2 cj
11

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORIA DE GRUPOS ABELIANOS

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de

MATEMATICO

presenta

CLOTILDE GARCIA VILLA

México, D. F. 1986

INDICE.

§1. Teoremas de Reducción.

En este capítulo iniciamos el estudio de los grupos divisibles. Una de sus propiedades mas sobresalientes, es que son sumandos directos de cada grupo que los contiene. Mas adelante, veremos que éstos estan totalmente caracterizados, y de hecho sirven para determinar el rango de un grupo.

Definición 1.1. Para cada grupo G, definimos $\tau G = \{x \in G \mid \exists n,\ nx = 0\}$ y lo llamamos el <u>subgrupo de torsión</u> de G.
Si $G = \tau G$, se dice que G es de <u>torsión</u> y $\tau G = 0$, se dice que G es <u>libre de torsión</u>.

Definición 1.2. Un grupo H es una <u>extensión</u>

de un grupo A, mediante un grupo B.
si M contiene un subgrupo A', isomorfo a A, tal que $M/A' \cong B$. Es decir, existe una sucesión exacta corta $0 \to A \to M \to B \to 0$.

Proposición 1.3. Todo grupo G es extensión de un grupo de torsión, mediante un grupo libre de torsión.

Dem: la sucesión exacta

$$0 \to \tau G \to G \to G/\tau G \to 0$$

cumple con los requerimientos.

Definición 1.4. Un grupo G es divisible si $G = nG \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. G es p-divisible, para un primo p, si $G = p^n G \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.5. Sea D divisible, y $\varphi: D \to G$.

un epimorfismo. Entonces G es divisible.

Dem: Sea $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$. Como φ es epi, existe $d \in D$ tal que $\varphi(d) = g$. Como D es divisible, existe $d' \in D$ tal que $d = nd'$. Luego $\varphi(d) = \varphi(nd') = n\varphi(d') = g$.

Proposición 1.6. Un p-grupo G es q-divisible para cada primo $q \neq p$.

Dem: Sea $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $p^r = o(g)$

Se tiene que $(p^r, q^n) = 1 \Rightarrow$ existen $\lambda, \gamma \in \mathbb{Z}$ tales que $\lambda p^r + \gamma q^n = 1$.

$\Rightarrow g = \lambda p^r g + \gamma q^n g = \gamma q^n g = g$.

Proposición 1.7. Sea G un grupo y $G' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nG$. Si G es libre de torsión, entonces G' es divisible.

Dem: Sea $m \in \mathbb{N}$ y $x \in G'$. Se tiene que $x = mg$ $g \in G$. Demostraremos que $g \in G'$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = mng' = mg$. Como G es libre de torsión, $g = ng'$.

Proposición 1.8. Si la ecuación $mx = ng$ con $(m,n)=1$, tiene solución x en un grupo G, entonces la ecuación $my = g$ tiene solución y en G.

Dem: Como $(m,n)=1$, existen $\lambda, \gamma \in \mathbb{Z}$ tales que $\lambda m + \gamma n = 1 \Rightarrow \lambda m g + \gamma n g = g$.
$\Rightarrow g = m(\lambda g + \gamma x)$.

Proposición 1.9. Sea G un grupo y $D \leq G$ D divisible. Entonces D es sumando directo de G.

Dem: Sea $\mathcal{F} = \{ H \leq G \mid H \cap D = 0 \}$. Es fácil verificar que $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis del

lema de Zorn. Escojamos H maximal en $\mathcal{F}$.
Se tiene que $G/_{H+D}$ es de torsión, pues si $\bar{0} \neq \bar{g} \in G/_{H+D} \Rightarrow (H+\langle g \rangle) \cap D \neq 0$. por la maximalidad de H. Entonces existen $n \neq 0$, $h \in H$, $d \in D$ $\cdot \ni \cdot$ $h + ng = d \in D$.
$\Rightarrow n\bar{g} = \bar{0}$.

Demostraremos que $G = H + D$. Supongamos que $G/_{H+D} \neq 0$, y sea $x \in G$ tal que $\bar{x}$ tiene orden p, para algún primo p.
Es decir, $px = h + d$, $h \in H$, $d \in D$.
Como D es divisible, existe $d_1 \in D$ tal que $d = pd_1$. Sea $z = x - d_1$. Se tiene que $\bar{x} = \bar{z} \Rightarrow o(\bar{z}) = p$. Como $z \in G$, $z \notin H$. existe $n \neq 0$, $h_1 \in H$ y $d_2 \in D$ tal que $h_1 + nz = d_2 \neq 0 \in D$. Como $n\bar{z} = \bar{0}$, se tiene que p/n, $n = pm$. Entonces

$0 \neq d_2 = h_1 + nz = h_1 + m(pz)$

$= h_1 + m(px - pd_1) = h_1 + m(h + d - d)$

$= h_1 + mh \in H \cap D$ ↯ .

$\therefore \quad G = H \oplus D$.

Definición 1.10. Un grupo G se llama <u>reducido</u> si su único subgrupo divisible es el cero.

Proposición 1.11. Cada grupo G, tiene un único subgrupo divisible máximo D, tal que $G = D \oplus R$, donde R es reducido.

Dem: Sea D el subgrupo generado por todos los grupos divisibles de G.

$D = \sum_{i \in I} D_i \qquad D_i \leq G$ divisible.

Si $x \in D \Rightarrow x = d_1 + \cdots + d_r, \; d_i \in D_i$.

Si $n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, entonces $d_i = n d_i'$ $d_i' \in D_i$.

$\Rightarrow$ $x = n(d_1' + \cdots + d_r')$, luego D es divisible.

Por la proposición 1.9, $G = D \oplus R$.

De la construcción de D, es claro que R no tiene subgrupos divisibles distintos de cero.

Definición 1.12. Para cada primo p, y para cada grupo G, definimos $\tau_p G = \{x \in G \mid \exists n,\ p^n x = 0\}$. y le llamamos, la <u>componente</u> p-<u>primaria</u> <u>de</u> <u>G</u>.

Proposición 1.13. Si G es de torsión, entonces G se descompone de manera única como la suma directa de sus componentes p-primarias.

Dem: Sea $x \in G$, $x \neq 0$ y $m = o(x)$.

Sea $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ su factorización en primos. distintos. Sea $m_i = \dfrac{m}{p_i^{\alpha_i}}$ $\forall_{i=1}^{r}$.

Como $(m_1, \dots m_r) = 1$, existen $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{Z}$ tales que $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_r m_r = 1$.

Entonces $x = \lambda_1 m_1 x + \dots + \lambda_r m_r x$ y $m_i x \in G_{p_i}$.

$\therefore\ G = \sum_p \tau_p G$.

Sea $x_1 + \dots + x_s = 0$ mínima con $x_i \in \tau_{p_i} G$.

sea $p_1^{r_1} = o(x_1)$. Entonces, $p_1^{\alpha_1}(x_1 + \dots + x_s) = 0$.

pero $p_1^{\alpha_1}(x_1 + \dots + x_s) = p_1^{\alpha_1} x_2 + \dots + p_1^{\alpha_1} x_s$. ∇.

§ 2. Subgrupos puros, básicos. Grupos acotados y grupos finitamente generados.

Uno de los conceptos más importantes en la teoría de grupos abelianos es el de pureza. Básicamente, su importancia reside en el papel que desempeñan para probar la existencia de sumandos directos.

Definición 2.1. H es subgrupo puro de G si
$H \cap nG = nH \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.
H es subgrupo p-puro de G (p primo) si
$H \cap p^n G = p^n H \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.2. Son subgrupos puros de G.
a) Sumandos directos.
b) τG

c) Subgrupos divisibles.

Dem: Sea $G = H \oplus K$ y $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Tomemos $h = ng \in H \cap nG$. Se tiene que

$g = g_1 + g_2$, $g_1 \in H$, $g_2 \in K$. Luego,

$h = ng_1 + ng_2 \Rightarrow ng_2 \in H \cap K = \{0\}$.

$\therefore$ $h = ng_1 \in nH$.

b) Sea $x = ng \in \tau G \cap nG$; $m = o(x)$

entonces $(mn)g = 0 \Rightarrow g \in \tau G$.

c) Es claro.

Proposición 2.3. Sean $C \leq B \leq A$.

i) Si C es puro (p-puro) en B y B es puro (p-puro) en A, entonces C es puro (p-puro) en A.

ii) Si C es puro en A y B/C es puro en A/C, entonces B es puro en A. (Lo correspondiente para p-puros).

iii) Si C y B son puros en A, entonces B/C es puro en A/C.

iv) Si $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ es unión ascendente de subgrupos puros de A, entonces B es puro en A.

Dem:

i) Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ y $c = na \in C \cap nA$. entonces, existe $b \in B$ t.q. $c = nb$, pues B es puro en A. Como C es puro en B, existe $c' \in C$ tal que $c = nb = nc'$.

ii) Sea $b = na \in B \cap nA$. Entonces $b + C = na + C \in B/C \cap n(A/C) = n(B/C)$, luego existe $b' \in B$, tal que $na + C = nb' + C$ $\Rightarrow n(a - b') \in C \cap nA = nC$. Entonces existe $c \in C$ t.q. $b = na = n(b' + c) \in nB$.

iii) Sea $b + C = na + C \in B/C \cap n(A/C)$. Entonces $na = b + c \in B \cap nA = nB$, $c \in C$

Luego, existe $b' \in B$ tal que $na = nb'$.

$\therefore \quad b + C = nb' + C$.

iv) Sea $b = na \in B \cap nA$. Existe $j \in I$ tal que $b \in B_j$. Como B_j es puro en A, $b = nb_j \in nB$.

Proposición 2.4. Una condición suficiente para que $H \leq G$ sea puro, es que G/H sea libre de torsión.

Dem: Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $h = ng \in H \cap nG$. Entonces $n(g + H) = 0 + H$. Como G/H es libre de torsión, $g \in H$.

