2 ej.
1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

"El desarrollo del Concepto de Función desde la Antigüedad hasta la época de Riemann"

Tesis
que para obtener el título de
MATEMATICO
presenta

María de la Paz
Alvarez Scherer

1986

Introducción

El concepto de función es central en todas las ramas de las matemáticas; de hecho este concepto lleva en su todo un método para abordar una multitud de problemáticas. ¿Cómo surge? ¿Cómo se desarrolla su definición formal? Tales son algunas de las preguntas que buscamos contestar en este trabajo, centrándonos en las funciones de variable real.

Al abordar desde el punto de vista de su historia al concepto de función nuestro marco teórico es el del materialismo histórico y, en consecuencia, quisimos abordar (aunque fuera someramente) el contexto de cada época histórica intentando mostrar cómo el desarrollo de la ciencia y su orientación corresponden a las necesidades concretas de la sociedad en cada periodo o, dicho más precisamente, a las necesidades de la clase dominante en cada época. A este respecto habría muchísimo más que desarrollar en el sentido de, por ejemplo, el libro de John D. Bernal [B.].

Creemos también que en términos de la enseñanza de las matemáticas tiene mucho valor abordar el desarrollo histórico de los conceptos fundamentales, mostrándoles a nuestros estudiantes el gran esfuerzo que ha implicado el establecimiende lo que hoy es el patrimonio común y aceptado del mundo científico. Un aspecto que habría que desarrollar más en este mismo sentido, es el de mostrar cómo la posibilidad de los "grandes hombres" la dan la práctica de muchos "anónimos" que crean la masa de resultados inconexos que serán cohesionados y unificados por esos grandes hombres. Es decir, como la labor de éstos presupone la de aquéllos.

Con este trabajo esperamos contribuir, aunque sea un poco, en estas tareas.

La realización de esta tesis fue posible gracias a las sugerencias, discusiones y al apoyo de muchos compañeros. Jeff fue papá y mamá de los niños, apapachador de histérica permanente, además de consejero de estilo y apoyador en todo; sin él nada hubiera sido posible. El trabajo con Christian me ha mostrado cómo abordar el estudio de la historia. Carmenchu fue mi asesora de francés a media noche. Los comentarios de Miguel Angel García, Santiago López de Medrano y Sergio Hernández fueron de gran valor. A ellos y a todos los que siempre estuvieron para meter el hombro ¡Gracias!

En particular fue fundamental el apoyo y entusiasmo de mi director de tesis Miguel Lara quien me propuso este tema y se preocupó por leer y discutir toda la serie de notas y borradores que armaron este trabajo. A él y a Nati, su mamá, todo mi cariño y todo mi agradecimiento por su confianza en mi.

Por último tomo este párrafo de la introducción de la tesis de Ana Margarita Guzmán:

"Este trabajo se pudo llevar a cabo gracias a la liberación de horas por un semestre que obtuvimos varios ayudantes de profesor de la Facultad de Ciencias y que, a pesar de la desconfianza manifestada por los elementos del CDM[*] y del hostigamiento abierto del personal académico de derecha, todos terminamos nuestros trabajos en el plazo acordado".

(*) los que los conformaban en el periodo 1984-85.

Indice

Capítulo I. La Antigüedad _ _ _ _ _ _ _ _ 1
Capítulo II. La Edad Media _ _ _ _ _ _ _ 6
Capítulo III. La Revolución Científica. siglos XVI y XVII _ _ _ _ _ _ _ _ _ 17
Capítulo IV. La Revolución Matemática. siglos XVI y XVII. El Nacimiento del Cálculo. _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 24
Capítulo V. Siglo XVIII _ _ _ _ _ _ _ 45
Capítulo VI Siglo XIX (1800-1855) _ _ 60
Epílogo _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 82
Apéndices _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 85
Bibliografía _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 93

Para el estudio del desarrollo del concepto de función hay que establecer cuándo es que empiezan a surgir los primeros gérmenes del mismo.(*)

En las épocas mesopotámicas y egipcias no encontramos la noción de función. Las tablas que se crearon en esa época, tanto las astronómicas como las de recíprocos etc, fueron hechas empíricamente sin que hayan llevado a ninguna generalización del método ni a poner a discusión qué es lo que las fundamentaba. El hecho era que las tablas les funcionaban para resolver ciertos problemas concretos y, en cuanto al concepto de función se refiere podemos hablar de una cierta "intuición de función", como diría E. T. Bell [B4], pero de ninguna manera situar allí el origen del concepto.

Donde se puede establecer una cierta polémica es con los griegos quienes heredan mucho de los babilónicos dándole otro carácter a las matemáticas. Donde los mesopotámicos hacían todo un cierto procedimiento para resolver un problema particular, los griegos se preguntaron ¿porqué es cierto? ¿es válido en general? etc. Es decir, a partir de los elementos aportados por Mesopotamia, los griegos hacen el cimiento de toda una magnífica construcción científica.

¿Tenían los griegos la noción del concepto de función?

(*) Ver Apéndice I

La idea de cambio y de cantidades variables no eran ajenas al pensamiento de los griegos. Ya en las épocas de Heráclito y de Zenón de Elea se discutían ampliamente problemas de movimiento. Toda la matemática aristotélica está consagrada al estudio de la naturaleza y de su movimiento. Un ejemplo de esto es el estudio de cuerdas de distinta longitud sometidas a la misma tensión y la relación con las notas musicales por ellas emitidas. Más tarde, en la época alejandrina, los astrónomos construyeron tablas (que de hecho eran tablas trigonométricas) de las cuerdas de una circunferencia. El Almagest de Ptolomeo ofrece un vasto panorama de todas las relaciones astronómicas que manejaban.

Otro tipo de elementos, en cuanto a las relaciones que los griegos usaban, nos los da el estudio que hicieron sobre las cónicas a partir de las relaciones entre distintas magnitudes geométricas.

Y esto no es todo. Por ejemplo Arquímedes estudió problemas de valores extremos, de tangentes, de áreas, de volúmenes, de centros de gravedad con métodos que recuerdan mucho a los del cálculo integral.

Y aún así, a la luz de todo este impresionante avance tanto en conceptos y método, como en generalidad y potenciabilidad, nos debemos preguntar si los griegos en los tres siglos de su esplendor, desarrollaron o no el concepto de función.

Sin pasar todavía a contestar esta pregunta, mostremos ahora algunos elementos que marcan las limitaciones de las matemáticas griegas.

Para empezar, un hecho que es de todos conocido, es la inmensa carencia que representó el no contar con una nomenclatura adecuada. Todavía hasta el siglo III NE lo que utilizaban era dígitos y algunas letras del alfabeto para denotar cantidades. Pero nunca hubo una fórmula algebraica, ni ningún tipo de algoritmo, ni nunca se introdujeron expresiones analíticas. Si acaso algo empezaba a utilizar Diofanto (época alejandrina tardía), como por ejemplo, signo de igualdad y signos para las primeras potencias de una cantidad desconocida; pero esto no sólo no se generalizó sino que se perdió con la caída bajo el bárbaro Imperio Romano.

Por otro lado, al abordar el estudio del movimiento, y debido en gran medida a la controversia que suscitaron los argumentos de Zenón (*), los griegos dejaron de lado problemas como velocidad media y velocidad instantánea; y al hacer esto, dejaron fuera del estudio matemático a problemas que involucran cambios cuantitativos o movimiento local. Este tipo de problemas condujeron posteriormente al establecimiento de la noción más abstracta de cantidad variable. El efecto que tuvo este hecho sobre el desarrollo de la astronomía y la mecánica griega fue que ninguna de estas dos ciencias pudiera sobrepasar los límites del movimiento

(*) Los artículos de Cajori [8-] muestran el papel histórico de los argumentos de Zenón uniforme.

Otro elemento es la desconfianza de los griegos a los conceptos de infinitamente grande e infinitamente pequeño y a los procesos infinitos. Esto los llevó a no considerarlos ni como instrumento ni como explicación de fenómenos naturales.

Además está su imposibilidad para definir y trabajar con los irracionales, lo cual los condujo no sólo a restringir la aritmética y el álgebra, sino también a concebir al álgebra y a la geometría como cosas ajenas entre sí. Esto queda reflejado en la distinción tajante entre número y magnitud.

Finalmente hay un elemento que, de cierta forma, contiene a los anteriores y que es el hecho de que los griegos no crearon el cálculo. Arquímedes, por ejemplo, seguramente se dió cuenta de que el método que utilizaba para resolver varios problemas (determinar el área de un rizo de la espiral, calcular el volumen de un esferoide, encontrar el área de un segmento de un hiperboloide de revolución) era el mismo. Y sin embargo, esto no lo llevó a considerar ni la generalidad del método ni a mostrar, por lo menos para esos casos, la noción de función o de integral.

Ahora sí, sopesando los elementos mostrados, pasamos a contestar la pregunta original:

Creemos, al igual que A.P. Youschkevitch [Y] y que A.F. Monna [M], que el pensamiento matemático griego no creó la noción general de cantidad variable ni el concepto de función.(*)

(*) Sin embargo, hay autores que sostienen otra posición, por ejemplo, O. Pedersen [P]. Ver Apéndice II.

El Imperio Romano conquistó a Grecia, o mejor dicho, la destruyó. Le cupo la tristísima gloria de quemar la Biblioteca de Alejandría que contenía toda la obra creada en siglos. Todo desapareció en el año 47 ANE.

Había, sin embargo, una segunda biblioteca en Alejandría en el Templo de Serapis. Esta había sido creada al llenarse la de Alejandría y se salvó del incendio. No sólo eso, sino que a través de las colecciones tanto de Atalo III como de Marco Antonio, creció.

En el año 392 NE una vez que se hubo reconocido al Cristianismo como la religión oficial del Imperio Romano y que se proscribieron las religiones "paganas", se quemaron los más de 300,000 manuscritos que albergaba el Templo al que también se destruyó. ¿La razón?: eran libros paganos. Los autores fueron los cristianos más fanáticos y sus seguidores.

Quedaban unos cuantos libros. Estos fueron pasto de las llamas de los musulmanes en 640 NE que al conquistar Egipto y encontrar los libros siguieron el ejemplo cristiano con la siguiente consigna "estos libros o contienen el Corán en cuyo caso no necesitamos leerlos, o contienen cosas contra el Corán en cuyo caso no debemos leerlos." Cuéntase que por seis largos meses los baños de Alejandría fueron calentados con rollos de pergamino.

Durante los siguientes 10 o 12 siglos prevaleció en Europa el más terrible oscurantismo instrumentado por el poder feudal y la Iglesia Católica.

Sin embargo, alrededor del siglo XII se empezaron a establecer nuevas bases para el desarrollo, en particular, de la ciencia al ser recobrados y traducidos los textos de la Grecia clásica. En este terreno fue de primordial importancia la obra de Aristóteles. En el siglo XIII había sido absorbida toda la visión de la naturaleza de los aristotélicos y con ello se puso nuevamente a la discusión problemas como el de la ciencia del movimiento.

Cabe recordar aquí cuál era el modelo del universo aristotélico: se pensaba en esferas concéntricas que giran alrededor de la esfera terrestre. Debajo de la esfera de la luna estaban la esfera de la tierra, el aire, el agua y el fuego. La ley del movimiento sublunar (es decir de las esferas debajo de la esfera de la luna) se rige por el principio del "lugar natural", es decir, cada cuerpo busca llegar al lugar natural del elemento dominante en su composición que puede ser agua, aire, tierra o fuego.

Los aristotélicos distinguían dos tipos de movimiento: el natural y el violento, dependiendo de si el cuerpo se mueve en dirección de su lugar natural o en la dirección contraria. Aristóteles postulaba la existencia de una fuerza extraña a los cuerpos y en contacto con ellos como la causa de ambos tipos de movimiento. Formulada en nuestra notación, la descripción aristotélica del movimiento daría lo siguiente

$$v = k\frac{F}{R}$$

con v = velocidad F = fuerza aplicada
R = resistencia k = constante de proporcionalidad

Esta ley del movimiento difiere de la 2ª ley de Newton en que supone la necesidad de la acción constante de una cierta fuerza para mantener velocidad constante. Sin embargo, esta ley aristotélica es empíricamente razonable si hay fricción presente y no se le reconoce como otra fuerza actuante. Una consecuencia de esta ley en que Aristóteles concluía que no podía existir el vacío, pues si existiera, es decir si no hubiera resistencia, resultaría un movimiento de velocidad infinita, lo cual es imposible.

Estos son algunos de los elementos básicos de la ciencia medieval, sin embargo, la ciencia aristotélica no fue aceptada acríticamente. Ya en el siglo XIV habían surgido comentarios, críticas y aun formulaciones alternativas de varios principios.

Nuestro interés al estudiar un poco de la ciencia medieval es establecer cómo es que resulta ser precursora de la Revolución Científica. Cuando hablamos de la Revolución Científica estamos pensando en el trabajo de Copérnico, Tycho Brahe, Kepler y Galileo; en el terreno de las matemáticas estamos pensando en Descartes y Fermat y también en Newton y Leibniz.

Veamos algunos ejemplos del trabajo desarrollado en las universidades escolásticas, particularmente en la de Merton en Oxford y la de Chartres en París durante el siglo XIV.

Habíamos ya dicho que el pensamiento griego dejó de lado las consideraciones matemáticas sobre el movimiento no uniforme. Este problema fue abordado por Swineshead [S2] quien en un tratado sobre el movimiento definió velocidad uniforme exactamente como fuera abordado 2 siglos después por Galileo:

> El movimiento uniforme local es aquél en el que en porciones iguales de tiempo se describen distancias iguales.

Heytesbury [H3] distingue de este movimiento al movimiento uniformemente acelerado

> Cualquier movimiento es uniformemente acelerado si en cada porción igual de tiempo adquiere un incremento igual de velocidad.

Heytesbury también introdujo el concepto de velocidad instantánea anticipando otra vez casi textualmente la definición de Galileo:

> La velocidad instantánea no se mide por la distancia recorrida, sino por la distancia que recorrería el punto durante un cierto tiempo al grado de velocidad en que se mueve en ese preciso momento.

