UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

CANTOR Y LA TEORIA DE CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMATICAS
PRESENTA

SALVADOR GERARDO TIRADO SEGURA

MEXICO, D.F. 1985

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

PREFACIO

Las dos importantes memorias de Georg Cantor sobre los números transfinitos, aparecidas en el Mathematische Annalen (1895 y 1897) bajo el título "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", se ocupan de investigaciones de números cardinales y ordinales transfinitos y son un intento por presentar en un preciso y concreto desarrollo lógico los resultados más sobresalientes de una larga serie de memorias escritas por Cantor a partir de 1870.

He considerado necesario traducir la segunda memoria por su belleza e interés intrínsecos, y porque sólo la primera memoria ya ha sido publicada en español [Garciadiego 1977, 14-61].

Cabe señalar, que el artículo de 1897 es fundamental para el estudio de la teoría de los números transfinitos y de la teoría de los conjuntos bien ordenados, por lo que podrá ser útil para estudiantes y personas interesadas en esta materia, de completa trascendencia en el desarrollo de las matemáticas de los últimos tiempos.

En este trabajo se han incluído un prefacio, tres capítulos y un apéndice conteniendo lo siguiente: el presente prefacio, explica la estructura de la tesis; el primer capítulo introductorio discute el desarrollo de los conjuntos bien ordenados; el segundo capítulo es la traducción del artículo de Cantor (1897) antes mencionado; el tercer capítulo contiene una discusión de la primera demostración del "teorema del buen orden", a saber, la célebre prueba de Ernest Zermelo de 1904; el apéndice contiene algunas notas y comentarios, principalmente, sobre el artículo traducido y en referencia a los conocimientos necesarios a priori para poder entenderlo sin consultar, necesariamente, otras fuentes; por último, la bibligrafía.

S.G.T.S.

México, D.F.

Abril de 1985.

INTRODUCCION

Durante el siglo pasado, de acuerdo a Philip Jourdain [Jourdain 1955, 2-32], las dos grandes ramas de la teoría de funciones -las de varible real y las de variable compleja- se desarrollaron y gradualmente se separaron. Por un lado, las fundamentaciones rigurosas de los resultados de Fourier sobre series trigonométricas, dadas por Dirichlet, introdujeron como materias de investigación la concepción general de función (univalente) de una variable real y el desarrollo de funciones (trigonométricas en particular). Por otro lado, Cauchy reconocía gradualmente la importancia de lo que más tarde sería concebido como la función más especial, a saber, la función de una variable compleja; e independientemente en gran medida de Cauchy, Weierstrass construía su teoría de funciones analíticas de variables complejas.

Los trabajos de Cauchy y Dirichlet, influenciaron combinadamente a Riemann -quien las desarrolló enormemente- y a Hankel, mismo que fue reconocido más tarde como el fundador de la teoría independiente de funciones de variable real.

Poco tiempo después, a partir de 1870, encontramos a Cantor estudiando las memorias de Hankel y aplicando a teoremas sobre la unicidad de desarrollos trigonómetricos sus primeras concepciones originales sobre números irracionales y conjuntos-punto o conjuntos-número. La teoría de conjuntos-punto rápidamente se constituyó en una teoría independiente de gran importancia, y finalmente, en 1882, los "números transfinitos" de Cantor fueron expresados completamente independietes de los conjuntos por los cuales primero aparecieron en matemáticas.

Así fue como apareció el <u>Grundlagen einer allgemeinen mannichfaltigkeitslehre</u> [Cantor 1883, 92-150] de Cantor, documento de máxima importancia que constituyó una reimpresión del quinto artículo de una serie publicada sobre conjuntos infinitos de puntos, titulada Punktmannigfaltigkeitslehre, y que contiene no sólo los resultados sobresalientes de sus artículos anteriores sobre conjuntos de puntos sino una nueva teoría que se ha considerado como un nuevo principio para las matemáticas.

Para aquellos que se oponían a considerar el infinito absoluto en matemáticas, el matemático Max Simon [Dauben 1979, 95] señaló que las partes del Grundlagen que son exclusivamente filosóficas fueron un intento para calmar la riña con filósofos que habían negado los números infinitos desde los tiempos de Aristóteles, aunque sin lugar a duduas, replicaría J. Dauben [Dauben 1979, 96 y en general con respecto al Grundlagen, 95-119], el mejor logro del Grundlagen fue la presentación de los números transfinitos como una extensión sistemática y autónoma de los números naturales.

Respecto al infinito, Cantor admitió que sus nuevas ideas pudieron ser vistas como no ortodoxas, pero él explicó su simplicidad, afirmando que con el tiempo, éstas tendrían que ser consideradas como la más simple y apropiada extensión natural del concepto de número.

Los matemáticos estaban acostumbrados a utilizar el infinito en el sentido de una variable o como un límite, pero aunque podría parecer paradójico, en ambos casos las magnitudes se mantienen finitas. Creo que por esta razón aparentemente paradójica, Cantor principió el Grundlagen distinguiendo dos tipos de infinitos: el "ideal" [también llamado "potencial"] y el "actual".

Cantor llamó "infinito ideal" al infinito matemático que ha encontrado una aplicable justificación en las ciencias, que ha sido usado para su desarrollo y que ha aparecido principalmente como una variable que crece más allá de todo límite finito deseado o que decrece más que cualquier dimensión finita deseada (es decir, que crece o decrece más que cantidades que por grandes o pequeñas que sean, son finitas), pero que siempre ha permanecido también como cantidad finita.

El infinito ideal puede ilustrarse mediante un ejemplo de A. Fraenkel [Fraenkel 1976, 9-10] muy sencillo: la expresión $\lim_{n \to \infty}(1/n) = 0$ no es más que una abreviatura de la afirmación "puede hacerse que el cociente 1/n se aproxime a 0 con cualquier precisión deseada si el entero positivo n se toma suficientemente grande". (El qué tan grande deba tomarse n, entonces, depende de la precisión deseada en la aproximación a 0 por 1/n). En esta afirmación no se plantea lo "infinitamente grande" o lo "infinitamente pequeño", y el símbolo ∞ sirve tan sólo como una notación concisa.

De acuerdo con Cantor [Cantor 1883, 102] el infinito ideal fue a menudo, caracterizado por "filósofos recientes" (no especifica quiénes) como un "mal" infinito, pero en su opinión eso fue injusto debido a que este infinito ideal era un buen instrumento para las matemáticas y las ciencias naturales.

Sobre este asunto, yo pienso en lo particular, que pudo haber al menos un motivo razonable para llamar al infinito ideal "mal" infinito ya que se trata de un infinito que es potencial. Sin embargo, más bien creo que se trataría de una confusión en el lenguaje, pues el infinito tradicional anterior a Cantor se uso más como una notación (ver ejemplo anterior) que como lo que literalmente significa. De aquí que Cantor los distinguió definiéndolos.

A diferecia del anterior, Cantor llamó "infinito actual" a un infinito como magnitud absoluta, bien definido, como por ejemplo, la recta real.

En la primera forma, como infinito ideal, éste apareció como finito y variable; en la otra forma, la actual, fue visto como un infinito completamente determinado, como por ejemplo un conjunto infinito de puntos bien definido.

Cantor llamó al proceso de desarrollar números ordinales finitos mediante la sucesiva adición de unidades "primer principio de generación". Fue obvio que el conjunto de todos los números enteros finitos, 1,2,3,...,v,... que definió como la primera clase-numérica (I), no tuviera mayor elemento. Era incorrecto hablar de un mayor elemento de (I), sin embargo, Cantor creyó que no era impropio pensar en un nuevo número ω que expresara el orden natural del conjunto "entero" (I). También sería posible pensar a ω como el límite al que los números v se aproximan, si por ello se entiende que ω es el primer entero que sucede a todos los números v, esto es, siendo

ω considerado como mayor que cada uno de los números finitos v y por tanto, como un número no finito. [Cantor 1883, 132]. Siendo así, este nuevo número ω, el primer número transfinito, fue el primer número siguiente a la secuencia entera (completa) de (I).

La introducción de este nuevo número transfinito fue de gran importancia para el desarrollo del concepto de potencia (Machtigkeitsbegriff) que Cantor ya había introducido en artículos anteriores [Cantor 1883, 95]. De acuerdo a esa teoría, una potencia definida es asociada a cada conjunto bien definido y la misma potencia es asignada a dos conjuntos, si una correspondencia recíproca uno-a-uno puede realizarse entre los elementos de los conjuntos.

Siendo así, las potencias de conjuntos finitos coincidieron con el número de elementos de tales conjuntos. En el caso de conjuntos transfinitos, la menor potencia fue asignada a aquellos conjuntos que estaban en correspondencia recíproca uno-a-uno con la primera clase numérica. Otro concepto muy importante, que fue necesario introducir para continuar la construcción de los números transfinitos de Cantor y que es implícita al nuevo número transfinito ω, aparece entonces por primera vez y es el de conjunto bien ordenado [Cantor 1883, 96].

Cantor [Cantor 1883, 97] definió un conjunto bien ordenado de la siguiente manera:

> Por un conjunto bien ordenado se entiende cada conjunto bien definido en el cual los elementos están arreglados uno a otro por una sucesión prescrita definida, de acuerdo a la cual existe un primer elemento en el conjunto, y además, cada elemento de la sucesión es seguido, en caso de que éste no sea el último, por otro que está determinado en la sucesión.

Así, los conuntos bien ordenados fueron una parte implícita a la forma transfinita pues los números naturales sirvieron como prototipo de ellos.

Un mayor avance de los números transfinitos debido a los conjuntos bien ordenados fue la creación de otro concepto, el de "número ordinal", que representó el orden dado de los elementos de un conjunto bien ordenado. Así, los ordinales expresaron el orden en que los elementos de un conjunto bien ordenado dado ocurren.

Los números transfinitos provienen de la existencia de conjuntos bien ordenados (no sería posible obtener números transfinitos sin haber obtenido conjuntos bien ordenados), cuyo orden es expresado por ordinales de varias clases numéricas transfinitas, de ahí la gran importancia de estos conjuntos.

Aristóteles [Cantor 1883, 104-5], contrariamente a Cantor, asumió que sólo existen números finitos de donde concluyó que únicamente la enumeración de conjuntos finitos era posible; Cantor sostuvo y probó, como aparece adelante más claramente, que la enumeración de conjuntos infinitos puede ser hecha justamente como la de los conjuntos finitos, asumiendo que hay una ley definida dada a los conjuntos que permite que sean conjuntos bien ordenados.

Después de haber hecho mención a las potencias, al concepto de conjunto bien ordenado y al de ordinal, podemos continuar con la construcción de los números infinitos de Cantor:

Habiendo ya obtenido ω, el primer número transfinito, es posible aplicar el primer principio de generación a ω y producir adicionales números ordinales transfinitos [Cantor 1883, 132-4]

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + v, \ldots$$

Otra vez, como no hay mayor elemento es posible imaginar otro número representando la totalidad, en orden, de los números $\omega + v$. Denotando esta totalidad por $\omega + \omega$ (2ω) [la primera notación de Cantor para $\omega + \omega$ fue 2ω, aunque después la cambió por $\omega 2$, como se verá más adelante], es posible continuar

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + v, \ldots$$

Con objeto de caracterizar este modo de generación, Cantor sostuvo que ω podría ser considerado como un límite de los números naturales N (incrementándose uno por uno) aproximándose pero nunca alcanzándolo. La idea de ω como un límite satisfizo su función como un número ordinal, el más pequeño entero mayor que cualquier natural $n \in N$.

Este fue entonces el segundo principio de generación, que Cantor [Cantor 1883, 132] definió más precisamente:

> Si existe cualquier[1] sucesión definida de números enteros reales [actualmente llamados enteros positivos] definidos, para los cuales no hay número mayor, entonces un nuevo número se crea por medio de este segundo principio de generación, el cual se considera como el límite (Grenze) de esos números, esto es, se define como el siguiente número mayor a

todos ellos.

Por repetición sucesiva de los dos principios es siempre posible producir nuevos números y siempre en una sucesión completamente determinada. En su formulación más general, tales números pueden ser escritos como sigue

$$v_0 \omega^u + v_1 \omega^{u-1} + \ldots + v_u,$$

pero forzados por el segundo principio de generación obtendríamos uno nuevo y mayor que todos ellos

$$\omega^{\omega}.$$

Pero procediendo así no tuvieron final los números de ésta que Cantor llamó segunda clase numérica (II). Cantor pudo agregar, entonces, un tercer principio el cual llamó "principio de limitación" consistente en la limitación o el requerimiento de que un nuevo número podría crearse, con la ayuda de uno de los principios de generación, solamente cuando la totalidad de todos los números precediendo tuviera la potencia de una clase numérica definida y completa. Este tercer principio sirvió para producir rupturas naturales en la secuencia de los números transfinitos. Esto hizo posible un lugar definido "saltando" la segunda clase numérica (II), distinguiendo ésta de la tercera y así sucesivamente mayores clases numéricas.

Así, definió la segunda clase numérica (II), como la colección de todos los números α (incrémentandose en una sucesión definida) que pudieron estar formados por medio de los dos principios de generación:

$\omega, \omega+1, \ldots, v_0\omega^u + v_1\omega^{u-1} + \ldots + v_u, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \alpha, \ldots,$ los cuales fueron sujetos a la condición que todo número precediendo (desde el primero en adelante) constituye un conjunto de potencia equivalente a la primera clase numérica (I).

Siendo así, la generación de los números de la primera clase (I) y, similarmente, la generación de los de la segunda y de clases numéricas mayores fue realizada en tal sentido que la secuencia entera de números transfinitos es automáticamente bien ordenada.

El nuevo simbolo ω fue introducido en la teoría de conjuntos (exclusivamente) en lugar del familiar ∞, enfatizando el hecho de que los números ordinales transfinitos se completaron (infinitos actuales). El potencial tradicionalmente expresado por el símbolo ∞ era completamente inapropiado a la nueva propuesta. El cambio de notación de ∞ a ω, reflejó una transformación significativa, específicamente el avance en el estado de los transfinitos de símbolos a números.

Una vez que este principio de notación fue introducido fue posible considerar la secuencia de clases numéricas y de sus comparativas dimensiones en detalle. Muy importante fue el hecho de que la segunda clase numérica era verdaderamente distinta de la primera. En la sección 12 del Grundlagen Cantor demostró que la nueva clase numérica (II) es de mayor potencia que la primera clase numérica (I).

Pero, ¿fue necesariamente la potencia de la segunda clase numérica (II) la siguiente mayor a la potencia de la primera

(I), o era posible qué existieran conjuntos de potencia intermedia entre las potencias de (I) y (II)? En la sección 13 del Grundlagen se muestra que la potencia de la segunda clase numérica sigue inmediatamente después de la más pequeña potencia transfinita representada por la numerable clase numérica infinita (I).

Ya ahora, podemos ver que si a un conjunto de la misma potencia de (I) lo "bien ordenamos" entonces tiene sentido hablar del número transfinito α y de ω, ya que si no lo hiciéramos α y ω serían indeterminables, pues precisamente el orden de sus elementos es quien los determina. Por eso, un elemento esencial, en todo el sentido de la palabra, en la construcción cantoriana de los números ordinales transfinitos y su correspondiente aritmética fue el concepto de conjunto bien ordenado.

