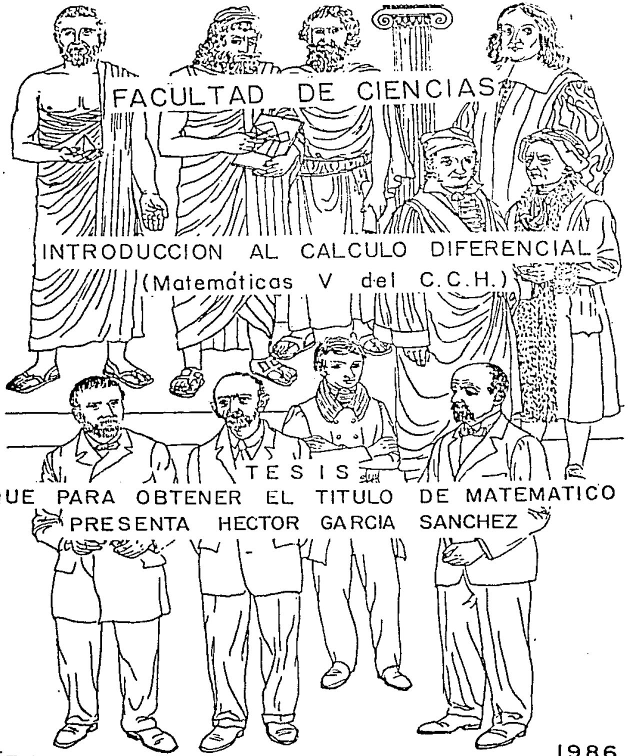
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL

(Matemáticas V del C.C.H.)

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO

PRESENTA HECTOR GARCIA SANCHEZ

MEXICO D. F. 1986

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL
(Matemáticas V del C.C.H.)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO

PRESENTA HECTOR GARCIA SANCHEZ.

MEXICO D. F. 1986

INDICE DE CONTENIDOS

3 LIMITES

NO ES SUFICIENTE TENER CONOCIMIENTO DE PROPOSICIONES PARTICULARES; NO ES SUFICIENTE SER UN TRABAJADOR CIENTIFICO CREATIVO -TAMBIEN ES NECESARIO POSEER EL METODO GENERAL CORRECTO, DOMINAR EL MATERIALISMO DIALECTICO-. SIN ESTO LOS RESULTADOS DE LA CIENCIA PARECERAN UN CUMULO INFORME O SE PRESENTARAN DE MANERA DISTORSIONADA; EN LUGAR DE UN CONOCIMIENTO VERDADERA DE LA CIENCIA SE TENDRA UNA REPRESENTACION FALSA, METAFISICA E IDEALISTA DE ELLA.

VISION GENERAL DE LA MATEMATICA.
Kolmogorov. et. al..

LA MATEMATICA TIENE COMO SU OBJETO DE ESTUDIO A LA MATERIA REAL, PERO LA CONSIDERA EN TOTAL ABSTRACCION DE SUS CONTENIDOS CONCRETOS Y DE SUS PECULIARIDADES CUALITATIVAS.
... ESTO ES LAS RELACIONES CUANTITATIVAS Y LAS FORMAS, VISTAS DE MANERA EXCLUSIVAMENTE ABSTRACTA.

VISION GENERAL DE LA MATEMATICA
Kolmogorov. et. al.

INTRODUCCION

I Sobre el origen de este trabajo.

En 1974 despues de pasar un concurso de selección organizado por los profesores y estudiantes de los planteles Sur y Oriente, ingrese al plantel Naucalpan a trabajar como profesor. En aquel tiempo, en el C.C.H. a nivel Bachillerato -en los cinco planteles- la actividad de los tres sectores que la componen -estudiantes, profesores y trabajadores- era de amplia actividad académica, así como de una vida democrática en el seno de dichos sectores y cuya participación política acerca de las descisiones que delineaban la vida del plantel era fundamental.

Es en este tiempo, cuando al conseguir los profesores de Matemáticas de Naucalpan horas liberadas para todos los profesores de su Academia, se inicia una discusión colectiva de los mismos, sobre las diferentes materias. Así es como surgirán las primeras ideas de concepción y enfoque que debe darse a la materia de Matemáticas V.

Posteriormente, bajo el ataque sistemático de las autoridades del C.C.H. a las condiciones que hicieron posible el trabajo colectivo e incluso al mismo trabajo, serán desmantelados los Seminarios al quitar las horas liberadas, e imponen las autoridades un "proyecto" alternativo -complementación y regularización- que a la vuelta de diez años, no ha redituado algun beneficio académico al trabajo de la Academia de Matemáticas.

No obstante, la valoración y reconocimiento que hacia el trabajo colectivo los maestros han logrado, en el hacer cotidiano, hacer suyos, la autoridad no logra extirparlos.

De ésta manera una y otra vez aun bajo condiciones cada vez más desventajosas para los maestros, se hacen esfuerzos tendientes a la discusión colectiva del trabajo académico. En esta dinámica, profesores de Matemáticas V llegamos a definir un temario tendiente a unificar los cursos.

Posteriormente, se han hecho otros intentos como son: la elaboración de una Antología de Matemáticas V elaborada por los profesores A. Monzoy , F. Mejía y J. García , lo cual dió criterios generales para comparar y evaluar textos apropiados para la Materia. Más adelante se hizo un primer intento de elaboración de notas, tomando como base el curso que se impartió en un grupo académico -el 684- en el que participaron los profesores A. Bañuelos , F. Mejía , J. García y A. Monzoy . Posteriormente se redactó un tema del Curso -Los números reales- participando los profesores A. Bañuelos y R. J. Guerrero , el cual sirvió de base para la elaboración del Capítulo 1 de éste trabajo; cabe mencionar que en todos estas actividades el autor participó.

Finalmente, bajo esta orientación -elaborar las notas del Curso de Matemáticas V del C.C.H.- es como he participado en el Seminario de Enseñanza y Titulación; producto de las discuciones en su seno, así como con mi asesor de Tesis M. en C. Jesus Lópes E. es como se ha enriquecido el actual material, el cual pongo a consideración del lector.

No está por demas señalar que este trabajo no está totalmente acabado y que las críticas al mismo serán bien recibidas, puesto que solo de esta manera se podrá corregir y enriquecer. Considero que la ampliación de este curso, completandolo con un texto de ejercicios o bien la redacción de las notas correspondientes a los demas cursos de Matemáticas o bien el trabajo encaminado a abordar las cuestiones didácticas y metodológicas con objeto de obtener solución a dicha problemática, nos llevara a ofrecer materiales más adecuados a la enseñanza de la Matemática a nivel Medio Superior.

II Sobre el contenido del trabajo.

Cuatro son los capítulos que cubre el curso, presentándose dos apéndices con objeto de darle justificación a tópicos del curso que no considero importantes tratar con detalle en la clase. En lineas generales se puede describir como sigue:

NUMEROS REALES

Se exponen abordando diversos aspectos como son; Una breve descripción histórica, posteriormente se presentan dos modelos que sirven para representar al conjunto $\mathbb{R}$ y señalando en éstos modelos la noción de número irracional; posteriormente se da una presentación axiomática de $\mathbb{R}$ y se expone el aspecto operativo de este sistema deductivo. El desarrollo del tema gira en torno a la importancia que tiene el proceso de CONTAR y MEDIR, como éste a coadyuvado a la formación de la Teoría de los Números Reales y a la vez como ésta Teoría, al desarrollarse presenta una esfera de mayor aplicación.

FUNCIONES

En éste capítulo, se da una valoración sobre la importancia que tienen tanto los instrumentos, los conceptos de las diversas disciplinas y los medios matemáticos en una época determinada, para conformar la base en que se desarrolla el conocimiento, ejemplificando tal valoración con el concepto de función.
Se define el concepto, se presentan funciones que son modelos de diversas problemáticas tanto de las ciencias naturales como sociales y se hace un estudio de las funciones elementales, lo que permite presentar una variedad amplia de funciones. Se da gran importancia a la presentación geométrica de la función -la gráfica-.

LIMITE y DERIVADA

En estos capítulos se pone énfasis el porque de los conceptos desde el punto de vista práctico y matemático, haciendose acompañar de notas históricas.
Posteriormente se dan exposiciones intuitivas sobre los conceptos con objeto de llegar con menos dificultad a formalizarlos. Al tiempo se hace una exposición en la que se muestra un aspecto del trabajo matemático con objeto de ir familiarizando al estudiante: este es el rigor. Un aspecto que no puede soslayarse es el manejo de los cálculos y procedimientos que requiere la técnica de determinar el límite, la continuidad o bien la derivada de una función.

III Sobre la concepción de éste trabajo

Quisiera señalar que el orden en que aparecen los temas es el que usualmente aparece en los cursos de Cálculo, un orden lógico, el cual es inverso al desarrollo histórico que han tenido los propios conceptos.

Considero que no solo las notas históricas que aparecen en el texto exponen ésta diferencia, sino que es en el salón de clases donde se deben realizar exposiciones en que se presente la diferencia de "la Lógica del descubrimiento" y la de la "Lógica de la enseñanza".

Asimismo al referirnos a el conocimiento, ya sea en forma general o bien en forma particular, lo hacemos con una concepción. Así en este texto se plantea:

1.- Que el desarrollo del conocimiento depende de la producción, que es a partir de la producción, actividad fundamental del hombre, como conoce los fenómenos de la naturaleza, así como las relaciones de él y los otros hombres. Que las demas actividades giran en torno a la práctica en la producción y por lo tanto la práctica científica se subordina a la práctica por desarrollar la producción.

2.- Que la ciencia se forma históricamente como un proceso especial del conocimiento, la cual se constituye en la época del surgimiento de las clases y de la lucha de clases.
Que esto conlleva la división social del trabajo surgiendo el trabajo intelectual separado del manual, así como con las particularidades que presenta, como es el que los grupos sociales dominantes monopolicen el trabajo intelectual y lo utilicen para la afirmación de sus privilegios.

Que así es como la actividad cognoscitiva en la ciencia la realizan grupos de personas especialmente preparadas, siendo el desarrollo del proceso del conocimiento, el fin social de estos grupos. Por lo cual la historia del desarrollo de la ciencia es al mismo tiempo la historia de esta forma compleja de actividad.

3.- Que en la ciencia se crean y elaboran los medios especiales del conocimiento.

i). Los Materiales: diversos aparatos, instalaciones, experimentos, etc.

ii). Los Matemáticos: métodos de cálculo, teorias matemáticas, etc.

iii). Los Lingüísticos y Lógicos: diferentes lenguajes artificiales, reglas de la estructura de las definiciones elaboradas en la lógica de la demostración.

La creación y perfeccionamiento de éstos medios de conocimiento y la elaboración de los métodos especiales de su utilización, desempeñan un importante papel en el desarrollo de la Ciencia.
Lo cual es válido para el Cálculo Diferencial.

El Autor

Hector García Sánchez

3 s. antes de n.e.
ARQUIMEDES

1858 J. PEANO 1932

I

NUMEROS REALES

1845 G. CANTOR 1918

" Para contar hace falta no solo - los objetos contables, enumerables, sino tambien la capacidad de prescindir, al considerar estos objetos, de todas sus demas cualidades que no sean el número, y esta capacidad es resultado de una larga - evolución historica y de la experiencia.

ANTI-DUHRING.

F.Engels.

§ 1. Introducción

El concepto de número que actualmente tenemos, ha sido resultado de reflexión sobre la actividad práctica del hombre en la que el concepto resulta como un medio para conocer a la naturaleza, - siendo éste, un medio de idealización y analogía, fuente de ideas y principios que posibilitaban el surgimiento de nuevas hipótesis, teorías y orientaciones en la ciencia.

El número aparece en el proceso cognocitivo cuando se logra - cuantificar una colección de objetos con determinada propiedad, la cual es posible comparar entre tales objetos. En dicho proceso, la cuantificación se presenta de dos tipos: CONTAR y MEDIR. Materializandose lo primero en los números Naturales dado su caracter ordenado, infinito, en torno al cual se resuelve esta problemática; - mientras que es el conjunto de los números Reales el instrumento - teórico que permite darle a la medición la precisión teórica que se requiere.

Los primeros números conocidos en la antiguedad son los que hoy conocemos como Números Naturales y denotamos por:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$$

Los antiguos Babilonios y Egipcios desarrollaron un sistema de reglas de cálculo para la adición y multiplicación de naturales y aun cuando la división no se desarrollo, ya aparecen ciertas - fracciones en sus cálculos. El desarrollo de la medición de longitudes y áreas son base para que se llegue a plantear la relación que existe entre los lados homólogos de triángulos semejantes, lo cual da lugar a el uso de cocientes de dos naturales como un solo número. Tenemos pues que los números racionales positivos aparecen en una temprana etapa de la civilización.

Durante largo tiempo se considero que este tipo de números eran los únicos existentes, pero los avances en Algebra y Geometría dieron lugar a la introducción de nuevos números, en particular la de los números irracionales positivos. A quien se le atribuye de 1 considerar la necesidad de introducir los números irracionales positivos (un número irracional es aquel que no es cociente de dos enteros) fue a Pitágoras (Siglo VI a.n.e.), personaje semilegendario, pues en realidad lo que se conoce es una escuela de geómetras cuyos resultados se le atribuían a Pitágoras. Aún en la escuela Pitagórica hubo objeciones para aceptar estos nuevos números, ya que su aceptación daba al traste con algunos de sus resultados ya obtenidos.

La aceptación del cero y posteriormente de los números negativos fue tambien difícil, de hecho la introducción de los números negativos en el sistema numérico se realizó a principios del siglo XVII. Al considerar los números negativos se "completo" el conjunto ahora conocido como el conjunto de los números Reales, denotado por $\mathbb{R}$.

Los conjuntos de números a los que hemos hecho referencia se denotan como sigue:

El conjunto de números Naturales: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$
El conjunto de números Enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
El conjunto de números Racionales: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p,q,\in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$
El conjunto de números Irracionales: $\mathbb{I}$

En los anteriores conjuntos se cumplen las siguientes relaciones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \phi$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$$

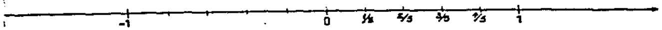
§ 2. Representación de los racionales como puntos de una recta

Los números racionales surgieron de la comparación de segmentos a los cuales habia que asignarles una medida, para tal propósito se elegía un pequeño segmento como unidad de medida; puede ser,

en nuestro caso, el centímetro, el metro, la pulgada, el pie, etc., es decir, un segmento arbitrario puede ser tomado como unidad de medida.

Precisando, el procedimiento consiste en: considerar una recta horizontal prolongada indefinidamente en ambas direcciones. Tomemos un punto arbitrario en esta recta, al cual llamaremos el origen de la recta y le asignamos el número 0. Tomemos otro punto cualquiera a la derecha de 0, a este punto le asignamos él número 1 y el segmento 01 sera nuestra unidad de medida. De esta forma al número 2 le corresponde un punto en la recta a la derecha de 1 tal que la "medida" del origen a este punto sea dos veces el segmento 01, de manera análoga tomando la medición del origen a la derecha, denotamos los números 3,4,5,..., por puntos en la recta. Ahora tomando el origen como centro de simetría obtenemos los enteros negativos, es decir, el punto simétrico a 2 es el -2, etc.

Mediante construcciones geométricas podemos dividir el segmento 01 en un número n de partes iguales*; al punto a la derecha del origen le asignamos el número $\frac{1}{n}$, al segundo $\frac{2}{n}$, etc. Por ejemplo si dividimos el segmento 01 en 5 partes iguales, el primer punto sería $\frac{1}{5}$, el segundo $\frac{2}{5}$, etc.

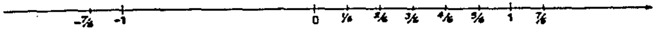


de esta forma, si n y m son naturales, al racional $\frac{m}{n}$ le corresponde un punto en la recta obtenido de la siguiente forma:

Dividimos el segmento 01 en n partes iguales, tomemos el seg-

*Esta construcción se basa en propiedades de triángulos semejantes. Asi para dividir un segmento AB en n partes iguales, se procede de la siguiente manera:
i) Se traza un rayo AC que no contenga a AB.
ii) En AC se traza con un compas n segmentos iguales: AA_1, A_1A_2, ... $A_{n-1}A_n$
iii) Se traza el segmento A_nB.
iv) Se trazan segmentos paralelos a A_nB que pasen por A_1, A_2,... A_{n-1} y corten a AB en los puntos B_1, B_2,...B_{n-1}
v) Los segmentos AB_1, B_1B_2, ... $B_{n-1}B_n$ son los segmentos buscados.

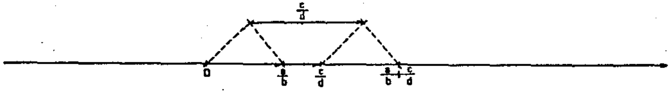
mento que "mide" m veces el segmento 01 midiendo del origen hacia la derecha y de esta forma se localiza el punto correspondiente al racional $\frac{m}{n}$. Simétrico a $\frac{m}{n}$ se encuentra el racional $\frac{-m}{n}$.



Hemos representado por medio de este modelo a cada elemento de Q, además con dicho modelo es posible realizar las operaciones aritméticas como son sumar, restar, multiplicar y dividir.

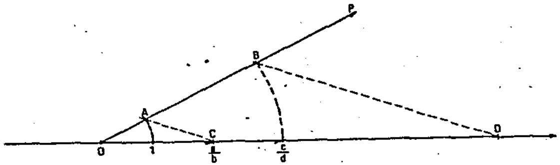
Así para sumar un par de puntos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en la recta, se procede como sigue:

A cada punto en la recta se le considera con una magnitud y una dirección, así a partir del punto $\frac{a}{b}$ trazamos un segmento con la misma medida y dirección que representa a $\frac{c}{d}$ y el punto extremo de dicho segmento representará el punto que corresponde al número $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.



Para multiplicar dos puntos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ procedemos como sigue:

Trazamos un rayo auxiliar OP con punto inicial en el origen de la recta numérica, en este rayo se localizan segmentos de igual medida a la que representa a los números 1 y $\frac{c}{d}$. Luego por el punto $\frac{a}{b}$ de la recta y el punto 1 del rayo trazamos un segmento AC, por último trazamos un segmento BD paralelo a AC que pase por el punto $\frac{c}{d}$ en el rayo y el punto donde corta a la recta es el buscado.



La justificación se da por medio de semejanza entre los triángulos AOC y BOD, esto es:

como $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$

entonces $OD = OC \cdot \frac{OB}{OA}$

y al sustituir las igualdades $OA = 1$, $OB = \frac{c}{d}$ y $OC = \frac{a}{b}$

se obtiene que $OD = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

En resumen:

La recta es un modelo que permite representar a los números racionales y sus operaciones.

§ 3. Representación de los racionales en forma decimal

Otro modelo para representar al número consiste en proponer una colección de símbolos con los que se realizan los procesos de contar y medir, de forma tal que se tenga posibilidad de contar en forma inagotable, así como alcanzar el grado de aproximación o precisión en la medición que las necesidades, tanto prácticas como teóricas lo exijan

De esta manera, se han elaborado, según el grado de desarrollo, diversos sistemas de símbolos que van desde simples muescas en árboles, huesos, etc., a sistemas de numeración más complejos que han sido producidos por diversas culturas; siendo ejemplo de -

éstas los sistemas de numeración Babilonio, Egipcio, Griego, Romano, Chino, Maya, Indú y Arábigo. Este último ha sido el punto de partida para construir el sistema que actualmente usamos, esto es, el SISTEMA POSICIONAL DE BASE DIEZ, en el cual sus símbolos o dígitos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y que con el auxilio de la idea de posición y el punto decimal logramos resolver los problemas que aborda el contar y medir.

Así el proceso de contar que tiene como base la idea de un sucesor, que está plasmada en los números naturales, se simboliza como sigue:

i). o, $Sc(0) = 1$, $Sc(1) = 2$, ... $Sc(8) = 9$

ii). $Sc(9) = 10$.

A partir de este número se utiliza más de un dígito para su representación.

iii). Si b es un número con n cifras, $b = a_1a_2\ldots a_n$ Sc(b) se escribe inspeccionando la última cifra (de izquierda a derecha) y comparandola con 9, de tal forma que si es menor Sc(b) se escribe sin modificar las n-1 cifras anteriores y en el lugar último se escribe $Sc(a_n)$; en el caso que la última cifra sea igual a 9, se escribe en lugar de las primeras n-1 cifras el número $Sc(a_1a_2\ldots a_{n-1})$ y en el último lugar se coloca el 0.

Es decir, si $b = a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n$

$$Sc(b) = \begin{cases} a_1a_2\ldots a_{n-1}Sc(a_n) & \text{si } a_n < 9 \\ Sc(a_1a_2\ldots a_{n-1})0 & \text{si } a_n = 9 \end{cases}$$

De esta manera con diez símbolos podemos representar a N, por otro lado, a partir de la posición que se considera siempre en la escritura de un número, se simplifican los procedimientos aritméticos, esto es, para realizar los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división es importante considerar cada símbolo con respecto a esta característica.

En cuanto al medir, se puede hacer corresponder los segmentos de la forma $\frac{1}{10^n}$ con los símbolos que tenemos adicionando un símbolo: el punto decimal (.). Estableciendose la siguiente correspondencia:

$$\frac{1}{10} \to 0.1; \quad \frac{1}{10^2} \to 0.01; \quad \frac{1}{10^3} \to 0.001; \ \ldots$$

$$\frac{1}{10^n} \to 0.\underbrace{00\ldots1}_{n \text{ lugares}}$$

de esta manera la escritura decimal permite expresar la medición con la exactitud que se requiera.

La utilidad que ha presentado este modelo lo mostraremos presentando algunos usos que se hacen de este.

1) Se han encontrado vestigios de la cultura del hombre de Yuanmen hace aproximadamente 2 000 000 años.

2) El plesiosaurio vivió en el jurásico inferior alrededor de 180 000 000 de años.

3) La edad geológica de nuestro planeta se calcula en ... 4 500 000 000 de años.

4) La deuda externa de México en 1983 es 85 000 000 000 de dolares.

5) La vida media del Torio es de 14 000 000 000 años.

6) El número de átomos en un átomo-gramo de cualquier elemento es una constante, llamada el número de Avogadro y el cual es N_0 = 602 296 000 000 000 000 000 000

7) El diametro de la Via Lactea es de 100 000 años Luz, que expresada en Kilómetros es 932 120 000 000 000 000 Km. aproximádamente.

8) El Físico finlandes Lounanmea a logrado producir en el laboratorio la temperatura $\frac{5}{10^9}$K = 0.000 000 005 K.

9) La masa de un electrón es aproximadamente $\frac{9}{10^{28}}$ g. igual a

0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 9 g.

10) La definición de la unidad de medida Metro en 1960 es ... 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz emitida por un isótopo de Kriptón (Kr^{86}) en el vacío; actualmente se define como la distancia que recorre una onda electromagnética en el vacío durante $\frac{1}{2\ 999\ 792\ 458}$ segundos.

En general, todo número racional se puede representar con la escritura decimal, la cual consiste en una simple división, donde el numerador es el dividendo y el denominador el divisor; así, el cociente, resultado de la división es el número decimal representante.

Veamos los siguientes ejemplos:

a) Al racional $\frac{3}{4}$ le hacemos corresponder el 0.75 ya que:

$$\begin{array}{r|l} & 0.75 \\ 4 & 3\,0. \\ & 2\,0 \\ & 0 \end{array}$$

(Observe que cuando el residuo es cero decimos que $\frac{3}{4}$ tiene una escritura decimal exacta)

b) Al racional $\frac{12}{7}$ le corresponde el 1. 7142857142857.... o bien $1.\overline{714285}$ ya que:

$$\begin{array}{r|l} & 1.7142857... \\ 7 & 1\,2 \\ & 5\,0 \\ & 10 \\ & 30 \\ & 20 \\ & 60 \\ & 40 \\ & 50 \\ & \vdots \end{array}$$

(A los números que se repiten se les llama periodo, y trazando un segmento sobre ellos indicamos que ese número se repite en forma infinita. En estos casos se dice que tiene una escritura decimal infinita y periódica)

c) Al racional $\frac{17}{15}$ le corresponde el $1.1\overline{3}$. Se verifica realizando la división.

En los anteriores ejemplos, se pueden observar las propiedades que se cumplen al efectuar las divisiones, a saber:

a) El residuo es menor que el divisor.

b) En caso que el residuo no sea cero, los residuos se repiten en forma infinita y en el mismo orden.

Por lo cual:

Todo número racional tiene una representación decimal, sea esta exacta o periódica.

§ 4. Los números irracionales.

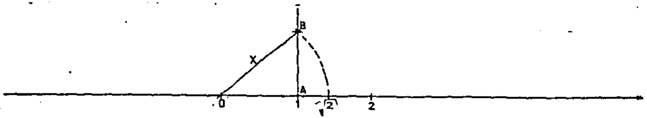
La "recta numérica" y la "escritura decimal", son dos modelos para los números racionales; sin embargo, en cada uno de ellos existen objetos que no representan a ningun racional, veamoslo con más detenimiento:

• En el modelo de la recta.

Conocemos que en la recta, para localizar un punto que represente a un número racional $\frac{m}{n}$, se suma m veces un segmento de longitud $\frac{01}{n}$; todos los puntos que se localizan de este modo y que representan a los números racionales se les llama CONMENSURABLES –se pueden medir– más ¿todo punto en la recta es conmensurable?, de otra manera, dado un punto cualquiera P en la recta, ¿es posible dividir el segmento 01 en n partes iguales y sumando m veces el segmento $\frac{01}{n}$ de tal forma que el resultado sea el punto P?. La respuesta es negativa, esto es, existen puntos en la recta que no se pueden localizar con el modelo descrito. Por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ es un número inconmensurable –no conmensurable–. Demostremos esta afirmación:

Mostremos primero la existencia en la recta numérica de un segmento de longitud $0\sqrt{2}$.

Construyamos sobre la recta un triángulo rectángulo OAB cuyos catetos tengan como longitud el segmento unitario 01.



Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que la hipotenusa OB tiene como longitud la medida $\sqrt{2}$ $(x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2})$.

En seguida demostremos que $\sqrt{2}$ no es un número racional, emplearemos para ello, el método llamado de reducción al absurdo, esto es, partir de algo falso y llegar a que una afirmación y su negación son verdaderas, sea pues la demostración.

1) Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, luego
2) Existen a y b números naturales sin divisores comunes tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

3) De (2) se tiene que a y b no pueden ser pares los dos.
4) Elevando al cuadrado la igualdad en (2) tenemos que

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

5) Despejando a^2 se tiene

$$a^2 = 2b^2$$

6) a es par
7) De (3) y (6) se concluye que b es impar
8) De (6), a se puede expresar como

$$a = 2k$$

para algun número natural k
9) Sustituyendo en (5) el valor asignado á a en (8) tenemos

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$$

10) Simplificando

$$2k^2 = b^2$$

11) b^2 es par
12) b es par
13) El que (7) y (12) sean verdaderos se ha logrado obtener debido a que (1) es falso,

$\sqrt{2}$ no es número racional.

• En el modelo de la escritura decimal.

Todo número racional tiene una representación decimal "exacta" o decimal infinita y periódica; pero la escritura nos permite formar "expresiones" que no presentan las anteriores características, por ejemplo:

736.1011011101111011111011111 0....
-127.1121231234123451234561234567...
-1432.1131351357135791357911135791113...

números en los cuales su expresión decimal es infinita y no periódica, motivo por lo cual no representan a algun número racional.

En resumen: Los dos modelos nos muestran "ciertos" objetos que no representan números racionales. Lo cual nos presenta dos posibles soluciones:

A) No existen números que asignemos a todo elemento de nuestro modelo.

B) Todos los objetos de los modelos, representan a números.

La primera solución no permite avanzar: niega los resultados que surgen del desarrollo de los conceptos*; la segunda opción permite continuar desarrollando los problemas que se plantean en la práctica científica.

*Aunque en los griegos tenga un origen filosófico, es el mismo problema. Por lo cual los griegos siguieron un desarrollo exclusivo hacia la geometría y la teoría de números, a pesar de haberla tratado, el método usado, a travez de "semejanza" no permitió su desarrollo.

Por el camino de esta última opción se tiene que esos objetos que no tienen una representación en los modelos, les llamamos irracionales, así, los números que representan a estos modelos es la unión de dos conjuntos: los racionales y los irracionales.

A los irracionales, pertenecen aquellos números cuya escritura decimal es infinita y no periodica - en el modelo decimal-; - así como los números que representan segmentos inconmensurables - -en el modelo de la recta-, por ejemplo los números de la forma $\sqrt{n}$ donde n no es un número cuadrado perfecto o tambien los números π, o e, que es la base de los logaritmos neperianos, etc.

§ 5. El método Axiomático y Los Reales.

Una característica del conocimiento científico, es el que logra estructurar de modo sistemático ciertas proposiciones de manera que se puedan advertir sus "relaciones". Pero una teoría matemática (científica) no tan solo y simplemente es un listado de proposiciones, sino que este ordenamiento debe dar el mayor grado posible de claridad y certeza. Desde esta óptica, sera conveniente tener un procedimiento que permita aclarar el significado de cada expresión que aparezca en la teoría considerada y justificar cada una de sus afirmaciones. Debe reconocerse que este procedimiento es tan solo un ideal inalcanzable, pues cuando se trata de explicar el significado de una proposición, hay que emplear necesáriamente otras expresiones, sin caer en círculos viciosos; se debe recurrir a su vez a otras expresiones y así sucesivamente. Tenemos pues, un proceso que nunca se acabaría.

En sustitución de este procedimiento ideal irrealizable se - han logrado principios sobre la construcción de disciplinas matemáticas.

En el inicio de construcción de determinada disciplina matemática, se identifica ante todo un "pequeño" grupo de expresiones que nos parezcan comprensibles "sin mayor problema", a este grupo les llamaremos TERMINOS PRIMITIVOS o NO DEFINIDOS y los aceptamos

y empleamos sin aclarar o explicar su significado. Además adoptamos el principio de UTILIZAR UNICAMENTE EXPRESIONES CUYO SIGNIFICADO HAYA SIDO DETERMINADO PREVIAMENTE CON AYUDA DE LOS TERMINOS PRIMITIVOS O CON AYUDA DE EXPRESIONES QUE YA SE HAN DETERMINADO. La proposición que de este modo define el significado de un término de la teoría es llamada DEFINICION, y la expresión cuyo significado es así determinado, se dice que es un TERMINO DEFINIDO.

En seguida y análogamente al procedimiento anterior, consideramos las afirmaciones de la disciplina considerada y elegimos - "las que nos parescan más evidentes" como afirmaciones primitivas: AXIOMAS O POSTULADOS, las cuales aceptamos como verdaderas sin establecer su validez.

Toda afirmación será aceptada como verdadera -que no sea axioma- sólo si hemos podido establecer su validez usando únicamente axiomas, definiciones y aquellas afirmaciones cuya validez a sido establecida previamente. Estas afirmaciones, establecidas en esta manera son afirmaciones demostrables ó TEOREMAS y el procedimiento mediante el cual se establece su validez se llama DEMOSTRACION. Este método se caracteriza por aceptar inicialmente como verdadero lo menos que se pueda y obtener y deducir lo más que se pueda.

A continuación aplicaremos este método para estudiar al sistema de los números reales ($\mathbb{R}$), y como prerequisito consideraremos que se conocen elementos de la Teoría de Conjuntos, y en particular lo que es una operación binaria.*

El estudio axiomático, lo dividimos en tres tipos de propiedades que llamaremos Algebraicas, de Orden y finalmente de Completez.

*La definición de Operación Binaria es: Sea F un conjunto no vacio. Se dice que una Operación Binaria Θ en F, es una función con dominio $F \times F$ y contradominio F. En lugar de usar la notación $\Theta(a,b)$ para denotar la imagen del elemento - (a,b) de F F, es costumbre usar la notación $a \Theta b$. Así en el caso de la suma y multiplicación en $\mathbb{R}$ se acostumbra decir $a + b$ y $a \cdot b$ en ves de $+(a,b)$ y $\cdot(a,b)$

1.6. Propiedades Algebraicas.

En el conjunto de los números reales se consideran definidas dos operaciones binarias, que se denotan por $+$ y $\cdot$ (es decir, si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$), llamadas adición y multiplicación respectivamente. Estas operaciones satisfacen la siguiente lista de axiomas conocidas como: propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$ o de él Campo de los números reales.

A_1.- Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b = b + a$ (Propiedad conmutativa)

A_2.- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Propiedad asociativa)

A_3.- Existe en $\mathbb{R}$ un elemento denotado por 0 tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$.
Al elemento 0 (cero) se le llama idéntico o neutro aditivo

A_4.- Para todo elemento $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que
$a + (-a) = 0$ (Al elemento $-a$ se le llama inverso aditivo del elemento a).

A_5.- Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot b = b \cdot a$ (Propiedad conmutativa)

A_6.- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Propiedad asociativa)

A_7.- Existe en $\mathbb{R}$ un elemento denotado por 1 tal que Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ y $1 \neq 0$.
Al elemento 1 (uno) se le llama idéntico o neutro multiplicativo.

A_8.- Para todo $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ existe un elemento $a^{-1} = \frac{1}{a}$ que pertenece a $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$
Al elemento a^{-1} se le llama el inverso multiplicativo de a.

A_9.- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma).

Estas propiedades son ya familiares para el lector. Obtendremos ahora algunas consecuencias importantes, utilizadas para simplificar expresiones algebraicas, las cuales son ya ampliamente conocidas.

Demostraremos primero que los elementos 0 y 1 enunciados en los axiomas A_3 y A_7 son únicos en $\mathbb{R}$; lo cual se establece en el siguiente

TEOREMA 1.1 (a) Si para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $z \in \mathbb{R}$ tal que
$$z + a = a$$
entonces $z = 0$

(b) Si para todo $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \cdot b = b$
entonces $w = 1$.

Demostración:

(a) Si $z + a = a$, entonces sumando $-a$ en ambos miembros de la igualdad y usando las propiedades A_2, A_4, y A_3 obtendremos:

$$\begin{aligned} (z + a) + (-a) &= a + (-a) & \\ z + (a + (-a)) &= a + (-a) & A_2 \\ z + 0 &= 0 & A_4 \\ z &= 0 & A_3 \end{aligned}$$

(b) Para esta parte se utiliza un procedimiento similar, el cual se deja como ejercicio. Notese que se usa la hipótesis que $b \neq 0$.

NOTA: Para fines prácticos de aquí en adelante escribimos $a - b$ en lugar de $a + (-b)$; ab en lugar de $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$ en lugar de ab^{-1} ó $a \cdot \frac{1}{b}$.

En $\mathbb{R}$ las ecuaciones $a + x = b$ y $ax = b$ si $a \neq 0$, admiten solución única, que establecemos en el siguiente

TEOREMA 1.2 (a) Si $a,b \in \mathbb{R}$ y $a + b = 0$ entonces $b = -a$
(b) Si $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $ab = 1$ entonces $b = \frac{1}{a}$.
(c) Si $a + x = b$ entonces $x = b - a$
(d) Si $a \neq 0$ y $ax = b$ entonces $x = \frac{b}{a}$

Demostración:
Es sencilla y se deja como ejercicio. Recomendando se haga en el orden establecido, de tal forma que en cada paso o afirmación se mencione el axioma o resultado que ya se haya demostrado.

La siguiente afirmación es con respecto a propiedades que frecuentemente aparecen en resultados aritméticos, los cuales nos parecen demasiados obvios, más estos resultados pueden comprobarse con nuestros axiomas.

TEOREMA 1.3 Si $a,b \in \mathbb{R}$, entonces
(a) $a \cdot 0 = 0$
(b) $-a = (-1)a$
(c) $-(a + b) = -a - b$
(d) $-(-a) = a$
(e) $(-1)(-1) = 1$

Demostración:
a) Sabemos que $a \cdot 1 = a$ (A_7), de está modo y usando A_9 y A_3 tenemos que

$$\begin{aligned} a + (a \cdot 0) &= (a \cdot 1) + (a \cdot 0) \\ &= a(1 + 0) \\ &= a(1) \\ &= a \end{aligned}$$

y como $a + a \cdot 0 = a$ haciendo uso del T.1.1 (a) concluimos que $a \cdot 0 = 0$

b)
$$\begin{aligned} a + (-1)a &= (1)a + (-1)a && A_7 \\ &= (1 + (-1))a && A_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0a && A_4 \\ &= 0 && \text{T.1.3, (a)} \end{aligned}$$

así como $a + (-1)a = 0$ por T.1.2, (a) tenemos que $(-1)a = -a$.

c) Por el inciso (b) sabemos que

$$\begin{aligned} -(a + b) &= (-1)(a + b) \quad \text{por } A_9 \\ &= (-1)(a) + (-1)(b) \quad \text{de nuevo por (b)} \\ &= -a + (-b) \quad \text{o en forma equivalente} \\ &= -a - b. \end{aligned}$$

d) Sabemos que $(-a) + a = 0$ por A_4 y A_1 y por el T.1.2 (a) se concluye que
$$-(-a) = a$$

e) Por el inciso (b) sabemos que
$(-1)(-1) = -(-1)$ y por el inciso (d) $-(-1) = 1$
por lo tanto $(-1)(-1) = 1$.

Finalmente algunos resultados complementarios que probaremos aparecen en el siguiente

TEOREMA 1.4 (a) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(a^{-1})^{-1} = a$
(b) Si $a,b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = 0$ entonces alguna o ambas de las siguientes afirmaciones se verifican: $a = 0$; $b = 0$
(c) Si $a,b \in \mathbb{R}$ entonces $(-a)(-b) = ab$
(d) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$

Demostración:
a) Como $a \neq 0$, $aa^{-1} = 1$; por el T.1.3 (a), se tiene que $a^{-1} \neq 0$; por otra parte por A_5, se tiene que $a^{-1}a = 1$ y del T.1.2, (b) se deduce $(a^{-1})^{-1} = a$

b) Sea $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que
$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$$

$$(a^{-1}a)b = a^{-1}0 \qquad \text{por } A_6$$
$$1b = 0 \qquad \text{por } A_8$$
$$b = 0 \qquad \text{por } A_7$$

Haciendo uso de un argumento similar se prueba que si $b \neq 0$ entonces $a = 0$.

c) Usamos el T.1.3; (b) y (e); y la propiedad conmutativa y asociativa A_5 y A_6 se tiene por tanto

$$\begin{aligned}
(-a)(-b) &= ((-1)a)((-1)b) \\
&= (-1)(a((-1)b)) && A_6 \\
&= (-1)((a(-1))b) && A_6 \\
&= (-1)(((-1)a)b) && A_5 \\
&= ((-1)(-1))(ab) && A_6 \\
&= 1(ab) && T1.3;\ (e) \\
&= ab && A_7
\end{aligned}$$

d) Sabemos que $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$ (¿por que?), [illegible]to que $aa^{-1} = 1$ se sigue de (c) de este te[illegible]

$$(-a)(-(a^{-1})) = aa^{-1} = 1 \qquad [illegible]$$
$$(-a)(-a)^{-1} = 1 \qquad A_9 \qquad [illegible]$$

[illegible]ente aplicando el T.1.2, (b) se sigue [illegible]

$$-(a^{-1}) = [illegible]$$

NOTA: De los Teoremas [illegible] y 1.4 podemos ver que cualquiera de de las expr[illegible]es $\frac{-a}{b}$; $\frac{a}{-b}$; $-a\frac{1}{b}$; $a\frac{-1}{b}$; $-\frac{a}{b}$ representan [illegible] mismo número real.

§ 7. Propiedades de Orden en $\mathbb{R}$

Hemos dado una primera lista de axiomas para el conjunto $\mathbb{R}$, a los que llamamos "Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$". Aumentaremos a esta lista otro axioma, que permite estudiar lo que consideramos como "Propiedades de Orden".

