área sombreada en la figura 4.5 (d) representa la integral para el valor fijo t_1 = 1.En éste punto,se evalúa la integral,y el valor correspondiente corresponde a la ordenada de la gráfica de la función convolución , es decir, la función convolución , tendrá un punto de coordenadas $(t_1 , \int_0^{t_1} h(t-\tau)v_1(\tau)d\tau)$.

Las partes (e) y (f) de la gráfica representan la forma de hallar otro punto de la gráfica de la convolución de $h * v_1$ en este caso para un valor fijo t_3 =3 ;el cual aportará otro punto a la gráfica de la convolución de $h * v_1$ que en éste caso es $(t_3 , \int_0^{t} h(t-\tau)v_1(\tau)d\tau)$.

Tomando un número suficiente de valores $t_1, t_2, \dots, t_n$ para cada uno de ellos igual a una constante , se puede obtener una buena representación de la gráfica de $h * v_1$, en éste caso , la integral de faltung resultante está dada en la figura 4.6.

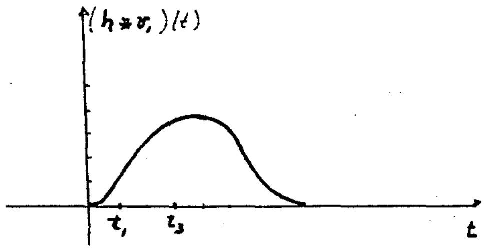


Figura 4.6 La convolución de h y v_1 obtenida gráficamente.

Podemos hacer las siguientes observaciones con respecto al problema anterior .

1. Si describimos analíticamente la respuesta al impulso .Obtendríamos $h(t) = t + (1-t)\,u(t-1) + (-t+3)\,u(t-3) + (t-4)\,u(t-4)$ la descripción analítica de la función de excitación es:

$$v_1(t) = u(t) - u(t-3)$$

la convolución estaría dada por

$$(h * v_1)(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, v_1(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \left[\tau + (1-\tau)\,u(\tau-1) + (-\tau+3)\,u(\tau-3) + (\tau-4)\,u(\tau-4)\right]\left[u(t-\tau) - u(t-\tau) - 3\right] d\tau$$

ambas integrales presentan procedimientos engorrosos para su evaluación , siendo más sencilla en éste caso la evaluación gráfica .

2.La operación de multiplicar la entrada $v_i(\tau)$ por la respuesta al impulso trasladada $h(t-\tau)$ y luego integrar de 0 a t , se puede considerar el equivalente de pesar todos los valores pasados de la entrada .Esto lo podemos ilustrar en la figura 4.7 donde aparecen superpuestas las formas de onda $h(t)$ y $v_i(t)$ para diferentes valores fijos de t .

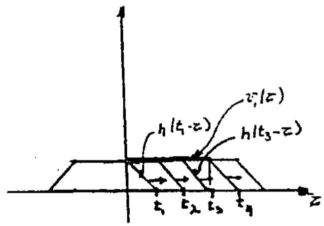


Figura 4.7 Muestra la superposición de las funciones $h(t)$ y $v_i(t)$ del problema 4.4 para diferentes valores fijos de t.

al aumentar t , $h(t-\tau)$ se traslada hacia la derecha , ilustrándose esto para los tiempos crecientes t_1, t_2, t_3 y t_4
Cuando esto sucede el producto de las dos funciones que se muestra en la figura 4.5 (d) , cambia y también varía la

(salida) convolución $v_2(t)$. Esto se puede interpretar como si $h(t-\tau)$ se deslizara o barriera a $v_1(\tau)$, dando origen al nombre de $h(t-\tau)$ que se conoce como <u>función de barrido</u> .Conforme se hace el barrido de la figura 4.7 , la salida en cualquier momento se determina principalmente con valores recientes de la entrada .Los valores "muy viejos " de entrada tienen muy poco efecto en la salida actual , aunque hablando en forma estricta , se puede ver que la salida actual se determina gracias a toda la historia anterior de la entrada , pesada con la respuesta al impulso .Esto resulta un modo útil de visualizar la forma de la respuesta que se obtiene al excitar una red .

Apéndice A

Sistemas De Ecuaciones Diferenciales Lineales

Considere un sistema lineal homogéneo con n ecuaciones diferenciales de primer órden , con n funciones desconocidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,donde todos los coeficientes son constantes .Entonces el sistema que consideramos tendrá la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

donde todas las a_{ij} , $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$ son constantes conocidas. Si **A** es la matríz de nxn de números reales a_{ij} dada por

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)
$$

y el vector

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

el sistema dado por la expresión (1) se puede expresar como la ecuación diferencial vectorial lineal homogénea

$$X' = AX \tag{4}$$

La matríz constante real A que aparece en la expresión (4) y está definida por la ecuación (2) se llama matríz de los coeficientes de la ecuación (4) .

Una motivación para buscar las soluciones del sistema (1) , la encontramos en el sistema (1) cuando $A = (a_{11})$ es decir en el caso de la ecuación diferencial más simple n=1: $\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x$ cuya solución no trivial es $x_1(t) = \alpha_1 e^{a_{11}t}$

Buscaremos soluciones del sistema dado en (1) , o sea del sistema vectorial dado en la ecuación (4) .La manera de hacerlo será proponiendo soluciones no triviales del sistema dado en la expresión (1) de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 e^{\lambda t} \\ x_2 &= \alpha_2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_n e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda$ son constantes susceptibles de determinarse .Si hacemos

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

entonces por la forma de la expresión (3) , se ve que la forma vectorial de la solución deseada (5) es

$$X = \alpha e^{\lambda t}$$

por lo tanto,buscamos soluciones de la ecuación diferencial vectorial (4) que sean de la forma

$$X = \alpha e^{\lambda t} \tag{7}$$

donde α es un vector constante y λ es un número por determinar ,si sustituimos la ecuación (7) en la ecuación (4) obtenemos

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}$$

de la cual se tiene

$$(A - \lambda I)\alpha = 0 \tag{8}$$

donde I es la matríz identidad de nxn .Escrito en términos de componentes , corresponde a un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales homogéneas .