Los escolásticos de Merton formularon el siguiente teorema:

> Un cuerpo en movimiento que adquiere o pierde un cierto incremento [de velocidad] recorre en un tiempo dado una magnitud exactamente igual a la que recorrería si se hubiera movido continuamente en el mismo tiempo con el grado medio [de velocidad].

La demostración más interesante de este teorema fue dada en 1350 por Oresme en París utilizando una representación gráfica de las variaciones de ciertas cantidades. Esta demostración fue tomada en forma muy similar por Galileo en el Teorema I, Proposición I del Tercer Día en su obra Diálogos Sobre Dos Nuevas Ciencias [9].

Otro elemento muy importante fue la introducción que hizo Buridan [Ba] del concepto de ímpetu. Como veíamos más arriba, la ley aristotélica del movimiento era

$$v = k\frac{F}{R}$$

En crítica a ella, por cuanto que implica que para cualquier cantidad de fuerza que se aplique siempre existe movimiento, se desarrollo una discusión que tuvo dos resultados muy importantes: por un lado, se volvió plausible pensar en términos del vacío, y, con ello, en la existencia de un movimiento ideal no obstruído. Este concepto fue fundamental para la física de Newton. Por otro lado y relacionado con lo anterior, se rechazó la idea de que el medio fuera la causa del movimiento; en todo caso lo retarda.

Al ya no considerar al medio como la fuerza motriz fue necesario postular una "fuerza incorpórea imprimida" que un cuerpo en movimiento violento poseé y que mantiene su velocidad continuamente. Este concepto fue elaborado por Buridan bajo el nombre de "ímpetu"

> El motor al imprimirle movimiento a un cuerpo en movimiento le imprime un cierto ímpetu o una cierta fuerza motriz del cuerpo en movimiento en la dirección en la cual el motor estaba moviendo al cuerpo en movimiento, ya sea hacia

arriba, hacia abajo, lateralmente o circularmente.

Buridan también estableció que el ímpetu era directamente proporcional a la masa y a la velocidad anticipando con todo esto la definición de momento.

Además Buridan postuló que las esferas celestes también poseían ímpetu y con ello unificó en una sola ley al movimiento terrestre y al celeste.

Por todo lo dicho, Buridan con su teoría del ímpetu sentó las bases para una nueva teoría de la dinámica.

En astronomía y cosmología si bien el modelo del universo era el de las esferas aristotélicas, los cálculos se hacían usando los epiciclos de Ptolomeo. Escolásticos como Oresme y Buridan llegaron a considerar con cierto grado de detalle conceptos tales como la rotación de la tierra, la posibilidad de que existieran mundos semejantes a la Tierra y la existencia del espacio infinito más allá de las esferas celestes. Este tipo de argumentos fueron retomados dos siglos después por Copérnico.

¿Cuáles son entonces las características de la ciencia del medievo?

Como decíamos, las primeras bases las aportó la filosofía natural aristotélica. Los propios escolásticos muy pronto la empezaron a cuestionar y a proponer nuevas ideas. A la filosofía natural se le contrapusieron también otras dos tendencias; una fuertemente reaccionaria (la Iglesia Católica) y otra progresista (R. Bacon, Duns Scotus y otros).

La Iglesia Católica en 1277 proclamó una condena contra toda proposición derivada de la filosofía natural. Con base en esta condena la Inquisición prohibió la libre investigación y la libre enseñanza y cualquier que fuera sorprendido violando estas disposiciones o que fuera siquiera sospechoso de ello era brutalmente reprimido.

Por otro lado, a la filosofía natural aristotélica se le contrapusieron Robert Grosseteste (1168-1253), Roger Bacon (1214-1294), William de Ockham (1300-1349), Duns Scotus (1266-1308) como representantes de una nueva tendencia. Bacon, por ejemplo, atacaba duramente a la filosofía natural por ser fuente de muchos errores y por sostenerse sólo por la autoridad de Aristóteles. Para él el verdadero conocimiento sólo se podía obtener mediante la experimentación y las matemáticas. Ockham proponía que se separara la teología de la ciencia natural: en la primera el conocimiento se obtendría por revelaciones divinas, en la segunda por la experiencia. Muchos de ellos fueron reprimidos por la Inquisición pues luchaban por la libre inves_ tigación y experimentación. Marx y Engels sitúan en ellos al nacimiento del materialismo moderno.

Hay una hipótesis muy interesante acerca de las repercusiones que tuvo todo lo anterior sustentada por Uritam [U]. Según él, todos los cuestionamientos a la ciencia natural llevaron a que se pusiera en duda a la posibilidad misma de hacer ciencia. Había tendencias a aceptar el empirismo como la única base del conocimiento científico pero no se tenía un cuerpo teórico coherente que lo englobara. Esto los llevó a trabajar con sistemas de proposiciones que no necesariamente se aplicaban al mundo real sino a un mundo hipotético "que Dios hubiera podido crear." (*)

Esta interpretación se basa en el hecho de que uno encuentra mucho que los escolásticos medievales proponían problemas hipotéticos para su solución. Postulaban ciertas condiciones cuya realidad no estaba en discusión y sacaban conclusiones; estos problemas se proponían secundum imaginationen (según la imaginación) frase esta que aparece repetidamente en los trabajos de la época.

De esta forma, Buridan y Oresme no concluyeron que la tierra gira, sino que dedujeron las consecuencias que ocurrirían en el supuesto de que la tierra girara.

(*) formulación que, a la vez, los protegía de ser acusados de herejes.

Se puede concluir que efectivamente Oresme, Buridan, etc fueron los precursores de muchas de las ideas que cobraron forma en la Revolución Científica. La diferencia entre los escolásticos y los científicos del siglo XVI está en la naturaleza de las hipótesis científicas y en su explicación. Cuando Copérnico habla del sistema heliocéntrico con la tierra girando y revolucionando alrededor del sol no está proponiendo un sistema de supuestos, sino que sostenía que de verdad la tierra tenía movimiento físico.

Al respecto Kepler decía: "los principios fundamentales en la forma de hipótesis y suposiciones sobre el universo deben ser físicamente ciertos e incapaces de ser de otra forma." "Confieso que me parece el juego más absurdo el tratar de explicar los procesos de la naturaleza con causas falsas. Pero no hay tal juego en Copérnico quien creía realmente que sus hipótesis eran ciertas... no sólo lo creía, sino que demostró que lo eran."

Una última observación sobre la ciencia medieval. Aún siendo muy sorprendentes los resultados a los que llegaron los escolásticos medievales, se puede asegurar que, en el contexto de esa época, no podían crear una nueva ciencia y una nueva matemática. No sólo estaba la fuerte traba impuesta por la Iglesia contra la investigación y la enseñanza; había otras razones que retardaron los cambios que se necesitaban. Entre ellas habría por lo menos las siguientes:

Entre los siglos XII y XVI Europa era un rompecabezas formado por multitud de ducados y principados independientes, estados-ciudades y estados papales. Entre todos ellos se desarrollaron muchas guerras que absorbieron mucha energía de los pueblos.

Además, en el año 1100 se iniciaron las Cruzadas en las que se perdieron una enorme cantidad de vidas.

Por último, en la segunda mitad del siglo XIV la Peste Negra acabó con más de la tercera parte de la población europea.

Todo ello condujo al estancamiento y muchas veces al retroceso del desarrollo de las fuerzas productivas. Sin embargo, las fuerzas revolucionarias empezaban a hacer sentir su influencia por toda Europa. Se anunciaba una nueva sociedad: la sociedad capitalista.

En el periodo que va de 1400 a 1600 Europa sufrió un drástico cambio. Por un lado, tuvieron mayor difusión las ideas revolucionarias. Por otro lado, de las incesantes guerras surgieron cambios políticos profundos. El ejemplo más relevante de esto fueron los estados italianos.

Los estados italianos adquirieron muchas riquezas sobre todo en los siglos XIII y XIV debido esencialmente a su posición geográfica ya que sus puertos eran la entrada natural a toda Europa de los cargamentos provinientes de Asia y Africa. Se volvió así el centro financiero de Europa y se crearon grandes bancos. Esta riqueza fue esencial para el surgimiento de las ciencias y del arte.

Con la introducción de la brújula y de la pólvora se abrieron nuevos problemas: la brújula permitió la navegación en alto mar y ello, a su vez, la apertura de nuevos mercados, y la pólvora transformó las leyes de la guerra.

Con base en lo anterior se inició una nueva era en la economía: creció enormemente la manufactura, la minería, la agricultura a gran escala y floreció toda una variedad de nuevos oficios. Se hizo uso productivo de las máquinas y se trabajó en su perfeccionamiento.

Esto llevó a la necesidad del estudio más preciso del movimiento, y la navegación en alto mar hizo necesario el estudio de los objetos celestes y la creación de relojes precisos para poder calcular latitudes; la guerra necesitaba de mejores máquinas y armas y de saberlas utilizar de la mejor manera.

En contraste con las sociedades esclavistas (Roma, Grecia, Egipto) y con la servidumbre feudal, la nueva sociedad en desarrollo tenía dos nuevas clases en expansión: una formada por los artesanos libres y otra, muy relacionada con la anterior, formada por trabajadores libres para vender su fuerza de trabajo.

La competencia capitalista, desde entonces, busca encontrar mecanismos que reduzcan el número de trabajadores aumentando a la vez la productividad por un lado, y por el otro, busca mejorar materiales y técnicas de producción so pena de sucumbir ante los otros capitalistas.

Todo esto lleva a que se abra una era de nuevas investigaciones e invenciones. Y allí donde éstas se topan con la rigidez de la Iglesia, ésta tiende a ser dejada de lado.

La clase de los mercaderes también promueve los cambios apoyando financieramente todas las exploraciones geográficas en búsqueda de nuevos mercados y de nuevos proveedores de materias primas. De estos viajes resultó, entre otras cosas, el conocimiento de otras civilizaciones con creencias y costumbres muy distintas a las europeas. Todo esto desafiaba los rígidos dogmas medievales y estimulaban al pensamiento libre.

La lucha contra las trabas que imponía la Iglesia culmina en la Reforma Protestante. Los reformadores fueron fuertemente apoyados por los mercaderes y por aquellos que luchaban en contra del poder clerical.

Pero la Reforma tampoco liberó al pensamiento, reformó los dogmas, no los rompió. Sin embargo, el proceso de separación de la Iglesia Católica había despertado la conciencia y la imaginación de mucha gente, y se abrió un espacio para proclamar que la verdad estaba en la naturaleza y que el conocimiento sólo se adquiría con la observación y la experimentación.

Y es en este contexto que pueden surgir las obras de Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileo y muchos otros.

Copérnico (1473-1543) hizo a un lado la teoría tolomaica y aristotélica que se usó durante 14 siglos. En términos de su teoría lo meritorio, lo grandioso fue el proponer que el sol, y no la tierra, era el centro del sistema formado por ellos dos y los cinco planetas conocidos entonces. Sin embargo mantenía, como Ptolomeo, que las órbitas son circulares y que el movimiento de los planetas tenía velocidad constante.

La teoría de Copérnico creó un cisma entre todos los científicos de la época, la mayor parte de ellos rechazaba esta nueva visión del universo. Empero, dos hechos objetivos empezaron a darle fuerte peso: por un lado, el sistema de Copérnico simplificaba mucho el cálculo de las trayectorias de los planetas con resultados más exactos y se empezaron a hacer nuevas tablas de posiciones usando este sistema que así fue ganando, en la práctica, fuerza y costumbre. Por otro lado, y mucho más importante por cuanto sí modificó el punto de vista de los científicos, fue el descubrimiento que Tycho Brahe y otros astrónomos alemanes hicieron después, en 1572, de una nueva estrella. Las apariciones y desapariciones súbitas contradecían fuertemente el dogma aristotélico y escolástico sobre la invariabilidad de los cielos.

Quien realmente llevó a su fin esta revolución iniciada por Copérnico fue Kepler (1571-1630). Kepler estaba impresionado por la belleza y la armonía del sistema de Copérnico y decidió dedicarse a desarrollar más el estudio sobre las proporciones geométricas del cielo ayudado por los métodos más precisos de observación que había desarrollado Tycho Brahe. Sus resultados los conocemos hoy como las leyes de Kepler. El rompió radicalmente con la tradición al descubrir que los planetas, en su movimiento, describen elipses y que su velocidad no es uniforme sino que barren áreas iguales en tiempos iguales.

Finalmente la teoría heliocéntrica junto con las leyes de Kepler fueron reconocidas como verdaderas. Esto significó que la ciencia del movimiento tenía que ser rehecha a la luz de una tierra que gira alrededor de su eje y alrededor del sol. Es decir, se requería una nueva ciencia de la mecánica.

Y en 1638 apareció la obra que respondía a esta necesidad: Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due Nuove Scienze de Galileo Galilei. Las dos nuevas ciencias eran la mecánica y la resistencia de materiales. Ya antes, en 1632, Galileo había publicado Dialogo dei Massimi Sistemi donde desarrollaba la teoría de Copérnico. Este libro motivó que fuera fuertemente reprimido por la Inquisición y de hecho se le prohibió volver a publicar. El Diálogo entre dos Ciencias fue sacado clandestinamente a Holanda y sólo así pudo ver la luz.

La vida de Galileo, su obra y el significado de ésta, son y han sido objeto de estudio y de interpretación. No es nuestro objetivo entrar en este apasionante capítulo de la historia de la ciencia. Sólo quisiéramos establecer que Galileo (y desde luego Copérnico, Kepler, Brahe, Huygens y otros) efectivamente revolucionaron la ciencia. Que son los creadores de lo que hoy se conoce como ciencia; que particularmente a Galileo le debemos el espíritu de la ciencia moderna basada en la armonía del experimento con la teoría, junto con el énfasis en la necesidad del uso de las matemáticas para lograrla.

Regresando al tema de nuestro trabajo preguntamos ¿qué concepto de función se tenía en la época de Galileo?