O_1.- Existe en $\mathbb{R}$ un subconjunto no vacio, denotado por $\mathbb{R}^+$ y llamado el conjunto de los números reales positivos que satisface las siguientes propiedades:

i) Si $a,b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$

ii) Si $a,b \in \mathbb{R}^+$ entonces $ab \in \mathbb{R}^+$

iii) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones*

$a \in \mathbb{R}^+$; $a = 0$; $-a \in \mathbb{R}^+$.

Basandonos en el anterior axioma, definimos un orden entre los números reales que permite la comparación entre cualquier par de elementos de $\mathbb{R}$ como sigue:

DEFINICION 1.2 Si $a,b \in \mathbb{R}$ y $a - b \in \mathbb{R}^+$, entonces decimos que "b es menor que a" o que "a es mayor que b" y escribimos $b < a$ ó $a > b$ respectivamente.

Si $a - b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, decimos que "b es menor o igual que a" o que "a es mayor o igual que b" y escribimos $b \leq a$ ó $a \geq b$ respectivamente

Es evidente que todo elemento de $\mathbb{R}^+$ es mayor que cero y visceversa, todo elemento mayor que cero pertenece a $\mathbb{R}^+$, es decir $a \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow a - 0 \in \mathbb{R}^+$.

Ademas que los elementos menores que cero, diremos que pertenecen al conjunto $\mathbb{R}^-$. A este conjunto le llamaremos el conjunto de números reales negativos.

Demostraremos cuatro teoremas que se derivan del orden que existe en $\mathbb{R}$, lo cual nos permitira comprender tanto la forma de comparar algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$, asi como resolver desigualdades.

*Esta propiedad es llamada Tricotomía, que quiere decir dividido en tres partes; ya que la condición (iii) divide al conjunto de los reales en tres subconjuntos ajenos, estos son: $\{0\}$, $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \mid -a \in \mathbb{R}^+\}$.

TEOREMA 1.5 Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$

(a) Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

(b) Se cumple una sola de las siguientes afirmaciones:

$a > b$; $a = b$; $a < b$

(c) Si $a \geq b$ y $a \leq b$ entonces $a = b$.

Demostración:

(a) Usando la Definición 1.2, probar (a) significa que si $a - b \in \mathbb{R}^+$ y $b - c \in \mathbb{R}^+$ entonces $a - c \in \mathbb{R}^+$. lo cual resulta de aplicar el axioma O_1 (i), ya que $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{R}^+$ y simplificando se tiene: $a - c \in \mathbb{R}^+$

(b) Por la propiedad de tricotomía sabemos que $a - b \in \mathbb{R}^+$ ó $a - b \in \mathbb{R}^+$ ó $-(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+$ o sea: $a > b$ ó $a = b$ ó $a < b$

(c) Si $a \neq b$, aplicando el inciso anterior, una sola afirmación se cumple, es decir $a > b$ ó $a < b$ lo cual contradice la hipótesis por lo tanto $a = b$.

TEOREMA 1.6 (a) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

(b) $1 > 0$

Demostración:

(a) Si $a \in \mathbb{R}^+$, $aa = a^2 \in \mathbb{R}^+$; en el caso que $-a \in \mathbb{R}^+$ por el T.1.4 (c) tenemos que $a^2 = aa = (-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$

(b) Sabemos que $1 \neq 0$ A7, luego por el inciso anterior $1^2 > 0$; pero $1^2 = 1$, por lo tanto $1 > 0$

NOTA: Puesto que cualquier número natural n se puede expresar como la suma

$$n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}}$$

podemos afirmar que todo número natural es mayor que cero.

TEOREMA 1.7 Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

(a) Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$

(b) Si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$

(c) Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$

(c') Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$

(d) Si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$

(d') Si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$

Demostración:

(a) Por hipótesis $a - b \in \mathbb{R}^+$ y como $a - b = (a+c)-(b+c)$ se deduce que $a + c > b + c$

(b) Por hipótesis $a - b$, $c - d \in \mathbb{R}^+$ luego $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}^+$, esto es $a + c > b + d$

(c) Por hipótesis $a - b, c \in \mathbb{R}^+$, luego $(a - b)c \in \mathbb{R}^+$, esto es: $ac - bc \in \mathbb{R}^+$; por lo tanto $ac > bc$

(c') Por hipótesis $a - b \in \mathbb{R}^+$, $-c \in \mathbb{R}^+$ así $(a - b)(-c) = -ac + bc = bc - ac \in \mathbb{R}^+$, por lo tanto $ac < bc$.

(d) Comparemos $\frac{1}{a}$ con 0; así si $\frac{1}{a} = 0$ entonces $1 = a\cdot\frac{1}{a} = 0$. ¡Contradicción!, por lo tanto esta suposición es falsa. Luego si $\frac{1}{a} < 0$, como $a > 0$ aplicando (c') $1 = a\cdot\frac{1}{a} < a\cdot 0 = 0$, esto es $1 < 0$, lo cual contradice el T1.6 (b), por lo tanto $\frac{1}{a} > 0$.

(d') Como en el caso anterior, la demostración se sigue de manera inmediata.

TEOREMA 1.8 Si $ab > 0$ entonces $a > 0$ y $b > 0$; ó $a < 0$ y $b < 0$.

Demostración:

Si $ab > 0$ entonces $a \neq 0$ y $b \neq 0$ (¿por qué?).
Si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$ y $b = (\frac{1}{a}a)b = \frac{1}{a}(ab) > 0$; por otro lado, si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$ luego si $ab > 0$ se cumple que $\frac{1}{a}(ab) < 0$, pero $\frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a}a)b = b$, por lo tanto $b < 0$

Para nuestro estudio del Cálculo, las anteriores propiedades -Axiomas de Campo y Orden- nos permiten estudiar subconjuntos de $\mathbb{R}$, estos los abordaremos en las siguientes secciones que son: Valor Absoluto, Intervalos, Distancia y Desigualdades.

§ 8. Valor Absoluto

DEFINICION 1.3 Si $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a se denota por $|a|$ y esta definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO.

TEOREMA 1.9 Si $a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumple:

(a) $|-a| = |a|$

(b) $|ab| = |a||b|$

(c) Si $c > 0$, entonces $|a| \leq c$ si y solo si $-c \leq a \leq c$

(d) $-|a| \leq a \leq |a|$

(e) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)

(f) $||a| - |b|| \leq |a \pm b|$

Demostración:

(a) Si $a \geq 0$, $-a \leq 0$ y $|-a| = -(-a) = a = |a|$
Si $a < 0$, $-a > 0$ y $|-a| = -a = |a|$

(b) Si $a > 0$ y $b > 0$, $ab > 0$ luego $|ab| = ab = |a||b|$
Si $a > 0$ y $b < 0$, $ab < 0$ luego $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$. Los demás casos son similares.

(c) $|a| \leq c$, $a \leq c$ y $-a \leq c$ (¿por que?); multiplicando por (-1) la segunda desigualdad y aplicando el T.1.7 (c'), se tiene que $-c \leq a$ y $a \leq c$, es decir $-c \leq a \leq c$; reciprocamente si $a \leq c$ y $-a \leq c$ se tiene que $|a| \leq c$.

(d) Si tomamos $c = |a| \geq 0$ y aplicamos el inciso (c) obtenemos $-|a| \leq a \leq |a|$

(e) Segun el inciso (d) se tiene que $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ y aplicando el T.1.7 (c') se tiene que $-|b| \leq -b \leq |b|$ de manera que $-|b| \leq \pm b \leq |b|$; esta expresión al sumarse a la primera desigualdad término a término se tiene que:
$-(|a| + |b|) \leq a \pm b \leq |a| + |b|$, finalmente aplicando el inciso (c) resulta:
$|a \pm b| \leq |a| + |b|$

(f) El resultado anterior nos permite afirmar que:
$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, de donde
$|a| - |b| \leq |a - b|$ ... (*). En forma similar
$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$
$-|a| + |b| \leq |a - b|$ y $-(|a| - |b|) \leq |a - b|$ ..(#)
Las desigualdades (*) y (#) nos permiten afirmar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$. La Obtención de la desigualdad con el signo + en el miembro de la derecha se deja como ejercicio.

§ 9. Intervalos

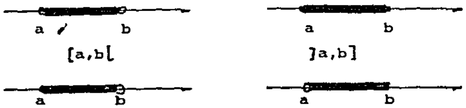
DEFINICION 1.4 Sean $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ lo denotamos por $]a,b[$ y lo llamamos INTERVALO ABIERTO.
Al conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ lo denotamos por $[a,b]$ y lo llamamos INTERVALO CERRADO. Los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a,b[$ y $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a,b]$, se llaman INTERVALOS SEMIABIERTOS O SEMICERRADOS.

De los intervalos semiabiertos, el primero es cerrado por la izquierda y abierto por la derecha; el segundo es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha:

Las representaciones gráficas de estos intervalos, son las siguientes:

]a,b[[a,b]

[a,b[ ]a,b]



NOTA: En un abuso de notación, a los conjuntos $]-\infty,a[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ y $]a,\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ los llamamos intervalos infinitos, y tambien a los conjuntos $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ y $[a,\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$. A los primeros se les conoce como intervalos abiertos y a los segundos intervalos cerrados.

§ 10. Distancia

Consideremos la ecuación $|x - 5| = 7$, de acuerdo con la definición de valor absoluto existen dos posibilidades: que $x - 5 > 0$ ó $x - 5 < 0$, lo que nos plantea dos ecuaciones, a saber: $x - 5 = 7$ ó $-(x - 5) = 7$, al resolverlas se obtiene $x = 12$ ó $x = -2$.

Observese que en la recta real las dos soluciones distan 7 unidades de 5. Si analizamos tal expresión en forma general tenemos:

$$|x - a| = b \qquad (b > 0)$$

y dado el significado de valor absoluto, hay dos posibilidades, a

saber: $x - a = b$ ó $x - a = -b$ y resolviendo estas ecuaciones se obtiene: $x = a + b$ ó $x = a - b$, esto es, dos números que distan una cantidad b del número a en la recta real.

De lo anterior podemos decir que la expresión $|a - b|$ sirve para representar la distancia entre los números a y b. Así en expresiones tales como: $|x - c| < b$ ó $|x - c| > b$, con c y b constantes y $b > 0$, las soluciones para x seran todos aquellos números cuya distancia a c es menor ó mayor que b respectivamente.

Así por ejemplo, la solución a la desigualdad $|x - 5| < 7$ son todos los números (puntos de la recta) cuya distancia a 5 sea menor que 7; esto es, el intervalo abierto $]-2,12[$. Mostraremos la validez de nuestra afirmación resolviendo la desigualdad de acuerdo a las propiedades ya vistas.

Si $|x - 5| < 7$ por T.1.9 (c)
$-7 < x - 5 < 7$ o equivalentemente
$-7 < x - 5$ y $x - 5 < 7$ y por T.1.7 (a)
$-2 < x$ y $x < 12$ o lo que es lo mismo
$-2 < x < 12$ así los números x que cumplen con la desigualdad son aquellos que pertenecen a $]-2,12[$.

Al conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < b\} =]c - b, c + b[$ se le llama VECINDAD CON CENTRO EN c Y RADIO b.

Puesto que en el plano cartesiano xy la distancia entre dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) esta dada por la formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y aplicamos esta formula para obtener la distancia de cualquier punto de la recta al origen, la formula se aplica para puntos de la forma $(0,0)$ y $(a,0)$ quedando la formula como

$$d = \sqrt{a^2}$$

Por otra parte hemos establecido que lo anterior, esta expresado por la ecuación $|a - 0| = |a|$, podemos concluir entonces que $|a| = \sqrt{a^2}$.

§ 11. Desigualdades

Expresiones de la forma $g(x) < f(x)$; $g(x) \leq f(x)$ en donde $g(x)$ y $f(x)$ son expresiones algebraicas en donde x juega el papel de variable, reciben el nombre de DESIGUALDADES. Resolver una desigualdad significa determinar explícitamente (en la mayoría de los casos por medio de intervalos) el conjunto de valores de x que hacen verdadera la desigualdad, a tal conjunto se le llama CONJUNTO SOLUCION.

Decimos que dos desigualdades son equivalentes si tienen exactamente el mismo conjunto solución.

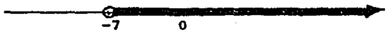
Para resolver una desigualdad, el procedimiento consiste en realizar una cadena de desigualdades equivalentes, la última de las cuales tiene solución obvia. Para construir tal cadena de equivalencias, utilizamos los resultados estudiados en las secciones anteriores.

EJEMPLOS:

a) Resolver la desigualdad $4x + 8 \geq 2x - 6$. Usando las propiedades de las desigualdades, se tiene:

$$4x > 2x - 14$$
$$2x > -14$$
$$x > -7$$

por lo tanto el conjunto solución es $]-7,\infty[$ el cual se puede representar geométricamente por:



b) Resolver $\frac{2x+1}{1-4x} < 5$.

Al tratar de eliminar el denominador de la desigualdad, deben multiplicarse ambos miembros por $1 - 4x$, pero esta expresión puede ser positiva o negativa, dependiendo del valor de x; así pues, se deben de considerar dos casos: $1 - 4x > 0$ ó $1 - 4x < 0$ (nótese que se descarta el caso $1 - 4x = 0$ ¿por qué?).

Primer caso: si $1 - 4x > 0$

significa que $1 > 4x$ y que $\frac{1}{4} > x$. En este caso, al resolver la ecuación estamos considerando que elementos de $]-\infty,\frac{1}{4}[$ cumplen con la desigualdad, así que al continuar resolviendo la desigualdad se tiene:

$\frac{2x+1}{1-4x} < 5$; multiplicando por $1 - 4x$

$2x + 1 < 5(1 - 4x)$; distribuyendo

$2x + 1 < 5 - 20x$; sumando a ambos miembros $20x - 1$

$22x < 4$, multiplicando por $\frac{1}{22}$

$x < \frac{4}{22}$, simplificando

$x < \frac{2}{11}$, es decir $x \in]-\infty,\frac{2}{11}[$

de modo que parte de la solución se obtiene de:

$$]-\infty,\tfrac{1}{4}[\cap]-\infty,\tfrac{2}{11}[=]-\infty,\tfrac{2}{11}[$$

Segundo caso: si $1 - 4x < 0$

$-4x < -1$ y $x > \frac{1}{4}$ esto es, cuando $x \in]\frac{1}{4},\infty[$

y resolviendo la ecuación para los elementos de este intervalo tenemos:

$\frac{2x+1}{1-4x} < 5$; multiplicando por $1 - 4x$

$2x + 1 > 5(1 - 4x)$; distribuyendo

$2x + 1 > 5 - 20x$; sumando $20x - 1$

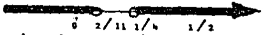
$22x > 4$; multiplicando por $\frac{1}{22}$

$x > \frac{4}{22}$; simplificando

es decir $x \in \left]\frac{2}{11}, \infty\right[$, donde el conjunto solución se obtiene, en este caso como $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[\cap \left]\frac{2}{11}, \infty\right[= \left]\frac{1}{4}, \infty\right[$

Finalmente la solución total es:

$$\left]-\infty, \frac{2}{11}\right[\cup \left]\frac{1}{4}, \infty\right[$$

Geométricamente se representa como: 

c) Resolver la desigualdad $x^2 + 3x - 4 \leqslant 1$

Completando el trinomio cuadrado perfecto se tiene:

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} \leqslant 5 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 \leqslant \frac{29}{4}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{3}{2} \right)^2} \leqslant \sqrt{\frac{29}{4}}$$

$$\left| x + \frac{3}{2} \right| \leqslant \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{29}}{2} \leqslant x + \frac{3}{2} \leqslant \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{29} - 3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{29} - 3}{2}$$

Así la solución es:

$$\left[\frac{-\sqrt{29} - 3}{2}, \frac{\sqrt{29} - 3}{2} \right]$$

d) Resolver la desigualdad $|3 - 4x| < |5x + 13|$

Según el inciso (c) del T.1.9 la anterior desigualdad es equivalente a

$$-|5x + 13| < 3 - 4x < |5x + 13| \quad \text{es decir}$$

i) $-|5x + 13| < 3 - 4x$ y ii) $3 - 4x < |5x + 13|$

Resolviendo (i) tenemos:

$|5x + 13| > 4x - 3$ es decir

$$\begin{array}{lcl} 5x + 13 > 4x - 3 & ó & -(5x + 13) > 4x - 3 \\ x > -16 & ó & -5x - 13 > 4x - 3 \\ x > -16 & ó & -10 > 9x \\ x > -16 & ó & \frac{-10}{9} > x \end{array}$$

así, la solución de (i) es $\left]-16, \infty\right[\cup \left]-\infty, \frac{-10}{9}\right[= \mathbb{R}$

Resolviendo (ii) tenemos:

$$\begin{array}{lcl} 3 - 4x < 5x - 13 & ó & 3 - 4x < -5x - 13 \\ -10 < 9x & ó & x < -16 \\ \frac{-10}{9} < x & ó & x < -16 \end{array}$$

de manera que la solución a (ii) es

$$\left]\frac{-10}{9}, \infty\right[\cup \left]-\infty, -16\right[$$

Debido a que la solución de la desigualdad inicial, corresponde a los valores que cumplen a la vez las condiciones (i) y (ii) , esto es, la intersección de sus soluciones, se obtiene

$$\mathbb{R} \cap \left(\left]\frac{-10}{9}, \infty\right[\cup \left]-\infty, -16\right[\right) = \left]\frac{-10}{9}, \infty\right[\cup \left]-\infty, -16\right[$$

el cual representado gráficamente nos queda como:

§ 12. Completez

Las propiedades (axiomas) que hemos visto en secciones anteriores las cumple tanto el conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$, como el de uno de sus subconjuntos, los racionales: Q. En esta sección enunciamos una propiedad más, la COMPLETEZ, la cual solo se cumple en $\mathbb{R}$.

El axioma de completez no resulta tan evidente, por lo cual primero expondremos un ejemplo que ilustre su necesidad, así como algunas definiciones previas que nos permitan enunciarlo.

Hagamos los siguientes razonamientos:

i) Sabemos que $\sqrt{2} \notin Q$ y $1 < \sqrt{2} < 2$

ii) En general, si $a,b \in Q$, $c = \frac{a+b}{2} \in Q$ y $a < c < b$

iii) La forma como se obtiene c en (ii) nos permite, al repetir el procedimiento, obtener más elementos entre a y b; ($a < \frac{a+c}{2} < c < \frac{c+b}{2} < b$), de esta manera podemos obtener cualquier cantidad de elementos ordenados, entre a y b.

iv) El proceso descrito en (ii) y (iii) lo podemos aplicar a los números 1 y 2 , y a su vez obtener elementos cada vez más próximos a $\sqrt{2}$, por ejemplo:

$1 < \sqrt{2} < 2$ $\qquad \frac{1+2}{2} = 1.5$

(1^a Aprox.) $1 < \sqrt{2} < 1.5 < 2$ $\qquad \frac{1+1.5}{2} = 1.25$

(2^a Aprox.) $1 < 1.25 < \sqrt{2} < 1.5 < 2$ $\qquad \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$

....

(14^a Aprox.) $1 < 1.25 < 1.375 < 1.40625 < 1.4140625 < 1.4141184 < \sqrt{2}$ y a su vez

$\sqrt{2} < 1.4142453 < 1.414306 < 1.4145508 < 1.4150391 < 1.460156 < 1.4179668 < 1.4179688 < 1.421875 < 1.4375 < 1.5 < 2$

Ademas de lograr una buena aproximación a $\sqrt{2}$ tenemos las siguientes concluciones:

A) El proceso se puede realizar debido a que Q es un conjunto DENSO, es decir, con respecto a la relación " < " , dados dos elementos a, b en Q, si $a < b$, existe c tal que $a < c < b$; esto es, entre cada par de racionales existe otro racional.

B) Aun cuando exista una infinidad de racionales muy proximos a $\sqrt{2}$ (mayores o menores), no es posible localizar por el procedimiento a $\sqrt{2}$ el cual es un irracional

C) $\sqrt{2}$ y en general, los irracionales, son elementos que pueden representarse en nuestros modelos y que el aceptarlos nos permiten dar soluciones a una variedad amplia de problemas, así como tener un desarrollo teórico de nuestros conceptos. Estas consideraciones nos llevan a establecer el axioma de completez.

DEFINICION 1.5 Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que A es <u>acotado inferiormente</u> si existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $u \leq x$ para todo $x \in A$. Similarmente A es <u>acotado superiormente</u> si existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq u$ para todo $x \in A$. Al número u se le llama Cota Inferior ó Cota Superior de A segun sea el caso.
Si A es acotado superior e inferiormente, decimos simplemente que A es Acotado.

EJEMPLOS:

1) El conjunto $A =]\sqrt{2},\infty[$ es acotado inferiormente, pero no lo es superiormente. Los elementos -2, $\frac{1}{2}$, y $\sqrt{2}$ son cotas inferiores de A

2) El conjunto $A =]-\infty,\sqrt{2}]$ es acotado superiormente, pero no lo es inferiormente. Los elementos 527, 1.4152453 y $\sqrt{2}$ son cotas superiores de A.

3) El conjunto $]\sqrt{2},2]$ es acotado, pero los conjuntos $]\sqrt{2},\infty[$ y $]-\infty,\sqrt{2}]$ no lo son.

DEFINICION 1.6 Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene un elemento máximo o simplemente un máximo, si existe $u \in A$ tal que $x \leq u$ para todo $x \in A$. Análogamnete, se dice que A tiene un mínimo, si existe

$v \in A$ tal que $v \leqslant x$ para todo $x \in A$
Denotaremos al máximo y mínimo de A por $\text{máx}\, A = u$, $\text{mín} A = v$ respectivamente.

EJEMPLO:

1) El conjunto $A =]-9,7]$ tiene un máximo: $\text{máx}A = 7$, pero no tiene un mínimo.

Como ya hemos visto, un conjunto acotado inferior o superiormente, tiene una infinidad de cotas, inferiores o superiores; de manera que podemos dar la siguiente definición.

DEFINICION 1.7 Si A es acotado superiormente, el mínimo del conjunto de cotas superiores de A se le llama Supremo de A, es decir, el supremo de A es la mínima cota superior de A.
Si A es acotado inferiormente, el máximo del conjunto de cotas inferiores de A, se le llama Infimo de A, es decir, el ínfimo de A es la máxima cota inferior de A.
Al referirnos al ínfimo de A o al supremo de A lo hacemos usando la notación inf A ó sup A, respectivamente.

Despues de ver las definiciones de sup A e inf A nos preguntamos si el conjunto de cotas superiores siempre tienen un mínimo y si el conjunto de cotas inferiores siempre tiene un máximo. La respuesta afirmativa a estas preguntas constituye el último axioma dado para el conjunto $\mathbb{R}$. Este axioma es llamado PROPIEDAD DE COMPLETEZ de $\mathbb{R}$. Aún cuando el nombre no lo justifiquemos por el momento, enunciamos a continuación el axioma.

C.1. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo y todo conjunto acotado inferiormente tiene un ínfimo.

EJEMPLO:

1) El conjunto $A =]-7,9[$ no tiene máximo ni mínimo; sin embargo, el $\sup A = 9$, $\inf A = -7$.
El conjunto $B = [-7,9]$ tiene máximo y mínimo y en este caso $\max B = \sup B = 9$ y $\min B = \inf B = -7$.

R.DESCARTES 1650

1601 P. FERMAT 1665

2 FUNCIONES

772 J. FOURIER 1837

" La ley es el reflejo de lo esencial en el movimiento del univer so. "

CUADERNOS FILOSOFICOS
V.I.Lenin.

§1 Introducción .

El concepto de Función es un medio matemático que coadyuva al estudio de la naturaleza, ya sea como forma de interpretación de - las relaciones cuantitativas y formas espaciales del mundo real o como elemento que permite avanzar en la sistematización de los propios conceptos matemáticos.

En su formación, el concepto de"función" es resultado no solo de las propias contradicciones en las ideas matemáticas, sino que estas son reflejo de la problemática de la realidad la cual se aborda por medio de una práctica científica bien determinada, con me-- dios materiales, matemáticos y linguísticos específicos.

Si bien de manera directa el concepto de "función" es producto de la práctica científica, dado que la práctica científica esta subordinada a la práctica por desarrollar la producción, se afirma que el concepto surge de la práctica.

A manera de ejemplo veamos como en el desarrollo de los conceptos, en este caso la temperatura, aparece la necesidad del con-- cepto de función y como este contribuye a la comprensión del primero.

El concepto TEMPERATURA resulta como desarrollo de conceptos más simples como son el calor y el frio en los cuerpos, los que su explicación es cualitativa y parten de propiedades de atracción o repulsión, resultando estas demasiado subjetivas. En diversas actividades humanas se van a presentar estos conceptos encontrandose las primeras clasificaciones en la medicina griega, donde se establece una COMPARACION entre los medicamentos que son capaces de modificar el calor del cuerpo del paciente, estableciendose una escala de 12 grados con base en la acción térmica de las medicinas.

EL ESTUDIO DE LA DEPENDENCIA DEL VOLUMEN Y LA TEMPERATURA.
De ésta época -griega- es Herón de Alejandría (62-150 d.n.e.)

quien observa que él aire se expande cuando se calienta, ESTABLECIENDOSE UNA DEPENDENCIA entre dos propiedades de los objetos, esto es, que el aumento de volumen evidencía aumento de calor. Más esta propiedad es cualitativa.

Posteriormente Galileo Galilei (1564-1647) es quien al estudiar las obras de Herón formula de nueva cuenta esta dependencia, siendo el de los primeros en señalar la importancia de realizar mediciones precisas, de esta manera Galileo construye un instrumento, el TERMOSCOPIO que muestra las modificaciones del volumen con el calentamiento. Instrumento compuesto de un tubo con una bola en el extremo en la cual habia aire y en el otro lado abierto del tubo se situaba en un liquido. La columna del líquido en el tubo baja cuando el aire se hace más caliente o sube cuando este se enfría. (fig. 1). Sin embargo la altura de la columna de agua dependía tanto de la temperatura como de la presión atmosférica, el instrumento no permite medir la dependencia establecida entre volumen y temperatura al intervenir la presión atmosférica. Por otro lado, este aparato solo permite señalar el estado más o menos caliente del gas, esto es, en forma comparativa.

FIG. 1. *Termómetro de Galileo*

Posteriormente, la academia florentina del "Cimento" construye un instrumento que elimina la influencia de la presión atmosférica y presenta una escala en la que se señalan las temperaturas más altas y bajas conocidas en Toscana, a dicho aparato Enns llamara termómetro y Huyghens propondra

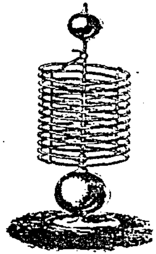


FIG. 2. *Termómetro de los maestros florentinos*

como punto de referencia más caliente el de la ebullición del agua; mientras que Newtón propondra el más frío, al de la congelación de esta. El posterior desarrollo de este instrumento por Farenheit, principalmente, permitira lograr mayor precisión en la medición al tener una referencia más estable y general. Este instrumento se consigue a partir de un par de conceptos comparativos (el más frio, el más caliente) que son la base para introducir un concepto cuantitativo. (fig. 2).

La existencia de instrumentos que permitan la medición de una propiedad, en este caso el Termómetro, posibilitan describir el comportamiento de magnitudes en forma cuantitativa, esto es, lograr explicar la dependencia entre volumen de un gas y su temperatura.

En la medida que se construyen instrumentos que permitan la formulación de conceptos cuantitativos, requerimos conceptos y símbolos que expliquen estos fenómenos y así lograr la abstracción de los aspectos de la realidad que deseamos describir.

Así, en la formación de conceptos, inicialmente se atribuyen propiedades de distinta naturaleza al calor de el frio. De esta manera F. Bacon en 1620 caracteriza el calor como "un movimiento dilatante", igualmente en 1658 Pietro Gasendi señala que los atomos de frio eran agudos, "formas de tetraedro" que al penetrar en un cuerpo lo hacian más sólido.

Posteriormente con la formulación de la Teoría del Calóse dará explicación de como sera la combustión y oxidación por medio del desprendimiento de CALORICO: sustancia o elemento de la naturaleza que no se puede descomponer en otra más simple. Un siglo despues, en 1773 Bousinesq define la temperatura como sigue: "Se puede llamar temperatura absoluta de un volumen no muy grande de eter a la mitad de la fuerza viva que corresponde a la unidad de masa o a una cantidad proporcional a ella."

Más estos conceptos se van a rechazar por otros más adecuados, los requisitos que se exigen serán, por una parte, consistencia lógica que permita al concepto delimitar al conjunto de objetos que se desea estudiar, y por otra, que pasen la prueba de la práctica. Es el caso del calórico que sera rechazado cuando se descubre que al taladrar los tubos de cañon estos se calientan sin que tengan tal sustancia o el caso de que los taladros mellados se calientan más rapido que los que están afilados.

De esta manera se logran construir conceptos con los que se explican las propiedades del calor. Así los físicos, como resultado del estudio del flujo del calor, elaboran tal cantidad de conceptos que logran construir una rama de la Física: la TERMODINAMICA. En la cual se úbica el concepto de TEMPERATURA.

La importancia de construir el concepto estriba en que hace objetivo el conocimiento de la Temperatura, el que se elabora dentro de una estructura linguística con la cual, en cada proposición en la que el concepto linguístico participa, logra reflejar el fenómeno así como una descripción que presenta paso a paso deducciones, concluciones y demostraciones. Esto es, se ubica la "Temperatura" dentro de un discurso científico que supera al discurso elemental basado en argumentos intuitivos e imprecisos.

Finalmente, en la explicación de las propiedades del calor por medio de la TEMPERATURA, son de gran ayuda los conceptos matemáticos, los cuales posibilitan el estudio de las propiedades en forma cuantitativa y en este, desarrollandose la propia matemática.

La matemática, por su parte, cuenta ya con desarrollos que tomando como base el NUMERO, consiguiendo no solo avanzar en mediciones más precisas, sino que sobre este concepto construye dos ramas importantes: la Aritmética y el Algebra, permitiendole dar respuesta a problemas cada vez más complejos. Asi, en este marco, consigue abstraer propiedades de los gases tales como el VOLUMEN y la TEMPERATURA, y comparando un gran número de mediciones de estos conceptos, intenta establecer la ley que explica la interdependencia de tales magnitudes variables, que en forma general diriamos que se presentan cuando se trata de explicar el movimiento, el cambio. Esto aparece reflejado en la matemática por medio de los conceptos que actualmente llamamos MAGNITUD VARIABLE y FUNCION.

El hacer conciente esta extensión del objeto de estudio de la matemática, determinó la transición a una nueva etapa: la matemática de las magnitudes variables.

Volviendo al problema de la temperatura, al contar con instrumentos de medición, precisados los conceptos de los cuales se desea establecer su dependencia, aparece el concepto de función como forma con la que se puede establecer dicha dependencia.

Si bien la relación entre el volumen y la temperatura no es el único caso que lleva a conceptualizar a la función, más bien es uno entre una gran variedad de problemas de magnitudes variables de la cual finalmente se logra abstraer este concepto y presentarlo como actualmente se conoce, sin embargo, es posible seguir tal desarrollo a traves de esta relación:

i) Los instrumentos permiten realizar mediciones de diversos aspectos de los gases, algunos que podemos distinguir, por ejemplo, en el análisis del Hidrógeno, aparecen en la siguiente tabla:

Temperatura	Volumen	Presión
30°	16 cm^3	6 at.
27°	20 cm^3	4 at.
26°	21 cm^3	5 at.
40°	8 cm^3	3 at.
.	.	.
.	.	.

ii) De las magnitudes concretas se abstrae lo que es una variable, esto es, cualquier cosa que puede tomar distintos valores numéricos, y la simbolizamos como:

T, V, P, etc.

iii) Acto seguido, de la investigación de las relaciones entre las variables se busca una ley de comportamiento que establezca el que una variable dependa de la otra*. En el caso de comparar las variables V y T manteniendo P constante, tomando mediciones de estas variables, se pueden representar en un par de columnas, formando parejas de números. Es de gran interes que el primer elemento de la pareja no se repita en la columna.

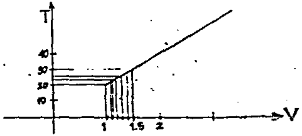
V	T
1	20
1.1	22
1.15	23
1.2	24
.	.
.	.

* "El término función" fue usado primero por Leibniz en 1673 para denotar la dependencia de una cantidad respecto a otra". H. Anton.

iv) Posteriormente se establece la dependencia por medio de una regla de correspondencia, no cualquier regla, sino que esta debe asociar a cada número de la primer columna exactamente el segundo número de esta, en el caso que nos ocupa, la relación sería:

$$T = 20\ V$$

v) Si describimos este comportamiento geométricamente, realizamos lo que llamamos su gráfica, esto permite usar una herramienta más amplia, a la gráfica de V contra T cuando P es constante, se llama Isóbara.



Así como en el caso de establecer la dependencia entre las variables Volumen y Temperatura, en la práctica científica surgen un sin-número de problemas que plantean el encontrar la correspondencia entre dos variables, lo que se aborda en forma similar. La sistematización de tal experiencia posibilita llegar a expresar de manera más definida lo que sera el concepto de Función, en este sentido nos referiremos a ella como un conjunto de pares ordenados (x,y) que presenta una correspondencia general de y respecto a x, lo cual se expresa bajo el modelo $\boxed{y = f(x)}$*. y cuya representación geométrica en el plano se llama la gráfica de la función.

*Para discutir funciones o relaciones entre cantidades, sin enunciar formulas específicas, el matemático Leonhard Euler desarrollo la ingeniosa idea de usar una letra del alfabeto -como f- para denotar una función o relación. Howard Anton, Cálculo y Geometría A. V. I. L.W. 1984.

Sera posteriormente, en el siglo XIX cuando el concepto de función** se presente en la forma como actualmente se conoce. Siendo más abstracto y general, con lo cual se amplía su esfera de aplicación, y al mismo tiempo sirve para fundamentar toda la matemática del movimiento que se ha construido, esto es, el Cálculo Diferencial e Integral.

En las siguientes secciones estudiaremos de las funciones aspectos tales como la definición actual de función, y la clasificación de las funciones reales -llamadas elementales- que sirven de base para el estudio del Cálculo.

§2 Definición de función .

Pasaremos ahora a formalizar el concepto de función, para ello utilizamos lo que es una relación. Debemos advertir que solo trataremos en ambos conceptos, con relaciones y funciones establecidas entre números reales, aunque la definición de ambas puede hacerse de manera general.

DEFINICION: Una relación $\mathcal{Q}$ es todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Denotaremos a las relaciones con letras de la forma* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \ldots, \mathcal{Z}$. Por otra parte, las relaciones que nos interesan son aquellas que se definen mediante expresiones algebraicas, veamos algunos casos en los siguientes ejemplos:

1.- Son relaciones: $\{(1,2),(2,6),(1,7),(1,1.5),(-2.3)\}$,
$\{(1,1),(2,1/2),(3,1/3),(4,1/4)\ldots\}$

*Estas son conocidas como mayúsculas del tipo Script.

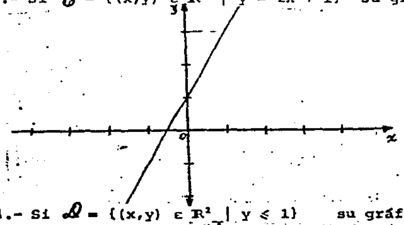
**"..Cauchy define esencialmente una función como lo hacemos nosotros hoy, aunque en un lenguaje vago todavía." N. Bourbaki, Elementos de Historia de las Matemáticas. P 272

2.- Son relaciones definidas por expresiones algebraicas:

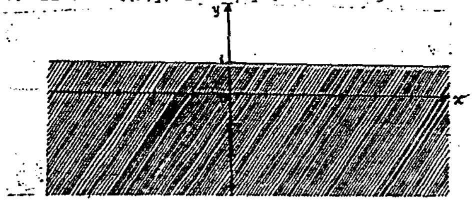
$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$$
$$\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x\}$$

Para $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como se recordara, tiene su representación en el Plano Cartesiano, así la "ubicación" de las parejas ordenadas de una relación en ese plano coordenado cartesiano le llamaremos - "gráfica de la relación". Así continuando con los ejemplos tenemos:

3.- Si $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\}$ su gráfica es:



4.- Si $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1\}$ su gráfica es:



Introduciremos ahora dos conceptos que nos serán útiles para definir función.

DEFINICION: Sea $\mathfrak{F}$ una relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, se llama IMAGEN DE x_0 bajo $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}(x_0)$, al conjunto de todos los y tales que $(x_0, y) \in \mathfrak{F}$.

b) Se llama DOMINIO de la relación $D_{\mathfrak{F}}$, al conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathfrak{F}(x) \neq \phi$

Ejemplos:

5.- Si $\mathfrak{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 \leq 25\}$, se tiene que $\mathfrak{T}(-3) = [-4,4]$, $\mathfrak{T}(5) = \{0\}$, $\mathfrak{T}(6) = \phi$ etc. y $D_{\mathfrak{T}} = [-5,5]$.

6.- Si $\mathfrak{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 3\}$ entonces $\mathfrak{F}(1) = \mathfrak{F}(0) = \mathfrak{F}(3) = \mathbb{R}$; $\mathfrak{F}(5) = \phi$ y $D_{\mathfrak{F}} =]-\infty, 3]$

Con los anteriores elementos conceptuales, precisaremos el concepto de función en $\mathbb{R}$.

DEFINICION: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$

Si $\mathfrak{F} \subset A \times \mathbb{R}$ es una relación. Decimos que $\mathfrak{F}$ es una función si cumple:

a) Para todo $x \in A$; $\mathfrak{F}(x) \neq \phi$

b) Para todo $x \in A$; $\mathfrak{F}(x) = \{y\}$ es unitario.

Observaciones: 1) Las condiciones dadas en la definición, para que una relación $\mathfrak{F}$ sea función son equivalentes a las siguientes:

a) $D_{\mathfrak{F}} = A$

b) Si $(x,y) \in \mathfrak{F}$ $\wedge$ $(x,z) \in \mathfrak{F}$, entonces $y = z$.

2) Comunmente se simbolizan las funciones con letras minúsculas f,g,h, etc. y a la expresión $f \subset A \times \mathbb{R}$

por
$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$
donde f(x) es el único elemento asociado con x.

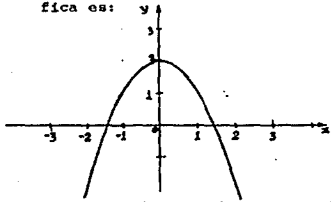
La segunda relación del ejemplo (1), la primera relación del (2) y la expuesta en (3) son funciones. Las restantes no lo son, veamos porque:

En la primera del ejemplo (1) se tiene que (1,2) y (1,7) son parejas de la relación, luego su conjunto imagen del 1 es {2,7} el cual no es unitario; la segunda relación del ejemplo (2) presenta el caso que $\mathfrak{B}(-2) = \phi$, y ademas $\mathfrak{B}(1) = [-1,1]$ los cuales claramente no son unitarios; En el ejemplo (4), se tiene que para todo x en $\mathbb{R}$, $\mathfrak{D}(x) =]-\infty,1[$. Queda como ejercicio mostrar que las relaciones (5) y (6) no son funciones.

Como una función asocia a cada elemento de su dominio uno y solo un número real, la gráfica de una relación corresponde a la de una función, si la recta perpendicular al eje de las x que pasa por los puntos del dominio corta a la gráfica en uno y solo un punto.

Ejemplo:

7).- Sea $\mathfrak{F}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathfrak{F} = \{(x,y) \mid y + x^2 = 2\}$. La gráfica es:



como se puede observar $D_{\mathfrak{F}} = \mathbb{R}$ y para cualquier $x \in D_{\mathfrak{F}}$ al trazar una perpendicular que pase por x, la recta corta a la gráfica exactamente en un punto, por lo que se puede afirmar que la relación $\mathfrak{F}$ es una función.