Observación: Cabe aclarar que si H es puro en G, no necesariamente G/H es libre de torsión. Por ejemplo: $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$ es puro en $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$, pero $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p \Big/ \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$ no es libre de torsión, pues el $(1,1,\dots,1,\dots) + \bigoplus_{N} \mathbb{Z}_p \neq \bar{0}$ y p lo anula.

Proposición 2.5. Si G es q-divisible para cada primo $q \neq p$. Entonces $H \leq G$ es puro en G si y sólo si H es p-puro en G.

Dem:

$\Rightarrow$) Claramente puro $\Rightarrow$ p-puro.

$\Leftarrow$) Sea $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $m = p^e q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}$.

Sea $x \in q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}(H \cap p^e G) \Rightarrow x = q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r} h$, $h \in H \cap p^e G \Rightarrow x = q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r} p^e g$, $g \in G$.

$\therefore$ $x \in H \cap mG$.

Sea $h \in H \cap mG \Rightarrow h = mg$, $g \in G$, entonces $h = q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r} p^e g \Rightarrow h \in q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}(H \cap p^e G)$.

Definición 2.6 a) Un subconjunto $X \subseteq G$ es <u>independiente</u> si para $x_1, \dots x_r \in X$, con $n_1 x_1 + \dots + n_r x_r = 0 \Rightarrow n_i x_i = 0 \ \forall_{i=1}^{r}$

b) Un subconjunto $X \subseteq G$, independiente, es <u>puro independiente</u> si $\bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$ es subgrupo puro de G.

c) Un subconjunto $X \subseteq G$ independiente, es <u>p-puro independiente</u>, si para cada $x \in X$, $o(x) = \infty$ ó $o(x)$ es una potencia de algún primo p y $\bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$ es subgrupo p-puro de G.

Definición 2.7. Sea p-primo, G un grupo. Llamamos a $B_p \leq G$ un subgrupo <u>p-básico</u> si satisface las siguientes condiciones:

1) B_p es suma directa de cíclicos y τB_p es p-primario.

2) B_p es p-puro en G.

3) G/B_p es p-divisible.

Proposición 2.8. Un subgrupo puro, cíclico y de torsión de un grupo G es sumando directo.

Dem: Sea $C = \langle c \rangle$ puro de orden n.

Entonces $C \cap nG = nC = 0$.

Mediante el lema de Zorn, podemos escoger H subgrupo de G, máximo respecto de $nG \subseteq H$ y $H \cap C = \{0\}$. Demostraremos que $G = H \oplus C$.

Supongamos que $G \neq H + C$. Se tiene que $G/_{H+C}$ es de torsión. Sea $0 \neq \bar{g} \in G/_{H+C}$ tal que $o(\bar{g}) = p$ para algún primo p.

Como $nG \subseteq H + C$, se tiene que p/n, $n = pm$.

Por tanto $h + pg = tc \in C$, $h \in H$. De donde

$mh + mpg = mh + ng = mtc \in H \cap C = \{0\}$.

En consecuencia $n/tm \Rightarrow p/t$. $t = ps$.

Sea $z = g - sc$. Observemos que $z \notin H$.

Entonces $(H+\langle z\rangle)\cap C \neq 0$ por maximalidad de H. Sea $h_1 + rz = x \neq 0 \in C$, $h_1 \in H$.

Se tiene que p/r, $r = pr_1$ pues $o(\bar{z}) = o(\bar{g})$.

Luego, $0 \neq x = h_1 + rz = h_1 + r_1 pz$

$= h_1 + r_1(pg - psa) = h_1 + r_1(h + ta - ta)$

$= h_1 + r_1 h \in H \cap C$ ∀

Proposición 2.9. Si B es puro (p-puro) en A y A/B es suma directa de cíclicos (con $\tau(A/B)$ p-primario) entonces B es sumando directo de A.

Dem: Probaremos el teorema para puros, el caso p-puro es análogo.

Se tiene que $A/B = \bigoplus_{i \in I} \langle y_i + B\rangle$.

Si $y_i + B$ tiene orden finito n_i, entonces $n_i y_i \in B \cap n_i A = n_i B$. Luego $n_i y_i = n_i b_i$, $b_i \in B$. Sea $x_i = y_i - b_i$. Entonces

$x_i + B = y_i + B$. Además, si $m = o(x_i)$

$\Rightarrow m\overline{y_i} = \overline{0} \Rightarrow n_i / m$, por otro lado

$n_i x_i = n_i y_i - n_i b_i = 0 \Rightarrow m / n_i \therefore m = n_i$.

Si $y_j + B$ tiene orden infinito, entonces y_j tiene orden infinito y ponemos $x_j = y_j$.

Así, obtenemos una familia $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq A$, tal que $\overline{x_i} = \overline{y_i}$ y el orden de x_i en A es el mismo que el orden de $\overline{y_i}$ en A/B.

Sea H el subgrupo generado por la familia $\{x_i\}_{i \in I}$. Probaremos que $A = B \oplus H$.

Sea $a \in A$, entonces $\overline{a} = \sum_{j=1}^{t} r_j \overline{x_j}$

$\Rightarrow a - \sum_{j=1}^{t} r_j x_j = b \in B \quad \therefore \quad a \in B + H$.

Sea $b \in B \cap H \Rightarrow b = \sum_{j=1}^{r} m_j x_j$

$\Rightarrow \overline{b} = \sum_{j=1}^{r} m_j \overline{x_j} = \overline{0}$

Entonces n_i / m_i si $o(x_i) = n_i$ y $m_i = 0$ si $o(x_i) = \infty \quad \therefore \quad m_i x_i = 0 \Rightarrow b = 0$

Proposición 2.10. Cada grupo G es extensión de una suma directa de grupos cíclico, mediante un grupo de torsión.

Dem: mediante el lema de Zorn, podemos escoger $F \leq G$, máximo respecto de ser suma directa de cíclicos.

Es claro que la sucesión $0 \to F \to G \to G/F \to 0$ es exacta. Veamos que G/F es de torsión.

Se tiene que F es esencial en G, pues si $H \leq G$, $H \neq 0$ y $F \cap H = 0$, entonces existe $h \in H$, $h \notin F$. Luego $F + \langle h \rangle$ es directa $\not\!\!\!\!\;$.

Ahora bien sea $\bar{g} \in G/F$, $\bar{g} \neq \bar{0}$. Como F es esencial en G, $F \cap \langle g \rangle \neq 0$ $\therefore$ $\exists\, n \neq 0$ $\ni$ $ng \in F$, de donde G/F es de torsión.

Definición 2.11. Para cada grupo G y $\forall n \in \mathbb{N}$, definimos $G[n] = \{ x \in G \mid nx = 0 \}$.

Si G es un p-grupo, llamamos $G[p]$,
el <u>soclo de G</u>.

Proposición 2.12. Si G es un p-grupo tal que cada elemento de su soclo es p-divisible, entonces G es divisible.

Dem: Como G es p-grupo G es q-divisible, para cada primo $q \neq p$.

Es claro que $G = \bigcup_n G[p^n]$. Probaremos por inducción sobre n que $G[p^n] \subseteq pG$.

Por hipótesis $G[p] \subseteq pG$. Supongamos que $G[p^m] \subseteq pG$, $m \leq n$.

Sea $x \in G[p^{n+1}]$. Se tiene que $G[p^n] \subseteq G[p^{n+1}]$.

Si $x \in G[p^n] \Rightarrow x \in pG$. Supongamos que $x \notin G[p^n]$, entonces $p^n x \neq 0$ y $p^n x \in G[p]$.

$\Rightarrow p^n x = p^{n+1} g$, $g \in G \Rightarrow p^n(x - pg) = 0$

$\Rightarrow \; x - pg \in G[p^n] \Rightarrow x - pg = pg', \; g' \in G$

$\Rightarrow \; x \in pG.$

Proposición 2.13. Sea G un p-grupo tal que $G \neq pG$, entonces G contiene un subgrupo C no cero, cíclico y p-puro, que es p-primario o tiene orden infinito.

Dem: Consideremos 2 casos;

a) $p(T_pG) \neq T_pG$.

b) $p(T_pG) = T_pG$.

a) Por la proposición 2.12. podemos escoger un elemento a de orden p en T_pG, tal que existe un entero mas grande $n \geq 0$ tal que la ecuación $p^n x = a$ tiene solución en T_pG. Sea $x = c$ solución, y consideremos $C = \langle c \rangle$. Afirmo que C es p-puro en T_pG.

Supongamos que no, entonces existe $e \geq 0$ y $mc \in C \cap p^e \tau_p G$ tal que $mc \notin p^e C$.

Se tiene que $mc = p^r g$, y escribamos $m = p^r q$ $(p, q) = 1$. Podemos suponer que $e > r$ y $n+1 > r$.

ya que si $e \leq r \Rightarrow p^e (p^{r-e} q c) = p^e g = mc$ $\Rightarrow mc \in p^e C$ ⚡ y si $n+1 < r \Rightarrow n = r-1+k,\ k \geq 1$ y $p^n c = a = p^{r-1+k} c = p^r (p^{k-1}) c \Rightarrow p^{k-1} c$ es solución de $p^r x = a$, pero n era máximo con ésta propiedad.

Sea $s = n+1-r$, entonces $p^{e+s-1} g = p^{e+n-r} g$ $= p^e p^{n-r} g = p^n q c = q a$.

Entonces $p^{e+s-1} x = a$ tiene solución ⚡.

$\therefore$ C es p-puro en $\tau_p G$ y como $\tau_p G$ es p-puro en G $\Rightarrow$ C es p-puro en G.

b) $p(\tau_p G) = \tau_p G$.

Se tiene que $\tau_p G$ es divisible, por tanto .

$\tau_p G$ es sumando directo de G, $G = \tau_p G \oplus H$

Entonces $\tau_p H = 0$ y $pH \neq H$, pues si $pH = H$

y $g \in G$, entonces $g = h + x$, $h \in H$, $x \in \tau_p G$

de donde $g = ph' + px'$, $h' \in H$, $x' \in \tau_p G$.

$\Rightarrow g \in pG \Rightarrow pG = G$ $\not\!\!\!\!\!\!\!\!$ $\mathbb{Y}$.