"El concepto de conjunto bien ordenado se torna fundamental para la teoría de conjuntos ... -dijo Cantor [Cantor 1883, 99]- ... si es posible reducir cada conjunto bien definido a la forma de uno bien ordenado, se tratará en otro artículo posterior". A pesar de su intención, Cantor nunca pudo demostrar que todo conjunto bien definido puede ser equivalente a uno bien ordenado, pero como lo demostró Zermelo [Heijenoort 1971, 141-143 ó nuestro capítulo III] en 1904 (asunto que discutiremos en un capítulo por separado de esta tesis) usando el axioma de elección, esto es siempre posible.

Otra consecuencia muy importante de esta teoría de conjuntos bien ordenados es la que Cantor llamó "diferencia esencial entre conjuntos finitos e infinitos" [Cantor 1883, 97] y que se reduce al hecho de que cada conjunto finito dado tiene el mismo número ordinal para cualquier sucesión de sus elementos, mientras que para los conjuntos finitos, su ordinal en general será diferente, dependiendo de la sucesión que tengan sus elementos.

En el Grundlagen Cantor también afirmó que dado un conjunto infinito bien ordenado con potencia de la primera clase numérica (I) hay siempre un número de la segunda clase (II) y sólo de (II) que representa su orden en forma única y análogamente para conjuntos de mayor potencia y mayores clases numéricas (seremos más explícitos en las próximas páginas). Sin embargo, de un conjunto numerable (α_v), diferentes conjuntos bien ordenados pueden darse, como por ejemplo:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v, \alpha_{v+1}, \ldots)$$
$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_v, \ldots, \alpha_1)$$
$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots).$$

Entonces, dos conjuntos bien ordenados, se definen similares, o del mismo orden, si pueden corresponderse en una función uno-a-uno tal que el orden es preservado entre los elementos en cada caso. Así, si $\alpha_n' < \alpha_m$ en un conjunto, los correspondientes elementos del otro conjunto α'_n y α'_m también tienen que estar ordenados, tal que $\alpha'_n < \alpha'_m$. De aquí se muestra que tal estipulación es siempre determinada únicamente. Dados tales conjuntos, Cantor mostró que la sucesión natural de enteros, incluyendo los números transfinitos, podría por tanto ser usada para identificar conjuntos bien ordenados similares. Dado cualquier número de la primera o segunda clase numérica es obvio que considerado junto a todos los elementos que le preceden en su orden natural, el orden de todos los conjuntos bien ordenados similares a α, es dado por el número α en forma única. Por ejemplo, cada uno de los tres conjuntos bien ordenados:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v, \alpha_{v+1} \ldots)$$
$$(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots, \alpha_{2v}, \alpha_{2v+2}, \ldots)$$
$$(1,2,3,\ldots,v,\ldots)$$

tiene el mismo orden. Por definición éste es ω. Análogamente, los conjuntos bien ordenados:

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_v, \ldots, \alpha_1)$$
$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots)$$

tienen, respectivamente, los órdenes $\omega + 1$ y $\omega + \omega$ (2ω). En el siguiente capítulo veremos como en 1897 Cantor cambió en su notación el multiplicador por el multiplicando para así expresar $\omega + \omega$ como $\omega 2$ en lugar de 2ω.

Como ya mencionábamos anteriormente, sobre la diferencia esencial entre los conjuntos finitos e infinitos, cada conjunto finito dado tiene el mismo número ordinal para cualquier sucesión (orden) de sus elementos; en cambio, los conjuntos infinitos fueron mucho más interesantes, pues los diferentes órdenes que se pudieron encontrar en conjuntos de la misma potencia fueron producidos por diferentes buenos ordenamientos. Los órdenes o tipos de orden de un conjunto infinito fueron, por tanto, un concepto totalmente dependiente del orden en el cual los elementos fueron tomados. Diferentes ordenamientos producen, en general, diferentes órdenes, aunque el número de elementos (su potencia) en cada caso pudiera ser el mismo. Existe una correlación entre el número de elementos de un conjunto y el orden que sus elementos pueden producir dependiendo de su arreglo. Cantor consideró conjuntos de la primera potencia dados en cualquier sucesión infinita definida. Así mientras ellos son bien ordenados, entonces sus órdenes son siempre números de la segunda clase numérica (II) y sólo de la segunda clase numérica. Inversamente, dado cualquier número α de (II), cualquier conjunto de la primera potencia puede ser ordenado en tal sentido que su orden coincida con α. Cantor [Cantor 1883, 98] comentó más precisamente sobre esta conexión entre potencia y orden:

> Todo conjunto de potencia de la primera clase es contable (abzählbar) por números de la segunda clase numérica y sólo por tales números, y es siempre posible dar al conjunto una sucesión de sus elementos que sea contable por cualquier número arbitrario de la segunda clase numérica, que es dado por el orden de los elementos del conjunto con respecto a esa sucesión.
>
> Análogamente la ley vale para conjuntos de mayor potencia. Todo conjunto bien-definido con la potencia de la segunda clase numérica es contable por números de la tercera clase numérica y solo por tales números..., y así sucesivamente.

Para conjuntos finitos el concepto de potencia (Mächtigkeit) y el de orden coincide, pues sin importar como se ordena la sucesión de los elementos de un conjunto de n elementos, su potencia es n y su ordinal o tipo de orden es único e igualmente expresado por el número n.

Para conjuntos infinitos, sin embargo, la diferencia entre potencia y orden es significativa. Aunque cada número α de la segunda clase numérica distingue un único orden de elementos, la potencia de cualquier conjunto con un orden α es siempre la misma: numerable; pero aunque esta potencia de α es siempre la misma, su orden, es un número determinado en forma única por la segunda clase numérica. Esta conexión entre potencias, órdenes y clases numéricas dio mayor consistencia a la nueva teoría de conjuntos de Cantor, y esta consistencia fue, como hemos podido apreciar, básicamente debida a las propiedades de los conjuntos bien ordenados.

Respecto a su teoría del buen orden y los números transfinitos, Cantor [Vease en Dauben 1979, 103] decía, que una vez que el significado de la interpretación de orden fue apreciado, el estado de los números transfinitos era tan seguro como el de los números finitos:

> la existencia del infinito nunca más volverá a ser negada en tanto que los finitos sean sostenidos. Si uno permite a alguno caer, tiene que deshacerse también del otro.

Los conjuntos bien ordenados fueron también indispensables para realizar las operaciones aritméticas de los números transfinitos.

La adición de los números transfinitos α y β fue definida en términos de dos conjuntos infinitos bien ordenados M y

M_1, donde α y β representaron el orden de cada conjunto respectivamente. Entonces la suma $\alpha + \beta$ fue definida en términos del conjunto bien ordenado $M + M_1$ producido por la secuencia de elementos de M seguidos por la secuencia de los elementos de M_1.

La multiplicación fue similarmente definida. Cantor definió la multiplicación de números transfinitos: Dado un conjunto bien ordenado de orden β, reemplazando cada uno de sus elementos por el orden α, el producto $\alpha . \beta$ queda definido con β como multiplicador y α como multiplicando.

Los números primos fueron identificables entre los transfinitos, pero ellos fueron de dos variedades. Dado un número transfinito $\alpha = \beta . \alpha$ puede decirse que es primo cuando la única posible factorización requiriera que $\beta = 1$, ó que $\beta = \alpha$. Pero el multiplicando no es necesariamente único. Hay un cierto rango de posibles valores que puede asumir.

La substracción fue considerada en dos formas. Dados dos números enteros α y β, $\alpha < \beta$, la ecuación $\alpha + \xi = \beta$ tiene una única solución para ξ, donde, si α y β son números de (II), ξ es un número de (I) ó (II) y es definido como igual a $\beta - \alpha$. Pero si por otro lado se considera la ecuación $\xi + \alpha = \beta$, es amenudo insoluble para ξ. Cantor [Cantor 1883, 140] consideró el ejemplo $\xi + \omega = \omega + 1$. Este es insoluble. Sin embargo, cuando la ecuación $\xi + \alpha = \beta$ es soluble, no significa que su solución sea única. Es posible que ξ asuma infinidad de valores y todavía ser solución de la ecuación dada, como por ejemplo el caso $\xi + \omega = \omega$. Entre todas esas soluciones, sin embargo, hay siempre una más pequeña. Asumiendo, entonces, que la ecuación $\xi + \alpha = \beta$ es soluble, la solución es denotada por $\underline{\beta}\alpha$, la cual, en general, es siempre diferente de $\beta - \alpha$.

Un análisis similar siguió para el caso de la división, en donde las mismas distinciones se hicieron. $\beta = \xi \cdot \alpha$ tiene una solución, siempre única: $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$. Por otro lado, considerando la posibilidad alternativa, $\beta = \alpha \cdot \xi$, siempre que una solución es posible, puede haber también infinidad de soluciones, pero siempre una más pequeña, que Cantor denotó por: $\frac{\beta}{\alpha}$.

Con estas operaciones inversas, Cantor continuó el estudio de la segunda clase numérica. Distinguió dos variedades o clases (art) de números en (II): la primera clase para la cual hubo siempre un inmediato predecesor en la secuencia numérica, y la segunda clase para la cual no hubo tal inmediato predecesor [actualmente conocidos como números ordinales sucesor y límite, respectivamente]. Los números de la primera clase son los producidos por el primer principio de generación y los de la segunda clase aquellos producidos por el segundo principio de generación.[1] De la segunda clase, Cantor mostró como ejemplos ω, 2ω, $\omega^{v}+\omega$, ω^{ω} y de la primera $\omega+1$, $\omega^{2} + \omega + 2$, $\omega^{\omega} + 3$.

Cantor [Cantor 1883, 140], no prosiguió el estudio de los números primos transfinitos con mucho detalle, pero prometió regresar a su estudio en otro tiempo. Siempre es posible, aseguró, establecer la factorización prima única de cualquier transfinito α de la segunda clase numérica. Pero no probó esta afirmación hasta su publicación en 1897 [Cantor 1897, 183-195], tal y como veremos en el siguiente capítulo.

Utilizando los tipos de orden, Cantor logró resolver parte de los problemas que fueron, sin duda, de mayor interés tanto para filósofos como para matemáticos, acerca del continuo lineal. Específicamente resolvió el problema consistente en caracterizarlo como un conjunto ordenado en forma lineal. Esto significa, que por medio de conceptos generales de la teoría de los conjuntos ordenados, Cantor logró caracterizar el tipo de orden del continuo lineal por sus propiedades de orden (no métricas).

De acuerdo con Cantor [Cantor 1883, 125-6], el concepto del "continuo" no solo jugó un importante papel en el desarrollo de las ciencias sino que produjo gran cantidad de opiniones distintas que nunca fueron lo suficientemente aclaradas. Eso se debió a que la idea básica del continuo fue interpretada en formas diferentes, a que una definición exacta del continuo no había sido dada, y lo más determinante, a que la idea del continuo no fue probablemente lo suficientemente pensada, incluyendo a los griegos, quienes fueron los primeros en ocuparse de este asunto, pero en términos tan ambiguos, que no eliminaron la posibilidad de opiniones diferentes entre sus sucesores. Cantor citó, como ejemplos entre los griegos, a Demócrito y Aristóteles, quienes pensaban que el continuo consistía de partes que se podían dividir indefinidamente, y a Epícuro, su oponente, que creía en la teoría atomista de donde se debía llegar a partes indivisibles. Entre los escolásticos medievales citó a Tomas Aquino, quien creía que el continuo ni estaba compuesto por un número infinito de partes ni por un número finito de ellas, sino por ninguna parte, y lo criticaba por no ser claro. Rechazó este punto de vista escolástico medieval, que no dejaba de ser aún contemporáneo, y por el cual el continuo fue pensado como un concepto irreducible, o como algunos expresaron, un concepto intuicional a priori, escasamente determinado por conceptos.

Todo intento aritmético por aclarar el continuo era entonces reconocido como una aventura y rechazado en casi todos los casos. Esto dió la impresión de que el continuo no era un problema relativo a las matemáticas sino más bien a un dogma de índole religioso.

Cantor rehusó aceptar cualquier argumento que apelara a la continuidad del espacio o del tiempo para efectos del análisis matemático del continuo y fue explícito en señalar [Cantor 1883, 127]:

> El tiempo es en mi opinión una idea que requiere una clara explicación del concepto de continuidad sobre el cual depende y sin cuya ayuda no puede ser determinado ni objetivamente como una substancia ni subjetivamente en la forma de una intuición a piori.

En ese mismo sentido fue también su convicción de no apelar al espacio para el estudio del continuo, pues la estructura atribuida al espacio podría solamente sostenerse con una cuidadosa y precisa investigación de índole exclusivamente matemática.

Cantor ofreció una nueva discusión detallada del continuo desarrollando la teoría de conjuntos.

Manejando los números reales, Cantor deseaba desarrollar un análisis puramente aritmético del continuo. Dado un espacio n-dimensional G_n, él definió un punto aritmético en el espacio como cualquier sistema de n-puntos definidos de números reales de rango entre $-\infty$ y $+\infty$. En su notación, $(x_1/x_2/.../x_n)$ fue tal punto aritmético de G_n. La distancia fue definida por la fórmula familiar:

$$\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}$$

El problema fue: ¿Cuándo un conjunto dado P de puntos aritméticos en G_n se considera continuo?

Aunque Cantor ya en el <u>Grundlagen</u> [Cantor 1883, 129-130] caracterizó al continuo lineal X [X = (x) de todos los números reales x, tales que $0 \leq x \leq 1$ en su orden natural de precedencia], he preferido describir la forma similar, pero más concisa, más clara y completamente ordenada, como lo caracterizó al final de la Primera Parte de su <u>Beiträge</u> [Cantor 1895, 134].

Para tal efecto Cantor anunció y demostró el siguiente teorema:

> Si un conjunto ordenado M es "perfecto" y en él está contenido un conjunto S, con la potencia de la primera clase numérica, el cual (S) lleva tal relación con M que, entre dos cualesquiera de sus elementos m_0 y m_1 de M hay elementos de S, entonces, el tipo de orden de M es el del continuo linear X.

Es así como Cantor en el Beiträge caracterizó el tipo de orden del continuo lineal X, donde el concepto de "conjunto perfecto" se entenderá después de haber hecho algunas consideraciones, básicamente conceptuales, sobre el tipo de orden inverso a ω, y con respecto a "sus series fundamentales contenidas en un conjunto ordenado transfinito" [Cantor 1895, 128-133].

Al tipo de orden "inverso" [Cantor 1895, 114] de ω, Cantor lo identificó como el tipo de orden del conjunto $(\ldots,v,\ldots,3,2,1)$ y lo denotó por $^*\omega$.

Una vez comprendido este tipo de orden, a aquellas partes de un conjunto transfinito simplemente ordenado M que tuvieron el tipo ω, las llamó "series fundamentales ascendentes" y a aquellas que tuvieron el tipo $^*\omega$, "series fundamentales descendentes", o simplemente, a ambas, "series fundamentales" contenidas en M.