La expresión $y = f(x)$ es una fórmula con la cual al tomar un elemento "a" del dominio de la función f, y substituirlo por x en la expresión, nos permite obtener la imagen de "a": $y = f(a)$ y por tanto una pareja $(a,f(a))$ de la función f.

Esto no debe confundirnos y reducir el concepto de función a lo que usualmente se llama la regla de correspondencia, es decir, a $y = f(x)$; la razón es que la regla de correspondencia no establece el dominio de la función -queda impreciso a que conjunto nos referimos y la expresión $f(x)$ presenta una infinidad de equivalencias-.

Ejemplos:

8.- Si nos referimos a una función f y solo señalamos su regla de correspondencia $f(x) = \sqrt{5 + x}$; afirmar que .. $(5,f(5))$, $(-6,f(-6))$ pertenece a la función no tiene sentido.

9.- Al referirse a una función y solo poner como lo principal su regla de correspondencia, sucede que $f(x) = 8x$ y .. $g(x) = (x + 2)^2 - (x - 2)^2$ parecen ser funciones distintas, lo cual es falso, puesto que estan definidas por expresiones algebraicas equivalentes.

§3 El dominio de una función .

El establecer en forma concreta cual es el Dominio en el que se define una función f, y obtener la imagen de un elemento "a" del dominio de f; son las dos primeras dificultades que abordaremos.

Así tenemos que una función f dada por la regla de correspondencia $y = f(x)$, el dominio se establece conviniendo que la variable x se restringé únicamente a valores tales que al substituirlos en la expresión $f(x)$, ésta sea un número real.

Al considerar por ejemplo la regla de correspondencia -- $y = \frac{1}{x - 1}$, esta definiría la función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-1}$$

donde $A = \mathbb{R} - \{1\}$ es el dominio de la función.

De la misma manera una función real con regla de correspondencia $y = \sqrt{x^2 - 1}$ tiene como dominio al conjunto ---- $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

Tambien se debe tener cuidado al calcular la imagen de un elemento del dominio de la función; por ejemplo, en el caso de la función real cuya regla de correspondencia es $y = \sqrt{(x - 2)^2}$, no es equivalente a $y = x - 2$, sino a $y = |x - 2|$

§4 Funciones elementales .

Clasificaremos las funciones reales, a la vez que haremos énfasis en sus gráficas, lo que nos permitira conocer en forma cualitativa el comportamiento de la función. Así mismo daremos técnicas que nos permitiran un mejor trazado de las gráficas.

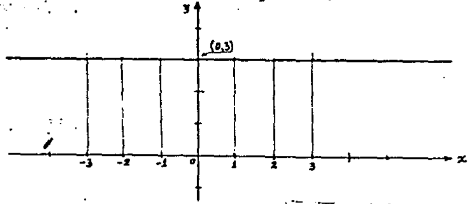
4.1.- Gráfica por medio de tabulación o "por puntos".

El lector está ya familiarizado con éste método, el cual consiste en "asignar" valores del dominio de la función a la variable x, para encontrar sus imágenes correspondientes tomando parejas ordenadas de la forma $(x,f(x))$; procediendo de esta manera se acumula un número "suficiente" de ellas, que representadas en el plano coordenado nos sirven para "esbozar" la forma de la gráfica de la función. Usemos el método en el trazado de las siguientes gráficas.

1.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto f(x) = 3$, propongamos valores para nuestra tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	3	3	3	3	3	3	3

con los cuales hacemos su gráfica:



Es claro que si en lugar de 3 se hubiera puesto otro valor constante "c", las imágenes tomarian ese valor. Generalizando, a la función real cuya regla de correspondencia es $f(x)=c$, se le llama Función Constante, y su gráfica corresponde a la de una línea recta paralela al eje de las x's que pasa por el punto (0,c), es decir, corta al eje de las y's en el punto c. (fig. 3)

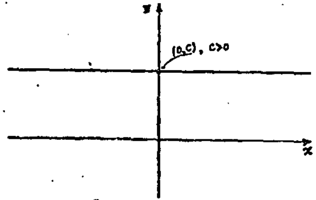


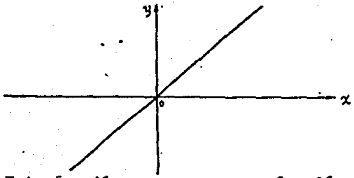
fig. 3

2.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto f(x) = x$.

Asignando valores para x tenemos:

x	-3	-2	-1.5	0	1	2	3	4
f(x)	-3	-2	-1.5	0	1	2	3	4

Su gráfica es una recta que pasa por el origen y bisecta los cuadrantes I y III.



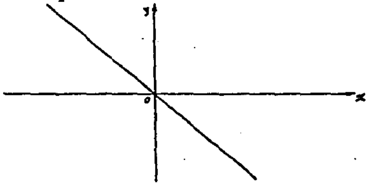
Esta función se conoce como función identidad.

3.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto f(x) = -x$

Tabulando tenemos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	2	1	0	-1	-2	-3

y su gráfica es una recta que pasa por el origen y por el II y IV cuadrante bisectándolos.



Observese en el ejemplo 2 –función identidad– que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$, esto es, que a medida que las abscisas crecen, las ordenadas tambien crecen; por lo que se dice que la función es creciente. Así mismo, en el ejemplo 3 tenemos que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$, en este caso la gráfica de f cae conforme x crece y la función se llama decreciente. En forma precisa se tiene:

DEFINICION: Sean $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y S un subconjunto de A, se dice que

i) f es creciente en S si para todo x_1, x_2 en S, $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

ii) f es decreciente en S si para todo x_1, x_2 en S, $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

iii) f es constante en S si para todo x_1, x_2 en S, $f(x_1) = f(x_2)$.

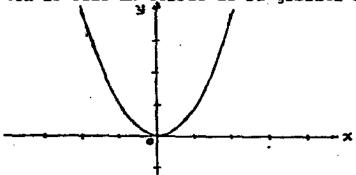
La forma de las tres funciones anteriores corresponden a los casos más simples de las llamadas funciones lineales.

4.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto f(x) = x^2$

Tabulando tenemos que:

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

con lo cual un esbozo de su gráfica es

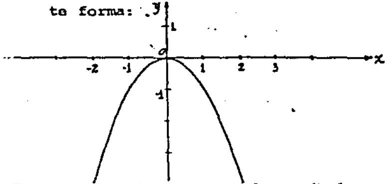


Este tipo de gráfica es una parábola con vértice en el origen.

Nótese que f es decreciente en $]-\infty,0]$ y creciente en ... $[0,\infty[$ (verifíquelo usando propiedades de orden). Ademas el mínimo valor que alcanza f(x) es cuando x=0, puesto que si $x \neq 0$ entonces $f(x) > 0$. Es claro que f no alcanza un valor máximo en el dominio $\mathbb{R}$.

5.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto f(x) = -x^2$

Si tabulamos, llegamos a que su gráfica tiene la siguiente forma:



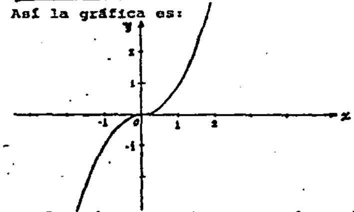
En este caso tenemos que la parábola con vértice en el origen es creciente en $]-\infty,0]$, decreciente en $[0,\infty[$; alcanza su valor máximo cuando x=0 y no existe un elemento "a" del dominio tal que f(a) sea un valor mínimo.

6.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto f(x) = x^3$

Asignanado valores a x y obteniendo sus respectivas imágenes tenemos:

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)	-8	$\frac{-27}{8}$	-1	$\frac{-1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

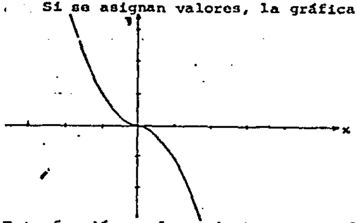
Así la gráfica es:



La función es creciente en todo su dominio, el de los números reales, y no existe un valor máximo o mínimo de f en ese dominio.

7.- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto f(x) = -x^3$

Si se asignan valores, la gráfica de f resulta como sigue:



Esta función es decreciente en $\mathbb{R}$ y además no existe un valor máximo o mínimo de f en su dominio..

4.2.- Simetría, traslación y estiramiento.

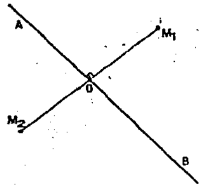
A partir de las anteriores funciones construiremos una amplia variedad de funciones; para ello, precisaremos criterios que nos sirvan para tal efecto, como son la simetría, la traslación y el estiramiento.

Simetría.

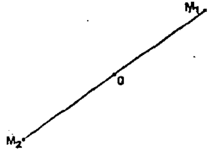
Se denomina simétrico de un punto M_1 con relación:

1) A una recta AB, la extremidad M_2 del segmento obtenido trazando desde M_1 la perpendicular sobre la recta y prolongandola con una longitud igual.

2) A un punto O, la extremidad M_2 del segmento obtenido prolongando M_1O con una longitud igual.



Simetría con respecto a una recta.



Simetría con respecto a un punto.

Esta propiedad geométrica de las figuras, lo aplicaremos en el estudio de la gráfica de funciones considerando tres casos:

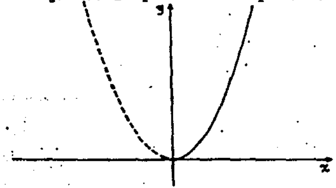
a) Simetría con respecto al eje de las y's.

b) Simetría con respecto al eje de las x's.

c) Simetría con respecto al origen.

a) Simetría respecto al eje y.

Si consideramos la rama positiva de la gráfica de la parábola con regla de correspondencia $y = x^2$, como se observa, a partir de las parejas que pertenecen a esta rama, podemos localizar los puntos que corresponden a la parte o rama negativa de la gráfica de f,

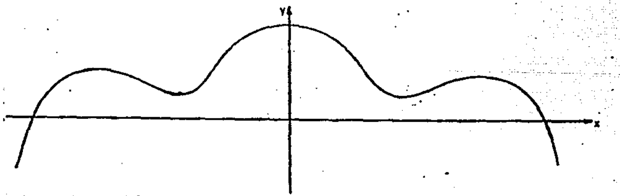


puesto que la imagen de x y -x es la misma. Es decir, elementos del dominio que son equidistantes, presentan imágenes iguales, $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$, el efecto que se produce es similar al de observar un objeto reflejado en un objeto. Podemos decir que dado $(x, f(x))$ en una rama de la -

curva, el punto reflejado respecto al eje y que es $(-x, f(x))$ pertenece a la rama complementaria de la gráfica. Este hecho en general lo llamaremos simetría respecto al eje de las y's.

Cuando la gráfica de una función tiene simetría respecto al eje y, su trazado se facilita, pues bastara con graficar puntos que pertenecen a una rama de la curva, ya sea la rama derecha o la rama izquierda. Así tenemos:

DEFINICION: Una función es simétrica con respecto al eje y, si para todo a elemento del dominio de f se cumple que $f(a) = f(-a)$. En este caso se dice que la función es par.

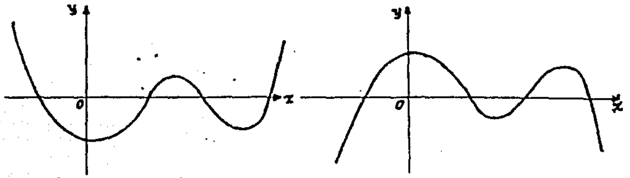


De los casos presentados, las gráficas de (1), (4) y (5) son simétricas respecto al eje y, es decir, son funciones pares.

b) Simetría respecto al eje x.

Este caso nos interesa al compararse la gráfica de dos funciones. Así se dice que:

DEFINICION: Dadas dos funciones f y g, la gráfica de de g es simétrica respecto al eje x si para cada elemento del dominio de f (o de g) se tiene que $g(a) = -f(a)$



f y g son simétricas respecto al eje x.

Ejemplos de funciones simétricas son:

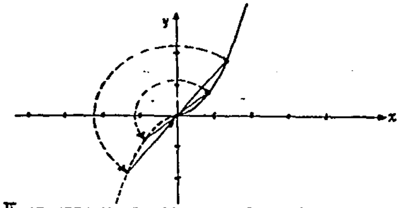
i) Las funciones constantes f y g tales que $f(x) = c$ y $g(x) = -c$.
ii) Los casos (2) y (3); (4) y (5); (6) y (7).

c) Simetría respecto al origen.

¿Son simétricas respecto al eje y los casos (2), (3), (6) y (7)?. La respuesta es NO, sin embargo, estas presentan un comportamiento que obliga a hablar de otro tipo de simetría, la que es con respecto al origen de coordenadas.

Considere el ejemplo (7), la función presdnta como regla de correspondencia $f(x) = x^3$, es claro que si (a, a^3) es elemento de f entonces tambien $(-a, -a^3)$ es elemento de f. Esto indica que puntos de la gráfica cuyas abscisas se encuentran a la misma distancia del eje de las y's, les corresponden ordenadas a la misma distancia del eje de las x's, en direcciones contrarias; esto es, puntos que son diametralmente opuestos.

Si consideramos la rama positiva de la gráfica siguiente, el complemento de esta se obtiene realizando un giro de 180° de la rama con centro en el origen. A esta propiedad de la figura se le llama simetría respecto al origen y el cual precisamos:



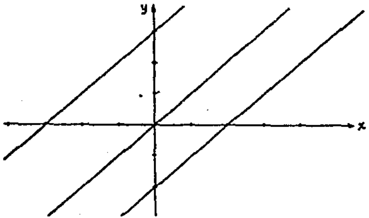
DEFINICION: Se dice que la gráfica de una función f es simétrica respecto al origen, si $f(a) = -f(-a)$ para cada elemento a del dominio de f. En este caso se dice que f es una función impar.

Ejemplos de funciones impares son los casos (2), (3) (6) y (7).

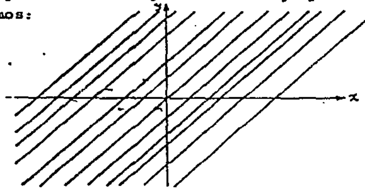
Traslación.

a) Traslación vertical.

Considere el caso (2): $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto f(x) = x$. ¿Que le sucede a la gráfica si a la regla de correspondencia se le suma una constante c?, esto es, ¿como es la gráfica de $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; .... $x \longmapsto g(x) = x + c$? Si consideramos los casos en que $c = 3$ y $c = -2$, al tabular para el primer caso, se encuentra que las imágenes de g al compararlas con las de la identidad se observa que estas se incrementan en 3 y en el segundo caso se decrementan en 2 unidades; - de esta manera al graficarlas en el mismo plano cartesiano se tiene:



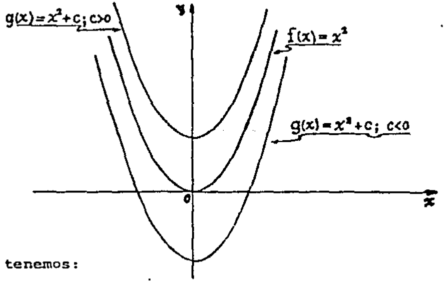
En general, si la regla de correspondencia de una función - real es $f(x) = x + c$, su gráfica se traza paralela a la identidad y desplazada del origen sobre el eje y c unidades; gráficamente obtenemos:



"familia de curvas que corresponden a funciones reales de la forma $y = x + c$".

De la misma forma, si analizamos la gráfica de las funciones reales cuya regla de correspondencia es $g(x) = x^2 + c$, con c una - constante dada, (como se hizo con $f(x) = x^2$), obtendriamos que: g es decreciente en $]-\infty,0]$, creciente en $[0,\infty[$, su valor mínimo lo alcanza para $x = 0$ y es $g(o) = c$; es simétrica respecto al eje de las y's y su forma corresponde al de una parábola con vértice en (0,c).

Finalmente, comparando las gráficas de f y g, funciones reales con regla de correspondencia $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + c$ tenemos que g se encuentra desplazada respecto de f, sobre el eje de - las y's, c unidades quedando como sigue:



Generalizando tenemos:

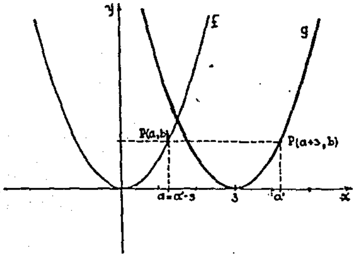
DEFINICION: Sean f y g funciones reales tales que para toda x; $g(x) = f(x) + c$ entonces se dice que las gráficas de f y g tienen la misma forma y que la gráfica de g esta desplazada c unidades respecto de la de f.

b) Traslación horizontal.

Un comportamiento similar podemos encontrar al comparar las gráficas de funciones que tienen una misma forma y que se encuentran desplazada una respecto de la otra c unidades sobre el eje de las x's.

Veamos algunos ejemplos: consideremos la función real f con regla de correspondencia $f(x) = x^2$ y traslademos la gráfica de f sobre el eje de las x's, 3 unidades a la derecha, obteniendo la gráfica de g.

Como se puede observar a cada punto P de la gráfica de f le corresponde un punto P' en la gráfica de g como resultado de la traslación.

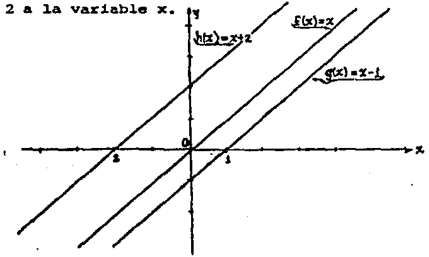


al compararse tales puntos tenemos que si a es la abscisa de P, a P' le corresponde la abscisa a + 3 , manteniendo P y P' la misma ordenada.

En forma inversa, si tomamos un punto P' de g tal que a' es su abscisa, podemos obtener su ordenada g(a') a partir de f si evaluamos f(a'-3), esto es, la gráfica de g se encuentra trasladada tres unidades a la derecha. De acuerdo a lo anterior, la regla de correspondencia de g se obtiene a partir de la de f como sigue:

$$\text{Si } f(x) = x^2 \text{ entonces } g(x) = f(x-3) = (x-3)^2$$

Al considerarse las gráficas de las funciones f, g y h cuyas reglas de correspondencia son $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$ y $h(x) =$ .. $x + 2$, respectivamente, puede observarse que respecto de f las gráficas de g y h pueden interpretarse como resultado de un de un desplazamiento horizontal a la derecha o izquierda de f quedando como sigue: si se desplaza f a la derecha una unidad, se suma -1 a la variable x y si lo hace a la izquierda, 2 unidades a partir de f, se le suma 2 a la variable x.

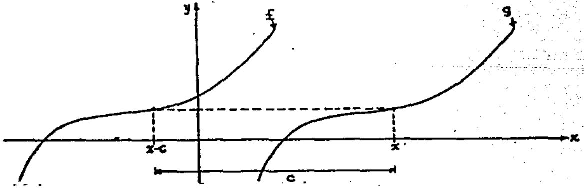


Pasemos al caso general:

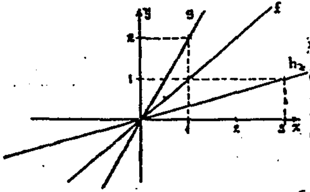
Sean f y g dos funciones reales cuyas gráficas presentan la misma forma, conociendose la regla de correspondencia de f. Resulta que la regla de correspondencia de g se puede obtener a partir de f como sigue:

a) En el caso que g se desplace a la derecha de f c unidades, se obtiene que
$$g(x) = f(x - c)$$

b) En el caso que g se desplace a la izquierda de f c unidades, se obtiene que
$$g(x) = f(x + c)$$



Estiramiento.



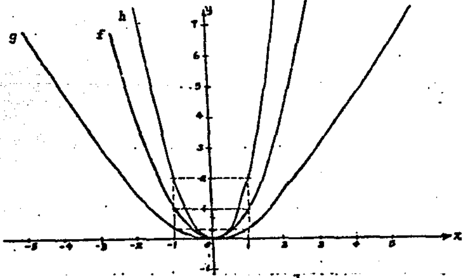
Analicemos ahora el comportamiento que presenta la gráfica de una función cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$ respecto de la función cuya regla de correspondencia es $g(x) = af(x)$. Consideremos f, g y h tales que: $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = \frac{1}{3}x$.

cuyas respectivas gráficas son las que aparecen en la figura del final de la página anterior.

Observese que el efecto que se produce en g, respecto de f, se puede interpretar como un estiramiento de las imágenes de f (obteniendose, precisamente las de g); en cambio en el caso de h respecto de f se realiza una contracción de las imágenes, todo lo cual esta esta en función del valor de la constante a, ($a = 2$ en el primer caso y $a = \frac{1}{3}$ en el segundo)

Algo similar sucede para los casos en que f, g y h tienen las reglas de correspondencia:
$$f(x) = x^2 \ , \quad g(x) = 2x^2 \quad y \ h(x) = \frac{1}{3}x^2$$

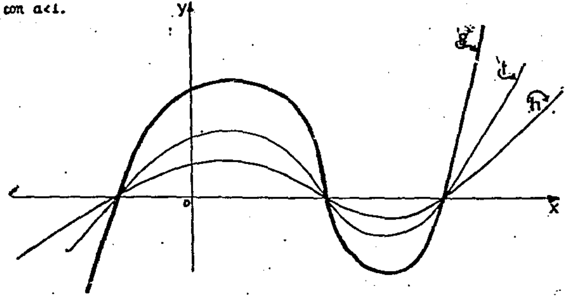
cuyas gráficas son:



Note, finalmente, que el efecto de estirar o contraer una gráfica lo decide la relación del número a respecto de 1, siendo a positivo, resumiendo:

DEFINICION: Si f y g son dos funciones reales tales que $g(x) = af(x)$, $a > 0$; se dice que la gráfica de g se obtiene a partir de f mediante un estiramiento o una contracción de sus imágenes (si $a > 1$ o si $a < 1$ respectivamente).

$g(x) = af(x)$, con $a > 1$.
$h(x) = af(x)$, con $a < 1$.



§5 Funciones polinomiales.

El trabajo hasta aquí desarrollado nos permite presentar dos formas generales de regla de correspondencia, para un cierto tipo de funciones, con los cuales podemos hacer, a su vez, un análisis detallado de sus propiedades y mostrar la forma geométrica de su gráfica, esto es:

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = ax + b$; con a y b constantes.
Forma lineal.

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c constantes.
Forma cuadrática

Estas funciones son casos particulares de las que llamaremos Funciones Polinomiales y que ahora pasamos a estudiar.

DEFINICION: Se dice que $P(x)$ es un polinomio en una variable si es de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0$ son números reales y los exponentes números naturales.

Ejemplos:

$$7x^6 + 15x^5 - 3x^3 - 2x + 1$$
$$-3x^4 + 3x^3 + 4.$$

DEFINICION: Se dice que el grado de $P(x)$ es n, si n es el mayor exponente que aparece en el polinomio.

Ejemplo:

$6x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ es de grado 5

DEFINICION: Una función f es polinomial si su regla de correspondencia $y = f(x)$ es un polinomio.

El siguiente resultado sera demostrado posteriormente, sin embargo lo utilizaremos para obtener la gráfica de funciones polinomiales:

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES POLINOMIALES.
Si f es una función polinomial tal que $f(a) \neq f(b)$ donde $a < b$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a,b]$.

Dos consecuencias de este enunciado, son las dos siguientes:

- Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe .. $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$. Además, el número c se llama un zero de la función.
- Si c y d son dos ceros de una función polinomial tal que entre ellos no existe otro cero, entonces en el intervalo ... $]c,d[$ f no cambia de signo, esto es, si tomamos un número $k \in]c,d[$, entonces el signo de las imágenes de todos los elementos del intervalo son iguales al del signo de $f(k)$ y llamamos a $f(k)$ el valor de prueba.

Finalmente, un resultado: El Teorema Fundamental del Algebra, nos permitira hacer el trazado de la curva con mayor exactitud; este resultado lo enunciaremos únicamente, ya que su demostración queda fuera del alcance de estas notas:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA:
Una función polinomial de grado n presenta a lo más n ceros.

Así, si es posible escribir una funcion polinomial en la forma $f(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)\ldots(x - b_n)$, por el resultado anterior, sabemos que esta función intersecta al eje OX en los puntos $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Ilustremos los anteriores resultados con un ejemplo:

Consideremos la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

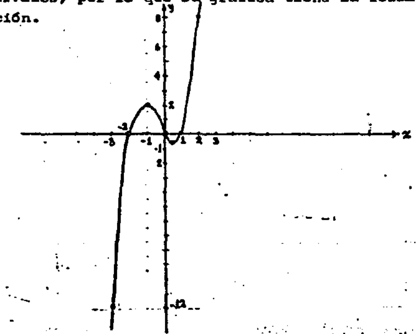
Al factorizar el polinomio tenemos que

$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x + 2)(x - 1)$; por lo cual los ceros de f son: $x = 0$, $x = -2$ y $x = 1$.

Así estos valores definen 4 intervalos en el dominio, en cada uno de estos elegimos un elemento x, tal que al calcular su imagen $f(x)$ nos indicará el signo de $f(x)$ y por tanto la posición de la gráfica en el intervalo respecto al eje de las x's, lo cual podemos representarlo en la siguiente tabla.

Intervalos	Valor de Prueba	Signo de f(x)	Posición de la gráfica
$]-\infty,-2[$	$f(-3) = -12$	−	abajo del eje OX
$]-2,0[$	$f(-1) = 2$	+	arriba del eje OX
$]0,1[$	$f(.5) = -.625$	−	abajo del eje OX
$]1,\infty[$	$f(2) = 8$	+	arriba del eje OX

Con la anterior información tenemos algunas parejas de la función, así como el comportamiento de la función en cada uno de los 4 intervalos, por lo que su gráfica tiene la forma que se da a continuación.



§6 Funciones racionales.

DEFINICION: Una función f es racional si su regla de correspondencia es el cociente de dos polinomios,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

en este caso se tiene que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{a \in \mathbb{R} \mid Q(a) = 0\}$$

Iniciaremos el estudio de este tipo de funciones analizando un caso particular; consideremos la siguiente función:

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-1}$$

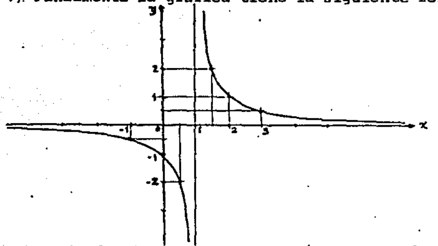
1) Como el numerador es la constante 1, se sigue que $f(x) \neq 0$, para cualquier valor de x, por lo tanto la gráfica no corta al eje OX.
2) Si $x < 1$, $x - 1 < 0$ por lo que $f(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 1[$
3) Si $x > 1$, $x - 1 > 0$ por lo que $f(x) > 0$ para $x \in]1, \infty[$
4) Además $f(1)$ no tiene sentido.
5) Al tabular puntos de la gráfica cuya abscisa sea un valor cercano a 1 tenemos:

$f(1.1) = 10$	y	$f(0.9) = -10$
$f(1.01) = 100$		$f(0.99) = -100$
$f(1.001) = 1000$		$f(0.999) = -1000$
$f(1.0001) = 10000$		$f(0.9999) = -10000$

6) Al tabular puntos de la gráfica cuyos valores se alejan de 1 tenemos:

$f(2) = 1$	$f(0) = -1$
$f(11) = 0.1$	$f(-9) = -0.1$
$f(100) = 0.01$	$f(-99) = -0.01$

7). Finalmente la gráfica tiene la siguiente forma:



A partir de observaciones al ejemplo anterior haremos comentarios y daremos algunas definiciones que ayudaran a visualizar estas funciones en su aspecto más general.

Así se tiene que cuando x toma valores próximos a 1, se observa que la gráfica tiene comportamientos distintos cuando x es mayor que 1 y cuando x es menor que 1; en el primer caso, f(x) es cada vez más grande y en el segundo f(x) es cada vez más pequeña; esto se puede expresar en forma más precisa como:

f(x) crece sin límite o tiende a infinito cuando tomamos x suficientemente proxima a 1 (x > 1) se representa de la siguiente manera:

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ cuando } x \longrightarrow 1^+$$

f(x) decrece sin límite o tiende a menos infinito cuando tomamos x suficientemente próxima a 1 (x < 1) se representa de la siguiente manera:

$$f(x) \longrightarrow -\infty \text{ cuando } x \longrightarrow 1^-$$

Al llevar este comportamiento a la gráfica, se induce a la siguiente precisión:

DEFINICION: La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de la función f si
$f(x) \longrightarrow \infty$ ó $f(x) \longrightarrow -\infty$
cuando x se aproxima a $\underline{a}$ tanto por la izquierda o por la derecha.
($x \longrightarrow a^-$ ó $x \longrightarrow a^+$)

Las asíntotas verticales son característica común de la gráfica de funciones racionales. Así tenemos el siguiente resultado:

Sí a es un cero del denominador $Q(x)$, entonces la gráfica de f con $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ presenta la asíntota vertical $x = a$.

Así mismo, en la función del ejemplo anterior se observa que al hacer $|x|$ suficientemente grande, la diferencia de $f(x)$ con 0 es cada vez menor; esto es, $f(x)$ se aproxima al cero conforme $|x|$ se hace suficientemente grande, expresado de otra forma

$$f(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow \infty \quad \text{ó}$$
$$f(x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow -\infty$$

en este caso se dice que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de esta manera, se tiene tambien la siguiente precisión:

DEFINICION: La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función f, si
$f(x) \longrightarrow b$ cuando $x \longrightarrow \infty$ o
cuando $x \longrightarrow -\infty$.

Con lo visto hasta el momento podemos presentar un método para trazar la gráfica de las funciones racionales.

Consideremos a f una función racional tal que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1°. Encuentrense los ceros del numerador $P(x)$ y localícense en el eje OX.

2°. Encuentrense los ceros del denominador $Q(x)$; si a es un cero, la línea $x = a$ es una asíntota vertical. Trace $x = a$ en forma punteada.

3°. Encuentre los valores de prueba y signo de los intervalos que determinan los ceros de $P(x)$ y $Q(x)$. Con esta información encuentre cuando $f(x)$ esta arriba y cuando abajo del eje OX.

4°. Si $x = a$ es una asíntota vertical, use la información del paso (3) para determinar en que casos $f(x) \longrightarrow \infty$ o $f(x) \longrightarrow -\infty$ conforme $x \longrightarrow a^-$ ó $x \longrightarrow a^+$.

5°. Use la información de (3) para determinar cuando la gráfica corta al eje OX.

6°. Determine el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow \infty$ y y cuando $x \longrightarrow -\infty$. De tal forma que si $f(x) \longrightarrow b$ entonces la recta $y = b$ es una asíntota horizontal. En caso que $b \neq 0$, representela en forma punteada.

7°. Dibuje la gráfica, tabulando algunos puntos mas, siempre que lo considere necesario.

Pasemos a aplicar el método en los siguientes ejemplos:

1.- Grafique $f: \mathbb{R} - \{3,2\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$$

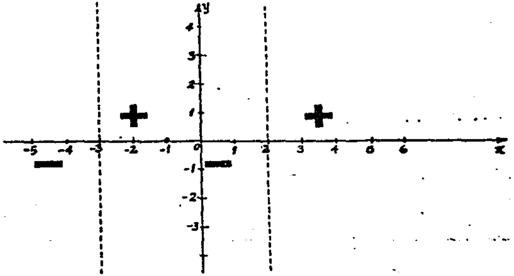
Paso 1. El númerador es igual a 0 para $x = -1$, luego -1 es un cero del numerador.

Paso 2. El denominador se puede factorizar como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$; así los ceros del denominador son -3 y 2. Luego las rectas $x = -3$ y $x = 2$ son asíntotas verticales, las que se trazan en forma punteada. (ver la gráfica).

Paso 3. Los ceros del numerador y el denominador: -3, -1 y 2 determinan la siguiente tabla:

INTERVALOS	VALOR DE PRUEBA	SIGNO	POSICION DE LA GRAFICA
$]-\infty,-3[$	$f(-4) = -\frac{1}{2}$	$-$	Bajo el eje OX
$]-3,-1[$	$f(-2) = \frac{1}{4}$	$+$	Sobre el eje OX
$]-1,2[$	$f(0) = -\frac{1}{6}$		Bajo el eje OX
$]2,\infty[$	$f(3) = \frac{4}{7}$	$+$	Sobre el eje OX

Con la información de (1),(2) y (3) tenemos la siguiente situación:



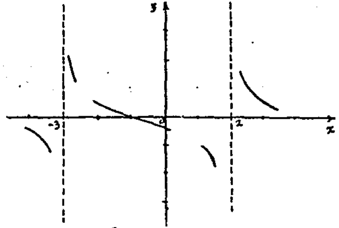
Paso 4. Usando la columna 4 de la tabla y dado que la gráfica presenta asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 2$ tenemos que:

Si $x \to -3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to -3^+$, $f(x) \to \infty$

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to \infty$



Paso 5. Dado que $f(-2) = \frac{1}{4}$ y $f(0) = \frac{-1}{6}$ la gráfica corta al eje OX como aparece en la gráfica.

Paso 6. Para determinar el comportamiento de x cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ se divide la expresión de $f(x)$ por x quedando

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

de esta manera, si x crece, entonces la expresión que aparece en cada paréntesis son valores cada vez más próximos a cero, esto es,

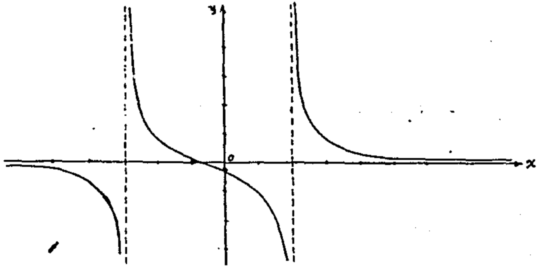
$$f(x) \approx \frac{0 + 0}{1 + 0 - 0} \approx \frac{0}{1} = 0$$

esto indica que $f(x) \to 0$ si $x \to \infty$ y que $f(x) \to 0$ si $x \to -\infty$

Así la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la gráfica.

Paso 7. Con la información de los pasos anteriores, el esbozo de la gráfica queda como sigue:

*La técnica usada en el paso 6 se puede generalizar. Así si $f(x)=P(x)/Q(x)$ y el grado de $P(x)$ no es mayor que el grado de $Q(x)$, entonces divídase numerador y denominador por x^n donde n es el grado de $Q(x)$. En caso que el grado de $P(x)$ sea mayor que el de $Q(x)$ no existen asíntotas horizontales.



2.- Grafique $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

Paso 1. El numerador tiene ceros en 2 y -2; ya que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

Paso 2. El denominador es igual a cero en el punto 0, por lo que $x = 0$ es asíntota vertical de la gráfica.

Paso 3. Los ceros del numerador y denominador definen los intervalos $]-\infty,-2[$, $]-2,0[$, $]0,2[$ y $]2,\infty[$ que originan la siguiente tabla:

INTERVALOS	VALOR DE PRUEBA	SIGNO	POSICION DE LA GRAFICA
$]-\infty,-2[$	$f(-3) = \frac{5}{9}$	+	Sobre el eje OX
$]-2,0[$	$f(-1) = \frac{-1}{3}$	-	Bajo el eje OX
$]0,2[$	$f(1) = \frac{-1}{3}$	-	Bajo el eje OX
$]2,\infty[$	$f(3) = \frac{5}{9}$	+	Sobre el eje OX

Paso 4. Como al aproximarse a $x = 0$ tanto por el lado derecho como por el izquierdo, la gráfica queda por debajo del eje OX, se afirma que:

$$f(x) \longrightarrow -\infty \quad \text{si} \quad x \longrightarrow 0^- \qquad \text{y}$$
$$f(x) \longrightarrow -\infty \quad \text{si} \quad x \longrightarrow 0^+$$

Paso 5. Como $f(-3) > 0$ y $f(-1) < 0$ entonces la curva en $]-3,-1[$ corta el eje Ox; de igual manera dado que $f(1) < 0$ y $f(3) > 0$, en $]1,3[$ la gráfica corta el eje OX.

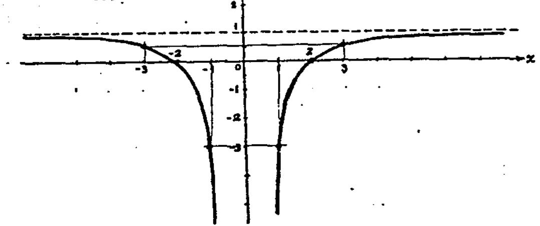
Paso 6. Si dividimos la expresión $f(x)$ término a término por x^2 tenemos que

$$f(x) = \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1}$$

de esta manera cuando $|x|$ es demasiado grande, tenemos que $\frac{4}{x^2}$ es muy pequeño y de esta manera

$$f(x) \approx \frac{1 - 0}{1} = 1.$$ Por lo cual decimos que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Paso 7. Con la información anterior, la gráfica es la siguiente:



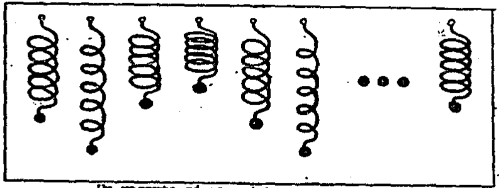
Las funciones que hemos estudiado* hasta el momento, tienen una propiedad en común: su regla de correspondencia es una expresión que resulta de un número finito de operaciones elementales (+, -, ·, ÷) en que interviene: la variable, a este tipo de funciones se las llama Algebraicas.

*Un tratamiento distinto para el trazado de funciones racionales de manera más cualitativa se puede consultar en el folleto: "Análisis Matemático de las funciones racionales de G. Shilov. Ed. Mir.

Existen funciones de otro tipo, son aquellas que se caracterizan por presentar una expresión algebraica con un número infinito de operaciones elementales. De estas, las funciones Trigonométricas, la exponencial y la logarítmica, haremos su estudio en las siguientes secciones.

§7 Funciones trigonométricas .

La representación de fenómenos cuyo comportamiento es periódico, como son, por ejemplo el movimiento celeste de los planetas, y estrellas; la propagación del sonido y la luz como una onda; la descripción del movimiento de un péndulo, etc.; se realiza con las funciones trigonométricas, resultando estas, modelos apropiados que describen en lo escencial el comportamiento cualitativo de tales procesos. En esta sección haremos un estudio sucinto de estas funciones.

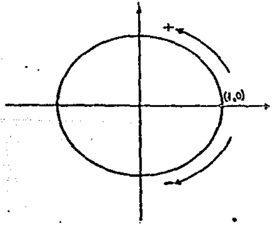


Un resorte si se sujeta en un extremo, y en el otro se le fija un peso, al tirar el peso con la mano, el resorte se mantiene estirado. Al soltar el peso, el resorte se encoge creándose una oscilación.

Medida de un ángulo .

Primeramente recordemos la definición de ángulo: Consideramos el ángulo como la figura formada al considerar dos semirrectas superpuestas y girar una de ellas, la semirrecta fija se llama lado inicial del ángulo y la otra lado final; el punto inicial de las semirrectas se conoce como vértice del ángulo.

Para obtener la medida de un ángulo, consideramos un círculo con centro en el origen de un sistema de coordenadas y radio 1.



A partir de este círculo mediremos un ángulo, situando para este fin su vértice en el origen, su lado inicial coincidiendo con la parte positiva del eje OX.

Si el ángulo se obtiene girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, la medida resultante se considera positiva, en el otro sentido, se considera negativa.

Las unidades.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, una de estas partes es la unidad de medida de un ángulo llamado grado y que la representamos como °. Así decimos que el ángulo recto mide 90° y el ángulo llano 180°.