Galileo expresaba las relaciones en las palabras y el lenguaje de las proporciones y no en términos de función (es decir, no en términos de variables, etc.). Esto hizo que sobre algunos problemas concretos (por ejemplo el movimiento descrito por una esfera en un plano inclinado con un deflector en su extremo) no pudiera obtener resultados generales sino sólo resultados particulares establecidos experimentalmente. Sin embargo, el objeto mismo de su estudio, el movimiento, abrió las puertas a su tratamiento en términos de la noción de función. Así, formulaciones de Galileo como:

"Los espacios recorridos por un cuerpo que cae con movimiento uniformemente acelerado son entre si, como el cuadrado del intervalo de tiempo que emplea en recorrer esas distancias"

"Los tiempos para descender por planos inclinados de altura igual pero pendiente distinta son entre si, como la longitud de estos planos".

llevaron ulteriormente, en forma natural, a su tratamiento en términos de

$$s = kt^2 \quad \text{la primera y}$$

$$t = kl \quad \text{la segunda.}$$

La Revolución Científica llevaba también en su seno la necesidad y las condiciones para la, por así llamarlo, Revolución Matemática

Como veíamos, en particular en la obra de Galileo, el tratamiento que hacía del movimiento llevaba necesariamente a formulaciones matemáticas de un nuevo tipo. Hay que hacer énfasis en qué condiciones son las que posibilitan e impulsan este cambio.

Por un lado, en el estudio de los fenómenos naturales hay un cambio de enfoque, pues ya no sólo (ni no tanto) importan los cambios cualitativos sino que se centra mucho la atención en los cambios cuantitativos.

Esto, a su vez, conduce a que se desarrolle una fuerte preocupación por poder medir de la forma más precisa los cambios que se dan y, además, de poder expresarlo también lo más precisamente posible.

Por otro lado se había desarrollado una herramienta que permitía mejorar y crear nuevos metodos para calcular: el álgebra simbólica. Además se manejaban no sólo númeos racionales e irracionales, sino también números complejos abriéndose así también muchas nuevas posibilidades.

La aparición de la obra Discurso del método de René Descartes en 1637 marca la revolución en las matemáticas.

El interés de Descartes (1596-1650) era establecer un método para conducir el pensamiento a la verdad; y, para él, las matemáticas son la esencia de ese método.

En su introducción a La Geometría Descartes dice que su propósito principal es

> reducir todos los problemas de la geometría a términos tales que el conocer las longitudes de ciertos segmentos de línea recta sean suficientes para su construcción. [D]

Lo que hace es relacionar curvas planas con ecuaciones en las coordenadas de los puntos de esas curvas, entendiendo por coordenadas segmentos de línea.

En su libro II de La Geometría Descartes clasifica las curvas de forma distinta a la de los griegos y critica la de ellos. Para los griegos las curvas geométricas eran las que se pueden construir con regla y compás y las curvas mecánicas las que no. Para Descartes curvas geométricas son las que se pueden describir con una única ecuación algebraica. A las otras las llama mecánicas. La enorme importancia de esto radica en que es la primera clasificación de las curvas que es independiente de su constructibilidad.

En su obra se sostiene por primera vez claramente que una ecuación en x y y es una forma de establecer una dependencia entre dos cantidades variables de manera tal que al dar valores a una de ellas podemos calcular el valor de la otra.

¡Y esta introducción de funciones en forma de ecuaciones efectuó una verdadera revolución en las matemáticas!

Decíamos que esta revolución en las matemáticas era necesaria y que las condiciones para que se diera estaban dadas. Tan es así que Pierre de Fermat (1601-1665) escribió en 1629(*) Ad Locos Planos et Solidos Isagoge (Introducción a los lugares geométricos sólidos y planos). Su búsqueda era una forma universal de abordar los problemas relacionados con curvas. ¡Y la encontró relacionándolas precisamente con ecuaciones!

Lagrange decía [4] de esta revolución:

(*) fue publicado hasta 1679.

"Mientras que la geometría y el álgebra marcharon por separado su avance fue lento y sus aplicaciones fueron limitadas. Pero cuando estas dos ciencias se unieron tomaron cada una de la otra nueva vitalidad y marcharon de ahí en adelante a paso veloz hacia la perfección".

La revolución en las matemáticas efectivamente las transformó. Una de las consecuencias que tuvo fue el de cambiar, trastrocar los papeles de la geometría y el álgebra: desde la época de los griegos hasta el año 1600 (aproximadamente) la geometría fue el elemento dominante en las matemáticas; el álgebra había tenido cierta importancia (sobre todo para las matemáticas árabes e hindúes), pero la geometría era la que dotaba de marco teórico y de método en general. Después de 1600 el álgebra desplazó a la geometría como enfoque dominante. El factor decisivo, el que consolidó el cambio, es situado por M. Kline [K2] y por H.J.M. Bos [B2] (**) (y coincidimos con ellos), en el surgimiento del cálculo.

El cálculo es formulado como tal por Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716). Sin embargo ya desde antes de ellos estaban planteados los problemas que el cálculo vino a resolver y, además, estaban dados de manera dispersa e incompleta los elementos para su creación. (*) Los problemas que estaban planteados se dividen en cuatro tipos:

1.- Dada la fórmula de la distancia que recorre un cuerpo (como una función del tiempo), encontrar la velocidad y la aceleración instantáneas, y viceversa: dada la fórmula que describe la acele-

---

(*) Laplace, por ejemplo, decía que Fermat era el verdadero creador del cálculo.

(**) Ver Apéndice III

ración de un cuerpo (como una función del tiempo), encontrar la velocidad con la que se mueve el cuerpo y la distancia recorrida. Estos problemas habían sido abordados por Galileo y por su discípulo Evangelista Torricelli (1608-1647).

2.- Encontrar la tangente a una curva. El interés por este tipo de problemas surge de varias partes: por un lado es un problema clásico de la geometría; por otro lado tiene muchas aplicaciones prácticas; por ejemplo, en óptica — al estudiar el comportamiento de un haz de luz uno lo refiere frecuentemente a la tangente (o a la normal) de una curva — y en el estudio del movimiento (la dirección del movimiento de un cuerpo en cualquier punto de su trayectoria es la dirección de la tangente a la trayectoria en ese punto)

3.- Encontrar valores máximos y mínimos de una función. Aplicaciones inmediatas de esto estaban en la astronomía (distancias máximas y mínimas de los planetas al sol) y en balística

4.- Encontrar la longitud de una curva (por ejemplo la distancia recorrida por un planeta en un cierto tiempo), encontrar el área encerrada por una curva o el volumen encerrado por una superficie. El interés por estos problemas había renacido en Europa al conocerse la obra de Arquímedes y durante mucho

mucho tiempo fueron abordados con el método de exhaución o reformulaciones del mismo.

Antes de ver cómo se habían abordado algunos de estos problemas hay que establecer cómo y qué tanto se había desarrollado el concepto de función que es absolutamente necesario para el desarrollo del cálculo.

Veíamos más atrás cómo Descartes tenía un manejo intuitivo de los conceptos de función y de variable, básicos para el desarrollo del análisis. Casi todas las funciones que se introdujeron durante el siglo XVII se estudiaron primero como curvas (¡de ahí la importancia del trabajo de Fermat y Descartes!) y poco después fue reconociéndose el concepto de función. Esto sucedió cuando las funciones se introdujeron ya no como curvas sino por vías del movimiento. La parábola, por ejemplo, en lugar de introducirse como un lugar geométrico (una curva) se vió como la trayectoria de un proyectil. Otro ejemplo muy famoso es la cicloide estudiada ampliamente por Gilles Persone de Roberval (a sugerencia de Mersenne). La cicloide es (según la definición de Mersenne) la trayectoria recorrida por un punto fijo de una rueda que gira sin deslizarse por el piso.

Roberval, Barrow y su discípulo Newton se-conocieron explícitamente el concepto de curva como la trayectoria de un punto móvil.

La definición más explícita de función en el siglo XVII la dió James Gregory (1638-1675) en su Vera Circuli et Hyperbolae quadrature publicada en 1667. Decía él en sus definiciones(*)

> "5. Decimos que una cantidad está compuesta por otras cantidades si se obtiene de sumar, restar, multiplicar, dividir, extraer raíz o de realizar cualquier otra operación imaginable con esas otras cantidades.
>
> 6. Cuando la cantidad se compone por la suma, resta, multiplicación, división y extraer raíz decimos que está compuesta analíticamente."

En 1665 cuando Newton inició su trabajo sobre el cálculo llamó "fluente" a cualquier tipo de relación entre variables...

> "es decir, aquellas que en la generación de una curva por movimiento local perpetuamente crecen o decrecen"

En 1673 Leibniz utilizó por primera vez la palabra función en su manuscrito Methodus

(*) No se incluyen las definiciones 1 a 4 por no tener acceso a ellas; ver [7].

Tangentium inversa, seu de Functionibus (El método inverso de las tangentes o sobre las funciones). En este manuscrito todavía no es muy preciso el significado del término y Leibniz lo usa en dos sentidos. En la primera parte lo usa al hablar del problema de encontrar las ordenadas (de los puntos de una curva) dada una propiedad sobre la tangente de la curva o de ...

> "otras clases de líneas que, en una figura dada, realizan una función".

Youschkevitch siguiendo a D. Mahnke [Mc] dice que aquí Leibniz utiliza el término función según su etimología latina que significa "cumplir una obligación". Las "obligaciones" de esas líneas serían: Tocar en un punto a la curva, cortarla perpendicularmente, etc.

Sin embargo, en el mismo manuscrito vuelve Leibniz a utilizar el término función en un sentido distinto: como una expresión general para diferentes segmentos de línea relacionados a una curva dada.

En trabajos posteriores (1692 y 1694), Leibniz llama funciones a las relaciones entre abscisa, ordenada, cuerda, segmentos de tangentes y normales cortadas por los ejes coordenados, segmentos de subtangentes y subnormales, etc. Es en este sentido que Jakob Bernoulli (1654-1705) utiliza en 1694 el término función.

Entre 1694 y 1698 Leibniz se carteó mucho con Johann Bernoulli (1667-1748) y en esta correspondencia encuentra uno la búsqueda de un término más general para representar relaciones de dependencia entre cantidades y finalmente se llegó al uso del término función en el sentido de una expresión analítica.

Decía Johann Bernoulli que una función es

"una cantidad constituida de cualquier forma por variables y constantes."

Por "cualquier forma" quería decir expresiones algebraicas y trascendentes.

A este periodo (1680-169?) Bos [Bz] lo caracteriza como la introducción del análisis infinitesimal por medio del estudio de curvas con métodos algebraicos.

En 1714 Leibniz usó el término función para decir cantidades que dependen de una variable. Aquí ubica Bos (primera mitad del siglo XVIII) la separación de la geometría y el análisis. Este último pasa de ser herramienta para el estudio de las curvas a ser una rama de las matemáticas que trabaja ya no con relaciones entre cantidades geométricas con respecto a una curva, sino que trabaja con relaciones entre cantidades en general expresadas con fórmulas.

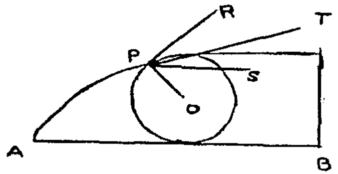
Este cambio lleva en sí un cambio en los conceptos fundamentales del análisis: en la fase geométrica era cantidad geométrica variable; la separación entre geometría y análisis hizo posible la aparición del concepto de "función de una variable" que pasó a ser poco a poco el nuevo concepto fundamental.

La idea de función ya era entonces central en el cálculo.

Regresemos un poco a los precursores de Leibniz y Newton en el tratamiento de los problemas mencionados.

En torno a encontrar la tangente a una curva se conocen trabajos como los siguientes:

Roberval utiliza para encontrar la tangente a una cicloide el hecho de que ésta está dada por dos movimientos que se suponen iguales. Por medio de una bisectriz a las dos direcciones obtiene lo buscado:

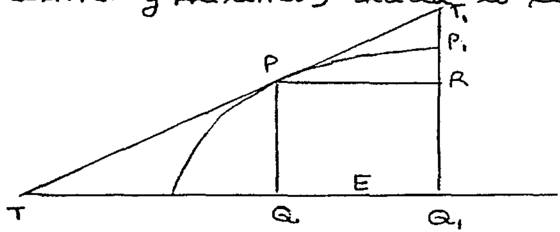


$\overrightarrow{PR}$ dirección del mov. de rotación

$\overrightarrow{PS}$ del de translación

PT es la bisectriz

Fermat en 1637 en su Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam (Método para encontrar máximos y mínimos) hacía lo siguiente



Queremos encontrar la tangente en P (TP) a una cierta curva. TQ será la subtangente. Si pudiéramos construir esta subtangente podríamos trazar TP y construir la tangente.

Sea QQ_1 un incremento en TQ de longitud E entonces $\triangle TQP \simeq \triangle PRT_1$

y $\quad TQ : PQ = E : T_1R$

Pero, dice Fermat, T_1R es casi P_1R y

$$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - QP)$$

Si, usando nuestra notación, llamamos $f(x)$ a PQ tenemos

$$TQ : f(x) = E : [f(x+E) - f(x)]$$

y

$$TQ = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}$$

En las funciones tratadas por Fermat siempre se podía dividir denominador y numerador por E. Después hacía $E = 0$ (él decía quitar el término E) y obtenía TQ. Como es evidente, el no contar con la posibilidad de usar límites ponía fuertes trabas a este método.

Isaac Barrow (1630-1677) utilizó un método muy parecido al de Fermat, aunque él usaba dos incrementos (que son equivalentes a los modernos Δx y Δy) y forma un triángulo, el "triángulo característico" o "diferencial" en el cual uno de sus lados puede ser considerado a la vez como parte de la tangente y como arco de la curva.

En torno a los problemas de máximos y mínimos Kepler inició sus estudios al determinar que el paralelepípedo recto de base cuadrada máximo que se puede inscribir en una esfera, es un cubo. Fermat desarrolló un método en Disquirendam Maximam et Minimam.