Ahora, si en M existe un elemento m_0 que tiene una posición respecto a una serie fundamental ascendente (a_v) tal que: (1) para cada v, $a_v \prec m_0$, y (2) para cada elemento m de M que precede a m_0 existe un cierto número v_0 tal que $a_v \succ m$, para $v \geq v_0$; entonces él llamó a m_0 "elemento límite (Grenzelement) de (a_v) en M" y también "elemento principal

(Hauptelement) de M" [actualmente se les denomina "supremo de (a_v) en M" y "punto límite de M", respectivamente]. De esa misma forma también llamaría a m_0, si la serie fundamental fuese descendente y las siguientes dos condiciones (análogas pero inversas) se cumplieran: (1) para cada v, $a_v \succ m_0$, y (2) para cada elemnto m de M que sigue a m_0 existe un cierto número v_0 tal que $a_v \prec m$, para $v \leq v_0$ [actualmente se les llama "ínfimo de (a_v) en M" y "punto límite de M", respectivamente. Nota: Cantor 1895, 131 dice erróneamente $b_v \succ m$, para $v \geq v_0$ en lugar de $b_v \prec m$ para $v \leq v_0$]

Siendo así, una serie fundamental nunca puede tener más que un solo elemento límite en M, aunque M tiene, en general, muchos elementos principales.

Cantor [Cantor 1895, 132] continuó definiendo: un conjunto M es "denso en sí mismo" (insichdichte Menge) si M consiste de elementos principales y es tal que cada uno de sus elementos es un elemento principal [obsérvese que esta definición es en cierto modo redundante, se puede entender también como: M es no vacío y todo elemento de M es un elemento principal]. Y si para cada serie fundamental en M hay un elemento límite en M, entonces Cantor llamó a M "conjunto cerrado (abgeschlossene)" [obsérvese que al estar pensando Cantor en el continuo lineal $X \equiv [0, 1] \in \mathbb{R}$, hay conjuntos que no son cerrados como por ejemplo $\mathbb{R}$].

Por último, si un conjunto es "denso en si mismo" y "cerrado" simultáneamente, Cantor lo definió como "conjunto perfecto".

Habiendo Cantor caracterizado al continuo lineal X por sus propiedades de orden, esperaba una prueba rigurosa donde la potencia del continuo sería la de los números de la segunda clase (II) [a esta hipótesis se le conoce como "hipótesis del continuo"]. Los beneficios serían numerosos, entre otros -decía-, seguiría que todos los conjuntos infinitos de puntos tendrían o la potencia de (I) o la potencia de (II).

Desafortunadamente, Cantor nunca pudo hacer más que conjeturas de que su hipótesis del continuo fuese válida.

Actualmente lo que sabemos acerca de la hipótesis del continuo es que:

1° En un sistema axiomático de la toría de conjuntos lo suficientemente rico para construir toda la matemática usual, ver por ejemplo Kunen 1980, tanto la hipótesis del continuo, Cohen 1963, como la negación de la hipótesis del continuo, Gödel 1938, no son demostrables.

2° En el modelo estandar de la teoría de conjuntos [Kunen, 1980], es decir, el universo de los conjuntos puros V, no se sabe si es verdadera o falsa la hipótesis del continuo, aunque las tendencias actuales de los matemáticos tienden a creer que es falsa.

A pesar de este impedimento para Cantor, su teoría de los números transfinitos representó una revolución en la historia de las matemáticas, una revolución en el sentido de denegar prejuicios históricos sobre el infinito en cualquier forma actual: completa, inclusive sobre el continuo lineal. Consecuentemente, los números transfinitos de Cantor fueron prueba no menos revolucionaria para los filósofos y matemáticos que trabajaron con el problema del infinito.

La Primera y la Segunda partes del Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre de Cantor [Cantor 1895 y Cantor 1897, respectivamente], como mencionamos en nuestro prefacio, fueron básicamente un intento por presentar en un preciso y concreto desarrollo lógico los resultados más importantes de la serie de memorias que empezó a escribir a partir de 1870. Estos artículos fueron, como su título lo indica, sus "Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de Conjuntos Transfinitos".

De la Primera Parte sólo enfatizamos en los resultados que Cantor obtuvo en referencia al continuo lineal (a manera de completar los que ya dimos), pues los resultados de este primer documento son todos anteriores a la teoría del buen orden.

En la sección 4 de este primer artículo [Cantor 1895, 94-97] titulada "La Exponenciación de Potencias" (sección que también nos servirá para el estudio de la demostración de Zermelo al teorema del buen orden), por una "cubierta" del conjunto N con elementos de otro conjunto M, se entiende una ley por la cual a cada elemento n de N corresponde un elemento definido m de M. El elemento de M que corresponde a N, es entonces una función de n que Cantor denotó por $f(n)$ y llamó "función de n cubierta". Las cubiertas correspondientes de N las denotó por $f(N)$.

Dos cubiertas $f_1(N)$ y $f_2(N)$ son llamadas iguales, sí y solo sí, para todo elemento n de N la ecuación $f_1(n)=f_2(n)$ es satisfecha; si por el contrario, la ecuación no es satisfecha para algún elemento n, entonces $f_1(N)$ y $f_2(N)$ son caracterizadas como cubiertas distintas.

La totalidad de coberturas diferentes de N con M forman un conjunto definido con los elementos $f(N)$ al que Cantor llamó "conjunto-cubierto" (Belegungsmenge) de N con M" y lo denotó por (M/N). Así, $(N/M) = (f(N))$.

Por lo tanto, la potenica (o número cardinal que denotó con dos barras) de (N/M) dependió solamente de los números cardinales $\overline{\overline{M}} = a$ y $\overline{\overline{N}} = b$. Eso sirvió para su definición de a^b: $a^b = \overline{\overline{(N/M)}}$.

Posteriormente, fue así como después de haber dado algunas de las propiedades de las potencias de los números cardinales, Cantor, a manera de ejemplo, muestra que la potencia del continuo lineal X puede estar representada, entre otras, por la fórmula $2^{\aleph_0}$, donde $\aleph_0$ denota la potencia de la primera clase numérica.

Ya que nuestro siguiente capítulo está dedicado íntegramente al Segundo Artículo [Cantor 1897] del Beiträge, en esta introducción sólo haremos sobresalir, el hecho de que Cantor, en este segundo documento, presentó el mayor volumen de su importante teoría de los números ordinales y cardinales transfinitos. La potencia de la segunda clase numérica, resultó ser el segundo número mayor cardinal transfinito $\aleph_1$, y una buena parte de sus números transfinitos fue explorada. Cantor también introdujo, en este segundo artículo, el proceso de inducción transfinita que hizo posible el desarrollo de transfinitamente muchas multiplicaciones y exponenciaciones transfinitas. Pero a pesar de todo ello, hubo lagunas en la presentación de la teoría de Cantor: la hipótesis del continuo ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) permaneció irresoluble; también las respuestas a si cada potencia transfinita es un alef, como es el caso particular de $2^{\aleph_0}$; si los números cardinales transfinitos fueron todos comparables, es decir, si dado un número cardinal transfinito como $2^{\aleph_0}$ es mayor o igual a $\aleph_1$ (caso particular que, posterior pero rigurosamente, probó G.H. Hardy [Hardy 1903]); y si cada conjunto podría ser bien ordenado, cuestión esta última que, reiteramos, finalmente probó Ernest Zermelo en 1904, prueba que trataremos en un capítulo por separado.

Sin embargo, Cantor en este segundo artículo explicó los fundamentos de su teoría de los conjuntos bien ordenados y su aplicación en la determinación del número cardinal transfinito $\aleph_1$. Como una contribución final, él ofreció un impresionante análisis de la elaborada teoría de números que complementó su formulación de los números transfinitos, y consecuentemente, de su obra creadora: la teoría de conjuntos.

CAPITULO II

CONTRIBUCIONES A LA FUNDAMENTACION DE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS TRANSFINITOS, POR GEORG CANTOR*

* Mathematische Annalen, Vol. XLIX, 1897, p. 207-246, traducido por Mat. Gerardo Tirado Segura, 1984, de Jourdain (1955), p. 137-201.

§ 12

Conjuntos Bien-Ordenados

Entre los conjuntos simplemente ordenados los "conjuntos bien-ordenados" merecen un lugar especial; sus tipos de orden, los cuales llamamos "números ordinales", forman la materia natural para una definición exacta de los números cardinales transfinitos superiores o potencia, - una definición la cual es en todos aspectos congruente a aquella que dimos para el más pequeño número cardinal transfinito Alef—cero por el sistema de todos los números finitos v (Cantor, 1895, § 6)[1].

Nosotros llamamos a un conjunto simplemente ordenado F (Cantor, 1895, § 7)[2] "bien ordenado" si sus elementos f ascienden en una sucesión definida de un elemento menor f, de tal manera que:

I. Hay en F un elemento f, el cual es el menor en rango.

II. Si F' es cualquier parte de F y si F tiene uno o varios elementos de mayor rango que todos los elementos de F', entonces hay un elemento f' de F que continúa inmediatamente después de la totalidad F', tal que no hay elementos con rango entre f' y F' que estén en F.[3]

En particular para todo elemento único f de F, si no es el mayor, seguirá en rango como siguiente mayor otro elemento definido f'; esto resulta de la condición II si para F' ponemos el único elemento f.

Subsecuentemente, si, por ejemplo, una serie infinita de elementos consecutivos[4]

$$e' \prec e'' \prec \ldots \prec e^{(v)} \prec e^{(v+1)} \ldots$$

está contenida en F de tal forma, siempre, que hay también en F elementos de mayor rango que todos los elementos $e^{(v)}$, entonces, por la segunda condición, poniendo para F' la totalidad $\{e^{(v)}\}$, debe existir un elemento f' tal que no solamente

$$f' \succ e^{(v)}$$

para todos los valores de v, sino que también no habrá elemento g en F el cual satisfaga las dos condiciones

$$g \prec f'$$
$$g \succ e^{(v)}$$

para todos los valores de v.

Entonces, por ejemplo, los tres conjuntos

$$(a_1, a_2, \ldots, a_v, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_v, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_u, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_v, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_u, \ldots; c_1, c_2, c_3)$$

donde

$$a_v \prec a_{v+1} \prec b_u \prec b_{u+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3,$$

son bien ordenados. Los dos primeros no tienen mayor elemento, el tercero tiene un mayor elemento c_3; en el segundo y en el tercero b_1 sigue inmediatamente a todos los elementos a_v, en el tercero c_1 sigue inmediatamente a todos los elementos a_v y b_u.

En lo siguiente, nosotros extenderemos el uso de los signos $\prec$ y $\succ$, explicados en (Cantor, 1895, § 7)[5], y ahí usados para expresar la relación ordinal de dos elementos, a grupos de elementos, de modo que las fórmulas

$$M \prec N,$$

$$M \succ N$$

son las expresiones para el hecho de que en un orden dado todos los elementos del conjunto M tienen un rango menor o mayor, respectivamente, que todos los elementos de el conjunto N.

A. Toda parte F_1, de un conjunto bien-ordenado F tiene un menor elemento.

Prueba.- Si el menor elemento f_1 de F pertenece a F_1, entonces éste es también el menor elemento de F_1. En el otro caso, sea F' la totalidad de todos los elementos de[6] F que tienen un rango menor que todos los elementos F_1, entonces, por esta razón, no hay elementos de F situados entre F' y F_1. Entonces si f' es el siguiente(II) después de F', entonces éste pertenece necesariamente a[7] F_1 y aquí toma el rango menor.

B. Si un conjunto simplemente ordenado F es tal que F y cada una de sus partes tienen un menor elemento, entonces F es un conjunto bien-ordenado.

Prueba.- Como F tiene un menor elemento, la condición I es satisfecha. Sea F' una parte de F tal que hay en F uno o más elementos los cuales siguen a F'; sea F_1 la totalidad de todos esos elementos y f' el menor elemento de F_1, entonces obviamente f' es el elemento de F que sigue inmediatamente a F'. Consecuentemente, la condición II es también satisfecha, y de aquí que F es un conjunto bien-ordenado.

C. Cualquier parte F' de un conjunto bien-ordenado F es también un conjunto bien-ordenado.

Prueba.- Por el teorema A, el conjunto F' y cualquier parte F" de F' (pues éste es también una parte de F) tienen un menor elemento; entonces por el teorema B, el conjunto F' está bien-ordenado.

D. Cualquier conjunto G que sea similar a un conjunto bien ordenado F es también un conjunto bien-ordenado.

Prueba.- Si M es un conjunto que tiene un menor elemento, entonces, se sigue inmediatamente del concepto de similaridad (Cantor, 1895, § 7)[8], que todo conjunto N similar a aquel tiene un menor elemento. Ahora nosotros tenemos que $G \simeq F$, y como F al ser un conjunto bien-ordenado tiene elemento menor, lo mismo ocurre a G. Entonces también cada parte G' de G tiene un menor elemento; para una imagen de G en F, al conjunto G' corresponde una parte F' de F como imagen, de modo que

$$G' \simeq F'.$$

Pero, por teorema A, F' tiene un menor elemento, y por lo tanto también lo tiene G'. Entonces, ambos G y toda parte de G tienen menores elementos. Por teorema B, consecuentemente, G es un conjunto bien-ordenado.

E. Si en un conjunto bien-ordenado G, en lugar de sus elementos g, conjuntos bien-ordenados son substituidos, de tal manera que, si F_g y $F_{g'}$ son los conjuntos bien-ordenados los cuales ocupan los lugares de los elementos g y g' y $g \prec g'$ entonces también $F_g \prec F_{g'}$, entonces el conjunto H, formado por la combinación de esta manera de los elementos de todos los conjuntos F_g, es bien-ordenado.

Prueba.- Ambos, H y toda parte H_1 de H tienen menores elementos, y por el teorema B éste caracteriza a H como conjunto bien-ordenado. Pues, si g_1 es el elemento menor de G, el menor elemento de F_{g_1} es al mismo tiempo el menor elemento de H. Si además, nosotros tenemos una parte H_1 de H, sus elementos pertenecen a conjuntos definidos F_g los cuales forman, cuando se toman juntos, una parte del conjunto bien-ordenado $\{F_g\}$, el cual consiste de los elementos F_g y es similar al conjunto G. Si digamos, F_{g_0} es el elemento menor de esta parte, entonces el elemento menor de la parte de H_1 contenido en F_{g_0} es al mismo tiempo el menor elemento de H_1.

§ 13

Los Segmentos de Conjuntos Bien-Ordenados.

Si f es cualquier elemento del conjunto bien-ordenado F el cual es diferente del elemento inicial f_1, entonces llamaremos al conjunto A de todos los elementos F que preceden a f, un "segmento de F", o, más específicamente, "el segmento de F que es definido por el elemento f". Por otro lado, el conjunto R de todos los otros elementos de F, incluyendo f, es un "resto de F", y, más específicamente, "el resto que es determinado por el elemento f".

Los conjuntos A y R son, por teorema C de § 12, bien-ordenados, y podemos escribir por § 8 (Cantor, 1895)[9] y § 12:

(1) $F = (A, R)$,

(2) $R = (f, R')$,

(3) $A \prec R$.

R' es la parte de R que sigue al elemento inicial f y se reduce a 0 si R no tiene además de f, otro elemento.