Existen otras unidades para la medición de los ángulos, por ejemplo, si en lugar de dividir la circunferencia en 360 partes se divide en 400 partes, una de estas partes es lo que se conoce como gradiente. Para el estudio que deseamos (gráfica de funciones), se considera la siguiente unidad:

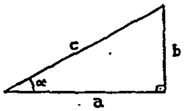
Consideremos un círculo de radio 1, tomemos un arco de longitud igual al radio, y a partir de el dividamos la circunferencia; Este arco cabe 2π veces en la circunferencia, a dicha unidad la llamamos radian (rad.). Así un ángulo de medida igual a 180°, tambien mide π rad., el de 90° es al de $\frac{\pi}{2}$ rad. y 1 rad $\simeq$ 57°17'45'' .

De esta manera, al tomar una unidad lineal para medir un ángulo lo logramos expresar cualquier longitud de arco con unidades lineales; es decir:

Hacemos corresponder a todo ángulo de medida a rad. un punto en la recta y visceversa, a todo número real le podemos asociar un ángulo con esa medida.

Funciones trigonométricas.

En un curso elemental de trigonometría, las funciones trigonométricas se definen a partir de un triángulo rectángulo, asi para un ángulo agudo α se tiene:*



$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{csc}\alpha = \frac{c}{b}$$

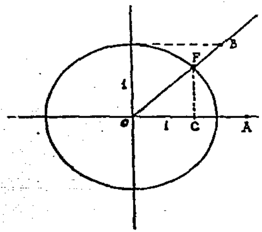
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$$

* Las funciones trigonométricas, para definirlas con rigor, se requiere expresarlas en forma de sumas infinitas. Dado el nivel, como las limitaciones del curso estas funciones, así como la exponencial y logarítmica que se estudian a continuación, se da una exposición intuitiva, con el fin exclusivo de tener una idea del comportamiento de estas funciones, tanto como de su gráfica.

Esta definición presenta la limitación que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, para cubrir esta limitación, daremos una definición más amplia de función trigonométrica que incluya a la anterior.

Para tal efecto, utilicemos de nueva cuenta el círculo de radio 1, localizado en un sistema de ejes coordenados. Tracemos en el un ángulo AOB. Tenemos en este caso que si F es un punto de la circunferencia con coordenadas (x,y) entonces:



$$\text{sen AOB} = \frac{FC}{OF} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \text{AOB} = \frac{OC}{OF} = \frac{x}{1} = x$$

$$\text{tg AOB} = \frac{FC}{OC} = \frac{y}{x}$$

$$\text{ctg AOB} = \frac{OC}{FC} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \text{AOB} = \frac{OF}{OC} = \frac{1}{x}$$

$$\csc \text{AOB} = \frac{OF}{FC} = \frac{1}{y}$$

De esta manera podemos extender la función trigonométrica correspondiente, para todo número real α, esto es:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, trazamos en el círculo unitario el ángulo AOB cuya medida sea α rad., luego este ángulo cortara al círculo en un punto P(x,y) quedando definidas las reglas de correspondencia para las funciones como sigue:

$$\text{sen}\ \alpha = y \qquad \csc\ \alpha = \frac{1}{y}$$

$$\cos\ \alpha = x \qquad \sec\ \alpha = \frac{1}{x}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{ctg}\ \alpha = \frac{x}{y}$$

Como se observara, las funciones trigonométricas se han definido a partir de la intersección del lado terminal del ángulo con el círculo trigonométrico, esto es, a partir de las coordenadas del punto P de intersección, es decir a partir de (x,y).

Analicemos el comportamiento que adquieren las coordenadas (x,y) al variar el ángulo.

i) Si α crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$, x decrece de 1 a 0
y crece de 0 a 1

ii) Si α crece de $\frac{\pi}{2}$ a π, x decrece de 0 a -1
y decrece de 1 a 0

iii) Si α crece de π a $\frac{3}{2}\pi$, x crece de -1 a 0
y decrece de 0 a -1

iv) Si α crece de $\frac{3}{2}\pi$ a 2π, x crece de 0 a 1
y crece de -1 a 0

v) Este comportamiento se repite conforme α es mayor que 2π (o decrece para α menor que cero), para lo cual α se expresa como $\alpha = 2k\pi + \alpha_1$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha_1 < 2\pi$

vi) Si $\alpha = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $y = 0$

vii) Si $\alpha = \frac{2k+1}{2}\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $x = 0$

Con el comportamiento del angulo α, la función seno queda como sigue:

$$\text{sen}: \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$
$$\alpha \longmapsto \text{sen}\alpha = y$$

Esta función alcanza su valor máximo que es 1, cuando α es de la forma $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, y su valor mínimo -1, si α es de la forma $2k\pi + \frac{3}{2}\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, finalmente $\text{sen}(\alpha) = 0$ si $\alpha = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por otra parte la función seno crece de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ y decrece de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$.

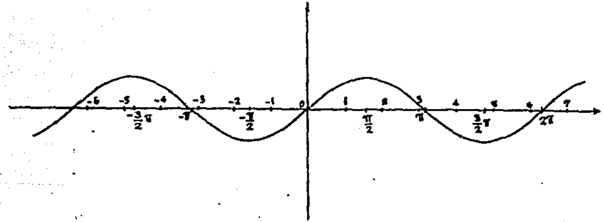
Por último, se tiene que para $\alpha > 2\pi$

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(2k\pi + \alpha_1) = \text{sen}(\alpha_1),$$
con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha_1 < 2\pi$

y la función seno es impar:

$$\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(-\alpha)$$

La gráfica de la función seno es:



Un análisis similar se puede realizar para la función coseno, resultando en este caso

$$\cos: \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$
$$\alpha \longmapsto \cos\alpha = y$$

Esta función alcanza su valor máximo que es 1 para $\alpha = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$; su valor mínimo que es -1 lo alcanza en $\alpha = (2k+1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $\cos(\alpha) = 0$ si α es de la forma $\alpha = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

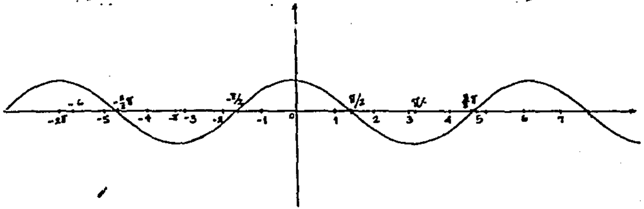
La función coseno decrece de 0 a π y crece de π a 2π, repitiendose este comportamiento conforme α crece. Así si $\alpha > 2\pi$

$$\cos(\alpha) = \cos(2k\pi + \alpha_1) = \cos\alpha_1$$
con $k \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha_1 < 2\pi$

Finalmente tenemos que la función coseno es par, es decir,

$$\cos\alpha = \cos -\alpha$$

La gráfica de la función coseno tiene la forma siguiente:



En cuanto a las demás funciones, para estudiar sus reglas de correspondencia, las expresaremos en términos de las funciones seno y coseno, esto es,

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{ctg } \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

Por lo cual, con el método estudiado en las funciones racionales, se pueden graficar. En cuanto a su dominio, este se restringe en cada caso, para cuando el denominador es diferente de cero.

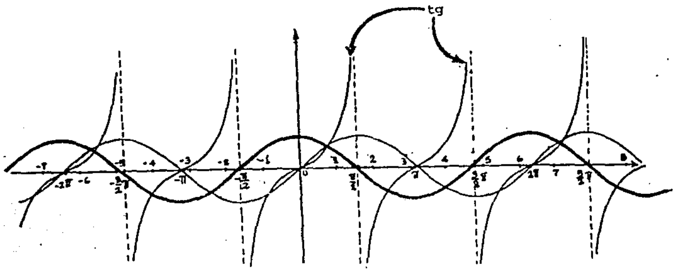
De este modo, el dominio de la función tangente es

$$\mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{2k+1}{2}\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

quedando la gráfica como sigue: (en la siguiente página)

En forma similar se establece el dominio para cada una de las funciones restantes. Lo cual se deja como ejercicio para el lector.

Tambien como ejercicio, se deja el realizar las gráficas, a la vez que se encuentren los ceros, y en caso de que existan, valores máximos, mínimos y asíntotas verticales.



§8 Función exponencial.

Problemas de crecimiento.

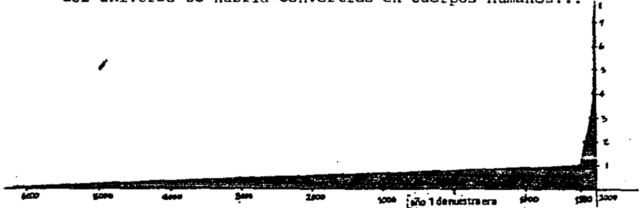
Transcribimos un fragmento que aparece en AMBIO Vol. XIII, Nº 3, 1984, Publicación bimestral de la Real Academia Sueca de Ciencias.

"... Tomó la mayor parte del tiempo transcurrido desde que existen seres humanos sobre la tierra -quizás entre tres y cuatro millones de años- alcanzar una población global de mil millones (ver figura). Esto fue el año 1800. La cifra de 2 mil millones se alcanzó solo 150 años despues, en el año 1930. Nos acercamos a 3 mil millones tres decadas más tarde, en 1960. Solo fueron necesarios 15 años más para alcanzar los 4 mil millones, en 1975.

Actualmente somos cerca de 4.7 mil millones de personas compartiendo el planeta y estamos sumando 75-80 millones anuales a dicha cifra. La tasa de crecimiento de la población mundial: se incremento del 2 % cada mil años en el pasado prehistórico, a casi el 2 % anual a mediados de la decada de 1950;

lo cual equivale a haber aumentado mil veces.

En el pasado cada vez que se duplicó la población ocurrío tan solo en la mitad de tiempo empleado en la duplicación anterior. De acuerdo a cálculos recientes, de permanecer invariable esta tendencia durante los próximos 50 años, entonces aun antes de que estos hubieran transcurrido, toda la materia del universo se habría convertido en cuerpos humanos..."



Material como de este tipo, "de alto nivel científico" aparece en discusiones sobre crecimiento de población, para fundamentar medidas que combatan esta tendencia en los paises subdesarrollados. Lo que se traduce en políticas de control natal.

Veamos otro ejemplo que este más próximo a nuestra realidad: Debido a los trabajos de explotación de los campos petroleros en México, a partir de 1973 tenemos:

"En Villahermosa subio la actividad de la industría petrolera, los precios de las viviendas, alimentos y ropa. Tambien aumento la población y la demanda educativa. Villahermosa era una agencia de ventas de PEMEX. No tenía más de 10 empleados. Entre 1973 y 1974 llegaron cerca de mil trabajadores de PEMEX. Al año siguiente llegaron otros tantos. Para fines de 1977 vivían en Villahermosa cerca de 6000 trabajadores de PEMEX. Y en Villahermosa y sus alrededores habia 8400 personas que trabajaban para PEMEX y cerca de 6000 para los contratistas de

PEMEX. Total en el breve espacio de cuatro años llegaron .. 14400 trabajadores.

Se calcula que por cada trabajador de PEMEX vinieron dos o tres desocupados en busca de trabajo. Y no de cualquier trabajo sino de un empleo de PEMEX. A causa de este éxodo en cuatro años Villahermosa ha duplicado su población (de 100000 a 200000)." Manlio Tirado.

La sistematización de esta problemática corresponde a Economistas, Sociólogos, Antropólogos, Biólogos, Ecologistas, Etnólogos, etc. Estos al establecer relaciones cuantitativas de su interes e intentar describirlas de manera que puedan obtener deducciones de los datos que se presentan, requieren de modelos matemáticos que coadyuben a explicar este tipo de comportamientos.

Cuando estas interpretaciones son objetivas, y no simples discursos demagógicos, de tal suerte que reflejan a la realidad, nos muestran cuan descarnada es la explotación e injusticia que priva en nuestro País. Sirva esto como botón de muestra de que la matemática no es tan solo tema de estudio desligado de toda problemática social, sino que por el contrario tiene un fundamento material y esfera de aplicación muy amplia.

Para el estudio matemático del tipo de problemas mencionados, es muy útil la llamada función exponencial, la cual sin mucho rigor presentamos en esta sección. Por otra parte como objeto matemático tiene su propio desarrollo formando parte del Cálculo y el Análisis Matemático.

De manera intuitiva construiremos esta función tomando como base el siguiente problema:

Se tiene un cultivo de 100 bacterias en un inicio, las cuales cada hora aumentan al doble, así durante las cinco primeras horas su crecimiento se muestra en la siguiente tabla.

t	N(t)
0	100
1	200
2	400
3	800
4	1600
5	3200

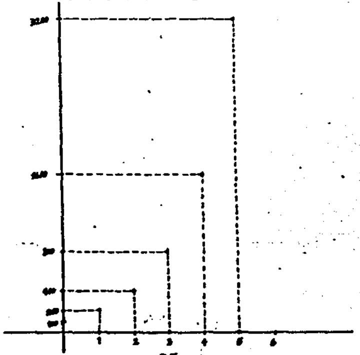
La relación que se da entre las parejas ordenadas $(t, N(t))$ se puede expresar por medio de la siguiente regla de correspondencia

$$N(t) = (100)(2^t)$$

y usando la notación de función que se ha utilizado tenemos la siguiente representación:

$$N: A \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$t \longmapsto N(t) = (100)2^t$$

cuyo dominio es $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ y la gráfica es



Propiedades de los exponentes.

Para que la expresión $(100)2^t$ tenga sentido para cualquier número t y se pueda usar como regla de correspondencia para funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (de tal suerte que se podría conocer el crecimiento en cualquier instante) haremos un recordatorio sobre algunas propiedades de los números, así como ciertas ampliaciones de tales conceptos.

I) Sabemos que

Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{Z}$

i) Si $n < m$ y $a > 1$ entonces $a^n < a^m$

ii) Si $n < m$ y $a < 1$ entonces $a^n > a^m$

iii) $a^n a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

iv) $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

v) $a^n > 0$ y $a^{-n} > 0$

II) Las anteriores propiedades se logran extender de manera que en la expresión a^r con $a \gtrless 0$ y $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tiene sentido, para lo cual procedemos como sigue:*

i) Dado $a > 0$ y $q \in \mathbb{N}$; decimos que $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$

ii) Así si $a^r = a^{\frac{p}{q}}$ y considerando que en esta expresión se deben cumplir las propiedades mencionadas, tenemos que $a^r = a^{\frac{p}{q}} = a^{p\left(\frac{1}{q}\right)} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

es un número real.

III) Una segunda extensión de estas propiedades consiste en darle sentido a la expresión

*La justificación de la extensión del concepto sale del objetivo del curso. Para este fin puede consultarse textos tales como "Curso de Análisis Matemático" de L. D. Kudriátsev T.1 §7. Moscú, 1983

a^x con $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$

esto es, que sentido tiene la expresión si el exponente es un número irracional. Con el objeto de darle sentido a la expresión mencionada anteriormente, veamos el caso particular de

$$a^{\sqrt{2}}$$

Para tal fin, recordemos que al discutir en el Cap. I el axioma de Completez se hizo una explicación del sentido que se daba al número $\sqrt{2}$ en los términos siguientes:

1) Existian dos conjuntos A y B ajenos tales que el primero consistia de cotas inferiores de $\sqrt{2}$ y el conjunto B consistia de los números que fueran cotas superiores de $\sqrt{2}$

2) El Sup. de A es $\sqrt{2}$ y el Inf. de B tambien $\sqrt{2}$

3) Esto nos garantiza el tener dos tipos de aproximación al número $\sqrt{2}$ por defecto o por exceso respectivamente, siendo nuestra aproximación a $\sqrt{2}$ tan próxima como se quiera.

4) Dado que
$1 < 1.25 < 1.375 < 1.40625 < 1.4140625 < 1.41411846....$
son racionales que pertenecen a A y
$... \ 1.4142453 < 1.414306 < 1.4145508 < 1.4150391 <$
$1.4160156 < 1.4179688 < 1.421875 < 1.4375 < 1.5 < 2$
son racionales que pertenecen a B,
y como para tales elementos tiene sentido a^r con $r \in A$ ó $r \in B$, pues para estos números se cumplen las propiedades dadas en I.

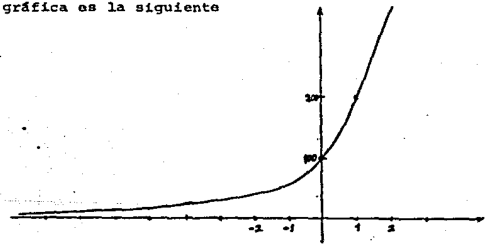
5) Finalmente, al tomar elementos cercanos a $\sqrt{2}$ por exceso o defecto, observamos que a^r se aproxima a un valor, este es el que llamamos $a^{\sqrt{2}}$ y para èl cual valen las propiedades enunciadas en I.

La función exponencial.

Al tener sentido la expresión a^r con r cualquier número real, podemos hablar de la función que llamamos exponencial, en el caso particular de nuestro ejemplo sería:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = (100)\,2^t$$

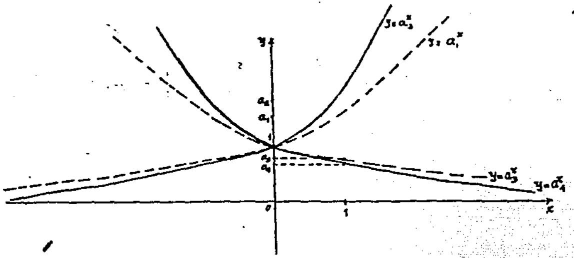
cuya gráfica es la siguiente



En general, se puede definir la función exponencial de la siguiente manera:

DEFINICION: Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$; la función
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = a^x$$
se llama función exponencial de base a.

El cambio de base para valores de a mayor que 1, así como para valores de a menores que 1 genera una familia de funciones cuyas gráficas son:



Enlistaremos algunas de las propiedades de la función exponencial.

i) Dada $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = a^x \qquad a \neq 1, \quad a > 0$$

se tiene que

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Ran} f = \mathbb{R}^+$
- $f(0) = a^0 = 1$
- $f(1) = a^1 = a$

ii) Al comparar dos funciones con diferente base, se presentan las siguientes afirmaciones

Sean $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = a^x \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = b^x$$

funciones exponenciales con sus respectivas bases.

- Si $1 < a < b$, $x < 0$ entonces $a^x > b^x$ $(f(x) > g(x))$
- Si $1 < a < b$, $x > 0$ entonces $a^x < b^x$ $(f(x) < g(x))$
- Si $a < b < 1$, $x < 0$ entonces $a^x > b^x$ $(f(x) > g(x))$
- Si $a < b < 1$, $x > 0$ entonces $a^x < b^x$ $(f(x) < g(x))$

OBSERVACIONES

1) Las propiedades dadas de la función exponencial, se pueden comprobar mediante las gráficas que se presentan

2) La función exponencial se usa a menudo tomando la base 10 o la base e. Quedando sus expresiones como

$$f(x) = 10^x \qquad y \qquad f(x) = e^x \qquad \text{respectivamente.}$$

3) El número e es un número irracional, del cual se puede calcular con aproximaciones decimales tanto como se quiera, a partir de la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dando valores a n cada vez más grandes. La expresión de este número en sus 23 primeros decimales es

2.71828182845904523536028

Se recomienda graficar las siguientes funciones, que son definidas como combinación de funciones exponenciales. El dominio de estas son los números reales y sus reglas de correspondencia las siguientes:

$$f(x) = -(2^x)$$

$$f(x) = 8 + \frac{-1}{2^x}$$

$$f(x) = 2^{-x}$$

$$f(x) = 2^{-x+2}$$

$$f(x) = 2^x + 2^{-x}$$

$$f(x) = 2^x - (2^{-x})$$

¿Porque en la función exponencial $y = a^x$ la base a se considera positiva y diferente de 1?.

§9 La función logaritmo .

Introducción.

> Los dos grandes dioses Tezcatlipoca y Quetzalcoatl, hicieron bajar del cielo a la Señora de la Tierra. Era un monstruo grandioso, lleno de ojos y bocas en todas sus coyunturas...
>
> Cuando la vieron los dioses, uno a otro se dijeron: Es necesario dar a la tierra su forma. Entonces se transformaron en dos enormes serpientes. La primera asió al gran monstruo de la tierra desde su mano derecha hasta su pie izquierdo, en tanto que la otra serpiente, en que el otro dios se había mudado, la trababa desde su mano izquierda hasta su pie derecho. Una vez que la han enlazado, la aprietan, la estrechan, la oprimen, con tal empuje y violencia, que al fin en dos partes se rompe. Suben la parte inferior y de ella hacen el cielo; bajan la parte superior y de ella forman la Tierra. Los demas dioses veían y se llenaban de vergüenza, al pensar que ellos mismos nada semejante habían podido hacer...
>
> Epica Náhuatl.

Durante miles de años el género humano ha elaborado criterios que le dan explicación del mundo que los rodea. Teorías con toda su concepción general estrechamente ligada a sus pensamientos y sentimientos, que le permiten determinar, precisar y concretar criterios sobre el mundo, sobre qué lugar en el ocupa cada uno de los fenómenos y, ante todo, aquellos relacionados con la descripción de los planetas, sistemas estelares y galaxias, tanto en forma cuantitativa, como en la explicación del origen y desarrollo de dichos procesos.

La razón de ser de estas Teorías es la de responder en forma objetiva las cuestiones que surgen en la explicación del Universo; su discurso debe ser no contradictorio, cada vez más racional, sistemático y totalizador; de manera que de una explicación exhaustiva, de tal forma que responda los diversos pormenores que se presentan en la naturaleza.

A la vez que una teoría se enriquece y crecen conforme logra dar explicación a una esfera cada vez más amplia de fenómenos, al mismo tiempo, al estar imposibilitadas a responder cuestiones que escapan de su discurso -debido a los fundamentos que tiene como base- se va a enfrentar con otras teorías que intentan dar una explicación más coherente y completa a la misma problemática. Esta confrontación entre diferentes teorías se resuelve en la medida que una de ellas, en su comprobación en la práctica logra dar explicaciones cualitativamente superiores.

De este modo, las teorías que surgen en el pensamiento de los pueblos primitivos, llamense Nahuatl, Indú, Chino, Egipcio, Griego, Persa, Babilonio, etc. , su discurso gira en torno a la necesidad de dioses para crear y mantener en movimiento el Universo. Son superadas cuando se tiene concepciones más objetivas y sistemáticas, cuando se tiene un discurso científico; este se basa en interpretaciones teóricas, en conocimientos matemáticos y en instrumentos que permitan profundizar en la problemática en cuestión.

Dos grandes teorías se han formulado en la historia de la humanidad. Una de ellas es la Geocéntrica desarrollada por Claudio Ptolomeo en el siglo II de nuestra era,-es una síntesis del trabajo de sus antecesores- consiste en un modelo que explica el movimiento de los cuerpos celestes en el firmamento; es un esquema magnífico, de insuperable precisión matemática, que empleando todos los adelantos logrados por científicos de la época antigua le permitía precalcular los fenómenos .

La otra teoría denominada Heliocéntrica , que supera a la anterior, sera formulada por Nicolas Copérnico de Thorn la cual fue escrita en 1543, -este trabajo propone que el centro del sistema planetario lo ocupa el Sol y que la Tierra gira en torno a este- a tal planteamiento se van a adherir en su época nuevas contribuciones como son los trabajos de Kepler, de Galileo, de Newton, etc. y que son el punto de partida de la interpretación teórica que es aceptada hasta el momento, la cual se enriquece día a día.

Como hemos señalado, para que una teoría supere a otra debe ser cualitativamente superior. La confrontación entre el planteamiento Geocéntrico y el Heliocéntrico no se resuelve de un día para otro; estas interpretaciones explican los mismos fenómenos, pero sustentadas en bases diferentes.

El uso del telescopio tanto como los hechos y mediciones que de el se derivan; la aparición de datos cada vez más precisos de las observaciones, así como el lograr manejarlos con rapidez para que no sean un obstáculo para dar explicaciones adecuadas, van contribuyendo para que las bases sean más sólidas, de tal suerte que la teoría que se sustenta sea más objetiva.

Dentro de esta problemática es como aparecen los logaritmos. Se tiene conocimiento que Tico Brahe -astronomo que elaboro mapas del firmamento con gran precisión para su época- y J. Kepler hicieron uso de esta herramienta. Su utilidad estriba, como lo menciona ya en 1631 Briggs en su Obra Logarithmall Arithmetike al señalar:

> "Los logaritmos son números inventados para resolver más facilmente los problemas de aritmética y geometría. Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y divisiones; de manera que en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen substracciones. La laboriosa operación de extraer raices, tan poco grata, se efectua con suma facilidad... En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no solo de aritmética y de geometría, sino tambien de astronomía."

Más la fuente de inspiración del concepto matemático no es único; así vemos que en la época en que aparecen los logaritmos, no solo da respuesta a cálculos astronómicos, sino que, los cálculos que se pueden realizar aborda otras esferas de aplicación y de las cuales se nutre; este es el caso del desarrollo comercial de la época, en particular de la ganancia que produce un capital prestado, o el impuesto durante cierto tiempo, esto es el interes . Así la creación de tablas que tratan problemas de interes, seran tambien uno de los caminos que condujo al descubrimiento y desarrollo de los logaritmos. Resumiendo tenemos:

> Los logaritmos surgen conforme se desarrolla el cálculo aritmético y geométrico, su importancia estriba en que simplifica los cálculos, ya se apliquen a la astronomía, al comercio, a la navegación, etc. Haciendo sencillo operar con números muy grandes o números muy pequeños, obteniendose resultados más exactos, que son los que el astrónomo debe explicar satisfactoriamente, o bien el comerciante podra intensificar su actividad a partir del crédito e interes, o el navegante trazar rutas marítimas mas cortas, etc.

El cálculo aritmético con logaritmos.

Pasaremos a explicar como se realizan los cálculos aritméticos a travez de los logaritmos.

Si se multiplica 128 por 32 el procedimiento es el siguiente:

$$\begin{array}{r} 128 \\ \times\ \underline{32} \\ 256 \\ \underline{384\ \ } \\ 4096 \end{array}$$

en este procedimiento se requiere realizar varias multiplicaciones y sumas.

Otra forma de realizar este cálculo, que nos dara una primera aproximación a lo que son los logaritmos consiste en

i) Observar que los números que se multiplican, son potencias de la misma base, esto es $128 = 2^7$ y $32 = 2^5$.

ii) Usando las leyes de los exponentes, tenemos que

$$128 \times 32 = 2^7 \times 2^5 = 2^{7+5} = 2^{12}$$

iii) Si contamos con una tabla formada por las potencias del 2, el cálculo se reduce a identificar en la tabla a 128 y 32 como potencias de 2 y <u>sumar</u> los exponentes. Finalmente identificar la potencia de 2 cuyo exponente es el resultado de la suma.

Esto es, la multiplicación se redujo a una suma, esquematicamente se muestra en la siguiente tabla

Exponente	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
Potencia	2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096 ..

En forma similar la división de 4096 entre 256 se realiza como sigue:

$$4096 \div 256 = 2^{12} \div 2^8 = 2^{12-8} = 2^4 = 16$$

así con ayuda de la tabla, la división se reduce a restar exponentes y encontrar la potencia de la diferencia en la tabla. Resumiendo tenemos

> El método permite, con ayuda de la tabla, reducir la multiplicación y la división a sumar y restar respectivamente; lo cual facilita los cálculos.

Más lo anterior funciono muy bien debido a que los números propuestos son potencias enteras del 2 . ¿Como se puede utilizar el método para realizar los cálculos entre cualquier par de números?.

Una primera forma puede consistir en tener la tabla apropiada segun el cálculo, esto es:

Si multiplicamos 81×27 requerimos una tabla de potencias de 3 o bien si dividimos $78125 \div 625$, se usaría una tabla de potencias de 5. Más esto nos lleva a tener una infinidad de tablas de potencias con lo cual en vez facilitar el cálculo, este se hace más complejo.

Otra alternativa, que se sigue en la utilización de los logaritmos es tener una base fija, por ejemplo el 2 , y elaborar una tabla* que exprese cualquier número real x como una potencia del número 2.

Así al considerar cualquier par de números reales x_1 y x_2 , se requiere hacerles corresponder dos números reales y_1 y y_2 respectivamente, de tal manera que $x_1 = 2^{y_1}$ y $x_2 = 2^{y_2}$, así al multiplicar o dividir ayudandose con <u>la tabla de exponentes y potencias</u> se consigue simplificar el cálculo puesto que solo se suma o resta los exponentes segun sea el caso.

Precisemos lo anterior extendiendo el concepto a una situación más general, esto es, para cualquier base a positiva y distinta de uno

> DEFINICION: Sean $a > 0$ con $a \neq 1$ y x números reales, el número real y tal que
> $$a^y = x$$
> se le llama el logaritmo de x en la base a y se denota como
> $$y = \log_a x$$

*Esta se logra con la interpolación, que se logra con la extención del concepto de potencia de un número en el caso en que el exponente sea cualquier número real. Finalmente será la teoría de series infinitas la que permite darle precisión que se deseé. De manera que hoy en día su implementación en las máquinas calculadoras, ha producido gran facilidad y exactitud al cálculo aritmético.

Dicho en otras palabras

$$y = \log_a x \text{ si y solo si } a^y = x$$

De esta manera se puede decir que

$5 = \log_2 32$ puesto que $2^5 = 32$ y

$7 = \log_5 78125$ puesto que $5^7 = 78125$

Se tienen dos bases con las que generalmente se realizan los cálculos aritméticos, estas se eligen segun las necesidades. Una es la llamada base 10 cuya utilidad esta asociada a la escritura decimal que usualmente utilizamos. De esta manera si tenemos que .... $\log_{10} x = 3.457$ inmediatamente nos percatamos que $1000 < x <$ .. $10\,000$.

Cuando se trabaja con esta base, para simplificar la escritura, el logaritmo de base 10 se representa como

$$\log x.$$

La otra base que se utiliza esta asociada al comportamiento de fenómenos de la naturaleza y es el número irracional e el cual mencionamos ya en el parágrafo anterior.

Cuando nos referimos al logaritmo de base e usualmente se dice logaritmo natural y se denota por

$$\ln x$$

Propiedades de los logaritmos .

Quedando definido el concepto de logaritmo, asi como lo que significa la tabla de logaritmos, formalizaremos el porque es válido el cálculo a traves de este, lo cual se basa en las siguientes propiedades:

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Sean x_1 y x_2 reales positivos, entonces:

i) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

ii) $\log_a (\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

iii) $\log_a (x_1^c) = c \log_a x_1$

Demostración

a) Sea $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, lo cual significa que

$$a^{y_1} = x_1 \quad y \quad a^{y_2} = x_2$$

por lo cual $a^{y_1} a^{y_2} = x_1 x_2$

y por las leyes de los exponentes

$$a^{y_1 + y_2} = x_1 x_2$$

luego usando la definición de logaritmo tenemos que

$$y_1 + y_2 = \log_a (x_1 x_2)$$

y sustituyendo lo que significa y_1 y y_2 del primer paso en las anteriores igualdades tenemos finalmente que

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a x_1 x_2$$

b) Partimos que $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$

por lo cual $a^{y_1} = x_1$ y $a^{y_2} = x_2$

luego, al dividir

$$\frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = \frac{x_1}{x_2}$$

y en base a las leyes de los exponentes tenemos que

$$a^{y_1 - y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

por lo cual

$$y_1 - y_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

quedando finalmente que

$$\log_a x - \log_a x = \log_a \left(\frac{x}{x}\right)$$

c) Dado que si $\log_a x_1 = y_1$ tenemos que

$$a^{y_1} = x_1 \quad \text{luego}$$

$$(a^{y_1})^c = x_1^{\ c}$$

usando las leyes de los exponentes

$$a^{cy_1} = x_1^{\ c}$$

por lo cual $cy_1 = \log_a (x_1^{\ c})$

y finalmente

$$c\log_a x_1 = \log_a (x_1^{\ c}) \ .$$

Otras propiedades de los logaritmos que son fáciles de deducir son las siguientes:

Sea $a > 0$, $a \neq 1$ un número real entonces:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$x = \log_a a^x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

A veces es necesario cambiar la base de los logaritmos, de tal manera que si se a obtenido $\log_a x$, a partir de este obtener $\log_b x$ con $a \neq b$. Por ejemplo cuando se desea obtener por medio de las tablas de logaritmos o por una calculadora, logaritmos de base distinta a las que estas tienen que son logaritmos de base 10 o

o de base e. Para tal efecto deduciremos una fórmula que establece esta relación.

Sean a y b bases de logaritmos con $a \neq b$ luego

$$y = \log_b x \ \text{ si y solo si } \ b^y = x$$

luego tomando el logaritmo en base a á ambos lados en la segunda igualdad de la equivalencia se tiene

$$\log_a b^y = \log_a x$$

aplicando las leyes de los logaritmos (iii) tenemos

$$y\log_a b = \log_a x$$

despejando y

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

y utilizando la equivalencia inicial obtenemos

FORMULAS DEL CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

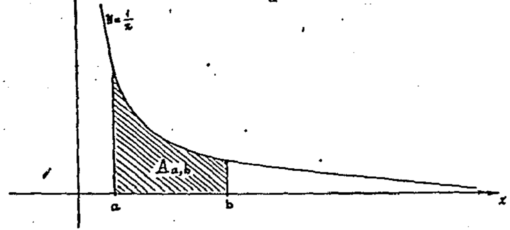
en particular

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

La función logaritmo.

En la segunda mitad del siglo XVII se encuentra una relación entre la función logaritmo natural y la hipérbola equilatera $y = \frac{1}{x}$ donde se establece que el área $A\,a,b$ -acotada por un segmento de de la hipérbola, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$- es proporcional al logaritmo natural de la razón de las ordenadas de los extremos del segmento, es decir

$$A_{a,b} = \operatorname{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{Ln} b - \operatorname{Ln} a$$



El desarrollo de esta relación -áreas y logaritmos- jugó un rol importante en la introducción de series infinitas como técnicas en la construcción de algoritmos que contribuyeron al desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

La definición de la función logaritmo no sera en la orientación mencionada, sino que se formulara a partir del concepto de logaritmo tratado anteriormente. Así tenemos:

DEFINICION: Sea $a > 0$, $a \neq 1$; la función

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \log_a x$$

se llama función logaritmo de base a.

Como para cada $a > 0$, $a \neq 1$ se tiene una función logaritmo, se construye una familia de funciones logaritmo, estableciendose las siguientes propiedades.

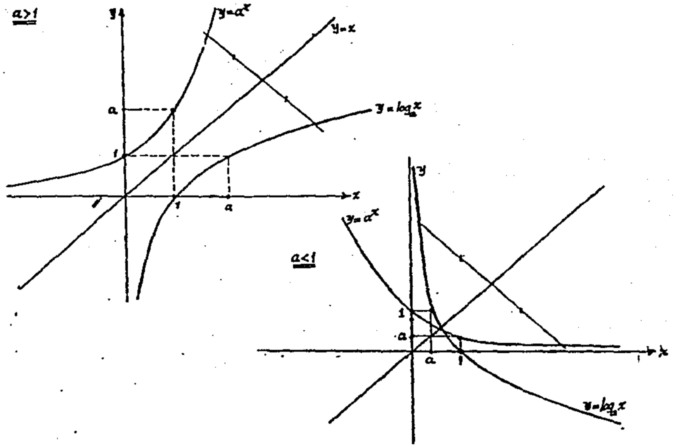
1. $f(1) = \log_a (1) = 0$ para cualquier base a.
2. $f(a) = \log_a (a) = 1$ para cualquier base a.
3. Si $a > 1$ f es creciente; ademas cuando x se aproxima a 0, $f(x) \longrightarrow -\infty$, es decir una asíntota vertical es el eje x.
4. Si $0 < a < 1$ f es decreciente; ademas cuando x se aproxima a 0 $f(x) \longrightarrow \infty$, es decir una asíntota vertical es el eje x.
5. Si consideramos dos funciones logaritmo con diferente base
$$f(x) = \log_a x \quad y \quad g(x) = \log_b x$$
se tiene que;
   i) Si $a < b < 1$
   Cuando $x < 1$, $\log_a x > \log_b x$ es decir $f(x) > g(x)$.
   Cuando $x > 1$, $\log_a x < \log_b x$ es decir $f(x) < g(x)$.
   ii) Si $1 < a < b$
   Cuando $x < 1$, $\log_a x < \log_b x$ es decir $f(x) < g(x)$.
   Cuando $x > 1$, $\log_a x > \log_b x$ es decir $f(x) > g(x)$.

En cuanto a la gráfica de la función logaritmo, dado que se cumple la equivalencia

$$y = \log_a x \quad \text{si y solo si} \quad x = a^y$$

esta se puede obtener a partir de la función exponencial intercambiando los pares ordenados que definen a esta última función.

Dicho geométricamente, si a partir de la función exponencial trazamos una curva que sea simétrica respecto a la recta $y = x$ obtenemos la gráfica de la función logaritmo.



Como ejercicio a partir de las fuciones exponenciales cuya regla de correspondencia son

$y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = (\frac{5}{2})^x$; $y = 5^x$; $y = (\frac{8}{3})^x$

$y = (\frac{1}{4})^x$; $y = (\frac{1}{2})^x$; $y = (\frac{3}{4})^x$; $y = (\frac{1}{2})^x$; $y = (\frac{7}{8})^x$

obtenga su correspondiente función logaritmo y verifique las propiedades que se dieron de la familia de funciones logaritmo (grafíquelas).

§10 Composición de funciones.

En las anteriores secciones hemos presentado una amplia variedad de funciones. En ésta sección y en las dos siguientes, daremos otros procedimientos para construir funciones tomando como base las ya estudiadas.

Consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = x^2 \qquad y \qquad g(x) = 2^x$$

en este caso $f(3) = 9$ y $g(3) = 8$, ahora bien, ¿tienen sentido las expresiones $f(g(3))$, $g(f(3))$ y $f(g(f(1)))$?.

La respuesta es afirmativa, veamos porque:

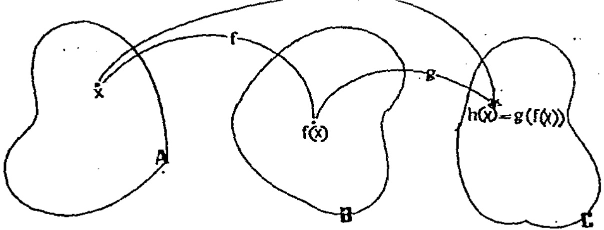
$$f(g(3)) = f(8) = 64$$
$$g(f(3)) = g(9) = 512$$
$$f(g(f(1))) = f(g(1)) = f(2) = 4$$

Como podemos observar, tenemos un procedimiento que nos permite relacionar la regla de correspondencia de varias funciones, el cual es distinto a los ya estudiados (como son las operaciones suma, resta, multiplicación y división); dicho procedimiento analizaremos en esta parte, el cual se llama la Composición de Funciones.

Considere las funciones

$$f: A \longrightarrow B \qquad\qquad g: B \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto f(x) \quad y \quad x \longmapsto g(x)$$

luego, el procedimiento anterior, sugiere que se puede construir una función h definida de A en C, con la propiedad de que cada x elemento de A tenga como imagen, a la imagen de $f(x)$ al aplicarle g, esto es, $h(x) = g(f(x))$. Esto lo representamos en el siguiente diagrama.



Así, al proponerse dos funciones, se obtiene una tercer función, llamada su composición, la cual se simbolizará por un pequeño círculo $\circ$, por ejemplo h resulta de $g\circ f$. Resumiendo tenemos la siguiente

DEFINICION
Sean f , g funciones y

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom } f \ \text{ y } \ f(x) \in \text{Dom } g\}$$

entonces la función

$$g\circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (g\circ f)(x) = g(f(x))$$

se llama f compuesta con g .