Trabajos sobre cómo encontrar la longitud de una curva y el área encerrada bajo una curva fueron desarrollados por Kepler, por Cavalieri y por Roberval.

Por otro lado Galileo en su obra Dos Nuevas Ciencias al tratar el problema del movimiento uniformemente acelerado da argumentos para hacer ver que el área bajo la curva tiempo-velocidad es la distancia recorrida: pero no llega a demostrarlo.

Como se ve, estos problemas eran abordados por separado, no se les reconocía como lo mismo o como problemas inversos. Uno de los primeros en notar esta relación fue James Gregory quien en 1668 demostró que el problema de encontrar tangentes y el de encontrar el área bajo una curva, eran problemas mutuamente inversos ¡pero nadie le dió importancia a su trabajo! Barrow por su parte entendió esta relación pero sólo bajo su forma geométrica y no le atribuyó mayor importancia.

Fueron Leibniz y Newton quienes supieron sintetizar todos estos elementos, generalizar el método para abordarlos y darle además una estructura a todo su trabajo. Los problemas de área, volumen, longitud de arco (que eran tratados antes como sumas) y los problemas de razón de cambio, tangentes, máximos y mínimos se reducían ahora a a diferenciación y antidiferenciación:

¡Había nacido el cálculo!

Newton mismo reconocía y le daba peso a todo el trabajo elaborado antes de él. En una carta a Hooke dice: "Si pude ver más lejos que Descartes fue porque estaba yo parado sobre los hombros de unos gigantes".

Y tanto él como Leibniz reconocieron la enorme importancia de su trabajo. Leibniz decía: "Si tomamos las matemáticas desde el inicio del mundo hasta el tiempo de Newton, lo que él ha hecho es la mejor mitad".

Hay puntos importantes de diferencia en los trabajos de Newton y Leibniz. El más conocido es el que se refiere a cómo calculaba Newton las "fluxiones" y cómo lo hacía Leibniz con la "diferencial".

Otra diferencia es la que se refiere a las funciones: mientras Newton hacía un uso muy libre de las series infinitas, Leibniz se inclinaba más por las finitas como objetos de estudio del cálculo. Sobre este problema intercambiaron entre sí algunas cartas en las que para Leibniz el argumento central para objetar las series infinitas era el trabajo de James Gregory donde aseguraba que la elipse y la hipérbola no se podían rectificar (y conocerse su longitud de arco) en términos de funciones conocidas. A partir de esto Leibniz retaba a Newton a demostrar, por medio de series, si Gregory estaba o no en lo cierto. Newton contestó que usando series se podía decidir si ciertas integrales podían desarrollarse en un número finito de términos pero no dió ningún criterio para ello. En 1712 Leibniz en una carta a Johann Bernoulli seguía objetando el uso de series infinitas y decía que el cálculo debía preocuparse por reducir sus resultados a cuadraturas (integrales) y, si fuera necesario a cuadraturas que involucran funciones trascendentes.

Se abría así una nueva problemática en relación a funciones y a su representación en series.

Unas últimas observaciones, sobre las matemáticas del siglo XVII, de Kline [K2]:

Como puede notarse, en el siglo XVII se desarrolló profundamente la ligazón entre las matemáticas y la ciencia (particularmente con la astronomía y la física). Todo aquello por lo que había pugnado Galileo cobró forma. Y si al principio del siglo el estudio del mundo era sobre todo cualitativo, a finales de él hay todo un mundo "matemático" cuantitativo donde las leyes matemáticas expresan la "concreción" del mundo físico.

Esto a su vez tuvo un efecto contradictorio sobre las propias matemáticas. Y decimos contradictorio porque en lugar de poner a las matemáticas meramente al servicio de la ciencia, sucedió que las matemáticas de haber sido una idealización inmediata o una abstracción de la experiencia eran, ahora, una fuente de conceptos y de construcciones intelectuales. Estos conceptos tenían, desde luego, aplicaciones concretas; pero a la vez, tenían por así decirlo, vida y lógica propias.

Un problema surgido en el modo mismo

en que se había dado este cambio en la creación matemática era que se había dejado de lado el rigor matemático en el sentido de, por ejemplo, "Los Elementos" de Euclides. La razón es que en un primer momento no se reconoció lo nuevo, parecía que todo seguía siendo igual y que, por lo tanto, seguía obedeciendo a la misma lógica. Por lo demás, el éxito que iban obteniendo obscurecía la discusión sobre este tipo de problemas. Fue hasta el siglo XIX y XX que se atacaron a fondo los problemas de los fundamentos.

Hubo otro cambio importante en el modo de hacer ciencia y matemáticas. Para fines del siglo XVI y principios del XVII todavía había muy pocos libros, eran de textos escogidos y eran muy caros. Las universidades, por su parte, eran muy cerradas y dogmáticas y estaban bajo el control de la Iglesia oficial de cada país. No había libertad de cátedra. Por mucho tiempo la comunicación entre los científicos fue a través de cartas.

Esto se transformó con la creación de las primeras sociedades científicas. Su importancia radicaba no sólo en que permitía la discusión de viva voz, sino que muy pronto surgieron publicaciones de cada una de ellas y esto condujo a que se generalizara esta discusión.

Y no sólo eso; otra importante función de estas asociaciones fue la de subvencionar a muchos científicos para realizar sus investigaciones "de tiempo completo". Desde luego estos proyectos eran impulsados y financiados por los distintos gobiernos y esto marca también la entrada de los intereses estatales en el quehacer científico.

Las asociaciones de que se tiene noticia son:

Italia:

La Academia dei Lincei creada en 1601 en Roma por unos nobles. En 1611 participa en ella Galileo. Desaparece en 1631.

Accademia del Cimento creada en 1657 en Florencia formaliza al grupo de científicos que trabajaban desde hacía 10 años en un laboratorio de la familia Medici. Participan en ella Vicenzo Viviani y Torricelli ambos alumnos de Galileo. Desaparece en 1667

En Francia en 1630 se reunían privadamente bajo la dirección de Mersenne, Desargues, Descartes, Gassendi, Fermat, Pascal y otros. Este grupo fue transformado en la Académie Royale des Sciences en 1666 por Luis XIV y sus miembros fueron financiados directamente por el rey.

En Inglaterra desde 1645 se empezó a reunir un grupo de científicos alrededor de Wallis en Gresham College, Londres. Se formalizó con Carlos II en 1662 con el nombre de Royal Society of London for the Promotion of Natural Knowledge.

En Alemania en 1700 y a instancias de Leibniz (que fue su primer presidente) se crea la Academia de Ciencias de Berlín.

En Rusia en 1724 Pedro el Grande fundó la Academia de las Ciencias en San Petesburgo

De las publicaciones científicas, las primeras fueron Journal de Savants que se inició en 1665 y la Philosophical Transactions of the Royal Society. La Academia de la Ciencias francesa publicó las Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique y también las Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés a l'Académie Royales des Sciences par Divers Scavans el Lus dans ses Assamblées conocida también como las Mémoires de Savants Etrangers. La Acta Eruditorum se inició en 1682 y como estaba escrita en latín pronto se extendió a nivel internacional. La Academia de Berlín publicó la Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres que por algunos años tuvo el nombre de Miscellanea Berolinesa.

Estamos así, de lleno, en el siglo XVIII. Los trabajos de Newton y Leibniz, y en parte la polémica entre ellos, son ya patrimonio común de todos los matemáticos. Se habían planteado nuevos desarrollos en el estudio de la física como son el comportamiento de fluidos y de sistemas discretos de masas.

La concepción general que había de lo que era una función seguía estando muy apegada al trabajo de Descartes pues esencialmente las que se consideraban eran las funciones que se daban mediante una fórmula o una ecuación. Y esto es lo que Leonhard Euler (1707-1783) expresa de la mejor manera en 1744: en su Introductio in analysis infinitorum (publicado en 1748) decía (Cap I del Vol I) que el análisis matemático es una ciencia general de variables y sus funciones y es con estas definiciones que empieza su trabajo:

> "una cantidad variable es una cantidad indeterminada o universal que compendia en sí misma absolutamente todos los valores determinados. [...]
> Así, una cantidad variable compendia en sí misma absolutamente todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fracciones, tanto racionales como irracionales y los trascendentes. Aun el cero y los números imaginarios no se excluyen del significado de cantidad variable".

> "Una función de una cantidad variable es una <u>expresión analítica</u> compuesta de la forma que sea de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes" (*) (Subrayado nuestro)

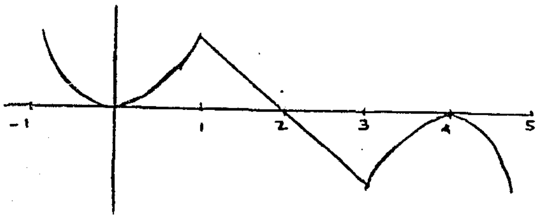
(*) En esta definición Euler retoma a su maestro Johann Bernoulli, aunque utiliza "expresión analítica" en vez de "cantidad".

Una vez dadas estas definiciones Euler distingue entre las funciones elementales de una variable a las algebraicas y las trascendentes. Las primeras, que comprenden en particular a los polinomios y las fracciones racionales, pueden ser explícitas o implícitas; las trascendentes son las que no son algebraicas (y se obtienen cuando se toman logaritmos, exponenciales, cuando se eleva la variable a potencias irracionales y cuando se efectúan ciertas integrales).

Su obra responde, en particular, a la necesidad de precisar qué es una función, qué tan amplio es el sentido del término expresión analítica, qué operaciones abarca. Para sintetizar los métodos que abarca en la composición de una expresión analítica, los reduce (en el cap IV) a uno solo, diciendo que la forma más universal y conveniente de una expresión analítica, o sea, de <u>cualquier</u> función, es una serie infinita de potencias. No lo demuestra, pero dice:

> "si alguien dudara que <u>toda</u> función puede desarrollarse así, su duda será desechada haciendo el desarrollo de [cualquier] función. Sin embargo, para que la investigación presente se extienda sobre el dominio más amplio posible, además de las potencias enteras positivas de z, se admiten términos con exponentes arbitrarios. Entonces <u>es absolutamente indisputable que toda función puede desarrollarse en la forma</u>
>
> $$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\ldots$$
>
> donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ pueden ser cualquier número". (Subrayado nuestro).

En el Volumen II, dedicado al estudio de curvas planas, Euler dice que al igual que a cada función le corresponde una curva plana, a cada curva le corresponde una función y hace la distinción entre curvas "continuas" y curvas "discontinuas" o "mixtas".(*) Las "discontinuas" dice, están formadas por partes "continuas" y la distinción entre ambas está dada por su expresión analítica: a las "continuas" les corresponde <u>una</u> <u>sola</u> y <u>la</u> <u>misma</u> ley (expresión analítica), mientras que a las "discontinuas" les corresponden distintas expresiones analíticas en distintos intervalos. Así



sería un ejemplo de una función "discontinua", pues es

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{en } [-1,1] \\ -x-2 & \text{en } [1,3] \\ -(x^2-16) & \text{en } [3,5] \end{cases}$$

Estos conceptos fueron aceptados por el medio matemático sin ningún problema por cuanto realmente expresaba toda la experiencia y el conocimiento existente.

Sin embargo, este consenso pronto se tambaleó con el estudio del movimiento de una cuerda tensa vibrando (el ejemplo más manejado es el de una cuerda de violín). El problema conocido como el problema de la cuerda vibrante es el siguiente:

Se tiene una cuerda de longitud l, fija en sus extremos, sometida a una cierta tensión, en reposo (como la cuerda afinada de un violín si nadie la toca) y se la pone a vibrar. Se supone que las vibraciones o el movimien-

(*) Ver Apéndice IV

to de la cuerda tiene lugar en un plano, que la cuerda en reposo está horizontal y, que al vibrar, cada punto de la cuerda se mueve en forma perpendicular a dicha posición horizontal.

El problema consiste en determinar la posición de la cuerda en cada instante t, o lo que es lo mismo, determinar la posición de cada punto de la cuerda en cada instante de tiempo t.

Si dibujamos la cuerda en el eje X y colocamos su extremo inicial en el origen, el extremo final nos queda en $(l, 0)$ y cualquier punto de la cuerda es de la forma $(x,0)$ con $x \in [0,l]$. El movimiento tiene lugar en el plano XY y el desplazamiento (perpendicular) de cada punto $(x,0)$ de la cuerda en el instante t lo denotamos por u (fig 1). Es claro que u depende tanto de x como de t. El problema entonces es encontrar esta función u de dos variables ($u(x,t)$) que describe, al variar $x \in [0,l]$, la forma de la cuerda en cada instante de tiempo t (con t fijo $u(x,t)$ es una función de x definida en el intervalo $[0,l]$ y la forma de la cuerda será la gráfica de dicha función).

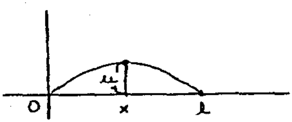


fig. 1

El primero en llegar a un planteamiento matemático completo fue Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783).

Con base en las condiciones naturales o físicas del problema, D'Alembert llega a la conclusión de que la función $u(x,t)$ buscada debe ser solución de la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales, hoy conocida como "la ecuación de onda" (unidimensional o de ondas planas):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*)$$

Esta ecuación, por sí sola, aún no basta para resolver el problema. Debe también establecerse el estado de la cuerda en el momento inicial $t=0$. Para ello se supone que

$$(A) \qquad \left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \forall x \in [0,l]$$

donde φ y ψ son funciones dadas de antemano (φ representa la forma inicial de la cuerda y ψ la velocidad inicial). Estas ecuaciones se conocen como condiciones iniciales. D'Alembert supuso que la velocidad inicial era cero en cada punto de la cuerda (es decir $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \ \forall x \in [0,l]$). Además de estas condiciones iniciales tenemos, dado que los extremos de la cuerda permanecen fijos todo el tiempo, las siguientes condiciones a la frontera

$$(B) \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bajo estas condiciones, D'Alembert resuelve la ecuación referida. Sin entrar aquí en detalles, señalare-

(*) En esta ecuación a representa una constante relacionada con la densidad de la cuerda y con la tensión a la que está sujeta la misma; a saber $a^2 = \frac{\text{tensión}}{\text{densidad}}$.