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 &+ a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 &+ (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \quad (9) \\ &\vdots \\ a_{n1}\alpha_1 &+ a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

interpretable como un sistema homogéneo , con las incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .Sabemos que éste sistema tiene solución - distinta de la trivial si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

es decir , $|A - \lambda I| = 0$.

La ecuación (10) es llamada la ecuación característi ca de la matríz de coeficientes $A= a_{ij}$ de la ecuación diferencial vectorial *(4)* .Esta es una ecuación polinomial de - grado n en λ , donde sus raices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores - característicos de **A** . Al sustituir cada valor característico λ_i , $(i=1,2,\dots n)$, en el sistema *(9)* se obtiene la solución no trivial correspondiente

$$\alpha_1 = \alpha_{1i} \quad , \alpha_2 = \alpha_{2i} \quad , \ldots , \alpha_n = \alpha_{ni}$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4) .Dado que la ecuación (9) es la forma en componentes de la ecuación (8) , el vector definido por

$$\alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (11)$$

es un vector característico correspondiente al valor característico λ_i ;$(i=1, 2, .., n)$
por tanto la ecuación diferencial vectorial

$$X' = A X \qquad (4)$$

tiene la forma de solución

$$X = \alpha e^{\lambda t} \qquad (12)$$

donde λ es un valor característico λ_i de la matríz de coeficientes A y el vector α debe ser un vector característico $\alpha^{(i)}$ correspondiente a este valor característico λ_i .

Con respecto a la forma de los n valores característicos , se presentan dos casos .

Caso I *.

Si los n valores característicos son diferentes y reales. Los resultados importantes correspondientes a éste caso se resumen en el siguiente teorema.

Teorema. Para la ecuación vectorial

$$X' = AX \tag{4}$$

donde **A** es una matríz constante de nxn, real; supongamos que cada uno de los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de **A** es diferente y real; y sean $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ el conjunto de los n vectores característicos correspondientes de **A**. Entonces en todo el intervalo real $[a,b]$, las n funciones definidas por

$$\alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \ldots, \alpha^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

forman un conjunto linealmente independiente, llamado conjunto fundamental, de soluciones de (4); y precisamente la combinación lineal de dichas funciones:

$$x = c_1 \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \alpha^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

---

* Las demostraciones de los casos I y II pueden verse en el libro de Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera de Boyce y Diprima.

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son n constantes arbitrarias , es la solución general de la ecuación *(4)* en el intervalo $[a,b]$.

Caso II.

Si en los n valores característicos alguno(s) se repite(n) , es decir , si tiene valores característicos múl - tiples . Consideremos el sistema

$$X' = AX \tag{4}$$

donde A es una matríz constante real de nxn ,supongamos que A tiene un valor característico real λ_1 de multiplicidad m , donde $1 < m \leq n$, y que los valores característicos restantes $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ (si existen otros) , son diferentes .Este valor característico λ_1 de multiplicidad m tiene p vectores característicos linealmente independientes , donde $1 \leq p \leq m$ .Consideremos ahora dos situaciones :

i) si p=m , ii) si p<m

i) Si p = m , hay m vectores característicos linealmente independientes $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(m)}$ correspondientes a λ_1 .Las n funciones definidas por

$$\alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \alpha^{(2)} e^{\lambda_1 t}, \alpha^{(m)} e^{\lambda_1 t}, \alpha^{(m+1)} e^{\lambda_{(m+1)} t}, \ldots, \alpha^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

forman un conjunto linealmente independiente de n soluciones de la ecuación diferencial

$$X' = AX \tag{4}$$

y la solución general de la ecuación (4) es una combinación lineal de estas n soluciones , con n números arbitrarios como constantes de combinación .

ii) Si $p < m$, en este caso hay menos de m vectores característicos linealmente independientes $\alpha^{(1)}$ correspondientes al valor característico λ_1 de multiplicidad m .Entonces hay menos de m soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (4) de la forma $\alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}$ correspondientes a λ_1 ; y no se tiene un conjunto fundamental de soluciones de la forma $\alpha^{(k)} e^{\lambda_k t}$ donde λ_k es un valor característico de A y $\alpha^{(k)}$ es un vector característico correspondiente a λ_k . Se deben buscar por otro camino , soluciones linealmente independientes .

Un camino podría ser el siguiente* :

Si λ_1 es un valor característico de multiplicidad $m = 2$ y $p = 1 < m$, entonces se buscan soluciones linealmente independientes de la forma

$$\alpha e^{\lambda_1 t} \qquad \text{v} \qquad \alpha t e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_1 t}$$

donde α es un vector característico correspondiente a λ_1 , es decirα, satisface

$$A - \lambda_1 I = 0$$

* La demostración puede encontrarse en el libro Ecuaciones Diferenciales de Boyce y Diprima.

y β es un vector que satisface la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)\,\beta = \alpha$$

si λ_1 es un valor característico de multiplicidad $m > 2$ y $p < m$, entonces las formas de las m soluciones linealmente independientes correspondientes a λ_1 dependen de si $p = 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

Apéndice B

Transfromada de Laplace

La transformada de Laplace es un operador lineal. Más específicamente la tranformada de Laplace de una función $f(t)$* es un operador integral que denotaremos por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ y definiremos como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

donde como es usual la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ se sobreentiende como $\lim\limits_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$ y donde s es una variable real(pudiendo ser compleja).