Como se observara de la definición, para que x sea del dominio de $g\circ f$ se debe cumplir que x sea del dominio de f y $f(x)$ del dominio de g .

EJEMPLO 1

Sean f y g funciones reales con regla de correspondencia $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x^3 + 7x^2 - 2x$
encuentrese $(g\circ f)(x)$ y $(f\circ g)(x)$

SOLUCION:

Tenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 3(x^2)^3 + 7(x^2)^2 - 2(x^2)\\ &= 3x^6 + 7x^4 - 2x^2 .\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x^3 + 7x^2 - 2x)\\ &= (3x^3 + 7x^2 - 2x)^2\\ &= 9x^6 + 42x^5 + 37x^4 - 28x^3 + 4x^2\end{aligned}$$

El ejemplo nos permite asegurar que $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ no son siempre iguales, es decir $f\circ g \neq g\circ f$, esto es, debemos poner atención en el orden de obtención de la composición.

EJEMPLO 2

Sean f y g definidas por

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x+2}$$

encuentre $g\circ f$.

SOLUCION

Primero obtengamos la regla de correspondencia

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\\ &= \sqrt{\frac{x-1}{x-2} + 2}\\ &= \sqrt{\frac{3x-5}{x-2}}\end{aligned}$$

Encontremos ahora el dominio de la composición, así pues, para que $x \in \text{Dom } g\circ f$ ha de ser $x \neq 2$ y ademas $\frac{3x-5}{x-2} > 0$. Resolviendo la desigualdad, se obtiene que la condición equivalente es : $x > 2$ ó $x < \frac{5}{3}$.

El dominio es finalmente:

$$\begin{aligned}\text{Dom } g\circ f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \ \text{ o } \ x < \tfrac{5}{3}\}\\ &= \mathbb{R} - \left]\tfrac{5}{3}, 2\right]\end{aligned}$$

En resumen:

$$g\circ f : \mathbb{R} - \left]\tfrac{5}{3}, 2\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (g\circ f)(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{x-2}}$$

§11. Función inversa

Un segundo procedimiento para construir funciones, es obtener la función inversa de una función dada, la cual exige condiciones especiales para su obtención. Las plantearemos en el siguiente caso particular.

Considere la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto f(x) = x + 1$

dicha función define el siguiente conjunto de pares ordenados:

$$f = \{\ldots,(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\}$$

al invertir todos los pares ordenados de f se obtiene la relación g:

$$g = \{\ldots,(0,-1),(2,1),(3,2),(4,3),(1,0),\ldots\}$$

en este caso, g es una función definida tambien de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

Note que $f(1) = 2$ y $g(2) = 1$ o bien $g(3) = 2$ y $f(2) = 3$; en forma general resulta que al obtener $f\circ g$ y $g\circ f$ definidas en $\mathbb{Z}$, se obtiene la función identidad, esto es:

$$(g\circ f)(x) = x \quad , \quad (f\circ g)(x) = x$$

Esto no sucede con cualquier función, es decir, no siempre al dar una función f, al invertir el orden de los pares de f, la relación que resulta es función. Por ejemplo, si

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto f(x) = x^2$

los pares que forman el conjunto f son

$$f = \{\ldots,(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\ldots\}$$

y la relación que resulta de invertir cada par de f es:

$$g = \{\ldots,(4,-2),(1,-1),(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\ldots\}$$

la cual no es función, ya que por ejemplo

$$\text{Im}\ \{9\} = \{3,-3\}\ .$$

Ahora bien, ¿Que es lo que permite que en el primer ejemplo la relación inversa sea función y en el segundo, no lo sea?. La respuesta es que en el primer ejemplo, cualquier par de elementos x_1 y x_2 que estan en el dominio de la función con $x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$; lo cual se puede comprobar como sigue;

Como $x_1 \neq x_2$ entonces $x_1+1 \neq x_2+1$, luego
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Mientras que en el segundo ejemplo no se cumple este hecho, esto es, hay elementos x_1 y x_2 en el dominio de la función tal que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Como es el caso de la relación g en donde como ya dijimos, la imagen del 9 es 3 y -3.

La anterior discusión nos lleva a sistematizar estos resultados como sigue:

DEFINICION

Una función f es inyectiva si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$.

DEFINICION

Para cualquier función real f , se define la relación inversa de f , y se designa por f^{-1} , al conjunto de pares (y,x) para los cuales (x,y) pertenece a f .

El símbolo -1 que empleamos no debe confundirse con un exponente, es decir, f^{-1} no equivale a $\frac{1}{f}$

DEFINICION

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función
$x \longmapsto f(x)$

con Y el rango de f; si la relación

$f^{-1}: Y \longrightarrow X$ es una función
$y \longmapsto f^{-1}(y)$

se dice que f^{-1} es la función inversa de f.

TEOREMA

f^{-1} es una función si y solo si f es inyectiva.

DEMOSTRACION

Supongamos que f es inyectiva y que (a,b) y (a,c) pertenecen a f^{-1}, en este caso, para que f^{-1} sea función, debemos comprobar que $b = c$.

En efecto, sea $a = f(b)$ y $a = f(c)$, pero si f es inyectiva entonces se cumple que si $f(b) = f(c)$ entonces $b = c$. Lo que se quería demostrar.

Recíprocamente, supongamos que f^{-1} es una función, debemos probar que f es inyectiva, esto es que si $f(b) = f(c)$ entonces $b = c$.

En efecto, f contiene a los pares $(b,f(b))$ y $(c,f(c))$, pero $(c,f(c)) = (c,f(b))$ de modo que $(f(b),b)$ y $(f(b),c)$ pertenecen a f^{-1} y como f^{-1} es función, entonces $b = c$; así pues, f es inyectiva.

TEOREMA

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función creciente o decreciente,
$x \longmapsto f(x)$

entonces f es uno a uno.

La demostración es una interpretación directa del significado de los conceptos que involucra, por lo cual se deja como ejercicio.

Por otra parte, al componer f con f^{-1} se cumple lo siguiente.

LEMA

Si f es inyectiva con dominio X y rango Y, entonces

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ con $\text{Dom } f^{-1} \circ f = X$

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ con $\text{Dom } f \circ f^{-1} = Y$.

La prueba es sencilla y se deja como ejercicio.

Cuando tenemos una función real inyectiva definida del conjunto A al conjunto B por medio de una regla de correspondencia $y = f(x)$, un método algebraico que permite construir la regla de correspondencia de f^{-1} definida de B en A expresada como $x = f^{-1}(y)$ resulta de despejar x en la regla de correspondencia dada por la ecuación $y = f(x)$. Lo cual se expresa como:

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{si y solo si} \quad y = f(x)$$

EJEMPLO 1

Al considerar la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = 3x - 2$

por ser f creciente, f es inyectiva y por tanto f^{-1} es una función. Obtengamos f^{-1}.

Sea $y = 3x - 2$, al despejar x tenemos

$x = \frac{y + 2}{3}$ por lo cual

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{3}$ o bien

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$

EJEMPLO 2

Sea $f: [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2 - 3$

Observe que al restringir el dominio de la función de $\mathbb{R}$ a $[0,\infty[$ tenemos una función creciente y por lo tanto inyectiva. Al considerar la ecuación $y = x^2 - 3$ despejando x obtenemos $x = \pm\sqrt{y+3}$, como x es positivo, descartamos $x = -\sqrt{y+3}$ y escribimos la regla de correspondencia de f^{-1} como $f^{-1}(y) = \sqrt{y+3}$ o equivalentemente $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$.
Así tenemos que f^{-1} se define como sigue:

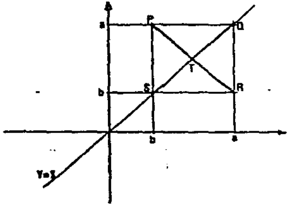
$$f^{-1}: [-3,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

GRAFICA DE f^{-1}

Considere en el plano cartesiano a los puntos $P(a,b)$ y $R(b,a)$ pertenecientes a las gráficas de f y f^{-1} respectivamente y $a \neq b$.

Tracemos la recta cuya ecuación es $y = x$ (la gráfica de la función identidad); localicemos en esta recta los puntos $Q(a,a)$ y $S(b,b)$. Es inmediato comprobar que $PQ = QR = RS = SP = |b-a|$ y que $RP = SQ = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2}$

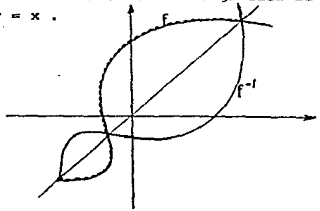
$$= \sqrt{2}\,|b-a|.$$



Luego PQRS es un cuadrado.
Por lo tanto, sus diagonales se cortan en ángulo recto y a la mitad, es decir, $RT = TP$; lo cual significa que R es el simétrico de P respecto a la recta $y = x$.

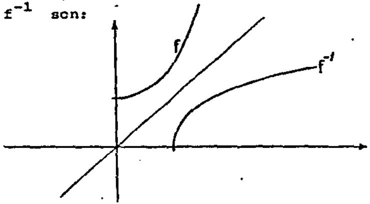
En el caso en que $a = b$ se tiene que $(a,b) = (b,a)$, esto es, $P = R$ y estan sobre la recta $y = x$, y pertenecen tanto a f como a f^{-1}; por lo cual P es simétrico con R respecto a la recta $y = x$. En forma general se tiene que

> La gráfica de f^{-1} es la curva simétrica de la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.



EJEMPLO 3

Sea $f: [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^2 + 2$
Por ser f inyectiva, f^{-1} es función definida como
$f^{-1}:]2,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$. Las gráficas de f y f^{-1} son:



EJEMPLO 4

La función identidad presenta la propiedad de ser ella misma su inversa.

EJEMPLO 5

Este procedimiento de trazar la gráfica de la función inversa a partir de su correspondiente función, fue itilizado anteriormente al trazar la gráfica de la función logaritmo a partir de la función exponencial. Con la notación de la inversa tenemos:

$$\text{Si} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a^x \qquad \text{para} \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1$$

$$\text{entonces} \quad f^{-1}: \left]0,\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f^{-1}(x) = \log_a x$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS .

Por ser cada función trigonométrica periódica, ninguna es inyectiva y su correspondiente relación inversa no es función. Sin embargo, al restringir el dominio de cada función de manera apropiada, se pueden obtener funciones inversas, claro esta, en los dominios restringidos.

Considere la función seno, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y rango $[-1,1]$, por tener un periodo de tamaño 2π , se tiene que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$, pero si definimos la función

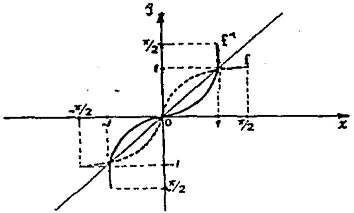
$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \operatorname{sen} x$$

resulta que la función es inyectiva, con rango $[-1,1]$ y que su correpondiente función inversa es:

$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$$

Comunmente a las funciones inversas de las funciones trigonométricas se denominan función arco; en este caso, la inversa del seno se denomina la función arco seno y se denota por arcsen

cuya gráfica es:



Similarmente para las demas funciones trigonométricas se tiene que

$$\text{Si } f: \left]0,\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x) = \cos x \quad \text{entonces} \quad f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f^{-1}(x) = \arccos x$$

$$\text{Si } f: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{entonces} \quad f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\text{Si } f: \left]0,\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x) = \operatorname{ctg} x \quad \text{entonces} \quad f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$$

$$\text{Si } f: [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x) = \sec x \quad \text{entonces}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$$

$$\text{Si } f: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[- \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x) = \csc x \quad \text{entonces}$$

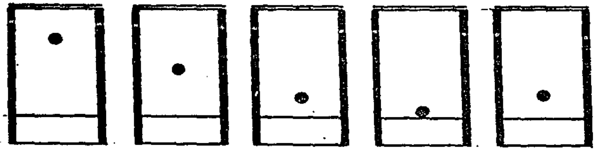
$$f^{-1}: \mathbb{R} - \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arccsc} x$$

Las gráficas de las correspondientes funciones se obtienen facilmente con el método propuesto, dejandose como ejercicio al lector.

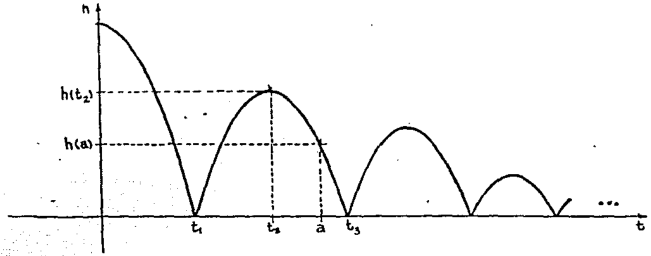
§12. Función a pedazos

Al considerar una pelota que rebota en el suelo e intentar representar el hecho en un dibujo, o bien, dibujamos a la pelota en un momento de su caída, o bien en el mismo dibujo representamos varias posiciones de la pelota en distintos tiempos a la vez, indicando que sube y baja.

Pero si para observar el proceso contamos con una camara fotográfica o de cine, podemos representar el fenómeno con varias fotografías, lo que permite describir mejor el fenómeno.



Usando instrumentos de precisión adecuados para medir tanto la distancia como el tiempo, a la vez que aumentamos el grado de abstracción al analizar el fenómeno, podemos considerar la pelota como un punto, el de su centro de gravedad y solo estudiando los cambios de posición con el tiempo, podemos representar el fenómeno en una gráfica:

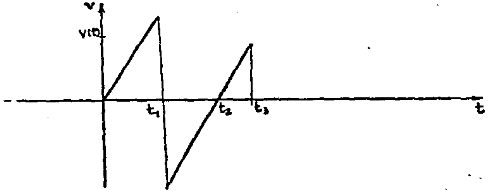


en la cual, cada punto P de la gráfica representa la posición de la pelota en un tiempo a, á una distancia h(a) del suelo.

Al continuar analizando el fenómeno, se observa que la pelota, al caer, conforme se aproxima al suelo, aumenta su velocidad; mientras que cuando asciende, ésta disminuye. Para el Físico, representar tal hecho, requiere de los instrumentos con que se mide cuantitativamente el fenómeno y tambien elaborar conceptos apropiados que describan la velocidad que desarrolla durante el tiempo en que estuvo rebotando.

Para esto, se considera que la velocidad tiene una dirección; conviniendo que cuando la pelota cae, su velocidad es positiva, mientras que cuando asciende sea negativa.

Tenemos por tanto, que si la pelota, por segunda vez toca el suelo en el tiempo t_3 la gráfica del cambio en la velocidad respecto al tiempo es:



Esta gráfica la podemos considerar como la de una función, para precisarla, requerimos definir tanto su dominio de definición, como su regla de correspondencia.

En cuanto al dominio, podemos proponer el intervalo cerrado $[0,t_3]$.

En cuanto a la regla de correspondencia $v(t)$, en un principio parece que no hemos estudiado tal tipo de funciones; más si descomponemos el intervalo $[0,t_3]$, en dos intervalos, $[0,t_1] \cup \,]t_1,t_3]$ vemos que en cada intervalo aparece la gráfica de un segmento de recta, por lo cual su regla de correspondencia podemos describirla como:

Si $0 \leq t \leq t_1$, $v(t) = k_1 t$ y
si $t_1 < t \leq t_3$, $v(t) = k_2 t - c$

donde k_1 , k_2 y c son constantes.

De este modo, la velocidad que tiene la pelota en todo momento, desde que se suelta de una altura h , hasta que toca el suelo por segunda vez, se puede definir como la función cuya gráfica es la anterior y es expresada como sigue:

$$v: [0,t_3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto v(t) = \begin{cases} k_1 t & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ k_2 t - c & \text{si } t_1 < t \leq t_3 \end{cases}$$

En general, tenemos que un procedimiento más para construir funciones, consiste en:

Dado un conjunto A , descomponerlo en n subconjuntos B_1, B_2, ... B_n , tales que no tengan elementos en común y su unión sea A , y luego para cada subconjunto proponer la respectiva regla de correspondencia, esto es:

Para $A \subset \mathbb{R}$ con $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = A$ y $B_i \cap B_j = \phi$ si $i \neq j$.

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in B_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in B_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_n(x) & \text{si } x \quad B_n \end{cases}$$

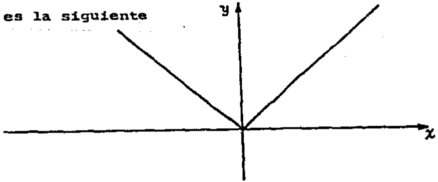
A la función f definida de esta forma, se le denomina función a pedazos.

EJEMPLO 1

El valor absoluto permite construir la función valor absoluto como sigue:

$$|x|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica es la siguiente

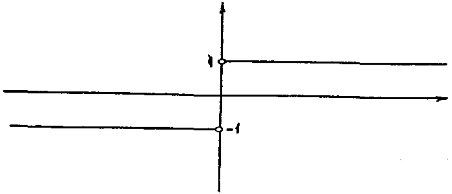


EJEMPLO 2

La denominada función Signo, se define como sigue

$$\mathrm{Sgn}: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es



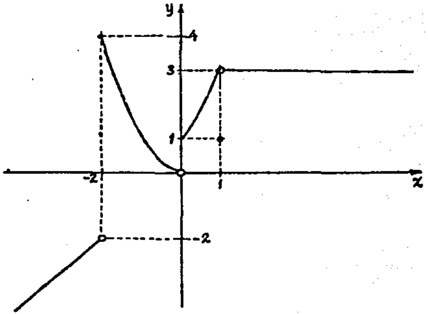
EJEMPLO 3

Sea f una función dada como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 3^x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es




1707 L. EULER 1783


1789 A.CAUCHY 1857

3
LIMITES


1815 1897
C. WEIERSTRASS

LA DIALECTICA MATERIALISTA DE MARX Y ENGELS COMPRENDE CIERTAMENTE EL RELATIVISMO, PERO NO SE REDUCE A EL, ES DECIR, RECONOCE LA RELATIVIDAD DE TODOS NUESTROS CONOCIMIENTOS, NO EN EL SENTIDO DE LA NEGACION DE LA VERDAD OBJETIVA, SINO EN EL SENTIDO DEL CONDICIONAMIENTO HISTORICO DE LOS LIMITES DE LA APROXIMACION DE NUESTROS CONOCIMIENTOS A ESTA VERDAD.

MATERIALISMO Y EMPIRIOCRITICISMO.

V.I.Lenin.

§1. Introducción

El periodo de la Matemática donde nace y se desarrolla el análisis comienza en el Siglo XVII. Basándose en los materiales suministrados por la entonces nueva Ciencia Mecánica y tambien en problemas de geometría y álgebra; puesto que en 1637 surge la "Geometría" de Descartes, estableciendo las bases de la Geometría Analítica.*

El siguiente paso en la dirección de la matemática de las magnitudes variables, es dado por Newton y Leibniz al sentar las bases del Cálculo Diferencial e Integral. Este fue el verdadero comienzo del Análisis.

El cálculo diferencial es, básicamente, un método para encontrar la velocidad instantanea de un objeto dado siendo este equivalente al problema de dibujar una tangente a la curva que representa la distancia respecto al tiempo, es decir un modelo del movimiento.

El cálculo integral es un método de encontrar el resultado total de la acción de una magnitud variable.

Conforme se va dejando a un lado la formulación mecánica de los problemas en que se analizaron los anteriores conceptos y operando con funciones en vez de dependencias de distancias o velocidades respecto al tiempo, se llega a la formulación de problemas en forma abstracta, es decir, se llega a los problemas del cálculo diferencial e integral.

Será fundamental para el Cálculo, como para todo el desarrollo posterior del Análisis, el concepto de LIMITE, el cual se formula posteriormente al de los conceptos variable y función.

* Las secciones cónicas: elipse, hipérbola y parábola, teoría desarrollada desde los griegos,Unida a la forma algebraica desarrollada despues de la época griega, y con la idea de magnitud variable, que surgio del estudio del movimiento son el origen de la Geometría Analítica.

Así, en los primeros dias del Análisis, el papel que más tarde desempeñaria el límite, corrió a cargo del concepto algo nebuloso que es el infinitésimo; el cálculo de Newton y Leibniz, así como el de sus contemporaneos, fue un cálculo que en muchos de sus trabajos esta basado sobre conceptos geométricos intuitivos.

Seran Euler, Lagrange y Cauchy quienes sustituyan elementos aritméticos por intuiciones geométricas. Esta aritmetización le dara mayor rigor y precisión al Cálculo; no obstante, aún en el último tercio del siglo pasado, de los propios números reales, se tiene solo una idea intuitiva de ellos. De tal suerte que la ausencia de una completa comprensión del sistema de los números reales impide una fundamentación sólida del Cálculo.

De esta manera será a fines del siglo pasado en que se formulen construcciones de R que muestren la necesidad del Axioma de Completez para los números reales, propiedad que en sus varias formas, juega un rol crucial en el Cálculo Infinitesimal, valorando su importancia al estudiar las propiedades de los límites.

§2. ¿ Por qué estudiar el límite ?

Presentaremos algunas ideas informales sobre el por qué es necesario el concepto de límite. Esto lo haremos siguiendo dos orientaciones: la primera mostrara como a partir de abstraer propiedades de cuerpos físicos, se llega necesariamente a hablar del límite; para esto presentaremos la "derivada" y la "integral"; la segunda orientación consistira el presentar la necesidad del concepto de límite a partir de conceptos matemáticos, estos seran "la completez" de los números reales y la "continuidad" de una función.

Posteriormente pasaremos a definir y darle un trato riguroso a dicho concepto, así como las propiedades de ciertas funciones - que llevan a la continuidad de funciones.

a). La derivada

Presentaremos este concepto en términos de la velocidad de un objeto*. Entenderemos la velocidad de un cuerpo como la rapidez - con que cambia de posición al transcurrir el tiempo. Considerando que una particula se desplaza de un punto A a otro punto B en un intervalo de tiempo t , se define la velocidad media de dicha - particula como la razón del desplazamiento sobre el tiempo que tarda en efectuarse, esto es,

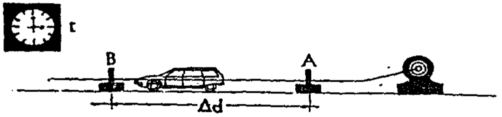
$$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_f - di}{tf - ti}$$

donde:

$\bar{v}$: es la velocidad media

Δd: es el desplazamiento del punto A al punto B **

Δt: es el intervalo de tiempo en que se realizó el desplazamiento.



* Fué en términos de la velocidad como Newton explica la Derivada de una función.
** Debe considerarse para este caso que el desplazamiento es en una sola dimensión.

Lo que se obtiene con la velocidad media es un promedio, partiendo del supuesto de que la partícula, además de desplazarse unidimensionalmente, su velocidad es constante en todo su recorrido. Esta situación ideal no nos explica un sinnúmero de particularidades del movimiento, como por ejemplo: el lanzamiento de un proyectil, el movimiento de los planetas, etc.

En escencia, la velocidad media, partiendo de las lecturas iniciales y finales de tiempo y distancia, no indica la velocidad que la partícula presenta en cualquier momento de su recorrido.

Pero es partiendo del concepto de velocidad media como se resuelve el problema planteado, esto es: determinar la velocidad de la partícula en cualquier momento, a la que se llama VELOCIDAD INSTANTANEA.

Veamoslo en el siguiente ejemplo:

Un cuerpo que parte del reposo ($v_i = 0$) se desplaza durante los primeros 5 segundos 250 metros. Al realizarse mediciones de tiempo y distancia en este mismo periodo, se determina que la distancia cambia en función del tiempo bajo la siguiente regla de correspondencia:

$$d(t) = 2t^3$$

¿Que velocidad tiene el cuerpo cuando han transcurrido los primeros 2 segundos?.

Si usamos el concepto de velocidad media para describir la velocidad instantanea, el intervalo de tiempo inicial y final coinciden, así como la distancia recorrida sera nula; por lo cual la expresión con que se calcula la velocidad media no tiene sentido:

$$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

La salida a este contrasentido es definir la velocidad instantanea a partir de la velocidad promedio mediante aproximaciones.

Esto es, si deseamos obtener la velocidad instantanea en $t = 2$, obtengamos aproximaciones cada vez más exactas a dicha velocidad instantanea; tomando mediciones en intervalos de tiempo más cortos, por ejemplo: $[2,2.2]$, $[2,2.15]$, $[2,2.1]$, etc., así en cada caso obtendremos distancias asociadas para cada intervalo de la forma $[2,2+h]$ con $h > 0$, con su respectiva velocidad promedio; lo cual podemos ilustrar en la siguiente tabla

Intervalo	$d(2+h)$	$\Delta d = d(2+h) - d(2)$	$\Delta t = h$	$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$
2,2.2	21.296	5.296	0.2	26.48
2,2.15	19.87675	3.87675	0.15	25.845
2,2.1	18.522	2.522	0.1	25.22
2,2.08	17.997824	1.997824	0.08	24.9728
2,2.06	17.483632	1.483632	0.06	24.7272
2,2.04	16.979328	0.979328	0.04	24.4832
2,2.02	16.484816	0.444816	0.02	24.2408
2,2.01	16.241202	0.241202	0.01	24.1202
2,2.001	16.024012	0.024012	0.001	24.012
2,2.0001	16.0036	0.0036	0.0001	24.0013

Observemos que con aproximaciones más finas, en intervalos de tiempo más cortos proximos a $t = 2$ y calculando sus respectivas distancias, podemos formular lo que sera la velocidad instantanea en el tiempo $t = 2$*. Para fines prácticos tenemos que la velocidad instantanea, como resultado de aproximaciones sucesivas, para $t = 2$ es 24.

*En palabras de Newton: su fluxión.

Pero de la expresión de estas ideas en forma verbal e intuitivamente a expresarlas con rigor y simbólicamente, existen grandes dificultades. Fue la formulación matemática que propone Fermat la que finalmente se adoptó* y que pasaremos a ilustrar resolviendo el problema anterior desde otro punto de vista, este en forma más abstracta; el problema es:

¿Que velocidad tiene el cuerpo cuando han transcurrido los primeros 2 segundos, si su movimiento se describe por la expresión:

$$d = 2t^3 \text{ ?}$$

Cuando $t = 2$ de la expresión obtenemos que $d = 16$. Ahora bien, si h es cualquier incremento de tiempo, en el tiempo $2 + h$ el cuerpo se movera una distancia igual a 16 más un incremento k, esto es

$$\begin{aligned} 16 + k &= 2(2+h)^3 \\ &= 16 + 24h + 12h^2 + 2h^3 \end{aligned}$$

simplificando tenemos que

$$k = 24h + 12h^2 + 2h^3$$

así la velocidad promedio en h segundos es

$$\frac{k}{h} = \frac{24h + 12h^2 + 2h^3}{h}$$

en este caso Fermat considera que el numerador y denominador del lado derecho de la expresión se divide por h quedando

$$\frac{k}{h} = 24 + 12h + 2h^2$$

y señala que si h es cero se obtiene la velocidad en $t = 2$, esto es

$$\dot{d} = 24 \text{ **}$$

*Mathematics: The loss of Certainty
**La notación es de Newton.

Como se puede observar, en la solución del problema se requiere de afirmaciones del tipo "cada vez más cercano"; ademas se presenta la dificultad de considerar en un momento a h diferente de cero (al simplificar) y posteriormente señalar que si h es cero se obtiene la velocidad instantanea.

Estas imprecisiones del uso del simbolismo que planteamos, incluso de razonamientos aparentemente contradictorios (como es el caso de h) y que son las partes escenciales de estos cálculos, solo tendran solución al precisar el concepto de límite.

b) La integral

En el estudio de la dinámica de las partículas, es de grán importancia analizar el movimiento de éstas cuando actuan diversas fuerzas. Al presentarse fuerzas constantes, el problema es relativamente sencillo, éste es más complejo cuando se consideran que actuan fuerzas no constantes, variando con la posición. Para la solución de estos problemas, desde el punto de vista matemático, se requiere el concepto de LIMITE, manifestandose esta vez en lo que se conoce como la INTEGRAL.

Daremos una presentación no muy elaborada, sobre la forma en que sé aborda la solución de este problema partiendo del concepto físico de Trabajo.*

Cuando se considera una partícula que recibe la acción de una fuerza constante F y el movimiento se efectua en línea recta, en la dirección de la fuerza, se define el Trabajo hecho por la fuerza sobre la partícula como el producto de la magnitud de la fuerza por la distancia que se mueve la partícula.**

*Este concepto, como recordaras, se estudia en los cursos de Física.
**Recuerdese que el Trabajo es un escalar y sus unidades en el sistema MKS es el Joule.

Si consideramos:

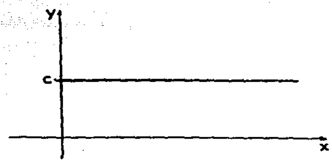
F: La fuerza
d: La distancia
W: El trabajo

Se tiene que

$$W = F \cdot d$$

Si aplicamos la relación de la distancia con la fuerza constante, obtenemos la gráfica

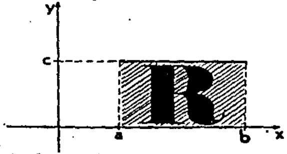
x: distancia
$F(x) = c$



De manera que si una partícula, como resultado de la fuerza constante c, cambia de la posición a á la posición b , esto es, recorre la distancia b − a , entonces el trabajo realizado:

$$W = c(b - a)$$

equivale al área del rectángulo R cuya base es b − a y altura c.

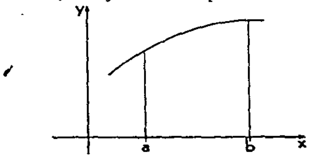


En este caso simple, podemos interpretar el trabajo como el área de un rectángulo.

A partir de ésta situación simple, abordemos el caso más complejo: Consideremos el trabajo hecho por una fuerza que varia su magnitud. Esto es, consideremos que la fuerza varia según el lugar que va ocupando el objeto; es decir, para cada desplazamiento x le corresponde una fuerza, dependiendo de esta x:

$$y = F(x)$$

Así, al graficar la relación entre el desplazamiento y la fuerza aplicada, la gráfica no puede ser una línea horizontal:

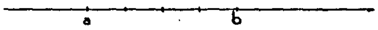


Por lo cual, el concepto de Trabajo para una fuerza variable necesita de precisión, tanto como su interpretación geométrica.

De nueva cuenta, será por medio de aproximaciones sucesivas como estableceremos el concepto de trabajo para una fuerza que varía conforme cambia el desplazamiento.

Pasemos a su explicación:

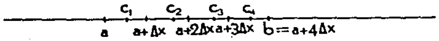
Consideremos el intervalo $[a,b]$ dividido en cuatro partes iguales:



En cada uno de estos intervalos, se supone que la fuerza en él, es "casi" constante y que el trabajo que se realiza resulta de la suma del trabajo realizado en cada uno de los intervalos que se formaron.

Precisemos lo anterior ayudandonos del simbolismo matemático; para lo cual llamemos Δx al tamaño de la división, así como

c_1, c_2, c_3, c_4 puntos de cada uno de los intervalos (en particular se puede elegir el extremo izquierdo del intervalo).



Si consideramos que en cada intervalo F es constante, la podemos obtener en cualquier punto del intervalo, en particular los puntos que ya se nombraron. El trabajo realizado en cada uno de los intervalos lo podemos expresar como:

$$W_1 = F(c_1)\ \Delta x$$
$$W_2 = F(c_2)\ \Delta x$$
$$W_3 = F(c_3)\ \Delta x$$
$$W_4 = F(c_4)\ \Delta x$$

Así el trabajo aproximado en el intervalo $[a,b]$ sería:

$$W = F(c_1)\Delta x + F(c_2)\Delta x + F(c_3)\ \Delta x + F(c_4)\Delta x$$

ésta expresión se puede escribir en forma más compacta usando el símbolo Σ . Así, lo anterior lo expresamos como:

$$W = \sum_{i=1}^{4} F(c_i)\ \Delta x$$ con c_i es algun punto del intervalo de la división.

Para mejorar la precisión del valor del trabajo efectuado por la fuerza variable en el intervalo a,b , podemos dividir ésta en 8 partes, por ejemplo; así tendríamos que:

$$W = \sum_{i=1}^{8} F(c_i)\ \Delta x$$

Un valor cada vez más próximo al valor real del trabajo se tendrá al hacer divisiones del segmento a,b en un número mayor de intervalos de longitud cada vez más pequeña.

Así, si dividimos $[a,b]$ en 2^{10} intervalos iguales y calcu lamos

$$\sum_{i=1}^{2^{10}} F(c_i)\ \Delta x \qquad \text{con } c_i \text{ un punto de cada intervalo.}$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{2^{100}} F(c_i)\ \Delta x$$

y en forma más general

$$\sum_{i=1}^{n} F(c_i)\ \Delta x$$

con n cualquier número natural de la forma $n = 2^k$

Encontramos que la aproximación al valor del trabajo se puede obtener con la precisión que se desee, realizando divisiones tan pequeñas como se quiera. Además, al calcular ya no una aproximación, sino un valor real exacto, se presenta cuando la expresión que se calcula resulta al sumar un número infinito de términos, -cuando la SERIE es INFINITA-, a este valor del trabajo se le representa matemáticamente como

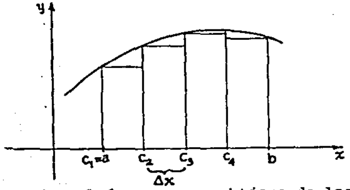
$$\int_a^b F(x)\ dx$$

y se obtiene evaluando el siguiente límite

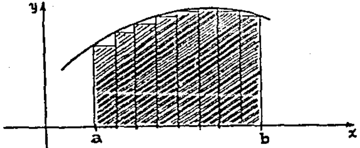
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\ \Delta x$$

Como se ve, aparece otra vez el límite, en este caso el límite de una variable (las sumas) cuando esta es cada vez más grande. Los cálculos y la precisión de estos conceptos se haran solo cuando se tiene el desarrollo conceptual de lo que sera propiamente el LIMITE.

Analizando este problema desde el punto de vista de su representación gráfica, tendriamos que si consideramos a c_i como los puntos iniciales de cada intervalo



el trabajo se aproxima al área que se obtiene de los 4 rectángulos formados. Si se hacen 8 divisiones del intervalo [a,b]

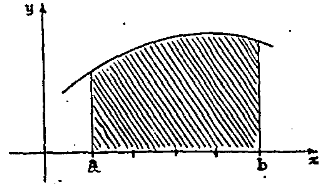


la expresión $\sum_{i=1}^{8} F(c_i)\ \Delta x$ sería el área de la región sombreada

En el proceso del límite descrito anteriormente, se tiene que la expresión

$$\int_a^b F(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(Ci)\Delta x$$

representa el área bajo la curva, que es la representación geométrica que se tiene de la integral.



Resumiendo:
El Trabajo, en particular, así como una gama de problemas en que su solución consiste en calcular el área de una curva irregular, en general, tienen solución cuando se precisa el concepto de Integral como un límite.

c) Continuidad

Cuando en el Capítulo II se grafican las funciones racionales, o bien las funciones trigonométricas, encontramos que en algunos casos, para lograr trazar la función se tiene que despegar el lápiz del papel y dibujar una parte y despues otra de la función en estudio.

Esta primera noción sensorial de lo que representa una función "continua" de aquella que no lo es; al iniciar el estudio de las funciones quizas se puedan resolver las diferencias de tratamiento, más la ampliación hacia nuevo tipo de funciones, así como el uso de la noción de funciones en una esfera más amplia de aplicaciones, va a exigir la precisión del concepto.

En un inicio seran las curvas de la cinemática las que sirvan de inspiración para el estudio del Cálculo, conforme se desarrolla éste último, se encuentra que se plantean estudios de funciones y curvas algebraicas en forma más general.

De la misma forma, el trabajo de Fourier "teoría Analítica del Calor" publicada en 1822, obligó a los matemáticos del siglo XIX a examinar y discutir los conceptos de función y continuidad vigentes en aquel tiempo, con fin de darles la precisión y rigor que requieren. Siendo el concepto de límite un auxiliar importante en la formulación de la continuidad de la función.

Con el fin de tener una idea sobre el concepto de continuidad

-que se discute ya a partir del Siglo XIX- la explicaremos prescindiendó del rigor.

Consideremos una función f y P un punto de su dominio. Se dice que f es continua en P si en todo punto x próximo de P, el valor f(x) es próximo a f(P).

Otro modo de decir esto es:

Si x se mueve hacia P, el correspondiente valor de la función f(x), debe llegar a ser tan próximo a f(P) como se desee cualquiera que sea la forma con que x tienda a P.

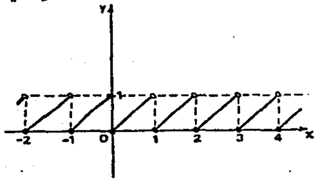
Si la función es continua en todos los puntos de su dominio, se dira simplemente que es continua.

Al considerar las gráficas de funciones continuas, en éstas no deben presentarse "saltos bruscos"; veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1: Sea $[x]$ la parte entera de x; luego definimos la función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = x - [x]$$

cuya gráfica es:

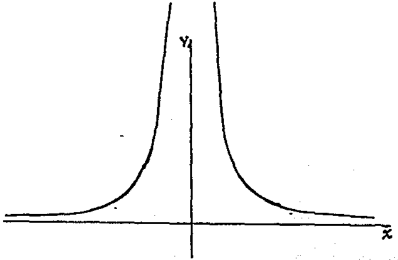


Nótese que en $x = 2$, $f(2)$ es 0. Pero si x se aproxima a 2 por la izquierda, tenemos que f(x) se aproxima a 1, el cual es un valor diferente a f(2) y entonces decimos que f no es continua en 2 o que f es discontinua en 2.

EJEMPLO 2: Consideremos la función

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$$

cuya gráfica es:



Es claro que la función en 0 no es continua, puesto que $f(0)$ no tiene sentido y por lo mismo no presenta continuidad en este punto.

EJEMPLO 3: Consideremos una función definida en términos de más de una expresión algebraica

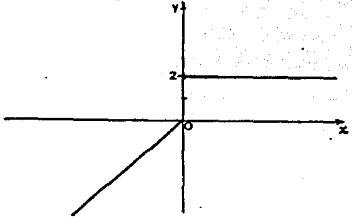
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

esto es:

Si $x < 0$ entonces $f(x) = x$

Si $x > 0$ entonces $f(x) = 2$.

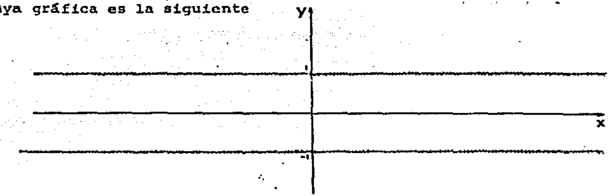
En este caso se tieneque $f(0) = 0$, mientras que si nos aproximamos a cero con valores de x positivos, se tiene que $f(x) = 2$. Así decimos que f no es continua en 0.



EJEMPLO 4: Dirichlet, estudiando y desarrollando los planteamientos que Fourier presenta en uno de sus trabajos, considera una función como la siguiente:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

cuya gráfica es la siguiente

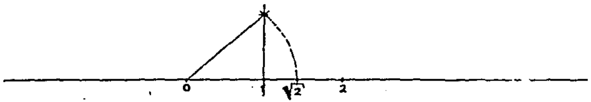


Realizando discusiones similares a las de los ejemplos anteriores, se puede concluir que f no es continua en todos los puntos de su dominio.