Por ejemplo, en el conjunto bien-ordenado

$F = (a_1, a_2, \ldots, a_v, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$,

el segmento

$$(a_1, a_2)$$

y el resto correspondiente

$(a_3, a_4, \ldots a_v \quad , \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$

están determinados por el elemento a_3; el segmento

$$(a_1, a_2, \ldots, a_v, \ldots)$$

y el resto correspondiente

$$(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ c_1,\ c_2,\ c_3)$$

están determinados por el elemento b_1; y el segmento

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ c_1)$$

y el resto[10] correspondiente

$$(c_2,\ c_3)$$

por el elemento c_2.

Si A y A' son dos segmentos de F, f y f' sus elementos determinantes, y

(4) $$f' \prec f,$$

entonces A' es un segmento de A. Nosotros llamamos A' al "menor", y A al "mayor" segmento de F:

(5) $$A' \prec A.$$

Correspondientemente nosotros podemos decir de cada A de F que ésta es "menor" que F misma:

$$A \prec F.$$

A. Si dos conjuntos similares bien-ordenados F y G son imagen uno de otro, entonces a cada segmento A de F corresponde un segmento similar B de G, y a cada segmento B de G corresponde un segmento similar A de F, y los elementos f y g de F y G por los cuales los segmentos correspondientes A y B son determinados también se corresponden uno a otro en la imagen.

Prueba.- Si nosotros tenemos dos conjuntos similares simplemente ordenados M y N que son imagen uno de otro, m y n son dos elementos correspondientes, y M' es el conjunto de todos los elementos de M los cuales preceden a m, y N' es el conjunto de todos los elementos N los cuales preceden a n,entonces en la imagen M' y N' se corresponden el uno al otro. Para cada elemento m' de M que precede a m debe corresponder, por § 7 (Cantor, 1895)[8], un elemento n' de N que precede a n, e inversamente. Si nosotros aplicamos este teorema general a los conjuntos bien-ordenados F y G nosotros obtenemos lo que queremos probar.

B. Un conjunto bien-ordenado F no es similar a alguno de sus segmentos A.

Prueba.- Supongamos que $F \simeq A$, entonces nosotros tendremos una imagen de F en A determinada. Por el teorema A un segmento A' de A corresponde al segmento A_1 de F, tal que $A' \simeq A$. Entonces nosotros también tendríamos $A' \simeq F$ y $A' < A$. Para A' podría resultar, de la misma manera, un segmento más pequeño A" de F tal que $A'' \simeq F$ y $A'' < A'$; y así sucesivamente. Entonces podríamos obtener series infinitas

$$A > A' > A'' \quad \ldots \quad A^{(v)} > A^{(v+1)} \ldots$$

de segmentos de F, los cuales continuamente serían más pequeños y todos similares a el conjunto F. Denotaremos por f, f' f", ..., $f^{(v)}$, ... los elementos de F que determinan esos segmentos; entonces tendríamos

$$f \succ f' \succ f'' \succ \ldots \quad f^{(v)} \succ f^{(v+1)} \ldots$$

Entonces tendríamos una parte infinita

$$(f,\ f',f'',\ \ldots,\ f^{(v)},\ldots)$$

de F en la cual ningún elemento toma el menor rango. Pero por el teorema A de § 12 tales partes de F no son posibles. Entonces la suposición de una imagen de F en uno de sus segmentos nos lleva a una contradicción, y consecuentemente el conjunto F no es similar a ninguno de sus segmentos.

Aunque por el teorema B un conjunto bien-ordeando F no es similar a alguno de sus segmentos, sin embargo, si F es infinito, siempre hay otras partes de F a las cuales F es similar. Entonces por ejemplo, el conjunto

$$F = (a_1, a_2, \ldots, a_v, \ldots)$$

es similar a cada uno de sus restantes

$$(a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+v}, \ldots),$$

Consecuentemente,es importante que ahora pongamos el siguiente teorema:

C. Un conjunto bien-ordenado F no es similar a parte alguna de sus segmentos A.

Prueba.- Supongamos que F' es una parte de un segmento A de F y $F' \simeq F$. Supongamos una imagen de F en F'; entonces, por el teorema A, para un segmento A de un conjunto bien-ordenado F corresponde como imagen el segmento F" de F'; sea este segmento determinado por el elemento f' de F'. El elemento f' es también un elemento de A, y determina un segmento A' de A del cual F" es una parte. La suposición de una parte F' de un segmento A de F tal que $F' \simeq F$ nos conduce consecuentemente a una parte F" de un segmento A' de A tal que $F'' \simeq A$. De la misma manera concluimos que una parte F''' de un segmento A'' de A' es tal que $F''' \simeq A'$. Procediendo así, obtenemos como en la prueba del teorema B, una serie infinita de segmentos de F la cual continuamente llega a ser más pequeña:

$$A > A' > A'' \ldots A^{(v)} > A^{(v+1)} \ldots,$$

y así una serie infinita de elementos determinando esos segmentos:

$$f \succ f' \succ f'' \ldots . \; f^{(v)} \succ f^{(v+1)} \;\ldots ,$$

en los cuales no hay elemento menor, y esto es imposible por el teorema A de § 12. Por lo tanto no hay parte F' de un segmento A de F tal que $F' \simeq F$.

D. Dos segmentos diferentes A y A' de un conjunto bien-ordenado F no son similares uno al otro.

Prueba.- Si $A' < A$, entonces A' es un segmento de el conjunto bien-ordenado A, y así, por teorema B, no puede ser similar a A.

E. Dos conjuntos similares bien-ordenados F y G pueden ser imagen uno de otro sólo de una manera.

Prueba.- Supongamos que hay dos diferentes imágenes de F en G, y que f es un elemento de F el cual imaginamos en las dos diferentes imágenes g y g' de G correspondientemente. Sea A el segmento de F que está determinado por f, y B y B' los segmentos de G que están determinados por g y g'. Por teorema A, ambos $A \simeq B$ y $A \simeq B'$, y consecuentemente $B \simeq B'$, contradiciendo al teorema D.

F. Si F y G son dos conjuntos bien ordenados, un segmento A de F puede tener cuando mucho un segmento B en G al cual es similar.

Prueba.- Si el segmento A de F pudiera tener dos segmentos B y B' en G, cualquiera similar a él, B y B' serían similares uno de otro, lo cual es imposible por el teorema D.

G. Si A y B son segmentos similares de dos conjuntos bien-ordenados F y G, para cada segmento más pequeño A' $<$ A de F hay un segmento similar B' $<$ B de G y para cada segemento más pequeño B' $<$ B de G hay un segmento similar A' $<$ A de F.

La prueba se sigue del teorema A aplicado a los conjuntos similares A y B.

H. Si A y A' son dos segmentos de un conjunto bien-ordenado F, B y B' son dos segmentos, similares a ésos, de un conjunto bien-ordenado G, y A' $<$ A, entonces B' $<$ B.

La prueba se sigue de los teoremas F y G.

I. Si un segmento B de un conjunto bien-ordenado G no es similar a algún segmento de un conjunto bien-ordenado F, entonces ambos, todo segmento B' $>$ B de D y G por sí mismo, no son similares a algún segmento de F ni a F mismo.

La prueba se sigue del teorema G.

K. Si para cualquier segmento A de un conjunto bien-ordenado F hay un segmento similar B de otro conjunto bien-ordenado G y también inversamente, para todo segmento B de G hay un segmento similar A de F, entonces $F \simeq G$.

Prueba.- Podemos imaginar F y G uno en otro de acuerdo a la siguiente ley: Sea el menor elemento f_1 de F correspondiendo al menor elemento g_1 de G. Si $f \succ f_1$ es algún otro elemento de F, éste determina un segmento A de F. A este segmento pertenece por suposición un segmento similar definido B de G, y sea el elemento g de G el cual determina el segmento B la imagen de F. Y si g es cualquier elemento de G que sigue a g_1, éste determina un segmento B de G, al cual por suposición un segmento similar A de F pertenece. Sea el elemento f el cual determina este segmento A la imagen de g. De aquí se sigue fácilmente que la correspondencia biunívoca de F y G definida de esta manera es una imagen en el sentido de § 7 (Cantor,1895)[8]. Si para f y f' hay dos cualesquiera elementos de F, g y g' son los correspondientes elementos de G, A y A' los segmentos determinados por f y f', B y B' los determinados por g y g', y si tenemos

$$f' \prec f,$$

entonces

$$A' < A.$$

Por el teorema H, entonces tenemos

$$B' < B,$$

y consecuentemente

$$g' \prec g$$

L. Si para todo segmento A de un conjunto bien-ordenado F hay un segmento similar B de otro conjunto bien-ordenado G, pero si por otro lado, hay al menos un segmento de G para el cual no hay un segmento similar de F, entonces existe un segmento definido B_1 de G tal que $B_1 \simeq F$.

Prueba.- Considerar la totalidad de los segementos de G para los cuales no hay un segmento similar en F. Entre ellos tiene que haber forzosamente un segmento menor el cual llamamos B_1. Esto se sigue del hecho que, por el teorema A de § 12, el conjunto de todos los elementos determinando esos segmentos tuvieron un menor elemento; el segmento B_1 de G determinado por aquel elemento es el menor de esta totalidad. Por el teorema I, cada segmento de G que es mayor que B_1 es tal que ningún segmento similar a él está presente en F. Así, los segmentos B de G que corresponden a segmentos similares de F deben todos de ser menores que B_1, y a cada segmento $B < B_1$ pertenece un segmento similar A de F, porque B_1 es el menor segmento de G entre aquellos a los cuales no hay segmentos similares en F correspondiendo. Así, para todo segmento A de F hay un segmento similar B de B_1 y para todo segmento B de B_1 hay un segmento similar A de F. Así, por el teorema K, obtenemos

$$F \simeq B_1$$

M. Si el conjunto bien-ordenado G tiene al menos un segmento para el cual no hay segmento similar en el conjunto bien-ordenado F, entonces cada segmento A de F debe tener un segmento B similar en G.

Prueba.- Sea B_1 el menor de todos aquellos segmentos de G para los cuales no hay segmentos similares en F.* Si hubo segmentos en F para los cuales no hubo correspondientes segmentos en G, entre éstos, uno, al cual llamaremos A_1, sería el menor. Para cada segmento de A_1 entonces existiría un segmento similar de B_1, y también para cada segmento de B_1 un segmento similar de A_1. Entonces, por el teorema de K, tendríamos

$$B_1 \simeq A_1$$

Pero esto contradice el dato que para B_1 no hay segmento similar de F. Consecuentemente, no puede haber en F un segmen-

* Ver la prueba anterior de L

to al cual, un segmento similar en G no corresponda.

N. Si F y G son cualesquiera dos conjuntos bien-ordenados, entonces uno u otro:

(a) F y G son similares entre sí, o

(b) hay un segmento definido B_1 de G al cual F es similar, o

(c) hay un segmento definido A_1 de F al cual G es similar;

y cada uno de estos tres casos excluye a los otros dos.

Prueba.- La relación de F a G puede ser cualquiera de las tres:

(a) A cada segmento A de F pertenece un segmento similar B de G, e inversamente, a cada segmento B de G pertenece uno similar A de F;

(b) A cada segmento A de F pertenece un segmento similar B de G, pero hay al menos un segmento de G para el cual no hay segmento similar correspondiente en F;

(c) A cada segmento B de G pertenece un segmento similar A de F, pero hay al menos un segmento de F para el cual no hay segmento similar correspondiente en G.

El caso de que haya, tanto un segmento de F para el cual no hay segmento similar correspondiendo en G, como un segmento de G para el cual no hay segmento similar correspondiente en F, no es posible; esto es excluido por el teorema M.

Por el teorema K, en el primer caso tenemos

$$F \simeq G.$$

En el segundo caso hay, por el teorema L, un segmento definido B_1 de B tal que

$$B_1 \simeq F;$$

y en el tercer caso hay un segmento definido A_1 de F tal que

$$A_1 \simeq G.$$

No podemos tener $F \simeq G$ y $F \simeq B_1$ simultáneamente, porque entonces tendríamos $G \simeq B_1$, contrario al teorema B; y, por la misma razón, no podemos tener ambos $F \simeq G$ y $G \simeq A_1$. También es imposible que para ambos $F \simeq B_1$ y $G \simeq A_1$, pues por teorema A, de $F \simeq B_1$ seguiría la existencia de un segmento B_1' de B_1 tal que $A_1 \simeq B_1'$. Así, nosotros tendríamos que $G \simeq B_1'$, contrario al teorema B.

O. Si una parte F' de un conjunto bien-ordenado F no es similar a algún segmento de F, es similar a F mismo

Prueba.- Por teorema C de § 12, F' es un conjunto bien-ordenado.. Si F' no fuera similar a un segmento de F ni a F mismo, entonces habría, por el teorema N, un segmento F_1' de F' el cual es similar a F. Pero F_1' es una parte de aquel segmento A de F el cuàl es determinado por el mismo elemento que el segmento F_1' de F'. Entonces,el conjunto F tendría que ser similar a una parte de uno de sus segmentos, y esto contradice el teorema C.

§ 14

Los Números Ordinales de Conjuntos Bien-Ordenados

Por § 7 (Cantor, 1895)[11], todo conjunto simplemente ordenado M tiene un tipo de orden definido $\overline{M}$; este tipo es el concepto general que resulta de M si nos abstraemos solamente de la naturaleza de sus elementos mientras que retenemos su orden de precedencia, de tal forma, que fuera de ellos proceden unidades las cuales están en una relación definida de precedencia entre una y otra. Todos los conjuntos que son similares uno a otro, y solo tales, tienen un mismo tipo ordinal. Nosotros llamamos al tipo ordinal de un conjunto bien-ordenado F "número ordinal".

Si α y β son dos números ordinales cualesquiera, uno puede estar con respecto al otro en una de tres posibles relaciones. Si F y G son dos conjuntos bien-ordenados, tales que

$$\overline{F} = \alpha, \quad \overline{G} = \beta,$$

entonces, por el teorema N de § 13, tres casos mutuamente exclusivos son posibles:

(a) $$F \simeq G;$$

(b) Hay un segmento definido B_1 de G tal que

$$F \simeq B_1;$$

(c) Hay un segmento definido A_1 de F tal que

$$G \simeq A_1.$$

Como vemos fácilmente, uno de esos casos aún subsiste si F y G son reemplazados por conjuntos similares respectivamente a ellos. Consecuentemente, nosotros tenemos que hacer mutuamente exclusivas las tres relaciones de los tipos α y β una de otra.

En el primer caso $\alpha = \beta$; en el segundo decimos que $\alpha < \beta$; en el tercero decimos que $\alpha > \beta$. Así, nosotros tenemos el teorema:

A. Si α y β son dos números ordinales cualesquiera, tenemo que $\alpha = \beta$ o $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$.

De la definición de menor y mayor se sigue fácilmente:

B. Si tenemos tres números ordinales α, β, γ y si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha < \gamma$.

Así, los números ordinales forman, cuando se arreglan en orden de magnitud, un conjunto simplemente ordenado; aparecerá más tarde que forman un conjunto bien-ordenado.

Las operaciones de adición y multiplicación de los tipos de orden de conjuntos simplemente ordenados, definidos en § 8 (Cantor, 1895)[9], son, por supuesto, aplicables a los números ordinales. Si $\alpha = \overline{F}$ y $\beta = \overline{G}$, donde F y G son dos conjuntos bien-ordenados, entonces

(1) $\alpha + \beta = (\overline{F,G})$.