Una deducción de esta ecuación puede encontrarse, por ejemplo en Smirnov [S1]; En este texto pueden encontrarse también un tratamiento "elemental" de este problema, una introducción igualmente "elemental" al tema de Series de Fourier (que, como veremos está muy relacionado con este problema) y todos los detalles de la forma en que D'Alembert resuelve esta ecuación.

mos cómo es la solución de D'Alembert. Para empezar, D'Alembert demuestra que toda solución $u(x,t)$ debe ser de la forma

$$\text{(C)} \qquad u(x,t) = \frac{1}{2} f(at+x) + \frac{1}{2} g(at-x)$$

donde f y g son funciones "arbitrarias". (*) Después, usando las condiciones (A) y (B), D'Alembert demuestra que f y g tienen que estar sujetas a las siguientes restricciones

(1) $f = -g$ en todo $\mathbb{R}$

(2) f periódica (de periodo 2ℓ) e impar

(3) $f(x) = \varphi(x) \quad \forall\, x \in [0, \ell]$ (**)

De acuerdo con D'Alembert, entonces, la solución está dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \varphi(at+x) - \frac{1}{2} \varphi(at-x)$$

(*) Es importante recalcar que función "arbitraria" no se entendía como ahora, sino a, cómo se mencionó más arriba, la definición de Euler que era la que prevalecía en esa época.

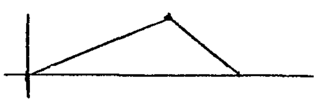
(**) Estas 3 condiciones son fáciles de demostrar como sigue:
Suponemos que f está definida $\forall x \in \mathbb{R}$. De (B) y (C) tenemos que $u(0,t) = \frac{1}{2} f(at) + \frac{1}{2} g(at) = 0 \;\; \forall t$. Es decir $f(at) = -g(at) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$; o sea: $f(\xi) = -g(\xi) \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}$. Esto es la condición (1). Ahora, como $f = -g$, tenemos, por (C), que $u(x,t) = \frac{1}{2} f(at+x) - f(at-x)$. Por otro lado, como $u(\ell,t) = 0$ entonces $f(at+\ell) = f(at-\ell) \;\; \forall t$, o, equivalentemente, $f(x+\ell) = f(x-\ell) \;\; \forall x$. En consecuencia f es periódica de periodo 2ℓ (fig 2). De la condición $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ y usando la regla de la cadena en (C) obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} f'(at+x) \cdot a \Big|_{t=0} - \frac{1}{2} f'(at-x) \Big|_{t=0} = 0$

es decir, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f'(x) - f'(-x) = 0 \;\; \forall x$, de donde $f'(x) = f'(-x) \;\; \forall x$. De aquí se deduce integrando, que $f(x) = -f(-x) \;\; \forall x$ y por tanto, f es impar. Esto nos da la condición (1). Por último como $u(x,0) = \varphi(x) \;\; \forall x \in [0,\ell]$, tenemos, nuevamente por (C) que $\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(-x) = \varphi(x)$. Y como $-f-(x) = f(x)$, resulta que $\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(x) = \varphi(x)$. Es decir que $\varphi(x) = f(x) \;\; \forall x \in [0, 2\pi]$ que es la condición (3).

donde φ es la condición inicial "arbitraria" dada de antemano y que debe de ser periódica (de periodo $2l$) e impar. Más aún, como $u(x,t)$ satisface la ecuación de onda en todos los puntos (x,t) bajo consideración, u debe ser dos veces diferenciable en dichos puntos. En particular, $u(x,0)=\varphi(x)$ debe ser —como función de x— dos veces diferenciable. Tales son las conclusiones de D'Alembert.

Este resultado fue comunicado en 1746 (a fines del año) a la Academia Real de las Ciencias y las Bellas Artes de Berlín y fue publicado en la Historia de dicha Academia en 1749. D'Alembert hacía hincapié en que para que exista solución, las posiciones iniciales de la cuerda deberán restringirse en el sentido indicado.

A Euler le interesó mucho el problema y al año siguiente (1748) publicó sus propios trabajos al respecto.(*) En ellos establecía que acuerdo con D'Alembert en cómo deducía este último la ecuación del movimiento (la ecuación de onda). Sin embargo no estuvo de acuerdo con las restricciones que imponía D'Alembert a las formas iniciales y, en consecuencia, a las soluciones mismas. Para Euler la posición inicial podía ser "discontinua." Por ejemplo, en el momento inicial, la cuerda podía tomar formas como la siguiente:



(*) Los publicó en Latín De vibratione chordarum exercitatio publicado en Nova Acta Eruditorum en 1749 y en Francés: Sur la vibration des cordes publicado por la Academia de Berlín en 1750

D'Alembert no estuvo de acuerdo con Euler y sostuvo que las funciones admisibles como posición inicial debían estar dadas por una sola expresión analítica (en todo el intervalo [0, l]) y las "discontinuas" de Euler evidentemente no cumplían con esto. (Al proseguir la polémica veremos que Euler no sólo aceptaba las funciones "discontinuas" (distintas leyes), sino que incluso aceptaba las que no estaban dadas por ley alguna, que, como él decía, son las que se pueden dibujar con el "libre impulso" de la mano.[x] Esto lo rechaza D'Alembert llegando a afirmar que los "objetos" que Euler considera como funciones iniciales no son necesariamente funciones y por lo tanto no pueden ser objeto del Análisis.

Euler, por su parte, además de mantener su posición, no dejó de percibir la importancia de haber introducido funciones "discontinuas" y fue tan evidente para él que esto abría todo un nuevo aspecto del análisis, que en Diciembre de 1763 le escribía a D'Alembert:

> "considerar funciones que no están sujetas a ninguna ley de continuidad [a ninguna expresión analítica] nos abre todo un nuevo panorama del análisis".

En 1755 entró a la polémica Daniel Bernoulli (1700-1782) y afirma, con base en argumentaciones físicas, que las curvas iniciales pueden ser arbitrarias y que siempre, todas las posibles curvas

(x) ¡que son continuas en nuestra época!

iniciales están dadas por

$$f(x) = \sum a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Aduce que, sea como sea $f(x)$, hay suficientes a_n's como para "ajustar" dicha curva

Además él afirma, también sin demostrarlo, que <u>todas</u> las posiciones subsiguientes de la cuerda están dadas por

$$u(x,t) = \sum a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l} \quad (*)$$

Ni Euler ni D'Alembert estuvieron de acuerdo, y era lógico por lo siguiente: para Euler, que aceptaba formas iniciales <u>sin</u> expresión analítica o con <u>distintas</u> expresiones (es decir, "discontinuas") era inconcebible que <u>todas</u> las formas iniciales se dieran a través de esa (¡única!) expresión analítica.(**) D'Alembert, que ya de por sí rechazaba la posición de Euler, no podía aceptar la de Bernoulli que iba todavía más allá.

Bernoulli no estuvo de acuerdo, y la discusión prosiguió sin que se llegara a ninguno por más de una década. (Desde entonces hasta principio del siglo XIX a esta polémica se integraron Lagrange, Monge, Laplace y Arbogast que tomaron partido por una u otra posición pero sin llegar a ningún acuerdo común.)

(*) La polémica tuvo muchos aspectos relacionados con la física del problema (los tonos que emite la cuerda, el tono fundamental, la coexistencia de infinidad de tonos en cada vibración (los armónicos) etc. Aquí nos centraremos sólo en el aspecto relativo al concepto de función que es, en buena medida, la parte medular.

(**) Euler además objetaba el que cualquier función "continua" pudiera ser desarrollada en series trigonométricas (por ejemplo las no periódicas impares) sin sopesar adecuadamente resultados conocidos por él como $\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x \cdots = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$.

Fue entonces claro para Euler, que la definición en boga de función ("expresión analítica") y la distinción entre "continuas" y "discontinuas" (una sola ley analítica y varias leyes analíticas respectivamente) son muy estrechas y no contenían "objetos" (funciones) que sí pertenecían al análisis. Así pues, Euler reelaboró estos conceptos: En 1763 en De usu functionum discontinuarum in analysis (academia de San Petersburgo) Euler define función "continua" suponiendo no sólo que las relaciones de las coordenadas de todos los puntos de la curva cumplan una sola ley, sino también que

> "todas las partes de la curva estén firmemente conectadas entre si, de manera que es imposible cualquier cambio en ellas sin afectar su relación de continuidad".

Enfatiza que no está hablando de la convexidad ni del curso de la curva sino <u>exclusivamente</u> de que la ley analítica sea una y sólo una. Así, por ejemplo, las dos ramas conjugadas de una hipérbola forman una función "continua". (ver [Y])

A las funciones "discontinuas" las define como

> "todas las curvas que no se pueden determinar por ninguna ecuación; son las del tipo que usualmente se dibujan con el libre trazo de la mano".

A esta clase de funciones, dice Euler, pertenecen las curvas llamadas "mixtas", como por ejemplo, la frontera de un polígono.

(Hay que hacer notar aquí, que aun esta nueva definición de "discontinuas" correspondería a las que hoy llamamos continuas, si acaso, con un número finito de puntos donde no existe derivada o donde la derivada no es continua; como por ejemplo algo así:

).

Contemplando lo anterior Euler da una nueva definición de función para que incluya a todas las clases de funciones conocidas; algo de esto ya había sido esbozado en su Introductio pero ahora lo hacía más universal y abstracto:

> "Si unas cantidades dependen de otras cantidades de manera tal que si éstas sufren un cambio aquéllas también lo hacen, entonces las primeras se llaman funciones de las segundas. Esta denominación es de la naturaleza más amplia posible y comprende a todas los métodos por medio de los cuales una cantidad puede ser obtenida de otras. Si, por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de

x de cualquier forma o que queden determinadas por ella son funciones de ella."

Lo que lleva en germen esta definición, al margen de que Euler no lo haya explotado, es la definición moderna de función y el abandono de la noción usual de "expresión analítica".

El trabajo de Euler ejerció gran influencia en el siglo XIX. Las obras de Cauchy, Bolzano, Riemann y Weierstrass tienen sus raíces en lo establecido por Euler. Uno de los puntos de mayor importancia fue la introducción de funciones "discontinuas" arbitrarias y el estudio concerniente a la relación entre las propiedades de cada clase y el aparato matemático para representarlas.(*)

Sin embargo, todas estas cuestiones muy llenas de perspectivas nuevas del trabajo de los matemáticos del siglo XVIII las podemos apreciar hoy, visto desde una perspectiva histórica. En aquel momento esta potencialidad no sólo no fue clara sino que se entró en una crisis (como bien lo relata Kline y de quien tomamos todos los elementos que necesitaremos).

Era verdad que se habían abierto problemáticas

(*) Se abrió, en particular, el problema de la representación de una función en series trigonométricas que va a ser el problema principal que abordaremos en el resto de este trabajo.

nuevas y muy interesantes (como la convergencia de series, la definición de integral etc), pero muy complicadas y, con pocas excepciones, no existían métodos generales para abordarlas. Esto llevó a que los matemáticos se sintieran paralizados; así, por ejemplo Lagrange en una carta a D'Alembert en 1781 (21 de septiembre) le dice: "se me hace que la mina matemática ya es muy profunda y si no descubrimos nuevas vetas va a ser necesario, tarde o temprano, abandonarla. La física y la química ofrecen ahora la riqueza más brillante y son de fácil explotación; además parece que el gusto de nuestro siglo apunta en esa dirección y no sería imposible que los lugares que hoy ocupa la geometría en la Academia se conviertan en lo que en el presente son los lugares de la lengua árabe en las universidades". Euler y D'Alembert estuvieron de acuerdo con Lagrange y decían, además, que no veían ningún gran cerebro en el horizonte.

Diderot decía en 1754 que en menos de un siglo no habría ni siquiera tres grandes matemáticos. Jean-Baptiste Delambre, secretario permanente de la sección de física y matemáticas del Institute de France, no veía posibilidad de avance en matemáticas, veía grandes dificultades que lo bloqueaban, que sólo parece que falta perfeccionar detalles; y concluía que el potencial del análisis había ya sido agotado.

La predicción más sabia la hizo Condorcet en 1781, quien admiraba mucho a Monge. Dice Condorcet que están lejos de haberse agotado las aplicaciónes del análisis a la geometría; que no están acercándose al fin sino a los primeros pasos de una inmensa carrera; que las aplicaciones nuevas aunque no tengan utilidad en si mismas son necesarias para el desarrollo del análisis en general; "que dan nacimiento a ideas que de otra forma ni nos imaginaríamos, que nos obligan a crear nuevos métodos. Los procesos técnicos son los hijos de la necesidad y lo mismo puede decirse de los métodos de las ciencias más abstractas. Pero debemos éstas últimas a necesidades de un fin noble: la necesidad de descubrir nuevas verdades o de conocer mejor las leyes de la naturaleza."

"Así uno ve en las ciencia muchas teorías brillantes que permanecieron sin ser usadas por un largo tiempo y que de pronto se vuelven los fundamentos de aplicaciones de la mayor importancia; asimismo hemos visto cómo aplicaciones muy sencillas en apariencia dan origen a ideas de las teorías más abstractas de las que nadie antes había sentido necesidad, y cómo el trabajo de los matemáticos se dirige a estas teorías."

El tenía razón. De hecho las matemáticas se extendieron más en el siglo XIX que en el XVIII. En 1783, año en que mueren Euler y D'Alembert, Laplace tenía 34 años, Legendre 31, Fourier 15 y Gauss 6.