Sea $b \in H$, $b \notin pH$ y $B = \langle b \rangle$. Afirmo

que B es p-puro en H.

Sea $mb = p^n h \in B \cap p^n H$. y escribamos

$m = p^r q$, $(p, q) = 1$. Si $n > r$, entonces

$p^r q b = p^n h \Rightarrow p^{n-r} p^r q b = p^{n-r} p^n h$

como $\tau_p H = 0$, $qb = p^{n-r} h$ y $(q, p^{n-r}) = 1$

$\Rightarrow$ la ecuación $px = b$ tiene solución en H $\mathbb{Y}$.

$\therefore$ B es p-puro en H, como H es sumando

directo de G, H es p-puro en G.

$\therefore$ B es p-puro en G.

Proposición 2.15. Sea $B = \bigoplus_{i \in I} \langle b_i \rangle$ subgrupo de G tal que τB es p-primario. Son equivalentes:

a) $\{b_i\}_{i \in I}$ es independiente maximal p-pura en G.

b) B es subgrupo p-básico.

Dem:

($a \Rightarrow b$) Solo hay que demostrar que G/B es p-divisible. Supongamos que $p(G/B) \neq G/B$. Entonces existe $0 \neq C/B \leq G/B$, cíclico y p-puro tal que C/B tiene orden infinito o C/B es p-primario.

Si C/B tiene orden infinito, $C/B = \langle \bar{x} \rangle$. entonces $n\bar{x} \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$\Rightarrow B \cap \langle x \rangle = 0$. Además $C = B + \langle x \rangle$

Por tanto $C = B \oplus \langle x \rangle$. Como B es p-puro en G y $C/B \cong B \oplus \langle x \rangle / B$ es p-puro en G.

Entonces C es p-puro en G. Luego $\{b_i\}_{i\in I} \cup \{x\}$ es una familia independiente p-pura en G $\forall$.

Si C/B es p-primario, se tiene que $\tau(C/B)$ es p-primario. Entonces por la proposición 2.9. B es sumando directo de C.

De donde $\{b_i\} \cup \{x\}$ es independiente p-pura en G $\forall$.

$(b \Rightarrow a)$ Si para algún $x \in G$ de orden una potencia de un primo p ó de orden infinito, se tiene que $\{b_i\}_{i\in I} \cup \{x\}$ es p-puro independiente, entonces $\langle x\rangle \cong \langle x\rangle \oplus B/B$ es p-puro en G/B que es p-divisible. Pero x no es divisible por p.

Proposición 2.16. Cada grupo G, tiene un subgrupo p-básico, y cualesquiera 2 subgrupo p-básico de G son isomorfos.

Dem: Si $G = pG$, entonces el subgrupo trivial es p-básico. Supongamos $G \neq pG$.

Mediante el lema de Zorn podemos escoger una familia $\{b_i\}_{i \in I}$ p-pura independiente maximal en G. Entonces $B = \bigoplus_{i \in I} \langle b_i \rangle$ es subgrupo p-básico de G.

Ahora bien, sea B_0 el subgrupo generado por los b_i's de orden infinito. Se tiene que B_0 es libre. Para cada $n \geq 1$. Sea B_n el subgrupo generado por los b_i's de orden p^n.

Como $\mathbb{Z}_{p^n} \cong \langle b_i \rangle$ con $o(b_i) = p^n$, se tiene que $B_n \cong \bigoplus_{I_n} \mathbb{Z}_{p^n}$. Escribamos

$B = B_0 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_n \oplus \cdots$, entonces

$\tau B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots$. Afirmo que τB es subgrupo p-básico de $\tau_p G$.

Sea $n \geq 0$ y $x \in \tau B \cap p^n \tau_p G$, entonces $x = p^n g$, $g \in \tau_p G$. Como B es p-puro en G $x = p^n b$, $b \in B$, de donde $x \in p^n \tau B$.

$\therefore$ τB es p-puro en $\tau_p G$.

Si $\bar{0} \neq \bar{x} \in \tau_p G/_{\tau B}$ y $n \geq 0$. Como $G/_B$ es p-divisible, existe $y + B \in G/_B$ tal que $x + B = p^n y + B$. Es claro que $y \in \tau_p G$.

$\Longrightarrow$ $x + \tau B = p^n y + \tau B$ $\therefore$ $\tau_p G/_{\tau B}$ es p-divisible. Se tiene entonces que para cada $k \geq 1$, $\tau_p G = \tau_B + p^k \tau_p G$

Por tanto $\tau_p G/_{p^k \tau_p G} \cong \tau B + p^k \tau_p G/_{p^k \tau_p G}$

$\cong \tau B/_{\tau B \cap p^k \tau_p G} \cong \tau B/_{p^k \tau B}$

El número de copias de $\mathbb{Z}_{p^n}$ en B_n, $n \geq 1$ es igual al número de copias en $\tau B/_{p^{n+1} \tau B}$

$\cong \tau_p G/_{p^{n+1} \tau_p G}$

Por tanto los subgrupos de torsión de cualesquiera 2 subgrupos p-básicos son isomorfos.

Por último mostraremos que $B_0 \cong B_0 + \tau_p G / \tau_p G$ es subgrupo p-básico de $G/\tau_p G$ y que

$$B_0 / pB_0 \cong {}^{G/\tau_p G} \Big/ {}_{p(G/\tau_p G)}$$

Si $x \in B_0 \cap p^k B \Rightarrow x = p^k b$, $b \in B$.

Escribamos $b = \sum_{i=0}^{t} r_i b_i$, $b_i \in B_i$. Entonces

$x = p^k r_0 b_0 + p^k \sum_{i=1}^{t} r_i b_i$, pero B_0 es libre de torsión y $p^k \sum_{i=1}^{t} r_i b_i \in \tau B$

$\Rightarrow x = p^k r_0 b_0 \Rightarrow B_0$ es p-puro en G.

Ahora bien, sea $\bar{b} \in B_0 + \tau_p G / \tau_p G \cap p^k (G/\tau_p G)$.

entonces $\bar{b} = p^k \bar{g} \Rightarrow b - p^k g \in \tau_p G$

$\Rightarrow b - p^k g = g'$, $g' \in \tau_p G$. Sea $p^r = o(g')$

$p^r (b - p^k g) = 0 \Rightarrow p^r b = p^{k+r} g$

$\in B_0 \cap p^{k+r} G = p^{r+k} B_0$

$\Rightarrow p^r b = p^{r+k} b'$, $b' \in B_0$, Como B_0 es libre de torsión $\Rightarrow b_0 = p^k b'$ $\therefore$ $\bar{b} = p^k \bar{b}'$ $\Rightarrow B_0$ es p-puro en $G/\tau_p G$.

Se tiene que $\{b_j\}_{j\in J}$ donde $\{b_j\} \subseteq \{b_i\}_{i\in I}$ y $o(b_j) = \infty$ es p-pura independiente.

Supongamos que existe $\bar{x} \in G/\tau_p G$ de orden infinito, entonces $\{b_j\} \cup \{\bar{x}\}$ es p-pura independiente $\Rightarrow \{b_i\}_{i\in I} \cup \{x\}$ es p-pura independiente $\not\!\!\!\!\!\;\;$.

Entonces el número de copias de $\mathbb{Z}$ en B_0 es el mismo para cualesquiera 2 subgrupos p-básicos.

Definición 2.17. Un grupo G es <u>acotado</u> si existe $n \neq 0$ tal que $nG = 0$.

Proposición 2.18. Todo grupo acotado, es suma directa de grupos cíclicos finitos

Dem: Sea $G = \bigoplus_p T_p G$ su descomposición en suma directa de sus componentes p-primarias. Se tiene que para cada primo p, $T_p G$ es acotado. Basta demostrarlo para grupos p-primarios.

Supongamos que $p^n G = 0$ y sea B subgrupo p-básico de G. Entonces G/B es p-divisible, pero si $\bar{x} \in p^n (G/B)$

$\Rightarrow \bar{x} = p^n \bar{y} \Rightarrow x = x - p^n y \in B \quad \therefore \bar{x} = \bar{0}$

$\Rightarrow G/B = 0 \quad \therefore G = B$.

Proposición 2.19. Sea B subgrupo puro acotado de un grupo G. Entonces B es sumando directo de G.

Dem: Existe $m \neq 0$.∋. $mB = 0$. Mediante el lema de Zorn, podemos escoger $A \leq G$, máximo respecto de $mG \subseteq A$ y $A \cap B = \{0\}$.

Demostraremos que $G = A \oplus B$.

Supongamos que $G \neq A + B$, Sea $0 \neq \bar{x} \in G/_{A+B}$ tal que $o(\bar{x}) = p$, para algún primo p.

Como $mx \in A + B$, entonces p/m, $m = pr$ además $px = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Luego $-ra + rpx = rb \in A \cap B$. Entonces p/r, $r = pt$

Sea $z = x - tb$. Se tiene que $z \notin A + B$.

Luego $(A + \langle z \rangle) \cap B \neq 0$. Entonces existen $n_1 \neq 0$, $y_1 \in A$, $b_1 \in B$ tales que $y_1 + n_1 z = b_1 \neq 0$. Se tiene que $o(\bar{z}) = p$. de donde p/n_1, $n_1 = p r'$. Entonces

$$0 \neq b_1 = y_1 + n_1 z = y_1 + r'(pz)$$

$$= y_1 + r'(px - ptb) = y_1 + r'px \in A \cap B \ \text{\Large ⚡}.$$

Proposición 2.20. Un subgrupo de un grupo libre es libre.

Dem: Sea $F = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ libre, y supongamos que I está bien ordenado, es decir es I es el conjunto de ordinales menores o iguales que un ordinal τ.

Para $\sigma \leq \tau$, definimos $F_\sigma = \bigoplus_{\rho < \sigma} \langle a_\rho \rangle$.

Si $G \leq F$, sea $G_\sigma = G \cap F_\sigma$. Se tiene que $G_\sigma = G_{\sigma+1} \cap F_\sigma \Rightarrow$

$G_{\sigma+1} / G_\sigma \cong G_{\sigma+1} + F_\sigma / F_\sigma$.