La unión de los conjuntos (F,G) es también, obviamente, un conjunto bien-ordenado. Así, tenemos el teorema:

C. La suma de dos números ordinales es también un número ordinal.

En la suma $\alpha + \beta$, α es llamado el "primer sumando" y β el "segundo sumando".

Como F es un segmento de (F,G), siempre tenemos que

(2) $\alpha < \alpha + \beta$.

Por otro lado, G no es un segmento pero sí un resto de (F,G), y puede así, como vemos en § 13, ser similar al conjunto (F,G). Si éste no es el caso, G es, por el teorema O de § 13, similar a un segmento de (F,G). Así

(3) $\beta \leqq \alpha + \beta$.

Consecuentemente tenemos:

D. La suma de dos números ordinales es siempre mayor que el primer sumando, pero mayor que o igual que el segundo sumando. Si tenemos $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, siempre tenemos $\beta = \gamma$.

En general $\alpha + \beta$ y $\beta + \alpha$ no son iguales. Por otro lado, tenemos que, si γ es un tercer número ordinal,

(4) $$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Es decir:

E. En la adición de números ordinales la ley asociativa siempre se cumple.

Si substituimos para cada elemento g del conjunto G de tipo β un conjunto F_g de tipo α, obtenemos, por teorema E de § 12, un conjunto bien-ordenado H cuyo tipo es completamente determinado por los tipos α y β y lo llamaremos el producto $\alpha \cdot \beta$:

(5) $$\overline{F}_g = \alpha ,$$

(6) $$\alpha \cdot \beta = \overline{H}.$$

F. El producto de dos números ordinales es también un número ordinal.

En el producto $\alpha \cdot \beta$, α es llamado el "multiplicando" y β el "multiplicador".

En general $\alpha \cdot \beta$ y $\beta \cdot \alpha$ no son iguales. Pero tenemos (§ 8, Cantor, 1895)[9] que

(7) $$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma).$$

Es decir:

G. En la multiplicación de números ordinales la ley asociativa se cumple.

La ley distributiva es válida, en general (§ 8, Cantor,1895)[9], solamente en la siguiente forma:

(8) $$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma.$$

Con referencia a la magnitud de producto, el siguiente teorema, como vemos fácilmente, se cumple:

H. Si el multiplicador es mayor que 1, el producto de dos números ordinales es siempre mayor que el multiplicando, sin embargo mayor que o igual al multiplicador. Si tenemos $\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\gamma$, entonces siempre se sigue que $\beta = \gamma$.

Por otro lado, evidentemente, tenemos

(9) $$\alpha \,.\, 1 = 1 \,.\, \alpha = \alpha .$$

Tenemos ahora que considerar la operación de substracción. Si α y β son dos números ordinales, y α es menor que β, siempre existe un número ordinal definido el cual llamaremos $\beta - \alpha$, el cual satisface la ecuación

(10) $$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Si para $\overline{G} = \beta$, G tiene un segmento B tal que $\overline{B} = \alpha$, llamamos al resto correspondiente S, y tenemos

$$G = (B, S),$$

$$\beta = \alpha + \overline{S};$$

luego entonces

(11) $\beta - \alpha = \bar{S}$.

Lo determinante de $\beta - \alpha$ aparece claramente del hecho que el segmento B de G está completamente definido (teorema D de § 13), y consecuentemente también S está dado únicamente.

Emplazamos las siguientes fórmulas, las cuales se siguen de (4), (8) y (10):

(12) $(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha$,

(13) $\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha$.

Es importante reflejar que una infinidad de números ordinales puede ser sumada, tal que su suma es un número ordinal definido, el cuál depende de la secuencia de los sumandos. Si

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v, \ldots$$

es alguna serie infinita simplemente de números ordinales y tenemos

(14) $\beta_v = \bar{G}_v$,

entonces, por el teorema E de § 12,

(15) $G = (G_1, G_2, \ldots, G_v, \ldots)$

es también un conjunto bien-ordenado cuyo número ordinal representa la suma de los números β_v. Tenemos, entonces,

(16) $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_v + \ldots = \bar{G} = \beta$,

y, como vemos fácilmente de la definición de un producto, siempre tenemos

(17) $\gamma \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_v + \ldots) = \gamma \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \beta_2 \ldots + \gamma \cdot \beta_v + \ldots$

Si ponemos

(18) $\alpha_v = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_v$,

entonces

(19) $\alpha_v = \overline{(G_1, G_2, \ldots G_v)}$.

Nosotros tenemos

(20) $\alpha_{v+1} > \alpha_v$,

y, por (10), podemos expresar los números β_v por los números α_v de la manera siguiente:

(21) $\beta_1 = \alpha_1$; $\beta_{v+1} = \alpha_{v+1} - \alpha_v$.

Las series

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v, \ldots$$

entonces representan cualquier serie infinita de números ordinales que satisfacen la condición (20); llamaremos a éstas "series fundamentales" de números ordinales (§ 10, Cantor, 1895)[12]. Entre éstas y β subsiste una relación la cual puede ser expresada de la siguiente manera:

(a) El número β es mayor que α_v para cada v, porque el conjunto $(G_1, G_2, \ldots, G_v)$, cuyo número ordinal es α_v, es un segmento del conjunto G el cual tiene el número ordinal β;

(b) Si β' es cualquier número ordinal menor que β, entonces, de una cierta v adelantada, siempre tenemos

$$\alpha_v > \beta'.$$

Como $\beta' < \beta$, hay un segmento B' de el conjunto G el cual es de tipo β'. El elemento de G que determina este segmento debe pertenecer a una de las partes G_v; nosotros llamaremos a esta parte G_{v_0}. Pero entonces B' es también un segmento de $(G_1, G_2, \ldots, G_{v_0})$, y consecuentemente $\beta' < \alpha_{v_0}$. Así

$$\alpha_v > \beta'$$

para $v \geqq v_0$.

Así β es el número ordinal siguiente en orden de magnitud después de todos los números α_v; consecuentemente llamaremos a éste el "límite" de los números α_v para incrementando v, denotarlo por $\operatorname{Lim}_v \alpha_v$, de tal forma que, por (16) y (21):

(22) $$\operatorname{Lim}_v \alpha_v = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + (\alpha_{v+1} - \alpha_v) + \ldots$$

Nosotros podemos expresar lo anterior en el siguiente teorema:

I. A cada serie fundamental $\{\alpha_v\}$ de números ordinales pertenece un número ordinal $\operatorname{Lim}_v \alpha_v$ el cual sigue, en orden de magnitud, después de todos los números α_v; esto es representado por la fórmula (22).

Si por γ entendemos cualquier número ordinal constante, probamos fácilmente, usando las fórmulas (12), (13) y (17), los teoremas contenidos en las fórmulas:

(23) $$\operatorname{Lim}_v (\gamma + \alpha_v) = \gamma + \operatorname{Lim}_v \alpha_v;$$

(24) $$\operatorname{Lim}_v \gamma \cdot \alpha_v = \gamma \cdot \operatorname{Lim}_v \alpha_v.$$

Tenemos ya mencionado en § 7 (Cantor, 1895)[13] que todo conjunto simplemente ordenado de un número cardinal finito dado v tiene uno y el mismo tipo ordinal. Esto puede ser probado aquí como sigue. Cada conjunto simplemente ordenado de número cardinal finito es un conjunto bien-ordenado; para éste, y cada una de sus partes, debe haber un primer elemento, - y esto, por el teorema B de § 12, lo caracteriza como un conjunto bien-ordenado. Los tipos de conjuntos finitos simplemente ordenados son así, no otros que, números ordinales finitos. Pero dos diferentes números ordinales α y β no pueden pertenecer al mismo número cardinal finito v. Si decimos, $\alpha < \beta$ y $\overline{G} = \beta$, entonces, como nosotros sabemos, existe un segmento B de G tal que $\overline{B} = \alpha$. Así, el conjunto G y sus partes B tendrían el mismo número cardinal finito v. Pero esto, por el teorema C de § 6 (Cantor, 1895),[14] es imposible. Por tanto los números ordinales finitos coinciden en sus propiedades con los números cardinales finitos.

El caso es algo diferente con los números ordinales transfinitos; a uno y al mismo número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ pertenece una infinidad de números ordinales que forman un sistema unitario y conectado. Llamaremos a este sistema "clase-numérica Z ($\mathfrak{a}$)", y es una parte de la clase de tipos [$\mathfrak{a}$] de § 7 (Cantor, 1895).[13] El siguiente objeto de nuestras consideraciones será la clase-numérica Z ($\aleph_0$), la cual nosotros llamaremos "la segunda clase-numérica". En esta conexión nosotros entendemos por "la primera clase-numérica" la totalidad $\{v\}$ de números ordinales finitos.

§ 15

Los Números de la Segunda Clase-Numérica Z ($\aleph_0$).

La segunda clase-numérica Z ($\aleph_0$) es la totalidad $\{\alpha\}$ de tipos ordinales α de conjuntos bien-ordenados de número cardinal $\aleph_0$ (§ 6, Cantor, 1895)[1].

A. La segunda clase-numérica tiene un número menor $w = \operatorname{Lim}_{v} v$.

Prueba.- Por w entendemos el tipo de el conjunto bien-ordenado

(1) $F_o = (f_1, f_2, \ldots, f_v, \ldots)$,

donde v corre através de todos los números ordinales finitos y

(2) $f_v \prec f_{v+1}$.

Por lo tanto (§ 7, Cantor, 1895)[12]

(3) $w = \overline{F}_o$,

y (§ 6, Cantor, 1895)[1]

(4) $\overline{w} = \aleph_0$.

Así w es un número de la segunda clase-numérica, y de hecho el menor. Si γ' es cualquier número ordinal menor que w, debe (§ 14) ser del tipo de un segmento de F_0. Pero F_0 tiene solo segmentos

$$A = (f_1, f_2, \ldots, f_v),$$

con número ordinal finito v. Así $\gamma' = v$. Por lo tanto no hay números ordinales transfinitos que sean menores que w, y así w es el menor de ellos. Por la definición de $\operatorname{Lim}_{v} \alpha_v$ dada en § 14, obviamente tenemos que $w = \operatorname{Lim}_{v} v$.

B. Si α es cualquier número de la segunda clase-numérica, el número $\alpha + 1$ le sigue como el número siguiente mayor de la misma clase-numérica.

Prueba.- Sea F un conjunto bien-ordenado del tipo α y de número cardinal $\aleph_o$:

(5) $\quad \overline{F} = \alpha,$

(6) $\quad \overline{\overline{\alpha}} = \aleph_o.$

Tenemos, donde por g se entendió un nuevo elemento,

(7) $\quad \alpha + 1 = (\overline{F, g}).$

Como F es un segmento de $(\overline{F,g})$, tenemos

(8) $\quad \alpha + 1 > \alpha .$

También tenemos

$$\overline{\overline{\alpha + 1}} = \overline{\overline{\alpha}} + 1 = \aleph_o + 1 = \aleph_0 \text{ (§ 6, Cantor, 1895).}$$[15]

Por lo tanto el número $\alpha + 1$ pertenece a la segunda clase-numérica. Entre α y $\alpha + 1$ no hay números ordinales; a cada número γ que es menor que $\alpha + 1$ corresponde, como tipo, un segmento de (F, g), y tal segmento sólo puede ser F o un segmento de F. Por lo tanto, γ es igual o menor que α.

C. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v, \ldots$ es cualquier serie fundamental de números de la primera o segunda clase-numérica, entonces el número $\operatorname{Lim}_v \alpha_v$ (§ 14) le sigue como el siguiente en orden de magnitud perteneciente a la segunda clase-numérica.

Prueba.- Por § 14 resulta de las series fundamentales $\{\alpha_v\}$ el número $\operatorname{Lim}_v \alpha_v$ si nosotros ponemos otra serie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v, \ldots,$ donde

$$\beta_1 = \alpha_1, \ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ \ldots, \beta_{v+1} = \alpha_{v+1} - \alpha_v, \ldots$$

Si, entonces, G_1, G_2, ..., G_v, ... son conjuntos bien-ordenados tales que

$$\overline{G}_v = \beta_v ,$$

entonces también

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_v, \ldots)$$

es un conjunto bien-ordenado y

$$\operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v = \overline{G}.$$

Sólo falta probar que

$$\overline{\overline{G}} = \aleph_o.$$

Como los números $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v, \ldots$ pertenecen a la primera o segunda clase-numérica, tenemos

$$\overline{\overline{G}}_v \leqq \aleph_o , \quad \text{y así} \quad \overline{\overline{G}} \leqq \aleph_o \cdot \aleph_o = \aleph_o .$$

Pero, en cualquier caso, G es un conjunto transfinito, y por eso el caso $\overline{\overline{G}} < \aleph_o$ es excluido.

Nosotros llamaremos a dos series fundamentales $\{\alpha_v\}$ y $\{\alpha'_v\}$ de números de la primera o segunda clase-numérica (§ 10, Cantor, 1895)[12] "coherentes", en signos:

$$(9) \quad \{\alpha_v\} \| \{\alpha'_v\} ,$$

si para cada v hay números finitos λ_o y μ_o tales que

$$(10) \quad \alpha'_\lambda > \alpha_v , \quad \lambda \geqq \lambda_o ,$$

y

$$(11) \quad \alpha_\mu > \alpha'_v , \quad \mu \geqq \mu_o .$$

D. Los números límites $\operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v$ y $\operatorname*{Lim}_{v} \alpha'_v$ pertenecientes respectivamente a dos series fundamentales $\{\alpha_v\}$ y $\{\alpha'_v\}$ son iguales cuando, y sólo cuando, $\{\alpha_v\} \| \{\alpha'_v\}$.

Prueba.-Para abreviar nosotros ponemos $\operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v = \beta$, $\operatorname*{Lim}_{v} \alpha'_v = \gamma$.

Primero supondremos que $\{\alpha_v\} \| \{\alpha'_v\}$; entonces nosotros afirmamos que $\beta = \gamma'$. Si β no fuera igual a γ', uno de ésos dos números tendría que ser el menor. Supongamos que $\beta < \gamma'$. De una cierta v adelantada tendríamos $\alpha'_v > \beta$ (§ 14), y consecuentemente, por (11), de una cierta μ adelantada tendríamos $\alpha_\mu > \beta$. Pero esto es imposible porque $\beta = \operatorname*{Lim}_v \alpha_v$. Así para toda μ's tenemos $\alpha_\mu < \beta$.

Si, inversamente, suponemos que $\beta = \gamma'$, entonces, como $\alpha_v < \gamma'$, debemos concluir que, de una cierta λ adelantada, $\alpha'_\lambda > \alpha_v$, y, como $\alpha'_v < \beta$, debemos concluir que, de una cierta μ adelantada, $\alpha_\mu > \alpha'_v$. Es decir, $\{\alpha_v\} \| \{\alpha'_v\}$.

E. Si α es cualquier número de la segunda clase-numérica y v_0 cualquier número ordinal finito, tenemos $v_0 + \alpha = \alpha$, y consecuentemente también $\alpha - v_0 = \alpha$.