Para tener una explicación contundente de la continuidad de los ejemplos anteriores y problemas más complejos que se presentan en el desarrollo de las ideas matemáticas, es necesario avanzar en lo que determina lo que es una función continua, y con ello en el concepto de límite.

d). El axioma de completez

En el Capítulo I, comentamos que los modelos de $\mathbb{R}$ -la recta y la escritura decimal- dan la posibilidad de representar objetos que no son números racionales, siendo $\sqrt{2}$ uno de estos objetos, el cual se puede ordenar quedando entre los racionales 1 y 2; esto es, $1 < \sqrt{2} < 2$, y que se representa en la recta como sigue



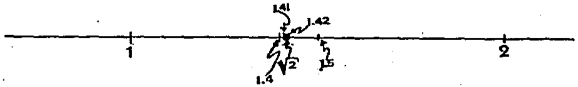
Al dividir el intervalo cerrado $I_0 = [1,2]$ en 10 partes iguales, en una de ellas esta contenido el número $\sqrt{2}$, es decir,

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{2} \in [1.4, 1.5] = I_1$$

Al dividir nuevamente este último intervalo I_1 en 10 partes iguales y considerar el intervalo cerrado que contiene a $\sqrt{2}$, tenemos que

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{2} \in [1.41, 1.42] = I_2$$

Gráficamente la situación es:



Si nuevamente se efectua lo mismo con I_2, y así para cada intervalo que contiene a $\sqrt{2}$; encontramos intervalos cada vez "más próximos" a $\sqrt{2}$. Estos intervalos los podemos describir como sigue:

$$\begin{aligned}
I_0 &= [1,2] \\
I_1 &= [1.4, 1.5] \\
I_2 &= [1.41, 1.42] \\
I_3 &= [1.414, 1.415] \\
I_4 &= [1.4142, 1.4143] \\
&\vdots \\
I_{12} &= [1.414213562373, 1.414213562374] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se puede observar que en cada intervalo obtenido está contenido en el anterior, esto es:

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0$$

además $\sqrt{2} \in I_k$ con $k = 1, 2, \ldots, n$

Al representar en forma general los anteriores intervalos, queda como sigue:

$$I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n}]$$

con $\underline{a_n} = a_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$

$\overline{a_n} = a_0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \dfrac{1}{10^n}$ con α_n una de las cifras $0, 1, 2, \ldots, 9$

A partir de la densidad de Q -entre dos racionales hay una infinidad- se puede desarrollar la construcción de los intervalos I_n haciendo crecer n tanto como se desee; esto es, que n sea cualquier elemento del conjunto N .

Los valores izquierdos de cada intervalo definen una sucesión de valores $\{\underline{a_n}\}$ que crece y que está acotado superiormente por cualquier $\overline{a_n}$; mientras que los extremos derechos de cada intervalo definen una sucesión de valores $\{\overline{a_n}\}$ que decrecen y está acotado inferiormente por cualquier valor $\underline{a_n}$.

Además conforme n crece, la distancia del intervalo I_n se reduce, puesto que

$$\overline{a_n} - \underline{a_n} = \frac{1}{10^n}$$

se aproxima a cero.

Estas consideraciones son las que al proponer el axioma de completez, permiten establecer, en particular que $\sqrt{2}$ es el límite de una sucesión de números racionales

§3. Definición de límite

En el capítulo anterior, graficamos funciones por medio de la tabulación. El procedimiento consistía en obtener un número finito de pares ordenados de dicha función y localizarlos en el plano cartesiano, para luego unirlos por medio de una línea.

Proceder a unir estos puntos, si bien solo permite obtener un esbozo de la forma de la curva, cabe preguntarse ¿por qué unir los puntos con una línea "continua"? -este procedimiento se aplicó en todos los polinomios-. Posteriormente, al estudiar las funciones racionales, consideramos funciones en que no siempre unimos con una línea dos puntos de la gráfica; es el caso cuando la función tiene como dominio intervalos en los cuales no está definida en todos sus puntos. Para estas situaciones requerimos realizar un estudio del dominio de la función, así como el comportamiento de la función al aproximarnos a valores para los cuales la función no esta definida, podriamos decir, se realiza un estudio en forma más local de la función, precisemos esto último:

Las propiedades de la función que dependen solo de los valores de la función en cualquier entorno -vecindad- del punto analizado, las llamamos propiedades locales de la función en el punto dado. La existencia o no del límite de una función en un punto, son propiedades locales de la función en el punto; las cuales pasaremos a estudiar.

Veamos en un ejemplo sencillo como se expresa el concepto de límite.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 2x + 3$ una función.

Nos preguntamos:

¿Como se comporta f si la variable x toma valores de $\mathbb{R}$ que están cada vez más próximos a 1 $(x \to 1)$, pero $x \neq 1$?

Con el fin de tener una primera idea del comportamiento de f al aproximarse x a 1 construimos la siguiente tabla:

x	f(x)
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
.	.
.	.
.	.
1	¿ ?
.	.
.	.
.	.
1.0001	5.0002
1.001	5.002
1.01	5.02
1.1	5.2

La primer observación que podemos hacer es que, conforme x se aproxima al valor 1 , f(x) se aproxima al valor 5 o bien, un número que está muy próximo a él. Por otra parte, dado que el conjunto $\mathbb{R}$ es denso, podemos continuar asignándole valores a x cada vez más próximos a 1 en forma indefinida.

Con los valores de la tabla formulamos las siguientes condicionales que son verdaderas; Estas afirmaciones se pueden comprobar a partir de las propiedades de $\mathbb{R}$: las de campo y las de orden.

Si $x \neq 1$ y $0.9 < x < 1.1$ entonces $4.8 < f(x) < 5.2$

Si $x \neq 1$ y $0.99 < x < 1.01$ entonces $4.98 < f(x) < 5.02$

Si $x \neq 1$ y $0.999 < x < 1.001$ entonces $4.998 < f(x) < 5.002$

Si $x \neq 1$ y $0.9999 < x < 1.0001$ entonces $4.9998 < f(x) < 5.0002$

La forma general de estas condicionales es:

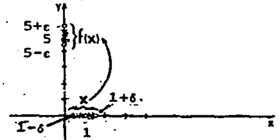
Si $x \neq 1$ y $1 - \delta < x < 1 + \delta$ entonces $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$

Geométricamente las desigualdades se pueden interpretar como vecindades, veamos porque:

Para la que aparece en la hipótesis, x toma sus valores en el dominio de f con $x \neq 1$; así la vecindad tendra centro en 1 y radio $\delta > 0$ (con $\delta = 0.1$, 0.001, 0.001, 0.0001 respectivamente). Mientras que la que aparece en la tesis, $f(x)$ toma valores en el contradominio de f; así se tiene la vecindad con centro en 5 y radio $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon = 0.2$, 0.002, 0.002, 0.0002 respectivamente). Su forma general se puede escribir como:

Si $x \neq 1$ y $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ entonces $f(x) \in (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$

La representación gráfica sería:



O bien, usando el valor absoluto, la condicional se escribe en forma equivalente como:

Si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Observando las desigualdades, notaremos que existe una relación entre los radios δ y ε, es decir, esta forma general no es válida para valores arbitrarios de δ y ε. Pasemos a determinar la mencionada relación.

Al considerar verdadera la hipótesis $0 < |x - 1| < \delta$ se cumplen las siguientes desigualdades equivalentes:

$x \neq 1$ y $-\delta < x - 1 < \delta$

$x \neq 1$ y $-2\delta < 2x - 2 < 2\delta$ (mult. por 2)

$x \neq 1$ y $-2\delta < 2x + 3 - 5 < 2\delta$ (sumando $3 + (-3)$)

$x \neq 1$ y $-2\delta < f(x) - 5 < 2\delta$

$$|f(x) - 5| < 2\delta .$$

Así tenemos que la condicional es verdadera, siempre que $2\delta < \varepsilon$ (o bien $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$).

Más, en nuestro estudio, intentamos determinar si $f(x)$ se aproxima a un valor en el contradominio (en este caso a 5) conforme x se aproxima a 1.

Así, al proponer un valor $\varepsilon > 0$ como radio de una vecindad con centro en 5, en las imagenes, en el dominio se puede obtener una correspondiente vecindad con centro en 1 y radio δ (que depende de ε) tal que todos los puntos de dicha vecindad y distintos de 1, su imagen pertenece a la vecindad propuesta.

En el ejemplo propuesto se tiene que al hacer ε tan pequeño como se quiera, encontramos una vecindad en el dominio con radio $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ que cumple lo anterior.

Pasemos ahora a precisar el concepto de límite.

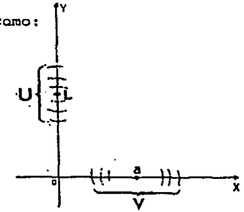
PRIMERA DEFINICION

Decimos que la función f tiene como límite el número real L cuando x tiende al número real a, si y solo si dada una vecindad de centro L y radio cualquiera, existe una vecindad con centro en a de manera que todos los puntos de este intervalo distintos de a, tengan una imagen en el intervalo de centro en L dado en principio.*
Esto lo simbolizaremos como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

* Definicion de Cauchy

Graficamente lo podemos representar como:



$\lim_{x \to a} f(x) = L$, si dado U
existe V tal que si
$x \in V$, $x \neq a$, entonces
$f(x) \in U$

Esta idea de aproximación que tiene un caracter de movimiento continuo "de aproximarse a L conforme x se aproxima al valor a", se puede reemplazar con una descripción "estática" que considera solo números reales sin involucrar movimiento o geometría, manifestandose en la siguiente definición: la cual se debe a Weierstrass.

SEGUNDA DEFINICION

Se dice que la función f tiene como límite al número real L cuando x tiende al número real a, si y solo si, para todo número real ε con $\varepsilon > 0$, existe δ, $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En forma compacta la podemos expresar como:

$$(\lim_{x \to a} f(x) = L) \leftrightarrow (\forall \varepsilon,\ \varepsilon > 0;\ \exists \delta,\ \delta > 0;\ 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Al considerar el caso particular en que f sea una función definida como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 3x - 2$$

afirmamos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

puesto que la siguiente afirmación es verdadera

[Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$]

Para probar que es verdadera la afirmación, debemos encontrar una relación entre el valor de ε y δ de tal forma que se cumpla la afirmación. La estableceremos utilizando la desigualdad de la tesis que aparece en la condicional con las siguientes equivalencias:

$$|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$$
$$|3x - 6| < \varepsilon$$
$$|3(x - 2)| < \varepsilon$$
$$|3||x - 2| < \varepsilon$$
$$3\,|x - 2| < \varepsilon$$
$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Usando la última desigualdad tenemos que si hacemos a $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ la proposición:

Si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ es verdadera.

Esto es, no importa el valor que tome ε (siempre que sea positivo), siempre se puede encontrar $\delta > 0$ con la propiedad que se indica; por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

El procedimiento general para demostrar que una función tiene límite en un punto determinado, consiste en lo siguiente:

Probar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$

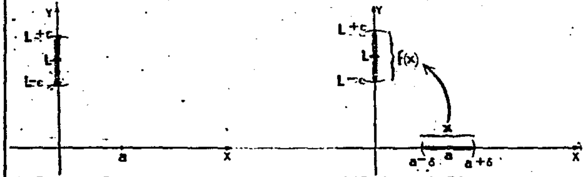
PRIMER PASO

Como señala la definición, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que considerar un intervalo abierto de cualquier tamaño con centro en L, $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$

SEGUNDO PASO

Obtener un intervalo abierto con centro en a, $]a-\delta, a+\delta[$ el cual requiere construirse a partir del valor de ε, esto es, δ depende de ε; de manera que su medida se debera encontrar en términos de ε. De esta manera, al hacer a ε tan pequeño como se quiera, el valor de δ es tal que los valores del intervalo contenido en el dominio y distintos de a, su imagen pertenecera al intervalo con centro en L y radio ε.

Graficamente lo podemos representar como sigue:



PRIMER PASO SEGUNDO PASO

El procedimiento que usualmente se realiza es:

Considerar la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ y por medio de equivalencias, lograr obtener el valor δ que se requiere.

Por ejemplo, si $f(x) = kx + b$, $k \neq 0$; se tiene que $\lim_{x \to a} f(x) = ka + b$ $(=L)$ por las siguientes equivalencias:

$$(|f(x) - L| < \varepsilon) \equiv (|k(x-a)| < \varepsilon) \equiv (|k||x-a| < \varepsilon) \equiv \left(|x-a| < \frac{\varepsilon}{|k|}\right)$$

de esta manera, al proponer que $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$

tenemos que cuando $|x - a| < \delta$ es verdadera

$|f(x) - L| < \varepsilon$ lo es tambien.

De esta manera se llega a demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$

En el caso de probar que L es el límite de una función lineal resulta sencillo; sin embargo, en los casos en que la función no es lineal, el obtener para todo ε, su correspondiente δ, resulta más complejo. Ilustremoslo con un ejemplo.

Probaremos que si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

entonces $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$

Partiendo de la expresión $|f(x) - L| < \varepsilon$; en este caso particular queda como $|x^2 - 9| < \varepsilon$ que es equivalente a

$$|x^2 - 9| = |x+3||x-3| < \varepsilon$$

para obtener la relación entre ε y δ requerimos acotar el valor $|x + 3|$, para lo cual hacemos lo siguiente:

Si proponemos $\delta = 1$, esto es $|x - 3| < 1$

entonces $-1 < x - 3 < 1$

o bien $5 < x + 3 < 7$

así $|x + 3| < 7$

Volviendo a la equivalencia inicial, tenemos que

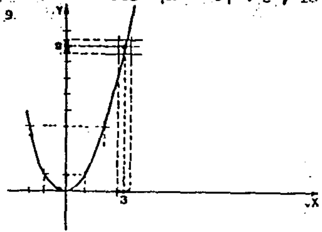
$$|x^2 - 9| = |x+3||x-3| < 7|x-3|$$

de manera que siempre que ε sea positivo y se cumpla la relación $7|x - 3| < \varepsilon$ se cumplira $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$ por lo que finalmente tenemos que:

Siempre que se elija δ como el menor de 1 y $\frac{\varepsilon}{7}$ se tendra que es valida la condicional de la definición del límite. Esto es:

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ tal que

Si $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $|x^2 - 9| < \varepsilon$, lo cual significa que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$.



Para evitar dificultades como en la demostración anterior, en la siguiente sección, estudiaremos teoremas que nos garanticen el obtener el límite de una función, y apoyados en ellos, no se requiera en cada caso obtener la relación entre δ y ε.

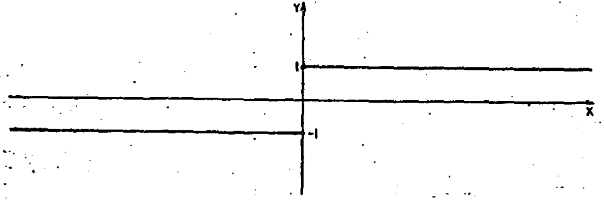
No todas las funciones tienen límite en cualquiera de sus puntos, para ilustrarlo, veamos los siguientes ejemplos

EJEMPLO 1.

Sea f una función dada como $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{|x|}$$

nótese que el rango de esta función consta solo de los puntos 1 y -1, siendo la gráfica de esta función:



Ahora bien, ¿que sucede a la función conforme x se aproxima al 0?; ¿es posible proponer un número real L el cual sea el límite de la función cuando $x \to 0$?.

La respuesta es negativa, no existe un número L en $\mathbb{R}$ que haga verdadera la definición de límite. Por ejemplo, consideremos que el límite sea $L = 1$.

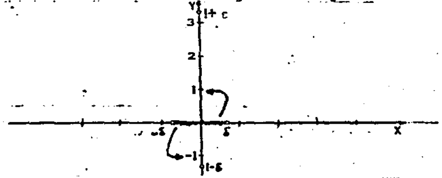
Si proponemos que ε sea mayor que 2, se puede elegir δ de cualquier tamaño y la proposición:

Si $0 < |x - 0| < \delta$ entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$ es verdadera.

Ya que si $x < 0$ entonces $|f(x) - 1| = 2 < \varepsilon$

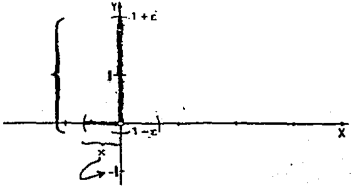
y si $x > 0$ entonces $|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$.

Esto lo ilustramos en la siguiente figura.



Pero la definición de límite establece que PARA TODO $\varepsilon > 0$ es válido encontrar δ para la cual la condicional es verdadera, y esto significa que se pueden proponer valores para ε menores que 2; más en este caso, por pequeño que se elija δ no se cumple la condicional de la definición de límite.

Esto es debido a que cualquier δ que se proponga, siempre se encuentran elementos del intervalo con la propiedad de que $-\delta < x < 0$ y en este caso $f(x) = -1$ y entonces la desigualdad $|f(x) - 1| < \varepsilon$ con $\varepsilon < 2$ sera falsa. Lo anterior se ilustra en la figura siguiente.



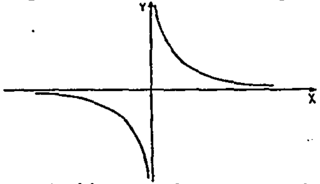
Algo similar sucede al proponer otro número real L como el límite. Basta en cualquier caso, proponer $\varepsilon < 1$ para que en dicho valor, cualquier δ que se proponga haga falso la condicional de la definición.

EJEMPLO 2.

Sea f la función dada por $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, lo cual significa que si $x > 0$ y $x \to 0$, $f(x) \to \infty$ mientras que si $x < 0$ y $x \to 0$, $f(x) \to -\infty$; su gráfica tiene la forma siguiente:



En este caso tambien nos planteamos la interrogante: ¿es posible proponer un número real L el cual sea el límite de la función cuando x tiende a cero?.

Nuevamente la respuesta es negativa. Puesto que al considerar algun número L como límite, sucede que al proponer un valor para ε se da el siguiente problema: no importa que valor tenga δ siendo positivo, se puede obtener un elemento $x \in \,]-\delta,\delta[$ tal

que $0 < |x| < \frac{1}{|L|+\varepsilon}$ cumpliendose las siguientes desigualdades equivalentes:

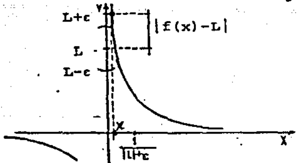
$$\left|\frac{1}{x}\right| > |L| + \varepsilon > 0 \text{ , de donde}$$

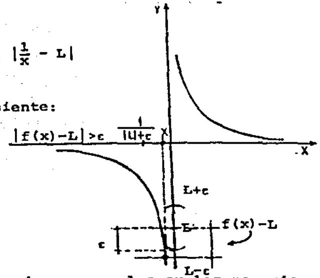
$$\left|\frac{1}{x}\right| - |L| > \varepsilon \quad \text{luego}$$

$$\varepsilon < \left|\frac{1}{x}\right| - |L| \leqslant \left|\left|\frac{1}{x}\right| - |L|\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} - L\right|$$

por lo tanto $|f(x) - L| > \varepsilon$

Graficamente se tiene lo siguiente:





En estos ejemplos, tenemos funciones para las cuales no existe el límite en un punto determinado; lo cual podemos establecer en forma general como sigue:

L no es el límite de la función f en el punto a si Existe ε, con $\varepsilon > 0$: tal que cualquier δ con $\delta > 0$ la condicional: si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ es falsa.

O bien

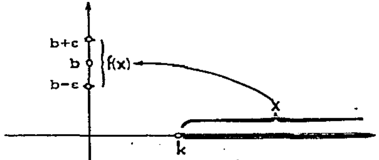
$$(\lim_{x \to a} f(x) \neq L) \equiv (\exists \varepsilon, \varepsilon > 0;\ \forall \delta, \delta > 0;\ 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geqslant \varepsilon)$$

En el Capítulo II, al estudiar las funciones racionales, se definió en forma intuitiva el concepto de asíntota horizontal y asíntota vertical. Dichas definiciones involucran el concepto de límite, lo cual pasaremos a analizar.

En el caso en que f tenga una asíntota horizontal, se tiene que $f(x) \to b$ cuando $x \to \infty$, usando la notación de límite, lo podemos expresar como $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, lo cual significa que:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $k > 0$ tal que siempre que $x > k$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Graficamente se puede representar como:



En forma similar, el decir que $f(x) \to b$ cuando $x \to -\infty$, se puede representar como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, lo cual significa que:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que siempre que $x < -k$ se cumple que $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Al referirnos a la asíntota vertical se presentan tres casos los cuales precisamos*. Para tal efecto, detallaremos el significado de las tres expresiones siguientes:

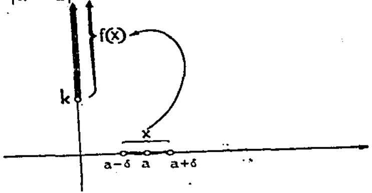
1) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ 2) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ 3) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

PRIMER CASO

Se dice que el límite de la función f cuando x tiende á a es más infinito si y solo si, dado un número positivo k cualquiera, existe un intervalo de centro a tal que si x pertenece a dicho intervalo y $x \neq a$, entonces $f(x) > k$, esto es;

*Revise la definición de asíntota vertical dada en el Capítulo II.

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si y solo si siempre que $k > 0$; existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > k$

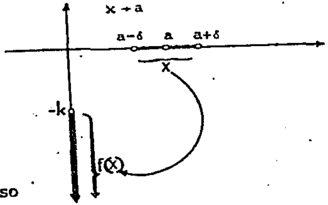


SEGUNDO CASO

Este, lo presentaremos ya en forma directa, es un buen ejercicio que lo exprese en forma similar a como se hizo al principio del primer caso.

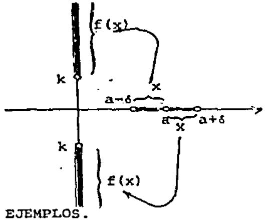
El límite de f cuando x tiende á a es menos infinito si y solo si, dado cualquier $k > 0$; existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) < -k$, lo cual lo expresamos como:

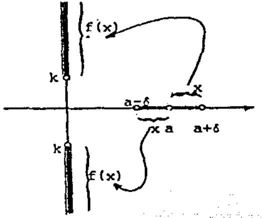
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



TERCER CASO

Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si y solo si, para cualquier $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x)| > k$. Como habras notado, esta explicación fue mucho más directa. Detallala como en los dos casos anteriores.





EJEMPLOS.

En base a las definiciones anteriores, se tienen los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x-a} = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to a} \frac{-1}{(x-a)^2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Por último, quisiera mencionar en esta sección, que dada la precisión del concepto, impide que se den ambiguedades al establecer el límite de una función en un punto dado; esto es, si una función tiene límite en un punto, éste es único, lo cual establecemos en el siguiente teorema.

TEOREMA DE UNICIDAD. Dada una función real f ;
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M$ entonces $L = M$.

DEMOSTRACION

La demostración la haremos por reducción al absurdo.

Supongamos que $L \neq M$. Si proponemos $\varepsilon = \frac{L - M}{2}$

Como L y M son límites de f , entonces deben existir δ_1 y δ_2 tales que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$
y tambien si $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|f(x) - M| < \varepsilon$

luego, si consideramos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ se cumplira que para x tales que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |L - M| &= |L - f(x) + f(x) - M| \\ &< |f(x) - L| + |f(x) - M| \\ &< 2\varepsilon \\ &< 2\,\frac{|L - M|}{2} \quad \text{o sea} \end{aligned}$$

$|L - M| < |L - M|$ lo cual es una contradicción por lo que L no puede ser distinto de M, así $L = M$.

§4. Teoremas sobre límites

Sería muy laborioso el que se debiera resolver cada problema de límites por medio de la definición. En esta sección, presentaremos una colección de teoremas con el objeto de simplificar el proceso. Si bien, en la demostración de los teoremas tenemos que usar la definición de límite, una vez establecida la validez de estos, podemos utilizarlos como reglas básicas para operar con los límites.

TEOREMA 1.
Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = c$, c en $\mathbb{R}$ y a cualquier número real
entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Demostración:

Puesto que para todo $\varepsilon > 0$ que se proponga, podemos elegir cualquier $\delta > 0$ ya que

si $0 < |x - a| < \delta$ resulta que $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

esto es, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - c| < \varepsilon$ es verdadero. Por lo tanto

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Un segundo resultado se puede establecer en la función identidad.

TEOREMA 2.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x$ y a cualquier punto de la recta, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$

Demostración:

En este caso, para todo $\varepsilon > 0$ que propongamos, es claro que existe $\delta > 0$ con $\delta < \varepsilon$. Porque la condicional

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$ es verdadera, por lo tanto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$

TEOREMA 3.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = mx + b$ y a, m y b números reales entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ma + b$

Demostración:

i) Si $m = 0$, entonces $f(x) = b$ es la función constante, y en este caso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ por el Teorema 1.

ii) Si $m \neq 0$, de acuerdo a la definición de límite, debemos

probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|(mx+b) - (ma+b)| < \varepsilon$,

luego como es verdadera la siguiente cadena de equivalencias

$$|(mx + b) - (ma + b)| < \varepsilon$$
$$|mx - ma| < \varepsilon$$
$$|m(x - a)| < \varepsilon$$
$$|m||x - a| < \varepsilon$$
$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$$

se tiene que eligiendo $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ se cumple que

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|(mx + b) - (ma + b)| < \varepsilon$

por lo tanto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ma + b$

Por ejemplo, en el caso de la función lineal $f(x) = 5x + 7$ tenemos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5(3) + 7 = 22$

El siguiente resultado garantiza que si una función f tiene límite positivo cuando x tiende á a entonces $f(x)$ es positivo en todo un intervalo abierto que contiene á a, excepto quizas en el punto a.

TEOREMA 4.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $L > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > 0$

Demostración:

Dado que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y L es positivo, podemos proponer $\varepsilon < L$ y en este caso existe δ según la definición tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ luego, usando esta última desigualdad tenemos que $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$ y y finalmente $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Así pues, por ser $L > \varepsilon$ entonces $f(x)$ es positiva

TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LIMITES

Muchas funciones pueden escribirse como combinaciones de sumas, productos y cocientes de otras funciones. El cálculo del límite de dichas funciones se simplifica con el teorema siguiente, el cual nos proporciona reglas básicas para operar con límites.

TEOREMA 5.

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

ii) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $M \neq 0$

La demostración de este teorema resulta algo complicado y además sale del interes del curso introductorio que intentamos cubrir. Sin embargo, presentamos en el apendice la demostración de este teorema.

Los resultados anteriores tambien se escriben como sigue:

i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

ii) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Comentaremos ahora algunas consecuencias de los teoremas ya demostrados, asi como nuevos resultados, lo que permitira hacer

más manejable el concepto de límite.

1.- LOS TEOREMAS FACILITAN EL CALCULO

Al calcular lo siguiente $\lim_{x \to 2} \dfrac{5x - 3}{2x + 1}$

dado que se puede interpretar como el límite de un cociente de funciones lineales, por el T. 3 , estas tienen límite, y como el límite del denominador es diferente de cero, se puede aplicar el T. 5 obteniendo que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x - 3}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \to 2} (5x - 3)}{\lim_{x \to 2} (2x + 1)} = \frac{5(2) - 3}{2(2) + 1} = \frac{7}{5}$$

de esta manera, por la aplicación de los teoremas, se tiene que

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x - 3}{2x + 1} = \frac{7}{5}$$

Lo cual, si usaramos la definición, hubiera sido un trabajo más arduo la demostración, y tendriamos que de alguna manera saber el límite. Por eso decimos que los teoremas facilitan el cálculo de límites.

2.- LOS TEOREMAS PERMITEN AMPLIAR EL CALCULO DE LIMITES

Por otra parte, estos teoremas permiten obtener procedimientos generales para él cálculo de límites de funciones.

Por ejemplo, probar que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ para a un número real resulta relativamente sencillo; pues si proponemos $f(x) = g(x) = x$ y usando el T. 2 y el T. 5(ii) se tiene que

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x\cdot x = \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) =$$
$$= a\cdot a = a^2$$

En el caso de x^n para n un número natural, como es el producto de n factores de x, se tiene que

Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

Análogamente, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces por el T.5(ii) se tiene que:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Con estos resultados, es sencillo calcular $\lim\limits_{x\to 3}(5x-2)^3$, ya que:

$$\lim_{x\to 3}(5x-3)^3 = (\lim_{x\to 3}(5x-2))^3 = (5(3)-2)^3 = 13^3 = 2197.$$

Se pueden probar, usando los teoremas anteriores, los siguientes resultados:

1.- Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2.- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3.- Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{x\to a} c\cdot x^n = c\cdot a^n$

La prueba de estos resultados se dejan al estudiante.

Usando estos resultados, podemos obtener límites para las funciones polinomiales.; con repetidas aplicaciones de estas propiedades calculemos:

$$\lim_{x\to 2}(5x^7-12x^4-3x^3) = \lim_{x\to 2} 5x^7 - \lim_{x\to 2} 12x^4 - \lim_{x\to 2} 3x^3$$
$$= 5\lim_{x\to 2} x^7 - 12\lim_{x\to 2} x^4 - 3\lim_{x\to 2} x^3$$

$$= 5(2)^7 - 12(2)^4 - 3(2)^3$$
$$= 424$$

Este procedimiento motiva un resultado más general.

TEOREMA 6.

Si f es una función polinomial, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo número real a.

Demostración:

Consideremos la regla de correspondencia de $f(x)$ como un polinomio de grado n; es decir,

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

y usando los resultados anteriores tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(b_n x^n) + \lim_{x\to a}(b_{n-1}x^{n-1}) + \dots + \lim_{x\to a} b_1 x + \lim_{x\to a} b_0$$
$$= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0$$
$$= f(a)$$

COROLARIO.

Si q es una función racional y a pertenece al dominio de q, entonces $\lim\limits_{x\to a} q(x) = q(a)$

Demostración:

Si $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y como a pertenece al dominio de q, se tiene que $g(a) \neq 0$

por lo cual $\lim\limits_{x\to a} q(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = q(a)$

Usando este resultado es facil calcular límites como el siguiente:

$$\lim_{x \to} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^2 + 7x - 6} = \frac{3(1)^3 - 2(1)^2 + 1}{5(1)^2 + 7(1) - 6} = \frac{3 - 2 + 1}{5 + 7 - 6} = \frac{1}{2}$$

El siguiente resultado es para raices enteras positivas de x, su demostración tambien se encontrara en el apéndice.

TEOREMA 7.

Para $a > 0$ y $n \in N$, ó $a < 0$ $n \in N$ con n impar; y f una función dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{a}$$

Usando el teorema anterior y el T.5 (ii), es claro que si m y n son naturales y $a > 0$ entonces

$$\lim_{x \to a} (\sqrt[n]{x}) = (\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x}) = (\sqrt[n]{a})$$

o bien, en términos de exponentes racionales se dice que

$$\lim_{x \to a} x^{n/m} = a^{n/m} \quad \text{donde } a > 0 .$$

Este resultado puede extenderse para exponentes negativos.

Un ejemplo de como usar este resultado es el siguiente:

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^{5/3} + 5\sqrt[3]{x}}{8x^{1/3} - \frac{8}{x}} = \frac{\lim_{x \to 8} (x^{5/3} + 5\sqrt[3]{x})}{\lim_{x \to 8} (8x^{1/3} - \frac{8}{x})}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 8} x^{5/3} + \lim_{x \to 8} 5\sqrt[3]{x}}{\lim_{x \to 8} 8x^{1/3} - \lim_{x \to 8} \frac{8}{x}}$$

$$= \frac{8^{5/3} + 5\sqrt[3]{8}}{8^{1/3} - \frac{8}{8}}$$

$$= \frac{32 + 10}{2 - 1} = 42$$

El siguiente teorema que involucra raices de expresiones algebraicas sera demostrado en la siguiente sección.

TEOREMA 8

Si una función f tiene límite cuando x tiende á a, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

siempre y cuando n sea impar o bien si n es par y $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

Su uso se puede notar en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{2 + 5x - 3x}{x - 1}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{2 + 5x - 3x^3}{x^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 3} 2 + 5x - 3x^2}{\lim_{x \to 3} x^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + (5)(3) - 3(3)^3}{(3)^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{8}}$$

$$= 2$$

3.- FORMAS INDETERMINADAS

No siempre pueden encontrarse los límites simplemente por sustitución. En algunos casos se requiere realizar previas manipulaciones algebraicas, como en el siguiente ejemplo:

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Es claro que no se puede aplicar directamente el teorema del cociente (T. 5(iii)), puesto que el límite del denominador es cero.

Pero manipulando algebraicamente la expresión, tenemos que:

Si $x \neq 2$ entonces $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$

resultado de la factorización:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2 \qquad \text{para } x \neq 2$$

Como en el concepto de límite, no se requiere que x tome el valor de 2 , es válido escribir lo siguiente

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Esto lo podemos generalizar como sigue:

1.- Si $f(x)$ es un polinomio de grado n y tiene una raiz en a , esto es $f(a) = 0$, entonces existe $h(x)$ de grado $n - 1$ tal que $f(x) = (x - a)h(x)$

2.- Para H una función racional con regla de correspondencia $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y a una raiz tanto del polinomio $f(x)$ como $g(x)$, tenemos que

$$H(x) = \frac{(x - a)h(x)}{(x - a)j(x)} \quad \text{siempre que } x \neq a$$

o bien $\quad H(x) = \dfrac{h(x)}{j(x)} \quad$ siempre que $x \neq a$.

3.- Para calcular el límite de H en $x \neq a$ se tiene que:

$$\lim_{x \to a} H(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} h(x)}{\lim\limits_{x \to a} j(x)} \quad \text{siempre que } \lim_{x \to a} j(x) \neq 0 .$$

4.- RESULTADO DEL "EMPAREDADO"

En otras funciones, para calcular su límite, se requiere realizar otro tipo de trabajo; una muestra es el siguiente teorema en el que se requiere obtener el límite de una función g , pero por las dificultades para obtenerlo directamente, se proponen dos funciones f y h para las cuales sus imágenes se encuentran intercaladas entre las imágenes de g . Si los límites de f y h son los mismos en un punto a , entonces el límite de g sera el mismo, en el mismo punto a. La demostración de este resultado aparece en el apendice.

TEOREMA 9.

Si f , g y h son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene á a , y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Por ejemplo, como $-1 < \text{sen } t < 1$, para todo real t; se puede demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} x\text{sen } \frac{1}{x} = 0$, usando el Teorema anterior porque:

Como $\left|\text{sen } \frac{1}{x}\right| < 1$ para todo $x \neq 0$

luego $\left|x \text{ sen } \frac{1}{x}\right| = |x|\left|\text{sen } \frac{1}{x}\right| < |x|$, además

$0 < \left|x \text{ sen } \frac{1}{x}\right| < |x|$.

Si f y g tienen regla de correspondencia $f(x) = 0$ y $g(x) = |x|$, entonces

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, por el T.9 $\lim\limits_{x \to 0} \left|x \text{ sen } \frac{1}{x}\right| = 0$

y usando la definición de límite, se concluye que:

$$\lim_{x \to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0 .$$

§5. Límites laterales

Para ciertas funciones que su dominio esta restringido a un subconjunto de $\mathbb{R}$, para realizar el estudio local de límite para todos los puntos de su dominio, es necesario que se reformule el concepto para estos casos, esto es lo que haremos.

Por ejemplo, considere la función

$$f: [3,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x-3}$$

Si bien, para $a > 3$ se cumple que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sqrt{a-3}$; para $a = 3$ no es posible aplicar la definición de límite, ya que no existe en el dominio un intervalo abierto que contenga a 3, pero si rremplazamos la condición $3 - \delta < x < 3 + \delta$ por algo más débil, como $3 < x < 3 + \delta$ se tiene que la desigualdad de la tesis en la definición de límite es cierta, y por lo cual, se dice que el límite de f cuando x se a proxima a 3 con valores mayores que 3 es cero.

El comentario anterior lo podemos precisar en la siguiente definición:

DEFINICION

Sea f definida en un intervalo abierto $]a,c[$ y sea L un número real.

La afirmación $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En este caso se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende á a por la derecha es L o bien L es el límite lateral derecho de $f(x)$ cuando x tiende á a. El símbolo $x \to a^+$ expresa que los

valores de x son siempre mayores que a.

Algo similar se establece cuando x tiende á a para valores menores que a, lo cual definimos como sigue:

DEFINICION

Sea f una función definida en el intervalo abierto $]c,a[$ y sea L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a - \delta < x < a$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En este caso se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende á a por la izquierda es L, o bien, L es el límite lateral izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende á a. El símbolo $x \to a^-$ significa que los valores de x son siempre menores que a.

En el caso de la función $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

de la cual ya probamos que no tiene límite para cuando x tiende a cero, se puede probar que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

(la prueba se deja al estudiante).

Existen funciones para las cuales, si bien, en un punto no existe el límite, sin embargo cuenta con límites laterales izquierdo y derecho. El siguiente resultado establece una relación entre estos conceptos y su demostración se deja al estudiante.

TEOREMA 10

Sea A un intervalo abierto que contiene al punto a, y f una función definida en A excepto posiblemente en a. Enton ces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Esto es, el límite de $f(x)$ cuando x tiende á a existe si y solo si ambos límites laterales existen y son iguales.

Teoremas similares a los de la sección anterior se cumplen en el caso de límites laterales.

Por ejemplo, si existe el límite lateral derecho de las funciones f y g cuando x tiende á a, decimos que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \cdot \lim_{x \to a^+} g(x) \quad \text{o bien}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a^+} f(x)}{\lim_{x \to a^+} g(x)} \qquad \text{si} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) \neq 0$$

En base a dichos resultados podemos afirmar que

$$\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x - 3} \right) = \frac{3}{2}$$

puesto que al usar los teoremas en los límites laterales tenemos que

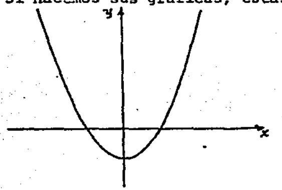
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x - 3} \right) &= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3^+} \frac{x + 3}{x + 1} + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} \\
&= \frac{\lim_{x \to 3^+} x + 3}{\lim_{x \to 3^+} x + 1} + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Al inicio de este capítulo y al hacernos la pregunta ¿para que estudiar el límite?, se dijo que una de las razones para estudiarlo es que ayudaba a explicar un fenómeno por demás interesante: la continuidad. En esta parte de nuestro estudio nos interesa precisar lo que es la continuidad de una función; sin olvidar que ésta es reflejo de situaciones concretas, pero que nosotros le quitamos de antemano toda esa especificidad, quedandonos únicamente con la cualidad de ser una "función continua". Iniciemos ahora la precisión de este concepto.

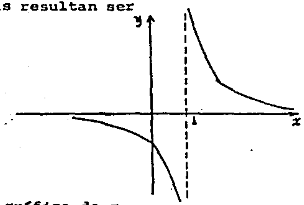
Consideremos las siguientes dos funciones:

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Si hacemos sus gráficas, estas resultan ser



Gráfica de f.

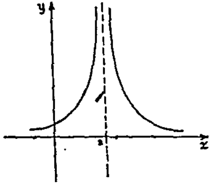
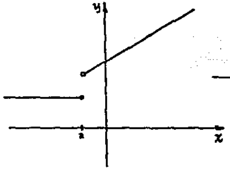
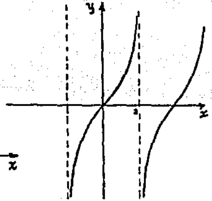


gráfica de g

Como se recordara, la primera noción sensitiva de que una función es continua es que al trazar su gráfica, lo hacemos sin despegar el lápiz del papel; es claro que en este sentido f es continua y que g no es continua. Analicemos esto con más detalle para llegar a precisar el concepto.

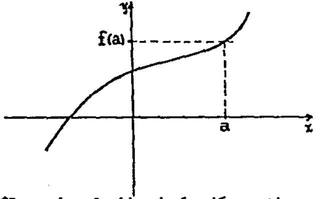
g no es continua únicamente en el punto 1, es ahi donde se "rompe", es decir, en ese punto "levantamos el lápiz". Por el con trario para la función f en ningun punto "levantamos el lápiz", es continua en todos sus puntos; esto nos lleva a analizar la continuidad de una función "punto por punto".