Observemos que $G_{\sigma+1} + F_\sigma / F_\sigma$ es subgrupo de $F_{\sigma+1} / F_\sigma \cong \langle a_\sigma \rangle$. Entonces $G_{\sigma+1} = G_\sigma$ o' $G_{\sigma+1}/G_\sigma$ es cíclico infinito.

Entonces $G_{\sigma+1} = G_\sigma \oplus \langle b_\sigma \rangle$, para algún $b_\sigma \in G_{\sigma+1}$. Se sigue que los elementos

G_γ, generan su suma directa, y ésta debe ser G, pues G es la unión de los G_γ.

Proposición 2.21. Todo grupo finitamente generado, es suma directa de cíclicos.

Dem: Supongamos que A es finitamente generado y libre de torsión. Si A es cíclico, entonces $A \cong \mathbb{Z}$ $\therefore$ A es libre. Supongamos que son libres los grupos libres de torsión generados por m elementos con $m \leq n$. Supongamos $A = \langle x_1, \dots x_{n+1} \rangle$. Sea $B = \langle x_1 \dots x_n \rangle$. Entonces B es suma directa de cíclicos y A/B es cíclico.

Si $A/B = 0$ ó $A/B \cong \mathbb{Z}$, entonces A es suma directa de cíclicos, pues la sucesión exacta $0 \to B \to A \to A/B \to 0$ se escinde, pues A/B es libre.

Si $A/B \cong \mathbb{Z}_r$ para algún $r \in \mathbb{N}$, entonces $A \cong rA \leq B \Rightarrow A$ es libre.

Ahora bien, consideremos G un grupo finitamente generado. Se tiene que $G/\tau G$ es suma directa de cíclicos. Además τG es puro en G, de donde $G \cong \tau G \oplus F$, con F libre. Como τG es finitamente generado, es acotado y por tanto es suma directa de cíclicos.

5. Grupos proyectivos e inyectivos.

En este capítulo, veremos que en la categoría de grupos abelianos hay suficientes proyectivos y suficientes inyectivos, es decir cada grupo se puede cubrir con un proyectivo y se puede sumergir en un inyectivo. Aún mas el concepto de inyectividad y divisibilidad coinciden, así mismo el de proyectividad con el de ser libre. También veremos la caracterización de los grupos divisibles.

Definición 3.1- Un grupo P se llama <u>proyectivo</u> si para cualquier epimorfismo $\varphi: B \to C$ y cualquier morfismo $\tau: P \to B$, existe $\tau: P \to B$ tal que $\varphi \circ \tau = \psi$.

Definición 3.2. Un grupo D se llama <u>inyectivo</u> si para cualquier monomorfismo $f: A \rightarrowtail B$ y cualquier morfismo $\psi: A \to B$, existe $\tau: B \to D$ tal que $\tau \circ f = \psi$.

Proposición 3.3. Cada grupo G es imágen epimórfica de un grupo libre y puede sumergirse en un grupo divisible.

Dem: Sea $F = \bigoplus_{g \in G} \langle x_g \rangle \cong \bigoplus_{|G|} \mathbb{Z}$ y

$\varphi : F \to G$ definida en los generadores como $\varphi(x_g) = g$. Claramente φ es epimorfismo.

<u>Sea</u> $D = \bigoplus_{|G|} \mathbb{Q}$ y $h: F \to D$ la inclusión.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, two heads] & D \arrow[d, two heads] \\ G \arrow[r, tail, "h'"'] & D/\ker\varphi \end{tikzcd}$$

h induce un monomorfismo $h': G \to D/\ker\varphi$. y $D/\ker\varphi$ es divisible.

Proposición 3.4. Son equivalentes:

i) G es proyectivo

ii) Cada sucesión exacta $0 \to A \to B \to G \to 0$ se escinde.

iii) G es libre.

Dem:

i ⇒ ii) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} G \to 0$ exacta. y consideremos la identidad en G. Entonces, como G es proyectivo, existe g': $g' : G \to B$ ∴ $g \circ g' = 1_G$.

ii ⇒ iii) Existe F libre y $\varphi : F \to G$ epi. Consideremos la sucesión $0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to F \to G \to 0$. Esta se escinde, de donde $G \cong$ a un subgrupo de F, luego G es libre.

iii ⇒ i) G libre $\Rightarrow G = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \langle x_\alpha \rangle$. Sea $\tau : B \to C$ un epimorfismo y $\varphi : G \to C$ un morfismo.

Definimos $\tilde{\varphi} : G \to B$ como $\tilde{\varphi}(x_\alpha) = b_\alpha$
donde b_α es tal que $\tau(b_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$.
Claramente $\tilde{\varphi}$ es morfismo y hace conmutar el diagrama.

Proposición 3.5. Son equivalentes:

i) G es inyectivo

ii) Cada sucesión exacta $0 \to G \to B \to C \to 0$ se escinde

iii) G es divisible.

Dem:

$i \Rightarrow ii$) Sea $0 \to G \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exacta y consideremos la identidad en G. Entonces existe $f' : B \to G$ $\cdot\ni\cdot$ $f' \circ f = 1_G$.

$ii \Rightarrow iii$) Existe D divisible y $\varphi : G \to D$ monomorfismo. La sucesión exacta
$0 \to G \to D \to D/_{\operatorname{Im}\varphi} \to 0$ se divide

Luego G es isomorfo a un sumando directo de D, de donde G es divisible.

iii $\Rightarrow$ ii) Sea $f: A \to B$ mono y $g: A \to G$ morfismo. Consideremos la familia

$\mathcal{F} = \{ (H, \varphi) \mid A \leq H \leq B$ y $\varphi/_A = g \}$.

$\mathcal{F} \neq \phi$ pues $(A, g) \in \mathcal{F}$, y está parcialmente ordenada de la siguiente manera:

$$(\varphi, H) \leq (\varphi', H') \text{ si } H \leq H' \text{ y } \varphi'/_H = \varphi.$$

Es fácil verificar que $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn. Sea (H, φ) un elemento maximal en $\mathcal{F}$. Afirmo que $H = B$. Si no, existe $b \in B$ $\cdot \ni \cdot$ $b \notin H$. Si

$H \cap \langle b \rangle = 0$, podemos definir $\tau: H + \langle b \rangle \to G$ como $\tau(x) = \varphi(x)$ si $x \in H$ y $\tau(x) = 0$ si $x \in \langle b \rangle$. Claramente $\tau/_A = g$. Luego $(H + \langle b \rangle, \tau)$ contradice la maximalidad de (H, φ).

Si $H \cap \langle b \rangle \neq 0$. Sea n mínimo con la propiedad $0 \neq h = nb \in H$. Como G es divisible existe $x \in G$ que satisface $nx = \varphi(g)$. Definimos $\tilde{\varphi} : H + \langle b \rangle \to G$ como $\tilde{\varphi}(c + rb) = \varphi(c) + rx$, $c \in H$, $0 \leq r < n$. Luego, la pareja $(H + \langle b \rangle, \tilde{\varphi})$ da lugar a una contradicción.

Definición 3.6. Sea $B \leq A$. Se dice que B es esencial en A si $B \cap H = 0$, $H \leq A$ $\Rightarrow H = 0$.

Proposición 3.7. Cada grupo G se puede sumergir como subgrupo esencial de un grupo divisible D. Además esta inmersión es única, en el siguiente sentido: Si G es subgrupo esencial de algún otro grupo divisible D', entonces existe un isomorfismo entre D y D' que extien-de a la identidad en G.

Dem: Por la proposición 3.3. Existe D', divisible que contiene a G. Sea $\mathcal{A} = \{E \mid E \leq D',\ E \cap G = 0 \text{ y } E \text{ divisible}\}$. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pues $0 \in \mathcal{A}$. Además $\mathcal{A}$ es inductivo. Escojamos E maximal en $\mathcal{A}$. Como E es divisible E es sumando directo de D'. Por tanto existe $D \supseteq G$ y $D \oplus E = D'$.

G es esencial en D, por como escogimos a E.

Supongamos que existen D_1, D_2 divisibles tal que G es esencial en ambos. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D_1 \arrow[dl, dashed, "f"] \\ D_2 & \end{tikzcd}.$$

Existe $f: D_1 \to D_2$ pues D_2 es divisible además f es mono pues G es esencial en D_1. Ahora bien, $\operatorname{Im} f$ es divisible y por tanto es sumando directo de D_2, pero contiene a G y G es esencial en D_2. Luego $\operatorname{Im} f = D_2$.

Definición 3.8. Denotamos por $E(G)$ al mínimo subgrupo divisible que contiene a G y lo llamamos la <u>cápsula inyectiva</u> de G.

Proposición 3.9. Un grupo D es divisible si y sólo si no tiene imágen epimórfica finita y distinta de cero.

Dem: Supongamos D divisible y sea $\varphi: D \to G$ un epimorfismo no cero.
Si G es finito, $\exists\, n \neq 0 \ni nG = 0$.

Luego si $g \in G$, existe $d \in D$ t.q. $\varphi(d) = g$

y $d = nd'$, $d' \in D$, de donde $\varphi(d) = n\varphi(d')$

$= 0 = g$ $\therefore G = 0$.

Sea $m \neq 0$ y consideremos el cociente D/mD.

D/mD es acotado, por tanto $D/mD = \bigoplus_{i \in I} C_i$,

con C_i, cíclico. Entonces para cada $i \in I$.

$\rho_i \circ \pi_m$ es un epi no cero, donde π es la

proyección canónica y ρ_i es la proyección en C_i.

$\therefore C_i = 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow D = mD$.

Proposición 3.10. Sea D divisible, entonces

$D \cong Q^{(\alpha_0)} \oplus \left(\bigoplus_{p} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)} \right)$, donde α_0, α_p son

invariantes del grupo.

Dem: Se tiene que $D = \tau(D) \oplus F$, pues

$\tau(D)$ es divisible. Además $F \cong D/\tau(D)$ es

divisible. Entonces basta probar que

si D es de torsión $D \cong \bigoplus_{p} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)}$ y si D es libre de torsión, $D \cong Q^{(\alpha_0)}$.

Recordemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle c_1, c_2, \dots \mid pc_1 = 0, pc_{n+1} = c_n \rangle$. Como $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es p-grupo, es q-divisible para cada primo $q \neq p$. Dadas las relaciones que satisfacen los generadores, si multiplicamos por p a éstos, los volvemos a obtener, luego $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es p-divisible.

También es claro que la suma de divisibles es divisible.

Si D es de torsión, reducimos la demostración para p-grupos divisibles, pues D se descompone como la suma directa de sus componentes p-primarias, y cada una es divisible, pues son sumandos directos.

Consideremos $S(D)$ el zoclo de D. Como $pS(D) = 0$, se tiene que $S(D)$ es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial.

Sea β una base de $S(D)$ sobre $\mathbb{Z}_p$.

Si $x^i \in \beta$, dividimos a x^i por cada potencia de p. $x^i = p x_2^i = p^2 x_3^i = \dots$.

Se tiene que $G_i = \langle x^i, x_2^i, \dots \rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Afirmo que $D = \bigoplus_{i\in I} G_i$.

Sea $d \in D$, si $o(d) = p$, entonces $d \in \bigoplus G_i$.

Supongamos que es cierto para los elementos cuyo orden es p^m, $m \leq n$, y sea d tal que $o(d) = p^{n+1}$. Se tiene que $o(pd) = p^n$

$\Rightarrow pd \in \bigoplus G_i$. Como $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es divisible

$pd = px$, $x \in \bigoplus_{i\in I} G_i \Rightarrow p(d-x) = 0$

$\Rightarrow d - x \in S(D) \leq \bigoplus_{i\in I} G_i \Rightarrow d \in \bigoplus_{i\in I} G_i$.

Si D es libre de torsión, para cada $d \in D$ definimos $\frac{1}{n} d$ como la solución de la ecuación $d = nx$. Es fácil verificar que D tiene estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial

Por tanto $D \cong \mathbb{Q}^{(\alpha_0)}$.

Observemos que los cardinales que aparecen son invariantes, pues son cardinales de bases de espacios vectoriales.

Definición 3.11. Dado un grupo, definimos el rango de G $r(G) = \alpha_0 + \sum_p \alpha_p$ si $E(G) = \mathbb{Q}^{(\alpha_0)} \oplus (\bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)})$.

Ya que hemos clasificado a los grupos divisibles, centraremos nuestra atención en los grupos reducidos. Para esto definimos un nuevo concepto: el de altura.

Definición 3.12. Sea G un p-grupo y $x \in G$, $x \neq 0$. Definimos la altura de x en G como:

$$h^G(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in p^n G,\ x \notin p^{n+1} G \\ \infty & \text{si } x \in \bigcap_n p^n G \end{cases}$$

Proposición 3.13. Sea G un p-grupo:

i) $\forall x, y \in G$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$h^G(x+y) = \begin{cases} \min\{h^G(x), h^G(y)\} & \text{si } h^G(x) \neq h^G(y) \\ \geq h^G(x) & \text{si } h^G(x) = h^G(y). \end{cases}$$

ii) Si $0 \neq H \leq G$, ent $\forall x \in H$, $x \neq 0$

$h^H(x) \leq h^G(x)$.

Dem. Si la altura de alguno de los dos es ∞ entonces es trivial.

Supongamos $h^G(x) = h^G(y) = r < \infty$ y $k = h^G(x+y)$. Se tiene que $x = p^r x_1$, $y = p^r y_1$. Si $k < r$, entonces $x+y = p^k g$ $= p^r(x_1+y_1)$ ~~8~~ ya que $x+y \notin p^{k+1}G$.

Supongamos ahora que $h^G(x) = r_1 < h^G(y) = r_2$

$x = p^{r_1} x_1$, $y = p^{r_2} y_2 \implies x+y = p^{r_1}(x_1 + p^{r_2-r_1} y_2)$

Si $x+y \in p^{r_1+1}G \Rightarrow p^{r_1}x_1 + p^{r_2}y_2 = p^{r_1+1}g'$

como $r_1 < r_2 \Rightarrow r_1+1 \leq r_2$

de donde $x = p^{r_1+1}g' + p^{r_2}y_2$

$= p^{r_1+1}(g + p^{r_2-(r_1+1)}y_2) \in p^{r_1+1}G$ ४.

ii) Es claro, pues si $h^H(x) = r$, $h^G(x) = s$.

y $r > s \Rightarrow x \in p^r G$ ४.

Proposición 3.14. Sea G un p-grupo y H un subgrupo sin elementos de altura infinita. Entonces H es puro en G si y sólo si $\forall x \in S(H)$, $x \neq 0$. $h^G(x) = h^H(x)$

Dem: Supongamos que $\forall x \in S(H)$, $x \neq 0$ $h^G(x) = h^H(x)$. Supongamos que $\forall x \in H$, $x \neq 0$ tal que $o(x) \leq p^n$, se tiene que $h^G(x) = h^H(x)$. Sea $a \in H$, $a \neq 0$, $o(a) = p^{n+1}$. Entonces $o(pa) = p^n \Rightarrow h^G(pa) = h^H(pa) = r$

$\Rightarrow pa = p^r y$, $y \in H$. Afirmo que:

1) $h^G(p^{r-1}y) = h^H(p^{r-1}y) = r-1$

2) $h^G(a) \leq r-1$.

Se tiene que $h^H(p^{r-1}y) \geq r-1$ y $h^G(p^{r-1}y) \geq r-1$.

Supongamos que $h^H(p^{r-1}y) > r-1$

$\Rightarrow p^{r-1}y = p^k s$, $s \in H$, $k > r-1$.

$\Rightarrow pa = p^r y = p^{k+1}s$ y $k+1 > r$ $\not\!\!8$.

El argumento es análogo si $h^G(p^{r-1}y) > r-1$.

$\therefore$ $h^G(p^{r-1}y) = h^H(p^{r-1}y) = r-1$.

Supongamos que $h^G(a) > r-1$

$\Rightarrow a = p^r g$, $g \in G \Rightarrow pa = p^{r+1}g$ $\not\!\!8$.

Ahora bien, si $a = p^{r-1}y$ ent $h^H(a) = h^G(a)$.

así que supongamos que $a \neq p^{r-1}y$.

Se tiene que $p(a - p^{r-1}y) = 0 \Rightarrow$

$h^H(a - p^{r-1}y) = h^G(a - p^{r-1}y) = t$.

Escribamos $a = (a - p^{r-1}y) + (p^{r-1}y)$.

Si $t \neq r-1$ entonces $h^G(a) = \min\{t, r-1\}$ y $h^H(a) = \min\{t, r-1\}$.

Si $t = r-1$ entonces $h^G(a) \geq r-1$ y $h^H(a) \geq r-1$ pero por (2) $r-1 \leq h^H(a) \leq h^G(a) \leq r-1$.

Si H es puro en G, claramente $h^G(x) = h^H(x)$ $\forall x \in S(H)$, $x \neq 0$.

Proposición 3.15. Sea G un p-grupo, H puro en G. Sea $x \in S(G)$, $x \notin H$ y supongamos que $h^G(x) = r < \infty$ y $\forall a \in S(G)$, $h^G(x+a) \leq r$. Pongamos $x = p^r y$, $K = \langle y \rangle$, entonces la suma $L = H + K$ es directa y L es puro en G.

Dem: Sea $h \in H \cap K$, entonces $h = my$. Como H es puro en G, $h = mh'$, $h' \in H$. de donde $m(y-h') = 0$, como G es p-grupo.

$m = p^k$, $k > 0$. Entonces $h = p^k y$.

Afirmo que $k \geq r+1$. Supongamos que $k < r+1 \Rightarrow r = k+j$ $j \geq 0$. Entonces $x = p^r y = p^k p^j y = p^j h \in H$ $\not{\,}$.

$\therefore$ $k \geq r+1 \Rightarrow h = 0$.

Para ver que L es puro en G, basta probar que si $a \in S(L)$, $a \neq 0$ entonces $h^L(a) = h^G(a)$.

Sea $0 \neq a \in S(L) = S(H) \oplus S(K)$. Si $a \in S(H) \subset H$ entonces $h^H(a) \leq h^L(a) \leq h^G(a)$, pero $h^H(a) = h^G(a)$, pues H es puro en G.

Observemos que x es generador de $S(K)$. Ya que si $b \in S(K)$, entonces $h^K(x+b) \leq h^G(x+b) \leq r \Rightarrow x+b = p^r s$, $s \in K$. Entonces $s = my \Rightarrow x + b = p^r m y$
$\Rightarrow b = mx - x = (m-1)x$.

Supongamos que $a \notin H$, $a = nx + w$, $w \in S(H)$

Tenemos que $h^L(nx) \le h^G(nx) \le r$ por hipótesis. Por otro lado, $h^G(nx) \ge r$ y $h^L(nx) \ge r$ pues $h^L(x) = h^G(x) = r$.
Por tanto $h^L(nx) = h^G(nx) = r$.
Como H es puro en G, $h^L(w) = h^G(w) = t$.
Consideremos $h^G(nx+w)$, $h^L(nx+w)$
Si $r \neq t$ entonces $h^G(nx+a) = \min \{r, t\}$. Así mismo como la $h^G(nx) = h^L(nx)$ y $h^L(w) = h^G(w)$, se tiene que $h^L(nx+a) = \min \{r, t\}$.
Si $r = t \Rightarrow h^G(nx+w) \geq r$, pero por hipótesis $h^G(nx+w) \leq r$. $\therefore$ L es puro en G.

Proposición 3.16. Sea G un p-grupo y supongamos que G es suma directa de cíclicos, entonces $\bigcap_n p^n G = 0$

Dem: Se tiene que $G = \bigoplus_{i \in I} C_i$, C_i cíclico p-primario, de orden p^{e_i}.