Prueba.- Primero nos convenceremos de que el teorema es correcto cuando $\alpha = w$. Nosotros tenemos

$$w = (\overline{f_1, f_2, \ldots, f_v, \ldots}),$$
$$v_0 = (\overline{g_1, g_2, \ldots, g_{v_0}}),$$

y consecuentemente

$$v_0 + w = (\overline{g_1, g_2, \ldots g_{v_0}, f_1, f_2, \ldots, f_v, \ldots}) = w.$$

Pero si $\alpha > w$, tenemos

$$\alpha = w + (\alpha - w),$$
$$v_0 + \alpha = (v_0 + w) + (\alpha - w) = w + (\alpha - w) = \alpha .$$

F. Si v_0 es cualquier número ordinal finito, tenemos $v_0 . w = w$.

Prueba.- De acuerdo a la forma de obtener un conjunto del el tipo $v_0 . w$ tenemos que substituir para el elemento singular f_v de el conjunto $(f_1, f_2, \ldots, f_v, \ldots)$ conjuntos $(g_{v,1}, g_{v,2}, \ldots, g_{v,v_0})$ de el tipo v_0. Así obtenemos el conjunto

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \ldots, g_{1,v_0}, g_{2,1}, \ldots, g_{2,v_0}, \ldots, g_{v,1}, g_{v,2}, \ldots, g_{v,v_0}, \ldots),$$

el cual es obviamente similar a el conjunto $\{f_v\}$. Consecuentemente

$$v_0 \cdot w = w.$$

El mismo resultado es obtenido más cortamente como sigue. Por (24) de § 14 tenemos, desde que $w = \operatorname{Lim}_v v$,

$$v_0 w = \operatorname{Lim}_v v_0 v.$$

Por otro lado,

$$\{v_0 v\} \parallel \{v\},$$

y consecuentemente

$$\operatorname{Lim}_v v_0 v = \operatorname{Lim}_v v = w;$$

así que

$$v_0 w = w.$$

G. Siempre tenemos

$$(\alpha + v_0) w = \alpha w,$$

donde α es un número de la segunda clase-numérica y v_0 un número de la primera clase-numérica.

Prueba.- Tenemos

$$\operatorname{Lim}_v v = w.$$

Por (24) de § 14 tenemos; consecuentemente,

$$(\alpha + v_0) w = \operatorname{Lim}_v (\alpha + v_0) v.$$

Pero

$$(\alpha + v_0)\; v = \overbrace{(\alpha + v_0)}^{1} + \overbrace{(\alpha + v_0)}^{2} + \dots + \overbrace{(\alpha + v_0)}^{v}$$

$$= \alpha + \overbrace{(v_0 + \alpha)}^{1} + \overbrace{(v_0 + \alpha)}^{2} \dots \overbrace{(v_0 + \alpha)}^{v-1} + v_0$$

$$= \overset{1}{\overline{\alpha}} + \overset{2}{\overline{\alpha}} + \dots + \overset{v}{\overline{\alpha}} + v_0$$

$$= \alpha v + v_0 .$$

Ahora tenemos, como es fácil ver,

$$\{\alpha v + v_0\} \parallel \{\alpha v\},$$

y consecuentemente

$$\lim_{v} (\alpha + v_0) v = \lim_{v} (\alpha v + v_0) = \lim_{v} \alpha v = \alpha w.$$

H. Si α es cualquier número de la segunda clase-numérica, entonces la totalidad $\{\alpha'\}$ de números α' de la primera y segunda clase-numérica los cuales son menores que α forman, en su orden de magnitud, un conjunto bien-ordenado de tipo α.

Prueba.- Sea F un conjunto bien-ordenado tal que $\overline{F} = \alpha$, y sea f_1 el menor elemento de F. Si α' es cualquier número ordinal menor que α, entonces, por § 14, hay un segmento definido A' de F tal que

$$\overline{A}' = \alpha',$$

e inversamente cada segmento A' determina por su tipo $\overline{A}' = \alpha'$ un número $\alpha' < \alpha$ de la primqra o segunda clase-numérica. Como $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, $\overline{\overline{A}}'$ puede solamente ser o un número cardinal finito o $\aleph_0$. El segmento A' está determinado por un elemento $f' \succ f_1$ de F, e inversamente cada elemento $f' \succ f_1$ de F determina un segmento A' de F. Si f' y f" son dos elementos de F que siguen a f_1 en rango, A' y A" son los segmentos de F determinados por ellos, α' y α'' son sus tipos de orden, y, si $f' \prec f''$, entonces, por § 13, $A' < A''$ y consecuentemente $\alpha' < \alpha''$. Si, entonces, nosotros ponemos $F = (f_1, F')$, obtenemos, cuando hacemos el elemento f' de F' corresponder a el elemento α' de $\{\alpha'\}$, una imaginación de estos dos conjuntos. Así tenemos

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Pero $\overline{F'} = \alpha - 1$, y, por el teorema E, $\alpha - 1 = \alpha$. Consecuentemente

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

Como $\overline{\alpha} = \aleph_0$, también tenemos $\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \aleph_0$; así tenemos los teoremas:

I. El conjunto $\{\alpha'\}$ de números α' de la primera y segunda clases-numéricas que son menores que un número α de la segunda clase-numérica tiene un número cardinal $\aleph_0$.

K. Cada número α de la segunda clase-numérica es, o tal que (a) se obtiene del siguiente número más pequeño α_{-1} por la adición de 1:

$$\alpha = \alpha_{-1} + 1,$$

o (b) hay una serie fundamental $\{\alpha_v\}$ de números de la primera o segunda clase-numérica tal que

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v.$$

Prueba.- Sea $\alpha = \overline{F}$. Si F tiene un elemento g el cual es el mayor en rango, nosotros tenemos F = (A, g), donde A es el segmento de F el cual es determinado por g. Nosotros tenemos entonces el primer caso, es decir

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \alpha_{-1} + 1,$$

Existe, por tanto, un anterior número menor el cual es llamado α_{-1}.

Pero si F no tiene elemento mayor, considerar la totalidad $\{\alpha'\}$ de números de la primera y segunda clases-numéricas los cuales son menores que α. Por el teorema H, el conjunto $\{\alpha'\}$, arreglado en orden de magnitud, es similar al conjunto F; entre los números α', consecuentemente, ninguno es mayor. Por teorema I, el conjunto $\{\alpha'\}$ puede ser puesto en la forma $\{\alpha'_v\}$ de una serie simplemente infinita. Si a partir de α'_1, la siguiente continuación de los elementos $\alpha'_2, \alpha'_3, \ldots$ en este orden, el cual es diferente del orden de magnitud, en general, serán menores que α'_1; pero en todo caso, en el curso adelantado del proceso, terminará ocurriendo que hay mayores que α'_1; α'_1 no puede ser mayor que todos los otros términos, porque entre los números $\{\alpha'_v\}$ no hay mayor. Sea α'_{p_2} ese número de α'_v el cual tiene el menor índice de aquellos mayores que α'_1. Similarmente, sea α'_{p_3} ese número de las series $\{\alpha'_v\}$ el cual tiene el menor índice de aquellos que son mayores que α'_{p_2}. Procediendo de esta manera, obtenemos una serie infinita de números incrementándose, de hecho una serie fundamental,

$$\alpha'_1, \alpha'_{p_2}, \alpha'_{p_3}, \ldots, \alpha'_{p_v}, \ldots$$

Tenemos

$$1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_v < p_{v+1}, \ldots,$$

$$\alpha'_1 < \alpha'_{p_2} < \alpha'_{p_3} < \ldots < \alpha'_{p_v} < \alpha'_{p_{v+1}} \ldots,$$

$$\alpha'_\mu < \alpha'_{p_v} \text{ siempre si } \mu < p'_v;$$

y como obviamente $v \overline{\overline{<}} p_v$, nosotros siempre tenemos

$$\alpha'_v \leqq \alpha'_{p_v}.$$

De aquí nosotros vemos que cada número α'_v, y consecuentemente cada número $\alpha' < \alpha$, es excedido por números α'_{p_v} para valores suficientemente grandes de v. Pero α es el número que, respecto a magnitud, sigue inmediatamente a todos los números α', y consecuentemente es también el siguiente número mayor con respecto a todo α'_{p_v}. Si, por tanto, ponemos $\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha_{p_{v+1}} = \alpha_{v+1}$, tenemos

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v .$$

De los teoremas B, C, ..., K es evidente que los números de la segunda clase-numérica resultan de números menores en dos formas. Algunos números, los cuales nosotros llamamos "números de la primera clase (Art)", son obtenidos del número menor siguiente α_{-1} por adición de 1 de acuerdo a la fórmula

$$\alpha = \alpha_{-1} + 1;$$

Los otros números, los cuales llamaremos "números de la segunda clase", son tales que para cualquiera de ellos no hay un siguiente número menor α_{-1}, sino que provienen de la serie fundamental $\{\alpha_v\}$ como números límites de acuerdo a la fórmula

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v .$$

Aquí α es el número que continúa en orden de magnitud a todos los números α_v.

Nosotros llamaremos èstas dos formas en las cuales números mayores proceden de menores "el primero y segundo principios de generación de números de la segunda clase-numérica".

§ 16

La Potencia de la Segunda Clase-Numérica es Igual al Segundo Número Mayor Cardinal Transfinito Aleph-Uno

Antes de entrar a más consideraciones detalladas en los siguientes párrafos sobre los números de la segunda clase-numérica y de las leyes que los rigen, responderemos la pregunta acerca del número cardinal que posee el conjunto $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$ de todos estos números.

A. La totalidad $\{\alpha\}$ de todos los números α de la segunda clase-numérica forman, cuando se arreglan en orden de magnitud, un conjunto bien-ordenado.

Prueba.- Si denotamos por A_α la totalidad de números de la segunda clase-numérica los cuales son menores que un número dado α, arreglados en orden de magnitud, entonces A_α es un conjunto bien-ordenado de tipo α-w . Esto resulta del teorema H de § 15. El conjunto de números α' de la primera y segunda clase-numérica que fuê denotado por $\{\alpha'\}$, está compuesto por $\{v\}$ y A_α , de modo que

$$\{\alpha'\} = (\{v\}, A_\alpha).$$

Así

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{v\}} + \overline{A_\alpha};$$

y como

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha, \quad \overline{\{v\}} = w,$$

nosotros tenemos

$$\overline{A_\alpha} = \alpha - w.$$

Sea J cualquier parte de $\{\alpha\}$ tal que hay números en $\{\alpha\}$ los cuales son mayores que todos los números de J. Sea α uno de esos números. Entonces J es también una parte de A_{α_0+1}, y ciertamente una parte tal que al menos el número α_0 de A_{α_0+1} es mayor que todos los números de J. Como A_{α_0+1} es un conjunto bien-ordenado, por § 12 un número α' de A_{α_0+1}, y por lo tanto también de $\{\alpha\}$, debe seguir a todos los números de J. Así la condición II de § 12 es llenada en el caso de $\{\alpha\}$; la condición I de § 12 es también llenada porque $\{\alpha\}$ tiene el número menor w.

Ahora, si nosotros aplicamos a el conjunto bien-ordenado $\{\alpha\}$ los teoremas A y C de § 12, nosotros obtenemos los siguientes teoremas:

B. Toda totalidad de números diferentes de la primera y segunda clase-numérica tiene un número menor.

C. Toda totalidad de números diferentes de la primera y segunda clase-numérica arreglada en su orden de magnitud forma un conjunto bien-ordenado.

Nosotros mostraremos ahora que la potencia de la segunda clase-numérica es diferente de aquella de la primera, la cual es $\aleph_0$.

D. La potencia de la totalidad $\{\alpha\}$ de todos los números α de la segunda clase numérica no es igual a $\aleph_0$.

Prueba.- Si $\{\alpha\}$ fuera igual a $\aleph_0$, nosotros podríamos poner la totalidad $\{\alpha\}$ dentro de la forma de una serie simplemente infinita

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \; \ldots, \quad \gamma_v, \; \ldots$$

tal que $\{\gamma_v\}$ representaría la totalidad de números de la segunda clase-numérica en un orden el cual es diferente del orden de magnitud, y $\{\gamma'_v\}$ contendría, como $\{\alpha\}$, ningún número mayor.

Empezando de γ'_1, sea γ'_{p_2} el término de la serie que tiene el menor índice de aquellos mayores que γ'_1, γ'_{p_3} el término que tiene el menor índice de aquellos mayores que γ'_{p_2}, y así sucesivamente. Obtenemos una serie infinita de números incrementándose,

$$\gamma'_1,\ \gamma'_{p_2},\ \ldots,\ \gamma'_{p_v},\ \ldots,$$

tal que

$$1 < p_2 < p_3 \cdots < p_v < p_{v+1} < \cdots,$$

$$\gamma'_1 < \gamma'_{p_2} < \gamma'_{p_3} \cdots < \gamma'_{p_v} < \gamma'_{p_{v+1}} < \cdots,$$

$$\gamma'_v \leqq \gamma'_{p_v}.$$

Por teorema C de § 15, habría un número definido δ de la segunda clase-númerica, llamado,

$$\delta = \operatorname*{Lim}_v \gamma'_{p_v},$$

el cual es mayor que todos los números γ'_{p_v}. Consecuentemente tendríamos

$$\delta > \gamma'_v$$

para cada v. Pero $\{\gamma'_v\}$ contiene todos los números de la segunda clase-numérica, y consecuentemente también el número δ; así tendríamos, para un definido v_0,

$$\delta = \gamma'_{v_0},$$

cuya ecuación es inconsistente con la relación $\delta > \gamma'_{v_0}$. La suposición $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$ consecuentemente lleva a una contradicción.

E. Cualquier totalidad $\{\beta\}$ de diferentes números β de la segunda clase númerica tiene, sí ésta es infinita, o el número cardinal $\aleph_0$ ó el número cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ de la segunda clase-númerica.

Prueba.- El conjunto $\{\beta\}$, cuando está arreglado en su orden de magnitud, como es una parte de el conjunto bien-ordenado $\{\alpha\}$, es, por teorema O de § 13, similar o a un segmento A_{α_0}, el cual es la totalidad de todos los números de la misma clase-numérica los cuales son menores que α_0, arreglados en su orden de magnitud, o a la totalidad $\{\alpha\}$ por sí misma. Como fue mostrado en la prueba del teorema A, nosotros tenemos

$$\overline{A}_{\alpha_0} = \alpha_0 - w.$$

Así tenemos $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \alpha_0 - w$ ó $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \overline{\overline{\{\alpha\}}}$, y consecuentemente $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ es o igual a $\overline{\overline{\alpha_0 - w}}$ ó $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Pero $\overline{\overline{\alpha_0 - w}}$ es o un número cardinal finito o es igual a $\aleph_0$ (teorema I de § 15). El primer caso es aquí excluido porque $\{\beta\}$ es supuesto un conjunto infinito. Así el número cardinal $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ es o igual a $\aleph_0$ ó $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. La potencia de la segunda clase-numércia $\{\alpha\}$ es el segundo número mayor cardinal transfinito Alef-uno.

Prueba.- No hay número cardinal a que sea mayor que $\aleph_0$ y menor que $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Si no fuera así, habría, por § 2 (Cantor, 1895)[16], una parte infinita $\{\beta\}$ de $\{\alpha\}$ tal que $\overline{\overline{\{\beta\}}} = a$. Pero por el teorema E justamente probado, la parte $\{\beta\}$ tiene o el número cardinal $\aleph_0$ o el número cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Así el número cardinal $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ es necesariamente el número cardinal que sigue inmediatamente a $\aleph_0$ en maginitud; nosotros llamamos a este nuevo número cardinal $\aleph_1$.