Consideremos gráficas de funciones que no son continuas, en un punto, digamos en $x = a$.

Analizando el comportamiento de estas funciones alrededor del punto $x = a$ lo que sucede es que "a pequeñas variaciones alrededor de a , no le corresponden pequeñas variaciones alrededor de $f(a)$"*; pero al hablar de variaciones en torno a un punto, de hecho estamos hablando de aproximaciones a un punto, y al hacer esto, necesariamente tenemos que hablar del límite de una función en un punto.

Al considerar una función continua en un punto, como la de



la figura, encontramos que a pequeñas variaciones alrededor de a encontramos pequeñas variaciones alrededor de $f(a)$, lo que nos lleva a afirmar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, lo que no se podía afirmar en los casos anteriores.

*Recuerdese la idea de función continua que se dio en la seccion §2 de este capítulo.

Tomando en consideración los comentarios sobre la continuidad de una función en un punto, tenemos la siguiente definición.

DEFINICION

Sea f una función y a un punto de su dominio.

a) Se dice que f es continua en el punto a al cumplirse que

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

b) Se dice que f es continua, si es continua en todos los puntos de su dominio.

Como se observara, esta definición es muy parecida a la definición de límite de una función en un punto, salvo que en la hipótesis de la condicional no se pide que $x \neq a$, puesto que f esta definida en a, y en la tesis $L = f(a)$, puesto que la función "no se rompe en a".

Esto lo podemos resumir en el siguiente teorema logrando que para estudiar la continuidad se utilice todo el simbolismo operativo que se construyo en los límites.

TEOREMA

Sea f una función y a un punto de su dominio. Se dice que f es continua en a si y solo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La demostración se deja como ejercicio.

Este resultado, al aplicarlo se traduce en la comprobación de las siguientes tres afirmaciones:

1) $f(a)$ existe

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Apliquemos este resultado en la investigación de la continuidad de funciones:

EJEMPLO 1.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2 - 3x$

a) Mostrar que f es continua en $x = 5$

b) Mostrar que f es continua.

SOLUCION:

a) Se tiene que

1) $f(5) = 10$

2) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (x^2 - 3x) = 10$

3) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5)$. Por lo tanto f es continua en el punto 5 .

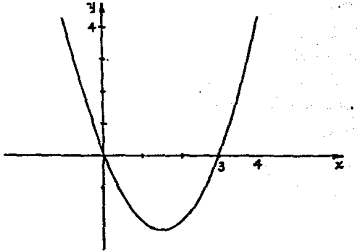
b) Tenemos que mostrar que f es continua en cualquier punto de su dominio. Sea a un número real, luego

1) $f(a) = a^2 - 3a$, claramente es un número real

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x^2 - 3x) = a^2 - 3a$

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por lo tanto f es continua.

La gráfica de esta función es:



EJEMPLO 2

Considere la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Muestre que f no es continua en 0. Haga la gráfica de f.

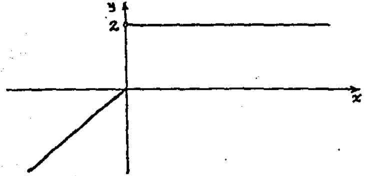
SOLUCION

1) $f(0) = 2$

2) Para calcular el límite en 0, como la función cambia su comportamiento en ese punto, calculemos los límites laterales. Es facil comprobar que

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ (¡hágalo)

luego $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, por lo tanto f no es continua en 0. Su gráfica es:



EJEMPLO 3

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x \text{ sen } \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

¿Es f continua en 0?

SOLUCION

Tenemos que

1) $f(0) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0$. (este límite ya se calculó en la sección § 4)

3) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Por lo tanto f es continua en o.

Cabe aclarar que $\lim_{x \to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}$ no se calculó por simple sustitución en $x = 0$, porque no estaría definido el límite, por eso se dice que es 0 en $x = 0$.

¿Sería continua f en $x = 0$ si $f(0)$ se define con otro valor distinto a 0?.

COMBINACION DE FUNCIONES Y LA CONTINUIDAD.

Cuando se estudió el límite de una función polinomial o racional, se dijo, por ejemplo que: Si f es un polinomio y a un número real, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, por lo cual se puede afirmar que un polinomio es una función continua; similarmente podemos afirmar que una función racional es continua.

Esto hace ver que al combinar funciones continuas, se obtienen en la mayoría de los casos funciones continuas -en los polinomios se combinan funciones de la forma $a_n x^n$ las cuales son continuas-, esta afirmación en una forma más general la enunciamos en el siguiente teorema.

TEOREMA

Sean f , g funciones continuas en un punto a , entonces

a) La función $f + g$ es continua en a.

b) La función $f \cdot g$ es continua en a.

c) La función $\frac{f}{g}$ es continua en a , si $f(a) \neq 0$.

DEMOSTRACION

a) Como f y g son continuas en a, se tiene que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Aplicando el teorema 5 se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f + g$ es continua en a .

Las demostraciones de los incisos (b) y (c) son similares. Se dejan como ejercicio.

Se tiene tambien que la función composición es continua, bajo las condiciones que se dan en el siguiente resultado.

TEOREMA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to a} g(x) = b$ y f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

DEMOSTRACION.*

Por demostrar que:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$.

a) Como f es continua en b, $\lim_{z \to b} f(z) = f(b)$, es decir

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|z - b| < \delta_1$ entonces $|f(z) - f(b)| < \varepsilon$.

*Revise la definición de la función composición.

Si consideramos $z = g(x)$ la condicional la escribimos como

Si $|g(x) - b| < \delta_1$ entonces $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$.

b) Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, se tiene que en particular para el $\delta_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|g(x) - b| < \delta_1$.

c) Combinando los resultados de (a) y (b) se tiene que
Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$.

COROLARIO

Si g es continua en a y f es continua en $b = g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a .

DEMOSTRACION

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x))$$
$$= f(\lim_{x \to a} g(x))$$
$$= f(g(a))$$
$$= (f \circ g)(a)$$

Por el resultado de este corolario, podemos decir que "la composición de funciones continuas es continua".

Como una aplicación de este Teorema, podemos justificar la afirmación hecha en el teorema 8

Tenemos que $h(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua y si $f(x)$ es una función tal que $h \circ f$ esta definida y $\lim_{x \to a} f(x)$ existe,

$\lim_{x \to a} h(f(x)) = h(\lim_{x \to a} f(x))$ es decir

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

LA CLASIFICACION DE FUNCIONES Y LA CONTINUIDAD.

En el desarrollo del límite de una función, se han probado resultados concernientes a las funciones polinomiales, racionales, exponenciales, trigonométricas, etc.. Enlistaremos las propiedades de continuidad de estas funciones, refiriendonos claro esta, a la continuidad en el dominio de estas funciones:

1.- La función polinomial es continua.

2.- La función racional es continua.

3.- La función exponencial es continua.

4.- La función logaritmo es continua.

5.- Las funciones trigonométricas son continuas.

Se deja como ejercicio al estudiante que traduzca estas afirmaciones, usando el límite, por ejemplo, para el caso 5 se tiene

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$$

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a \quad , \quad \text{etcetera.}$$

LA CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO.

Particularicemos el estudio de las funciones continuas a un conjunto especifico: un intervalo cerrado; veremos que por las características propias de este dominio y la función continua, obtendremos resultados, por una parte, generalizaciones de las funciones polinomiales y por otra, resultados aplicables al estudio de lo que más adelante se conocera como "valores extremos de las funciones" o "máximos y mínimos de funciones".

Precisemos primero que significa que una función sea continua en un intervalo cerrado. (Claro, no se rompe en ese intervalo.

DEFINICION

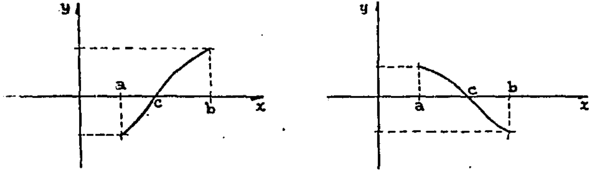
Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ una función.

Se dice que f es continua en $[a,b]$ si

a) Es continua para toda x en $]a,b[$.

b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(b)$

Consideremos una función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ continua, tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Al analizarla desde el punto de vista geométrico, decimos que su gráfica empieza por debajo del eje x y termina por arriba del eje x ; trazándola sin despegar el lápiz. Por lo cual, la gráfica necesariamente debe . . cortar al eje x , es decir, existe un número c en el intervalo $]a,b[$ tal que $f(c) = 0$. Como se puede observar en las dos gráficas siguientes:



Este resultado que se deduce más o menos en forma inmediata a partir de las consideraciones de su gráfica, la demostración a partir de los axiomas de los números reales y de los resultados ya demostrados, sale de las pretensiones de estas notas, por lo cual nos limitaremos a enunciar este teorema y hacer algunos comentarios con algunas funciones en particular.

TEOREMA

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ una función continua.

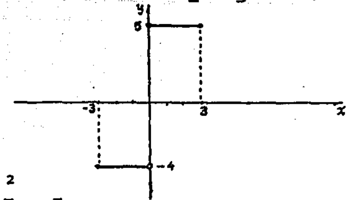
Si $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe un punto c en $[a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

La siguiente función manifiesta la necesidad de la continuidad en el intervalo cerrado.

EJEMPLO 1

Sea $f: [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Claramente $f(-3) = -4 < 0$ y $f(3) = 5 > 0$, pero no existe un número c en $]-3,3[$ tal que $f(c) = 0$. La razón es que f no es continua en $[-3,3]$. La gráfica es



EJEMPLO 2

Sea $f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

¿Existe un punto c en $]-\pi,\pi[$ tal que $f(c) = 0$?

SOLUCION

$f(-\pi) = -1$ y $f(\pi) = 1$, como f es continua, entonces existe un número c en $]-\pi,\pi[$ tal que $f(c) = 0$; el cual es $c = \frac{-\pi}{4}$. (¡verifíquelo!)

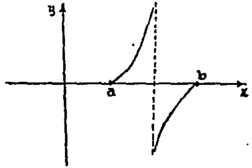
Recuerdese que el resultado de este teorema es una generalización del resultado concerniente a las funciones polinomiales -

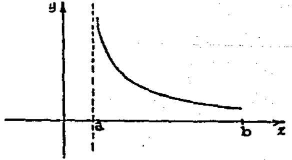
visto en la seccion 6 del cap. 2 .

Analicemos nuevamente una función $f: \begin{array}{l}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\end{array}$ continua, desde el punto de vista geométrico resaltando ahora el siguiente aspecto:

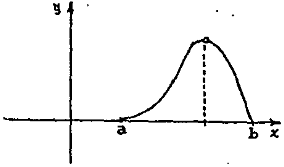
Como f se "traza sin despegar el lápiz" en el intervalo; ¿las imágenes de $f(x)$ tienen un valor máximo?, es decir, ¿existe un punto x_0 en el intervalo tal que $f(x_0) > f(x)$ para toda x en el intervalo?.

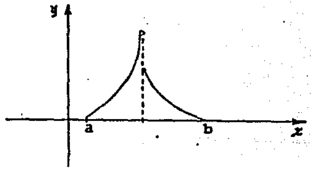
Si respondemos negativamente, sucedería que en el intervalo, la gráfica tendría una asíntota vertical, como en la figura





o "se rompería", como se ve en las siguientes gráficas





Pero como f es continua, ninguno de los dos casos puede suceder.

La generalización de este resultado lo enunciamos en el siguiente teorema, que por las mismas causas expresadas en el teore-

ma anterior, no se demostrara.

TEOREMA

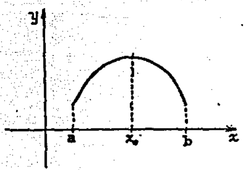
Sea $f: \begin{array}{l}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\end{array}$ continua, entonces existe un x_0 en $[a,b]$ tal que

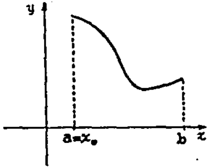
$$f(x_0) > f(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } [a,b]$$

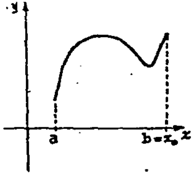
A $f(x_0)$ se le llama el valor máximo de f en el intervalo $[a,b]$.

El resultado se puede expresar como "si f es continua en un intervalo cerrado, entonces alcanza su valor máximo en el intervalo".

Ilustremos el resultado en las siguientes gráficas de funciones continuas.







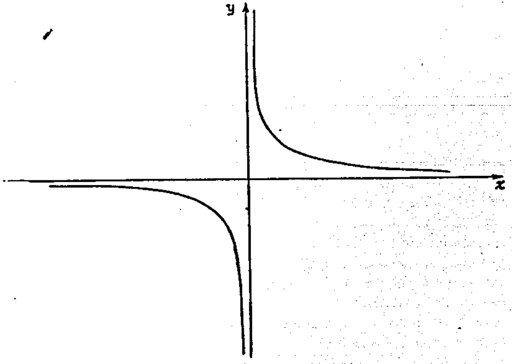
En el siguiente ejemplo, veremos porque es importante que f sea continua.

EJEMPLO 3

Sea $f: \begin{array}{l}[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\end{array} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f no tiene un valor máximo en $[-1,1]$, su gráfica es

La respuesta es inmediata: no es continua en 0, luego no es continua en el intervalo; por lo tanto, no se garantiza que la función tenga un valor máximo en el intervalo.



1643 I.NEWTON 1727

1646 G. LEIBNIZ 1716

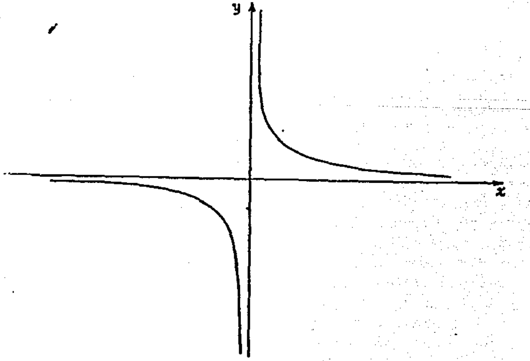
4
LA DERIVADA

1685 B.TAYLOR 1731

" El cálculo diferencial es, básicamente, un método para encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado. Este problema se resuelve por 'derivación' y es completamente equivalente al problema de dibujar una tangente a la curva que representa la dependencia de la distancia respecto del tiempo."

VISION GENERAL DE LA MATEMATICA.
Aleksandrov, Kolmogorov.

La respuesta es inmediata: no es continua en 0, luego no es continua en el intervalo; por lo tanto, no se garantiza que la función tenga un valor máximo en el intervalo.



1643 I.NEWTON 1727

1646 G. LEIBNIZ 1716

4

LA DERIVADA

1685 B.TAYLOR 1731

" El cálculo diferencial es, básicamente, un método para encontrar la velocidad de un movimiento cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado. Este problema se resuelve por 'derivación' y es completamente equivalente al problema de dibujar una tangente a la curva que representa la dependencia de la distancia respecto del tiempo."

VISION GENERAL DE LA MATEMATICA.
Aleksandrov, Kolmogorov.

§1. Sobre el origen de la derivada

En las postrimerías de la Edad Media las máquinas llegaron a usarse en pequeños talleres, en obras públicas y en la minería. Estas eran empresas llevadas a cabo por mercaderes urbanos o por príncipes en busca de dinero facil, frecuentemente dirigidas en oposición a los gremios urbanos. La guerra y la navegación también estimularon la perfección de las herramientas y su futura sustitución por máquinas.

La seda en Lucca y Venecia* ya desde el Siglo XIV se basa en la división del trabajo; la minería en el Siglo XV evoluciona hacia una industria capitalista, con el uso de bombas y máquinas montacargas que permiten la perforación de capas más y más profundas.

La invención de armas de fuego y de la imprenta, la construcción de molinos de viento y canales, la construcción de barcos para navegar en el océano, requirieron de la habilidad ingenieril y produgeron gente técnicamente conciente. La perfección de relojes, útiles para la astronomía y la navegación, frecuentemente instalados en lugares públicos; la regularidad de su movimiento y la posibilidad que ofrecían para indicar el tiempo exactamente, produjeron una honda impresión en el pensamiento filosófico. Durante el Renacimiento, y aún siglos posteriores, el reloj fue tomado como modelo del Universo. Este fué un factor importante en el desarrollo de la concepción mecánica del mundo.

Así pues, las máquinas condujeron a la mecánica teórica y al estudio científico del movimiento y del cambio en general.

El descubrimiento de América en 1492 amplio enormemente las

*Ciudades de Italia.

fronteras del mundo conocido al tiempo que determino una revolución en el pensamiento de la época.

El caracter revolucionario de la época en que se vive, las transformaciones materiales que sufre ésta sociedad, son la fuente de inspiración de la práctica científica de la época; la cual plantea a la ciencia los problemas siguientes:

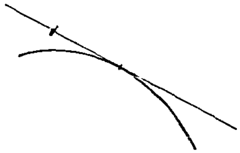
La revolución en la astronomía ligada a Nicolas Copérnico (1473-1543), Ticho Brahe (1546-1601) y Johannes Kepler (1571-1630) inaugura visiones completamente nuevas sobre el lugar que ocupa el hombre en el Universo.

Los hombres de ciencia del siglo diecisiete se ocupaban de problemas que se refieren al movimiento. Nicolas Copérnico y Johannes Kepler introduciendo el concepto de rotación de la tierra sobre un eje y alrededor del sol ayudan a desterrar la teoría sobre el movimiento planetario y que data del tiempo de los griegos, éstos a través de Tolomeo (claudio, 90-168 de n.e.) habian establecido leyes y explicaciones del movimiento presuponiendo una tierra absolutamente fija en el espacio y realmente en el centro del Universo. El rechazo a esta teoría y la adopción de las de Copérnico y Kepler implica aceptar a la tierra en movimiento.

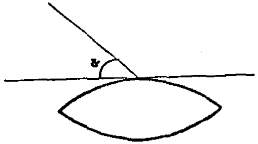
Kepler muestra sobre la base de múltiples observaciones que la trayectoría de cada planeta alrededor del sol es una elipse, si bien, no ofrece explicaciones teóricas sobre el por qué los planetas se mueven sobre esas trayectorias. Sin embargo, la noción de que todos los cuerpos en el Universo se atraen unos a otros de acuerdo con la fuerza de gravedad, indujo a más cientificos a investigar si el movimiento de los planetas alrededor del sol y de las lunas alrededor de aquellos puede deducirse de las leyes propias del movimiento y la gravedad. Así que, el movimiento de los cuerpos celestes se convirtió en el tema de estudio dominante.

Los movimientos de objetos cercanos a la superficie de la tierra y de los objetos celestes tienen lugar con velocidad variable y muchos de estos tambien con aceleración variable. Aunque con dificultades se manipulaban velocidades y aceleraciones variables, no eran claras en esos momentos, pues las ramas de las matemáticas que existian antes de que el cálculo fuera creado no permitian un tratamiento adecuado de aquellas.

Un segundo problema de importancia en el siglo diecisiete fué la determinación de tangentes a varias curvas.

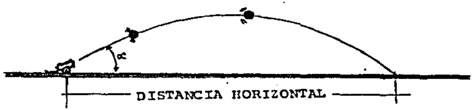


Este problema que pudiera ser de interés de la geometría pura, tiene un segundo significado: la tangente a una curva en un punto representa la "dirección" de la curva en ese punto. De esta manera, si un proyectil se mueve a lo largo de una curva, la dirección en la cual el proyectil esta su cabeza en algún punto en su trayectoria es la dirección de la tangente a la curva en ese punto. La invención del telescopio y el microscopio en el siglo diecisiete estimula el interes en la acción de los lentes. El problema de determinar la trayectoria de un rayo de luz una vez que alcanza la superficie de un lente, es el problema de conocer el ángulo que el rayo de luz hace con el lente, esto es, el ángulo entre el rayo de luz y la tangente al lente. Incidentalmente, el estudio del comportamiento de la luz fué, junto a el estudio del movimiento, el campo científico en este siglo. Con estos dos problemas, quizá podamos ver claramente porque es importante el pro-



blema de encontrar la tangente a una curva.*

Un tercer problema que obsesionaba a los cientificos del siglo diecisiete era poder resolver problemas de máximos y mínimos. El movimiento de una bala de cañon fué estudiado intensamente del siglo dieciseis en adelante; Nicoló Tartaglia (1500-1557) y Galileo Galilei (1564-1642) hicieron progresos significativos en esta dirección antes de que el cálculo fuera "inventado", ellos simplemente lo aplicaron. Determinar la distancia máxima horizontal que alcanza una bala de cañon es, entre otras, una de las preguntas importantes en el movimiento de proyectiles. Como el ángulo α (ángulo de elevación en un cañon) es una cantidad variable, la distancia horizontal desde el cañon a el punto en el cual el proyectil alcanza nuevamente el suelo tambien varia.



La cuestión es, ¿con que ángulo de elevación la distancia horizontal es máxima?. Otro problema de máximos y mínimos de importancia, surgió en el movimiento planetario. Aceptado el movimiento de los planetas alrededor del sol, se reconoce que la distancia a éste varía, surge entonces la pregunta, ¿cuando es máxima y cuando mínima la distancia de un planeta al sol?. Algunos problemas de máximos y mínimos pueden ser resueltos por métodos del álgebra y la geometría elemental; sin embargo, los problemas más importantes estan más allá de estas ramas, requiren del cálculo.

Estos tres problemas que se han descrito hasta aquí y en los

* the concept of the Calculus, Carl B Boyer.

cuales se ha enfatizado lo ventajoso de los métodos matemáticos englobados en lo que actualmente se conoce como La Derivada.

En Sintesis: el desarrollo de la tecnología y la mecánica, los progresos obtenidos en la navegación como la revolución en la astronomia y optica las cuales precisaban del estudio de problemas matemáticos "nuevos". La "novedad" de estos problemas - consiste principalmente en el hecho de que requerian el estudio matemático de las leyes del movimiento, en el amplio sentido de la palabra, esto es, las condiciones sociales especificas y las cientificas son el cuadro que enmarca el nacimiento de la derivada.

Más no podemos referirnos al desarrollo del concepto de derivada, sin considerarla dentro de la rama de las matemáticas en la cual se ha desarrollado y es sustento, a la par que el concepto de Integral, esto es, el Cálculo.

Naturalmente, que problemas similares continuan siendo importantes en nuestro tiempo, de no ser así, el cálculo tendría un valor puramente histórico. Existen varios ejemplos en los que con la solución de un problema se crea un método o rama matemática que le da solución y a lo cual se le encuentra nuevas aplicaciones, esto ha sucedido también con el cálculo, el cual tanto se ha desarrollado en el mismo como es la base de ramas matemáticas las cuales abarcan actualmente su parte más extensa. Esto es, el cálculo ha probado ser un rico filón.

Como casi todas las ramas de la matemática, el cálculo es el producto de una larga evolución. Frecuentemente, se atribuye a dos hombres, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) la"invención" del cálculo.

Esta es una simplificación absurda y excesiva de los hechos, pues como todas las ramas de las matemáticas, el cálculo, es el producto de una larga evolución la cual, Newton y Leibniz ni iniciaron ni dieron fin, pero en el cual desempeñaron un papel decisivo.* Puesto que ellos en forma independiente uno del otro, encuentra la conexión en dos problemas que han sido de gran importancia para la época y que se han resuelto uno con la derivada y otro con la integral. Su mérito conciste en establecer la conexión en estos problemas, hoy conocido como el Teorema Fundamental del Cálculo.

Como ya hemos señalado, aunque solo en el siglo diecisiete, varios científicos contribuyeron en la solución a esos problemas, sería ocioso listar, y quiza se omitiera alguno, a todos aquellos que de alguna manera contribuyeron a la creación del cálculo.

Pudiera servir de consuelo al estudiante novivio en el cálculo, saber que Newton y Leibniz no entendieron completamente lo que ellos mismos habian producido. Todo el siglo dieciocho se obtuvieron nuevos resultados, estos resultados fueron obtenidos por grandes matemáticos, los que no citamos, bastese saber que la clasificación final de los conceptos que involucran el cálculo se consiguió en el siglo diecinueve.

La palabra cálculo proviene de la palabra latina guijarro, esta se asocia al uso que hacian los primeros matemáticos griegos -alrededor del año 600 a.n.e- quienes hacian aritmética auxiliandose de guijarros. Hoy en día un cálculo puede significar un procedimiento o conjunto de procedimientos como la división en la aritmética o en el algebra resolver una ecuación cuadrática.

Sin embargo, el significado que adquiere aquí es el de la teoría y procedimientos del Cálculo Diferencial e Integral. Este cálculo utiliza el álgebra, la geometría plana, la trigonometría y la geometría analítica, pero tambien introduce conceptos nuevos, claro esta y notoriamente la derivada y la integral. Fundamental para ambos es el concepto de límite.

*¿Que es la matemática? Courant/Robbins. Colección Ciencia y Técnica. Aguilar.

En el estudio del cálculo, se deben señalar tres aspectos, los que debemos entender. El primero es el de la teoría: conocer teoremas de la derivada y la integral. El segundo es la técnica -para usar el cálculo, debemos aprender técnicas en diferenciación e integración. Finalmente, el tercer aspecto es la aplicación: el cálculo fue creado como respuesta a necesidades prácticas específicas.

§2. Importancia de la derivada

Hemos reseñado, aunque escuetamente, algunos de los problemas que se resuelven con la derivada, también mencionamos su vigencia, en esta dirección se presentan los problemas siguientes, terminando con una lista de conceptualizaciones en los que también es útil la derivada.

a) La velocidad instantanea.

Ya en la introducción del capítulo anterior, al presentar el concepto de velocidad instantanea, encontramos que resulta de la razon:

$$\frac{d(t + h) - d(t)}{h}$$

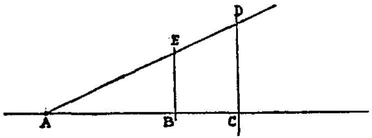
h se hace tan pequeña, "que se comporta como cero".

Al precisar tal descripción por medio del concepto de límite, podemos decir que la velocidad instantánea $\dot{d}(t)$ resulta al calcular el límite

$$\dot{d}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t + h) - d(t)}{h}$$

b) La tangente a una curva.

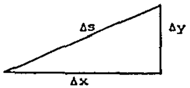
A partir de la semejanza en los triángulos:



se tiene que si EB es paralela a DC , entonces

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

esta relación solo exige que los triángulos que se comparan tengan sus lados paralelos, no importando la longitud de dichos lados. Si tenemos un triángulo semejante al ΔABE



en el cual la longitud de sus lados son "infinitésimos", esto es, si $\Delta x \to 0$, tenemos, entonces

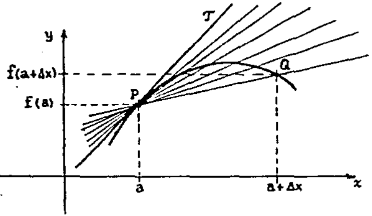
$$\frac{EB}{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tiene sentido y es un número. Esta relación la usaremos para definir el concepto de tangente a una curva.*

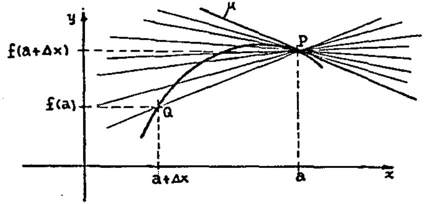
Decimos que τ es la recta tangente por la derecha a la curva dada por la función f en el punto $P(a,f(a))$ si τ pasa por el punto p y su pendiente** es el límite de las rectas secantes a la curva, determinada por los puntos $P(a,f(a))$ y $Q(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ con $\Delta x > 0$ y haciendo que Δx tiende a cero.

*En el siglo XVII el problema de tangente a una curva en un punto dado, tomó un lugar prominente al lado de los problemas antiguos que involucran volúmenes y centros de gravedad. Hasta entonces sólo se sabía trazar tangentes a circunferencias y a una o dos curvas más, sin sospechar que existía una solución general para este problema.

**La pendiente de la recta secante se obtiene como sigue:
$\frac{QR}{PR} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$.



Análogamente decimos que la recta μ es tangente por la izquierda en el punto P si μ pasa por el punto $P(a,f(a))$ y su pendiente es el límite de las pendientes de las rectas secantes determinada por los puntos $P(a,f(a))$ y $Q(a + \Delta x, f(x + \Delta x))$ siendo $\Delta x < 0$ y haciendo que Δx tienda a cero.



Finalmente decimos que la recta Γ es tangente a la curva dada por f en el punto $P(a,f(a))$ cuando lo sea por la derecha y por la izquierda. Esto es, Γ pasa por $P(a,f(a))$ y su pendiente

$$m_\Gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

c). La intensidad de la corriente.

Sea $q = q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal de un conductor; si t es el tiempo y Δt un intervalo de tiempo

$$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$$

es la cantidad de electricidad que pasa a través de una sección dada en un intervalo de tiempo desde el tiempo t hasta $t + \Delta t$, entonces a la magnitud

$$\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

se le llama intensidad media de la corriente en el intervalo de tiempo Δt y se denota por I_{med} y el límite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} I_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

es la intensidad de la corriente en el instante t dado o corriente instantánea y se denota por I esto es:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

d) Otros problemas.

Los tres problemas anteriores, si bien son de índole diversa, han sido resueltos bajo un esquema similar. Un sinnúmero de conceptos y problemas diversos se abordaran bajo el mismo esquema, entre los cuales aparecen los siguientes:

Densidad lineal de una barra en un punto dado.

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Aceleración instantánea.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Radiancia o luminancia energética B_e

$$B_e = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Ie}{\Delta s}$$

Densidad espectral del flujo de radiación según la longitud de onda.

$$\phi e\lambda = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta \phi e}{\Delta \lambda}$$

Densidad espectral del flujo de radiación según la frecuencia

$$\phi e_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \phi e}{\Delta v}$$

Gradiente de velocidad.

$$\text{grad } v = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta l}$$

Gradiente de temperatura.

$$\text{grad } T = \lim_{l_2 \to l_1} \frac{T_2 - T_1}{l^2 - l^1}$$

Flujo Calorífico.

$$\phi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Luminosidad.

$$R = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s}$$

Costo marginal.

$$C'(n) = \lim_{h \to 0} \frac{c(n+h) - c(n)}{h}$$

Demanda marginal.

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h}$$

... y un muy amplio etcétera.

§3. Definición de derivada

Como podemos observar en todas las expresiones anteriores aparece el mismo esquema, en todos ellos el límite puede existir para ciertos valores de la variable y no existir para otros, cuestión que estudiaremos con mayor detalle mas adelante. En todo punto donde tal límite existe, se dice que la función tiene derivada (o que es derivable).

El proceso de "hallar la derivada de una función" es la operación fundamental del cálculo diferencial. En general, se puede definir el cálculo diferencial como la rama de las matemáticas que estudia los dos problemas generales siguientes:

1) Dada una función f determinar los valores x $(x \in D_f)$ en los que la función tiene derivada.

2) Dada una función f y un valor x $(x \in D_f)$ en el cual existe la derivada, calcular el valor de la derivada.

DEFINICION
Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene á a. Entonces la derivada de f en a, denotada por $f'(a)$, esta dada por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \ldots (*)$$

si este límite existe.

El lector podra observar que la derivada es una función, donde el límite (de existir) nos proporciona la regla para asociar el número $f'(x)$ al número x, de manera que el conjunto de parejas de la forma $(x, f'(x))$ que se forman mediante este proceso definen una función, la función derivada de f, esto es, f'.

El dominio de f' es un subconjunto del dominio de f, esta formado por todos los números a para los cuales el límite (*)

existe y obviamente no contiene a los valores donde la derivada no existe.

Otra expresión equivalente a (*) es:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EJEMPLO

Hállese la derivada de f si $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 - (\frac{1}{x+h})) - (x^2 - \frac{1}{x})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - \frac{1}{x+h} - x^2 + \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + \frac{-x + x + h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h + \frac{h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h) + \frac{h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x + h + \frac{1}{x(x+h)}) \\
&= 2x + \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Si f es una función definida en un intervalo abierto $]a,b[$, decimos que f es derivable en el intervalo abierto $]a,b[$, si f es derivable en todo punto x de $]a,b[$

Análogamente se define una función derivable en los intervalos : $]-\infty,b[$ $]a,\infty[$ e inclusive $]-\infty,\infty[$. Para intervalos cerrados convenimos en lo siguiente:

DEFINICION

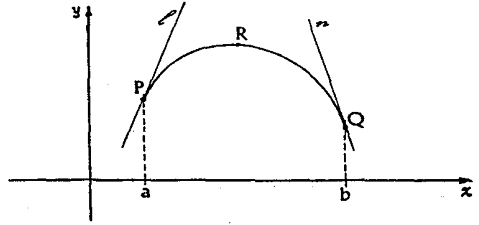
Una función f se dice derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es derivable en el intervalo abierto $]a,b[$ y si existen los siguientes límites:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

Los límites laterales que aparecen en la definición anterior se les conoce como derivadas laterales, respectivamente, derivada lateral por la derecha de f en a y la derivada lateral por la izquierda de f en b .

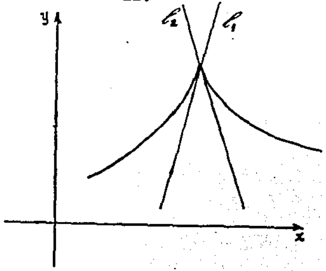
Esta convención tiene una doble utilidad:

i) Si f esta definida únicamente en $[a,b]$ entonces la derivada por la derecha y por la izquierda permiten calcular la pendiente de las rectas tangentes en los puntos $P(a,f(a))$ y en $Q(b,f(b))$ (como se muestra en la figura), así, si l es la recta tangente en P , la pendiente m es el valor límite de la pendiente de las secantes PR cuando R tiende a P por la derecha. Similarmente, para la recta tangente n en Q tomaremos el límite de las pendientes de las secantes RQ cuando R tiende a Q por la izquierda:



ii) Como un criterio para decidir la existencia de la derivada de una función en un punto. Esto es, considerando que una función f esta definida en un intervalo abierto que contiene a x_0. Como la derivada se define a tráves del concepto de límite, entonces $f'(x_0)$ existe sí y solo sí las derivadas por la izquierda como por la derecha de f en x_0 existen y además son iguales. En las dos figuras de abajo mostramos los casos en que ambas derivadas existen (las pendientes de las rectas l_1 y l_2).

En general, podemos decir que en aquellos puntos $(x_0, f(x_0))$ en los que la gráfica de f tenga "picos" la función NO ES DERIVABLE.



§4. Recta tangente a una curva

En el capítulo II hemos presentado una amplia variedad de funciones y para la mayor parte de ellas, se trazo en el plano cartesiano su respectiva gráfica o curva.

Posterioremente al inicio de la sección anterior, mencionamos que el problema de trazar la tangente a una curva en un punto dado tiene solución con el concepto de derivada.

Resulta natural que para cada una de las funciones estudiadas, en sus respectivas curvas, se plantee el problema de trazar la tangente en un punto dado de la curva*. En caso de existir la derivada para un punto de la curva, el problema se reduce, en todos los casos, a obtener la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto dado y cuya pendiente es la derivada valuada en el punto en estudio. Lo cual lo expresamos en general como:

Si f es una función real tal que $f'(a)$ es la derivada de f en a, entonces la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ de f es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EJEMPLO 1.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^3$ y $P(1,1) \in f$. Obtengase la ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}$ a la gráfica de f en P.

SOLUCION

Se requiere calcular $f'(1)$, esto es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3$$

*Este capítulo se aboca en gran parte a establecer para cada función, cuando es derivable y cual es su derivada.

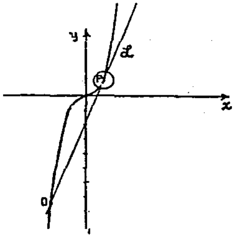
luego como $f'(1) = 3$ y pasa por P, la ecuación es

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

o bien $$y = 3x - 2 .$$

Observación:

La recta $\mathcal{L}$ corta a f en P y también lo hace en otro punto Q situado en el tercer cuadrante, este hecho no afecta a la definición que hemos propuesto de tangente. Es decir la noción de tangente a una curva que se estudia en geometría, se ha modificado en los siguientes términos:



i) Existe una vecindad con centro en P para la cual la curva f y la recta $\mathcal{L}$ se cortan en un solo punto.

ii) La pendiente de $\mathcal{L}$ es el límite de los valores de las pendientes de rectas secantes PQ donde Q se aproxima a P.

En el método de trazado de tangentes, el requisito es que exista la derivada de la función en el punto de la curva en estudio, luego cuando esto no se cubre, no tiene sentido hablar de la tangente en el punto. Veámoslo en el siguiente caso.

EJEMPLO 2.

Considere la función valor absoluto:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = |x|$$

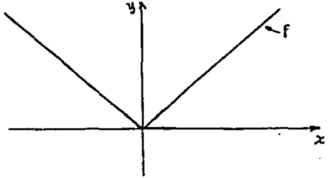
esta función no tiene derivada en el punto de abcisa 0.

Esto es:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \cdot$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

luego no se puede asociar una recta que sea la tangente a f en el origen, ya que el límite lateral izquierdo y el derecho son distintos.



Observación:

En este ejemplo, podemos trazar no solo una, sino una infinidad de rectas que corten a la gráfica de f únicamente en el origen, pero la definición de tangente que hemos propuesto, nos formula que la recta tangente en caso de existir, debe ser única. Esto es, contempla el hecho de que la tangente resulta de un límite, y en este caso por resultar los límites laterales distintos, no existe tal recta tangente.

§5. La derivada y la continuidad

TEOREMA 1

Si la función f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACION

Sea $f'(a)$ la derivada de f en el punto a, esto es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

luego $f'(a)\cdot \lim_{h\to 0} h = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a))$

$$f'(a)\cdot 0 = \lim_{h\to 0} (f(a+h) - f(a))$$

$$0 = \lim_{h\to 0} f(a+h) - \lim_{h\to 0} f(a)$$

es decir $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$,

esto es, f es continua en a .

El resultado recíproco no es válido, esto es, existen funciones continuas en a y no son derivables en a .
Un ejemplo es la función valor absoluto, la cual es continua en todo su dominio y sin embargo no tiene derivada en el punto $a = 0$.

Un resultado más debil establece que:

TEOREMA 2.
Si la función f admite derivadas laterales (iguales o no) en a , entonces f es continua en a .

DEMOSTRACION:

Sea $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L_1$

y $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L_2$

luego $\lim_{h\to 0^+} f(a+h) = \lim_{h\to 0^+} L_1\cdot h + \lim_{h\to 0^+} f(a) = f(a)$

y $\lim_{h\to 0^-} f(a+h) = \lim_{h\to 0^-} L_2\cdot h + \lim_{h\to 0^-} f(a) = f(a)$

de donde $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

esto es, f es continua en a .

Sin embargo, el recíproco tampoco se cumple. Puesto que existen funciones continuas que no presentan derivadas laterales.

EJEMPLO 3.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

esta función, como sabemos, es continua en 0 pero

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{no existe}$$

esto es

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h}$$

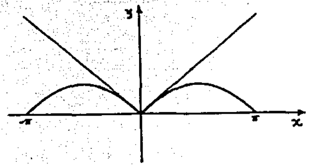
$$= \lim_{h\to 0^+} \operatorname{sen}\frac{1}{h}$$

y éste último límite no existe, por lo cual f no es derivable lateralmente por la derecha en $a = 0$.

EJEMPLO 4.

Por otra parte considere la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = |\operatorname{sen} x|$

cuya gráfica es:



la cual presenta derivadas laterales y no cuenta con con derivada en $a = 0$, esto es:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}|h|}{h} = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}|h|}{h} = -1$$

§ 6. Cálculo de derivadas

a) DERIVADAS RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES DE FUNCIONES.