Entonces $p^{e_i} C_i = 0 \Rightarrow \bigcap_n p^n C_i = 0$

$\therefore$ C_i no tiene elementos de altura infinita.

Si $x \in G$ es de altura infinita, entonces es divisible por cualquier potencia de p, pero la divisibilidad es componente a componente, lo cual implicaría que los C_is tienen altura infinita.

Proposición 3.17. Sea G un p-grupo.

G es suma directa de p-grupos cíclicos si y sólo si $S(G)$ es unión ascendente $S(G) = \bigcup_n S_n$ de subgrupos tales que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in S_n$, $x \neq 0$ $\exists k_n$ tal que $h^G(x) \leq k_n$.

Dem: ⇒) Supongamos G suma directa de cíclicos.

$G = \bigoplus_n C_n$. Sea $S_1 = S(C_1)$, $S_2 = S(C_1) \oplus S(C_2)$

.... $S_n = S(C_1) \oplus \cdots \oplus S(C_n)$.

Claramente $S_n \subseteq S_{n+1}$ $\forall n$ y $S(G) = \bigcup_n S_n$

Si para algún n, existe $x \in S_n$, $x \neq 0$ tal que

$h^G(x) \geq k$ $\forall k$, entonces x es de altura infinita ⨳.

⇐) Supongamos $S(G) = \bigcup_n S_n$ con las propiedades mencionadas. Construimos inductivamente subconjuntos puros independientes X_n de G tales que $\left(\bigoplus_{x \in X_n} \langle x \rangle\right) \cap S(G) = S_n$ y $X_n \subseteq X_{n+1}$ $\forall n$

Podemos suponer que $S_1 = 0$, y tomamos $X_1 = \{\phi\}$.

Supongamos que hemos construido X_n. Consideremos todos los conjuntos puros independientes Y tales que $X_n \subseteq Y$ y $\left(\bigoplus_{y \in Y} \langle y \rangle\right) \cap S(G) \subseteq S_{n+1}$.

Esta familia es no vacía, pues X_n es miembro de ella, y está parcialmente ordenada por .

inclusión. Mediante el lema de Zorn podemos escoger X maximal en esta familia.

Afirmo que $(\bigoplus_{x\in X}\langle x\rangle) \cap S(G) = S_{n+1}$.

Supongamos que existe $z \in S_{n+1}$, $z \notin \bigoplus_{x\in X}\langle x\rangle$.

Como todos los elementos de la forma $z+a$ con $a \in (\bigoplus_{x\in X}\langle x\rangle)\cap S(G)$ tienen altura menos que k_{n+1}, podemos escoger $w = z + a_0$ de altura máxima r. Entonces $w = p^r b$.

Por las 2 proposiciones anteriores, se tiene que $H = \langle b\rangle + (\bigoplus_{x\in X}\langle x\rangle)$ es directa y H es puro en G.

además $H \cap S(G) \subseteq S_{n+1}$, lo cual contradice la maximalidad de X.

Sea $P = \bigcup_n X_n$. P es puro independiente, y sea $C = \bigoplus_{x\in P}\langle x\rangle$, entonces C es puro en G.

Tenemos que $S(C) = S(G) \leq G$. Demostraremos que $C = G$.

Supongamos que $\forall x \in G$, tal que $o(x) \leq p^n$, implica que $x \in C$. Sea $g \in G$, $o(g) = p^{n+1}$. Entonces $o(pg) = p^n \Rightarrow pg \in C \Rightarrow pg \in pG \cap C = pC$. Luego $pg = pc$, $c \in C \Rightarrow p(g-c) = 0 \Rightarrow g-c \in S(C) \Rightarrow g \in C$.

Proposición 3.18. Un p-grupo numerable G sin elementos de altura infinita es suma directa de cíclicos.

Dem: Escribamos $S(G) = \langle x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots \rangle$ y sea $S_n = \langle x_1, \ldots x_n \rangle$ $\forall n$. Entonces $S_n \subseteq S_{n+1}$ $\forall n$ y $S(G) = \bigcup_n S_n$.

Además $\sup \{ h^G(x) \mid x \in S_n, x \neq 0 \} < \infty$ pues S_n es finito y $\bigcap_n p^n G = 0$. Por tanto por la proposición anterior G es suma directa de cíclicos.

Proposición 3.19. Un subgrupo de una suma directa de cíclicos, es suma directa de cíclicos.

Dem: Sea $G = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$ y $H \leq G$.

Si $\tau G = 0 \Rightarrow G$ es libre y por tanto H es libre.

Supongamos $\tau G \neq 0$. Se tiene que $G/_{\tau G} = \bigoplus_{x_i \notin \tau G} \langle \bar{x}_i \rangle$ es libre. Entonces $H/_{\tau H}$ es libre.

Luego $H = F \oplus \tau H$, con F libre. Como $\tau H = \bigoplus_p \tau_p H$ y $\tau_p H \leq \tau_p G$. Basta probarlo para p-grupos. Como G es suma directa de cíclicos, $s(G) = \bigcup_n S_n$ $S_n \leq S_{n+1}$ y $\forall x \in S_n, x \neq 0$ $\exists k_n$ ∍. $h^G(x) \leq k_n$.

Sea $T_n = H \cap S_n$, entonces $T_n \leq T_{n+1}$ $\forall n$ y $s(H) = \bigcup_n T_n$. Como $h^H(x) \leq h^G(x) \leq k_n$ $\forall x \in T_n, x \neq 0$. Entonces H es suma directa de cíclicos.

Proposición 3.20. Todo grupo G es imágen epimórfica de una suma directa de cíclicos con Kernel puro y G se puede sumergir como subgrupo puro de una suma directa $A \oplus D$, donde A es un producto directo de grupos cíclicos de torsión y D es divisible.

Dem: Sea $G = \{g_i\}_{i \in I}$ y $P = \bigoplus_{i \in I} \langle g_i \rangle$. definamos $\sigma : P \longrightarrow G$ como $\sigma(g_i) = g_i$. Claramente σ es epi. Supongamos que $x \in P$ y $nx \in \operatorname{Ker}\sigma$, $x = n_1 g_1 + \cdots + n_r g_r$. Entonces para algún $i \in I$, $g_i = \sigma(x) = \sum_{j=1}^{r} n_j g_j$ y $n g_i = 0$. Sea $y \in P$, $y = x - g_i$. Entonces $y \in \operatorname{Ker}\sigma$ y $ny = n(x - g_i) = nx$. Por tanto $\operatorname{Ker}\sigma$ es puro en P.

Sea $D = D(G')$ donde $G' = \bigcap_n nG$ y sea $\varphi : G \longrightarrow D$ un homomorfismo que extiende a la inclusión $G' \hookrightarrow D$.

Sea $\eta: G \longrightarrow \prod_n (G/nG)$ definido como $\eta(g) = (g+nG)_n$ y $\theta: G \longrightarrow \prod_n (G/nG) \oplus D$ definido como $\theta(g) = \eta(g) + \varphi(g)$.

Si $\theta(g)=0$, entonces $\eta(g)=0$, pues la suma es directa, lo cual implica que $g+nG = 0+nG$ $\forall n \neq 0$. Es decir $g \in \bigcap_n nG$ además $\varphi(g)=0 \Rightarrow g=0$ pues φ restringida a $\bigcap_n nG$ es mono. Por tanto θ es mono.

Si n divide a $\theta(g)$ en $\prod_n (G/nG) \oplus D$, entonces cada coordenada de $\theta(g)$ es divisible por n. Por tanto $g+nG = nx+nG = 0+nG$, es decir $g \in nG$ y g es divisible por n en G. Luego $\operatorname{Im}\theta \cong G$ es subgrupo puro de $\prod_n (G/nG) \oplus D$

Se tiene que G/nG es sumando directo de un producto directo de grupos cíclicos de torsión, Entonces $\prod_{n}(G/nG)$ es sumando directo de un producto directo A de grupo cíclico de torsión. Por tanto $G \cong \mathrm{Im}\,\theta$ es isomorfo a un subgrupo puro de $A \oplus D$.

Definición 3.21. Un grupo G es inyectivo puro si para cualquier monomorfismo $\pi : A \to B$ con $\mathrm{Im}\,\pi$ pura en B y cualquier morfismo $f : A \to G$, existe $\varphi : B \to G$ tal que $f = \varphi\pi$.

Proposición 3.22. Son equivalentes.

i) G es inyectivo puro

ii) $G = H \oplus D$ donde H es un sumando directo de un producto directo de grupos cíclico de torsión y D es divisible.

Dem: i $\Rightarrow$ ii) Se sigue de la demostración del la proposición 3.20.

ii $\Rightarrow$ i) Supongamos que $\pi: A \to B$ es mono con $\operatorname{Im}\pi$ pura en B, y $f: A \to G$ un morfismo. Construimos el diagrama de push-out

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\psi"] & B/A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\tau"'] & M \arrow[r, "\varphi"'] & B/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es fácil verificar que la sucesión de abajo es exacta y $\operatorname{Im}\tau$ es puro en M, $\operatorname{Im}\varphi$ es puro en B/A. Se tiene que $D \cong$ a algún subgrupo de $M \Rightarrow D$ es sumando directo de M, y H es puro en M, H es sumando directo de un producto directo de grupos cíclicos de torsión.

$\therefore$ G es sumando directo de M. Luego la sucesión se escinde, existe $\theta: M \to G$ tal que $\theta\tau = 1_G$. Con $\varphi_1 = \theta\psi$, tenemos que $\varphi_1\pi = \theta\psi\pi = \theta\tau f = 1_G f = f$.

$\therefore$ G es inyectivo puro.

§4. La topologías $\mathbb{Z}$-ádica y p-ádica.

Para realizar un estudio de los grupos reducidos, es conveniente dotarlos de ciertas topologías que los convierten en grupos topológicos. Este enfoque facilita la demostración de ciertos resultados sobre éstos grupos.

Proposición 4.1. Sea G un grupo. $\beta = \{x + nG \mid x \in G, n \geq 1\}$. Entonces, β es base para una topología, que llamaremos la <u>topología $\mathbb{Z}$-ádica</u> y la denotamos por $\tau_{\mathbb{Z}}$.