Pero para que (1) quede bien definida , veamos cual es el dominio de $\mathcal{L}$ .Para describir el dominio de $\mathcal{L}$ necesitamos las funciones seccionalmente contínuas o continuas a trozos . Una función de valores reales se dice que es seccionalmente continua en un intervalo cerrado si su gráfica está formada por un número finito de trozos continuos .Con más exactitud si $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple con a) f está definida y es continua en todo , salvo un número finito

---

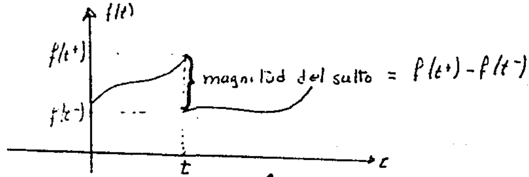
* Es común usar a t como la variable cundo se trata de la transformada de Laplace , debido a que la mayoría de los problemas con condiciones iniciales la variable es el tiempo,

de puntos de $[a,b]$, y b) existen los límites laterales

$$f(t^+) = \lim_{h\to 0^+} f(t+h) \quad , \quad f(t^-) = \lim_{h\to 0^-} f(t-h)$$

donde $h \to 0^+$ significa $h \to 0$ con $h > 0$

En éste conjunto finito de puntos las discontinuidades son de salto y se dice que es seccionalmente continua en $[a,b]$.



Observando (1) desearíamos que $\mathcal{L}$ satisfaga "un conjunto razonable " de condiciones para que exista ** la integral de (1) y sobre todo para que $\mathcal{L}$ resulte ser lineal - en algún espacio vectorial "adecuado" .Por ello f debe escogerse de suerte que

$$\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt \tag{2}$$

exista para todo $A>0$ .Esto se logra pidiendo que $f(t)$ sea - seccionalmente contínua en todo intervalo de la forma $[0,A]$

---

adicionalmente se consideran solo valores positivos del tiempo y de ahí la restricción de que $t \in [0,\infty)$.

** Recuerdese que $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ se dice que converge , lo cual se simboliza por $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt < \infty$ para algún valor particular de s (pues la integral es una función del parámetro s) si el límite de $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)dt$ existe .

con $A>0$ pues entonces el integrando será seccionalmente contínuo y la integral existirá y no solamente existirá, sino que el conjunto de tales funciones forman un Espacio Vectorial Real bajo las definiciones de suma y multiplicación por un escalar "usuales".

El que f sea seccionalmente continua no es suficiente para garantizar la existencia ó convergencia de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ en (1), ya que sobreentendemos a (1) como el paso al límite en (2) cuando $A \to \infty$. Una manera de asegurar tal convergencia de la integral en (1) consiste en someter a $f(t)$ a ser una función "mayorada" o "dominada" por una función exponencial, de forma tal que ahora podamos exigir el que $e^{-st} f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Por lo anterior introducimos las funciones de Orden Exponencial:

$f(t)$ es de orden exponencial en $[0,\infty)$ si existen $C>0$ y α tales que $|f(t)| \leq C e^{\alpha t}$ para todo $t>0$ en donde f está definida.

Es casi inmediato demostrar que la transformada de Laplace de una función seccionalmente continua y de orden exponencial siempre existe.

En efecto, tenemos que si f y g son dos funciones integrables * en todo intervalo $[a,b]$ con a fijo y b arbitrario y si $|f(t)| = g(t)$ para todo $t \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt < \infty \qquad \text{(existe o converge)}$$

si $\int_a^b g(t)dt$ existe. Por éste resultado tendremos en el caso

de nuestra afirmación que por ser $f(t)$ de orden exponencial existirán $c>0$ y α tales que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para todo $t>0$ y consecuentemente

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} C e^{\alpha t}\, dt \qquad (3)$$

$$= C\int_0^{\infty} e^{-st+\alpha t}\, dt = C \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-(s-\alpha)t} dt$$

$$= C\left(-\frac{1}{s-\alpha}\right) \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-(s-\alpha)t} d(-(s-\alpha)t)$$

$$= \frac{C}{s-\alpha}, \quad si \ s > \alpha$$

Así hemos logrado demostrar el siguiente

---

* Recuérdese que si 1) es una función seccionalmente continua en $[a,b]$, entonces existe $\int_a^b f(x)dx$ y es independiente de los valores que $f(x)$ tome en los puntos de discontinuidad, 2) si f y g son seccionalmente continuas en $[a,b]$, entonces también lo será el producto fg, lo cual implica que la integral del producto de dos funciones seccionalmente continuas existe (converge), 3) toda función continua en $[a,b]$ es seccionalmente continua.

Teorema. Si f es una función seccionalmente continua y de orden exponencial , entonces existe un número real α tal que para todo $s > \alpha$; $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ converge .

Ahora si ya podemos decir algo más sobre el dominio de la transformada de Laplace , en efecto , no sólo podemos decir que el dominio de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ está formado por funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial , sino que para dichas funciones su dominio siempre incluye un intervalo semiinfinito tipo (a, ∞).