En la segunda clase-numérica $Z(\aleph_0)$ poseemos, consecuentemente, la representativa natural para el segundo número mayor cardinal transfinito Alef-uno.

§ 17

Los Números de la Forma $w^{\mu}v_0+w^{\mu-1}v_1+\ldots+v_{\mu}$.

Es conveniente familiarizarnos, en primer lugar, con aquellos números de Z($\mathfrak{N}$o) que son funciones algebráicas de grado finito de w. Cada número tal puede ser puesto—y puesto en solo una manera—dentro de la forma

$$(1)\quad \phi = w^{\mu} v_0 + w^{\mu-1} v_1 + \ldots + v_u,$$

donde μ, v_0 son finitos y diferentes de cero, pero v_1, v_2, ..., v_{μ} pueden ser cero. Esto descansa en el hecho que

$$(2)\quad w^{\mu'} v' + w^{\mu} v = w^{\mu}v,$$

si $\mu' < \mu$ y $v > 0$, $v' > 0$. Por (8) de § 14, tenemos

$$w^{\mu'}v' + w^{\mu} v = w^{\mu'} (v' + w^{\mu-\mu'}v),$$

y, por el teorema E de § 15,

$$v' + w^{\mu-\mu'}v = w^{\mu-\mu'}v.$$

Así, en un conjunto de la forma

$$\ldots + w^{\mu'} v' + w^{\mu} v + \ldots,$$

todos aquellos términos los cuales son seguidos hacia la derecha por términos de más alto grado en w pueden ser omitidos. Este método puede ser continuado hasta que la forma dada en (1) sea alcanzada. Nosotros también acentuaremos que

$$(3)\quad w^{\mu} v + w^{\mu} v' = w^{\mu} (v + v').$$

Comparar, ahora, el número ϕ con el número ψ de la misma clase:

$$(4)\quad \psi = w^{\lambda} p_0 + w^{\lambda-1} p_1 + \ldots + p_{\lambda}.$$

Si μ y λ son diferentes y, decimos, $\mu < \lambda$, nosotros tenemos por (2) $\phi + \psi = \psi$, y por lo tanto $\phi < \psi$.

Si $\mu = \lambda$, v_0 y p_0 son diferentes, y, decimos, $v_0 < p_0$, nosotros tenemos por (2)

$$\phi + (w^{\lambda} (p_0 - v_0) + w^{\lambda - 1} p_1 + \ldots + p_{\mu}) = \psi ,$$

y por lo tanto

$$\phi < \psi.$$

Si, finalmente,

$$\mu = \lambda , \; v_0 = p_0 ; \; v_1 = p_1 , \ldots \; v_{\sigma-1} = p_{\sigma-1} , \; \sigma \lesseqgtr \mu ,$$

pero v_{σ} es diferente de p_{σ} y, decimos, $v_{\sigma} < p_{\sigma}$, tenemos por (2)

$$\phi + \left(w^{\lambda - \sigma} (p_{\sigma} - v_{\sigma}) + w^{\lambda - \sigma - 1} p_{\sigma+1} + \cdots + p_{\mu}\right) = \psi ,$$

y por lo tanto otra vez

$$\phi < \psi.$$

Así, vemos que solamente en el caso de completa identidad de las expresiones ϕ y ψ, pueden los números representados por ellas ser iguales.

La adición de ϕ y ψ lleva al siguiente resultado:

(a) Si $\mu < \lambda$, entonces, como hemos señalado anteriormente,

$$\phi + \psi = \psi ;$$

(b) Si $\mu = \lambda$, entonces tenemos

$$\phi + \psi = w^{\lambda} (v_0 + p_0) + w^{\lambda - 1} p_1 + \ldots + p_{\lambda} ;$$

(c) Si $\mu > \lambda$, tenemos

$$\phi + \psi = w^{\mu} v_0 + w^{\mu-1} v_1 + \ldots + w^{\lambda+1} v_{\mu-\lambda-1} + w^{\lambda} (v_{\mu-\lambda} + p_0) + w^{\lambda-1} p_1 + \ldots + p_{\lambda} .$$

A fin de llevar a cabo la multiplicación de ϕ y ψ , vemos que, si p es un número finito diferente de cero, tenemos la fórmula:

(5) $\phi p = w^{\mu} v_o p + w^{\mu-1} v_1 + \ldots + v_{\mu}.$

Esto resulta fácilmente llevando a cabo la suma consistente de p términos $\phi + \phi + \ldots + \phi$. Por la repetida aplicación del teorema G de § 15 y recordando el teorema F de § 15, obtenemos,

$$(6) \quad \phi\, w = w^{\mu+1},$$

y consecuentemente también

$$(7) \quad \phi\, w^{\lambda} = w^{\mu+\lambda}.$$

Por la ley distributiva, mencionada en (8) de § 14, tenemos

$$\phi\psi = \phi\, w^{\lambda} p_0 + \phi\, w^{\lambda-1} p_1 + \ldots + \phi\, w\, p_{\lambda-1} + \phi\, p_{\lambda}.$$

Así las fórmulas (4), (5) y (7) dan el siguiente resultado:

(a) Si $p_{\lambda} = 0$, tenemos

$$\phi\psi = w^{\mu+\lambda} p_0 + w^{\mu+\lambda-1} p_1 + \ldots + w^{\mu+1} p_{\lambda-1} = w^{\mu}\psi;$$

(b) Si p_{λ} no es igual a cero, tenemos

$$\phi\psi = w^{\mu+\lambda} p_0 + w^{\mu+\lambda-1} p_1 + \ldots + w^{\mu+1} p_{\lambda-1} + w^{\mu} v_0 p_{\lambda} + w^{\mu-1} v_1 + \ldots + v_{\mu}.$$

Nosotros llegamos a una resolución notable de los números ϕ de la siguiente manera. Sea

$$(8) \quad \phi = w^{\mu} k_0 + w^{\mu_1} k_1 + \ldots + w^{\mu_r} k_r,$$

donde

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_r \geqq 0$$

y $k_0, k_1, \ldots, k_r$ son números finitos los cuales son diferentes de cero. Entonces tenemos

$$\phi = (w^{\mu_1} k_1 + w^{\mu_2} k_2 + \ldots + w^{\mu_r} k_r)\,(w^{\mu-\mu_1} k_0 + 1).$$

Por la repetida aplicación de esta fórmula obtenemos

$$\phi = w^{\mu_r} k_r \,(w^{\mu_{r-1}-\mu_r} k_{r-1} + 1)(w^{\mu_{r-2}-\mu_{r-1}} k_{r-2} + 1) \ldots (w^{\mu-\mu_1} k_0 + 1)$$

Pero, ahora,

$$w^{\lambda} k + 1 = (w^{\lambda} + 1)\ k,$$

si k es un número finito que es diferente de cero; de modo que:

$$(9)\ \emptyset = w^{\mu_r} k_r\ (w^{\mu_{r-1}-\mu_r} + 1)\ k_{r-1}\ (w^{\mu_{r-2}-\mu_{r-1}} + 1)\ k_{r-2} \ldots (w^{\mu-\mu_1} + 1) k_0.$$

Los factores $w^{\lambda} + 1$ que ocurren aquí son todos irresolubles, y un número $\emptyset$ puede ser representado en este producto-forma en solo una manera. Si $\mu_r = 0$, entonces $\emptyset$ es de la primera clase, en todos los otros casos es de la segunda clase.

La aparente desviación de las fórmulas de este párrafo de aquéllas que fueron dadas en Math. Ann., XXI, p. 585 (o Grundlagen, p. 41), es meramente una consecuencia del escrito diferente del producto de dos números: ahora ponemos el multiplicando en la izquierda y el multiplicador en la derecha, en forma contraria a cómo los pusimos.

§ 18

La Potencia γ^{α} en el Dominio de la Segunda Clase-Numérica

Sea ξ una variable cuyo dominio consiste de los números de la primera y segunda clase-numérica incluyendo el cero. Sean γ y δ dos constantes perteneciendo al mismo dominio, y sean

$$\delta > 0, \quad \gamma > 1.$$

Podemos entonces aseverar el siguiente teorema:

A. Hay una función f (ξ) enteramente determinada univalente de la variable ξ tal que:

(a) $f(0) = \delta$.

(b) Si ξ' y ξ'' son cualquiera dos valores de ξ, y si

$$\xi' < \xi'',$$

entonces

$$f(\xi') < f(\xi'').$$

(c) Para cada valor de ξ tenemos

$$f(\xi+1) = f(\xi)\gamma.$$

(d) Si $\{\xi_v\}$ es cualquier serie fundamental, entonces $\{f(\xi_v)\}$ también lo es, y si tenemos

$$\xi = \operatorname*{Lim}_{v} \xi_v,$$

entonces

$$f(\xi) = \operatorname*{Lim}_{v} f(\xi_v).$$

Prueba.- Por (a) y (c), tenemos

$$f(1) = \delta\gamma, \ f(2) = \delta\gamma\gamma, \ f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma, \ldots,$$

y, como $\delta > 0$ y $\gamma > 1$, tenemos

$$f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(v) < f(v+1) < \ldots$$

Así la función $f(\xi)$ es enteramente determinada por el dominio $\xi < w$. Dejemos ahora suponer que el teorema es válido para todos los valores de ξ que son menores que α, donde α es cualquier número de la segunda clase-numérica, entonces es también válido para $\xi \leqq \alpha$. Si α es de la primera clase, tenemos de (c):

$$f(\alpha) = f(\alpha_{-1})\gamma > f(\alpha_{-1});$$

de modo que las condiciones (b), (c) y (d) son satisfechas para $\xi \leqq \alpha$. Pero si α es de la segunda clase y $\{\alpha_v\}$ es una serie fundamental tal que $\operatorname{Lim}_v \alpha_v = \alpha$, entonces sigue de (b) que también $\{f(\alpha_v)\}$ es una serie fundamental, y de (d) que $f(\alpha) = \operatorname{Lim}_v f(\alpha_v)$. Si tomamos otra serie fundamental $\{\alpha'_v\}$ tal que $\operatorname{Lim}_v \alpha'_v = \alpha$, entonces, por (b), las dos series fundamentales $\{f(\alpha_v)\}$ y $\{f(\alpha'_v)\}$ son coherentes, y así también $f(\alpha) = \operatorname{Lim}_v f(\alpha'_v)$. El valor de $f(\alpha)$ es, consecuentemente, también determinado únicamente en este caso.

Si α' es cualquier número menor que α, fácilmente evidenciamos que $f(\alpha') < f(\alpha)$. Las condiciones (b), (c) y (d) son también satisfechas para $\xi \leqq \alpha$. De aquí sigue la validez del teorema para todos los valores de ξ. Si hubiera valores excepcionales de ξ para los cuales no se cumpliera, entonces, por el teorema B de § 16, uno de ellos, que llamaremos α, tendría que ser el menor. Entonces el teorema sería válido para $\xi < \alpha$, pero no para $\xi \leqq \alpha$, y esto sería una contradicción con la que hemos probado. Así hay para el dominio entero de ξ una y solamente una función $f(\xi)$ la cual satisface las condiciones (a) a (d).

Si atribuimos a la constante δ el valor 1 y entonces denotamos la función $f(\xi)$ por

$$\gamma^{\xi},$$

podemos formular el siguiente teorema:

B. Si γ es cualquier constante mayor que 1 que pertenece a la primera o segunda clase numérica, hay una función enteramente definida γ^{ξ} de ξ tal que:

(a) $\gamma^{0} = 1$;

(b) Sí $\xi' < \xi''$ entonces $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$;

(c) Para cada valor de ξ tenemos $\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi}\gamma$;

(d) Si $\{\xi_v\}$ es una serie fundamental, entonces $\{\gamma^{\xi_v}\}$ también lo es, y tenemos, si $\xi = \operatorname{Lim}_v \xi_v$, la ecuación

$$\gamma^{\xi} = \operatorname{Lim}_v \gamma^{\xi_v} .$$

Podemos también enunciar el teorema:

C. Si $f(\xi)$ es la función de ξ que es caracterizada en teorema A, tenemos

$$f(\xi) = \delta\gamma^{\xi}.$$

Prueba.- Si nosotros ponemos atención a (24) de § 14, fácilmente evidenciamos que la función $\delta\gamma^{\xi}$ satisface, no solamente las condiciones (a), (b) y (c) de el teorema A, sino también la condición (d) de este teorema. Tomando en cuenta la unicidad de la función $f(\xi)$, ésta debe por tanto ser idéntica con $\delta\gamma^{\xi}$.

D. Si α y β son dos números cualquiera de la primera o segunda numérica, incluyendo el cero, tenemos

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

onsideramos la función $\phi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$. Poniendo atenla función $f(\xi)$ por

$$\gamma^{\xi},$$

podemos formular el siguiente teorema:

B. Si γ es cualquier constante mayor que 1 que pertenece a la primera o segunda clase numérica, hay una función enteramente definida γ^{ξ} de ξ tal que:

(a) $\gamma^{0} = 1$;

(b) Si $\xi' < \xi''$ entonces $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$;

(c) Para cada valor de ξ tenemos $\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi}\gamma$;

(d) Si $\{\xi_v\}$ es una serie fundamental, entonces $\{\gamma^{\xi_v}\}$ también lo es, y tenemos, si $\xi = \operatorname{Lim}_v \xi_v$, la ecuación

$$\gamma^{\xi} = \operatorname{Lim}_v \gamma^{\xi_v} .$$

Podemos también enunciar el teorema:

C. Si $f(\xi)$ es la función de ξ que es caracterizada en teorema A, tenemos

$$f(\xi) = \delta\gamma^{\xi}.$$

Prueba.- Si nosotros ponemos atención a (24) de § 14, fácilmente evidenciamos que la función $\delta\gamma^{\xi}$ satisface, no solamente las condiciones (a), (b) y (c) de el teorema A, sino también la condición (d) de este teorema. Tomando en cuenta la unicidad de la función $f(\xi)$, ésta debe por tanto ser idéntica con $\delta\gamma^{\xi}$.

D. Si α y β son dos números cualquiera de la primera o segunda clase-numérica, incluyendo el cero, tenemos

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

Prueba.- Consideramos la función $\phi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$. Poniendo atención al hecho que, por fórmula (23) de § 14,

$$\lim_{v} (\alpha+\xi_v) = \alpha + \lim_{v} \xi_v ,$$

reconocemos que $\phi(\xi)$ satisface las siguientes cuatro condiciones:

(a) $\phi(0) = \gamma^{\alpha}$;

(b) Si $\xi' < \xi''$, entonces $\phi(\xi') < \phi(\xi'')$;

(c) Para cada valor de ξ tenemos $\phi(\xi+1) = \phi(\xi)\gamma$;

(d) Si $\{\xi_v\}$ es una serie fundamental tal que $\lim_{v} \xi_v = \xi$, tenemos

$$\phi(\xi) = \lim_{v} \phi(\xi_v).$$

Por teorema C tenemos, cuando ponemos $\delta = \gamma^{\alpha}$,

$$\phi(\xi) = \gamma^{\alpha}\gamma^{\xi}.$$

Si en ésta ponemos $\xi = \beta$, tenemos

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

E. Si α y β son dos números cualquiera de la primera o segunda clase-numérica, incluyendo el cero, tenemos

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^{\alpha})^{\beta} .$$

Prueba.- Consideremos la función $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha\xi}$ y remarquemos que, por (24) § 14, siempre tenemos $\lim_{v} \alpha\xi_v = \lim_{v} \xi_v$, entonces podemos, por teorema D, decir lo siguiente:

(a) $\psi(0) = 1$;

(b) Si $\xi' < \xi''$, entonces $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$;

(c) Para cada valor de ξ tenemos $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)\gamma^{\alpha}$;

(d) Si $\{\xi_v\}$ es una serie fundamental, entonces $\{\psi(\xi_v)\}$ también lo es, y tenemos, si $\xi = \lim_{v} \xi_v$, la ecuación $\psi(\xi) = \lim_{v} \psi(\xi_v)$.