Dem: Sean $x_1 + n_1 G$ y $x_2 + n_2 G \in \beta$, y $z \in (x_1 + n_1 G) \cap (x_2 + n_2 G)$, entonces $z = x_1 + n_1 g_1 = x_2 + n_2 g_2$, $g_1, g_2 \in G$.

Sea $n_3 = mcm\{n_1, n_2\}$, luego $n_3 = n_1 k_1$, $n_3 = n_2 k_2$. Ahora bien, $\forall_{g \in G}$ $z + n_3 g =$
$= x_1 + n_1 g_1 + n_1 k_1 g = x_1 + n_1 (g_1 + k_1 g) \in x_1 + n_1 G$
y $z + n_3 g = x_2 + n_2 g_2 + n_2 k_2 g = x_2 + n_2 (g_2 + k_2 g)$
$\in x_2 + n_2 G$.

Proposición 4.2. $(G, +, \tau_{\mathbb{Z}})$ es un grupo topológico.

Dem: Sea $\varphi : G \times G \longrightarrow G$, definida como $\varphi(x, y) = x - y$. Demostraremos que φ es continua respecto de $\tau_{\mathbb{Z}}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x - y + nG$. Consideremos las vecindades $x + nG$ y $y + nG$. Entonces $\varphi(x + ng, y + ng')$
$= x + ng - y - ng' = (x - y) + n(g - g') \in x - y + nG$.

Proposición 4.3. Un grupo G es de Hausdorff respecto de la topología $\mathbb{Z}$-ádica, si y sólo si $\bigcap_n nG = 0$.

Dem: $\Rightarrow$) Sea $x \in \bigcap_n nG$, $x \neq 0$. Entonces existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $(x + rG) \cap sG = \phi$ $\Rightarrow x \notin sG$ $\otimes$.

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in G$, $x \neq y$. Entonces $x - y \neq 0$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x - y \notin nG$. De donde $(x + nG) \cap (y + nG) = \phi$.

Proposición 4.4: Sea G de Hausdorff respecto de la topología $\mathbb{Z}$-ádica. Construiremos una métrica ρ, tal que la topología inducida por ésta, es equivalente a $\tau_{\mathbb{Z}}$.

Dem: Definimos $\| \ \| : G \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\|x\| = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ es mínimo } \ni x \notin nG. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es claro que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in G$.

Sean $x, y \in G$ y supongamos que $\|x + y\| = 2^{-n}$ $\|x\| = 2^{-n_1}$, $\|y\| = 2^{-n_2}$, $n_1 \geq n_2$. Supongamos que $n_2 > n$. Entonces $n_1 \geq n_2 > n$ $\Rightarrow$ $x \in nG$, $y \in nG \Rightarrow x + y \in nG$ $\otimes$

Por tanto $\|x+y\| \leq$ máx $\{\|x\|, \|y\|\}$.

Definimos $\rho(x,y) = \|x-y\| \quad \forall x, y \in G$, y denotemos por τ_ρ la topología inducida por ρ.

i) $\tau_\rho \subseteq \tau_{\mathbb{Z}}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $B_\varepsilon(0) = \{g \in G \,/\, \|g\| < \varepsilon\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \varepsilon$ y N el producto de todos los primos menores o iguales que n.

Sea $h \in G$, $\|Nh\| = 2^{-q}$, entonces $q > n$.

$\Rightarrow 2^{-q} < 2^{-n} < \varepsilon$. Por tanto $Nh \in B_\varepsilon(0)$.

ii) $\tau_{\mathbb{Z}} \subseteq \tau_\rho$

Sea $nG \in \tau_{\mathbb{Z}}$ y $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ su factorización en primos y supongamos que

$p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} < \cdots < p_r^{\alpha_r}$. Afirmo que $B_{2^{-p_r^{\alpha_r}}}(0) \subset nG$.

Si $\|x\| < 2^{-p_r^{\alpha_r}}$ y $\|x\| = 2^{-k} \Rightarrow k > p_r^{\alpha_r}$.

$\Rightarrow k > p_i^{\alpha_i} \; \forall i = \overline{1,r}$, $\Rightarrow x \in p_i^{\alpha_i} G \; \forall i = \overline{1,r}$

$\therefore \; x \in \bigcap_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} G \subset nG$

Definición 4.5. Decimos que una sucesión $\{g_n\}$ en G <u>converge</u> a $g \in G$ si la sucesión $\{\|g_n - g\|\}$ converge a cero.

Proposición 4.6. Una sucesión $\{g_n\}$ en G, converge a $g \in G$, si y sólo si, $\forall k$, $\exists N$ tal que $g_n - g \in kG$, $\forall n \geq N$.

Dem.: $\Rightarrow$) Sea $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\exists N$ tal que

$\|g_n - g\| < 2^{-(k+1)}$ $\forall n \geq N$, $\Rightarrow g_n - g \in kG$ $\forall n \geq N$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-k} < \varepsilon$.

$\exists N_1$ tal que $g_n - g \in G$ $\forall n \geq N_1$.

$\exists N_2$ tal que $g_n - g \in 2G$ $\forall n \geq N_2$.

$\vdots$

$\exists N_k$ tal que $g_n - g \in kG$ $\forall n \geq N_k$.

Sea $N = \text{máx}\{N_1, \ldots N_k\}$. Entonces $\forall n \geq N$.

$g_n - g \in \bigcap_{j=1}^{k} jG$ y si $\|g_n - g\| = 2^{-\lambda}$, ent $\lambda > k$.

$\Rightarrow \|g_n - g\| < 2^{k} < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Definición 4.7. Una sucesión $\{g_n\}$ en G es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $\|g_n - g_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

Sea $(\hat{G}, \hat{\rho})$ la completación del espacio métrico (G, ρ), donde $\hat{\rho}$ está inducida por la norma definida como:

$\|[\{g_1, \dots\}]\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|g_n\|$ donde $[\{g_1, \dots g_n, \dots\}]$ denota la clase de la sucesión $\{g_1, \dots\}$ módulo las sucesiones que convergen a cero.

Observemos que este límite siempre existe, pues si $\{g_1, \dots\}$ es de Cauchy en G, entonces la sucesión $\{\|g_1\|, \|g_2\|, \dots\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. En efecto, si $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $\|g_n - g_m\| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N$, pero $|\,\|g_n\| - \|g_m\|\,| < \|g_n - g_m\| < \varepsilon$.

además, esta definición es independiente de los representantes, pues si $\{g_n\}$ y $\{h_n\}$ son dos sucesiones de Cauchy equivalentes, entonces $\{\|g_n - h_n\|\}$ converge a cero, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|$.

Proposición 4.8. El espacio métrico completo $(\hat{G}, \hat{\rho})$ tiene estructura de grupo topológico si definimos $[\{g_1, \dots\}] + [\{h_1, \ \}] = [\{g_1+h_1, \dots\}]$. y $-[\{g_1, \dots\}] = [\{-g_1, -g_2, \dots\}]$.

Dem: Probaremos que la función $\psi: \hat{G}\times\hat{G} \to \hat{G}$ definida como $\psi(g, h) = g - h$ es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $B_\varepsilon(g-h)$, $B_{\varepsilon/2}(g)$ y $B_{\varepsilon/2}(h)$. Sean $g' \in B_{\varepsilon/2}(g)$ y $h' \in B_{\varepsilon/2}(h)$.

Se tiene que $\|g - g'\| < \varepsilon/2$ y $\|h - h'\| < \varepsilon/2$

Entonces, $\| g'-h'-(g-h) \| = \| (g'-g)+h-h' \|$
$\leq \| g'-g \| + \| h'-h \| = \varepsilon$.

Por último si denotamos por $\hat{\tau}_{\mathbb{Z}}$ la topología $\mathbb{Z}$-ádica en $\hat{G}$, se tiene que $\tau_{\hat{\rho}}$ es equivalente a $\hat{\tau}_{\mathbb{Z}}$.

i) $\tau_{\hat{\rho}} \subset \hat{\tau}_{\mathbb{Z}}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $B_{\varepsilon}(0)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \varepsilon$, entonces $B_{2^{-n}}(0) \subset B_{\varepsilon}(0)$.

Afirmo que $(n+1)!\,\hat{G} \subset B_{2^{-n}}(0)$

Se tiene que $(n+1)!\,\hat{G} \subset \hat{G} \cap 2\hat{G} \ldots \cap (n+1)\hat{G}$.

Sea $[\{(n+1)!g_1, (n+1)!g_2, \ldots\}] \in (n+1)!\,\hat{G}$, entonces $\| (n+1)!\,g_k \| < 2^{-n}$ $\forall k$. Como $\| \{(n+1)!\,g_n\} \| = \lim\limits_{n \to \infty} \| n!\,g_k \| < 2^{-n}$.

ii) $\hat{\tau}_{\mathbb{Z}} \leq \tau_{\hat{\rho}}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, afirmo que $m\hat{G} \supseteq B_{2^{-m-1}}(0)$.

Sea $[\{g_n\}] \in B_{2^{-m-1}}(0)$, entonces, $\lim_{k\to\infty} \|g_k\| < 2^{-m-1} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_k\| < 2^{-m-1}$ $\forall k \geq N$. De donde $g_k \in mG$ $\forall k \geq N$. Luego $[\{g_n\}] \in m\hat{G}$.

Definición 4.9. Dado un grupo G, definimos la topología p-ádica en G (p primo) como la que tiene como base $\{x + p^n G \mid x \in G, n \in \mathbb{N}\}$.

Observación: Los resultados anteriores, se demuestran de manera análoga para la topología p-ádica, y la denotamos por τ_p.

Una manera de describir la completación de un grupo topológico, es por medio de límites inversos de sistemas dirigidos. Los siguientes teoremas aclaran esta situación.

Proposición 4.10. Sea I un conjunto dirigido, $\{(A_i), (f_{ij} : A_j \to A_i)_{i \leq j}, I\}$ un sistema inverso, y consideremos el diagrama de límite inverso.