La Revolución Francesa de 1789 marca el momento en que la burguesía toma el poder político, basándose en el desarrollo en lo económico y en lo social, para barrer con las trabas feudales que impiden que se implante plenamente y en forma dominante el modo capitalista de producción. Como ha sido señalado por Marx y Engels, en ese momento y en ese sentido (barrer trabas), la burguesía era revolucionaria. Esto necesariamente se reflejó también en el desarrollo de la ciencia. Se socializó la difusión de la cultura y de la ciencia y junto con ello se inició la especialización en las distintas ramas científicas. Para llevar esto a cabo se le dió gran importancia a la enseñanza, y la discusión científica se trasladó de las academias de la ciencia a las escuelas normales y técnicas. En Francia se desarrolló la Ecole Normal y luego la Ecole Polytechnique fundada en 1794 por Monge.

Este proceso se fue generalizando en Europa. En 1810 Alexander von Humboldt (1769-1859) creó la Universidad de Berlín e introdujo la idea de la libertad de cátedra para los profesores y la libertad de escoger cursos para los alumnos. Poco a poco en los ducados, reinados y ciudades libres alemanas se fueron fundando universidades que empezaron a financiar la investigación de los profesores.

En resumen, se revolucionó también la manera de hacer ciencia.

(En este sentido es importante hacer notar que toda la obra de Cauchy sobre los fundamentos del análisis(*) forman parte integral de sus cursos en la Ecole Polytechnique).

Desde principios del siglo XIX se inicia un movimiento consciente por dotar de rigor al análisis. Niels Hendrik Abel (1802-1829) expresa cabalmente la preocupación existente en torno a este problema en una carta en marzo de 1826 a Christoffer Hansteen en la que habla de la "tremenda obscuridad que uno encuentra invariablemente en el análisis. Adolece tan completamente de cualquier plan o sistema que es sorprendente que tantos hombres pudieran estudiarlo. Lo peor de esto es que nunca haya sido tratado rigurosamente. Existen muy pocos teoremas de análisis avanzado que hayan sido demostrados de una forma lógicamente sólida. En todos lados uno se encuentra con esa forma pobre de concluir a partir de lo especial lo general y lo que es maravilloso es que después de tal forma de proceder encontremos rara vez las, así llamadas, paradojas. Es verdaderamente muy interesante buscar la razón de ello. Esta razón, desde mi punto de vista, hay que buscarla en el hecho de que las funciones de las que se ha ocupado hasta ahora el análisis pueden expresarse, la mayoría de las veces, en series. Cuando se mezclan otras, lo que

(*) Ellos son: Cours d'Analyse de 1821 y Resumé des leçons donées sur le calcul infinitésimal de 1823 ciertamente no pasa a menudo, ya no se pueden [expresar en series] y basta con que se saquen falsas conclusiones [para que] nazcan de allí una infinidad de proposiciones viciosas que se sostienen unas a las otras..."

El análisis riguroso se inicia con los trabajos de Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet, Weierstrass y, en particular, se avanza mucho en el concepto de función con los trabajos de Bolzano, Cauchy, Dirichlet y Riemann.

Si bien el objetivo de esta parte final del trabajo es seguir la evolución del problema de la representación de funciones en series trigonométricas (que se abren en torno al problema de la cuerda vibrante) particularmente a través de la problemática y los resultados de los trabajos de Fourier, Dirichlet y Riemann, pasaremos primero a establecer a muy grandes rasgos, los avances sobre el concepto de función, de continuidad y de serie que le dan contexto a estos trabajos.

A.- En cuanto a precisar la definición de función y de continuidad, el primero que caracteriza una función continua de un modo esencialmente igual a como lo hacemos en la actualidad es Bernhard Bolzano (1781-1848) en su artículo de 1817, cuyo largo nombre empieza con, Rein analytischer Beweis(x) publicado en Praga. En él dice:

(x) El nombre completo es: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegenge setzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege (Demostración puramente analítica del Teorema de que entre dos valores opuestos [por el signo] existe al menos una raíz real de la ecuación)

"Para aclarar adecuadamente lo que entendemos cuando hablamos de

una función $f(x)$ que para todos sus valores dentro o fuera de ciertos límites cambia según la ley de continuidad

[lo que queremos decir] es, nada más que,

cuando x es uno de esos valores, la diferencia $f(x+\omega) - f(x)$ puede hacerse menor que toda magnitud dada siempre que se pueda tomar ω tan pequeño como uno quiera."

En 1823 Cauchy (1789-1853) en su Resumé da una definición de continuidad basado en el trabajo de Bolzano (a quien no le da crédito [K₁] [K₂] [G]):

"Sea i una cantidad infinitamente pequeña [...] Cuando la función $f(x)$ admite un valor único y finito para todos los valores de x comprendidos entre dos límites dados, (y) la diferencia $f(x+i) - f(x)$ es siempre entre esos límites una cantidad infinitamente pequeña, decimos que $f(x)$ es una función continua de la variable x dentro de los límites donde ésta se mueve."

Cauchy hace muy explícito en su trabajo la búsqueda por dotar de rigor al análisis y, en este ánimo, empieza su trabajo definiendo variable y luego función:

"A una cantidad que suponemos que debe tomar sucesivamente muchos valores diferentes entre si, la llamamos cantidad variable".

"Cuando las cantidades variables estan tan ligadas entre si que estando dado el valor de una de ellas podemos concluir los valores de todas las otras, se estudián (*) a esas distintas cantidades expresadas por medio de esa una de entre ellas, que toma el nombre de variable independiente; a las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se les llama funciones de esta variable".

Cauchy dice luego, expresamente, que las funciones no tienen porqué tener expresión analítica.(§)

En este trabajo Cauchy(**) dice que no está justificado el libre uso de todas las funciones basándose en las propiedades de las algebraicas ni el uso de series divergentes. Fue de los primeros en dar demostraciones rigurosas de teoremas de análisis y en delimitar adecuadamente proposiciones sobre las funciones elementales.

En su trabajo de 1844 Memoires sur les fonctions continues (Academia de París) critica la forma de distinguir funciones "continuas" y "discontinuas" de Euler y muestra el siguiente ejemplo de una función que siguiendo el criterio de Euler quedaría clasificada ambiguamente:

(*) "on conçoit d'ordinaire"
(**) según Kline.
(§) Ver Apéndice V

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Esta función sería "discontinua" para Euler, sin embargo, la misma función puede expresarse como

$$f(x) = \sqrt{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

y entonces sería "continua" para Euler.

Dirichlet (1805-1859) en su artículo de 1837 "Über die Darstellung ganz willkürlichen Functionen durch Sinus und Cosinus-reihen" (*) (al que regresaremos después) da la definición de función que todavía empleamos:

> "y es una función de x si a cada valor de x en un intervalo dado le corresponde un único valor de y."

Continúa Dirichlet con la siguiente definición de función continua:

> "Si a cada x le corresponde una única y finita de manera tal que mientras x recorre continuamente el intervalo desde a hasta b, y = f(x) también varía gradualmente; entonces decimos que y es una función continua de x en ese intervalo."

(*) "Sobre la representación de funciones muy arbitrarias por medio de series de senos y cosenos."

Agrega Dirichlet que no importa si en ese instante y depende de x según una o varias leyes, ni si la dependencia de y puede ser expresada con operaciones matemáticas.

(Ya en 1829 él mismo había dado el ejemplo de la función que lleva su nombre y que es totalmente discontinua(*)

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\right] \quad \text{, es decir,}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases} \quad).$$

Por su parte Berhard Riemann (1826-1866) presentó en 1851 en Göttigen su trabajo Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen eine veränderlichen complexen Größe"(**) donde da las siguientes definiciones:

"Supóngase que z es una magnitud variable que puede tomar sucesivamente todos los valores reales posibles; entonces si a cada uno de sus valores le corresponde un único valor de la magnitud indeterminada ω, a ω se le llama función de z; y, si mientras z recorre de manera continua todos los reales entre dos valores dados también ω varía continuamente, entonces decimos que esta función es continua dentro de ese intervalo."

(*) este ejemplo lo usó después para mostrar la existencia de funciones no integrables.
(**) "Fundamentos para una teoría general de variable compleja".

Aquí Riemann al igual que Dirichlet sólo considera continuidad global y su definición es bastante ambigua.(*)

Según Monna [M] el que ni Dirichlet ni Riemann hayan considerado la continuidad como una propiedad local (que es hacia lo que caminaban los trabajos de Bolzano y Cauchy) es muy explicable si se tiene en cuenta que en su tiempo los matemáticos no requerían de una definición exacta de continuidad. En el desarrollo, hasta ese momento, del análisis uno sólo se encuentra propiedades de las funciones continuas globalmente. Las funciones discontinuas son, hasta cierto punto, artificiales. El propio Cauchy no utilizó en su obra la continuidad en su caracter local.

De hecho, la necesidad de considerarla como una propiedad local se da alrededor de 1875 cuando se empiezan a encontrar ejemplos de funciones continuas no diferenciables (Weierstrass). Ante de esto se creía que continuidad implicaba diferenciabilidad. A partir de esto Darboux da la definición de continuidad localmente y la extiende luego a un intervalo.

(*) Hay una nota al final de la edición, que no queda claro si es de Riemann o de los editores, donde se aclara el pasaje dándose la definición de continuidad local.

B.- En el trabajo sobre series sucedió, a principios del siglo XIX, lo mismo que en el análisis y en todas las ramas de las matemáticas: había mucho trabajo elaborado, que si bien tenía mucha riqueza, necesitaba revisarse, y necesitaba también ser comprendido en una teoría más general que lo dotara del rigor necesario para poder hacerlo consistente. Se confundían series convergentes y divergentes(*), y aun cuando poco a poco se estuvo en posesión de resultados y de definiciones correctas, privaba una cierta confusión.

Ya en el siglo XVIII Euler, basándose en el inmenso trabajo de sus antecesores había iniciado la sistematización sobre series; y si bien llegó a conclusiones falsas en algunos aspectos, es indudable que mostró mucho cuál era el camino a seguir.

En 1811 Joseph Fourier (1768-1830) presentó por segunda vez(**) su trabajo sobre la propagación del calor. En él da la siguiente definición de convergencia sobre una serie infinita

> "Una serie es convergente si cuando n crece la suma de los n. primeros términos se acerca más y más a un valor fijo, y difiere de éste en una cantidad menor que cualquier magnitud dada".

(*) Un ejemplo muy ilustrativo es todo el trabajo elaborado en torno de la serie $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. Johann Bernoulli, Euler y Leibniz, con distintos métodos llegaron a la conclusión de que convergía a $\frac{1}{2}$, y, según ellos, lo "demostraban".

(**) El ya había en 1807 presentado ese trabajo en la Ac. de París pero fue rechazado por Laplace, Lagrange y Legendre, porque, a su juicio carecía de rigor además de que dudaban lo relacionado a las series de Fourier. Sobre esto volveremos más adelante.

Enfatizó, además, que un criterio necesario para la convergencia es que los valores absolutos de los términos se aproximaran a cero. Fourier, sin embargo, hacía en su trabajo un uso muy libre, y varias veces erróneo, de series divergentes.

En 1812 Gauss (1777-1855) hace una primera investigación profunda sobre series en su "Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitorum" (aunque no llega tan a fondo como Cauchy).

Bolzano en 1817 en su Rein analytischer Beweis... tenía una noción correcta sobre las condiciones para garantizar la convergencia de una serie. Su trabajo no fue muy conocido y hoy esa condición se le atribuye a Cauchy.

Cauchy, en su Cours d'analyse logra una síntesis de todos los criterios existentes y da un gran paso en el terreno de dotar de un cuerpo teórico consistente a todo el trabajo sobre series.

Dice:

"Sea $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ la suma de los primeros n terminos, siendo n un número natural. Si, para valores constantemente crecientes de n, la suma S_n se aproxima indefinidamente a un cierto límite s, la serie será convergente, y al límite en cuestión se le llama la suma de la serie(*). Si, por el contrario, mientras n crece indefinidamente la suma S_n no se aproxima a ningún límite fijo, la serie será divergente y no tendrá suma".

Así formulada, esta noción de convergencia de Cauchy, sólo expresa la idea intuitiva; sin embargo, después da el criterio (hoy conocido como de Cauchy) de que una sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S sí y sólo si, para todo r y n suficientemente grande $S_{n+r} - S_n$ pueda hacerse menor, en valor absoluto, que cualquier cantidad dada.

Cauchy da también criterios para saber si una serie con términos positivos converge(**). Para series con algunos términos negativos demuestra que convergen cuando lo hacen absolutamente(***) y, a partir de ello, deduce el criterio de Leibniz para series alternantes.(****) (*****)

(*) Esto ya había sido dicho en 1655 por Wallis pero no se le prestó atención.

(**) Señala que, si la serie $\sum^{\infty} U_n$ con $U_n \geq 0$ $\forall n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. Como criterios de convergencia establece, en particular las hoy llamadas "prueba de la raíz" y "prueba de la razón" (vease, por ejemplo, Spivak [ ]).

(***) Una serie $\sum_1^{\infty} U_n$ converge absolutamente si $\sum_1^{\infty} |U_n|$ es convergente. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

(****) El criterio de Leibniz es el siguiente:
si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ y todos los términos a_n son no negativos y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie $\sum^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ es convergente.

(*****) El trabajo de Cauchy también trata series de funciones aunque ahí sus resultados no fueron tan precisos, pues al no tener la idea de convergencia uniforme, enunció teoremas que no son ciertos, como que si las u_n son continuas y la serie $\sum_1^{\infty} U_n(x)$ converge a $F(x)$ entonces $\int_a^b F(x) = \sum_1^{\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx$. Fue hasta el trabajo de Weierstrass que se dió la definición de convergencia uniforme.

Dirichlet en 1837 demostró que si una serie era absolutamente convergente se podían reordenar los términos sin alterar la suma y dió ejemplos de series convergentes que no se podían reordenar sin alterar su suma (hoy conocidas como series condicionalmente convergentes).

Riemann en 1856 probó que reordenando este tipo de series (condicionalmente convergentes) se podía hacer que tuvieran cualquier número real como suma.

Ahora sí, regresemos al problema al que queríamos llegar; es decir, al de la representación de una función en series de Fourier.