Más aún si denotamos por $s_0 = \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists\, \mathcal{L}\{f(t)\}, s > \alpha\}$ se puede demostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ no converge para ningún $s < s_0$.

Por tanto , el dominio de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ es un intervalo $[s_0, \infty)$, con la posible salvedad de que s_0 no quede incluido .

Ya puntualizamos que cualquier función de orden exponencial tiene transformada de Laplace , pero el recíproco ¿será cierto? , o sea ¿toda función cuya transformada de Laplace existe es de orden exponencial ? .Basta con dar un contraejemplo para que quede claro que la proposición inversa no es verdadera . En efecto $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ tiene transformada de Laplace ** , pero no es de orden exponen-

---

** La existencia de $\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}$ puede mostrarse usando el teorema de comparación siguiente "Si f y g son integrables en $[a,1]$. y $0<a<1$ y si $|f(t)| \leq g(t)$ para $0<t<1 \Rightarrow \exists \int_0^1 f(t)\,dt$ si $\exists \int_0^1 g(t)\,dt$ →

cial .Esto evidentemente implica que el conjunto de funciones que poseen transformada de Laplace es más grande que el conjunto E de funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial .¿ que tanto es mayor ? .Es difícil contestar a esta pregunta pues delimitar el dominio preciso de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ es un problema difícil , aunque para los fines que este trabajo precisa , basta con percatarse que el conjunto E de funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial abarca la inmensa mayoria de las funciones necesarias en las aplicaciones que en particular nos ocupa , así las funciones

$$t^n, \; a^{at}, \; \operatorname{sen} bt, \; \cos bt, \; t^n a^{at} \operatorname{san} bt, \; \text{etc.}$$

son ejemplos de elementos de E .

Intentaremos ver ahora a la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \tag{1}$$

como una transformación lineal del conjunto E (de las funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial) en F (conjunto de todas las funciones con valores reales definidas en intervalos de la forma (s_0, ∞) con $s_0 > -\infty$),vistos estos como espacios vectoriales reales bajo las definiciones usuales de suma y multiplicación por un escalar , esto es

---

Concretamente usando también que $\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^1 e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} : E \to F$$
$$f(t) \to F(s) \qquad (4)$$

Sin embargo hay un problema pues F no resulta ser un espacio vectorial real con la definición usual de suma, puesto que las funciones en F no están definidas en el mismo intervalo (pues cada función $F(s)$ existe para $s > \alpha$ y cada una en general tiene su α particular. Pero éste problema puede solucionarse fácilmente sobreentendiendo que la suma de dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ de F se define como la función $F+G$ cuyo dominio es la intersección de los dominios de $F(\ )$ y G y cuyo valor en cualquier s de dicha intersección es $F(s)+G(s)$. Con ésta definición y con la usual de multiplicación por un escalar ; F ya es un Espacio Vectorial.

Pero realmente la transformación (4) ¿será lineal? por desgracia (4) no es una transformación lineal. El problema surge al dar un contraejemplo a

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$$

a saber : $f(t) = \cos t$, $g(t) = -\cos t$, pues $\mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} = 0$ para $s \in (0,\infty)$ y no está definida para $s \leq 0$, mientras que $\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$ para toda $s \in \mathbb{R}$, pero recordando que dos funciones son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio y toman el mismo valor en cada punto del dominio, luego $\mathcal{L}\{\cos t - \cos t\} \neq \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{-\cos t\}$ (sólo podría decirse que son idénticas para los valores donde ambas funciones están definidas) .

Pero evidentemente que también esta dificultad se puede superar ; para lo cual basta considerar que dos funciones de F son idénticas siempre que coincidan en algún intervalo tipo (a,∞) .Luego entonces con esta identificación tendremos algo que evidentemente era deseable ; a saber:

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\} \quad , \quad \forall f, g \in E \quad \text{aditividad}$$

$$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\} \qquad \text{(homogeneidad)}$$

y por tanto hemos podido interpretar a $\mathcal{L}\{f(t)\}$ como una Transformación Lineal de E en F .

¿Será $\mathcal{L}$ 1 a 1 ? o sea

$$¿\ \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\} \Rightarrow f = g\ ?$$

es decir

¿ $\mathcal{L}\{y\} = \phi$ S puede resolverse para y en forma única : $y = \mathcal{L}^{-1}\phi$? .

De nuevo aquí hay una dificultad trivial , pues si f y $g \in E$, que sólo difieren en los puntos de discontinuidad , entonces $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, aunque $f \neq g$. Sin embargo estas dos funciones son casi idénticas , o sea que consideraremos a dos funciones que sólo difieren en un conjunto finito de puntos como iguales (iguales en casi dondequiera) , luego para todo fin práctico $\mathcal{L}$ es 1 a 1. Esto significa que siempre que $\mathcal{L}\{y\}=\phi(s)$ pueda resolverse " esencialmente " en forma única con respecto de y y dicha solución en efecto se expresa a través de la así llamada Transformada Inversa de Laplace de la función $\phi(s)$, la cuál se denota por $\mathcal{L}^{-1}\{\phi\}$ y caracteriza a y :

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{\phi\}$$

si y sólo si

$$\mathcal{L}\{y\} = \phi$$

Este es el contenido del teorema de Lerch , básico en la teoría de Transformada de Laplace .

Teorema de Lerch.*

Si f y $g \in E$ y supongamos que existe un número real s_0 tal que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g\} \qquad \text{, para toda } s > s_0$$

entonces salvo posiblemente los puntos de discontinuidad

$$f(t) = g(t) \qquad \text{para todo } t > 0$$

finalmente la transformación lineal

$$\mathcal{L}: E \to F$$

¿ es sobre ?