A continuación nos abocamos a obtener la derivada de cada una de las funciones estudiadas en el Capítulo II, así como también ilustraremos con algunos ejemplos el uso de estas.

TEOREMA 3

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = c$ con c constante

entonces f es derivable y $f'(x) = 0$.

DEMOSTRACION

En efecto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

lo cual se expresa como:

"La derivada de la función constante es cero"

TEOREMA 4

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x$ entonces

f es derivable y $f'(x) = 1$.

DEMOSTRACION

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Para obtener la siguiente derivada, deben considerarse los siguientes resultados del Algebra.

DEFINICION

Si n es un número natural, al producto de n con todos los números menores que el, se le llama su factorial y se denota por $n!$. Esto es

$$n! = 1\ 2\ 3 \ldots (n - 1)\ n$$

DEFINICION

Para elevar un binomio $a + b$ a cualquier potencia n , con n un número natural, es válida la siguiente identidad llamada el BINOMIO DE NEWTON.

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \ldots + n\, a\, b^{n-1} + b^n$$

Así tenemos el siguiente

TEOREMA 5

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^n$ con n un número natural

entonces f es derivable y $f'(x) = n\, x^{n-1}$

DEMOSTRACION

En base al Binomio de Newton es válido lo siguiente:

$$(x + h)^n = x^n + n\, x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h^2 + \ldots + n\, x\, h^{n-1} + h^n$$

observe que al desarrollar el binomio, únicamente el primer sumando no presenta como factor a h . Por lo que la expresión $(x + h)^n - x^n$ se puede escribir como:

$$h(n\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + \ldots + n\, x\, h^{n-2} + h^{n-1})$$

de ésta manera se tiene que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \ldots + n x h^{n-2} + h^{n-1}\right)$$

y como cada sumando a exepción del primero tiene como un factor a h, al obtener el límite resulta que

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

En forma alternativa al usar la notación de operadores se tiene que

$$D_x (x^n) = n x^{n-1}$$

De esta manera, por ejemplo $D_x (x^7) = 7 x^6$

TEOREMA 6.
Sí f es una función real y derivable en a entonces para cada constante c, se tiene que

$$(c\ f(x))' = c\ f'(x)$$

DEMOSTRACION

Sea $g(x) = c\ f(x)$ entonces

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c(f(x+h)) - c\ f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= c\ f'(x)$$

En particular para $f(x) = c\ x^n$ se tiene que

$$f'(x) = c\ n\ x^{n-1}.$$

Por ejemplo, si $f(x) = 5x^6$ entonces

$$f'(x) = 30x^5$$

TEOREMA 7.
Sí f y g son funciones reales derivables en a, entonces $f + g$ es tambien derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

DEMOSTRACION

$$(f+g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

Dado que un polinomio en una variable es la suma de monomios de la forma cx^n los teoremas (6) y (7) nos permiten probar el siguiente resultado.

COROLARIO
Sí f es una función polinomial definida como

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

entonces f es derivable y

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

Por ejemplo, si f se define por

$$f(x) = 5x^7 + 3x^5 - 6x^3 + 2x^2 + x - 1$$

entonces

$$f'(x) = 35x^6 + 15x^4 - 18x^2 + 4x + 1$$

TEOREMA 8
Sí f y g son funciones reales derivables en a, entonces $f \cdot g$ es tambien derivable en a y

$$(f \cdot g)'(a) = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$$

DEMOSTRACION

$$(f\cdot g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(a+h) - (f\cdot g)(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(a+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} +$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(a)$$

$$= \lim_{h\to 0} f(a+h)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a)$$

y como f es derivable en a, entonces por el T1.. f es continua en a, por lo tanto

$$(f\cdot g)'(a) = f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a)$$

EJEMPLO 5.

Si $f(x) = (3x^3 + 2x^2)(5x^3 - 4x)$

entonces

$$f'(x) = (3x^3 + 2x^2)(15x^2 - 4) + (9x^2 + 4x)(5x^3 - 4x)$$

$$= 90x^5 + 50x^4 - 48x^3 - 8x^2$$

TEOREMA 9.

Si g es una función real derivable en a y $g(a) \neq 0$ entonces la función $\frac{1}{g}$ tambien es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$$

DEMOSTRACION

Por ser g derivable en a, g es continua en a, y como $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{1}{g}$ es continua en a y diferente de cero, luego existe una vecindad con centro en a tal que para es-

tos puntos $\frac{1}{g}$ no se anula, así para estos mismos puntos $\frac{1}{g(a+h)}$ tiene sentido. Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g}(a+h) - \frac{1}{g}(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(a) - g(a+h)}{g(a+h)g(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a+h)g(a)}$$

$$= \lim_{h\to 0} - \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot \frac{1}{g(a+h)g(a)}$$

$$= - \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot$$

$$\cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}$$

$$= -g'(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}$$

y por ser g continua $= -g'(a)\cdot \frac{1}{(g(a))^2}$

COROLARIO.

Si f y g son funciones reales derivables en a y $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ tambien es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

DEMOSTRACION

Es una deducción inmediata de los teoremas (8) y (9), esto es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)$$

$$= f'(a)\cdot\frac{1}{g}(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Este resultado nos permite calcular la derivada de las funciones racionales.

EJEMPLO 6.

Sea $f: \mathbb{R} - \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 - x^2}$$

entonces:

$$f'(x) = \frac{Dx(x^2 + 3x + 2)(x^3 - x^2) - (x^2 + 3x + 2)Dx(x^3 - x^2)}{(x^3 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(2x + 3)(x^3 - x^2) - (x^2 + 3x + 2)(3x^2 - 2x)}{(x^3 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x^4 - 7x^3 + 4x}{(x^3 - x^2)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 4x}{(x^3 - x^2)^2}$$

Usando el T. 9 se puede hacer una extensión del T.5 en el caso de que el exponente sea entero, lo cual se manifiesta en el siguiente resultado.

COROLARIO.

Si f es una función real tal que

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x^n \qquad \text{con } n \text{ entero y } a \neq 0$$

entonces $f'(a) = n\,a^{n-1}$ con a en $\mathbb{R}$

DEMOSTRACION

$$f(a) = \frac{1}{a^{-n}} \qquad n \text{ entero negativo}$$

$$\text{y} \qquad f'(a) = \frac{-Dx(a^{-n})}{(a^{-n})^2}$$

$$= \frac{-(-n)\,a^{-n-1}}{a^{-2n}}$$

$$= n\,a^{-n-1+2n}$$

$$= n\,a^{n-1}$$

Ademas para $n = 0$ se tiene que $f(a) = a^0 = 1$, por lo que

$$f'(a) = 0 = 0\,a^{-1}.$$

Cuando n es positivo, ya se demostro.

b) DERIVADA DE LA FUNCION COMPOSICION.
(Regla de la cadena)

TEOREMA 10.

Sea f una función continua en el intervalo A y derivable en un punto a de A, y sea g una función continua en el intervalo B con $f(A) \subset B$ y derivable en el punto $b = f(a)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es derivable en el punto a y se tiene que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

DEMOSTRACION (Parcial)

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \qquad \text{luego si } f(a) \neq f(x)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot f'(a)$$

(pero como f es derivable en a, entonces f es continua en a, esto es, si $x \to a$ entonces $f(x) \to f(a)$, por lo cual)

$$= \lim_{f(x) \to f(a)} \frac{g(f(x) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot f'(a)$$

$$= g'(f(a))\cdot f'(a)$$

La anterior demostración es válida solo en el caso que x al estar próxima á a se cumple que $f(x) \neq f(a)$, en caso que no se cumpla esta condición, la demostración anterior no prueba el Teorema. Este es el caso de la función f la cual presenta como regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

quien para toda vecindad con centro en cero, existe $x \neq 0$ tal que $f(x) = f(0)$.

Una demostración que incluya este tipo de funciones no se incluye en el texto. Al lector interesado, se le recomienda estudiarla en textos de Análisis Matemático.

EJEMPLO 7.

Sea $f: \mathbb{R} - \{-1,2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{(5x^2 - 5x + 10)^4}$

Luego f se puede tambien expresar como:

$$f(x) = (5x^2 - 5x + 10)^{-4}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4(5x^2 - 5x + 10)^{-5}(10x - 5) \\ &= \frac{-4(10x - 5)}{(5x^2 - 5x + 10)^5} \\ &= \frac{-40x + 20}{(5x^2 - 5x + 10)^5} \end{aligned}$$

c) DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Las funciones trigonométricas, son funciones derivables, a continuación pasamos a obtener la derivada de dichas funciones. En

el caso de la función seno, se da por conocido varios límites cuya demostración aparecen en el apéndice.

TEOREMA 11.
La función seno es derivable y $\operatorname{sen}' x = \cos x$

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}' a &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen}(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} a}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} a(\cos h - 1)}{h} + \cos a \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \\ &= (\operatorname{sen} a)(0) + \cos a\,(1) \\ &= \cos a \end{aligned}$$

TEOREMA 12
La función coseno es derivable y $\cos' x = -\operatorname{sen} x$.

DEMOSTRACION

Sean f y g funciones reales definidas por

$f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ por lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned} \cos x &= \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \\ &= (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos' x &= (g \circ f)'(x) \\ &= g'(f(x))f'(x) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)(-1) \\ &= -\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\operatorname{sen} x \ . \end{aligned}$$

Utilizando los Teoremas (11) y (12), que son las derivadas de las funciones seno y coseno, así como el corolario que se refie re a la derivada de un cociente de funciones, se puede obtener la derivada de las funciones trigonométricas restantes; las que son derivables en todo punto de su dominio quedando como sigue:

$$tg'\ x = \left(\frac{sen}{cos}\right)'(x) = sec^2\ x$$

$$ctg'\ x = \left(\frac{cos}{sen}\right)'(x) = -csc^2\ x$$

$$sec'\ x = \left(\frac{1}{cos}\right)'(x) = tg\ x\ sec\ x$$

$$csc'\ x = \left(\frac{1}{sen}\right)'(x) = -ctg\ x\ csc\ x\ .$$

La comprobación de estos resultados se deja como ejercicio al lector.

d) DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMO.

En el Cap. II, sección 8, vimos que la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

al ir evaluandola con números naturales cada vez más grandes, nos aproximamos al número irracional que designamos por e . Usando la notación de límite podemos decir que:

Si $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

entonces $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = e$

En forma más general se tiene que si f es una función real tal que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \infty$ entonces

$$\lim_{x \to p} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad ...(*)$$

*La demostración de esta propiedad no se incluye en el texto; el alumno interesado puede consultarla en un libro de Análisis Matemático.

Este resultado lo usaremos en la demostración del siguiente

TEOREMA 13

Si f esta definida por $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \log_a x$

para $a>0$ y $a \neq 1$ entonces f es derivable y

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

DEMOSTRACION

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$ multiplicando y dividiendo por x tenemos

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{x/h}$$ si consideramos que $f(h) = x/h$ entonces $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = \infty$ luego

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{1}{f(h)}\right)^{f(h)}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e$$ por ser la función logaritmo continua.

Un caso particular es cuando la base del logaritmo es el número e , en este caso se tiene que $\log_e e = 1$. Por lo cual, la derivada de la función logaritmo natural se reduce a $\frac{1}{x}$, esto es:

Si $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = Ln\ x$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

Una función cuya derivada aparece a menudo en el Cálculo Integral es la siguiente:

Para $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \operatorname{Ln} |x|$

entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

lo cual se prueba fácilmente por casos, esto es:

Primer caso. Si $x>0$, $\operatorname{Ln}|x| = \operatorname{Ln} x$ y por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{x}$

Segundo caso. Si $x<0$, $\operatorname{Ln}|x| = \operatorname{Ln}(-x)$, lo cual se puede interpretar como una composicion de funciones donde $g(x) = \operatorname{Ln} x$; $h(x) = -x$ y $f(x) = (g \circ h)(x) = \operatorname{Ln}(-x)$ y aplicando la derivada a ésta composición tenemos:

$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

e) DERIVADA DE LAS FUNCIONES INVERSAS.

El siguiente resultado nos permite obtener la derivada de las funciones inversas que le corresponden a las funciones ya estudiadas.

TEOREMA 14

Si para la función f con regla de correspondencia $y = f(x)$ $y = f(x)$ existe una función inversa g cuya regla de correspondencia es $x = g(y)$ tal que para un punto y_0 tenga derivada $g'(y_0)$ distinta de cero, entonces f es derivable en el punto $x_0 = g(y_0)$ y es igual a $\frac{1}{g'(y_0)}$ es decir:

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)}$$

DEMOSTRACION

Como g es la función inversa de f entonces su composición es la función identidad, esto es:

$$(f \circ g)(y_0) = y_0$$

y como la derivada de la función identidad es 1, derivando tenemos:

$f'(g(y_0))g'(y_0) = 1$ y como $g'(y_0) \neq 0$ despejando se tiene

$f'(g(y_0)) = \frac{1}{g'(y_0)}$ esto es

$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)}$

Utlizando este último resultado pasamos a obtener la deriva de las funciones arco así como la de la función exponencial.

TEOREMA 15

La función f con regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ es derivable en $]-1,1[$ y

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

DEMOSTRACION

En efecto, sea $g(x) = \operatorname{sen} x$ y su inversa $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ tenemos que:

$$y = \operatorname{arcsen} x \text{ si y solo si } \operatorname{sen} y = x$$

para $-1 < x < 1$ y $\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, por lo cual aplicando el T. 14 tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\operatorname{sen}' y} = \frac{1}{\cos y}$$

luego si expresamos el último resultado en términos de x, se tiene que en base a la identidad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ es válido que $\cos y = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$ pero para los valores $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ el coseno es positivo, considerandose la raiz positiva, esto es

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} \quad \text{o bien} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En forma análoga tenemos el siguiente

TEOREMA 16
La función f con regla de correspondencia $f(x) = \arccos x$ es derivable en $]-1,1[$ y es

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

DEMOSTRACION
Para $f(x) = \arccos x$, su función inversa es $g(x) = \cos x$ luego tenemos que

$y = \arccos x$ si y solo si $\cos y = x$

para $-1 < x < 1$ y $0 < y < \pi$
Por lo cual

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{-1}{\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

TEOREMA 17
La función f con regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{arctg} x$ es derivable en $\mathbb{R}$ y es

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

DEMOSTRACION
De la identidad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \text{o bien}$$

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \quad \ldots.(1)$$

luego por ser $g(x) = \operatorname{tg} x$ la función inversa de f, se tiene que

$y = \operatorname{arctg} x$ si y solo si $\operatorname{tg} y = x \quad \ldots.(2)$

para x en $\mathbb{R}$, y $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
Ademas

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} \quad \ldots.. \text{ de } (1)$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \quad \ldots.. \text{ de } (2)$$

En forma análoga se tiene el siguiente

TEOREMA 18
La función f con regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ es derivable en $\mathbb{R}$ y es

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

DEMOSTRACION
En efecto, de la identidad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ se deduce $1 + \operatorname{ctg}^2 y = \csc^2 y$. Ademas

$y = \operatorname{arcctg} x$ si y solo si $\operatorname{ctg} y = x$

para x en $\mathbb{R}$ y $0 < y < \pi$;
Tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}' y} = \frac{1}{-\csc^2 y} = \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

TEOREMA 19

La función f con regla de correspondencia $f(x)$ arcsec x es derivable para toda x con $|x| > 1$ y es

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

DEMOSTRACION

tenemos que $y = \operatorname{arc\,sec} x$ si y solo si $\sec y = x$ para $|x| > 1$ y $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$

por otra parte de la identidad $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y$ se deduce $\operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$

pero si $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$ $\operatorname{tg} y > 0$

por lo cual

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sec' y} \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} y \sec y} \\ &= \frac{}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Por último tenemos que

TEOREMA 20

La función cuya regla de correspondencia es $f(x) = \operatorname{arccsc} x$ es derivable para toda x, con $|x| > 1$ y es

$$f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

DEMOSTRACION

Tenemos que $y = \operatorname{arccsc} x$ si y solo si $\csc y = x$ para $|x| > 1$ y $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$ y usando la identidad $\operatorname{ctg}^2 y + 1 = \csc^2 y$ se deduce que para $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$

se cumple que $\operatorname{ctg} y$ es positiva, por lo cual

$\operatorname{ctg} y = \sqrt{\csc^2 y - 1}$

Usando lo anterior al derivar tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\csc' y} \\ &= \frac{-1}{\operatorname{ctg} y \csc y} \\ &= \frac{-1}{\csc y \sqrt{\csc^2 y - 1}} \\ &= \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

La función logaritmo en una base dada, tiene como función inversa a la exponencial con la misma base, por lo cual, utilizando los T.13 y T.14 se tiene el siguiente

TEOREMA 21

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$,

entonces f es derivable y es

$$f'(x) = a^x \operatorname{Ln} a$$

DEMOSTRACION

Para $x \in \mathbb{R}$ y $y > 0$ se tiene que

$y = a^x$ si y solo si $\log_a y = x$

luego, aplicando el T.14 se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(\log_a)'(y)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} \\ &= \frac{y}{\log_a e} \\ &= y \log_e a \\ &= a^x \operatorname{Ln} a \end{aligned}$$

En particular, en el caso que la base sea e, se tiene que su derivada es e^x.

Esto es, si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$

Veamos;

$$f'(x) = e^x \operatorname{Ln} e = e^x \cdot 1 = e^x$$

Como se puede observar, la función exponencial con base e tiene su derivada coincidiendo con la misma función. Lo cual explica por qué se hace referencia particular a ésta función; puesto que resulta mas comodo su uso, ya que simplifica los cálculos.

f) LA FUNCION IMPLICITA Y SU DERIVADA.

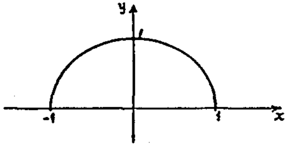
Considere la relación definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad ,$$

esto es la circunferencia con centro en el origen y radio 1. Aun cuando dicha relación no es función, podemos considerar subconjuntos de ésta, tal que sean funciones, como en los siguientes ejemplos:

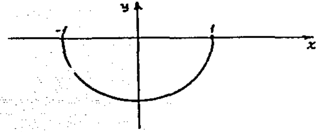
a) $f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

la gráfica de la función f, es la semicircunferencia localizada sobre el eje de las x_s.



b) En forma similar tenemos

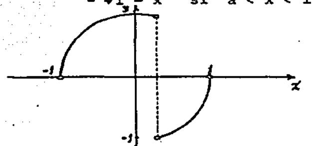
$g: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ cuya gráfica es la parte de de la circunferencia que está localizada debajo del eje de las x_s.



c) En general tenemos que para cada valor de a, con a elemento de $[-1,1]$ se puede definir una función h como sigue:

$$h: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < a \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } a < x < 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Además tenemos que al substituir en la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

y por la regla de correspondencia de las funciones construidas: f g y h, resulta una identidad, esto es:

$$x^2 + (f(x))^2 - 1 = x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (g(x))^2 - 1 = x^2 + (-\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (h(x))^2 - 1 = 0$$

lo cual nos lleva a establecer la siguiente

DEFINICION

Considere la ecuación en dos variables

$$F(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

y sea la función

$$f: \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = y \end{array}$$

tal que al substituir en la ecuación (1) y por la expresión $f(x)$, dicha ecuación se convierte en identidad respecto a x, entonces la función f recibe el nombre de FUNCION IMPLICITA definida por la ecuación (1).

Así decimos que f, g y h estan definidas implícitamente por la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Observe que toda función f cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$ -aparece en forma explícita- puede representarse en forma implícita al igualar la ecuación dada por cero, esto es:

$$y - f(x) = 0$$

Sin embargo, cuando aparece una función en forma implícita, no resulta sencillo obtener la forma explícita, por ejemplo:

Sea $\quad y^6 - y - x^2 = 0$

obtener la función f tal que al sustituir $f(x)$ por y la ecuación $(f(x))^6 - (f(x)) - x^2 = 0$ resulte una identidad no es fácil.

Establecer bajo que condiciones f existe y es derivable en todo su dominio, solo se justifica, con métodos del Cálculo de varias variables, y por lo tanto no se expone en el texto.

Por lo tanto, en los ejemplos que se traten, supondremos que dada una ecuación

$$F(x,y) = 0$$

esta determina una función f derivable, tal que al sustituir

$f(x)$ por y, la ecuación resulta una identidad para toda x del dominio de f.

En cuanto a la técnica a seguir, para obtener la derivada de la función implícita, consiste en derivar cada término de la ecuación respecto a x y como y se considera una función en x, se le aplica la derivada de la composición de funciones.

EJEMPLO 8

La ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

determina implícitamente a una función tal que $y = f(x)$, por lo cual considere

$$x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$$

derivando con respecto a x tenemos

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

despejando a $f'(x)$ nos queda que

$$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}$$

EJEMPLO 9

Obtenga la ecuación de la recta tangente a una curva definida por la ecuación

$$2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$$

en el punto $P(2,-3)$

Al derivar implícitamente resulta

$$6x^2 - x^2f'(x) + 2xf(x) + 3(f(x))^2f'(x) = 0$$

o bien

$$f'(x) = \frac{-6x^2 - 2xf(x)}{3(f(x))^2 - x^2}$$

Por lo cual la pendiente de la recta tangente a la curva en P es

$$f'(2) = -\frac{12}{23}$$

Finalmente la ecuación de la recta tangente buscada es:

$$y + 3 = -\frac{12}{23}(x - 2)$$

El procedimiento dado para obtener la derivada de la función implícita nos permite hacer una extensión del Teorema 5 como sigue:

TEOREMA 22

Si $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{R}$

entonces f es derivable y es

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

DEMOSTRACION

Sea $f(x) = x^n$ luego $\operatorname{Ln} f(x) = n \operatorname{Ln} x$

derivando implícitamente tenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x} \quad \text{por lo cual}$$

$$f'(x) = \frac{n\,f(x)}{x} \quad \text{sustituyendo } x^n \text{ por } f(x)$$

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

Este resultado nos permite obtener derivadas como la siguiente:

Sea f una función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = 6x^{4/3} + 4x^{-1/2}$$

entonces

$$f'(x) = 6\left(\frac{4}{3}\right)x^{4/3 - 1} + 4\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-1/2 - 1}$$

$$= 8x^{1/3} - 2x^{-3/2} \quad \text{por lo tanto}$$

$$f'(x) = 8\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \quad \text{para } x > 0 \quad .$$

§ 7. La diferencial de una función

Hemos visto que una función real f, es derivable en un punto a, si existe el límite siguiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

lo cual significa que para valores de h próximos a cero, el valor de la expresión

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

está proximo a $f'(a)$.

Denotemos dicha diferencia por $d(h)$, esto es

$$d(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad \ldots (1)$$

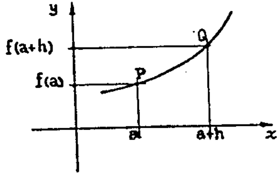
donde es claro que $\lim_{h \to 0} d(h) = 0$

Ahora bien, de la ecuación (1) tenemos que

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)\,h + h\,d(h) \quad \ldots (2)$$

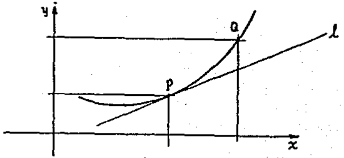
Pasemos a representar geométricamente esta situación.

Considere un punto $P(a, f(a))$ de la gráfica de f y un punto Q de f próximo a P, esto es $Q(a + h, f(x + h))$.

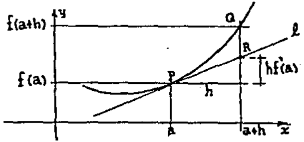


Trace la recta tangente ℓ a P cuya ecuación es

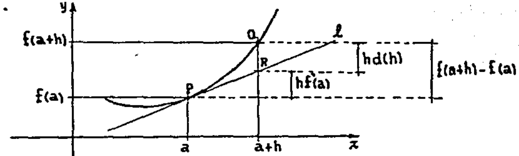
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Localice el punto R de ℓ que tiene como abscisa $a + h$ observe que sus coordenadas son $R(a + h, f(a) + f'(a)\,h)$



Así tenemos que la distancia QR es $h\,d(h)$, lo cual aparece en la gráfica.



Observe que cuando $Q \to P$, sucede que $h \to 0$, $a + h \to a$, $f(a + h) \to f(a)$, $d(h) \to 0$ y $h\,d(h) \to 0$ esto es: $R \to Q$.

Esto significa que la función f, para una vecindad con centro en $P(a, f(a))$, los puntos de su gráfica están muy próximos a

los puntos de la recta ℓ tangente a f en P. Además cuando h se aproxima a cero, el valor $h\,d(h)$ se aproxima con mayor rapidez a cero; en este caso, a partir de la ecuación (2) decimos que una buena aproximación de la diferencia entre las ordenadas de P y Q se obtiene por $f'(a)\,h$, esto es,

Para h suficientemente pequeño

$$f(a + h) - f(a) \approx f'(a)\,h \quad \ldots (3)$$

($\approx$ significa aproximadamente igual)

Esto nos permite, a partir de la derivada, calcular una buena aproximación de $f(a + h)$, esto es,

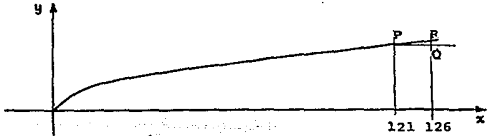
$$f(a + h) \quad f(a) + f'(a)\,h \quad \ldots (4)$$

EJEMPLO 10

Se desea calcular $\sqrt{126}$ y tenemos que $11 < \sqrt{126} < 12$, al considerar la función

$$f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$$

se tiene que el punto $P(121, 11)$ pertenece a f, y podemos analizar que sucede para puntos próximos a P, en particular deseamos conocer la ordenada del punto Q de f tal que su abscisa es 126.



Dado que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, en el problema en cuestión tenemos que

$$a = 121 \qquad h = 5 \qquad f'(121) = \frac{1}{22}$$

por lo cual, la expresión

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\ h$$

se concretiza en

$$\sqrt{126} \approx 11 + \frac{1}{22}(5) = 11.227273...$$

esto es $\sqrt{126} \approx 11.227273$

Si se calcula directamente el valor de $\sqrt{126}$, tenemos que $\sqrt{126} = 11.224972...$

Esto es, el procedimiento que usamos nos dió una aproximación con un error menor a 3 milésimos.

EJEMPLO 11

Al medir el radio de un globo esférico, se comete un error no mayor de 0.05 cm. En este caso, ¿Cual sera el error máximo al calcular su volumen, si la medida del radio es 12 cm.?

Como al calcular el volumen de una esfera se requiere conocer únicamente el radio x, decimos que V depende de x, lo cual se puede representar como una función definida en $]0,\infty[$ con regla de correspondencia

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 \quad \text{en la cual}$$

$$V'(x) = 4\pi x^2$$

Se tiene que la diferencia de medición en el volumen se obtiene de

$$V(a + h) - V(a) \approx V'(a)\ h$$

por lo cual, al considerar $a = 12$, y $h = \pm 0.05$ tenemos

$$V(12 \pm 0.05) - V(12) \approx 4\pi(12)^2(\pm 0.05) = \pm 90.477868$$

por lo tanto, el error máximo que se comete al calcular el volumen es aproximadamente de 90 centímetros cúbicos.

A la expresión $f'(x)\ h$ se le denomina la diferencial de f y se escribe como $df(x)$. Esta diferencial depende de las variables x y h.

Observe que para para la función identidad, dado que

$$f(x) = x$$

obtenemos que

$$df(x) = f'(x)\ h = 1(h) = h$$

lo cual se representa por $dx = h$.

Esto lo precisamos en la siguiente

DEFINICION

Si f es una función derivable en x, y h es un incremento de x, se dice que

i) $df(x)$ es la diferencial en las ordenadas y está dada por

$$df(x) = f'(x)\ h$$

ii) dx es la diferencial en las abscisas y está dada por

$$dx = h$$

Al sustituir dx por h en (i) tenemos que

$$df(x) = f'(x)\ dx$$

APENDICE A

Los recursos algebraicos que usaremos en la demostración del siguiente teorema, son dos propiedades del valor absoluto que mencionamos en el Cap. I, sección 9: la desigualdad triangular $|a + b| < |a| + |b|$ y la igualdad $|a \cdot b| = |a||b|$.

TEOREMA 5

Sean f y g dos funciones tales que

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ entonces

i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

ii) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

iii) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

DEMOSTRACION

i) De acuerdo a la definición, debemos probar que existe relación entre ε y δ, para la que se cumple la siguiente afirmación:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$

Ahora bien, dado que por hipótesis $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, las siguientes afirmaciones son válidas

Para todo $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ y

si $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

podemos afirmar que si consideramos δ como el mínimo de

δ_1 y δ_2 las condicionales anteriores se reducen a la siguiente afirmación, la cual también es cierta:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

con la tesis de la anterior condicional podemos hacer las siguientes transformaciones

$|f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ y por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &< |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Esto es, encontramos la relación entre ε y δ .

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$.

ii) En la prueba de este inciso usaremos los siguientes lemas:

LEMA 1

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ es equivalente a $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$

La prueba es sencilla. Partiendo de que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se pueden establecer las siguientes equivalencias:

$(\lim_{x \to a} f(x)) + (-L) = 0$, usando usando la propiedad del límite de una constante, queda $\lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-L) = 0$, y por el inciso (i) del teorema $\lim_{x \to a} (f(x) + (-L)) = 0$ completando así la prueba.

LEMA 2

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} k(x) = 0$ entonces $\lim_{x \to a} f(x)k(x) = 0$.

DEMOSTRACION

Como $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces para $\varepsilon_0 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon_0$.

Usando las propiedades de valor absoluto tenemos que

$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < \varepsilon_0 + |L|$ ...(I)

y $|f(x)k(x)| = |f(x)||k(x)| < (\varepsilon_0 + |L|)|k(x)|$ ...(II)

Luego, dado que $\lim_{x \to a} k(x) = 0$ tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ (el cual podemos expresar como $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + |L|}$) existe un respectivo $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|k(x) - 0| = |k(x)| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + |L|}$ ...(III)

Luego al proponer a δ como el mínimo de los valores de δ_1 y δ_2 , de (III) y (II) la siguiente desigualdad se cumple

$|f(x)k(x)| < (\varepsilon_0 + |L|)|k(x)| < (\varepsilon_0 + |L|)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + |L|} = \varepsilon$

por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x)k(x) - 0| < \varepsilon$.

Iniciemos ahora la demostración del inciso (ii).

1) Probar que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$ es equivalente a probar que $\lim_{x \to a} (f(x)g(x) - LM) = 0$ (por lema 1).

2) Al considerar la identidad

$f(x)g(x) - LM = f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)$

3) Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} (f(x)g(x) - LM) &= \lim_{x \to a} (f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)) \\ &= \lim_{x \to a} f(x)(g(x) - M) + \lim_{x \to a} M(f(x) - L) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \quad \text{. Por el lema 1 y 2.}\end{aligned}$$

iii) Para demostrar que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ con $M \neq 0$, basta con probar que $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ y usando el inciso (ii) , se termina la demostración.

Usaremos las siguientes desigualdades

$|M| = |g(x) + M - g(x)| < |g(x)| + |M - g(x)|$ es decir

$$|M| < |g(x)| + |M - g(x)| \quad \text{... (1)}$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{g(x)M}\right| = \frac{1}{|g(x)||M|}|g(x) - M| \quad \text{... (2)}$$

Luego como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, si $\varepsilon = \frac{|M|}{2}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$

en este caso, aplicando la desigualdad (1)

$$|M| < |g(x)| + \frac{|M|}{2} \quad \text{o bien}$$

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| \quad \text{y su inverso}$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} \quad \text{... (3)}$$

utilizando la desigualdad de (3) y aplicandola en (2) tenemos que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{1}{|M||g(x)|}|g(x) - M| < \frac{2}{|M|^2}|g(x) - M| \quad \text{o bien}$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \frac{2}{|M|^2}|g(x) - M| \quad \text{... (4)}$$

Por otra parte, usando otra vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$ tenemos que: para todo $\varepsilon > 0$ (el cual se puede expresar como $\varepsilon\frac{|M|^2}{2}$), existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|g(x) - M| < \varepsilon\frac{|M|^2}{2}$

Por lo cual, al denotar a δ como el mínimo de δ_1 y δ_2 se cumple que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|g(x) - M| < \varepsilon\frac{|M|^2}{2}$ y

$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}| < \frac{2}{|M|^2}|g(x) - M|$, simplificando la tesis queda que:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}| < \varepsilon$.

Esto es, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ con $M \neq 0$

por lo tanto

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$$

$$= L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

TEOREMA 7

Para $a \geq 0$ y $n \in N$ ó $a < 0$ y $n \in N$ con n impar; se cumple que si f es una función tal que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sqrt[n]{a}$.

DEMOSTRACION

Primer caso: $a \geq 0$ y $n \in N$. En este caso consideramos $\varepsilon < \sqrt[n]{a}$ y si para este entero existe el correspondiente δ , el mismo δ se puede usar en caso que $\varepsilon > \sqrt[n]{a}$.

Consideremos las siguientes desigualdad:

$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$ y las siguientes equivalencias

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{a} + \varepsilon$$

$$(\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n < x < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n$$

$$(\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n - a < x - a < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$$

$$-(a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n) < x - a < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$$

y por la ε que escogimos, tenemos que $(\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$ y $a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n$ son números positivos, así para $\delta = \min\{(\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a,\ a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n\}$ se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$.

Segundo caso. Supongamos que $a < 0$ y $n \in N$ con n impar. En este caso, $-a > 0$ y $\sqrt[n]{-a} > 0$, por lo cual usando el inciso del primer caso, se cumple que

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{-a}$$

Por lo cual, usando la definición de límite:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x - (-a)| < \delta$ entonces $|\sqrt[n]{-x} - \sqrt[n]{-a}| < \varepsilon$

o en forma equivalente

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$.

Así en los dos casos tenemos que

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

TEOREMA 9.

Si f , g y h son funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene á a , y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

DEMOSTRACION

Por hipótesis tenemos que: Para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que si $0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

si $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|h(x) - L| < \varepsilon$

Por lo cual, si consideramos a δ el menor de δ_1 y δ_2 entonces

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ y

$|h(x) - L| < \varepsilon$ en particular

$-\varepsilon < f(x) - L$ y $h(x) - L < \varepsilon$

o bien $L - \varepsilon < f(x)$ y $h(x) < L + \varepsilon$

además, por hipótesis se tiene que $f(x) < g(x) < h(x)$

entonces $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ esto es:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|g(x) - L| < \varepsilon$ por lo tanto

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

APENDICE B

Los cuatro siguientes límites nos permiten obtener las derivadas de las funciones trigonométricas.

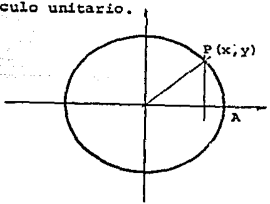
1.- La función seno es continua en cero.

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0$$

La demostración es por casos:

PRIMER CASO.

Considere $0 < t < \frac{\pi}{2}$ y el círculo unitario.



Como podemos ver, se cumple la relación

$$0 < y < \widehat{AP},$$

pero $\widehat{AP} = t$ y $y = \operatorname{sen} t$

por lo cual

$$0 < \operatorname{sen} t < t ,$$

y usando el teorema del emparedado tenemos que:

$$\lim_{t \to 0^+} \operatorname{sen} t = 0$$

SEGUNDO CASO

Para $\frac{-\pi}{2} < t < 0$

tenemos que

$$\frac{\pi}{2} > -t > 0$$

y como $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$

se tiene que

$$0 < -\operatorname{sen} t < -t$$

o bien

$$0 > \operatorname{sen} t > t$$

así tenemos que $\lim_{t \to 0^-} \operatorname{sen} t = 0$

De los dos casos se deduce que

$$\lim_{t \to 0} \text{sen } t = 0$$

2.- La función coseno es continua en cero.

Esto es
$$\lim_{t \to 0} \cos t = 1$$
Considere a t en el intervalo

$$\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \qquad \text{luego}$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \qquad \text{por lo cual}$$

$$\lim_{t \to 0} \cos t = \lim_{t \to 0} \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \qquad \text{Por el T.8 del Cap. 3.}$$

$$= \sqrt{\lim_{t \to 0} (1 - \text{sen}^2\, t)}$$

$$= \sqrt{1 - 0}$$

$$= 1$$

3.- $$\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$$

Al probar esta relación, se utiliza la desigualdad

$$t \leq \frac{\text{sen } t}{\cos t}$$

que vale cuando

$$\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

De la desigualdad inicial, tenemos que

$$\cos t < \frac{\text{sen } t}{t} < 1$$

usando el teorema del emparedado, tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$$

4.- $$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

$$\frac{1 - \cos t}{t} = \frac{1 - \cos t}{t} \cdot \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)}$$

$$= \frac{\text{sen}^2\, t}{t(1 + \cos t)}$$

$$= \frac{\text{sen } t}{t} \cdot \frac{\text{sen } t}{(1 + \cos t)}$$

Luego

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \to o} \frac{\text{sen } t}{t} \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{1 + \cos t}$$

$$= 1 \left(\frac{0}{1 + 1}\right)$$

$$= 0 \ .$$

BIBLIOGRAFIA

1.- Alexsandrov , Kolmogorov; Visión general de la Matemática , Cap. 1, Ed. mimeografiada F. C.- UNAM.

2.- Anton, H. , Cálculo con Geometría Analítica , Vol. 1 , Limusa Wiley, México 1984

3.- Bosch G. C.; Guerra T. M. ; Hernández G. C. y Oteiza O. E. , Cálculo diferencial e integral , Publicaciones Cultural S.A. , México 1981.

4.- Bourbaki, N. , Elementos de Historia de las Matemáticas , ALIANZA EDITORIAL, Madrid, 1972

5.- Boyer, C.B. , The concept of the Calculus, Dover Publication , N.Y. , 1959.

6.- Courant, R. y Robbins, H. , ¿Que es la matemática? , Aguilar , Madrid , 1971.

7.- Garibay , K. a Ma.; Epica Náhuatl , Divulgación Literaria UNAM , México 1978.

8.- Gutiérrez , S.J.L. , Grupo de Biomatemática , Matemáticas para las Ciencias Naturales Primera Parte. Mimeo. F.C. UNAM.

9.- Instituto de Filosofia, Academia de Ciencias de la URSS; Dpto. de Filosofía Academia de Ciencias de Cuba., Metodología del Conocimiento Científico, Presencia Latinoamericana S.A. México 1981.

10.- Kline, M. , The Loss of Certainty , Oxford University Press , N.Y. 1980.

11.- Kudriávtsev, L.D. , Curso de AnálisisMatemático T. 1 , Edit. MIR , 1983.

12.- Landau, L.D. y Kitaigorodski A.I. , Cuerpos Físicos , Edit. MIR , 1982

13.- López, E. J. Medir y Contar , Edición mimeografada, F.C. - UNAM.

14.- Mc Cowen, P.W. , Calculus: An Historial Approach , Springer-Verlag , N.Y. , 1979.

15.- Nicolle J. , La Simetría , Mirasol , Argentina 1961.

16.- Peterson J. , "Proyecciones demográficas Mundiales para el S. XXI" , Contextos, Año 2 , No. 33 ,1984.

17.- Puig J. , Análisis Matemático 1 , Toray-Masson St. Barcelona 1981.

18.- Somorodinski Ya. , La Temperatura , Edit. MIR , Moscu 1983.

19.- Spivak , Michael. , Cálculo Infinitesimal T. 1 , Reverte 1978.

20.- Struik, D.J. , Historia Concisa de las Matemáticas , IPN, México 1980.

21.- Swokowski , E.W. , Fundamental of College Algebra, P.W.S. , Boston 1981.

22.- Tirado, M. , El problema del Petroleo: Tabasco, Chiapas y el Gasoducto , Quinto Sol.