En 1807 Fourier presenta por 1ª vez su trabajo sobre la teoría de la propagación del calor.(*) Con este trabajo se reabre la discusión sobre la posibilidad de representar una función con una serie trigonométrica del siguiente tipo

$$\sum a_n \operatorname{sen} nx + \frac{1}{2} b_0 + \sum b_n \cos nx$$

donde $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

y $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

hoy conocidas como series de Fourier y coeficientes de Fourier.

(*) Este trabajo fue presentado una segunda vez en 1811 y, si bien ganó el premio ofrecido por la Ac. de la Ciencia de París, tampoco fue publicado. Fue hasta 1822 cuando apareció bajo el nombre de Theorie analytique de la chaleur.

Fourier llegó a estas series al resolver la ecuación, también planteada por él, del calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}$$

que, para un caso particular(*) se puede llevar a la forma siguiente ("ecuación del calor uni-dimensional":

$$(H): \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}$$

sujeta a las siguientes condiciones a la frontera

$$T(0,t)=0 \qquad T(\ell,t)=0 \qquad \forall t$$

y a la condición inicial

$$T(x,0)=f(x) \qquad 0<x<\ell.$$

Fourier utilizó el método de separación de variables; es decir, supuso que tenía una solución de la forma

$$T(x,\ell)=\phi(x)\Psi(t)$$

substituyendo en (H)

$$\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)}=\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)}$$

como esto vale para toda x y toda t ambos cocientes deben ser constantes $(=-\lambda^2)$ y, por lo tanto

$$(H_1): \qquad \phi''(x)+\lambda^2k^2\phi(x)=0$$

$$(H_2): \qquad \Psi'(t)+\lambda^2\Psi(t)=0$$

(*) Una barra cilíndrica de longitud ℓ cuyos extremos se mantienen a temperatura constante (0°) y cuya superficie lateral se aisla para que no fluya el calor por ella.

La solución general de (H_1) es de la forma

$$\phi(x) = d \operatorname{sen}(\lambda k x + c)$$

Por las condiciones generales

$$\phi(0) = \phi(l) = 0$$

de donde $\quad c = 0$ (*)

$$y \quad \lambda = \pm \frac{n\pi}{kl} \qquad n \in \mathbb{N}$$

o bién

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{kl}\right)^2 .$$

La solución general de (H_2) es de la forma

$$\psi(t) = e^{-\lambda^2 t}$$

Esto, más el hecho de que

$$T(x,t) = \phi(x)\,\psi(t)$$

lleva a que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(x,t) = d_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{k^2 l^2}\right)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

sea solución.

Como la ecuación es lineal, la suma de las soluciones es solución (**), y por lo tanto:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{k^2 l^2}\right)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

para que satisfaga las condiciones iniciales se necesita que, para $t = 0$

(*) Se supone aquí que $l < \pi$

(**) Fourier dió por sentado la convergencia de la serie.

$$(A) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

Fourier entonces se pregunta ¿puede $f(x)$, (que para él es "arbitraria") representarse como una serie de senos? Recordemos que esto mismo es lo que estaba en litigio entre Bernoulli y Euler con respecto al problema de la cuerda vibrante. Bernoulli (a partir de argumentos físicos) decía que toda función podía representarse así dado que "habría suficientes d_n's como para "ajustar" cualquier función". Fourier no se conforma con esto puesto que buscar dar los coeficientes. Para ello hace lo siguiente(*):

Tomemos, por comodidad, $l = \pi$ y supongamos que

$$(B) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

Entonces, integrando ambos lados de (B)(**)

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0 \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2} a_0 \pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx$$

Volviendo a (B) y multiplicando ambos lados por $\operatorname{sen} kx$ e integrando

$$\int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{2} a_0 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} nx\,dx$$

(*) Él realmente lo hace más difícil, aunque luego llega a un procedimiento como el que vamos a mostrar (que ya también lo conocía Euler).

(**) Aquí Fourier utiliza las conocidas igualdades: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx = 0 \;\forall k \in \mathbb{N}$

$\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \operatorname{sen} lx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\,dx = \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx\,dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\,dx = \pi$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} Kx \, dx = 0 + b_K \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 Kx \, dx = b_K \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Hasta aquí, Fourier ha utilizado varios resultados (suponiéndoles ciertos), sin demostrarlo:

1.- Que φ es integrable
2.- Que la serie es integrable término a término
3.- Que se puede multiplicar la serie término a término).

Fourier, pues, había encontrado los coeficientes b_n's para "cualquier" función dada en $(0,\pi)$. Esto es parte de la razón que lo hace contestar afirmativamente a la pregunta planteada. Lo único que faltará es saber si "para toda" función "arbitraria" los tales coeficientes existen. Esto depende de saber si la integral correspondiente existe. Fourier contesta afirmativamente a esto también básandose en que los b_n's son áreas bajo las curvas del tipo

$$y = \frac{2}{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \qquad x \in [0,\pi] \quad n \in \mathbb{N}$$

las cuales, dice él, siempre existen(*); que estas áreas tienen sentido hasta para aquellas funciones que están dadas gráficamente.

(*) Y, en términos de _todas_ las funciones conocidas hasta su época, tenía razón.

Resolvió además un punto que no había sido tratado adecuadamente, y que se refiere a la convergencia de la serie (A) a $\varphi(x)$. El vió que siempre convergía en $[0,\pi]$ aunque fuera del intervalo ya no lo haga, en particular porque la serie es una función periódica que repite a la función $\varphi(x)$ periódicamente.

Fourier extiende después sus resultados al intervalo $(-\pi,\pi)$. Para ello consideró

$$(C) \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \frac{a_0}{2}$$

y, por un procedimiento análogo encontró que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx .$$

Ahora bien, la serie (B) sería una función impar y la (C) es par; como toda función $F(x)$ en $(-\pi,\pi)$ puede escribirse como suma de una par y una impar, Fourier llegó a que, en $[-\pi,\pi)$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\, dx \quad y \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{sen} nx\, dx$$

(Desde luego, y en base a todo este trabajo, Fourier le da la razón a Bernoulli en la vieja controversia)

Hasta aquí hemos visto cómo trabajaba Fourier las funciones y cómo, de ese trabajo, concluye que <u>toda</u>

función "arbitraria" puede ser desarrollada en serie de Fourier ¿cuál es su definición de función?

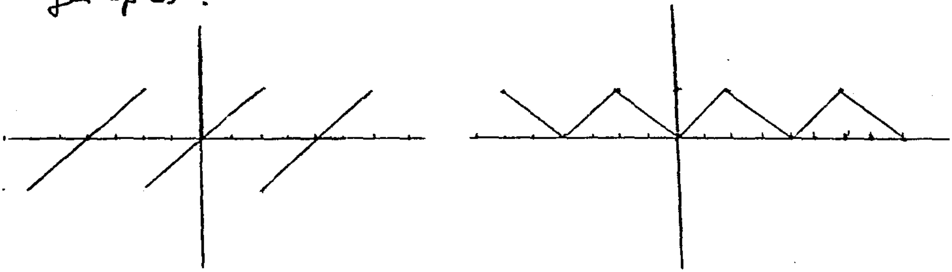
> "En general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores o de ordenadas cada una de las cuales es arbitraria... No tenemos porqué suponer que estos ordenadas obedezcan una ley común; se suceden una a otra de cualquier forma y cada una de ellas está dada como si fuera una sola cantidad" [F]

Como se ve, Fourier da una definición de función cuya generalidad va más allá de lo que el propio Fourier usa. (Algo del estilo había sucedido con Euler cuando amplía su definición). Y es que Fourier sí suponía que todas las funciones tenían una expresión analítica (siendo ésta, precisamente, una serie de Fourier), ya que él tenía en mucho la concepción de función de sus antecesores. Esto se refleja también en el hecho de que, para él, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ e^{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

es "discontinua." Las funciones "arbitrarias" para Fourier son las que no están dadas por una sola expresión.

¿Cuál es entonces, en concreto, el concepto de función de Fourier? Sus múltiples ejemplos nos muestra que, para él, funciones son aquellas cuyas gráficas en un intervalo finito -como $(-\pi, \pi)$- son curvas suaves excepto, quizá en un número finito de puntos; son del tipo de los siguientes ejemplos:



Fourier no dió de hecho una demostración completa de que una función "arbitraria" podía desarrollarse en una serie de Fourier; aunque, a diferencia de Daniel Bernoulli, sí intentó llegar a una tal demostración basado en las matemáticas del asunto y no en consideraciones físicas como Bernoulli. No dió tampoco condiciones para que una función pudiera desarrollarse en una tal serie. Lo que es claro es que él estaba convencido de que *toda* función era susceptible de ello. Y, desde el punto de vista de *todas* las funciones que se conocían hasta entonces, tenía razón (como después se demostrará con Dirichlet).

El trabajo de Fourier abre varias problemáticas, algunas de las cuales no fueron reconocidas más que con el paso del tiempo y el avance de la discusión.

las primeras de ellas en que se reabre la discusión sobre qué es una función.

Además, la argumentación central de Fourier se basa en el hecho de que la gráfica de cualquier función "arbitraria" dada (así sea gráficamente) siempre poseé una área bajo sí (el área bajo la curva dada decía él).(*) Aquí, pues, se abre el problema de la integrabilidad de una función.

Por otro lado, hay varios problemas en cómo manejaba Fourier las series: no daba ningún criterio que hiciera ver que las 2 series

$$\sum a_n \operatorname{sen} nx \quad y \quad \sum b_n \cos nx$$

convergieran. Además, como ya habíamos mencionado Fourier multiplicaba término a término, reacomodaba términos e integraba también término a término, todo esto sin ningún argumento que lo hiciera válido.(**)

Cauchy y Poisson fueron de los primeros en tratar de encontrar condiciones específicas para que una función pueda representarse por una serie de Fourier; sin embargo, no lograron resolverlo.

Y fue Dirichlet quien en 1829 dió las

(*) Aquí vuelve a notarse, claramente, lo que decíamos de su concepción concreta de función.

(**) Ya en este siglo Fejer demostró que para series de Fourier, sean o no convergentes, es válido integrar término a término. [A] condiciones suficientes para que una serie de Fourier que representa a $f(x)$ converja y lo haga precisamente a $f(x)$.

En su trabajo "Sur la convergence des séries trigonométriques" dice lo siguiente:

Si $f(x)$ es periódica de período 2π o si está dada en $[-\pi, \pi]$ y definida de manera que en cada intervalo de longitud 2π a la derecha y a la izquierda de $[-\pi, \pi]$ sea periódica, entonces, las condiciones suficientes mencionadas son:

1.- Que $f(x)$ sea monovaluada y acotada
2.- Que $f(x)$ sea monótona por partes (es decir, que tenga un número finito de máximos y mínimos en $[-\pi, \pi]$
3.- Que $f(x)$ sea continua por partes (es decir, que tenga un número finito de discontinuidades en $[-\pi, \pi]$.

Si $f(x)$ satisface lo anterior, entonces la conclusión de Dirichlet es que

la serie $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, donde

a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, es convergente $\forall\ x \in [-\pi, \pi]$ a

$$(1) \quad \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \quad \text{si} \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$(2) \quad \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \quad \text{si} \quad x = \pm\pi \ ^{(*)}$$

(*) Ver Smirnov [S.] pag 402.

En consecuencia, la serie converge a $f(x)$ en los puntos $x \in (-\pi, \pi)$ donde f sea continua (porque, en tal caso $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{f(x)+f(x)}{2}$)

Con este resultado queda establecido que todas las funciones consideradas por Bernoulli, todas las consideradas por Euler (incluyendo las "discontinuas") y todas las funciones consideradas por el propio Fourier son desarrollables en series de Fourier. Esta larga controversia ha llegado a su fin.

Epílogo.

Acabamos el último capítulo con el final de una controversia muy larga que lleva en sí, el inicio de una nueva discusión que habría de ser resuelta hasta este siglo.

Vimos cómo se desarrolló el concepto de función y cómo, particularmente en la primera mitad del siglo XIX, se desarrolló conjuntamente el problema de su representación en series, en particular, de Fourier. Esto marca toda otra problemática que ya no abordaremos pues aun cuando su importancia histórica es de primer orden no corresponde al tema que nos propusimos desarrollar. Sin embargo nos gustaría señalar cuál es esta problemática:

Todos los elementos de los que hemos estado hablando (funciones, continuidad, series) cobran también forma en otra rama del análisis: la teoría de integración. En el siglo XVI y XVII la integración se usaba más como la antiderivada de una función y sólo se concretaban a encontrar "primitivas" aun cuando se aceptaba el hecho de que es el límite de una sumas. Después, para Fourier, lo fundamental era que la integral es el área bajo la gráfica de una función; es decir, le dió una interpretación geométrica pero dejando sin definir al área como una cantidad. Este será uno de los puntos centrales de la discusión.

Cauchy en Resumé da la definición de la integral de una función continua en un intervalo cerrado por medio del límite de una suma (de Cauchy), y demuestra por primera vez que, en efecto, integrar es equivalente a encontrar la antiderivada o primitiva. El mismo extendió su definición a funciones acotadas discontinuas en un punto y a funciones con un número finito de discontinuidades; generalizó también la definición a funciones no acotadas.

Sin embargo, como ya veíamos antes: Dirichlet mostró la existencia de funciones con un número infinito de discontinuidades en un intervalo finito y, con ello, reabre el problema de integración. Dirichlet mismo concluyó que una función es integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades es denso en ninguna parte. (Más tarde se demostró que sólo valía $\Leftarrow$).

Riemann conoció a fondo la obra de Dirichlet y abordó el problema de cómo es la clase de funciones integrables [R].

Este trabajo de Riemann abre toda una nueva manera de estudiar a las funciones. Además marca el inicio de la nueva polémica a la que se sumarán, en su momento, Weierstrass, Du Bois-Reymond, Hankel, Jordan, Borel, Baire y Lebesgue entre otros. Nace así la teoría de la Integración y de la Medida.