---

* Una demostración de este teorema puede verse en : L.Kreider ,Introducción al Análisis Lineal, Parte 2 , Fondo Educativo Interamericano 1971.

Para responder a esta pregunta , basta recordar la desigualdad (3) ,es decir el teorema 1 que asegura existen constantes c y α tales que

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \leq \frac{c}{s-\alpha}, \quad si \quad s > \alpha \tag{3}$$

esto es , cuando

$$s \to \infty \; : \; \frac{c}{s-\alpha} \to 0$$

Por lo anterior funciones $\phi(s)$ tales como $1, s,$ $\operatorname{sen} s,\; e^{s},\; \frac{s}{s+1},\; e^{t^2}$ no admiten transformada inversa ya que ninguna de ellas tiende a cero cuando $s \to \infty$. En consecuencia la respuesta a la pregunta si $\mathcal{L}$ aplica E " sobre " F es NO. A continuación daremos algunos resultados de gran utilidad.

La transformada de Laplace de la función para n entero positivo está dada por

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

tomando $t = \frac{z}{s}$ y $dt = \frac{dz}{s}$, sustituyendo en la ecuación anterior , tenemos :

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{s}\right)^n \frac{dz}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1)^{*}$$

* Donde Γ es la función gamma.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$ para n entero, positivo

La descomposición de un cociente de polinomios $\frac{P(s)}{Q(s)}$ donde el grado de $P(s)$ es menor que el grado de $Q(s)$, en fracciones parciales es de frecuente uso en la solución de problemas por el método de la transformada de Laplace, enunciaremos aquí dos teoremas que representan los casos más generales de las situaciones que se presentan. Estos teoremas se conocen como Teoremas del Desarrollo de Heaviside.

Teorema 1.

Sean $P(s)$ y $Q(s)$ polinomios en los cuales $P(s)$ es de grado menor que $Q(s)$. Si $Q(s)$ tiene n raices diferentes α_k con $k=1,2,\ldots,n$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

Demostración. Como $Q(s)$ es un polinomio con n ceros diferentes, podemos escribir, por el método de fracciones parciales sabiendo que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ son las raíces de $Q(s)$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \qquad (5)$$

multiplicando a ambos lados de la ecuación (5) por $s-\alpha_k$ y tomando límite cuando $s \to \alpha_k$, aplicando la regla de L 'Hospital encontramos que

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k)$$

$$= \lim_{s\to\alpha_k} P(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}$$

$$A_k = \lim_{s \to \alpha_k} P(s) \lim_{s \to \alpha_k} \frac{s-\alpha_k}{Q(s)}$$

$$= P(\alpha_k) \lim_{s \to \alpha_k} \frac{1}{Q'(s)}$$

$$\therefore \quad A_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

entonces (5) puede escribirse

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} \frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} \frac{1}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \frac{1}{s-\alpha_n}$$

tomando transformada inversa de Laplace*, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} e^{\alpha_2 t} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} e^{\alpha_n t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

---

* ver tabla I.

Teorema 2.

Sea $\frac{P(s)}{Q(s)}$ un polinomio , donde el grado de $P(s)$ es menor que el grado de $Q(s)$ que es de grado n, donde $Q(s)$ tiene una raíz "a " de multiplicidad " n " , entonces $\frac{P(s)}{Q(s)}$ se puede escribir como

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{s-a} \qquad (6)$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = e^{at}\left\{ \frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_m \right\}$$

Demostración .Multiplicando ambos lados de la ecuación (6) por $(s-a)^m$, se tiene

$$\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m = A_1 + A_2(s-a) + \cdots + A_m(s-a)^m \qquad (7)$$

tomando límite cuando $s \to a$ en ambos lados de la ecuación anterior , se obtiene que

$$\lim_{s\to a} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m = A_1$$

tomando la derivada con respecto a s en la ecuación (7) , tenemos

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{P(s)(s-a)^m}{Q(s)} \right] = A_2 + 2A_3(s-a) + \cdots + (m-1)A_m(s-a)^{m-2} \qquad (8)$$

tomando límite a ambos lados de la ecuación (8) cuando

$s \to a$, tenemos

$$\lim_{s\to a} \frac{d}{ds}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right] = A_2$$

tomando la segunda derivada con respecto a s de la ecuación (7) tenemos

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right] = 2A_3 + 3\cdot 2\, A_4(s-a) + \cdots + (m-1)\,m \quad A_m(s-a)^{m-2} \quad (9)$$

tomando límite a la ecuación (9) cuando $s \to a$ se obtiene

$$\lim_{s\to a} \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right] = 2A_3$$

de donde

$$A_3 = \frac{1}{2} \lim_{s\to a} \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right]$$

para hallar el coeficiente general A_K derivamos la ecuación (7), K-1 veces y tomamos el límite cuando $s \to a$, en éste caso

$$A_K = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to a} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right]$$

ahora la ecuación (6) puede escribirse como

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to a}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right]\frac{1}{(s-a)^m} + \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right]\frac{1}{(s-a)^{m-1}} + \cdots +$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to a}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^m\right]\frac{1}{(s-a)}. \quad (10)$$

tomando transformada inversa de Laplace* a la ecuación (10) tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \left[\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \quad + A_m\right] e^{at}$$

Nuestro objetivo es usar la transformada de Laplace para resolver cierto tipo de problemas , a saber, aquellos que pueden representarse por un modelo matemático que consta de una ecuación diferencial lineal , que tiene como término no homogéneo una función seccionalmente contínua y de orden exponencial .Es por ello que se obtendrán las transformadas de las funciones que con mayor frecuencia se presentan en circuitos eléctricos .