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[d, "f_{ij}"'] & & \varprojlim A_i \arrow[ll, "f_j"'] \arrow[dll, "f_i"] \\ A_i & & \end{tikzcd}$$

i) Supongamos que cada A_i es de Hausdorff en la topología Z-ádica (p-ádica) y f_{ij} es continua $\forall i \leq j$. Entonces f_i es continua $\forall i$.

ii) $\varprojlim A_i$ es cerrado en el producto $\prod_{i \in I} A_i$. y $\prod_{i \in I} A_i$ con la topología producto.

Dem: Se tiene que las proyecciones $\pi_i : \prod_i A_i \to A_i$ son continuas y f_i es restricción de π_i. Por tanto f_i es continua.

ii) Sea $(a_i)_{i \in I} \in \prod_i A_i$, $(a_i) \notin \varprojlim A_i$.

Entonces existe $i \leq j$ tal que $a_i \neq f_{ij}(a_j) \in A_i$

Sea $\mathcal{U}$ abierto que contiene a $f_{ij}(a_j)$ y

$\mathcal{V}$ abierto que contiene a a_i en A_i.

tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \phi$.

Sea $W = \{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_i A_i \mid f_{ij}(b_j) \in \mathcal{U},\ b_i \in \mathcal{V} \}$.

entonces $W \cap \varprojlim A_i = \phi$. además

$$W = \mathcal{V} \times f_{ij}^{-1}(\mathcal{U}) \times \prod_{k \neq i,j} A_k \text{, de donde}$$

W es abierto que contiene a $(a_i)_{i \in I}$.

Proposición 4.11. Si A_i es de Hausdorff en la topología Ω-ádica (p-ádica), entonces A_i es cerrado en $\prod_{i \in I} A_i$ (con la topología producto).

Dem: Sea $a \in \prod_i A_i$, $a \notin A_i$ para alguna i fija.

$a = (a_k)$, entonces existe $k \neq i$.∋. $a_i \neq 0$.

Como A_k es de Hausdorff, existe $\mathcal{U}$ vecindad de a_i en A_i tal que $0 \notin \mathcal{U}$.

Sea $V = U \times \prod_{i \neq k} A_k$, entonces $a \in V$ y $V \cap A_i = \phi$.

Proposición 9.12 Si $G \leq H$ puro y H es completo y de Hausdorff en su topología $\mathbb{Z}$-ádica, entonces la cerradura de G en H es pura en H y $\bar{G} \cong \hat{G}$

Dem: Si $g \in \bar{G}$, existe una sucesión de Cauchy en G, $\{g_1, g_2, ..\}$ que converge a G.

Sea $\varphi : \bar{G} \longrightarrow \hat{G}$ definida como

$$\varphi(g) = [\{g_1, g_2, \dots\}] \quad \text{donde } \{g_1 .. g_n ..\} \longrightarrow g.$$

φ está bien definida, pues si $g = h \in \bar{G}$ y $\{g_1, \dots\} \to g$ y $\{h_1, ..\} \to h$. Entonces la sucesión $\{g_1 - h_1, g_2 - h_2 ..\}$ converge a $g - h = 0$.

$\Longrightarrow [\{g_n\}] = [\{h_n\}]$.

Claramente φ es morfismo

Si $[\{g_n\}] \in \hat{G}$. Entonces $\{g_n\}$ es de Cauchy en G, y por tanto en H. Como H es completo y de Hausdorff, existe un único $g \in H$ tal que $\{g_n\} \to g$.

Como $\{g_n\} \subseteq G \Rightarrow g \in \overline{G}$. De donde φ es isomorfismo.

Ahora bien, $\overline{G}/G \cong \hat{G}/G$, como G es denso en $\hat{G}$, entonces $\hat{G}/G$ es divisible.

En efecto, si $0 \neq \bar{x} \in \hat{G}/G$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $G \cap (x + (-n)\hat{G}) \neq \phi$ pues G es denso en $\hat{G}$.

$\Rightarrow \exists\ g = x + (-n)y$, $y \in \hat{G}$.

$\Rightarrow \bar{x} = n\bar{y}$.

Entonces $\overline{G}/G$ es subgrupo puro de H/G y por tanto $\overline{G}$ es puro en H.

Recordemos que para cada primo p, el localizado de $\mathbb{Z}$ en p es $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid m\}$.

Sea G un grupo tal que para cada $m \in \mathbb{Z}$

$(m,p)=1$ y para cada $g \in G$, la ecuación $g = mx$ tiene una única solución en G, Entonces G tiene estructura de $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulo si definimos para $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ y $g \in G$.
$\frac{m}{n} g$ como la solución de la ecuación
$mg = nx$.

Por ejemplo un p-grupo es de manera natural un $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulo, pues es q-divisible y q-libre de torsión para cada primo $q \neq p$.
Observemos que en este caso la topología p-ádica y la topología $\mathbb{Z}$-ádica coinciden.

Proposición 4.13 : Si A^p es un $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulo para cada primo p, entonces la topología $\mathbb{Z}$-ádica en $\prod_p A^p$ coincide con el producto de sus respectivas topologías p-ádicas.

Dem: Denotemos por τ la topología producto y por τ_n la topología $\mathbb{Z}$-ádica en $\prod_p A^p$.

Sea $W \in \tau_n \Rightarrow W = n \prod_p A^p = \prod_p n A^p \in \tau$.

Sea $V \in \tau \Rightarrow V = p_1^{a_1} A^{p_1} \times p_2^{a_2} A^{p_2} \times \cdots \times p_k^{a_k} A^{p_k} \times \cdots$

donde para casi todo i, $a_i = 0$.

Sea $n = mcm\{p_i^{a_i}\} = \prod_{a_i \neq 0} p_i^{a_i}$.

Entonces $n \prod_p A^p \subseteq V$.

Proposición 4.14. Con la notación del anterior, $\bigoplus_p A^p$ es denso en $\prod_p A^p$.

Sea $(a_1, a_2, \ldots) \in \prod_p A^p$. Consideremos

$\alpha_1 = (a_1, 0, \ldots)$

$\alpha_2 = (a_1, a_2, 0, \ldots)$

$\vdots$

$\alpha_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, 0, 0 \ldots)$.

Sea $(a_1, a_2, \ldots) + k \prod_p A^p$ se tiene que

$\forall n \quad k \prod_p A^p = \prod_p k A^p = kA^{p_1} \times \cdots \times kA^{p_s} \times A^{p_{s+1}} \times \cdots$

Entonces $\forall n > s$

$$(a_1, a_2, \ldots a_s, 0, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots) + (\underbrace{0, \ldots 0}_{s}, -a_{s+1}, \ldots)$$

$\therefore \ \{x_n\} \rightarrow (a_1, a_2, \ldots)$.

Proposición 4.15. Sea G de Hausdorff en la topología $\mathbb{Z}$-ádica. Entonces G es completo si y sólo si G es inyectivo puro.

Dem: Supongamos que G es algebraicamente compacto (inyectivo puro) entonces G es sumando directo de un producto directo de grupos cíclicos de torsión A. Es decir A es producto directo de $\mathbb{Z}_{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$, p primo. Cada $\mathbb{Z}_{p^k}$ es completo en su topología $\mathbb{Z}$-ádica pues si $\{a_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{Z}_{p^k}$, entonces para $\varepsilon = p^k$, $\exists N$ a.q. $n, m \geq N$ $a_n - a_m \in p^k \mathbb{Z}_{p^k} = 0$. Por tanto a partir de cierto índice la sucesión es constante.

Por tanto sumerge. Como A es producto de completos, A es completo, y G es sumando directo de A $\Rightarrow$ G es completo.

Supongamos que G es completo, como G es de Hausdorff, G es reducido, tenemos que G se puede sumergir como subgrupo puro de $\prod_p A^p$, donde A^p es producto directo de p-grupos cíclicos.

Como G es puro en A y G es completo, G es cerrado en A.

Sea $G^p = \Pi_p G$, Π_p es la p-ésima proyección. y $x_p \in G^p$. Existe $x \in G$ $\cdot s \cdot$ $\Pi_p(x) = x_p$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n! = p^{e_n} r_n$, $(p, r_n) = 1$. entonces $\exists$ $s_n, t_n \in \mathbb{Z}$ $\cdot \ni \cdot$ $s_n p^{e_n} + t_n r_n = 1$

$\Rightarrow$ $x = s_n p^{e_n} x + t_n r_n x$

Sea $g_n = t_n r_n x \in G$

Sea $y = x - \sigma_p(x_p) \in \prod_{q \neq p} A^q$ σ_p la p-ésima inclusión.

Entonces $\sigma(x_p) - g_n = (1 - t_n r_n)\sigma(x_p) - t_n r_n y$

$= s_n p^{e_n} \sigma(x_p) - t_n r_n y$.

Tenemos que $n!\, A^p = p^{e_n} r_n A^p = p^{e_n} A^p$

y $n! \prod_{q \neq p} A^q = r_n \prod_{q \neq p} A^q$. Entonces

$t_n r_n y \in n! \prod_{q \neq p} A^q$ y $s_n p^{e_n} x_p \in n!\, A^p$.

$\Rightarrow \sigma(x_p) - g_n \in n!\, A$ $\therefore \{g_n\}$ converge a $\sigma(x_p)$. Como G es completo $\sigma(x_p) \in G$.

Tenemos que $\bigoplus_p G^p \leq G \leq \prod_p G^p \leq \prod_p A^p = A$

Por la proposición anterior $\bigoplus G^p$ es denso en $\prod_p G^p$, de donde $G = \prod G^p$.

Además $G^p = G \cap A^p$ es puro y cerrado en A^p. Como A^p es completo $\Rightarrow G^p$ es completo. $\therefore$ G^p es sumando directo de A^p

$\Rightarrow G$ es sumando directo de A.

BIBLIOGRAFIA.

1. INFINITE ABELIAN GROUP THEORY
PHILIP A. GRIFFITH. THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS.

2. INFINITE ABELIAN GROUPS. VOLUME I
LÁSZLÓ FUCHS. ACADEMIC PRESS.