El desarrollo de esta discusión hizo necesario, nuevamente, que se precisara el concepto de función, de expresión analítica, etc. En este sentido es muy reveladora la siguiente cita de Weyl [W_2] de <u>1927</u>.

> "Nadie puede precisar qué es una función. Pero: "una función f está dada cuando de alguna cierta manera legítima a cada número real a se le asocia un número b... Decimos entonces que b es el valor de la función f para el argumento a." "

Apéndices

El estudio de la historia del concepto de función ha sido abordado por diversos autores cuyas opiniones son muchas veces contrapuestas entre sí. En aras de no romper la continuidad en la exposición del punto de vista con el que nos identificamos, hemos incluido esta pequeña sección de apéndices con algunas de las distintas opiniones sobre algunos aspectos o sobre la interpretación de ciertas épocas históricas.

Apéndice I

Youschkevitch al inicio de su artículo cita las siguientes opiniones sobre en qué momento se origina el concepto de función.

D. E. Smith en su trabajo de 1923 History of Mathematics dice

"... después de todo, la verdadera idea de funcionalidad, mostrada por el uso de coordenadas fue expresada por primera vez públicamente por Descartes".

C. Boyer habla del trabajo de Fermat (contemporáneo de Descartes) en su Historia del Cálculo (1939) y opina, por el contrario que

"... el concepto de función y la idea de símbolos que representan variables no parecen figurar en el trabajo de ningún matemático de ese tiempo" (subrayado nuestro)

W. Hartner y M. Schramm en un trabajo sobre la Ciencia árabe en 1963 [HS] sostienen que:

"La cuestión del origen y desarrollo [del concepto de función] es tratado en general con una sorprendente unilateralidad: se le considera casi exclusivamente en relación al análisis cartesiano, que a su vez se sostiene (erroneamente creemos nosotros) que es el resultado de las latitudines formarum escolásticas."

Y más adelante dicen

"... el trabajar con funciones ya había alcanzado un alto grado de perfección antes de que se hicieran los primeros intentos para formular la concepción general de función." (*)

C. Boyer en su Historia de la Geometría Analítica (1956) señala otros prototipos de funciones en las matemáticas griegas. Al considerar el uso de proporciones dice:

"Esto era en cierto modo equivalente al uso moderno de ecuaciones como expresiones de una relación funcional, aunque bastante más restringido."

Boyer, J.E Hoffmann [Hy] y Crombie [Cr]

(*) Se refieren al trabajo de Ptolomeo y sobre todo de Al-Biruni (entre otros) relacionar las expresiones geométricas de funciones y el cálculo de sus valores con la teoría de calculaciones y la teoría de latitudes de formas del siglo XIV. Sin embargo H. Wieleitner [W3] sostiene que la idea de función en la teoría de latitudes de formas

"no contienen la menor idea de dependencia numérica entre una magnitud y otra".

Apéndice II.

O. Pedersen [ ] al estudiar el Almagest de Ptolomeo y ver cómo establece su sistema para calcular la posición del sol, la luna y algunos planetas destaca cómo se les considera variando en el tiempo de forma continua y periódica. Muestra algunos de los procedimientos usados; y, finalmente, al señalar que la palabra función no aparece en la antigüedad hace la siguiente pregunta:

"Pero ¿estamos justificados por esta razón en concluir que no tenían la idea de relaciones funcionales?"

El mismo contesta que depende de qué se entiende por función: si, como muchos matemáticos de siglos pasados, consideramos que una función es una expresión analítica, entonces la conclusión es que no se conocieron las funciones en la antigüedad.

"Pero si concebimos una función no como una fórmula sino como una relación más general que asocia los elementos de un conjunto de números (por ejemplo, puntos de tiempo $t_1, t_2, t_3 \ldots$) con los elementos de otro conjunto (por ejemplo, alguna variable angular en un sistema planetario), entonces es obvio que funciones en este sentido abundan a lo largo del Almagest. Sólo falta la palabra, la cosa en sí misma está ahí y está claramente representada por la multitud de tablas de los elementos correspondientes de este tipo de conjuntos"[4].

Apéndice III.

Para H. J. M. Bos [B_2] es importante distinguir los siguientes 3 procesos en la historia del análisis de los siglos XVII y XVIII que son fundamentales para la historia del concepto de diferencial:

"El primero es la introducción en las décadas 1680 y 1690 del análisis infinitesimal de Leibniz dentro del marco del análisis cartesiano, el que en ese tiempo se puede caracterizar como el estudio de curvas por medio de técnicas algebraicas.

El segundo proceso se dió aproximadamente en la primera mitad del siglo XVIII y fue la separación del análisis de la geometría. De haber sido una herramienta para el estudio de las curvas, el análisis se desarrolló como una rama independiente de las matemáticas, cuyo sujeto de estudio ya no eran las relaciones entre cantidades geométricas relacionadas a una curva, sino relaciones entre cantidades en general expresadas por fórmulas que involucran letras y números.

Este cambio de interés de las curvas a las fórmulas produjo un cambio en los conceptos fundamentales del análisis. Mientras que en la fase geométrica el concepto fundamental en el estudio analítico de las curvas fue el de cantidad geométrica variable, la separación del análisis de la geometría hizo posible que emergiera el concepto de <u>función de una variable</u>, que finalmente remplazó a la cantidad geométrica variable como el concepto fundamental del análisis.

En este proceso de separación de la geometría la diferencial sufrió un cambio correspondiente: se le despojó de su connotación geométrica y se le trató como un mero símbolo, a la manera de los otros símbolos que aparecen en las fórmulas. Sin embargo, durante la primera mitad del siglo XVIII la diferencial mantuvo su posición como el concepto fundamental del cálculo infinitesimal leibniziano.

El tercer proceso que nos interesa es el del remplazo de la diferencial por la derivada como el concepto fundamental del análisis infinitesimal. En general este proceso se asocia con los trabajos de

Lagrange y Cauchy, pero yo sostengo que se pueden encontrar aspectos importantes de él en los trabajos de Euler".

Apéndice IV

Al discutir las funciones "continuas" y "discontinuas" en Euler en los Volúmenes I y II de su Introductio Youschkevitch cita las siguientes interpretaciones modernas sobre esos conceptos:

"Según una opinión recientemente expresada por Grattan-Guiness [G.] el término "continuo" de Euler es sinónimo de nuestro "diferenciable" y "discontinuo" corresponde a nuestro "continuo. Por otro lado A. Speiser [S2] dice: "Por 'función continua' Euler, como Leibniz antes que él, entiende una función especificada por una ley analítica, precisamente de las del tipo que hoy se llaman funciones analíticas. Tienen la propiedad de que quedan determinadas en todo su dominio por un segmento tan pequeño como se quiera..." Truesdell [T2] acepta la afirmación de Speiser, y sostiene que en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, en el cual Euler introduce sus funciones "discontinuas", deja claro que él [Euler] consideraba que esas funciones no eran diferenciables únicamente en puntos aislados. Dice "El universo físico de Euler... es suave por partes, aunque desde luego es "continua" pero en un grado menor que el leibniziano." Más tarde [T3] Truesdell adujo tener evidencias para mostrar que en el contexto de la cuerda vibrante Euler por función (no necesariamente "continua" en su sentido) quiere decir lo que hoy llamaríamos una función continua con pendiente y curvatura suaves por partes.

Dejando de lado el problema de si Euler identificó expresión analítica con función analítica (que en esencia esto es válido) Youschkevitch hace notar que las funciones de Euler, sean "continuas" o "discontinuas" (mixtas) en cualquiera de los sentidos en que Euler lo usó, pueden tener discontinuidades, en el sentido moderno, en puntos aislados.

Apéndice V

Aquí hay una polémica en torno a qué tipo de funciones consideraba Cauchy.

M. Kline y F. A. Medvedev sostienen que Cauchy no supone que debe haber expresión analítica.(*)

Sin embargo Youschkevitch no está de acuerdo; él sostiene que Cauchy de hecho consideraba que sólo funciones expresadas analítica-

(*) tal como el propio Cauchy lo dice.

mente." Esto se deduce tanto de sus formulaciones en las que dos veces menciona que "on conçoit d'ordinaire que las funciones son exprimées au moyen de la variable independánte; y por su separación (que sigue después de la definición) de funciones explícitas e implícitas; siendo caracterizadas éstas últimas por el hecho de que las ecuaciones que ellas y las variables independientes deben satisfacer no se resuelven <u>algebraicamente</u>"

Después de esto, creemos que cabe citar textualmente la definición de Cauchy:

"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen d l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendente et les autres quantités exprimées au moyen de la variable independente sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable"

Bibliografía ampliamente consultada

[B1] J.D. Bernal. La Ciencia en la Historia. Editorial Nueva Imagen 1979

[B2] H.J.M. Bos. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. (Cap I). Archive for the History of Exact Sciences Vol 14 (1974) pp 3-90.

[G1] I. Grattan-Guiness. The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. MIT Press 1970.

[H1] T. W. Hawkins. Lebesgue's Theory of Integration: It's origins and development. University of Wisconsin Press 1970 (Cap I).

[H2] T.L. Heath. The Works of Archimedes. Dover 1953.

[K1] F. Klein. Development of Mathematics in the 19th Century. (Trad. M. Ackerman). Math Sci Press 1979

[K2] M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press 1972

[M] A.F. Monna. The Concept of Function in the 19th and 20th Century, in particular with regard to the Discussion between Baire, Borel and Lebesgue. Arch. for Hist. of Exact Sciences Vol 9 (1972) pp 57-84

[R] B. Riemann. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. In Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlige Nachlass. Ed Weber y Dedekind en 1876. Dover 1953 pp. 227-265

[S1] V.I. Smirnov. A Course of Higher Mathematics Vol II. Pergamon Press y Addison-Wesley 1964.

[U] R.A. Uritam. Medieval Science, the Copernican revolution, and physics teacher. American Journal of Physics Vol 42 Nº 10 (1974)

[Y] A.P. Youschkevitch. The Concept of Function up to the middle of the 19th Century. Arch. Hist. Exact Sciences Vol 16 (1976) pp 36-85

Bibliografía complementaria

[A] T. M. Apostol. Mathematical Analysis. 2ª edición. Addison-Wesley, 1973

[B_2] J. Babini. Arquímedes. Colección Austral Espasa-Calpe. 1943

[B_4] E. T. Bell. The Development of Mathematics. 2ª edición. Mc Graw-Hill. 1945.

[B_5] C. B. Boyer. The History of Calculus and it's Conceptual Development.

[C_0] A. L. Cauchy. Resume de Leçons Donné a L'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitesimal. Vol I. Imprenta Real, París. 1823.

[D] R. Descartes. The Geometry. Traducción de D. E. Smith y M. L. Latham. Dover. 1954.

[G_2] G. Galilei. Dialogues Concerning Two New Sciences. Traducción Crew y de Salvini. Dover 1954.

[K_3] P. Kitcher. the Nature of Mathematical Knowledge. Oxford University Press 1984.

[L1] H. Lebesgue. Leçons sur l'Integration et la Recherche des Fonction Primitiues. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[R] I.B. Cohen et all. Newton. Conacyt 1982. (Recopilación)

[T] P. Thuillier. Galileo y la Experimentación. Mundo Científico #26 Vol 3 pp 584-597

[W] B.L. van der Waerden. Science Awakening vol II. Wolter Noordhoff Publishing. Paises Bajos.

Referencias indirectas (§)

[B_6] J. Buridan. Questions of the Eight Books of Physics of Aristotles. M. Clagett (*) en The Science of Mechanics in the Middle Ages. Univ. of the Wisconsin Press, Madison 1959

[C_2] F. Cajori. History of Zeno's Arguments on Motión. The American Mathematical Monthly vol XXII (1915) Nº 1 pp 1-6, Nº 2 pp 39-47, Nº 3 pp 77-82, Nº 4 pp 109-114, Nº 5 pp 143-149, Nº 6 pp 179-187, Nº 7 pp 215-221, Nº 8 pp 253-258, Nº 9 pp 292-297.

[C_3] A.C. Crombie. Augustine to Galileo. vol I y II 2ª ed. Londres - Melbourne - Toronto 1959-61

[F] J.B. Fourier. Theorie Analitique de la Chaleur Paris 1822

[HS] W. Hartner & M. Schramm. Al-Biruni and the Theory of the Solar Apogee: an Example of originality in Arabic Science. En Scientific Change ed por A.C. Crombie Londres 1963

[H_3] W. Heytesbury. Rules for Solving Sophisms. trad. de E.A. Moody en Clagett (ref ind 1)

(§) Bibliografía utilizada en las obras consultadas

(*) ver también M. Clagett. Publications in Medieval Science. Univ of Wisconsin Press [esta referencia no se usa pero es muy mencionada por otros autores].

[H4] J.E. Hoffmann. Geschichte der Mathematik, vol I 2° ed. Berlin 1963.

[L2] Lagrange. Leçons élémentaires sur la Mathematique. Obras tomo VII.

[M2] D. Mahnke. Neue Einblicke in der Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis. Abh. Preuss Akad. Wiss. Phys-math. Kl 1925. NI (1926)

[O] N. Oresme. On the Configurations of Qualities and Motions. trad M. Clagett en Nicole Oresme and the Geometry of Qualities and Motions Univ of Wisconsin Press. Madison 1968.

[P] O. Pedersen. Logistic and the Theory of Function Arch. Intern d'Hist d. Science. 24 N 94 (1974) pp 57-84.

[S2] A. Speiser. Über die diskontinuierlichen Kurven. pp XXI - XXIV de la introducción del editor a las Obras completas de Leonhard Euler. ser I vol XXV 1952

[S3] R. Swineshead. On Motion (se le atribuye). trad M. Clagett (ver. ref. ind 1)

[T2] C. Truesdale. Introducción del editor a las Obras

Completas de L. Euler. ser II vol 13 1956

[T3] C. Truesdall. The Rational Mechanics of Flexible and Elastic Bodies 1638 – 1788 en Obras Completas de L. Euler ser II vol II 2 1960

[W2] H. Weyl. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft München - Berlin 1927.