Teorema. Suponga que $f(t)$ es continua y que $f'(t)$ es seccionalmente continua en cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$, suponga además que existen constantes c , α y M tales que $|f(t)| \leq c\,e^{\alpha t}$ para $t \geq M$ .Entonces existe $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ para $s \to \alpha$ y se tiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Demostración . Por definición

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt \qquad (11)$$

Tomando $u = e^{-st} \Rightarrow du = -s e^{-st}$

$dv = f'(t)dt \Rightarrow v = f(t)$

integrando por partes el segundo miembro de la ecuación (11)

---

* ver tabla I.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{A\to\infty} e^{-st}f(t)\Big|_0^A + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad .$$

Teorema. Si $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial , y si $f^{(n)}(t)$ es continua a trozos para $t \geq 0$ entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

La demostración se hará por medio de Inducción Matemática .

supongamos que vale para $n=1$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

lo suponemos válido para $n=k$

$$\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} = s^k\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0) . \quad (12)$$

por demostrar que vale para $n=k+1$, es decir , demostraremos que

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} = s^{k+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k} f(0) - s^{k-1} f'(0) - \cdots - f^{(k)}(0)$$

tomemos $\quad g(t) = f^{(k)}(t) \qquad (13)$

donde $f^{(k)}(t)$ es la k-ésima derivada de $f(t)$, derivando la ecuación (13)

$$g'(t) = f^{(k+1)}(t) \qquad (14)$$

tomando Transformada de Laplace a la ecuación (14)

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \qquad (15)$$

pero por la ecuación (13)

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f^{k}(t)\} \qquad (16)$$

donde el segundo miembro de la ecuación (16) esta dado por la ecuación (12) , teniendo así

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = s^{k}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) \qquad (17)$$

sustituyendo la ecuación (17) en la ecuación (15) se tiene

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\left[s^{k}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)\right] - g(0) \qquad (18)$$

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s^{k+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \cdots - s f^{(k-1)}(0) - g(0)$$

(18a)

pero nor la ecuación (13) sabemos que $g(0) = f^k(0)$ que sustituyendo en la ecuación (18a), tenemos

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}$$

$$= s^{k+1}\mathcal{L}\{f(t) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \cdots - s f^{(k-1)}(0) - f^k(0).$$

Teorema .Si $f(t)$ es una función seccionalmente continua y de orden exponencial , entonces

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(t)\,dt\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s}$$

Demostración .Por definición

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(t)\,dt\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^t f(r)\,dr\right]dt \qquad (19)$$

tomando

$$u = \int_0^t f(r)\,dr \qquad dr = e^{-st}\,dt \quad \Longrightarrow$$

$$du = f(t \qquad , \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

efectuamos la integral del lado derecho de la ecuación (19) por partes , así

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\} = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(r)dr\Big|_0^A\right] - \int_0^\infty -\frac{1}{s}f(t)e^{-st}dt$$

con lo cual se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)\,dr = 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}\right.$$

Transformada de una función periódica .

Teorema . Si $f(t)$ es seccionalmente continua para $t \geq 0$ y de orden exponencial , si $f(t)$ es periódica de período T, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Demostración .

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt \qquad (20)$$

tomando $t = v + T$ en la segunda integral del segundo miembro de (20)

$$\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-sT}e^{-sv}f(v+T)\,dv \qquad *$$

$$= e^{-sT}\int_0^\infty e^{-sv}\,f(v)\,dv$$

ya que por ser periódica la función f, de periodo $T \Rightarrow f(t+T)=f(t)$
en éste caso $f(v) = f(v+T)$

$$\therefore \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad (21)$$

sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (20) se tiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad (22)$$

despejando $\mathcal{L}\{f(t)\}$ en la ecuación (22) se tiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Transformada de la función " Escalón Unitario ".

La función escalón unitario cuya gráfica aparece abajo , se denota por $u(t)$ y se define como

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

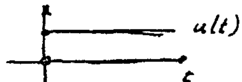


FIGURA 1. FUNCION ESCALON UNITARIO

evaluamos su transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}(1)\, dt$$

---

* Para $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ se integra en el eje t desde $t=0$ a $t=\infty$ al hacer el cambio de variable $v = t - T$ entonces la $\int e^{-s(v+T)} f(v+T)dv$ se integra en el eje v , desde $v = T-T = 0$ a $t = \infty - T \rightarrow \infty$.

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^A = \frac{1}{s} \quad para \quad s>0$$

La función escalón unitario desplazada , cuya grá fica se encuentra abajo , se define como

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & si \ t \geq a \\ 0 & si \ t < a \end{cases} \quad , a>0$$

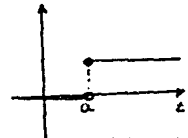


Figura 2. Escalón unitario desplazado.

evaluando su transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a)\, dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st} \cdot 0 \, dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_a^A$$

$$= \frac{e^{-sa}}{s} \quad para \quad s>0$$

Cuando tenemos una ecuación diferencial cuyo tér mino no homogéneo es una función $f(t)$ seccionalmente continua y de orden exponencial , el método recomendable para resoler- la es el de transformada de Laplace , ya que éste evita el tener que calcular las diferentes soluciones para los di- ferentes intervalos donde $f(t)$ es seccionalmente continua . Al aplicar transformada de Laplace a la ecuación antes descrita , será de mucha utilidad el siguiente resultado para obtener la transformada del término no homogéneo .

Si $f(t)$ es una función seccionalmente continua en $[0, a_2]$ y si

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } 0 \leq t < a_1 \\ f_2(t) & \text{si } a_1 \leq t < a_2 \end{cases} \qquad (23)$$

deseamos escribir $f(t)$ en forma adecuada para obtener facilmente su transformada de Laplace , ésto se logra de la siguiente manera ; utilizando la función escalón unitario.

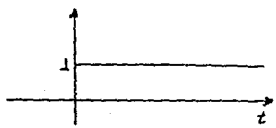


Figura 3 . Gráfica de $u(t)$

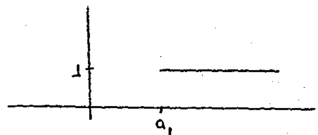


Figura 4. Gráfica de $u(t-a_1)$

en la figura (3) tenemos la gráfica de $u(t)$ y la de $u(t-a)$ en la figura 4 ,si sumamos $u(t)$ con $-u(t-a)$, la gráfica que se obtiene es la de la figura (6)

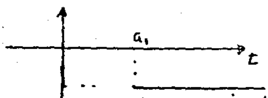


Figura 5 Gráfica de $-u(t-a_1)$

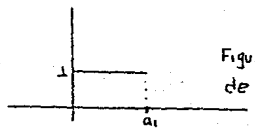


Figura 6. Gráfica de $u(t)-u(t-a_1)$

que al multiplicarla por $f_1(t)$ nos permite describir a $f(t)$ en el intervalo $[0, a_1)$.

Ahora si sumamos $u(t-a_1)$,figura (4), con $-u(t-a_2)$ de la figura (7) obtenemos la gráfica de la función $u(t-a_1)-u(t-a_2)$ dada en la figura (8) que al multiplicarse por $f_2(t)$ nos permite describir $f(t)$ en el intervalo $[a_1, a_2)$

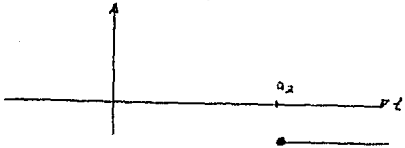


Figura 7. Gráfica de $-u(t-a_2)$

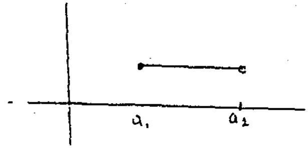


Figura 8. Gráfica de $u(t-a_1)-u(t-a_2)$

con lo cual tenemos que la función (23), también se puede escribir como :

$$f(t) = u(t)\, f_1(t) - u(t-a_1)\, f_1(t) + u(t-a_1)\, f_2(t) - u(t-a_2)\, f_2(t)$$

$$f(t) = f_1(t)\,[u(t)] + [f_2(t) - f_1(t)]\,u(t-a_1) - f_2(t)\,u(t-a_2)$$

con lo que $f(t)$ así expresada facilita calcular se transformada de Laplace .

Generalizando el caso anterior para cuando $f(t)$ está dada como

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si} \quad 0 \le t < a_1 \\ f_2(t) & \text{si} \quad a_1 \le t < a_2 \\ \vdots & \\ f_n(t) & \text{si} \quad a_{n-1} \le t < a_n \\ 0 & \text{si} \quad a_n \le t \end{cases}$$

se tiene

$$f(t) = f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]\,u(t-a_1) + [f_3(t) - f_2(t)]\,u(t-a_2) + \cdots +$$

$$[f_n(t) - f_{n-1}(t)]\,u(t-a_{n-1}) - f_n(t)\,u(t-a_n).$$

Tabla I

Tranformadas de algunas funciones básicas.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$, $s>0$
t^n, n entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s>a$
sen at	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$
cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$
e^{at} sen bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$
$t^n e^{at}$, n entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s>a$

Tabla II

Algunas Propiedades de la Transformada de Laplace

prop. linealidad	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
transformada de la derivada	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
transformada de n-ésima derivada	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
Transformada de la función escalón	$u(t)$	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
transformada de la función escalón trasladada	$u(t-a)$	$\frac{e^{-sa}}{s}$, $s > 0$
transformada de la impulso unitario	$\delta(t)$	1
transformada de la integral	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Convolución	$\int_0^t f(z) g(t-z)\,dz$	$F(s)G(s)$
	$\int_0^t f(t-z) g(z)\,d$	$F(s)G(s)$
traslación	$f(t-a)\,u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$

Apéndice C

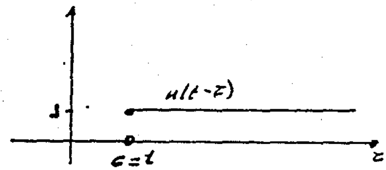
Convolución

Algunos resultados importantes usados en la demostración del teorema de convolución son :

1) $\mathcal{L}\{f(t-c)\,u(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$

2) $u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-\tau < 0 \\ 1 & \text{si } t-\tau \geq 0 \end{cases} \equiv$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ 1 & \text{si } t \geq \tau \end{cases}$$



Teorema de Convolución.

Si $H(s) = F_1(s)\,F_2(s)$ donde $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ y $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$

entonces

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ es la convolución de $f_1(t)$ con $f_2(t)$

$h(t) = f_1(t) * f_2(t)$, donde $h(t)$ esta dada por

$$h(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Demostración.

$$F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt \text{ , por definición}$$

$$F_2(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_2(\tau)\, d\tau \qquad \text{cambio de variable muda}$$

$$F_2(s) F_1(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_2(\tau)\, F_1(s)\, d\tau \qquad \text{multiplicando por } F_1(s)$$

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \left[e^{-s\tau} F_1(s) \right] d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \left[\mathcal{L}\{ f_1(t-\tau) u(t-\tau) \} \right] d\tau$$

resultado 1)

$$= \int_0^\infty f_2(\tau) \int_0^\infty e^{-st} f_1(t-\tau)\, u(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty f_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \right] dt$$

cambio de orden de integración

$$= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\, d\tau \right] dt$$

resultado 2)

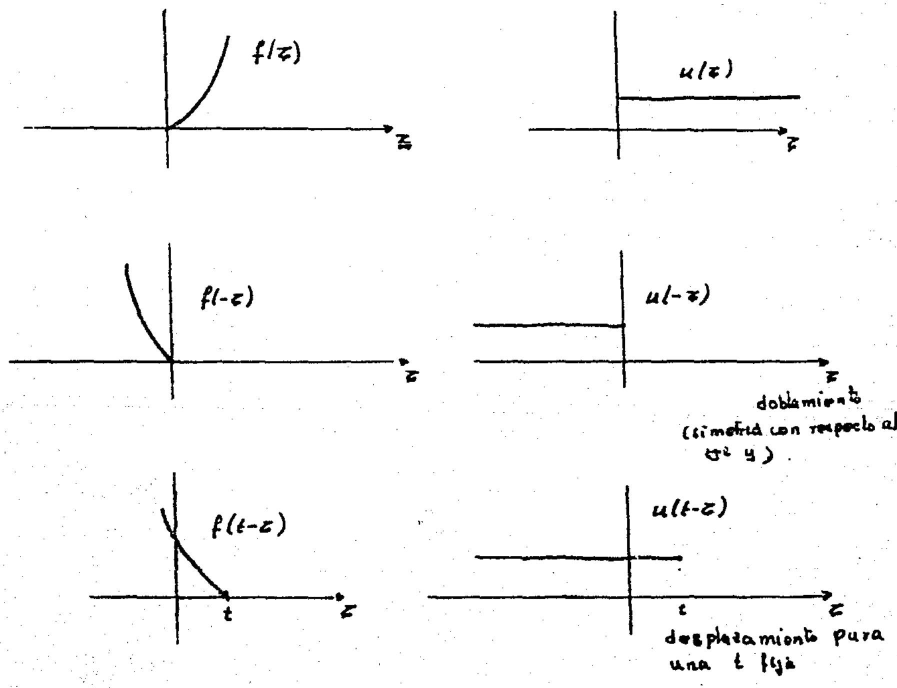
$$F_1(s)\, F_2(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\, d\tau \right\}$$

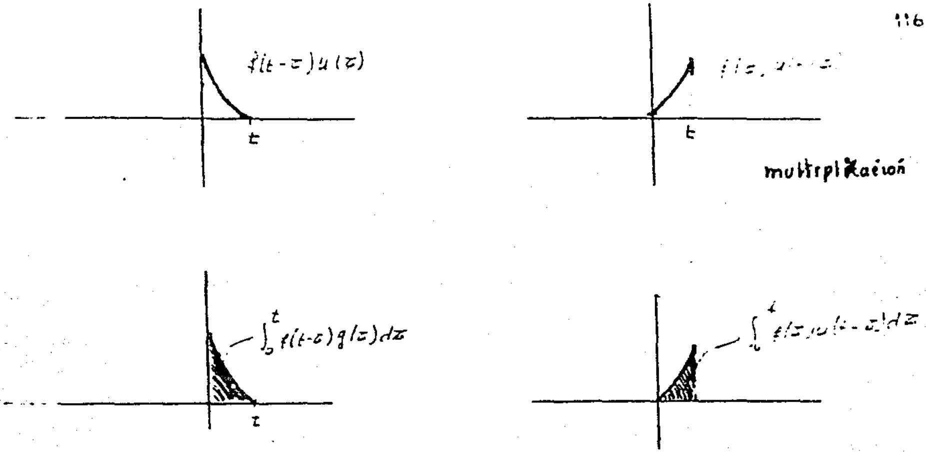
aplicando transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\,F_2(s)\} = \int_0^t f_2(\tau)\,f_1(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \int_0^t f_2(\tau)\,f_1(t-\tau)\,d\tau$$

La convolución de $f * g$ equivale al vocablo alemán faltung ; que significa : 1) doblamiento ,2) desplazamiento, 3) multiplicación y 4) integración .En ésta parte mostraremos como se trabaja gráficamente la convolución para dos funciones particulares $f(t) = t^2$ y $g(t) = u(t)$





la parte sombreada representa el valor de la integral . La región sombreada en la figura de la izquierda siempre es la simétrica de la figura de la derecha .

Bibliografía

1. Alternanting Current Networks
Bustamante Llaca Enrique
Limusa. 1976.

2. Análisis de Circuitos Eléctricos
Jiménez Garza Ramos
Limusa. 1980.

3. Analisis de Redes
M.E. Van Valkenburg
Limusa. 1983.

4. Ecuaciones Diferenciales y Problemas
con valores en la frontera.
William E. Boyce ,Richard C. Diprima
Limusa. 1980.

5. Fundamentos de Física Vol II.
David Halliday , Robert Resnick
Cecsa. 1984.

6. Introduction to Automatic Control Systems
Robert N. Clark
John Wiley .

7. Matemáticas para Electrotécnicos
D.P. Howson
Labor