Así, por teorema C, si substituimos en éste 1 por δ y γ^{α} por γ,

$$\psi(\xi) = (\gamma^{\alpha})^{\xi} .$$

En la magnitud de γ^{ξ} en comparación con ξ nosotros podemos enunciar el siguiente teorema:

F. Si $\gamma > 1$, tenemos, para cada valor de ξ,

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi .$$

Prueba.- En los casos $\xi = 0$ y $\xi = 1$ el teorema es inmediatamente evidente. Ahora mostraremos que, si es válido para todos los valores de ξ que son menores que un número dado $\alpha > 1$, es también válido para $\xi = \alpha$.

Si α es de la primera clase, tenemos, por suposición,

$$\alpha_{-1} \leqq \gamma^{\alpha_{-1}},$$

y consecuentemente

$$\alpha_{-1}\gamma \leqq \gamma^{\alpha_{-1}}\gamma = \gamma^{\alpha} .$$

De aquí

$$\gamma^{\alpha} \geqq \alpha_{-1} + \alpha_{-1}(\gamma - 1) .$$

Como ambos α_{-1} y $\gamma - 1$ son al menos iguales a 1, y $\alpha_{-1} + 1 = \alpha$, tenemos

$$\gamma^{\alpha} \geqq \alpha .$$

Si, por otro lado, α es de la segunda clase y

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{v} \alpha_{v},$$

entonces, como $\alpha_v < \alpha$, tenemos por suposición

$$\alpha_v \leqq \gamma^{\alpha_v} .$$

Consecuentemente

$$\operatorname*{Lim}_{v} \alpha_v \leqq \operatorname*{Lim}_{v} \gamma^{\alpha_v},$$

es decir,

$$\alpha \leqq \gamma^{\alpha} .$$

Si, ahora, hubiera valores de ξ para los cuales

$$\xi > \gamma^{\xi},$$

uno de ellos, por teorema B de § 16, tendría que ser el menor. Si este número es denotado por α, tendríamos, para $\xi < \alpha$,

$$\xi \leqq \gamma^{\xi};$$

pero

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

lo cual contradice lo que tenemos probado arriba. Así tenemos para todos los valores de ξ

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi.$$

La Forma Normal de los Números de la Segunda Clase-Numérica.

Sea α cualquier número de la segunda clase-numérica. La Potencia w^{ξ} será, para valores suficientemente grandes de ξ, mayor que α. Por teorema F de § 18, este es siempre el caso para $\xi > \alpha$; pero en general también sucederá para valores pequeños de ξ.

Por teorema B de § 16, debe haber, entre los valores de ξ para los cuales

$$w^{\xi} > \alpha ,$$

uno que es el menor. Lo denotaremos por β, y fácilmente evidenciamos que éste no puede ser un número de la segunda clase. Si, ciertamente, tuvimos

$$\beta = \operatorname*{Lim}_{v} \beta_v ,$$

tendríamos, como $\beta_v < \beta$,

$$w^{\beta_v} \leqq \alpha ,$$

y consecuentemente

$$\operatorname*{Lim}_{v} w^{\beta_v} \leqq \alpha .$$

Así tendríamos

$$w^{\beta} \leqq \alpha ,$$

mientras que tenemos

$$w^{\beta} > \alpha .$$

Por tanto β es de la primera clase. Nosotros denotamos β_{-1} por α_0, de modo que $\beta = \alpha_0 + 1$, y consecuentemente podemos aseverar que hay un número enteramente determinado α_0 de la primera o segunda clase-numérica que satisface las dos condiciones:[17]

(1) $$w^{\alpha_0} \leqq \alpha, \quad w^{\alpha_0}w > \alpha.$$

De la segunda condición concluímos que

$$w^{\alpha_0}v \leqq \alpha$$

no vale para todos los valores finitos de v, si para esto tuviéramos[18]

$$\operatorname*{Lim}_{v} w^{\alpha_0} v = w^{\alpha_0}w \leqq \alpha.$$

El último número finito v para el cual

$$w^{\alpha_0}v > \alpha$$

será denotado por $k_0 + 1$. De (1), tenemos $k_0 > 0$.

Hay, por tanto, un número enteramente determinado k_0 de la primera clase-numérica tal que

(2) $$w^{\alpha_0}k_0 \leqq \alpha, \quad w^{\alpha_0}(k_0+1) > \alpha.$$

Si ponemos $\alpha - w^{\alpha_0}k_0 = \alpha'$, tenemos

(3) $$\alpha = w^{\alpha_0}k_0 + \alpha'$$

y

(4) $$0 \leqq \alpha' < w^{\alpha_0}, \quad 0 < k_0 < w.$$

Pero α puede estar representada en la forma (3) bajo la condición (4) solamente en una forma. De (3) y (4) sigue inversamente la condición (2) y desde entonces la condición (1). Pero solamente el número $\alpha_0 = \beta_{-1}$ satisface la condición (1), y por la condición (2) el número finito k_0 está determinado únicamente. De (1) y (4) sigue, poniendo atención al teorema F de § 18, que

$$\alpha' < \alpha, \quad \alpha_0 \leqq \alpha.$$

Así podemos enunciar el siguiente teorema:

A. Todo número α de la segunda clase-numérica puede ser puesto, y puesto solamente de una manera, dentro de la forma

$$\alpha = w^{\alpha_0}k_0 + \alpha',$$

donde

$$0 \leqq \alpha' < w^{\alpha_0}, \quad 0 < k_0 < w,$$

y α' es siempre menor que α , pero α_0 es menor que o igual a α .

Si α' es un número de la segunda clase-numérica, podemos aplicar el teorema A a éste, y tenemos

(5) $$\alpha' = w^{\alpha_1}k_1 + \alpha'',$$

donde

$$0 \leqq \alpha'' < w^{\alpha_1}, \quad 0 < k_1 < w,$$

y

$$\alpha_1 < \alpha_0, \quad \alpha'' < \alpha'.$$

En general obtenemos una nueva secuencia de ecuaciones análogas:

(6) $$\alpha'' = w^{\alpha_2}k_2 + \alpha''',$$

(7) $$\alpha''' = w^{\alpha_3}k_3 + \alpha^{iv}.$$

. . . . . .

Pero esta secuencia no puede ser infinita, debe necesariamente terminar. Los números $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ decrecen en magnitud:

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' \ldots$$

Si una serie de números transfinitos decreciendo fuera infinita, entonces no habría término menor; y esto es imposible por el teorema B de § 16. Consecuentemente debemos tener, para un cierto valor numérico finito r,

$$\alpha^{(r+1)} = 0.$$

Si ahora conectamos las ecuaciones (3), (5), (6) y (7) una con otra, obtenemos el teorema:

B. Todo número α de la segunda clase-numérica puede estar representado, y representado sólamente en una manera, en la forma

$$\alpha = w^{\alpha_0}k_0 + w^{\alpha_1}k_1 + \ldots + w^{\alpha_r}k_r,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ son números de la primera o segunda clase-numérica, tales que:

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r \geqq 0,$$

mientras que $k_0, k_1, \ldots k_r, r+1$ son números de la primera clase-numérica los cuales son diferentes de cero.

La forma de los números de la segunda clase-numérica que es aquí mostrada será llamada su "forma normal"; α_0 es llamado el "grado" y α_r el "exponente" de α. Para $r = 0$, grado y exponente son iguales uno a otro.

De acuerdo como el exponente α_r es igual o mayor que cero, α es un número de la primera o segunda clase.

Tomemos otro número β en la forma normal:

(8) $$\beta = w^{\beta_0}\lambda_0 + w^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + w^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Las fórmulas:

(9) $$w^{\alpha'}k' + w^{\alpha'}k = w^{\alpha'}(k' + k),$$

(10) $$w^{\alpha'}k' + w^{\alpha''}k'' = w^{\alpha''}k'', \quad \alpha' < \alpha'',$$

donde k, k', k" aquí denotan números finitos, sirven ambas para la comparación de α con β y para llevar a cabo su suma y diferencia. Estas son generalizaciones de las fórmulas (2) y (3) de § 17.

Por la formación del producto $\alpha\beta$, las siguientes fórmulas entran en consideraciones:

(11) $\alpha\lambda = w^{\alpha_0}k_0\lambda + w^{\alpha_1}k_1 + \ldots + w^{\alpha_r}k_r, \quad 0 < \lambda < w;$

(12) $\alpha w = w^{\alpha_0 + 1};$

(13) $\alpha w^{\beta'} = w^{\alpha_0 + \beta'}, \quad \beta' > 0.$

La exponenciación α^{β} puede ser fácilmente llevada a cabo en las bases de las siguientes fórmulas:

(14) $\alpha^{\lambda} = w^{\alpha_0\lambda}k_0 + \ldots, \quad 0 < \lambda < w.$

Los términos no escritos en la derecha tienen un grado menor que el primero. De aquí sigue rápidamente que las series fundamentales $\{\alpha^{\lambda}\}$ y $\{w^{\alpha_0\lambda}\}$ son coherentes, de modo que

(15) $\alpha^{w} = w^{\alpha_0 w}, \quad \alpha_0 > 0.$

Así, en consecuencia del teorema E de § 18, tenemos:

(16) $\alpha^{w^{\beta'}} = w^{\alpha_0 w^{\beta'}}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta' > 0.$

Con la ayuda de estas fórmulas podemos probar los siguientes teoremas:

C. Si los primeros términos $w^{\alpha_0}k_0$, $w^{\beta_0}\lambda_0$ de la forma normal de dos números α y β no son iguales, entonces α es menor o mayor que β de acuerdo a como $w^{\alpha_0}k_0$ es menor o mayor que $w^{\beta_0}\lambda_0$. Pero si tenemos

$$w^{\alpha_0}K_0 = w^{\beta_0}\lambda_0,\ w^{\alpha_1}K_1 = w^{\beta_1}\lambda_1, \ldots, w^{\alpha_p}k_p = w^{\beta_p}\lambda_p,$$

y si $w^{\alpha_{p+1}}K_{p+1}$ es menor o mayor que $w^{\beta_{p+1}}\lambda_{p+1}$, entonces α es correspondientemente menor o mayor que β.

D. Si el grado α_0 de α es menor que el grado β_0 de β, tenemos

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Si $\alpha_0 = \beta_0$, entonces

$$\alpha + \beta = w^{\beta_0}(k_0 + \lambda_0) + w^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + w^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Pero si

$$\alpha_0 > \beta_0, \alpha_1 > \beta_0, \ldots, \alpha_p \geqq \beta_0, \ \alpha_{p+1} < \beta_0,$$

entonces

$$\alpha + \beta = w^{\alpha_0}k_0 + \ldots + w^{\alpha_p}k_p + w^{\beta_0}\lambda_0 + w^{\beta_1}\lambda_1 + \ldots + w^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

E. Si β es de la segunda clase ($\beta_\sigma > 0$), entonces

$$\alpha\beta = w^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + w^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \ldots + w^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma = w^{\alpha_0}\beta;$$

pero si β es de la primera clase ($\beta_\sigma = 0$), entonces

$$\alpha\beta = w^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + w^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \ldots + w^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1} + w^{\alpha_0}k_0\lambda_\sigma + w^{\alpha_1}k_1 + \ldots + w^{\alpha_r}k_r.$$

F. Si β es de la segunda clase ($\beta_\sigma > 0$), entonces

$$\alpha^\beta = w^{\alpha_0\beta}.$$

Pero si β es de la primera clase ($\beta_\sigma = 0$), y ciertamente $\beta = \beta' + \lambda_\sigma$, donde β' es de la segunda clase, tenemos:

$$\alpha^\beta = w^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_\sigma}.$$

G. Todo número α de la segunda clase-numérica puede ser representado, solamente en una manera, en el producto-forma:

$$\alpha = w^{\gamma_0}k_r(w^{\gamma_1}+1)k_{r-1}(w^{\gamma_2}+1)k_{r-2}\ldots(w^{\gamma_r}+1)k_0,$$

y tenemos

$$\gamma_0 = \alpha_r, \ \gamma_1 = \alpha_{r-1} - \alpha_r, \ \gamma_2 = \alpha_{r-2} - \alpha_{r-1}, \ldots, \gamma_r = \alpha_0 - \alpha_1,$$

donde también $k_0, k_1, \ldots k_r$ tienen la misma denotación como en la forma normal. Los factores $w^\gamma + 1$ son todos irresolubles.

H. Todo número α de la segunda clase que pertenece a la segunda clase-numérica puede ser representado, y representado de solamente una manera, en la forma

$$\alpha = w^{\gamma_0}\alpha',$$

donde $\gamma_0 > 0$ y α' es un número de la primera clase que pertenece a la primera o segunda clase-numérica.

I. Para que dos números α y β de la segunda clase-numérica satisfagan la relación

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

es necesario y suficiente que tengan la forma

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma v,$$

donde μ y v son números de la primera clase-numérica.

K. Para que dos números α y β de la segunda clase-numérica, que son ambos de la primera clase, satisfagan la relación

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

es necesario y suficiente que tengan la forma

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \quad \beta = \gamma^{v},$$

donde μ y v son números de la primera clase-numérica.

A fin de ejemplificar la extensión con que se trató la "forma- normal" y la "forma-producto" inmediatamente relacionada con ella, de los números de la segunda clase-numérica, las pruebas, que se basan en ellas, de los dos últimos teoremas I y K, pueden seguir aquí.

De la suposición

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

primero conlcuímos que el grado α_0 de α debe ser igual a el grado β_0 de β. Si, decimos, $\alpha_0 < \beta_0$, tendríamos, por teorema D,

$$\alpha + \beta = \beta,$$

y consecuentemente

$$\beta + \alpha = \beta,$$

lo cual no es posible, pues, por (2) de § 14,

$$\beta+\alpha>\beta,$$

Así nosotros podemos poner

$$\alpha = w^{\alpha_0}\mu+\alpha', \quad \beta = w^{\alpha_0}v + \beta',$$

donde los grados de los números α' y β' son menores que α_0, y μ y v son números infinitos que son diferentes de cero. Ahora, por el teorema D tenemos

$$\alpha+\beta = w^{\alpha_0}(\mu+v) + \beta', \quad \beta+\alpha = w^{\alpha_0}(\mu+v)+\alpha',$$

y consecuentemente

$$w^{\alpha_0}(\mu+v) + \beta' = w^{\alpha_0}(\mu+v) + \alpha'.$$

Por teorema D de § 14 nosotros tenemos consecuentemente

$$\beta' = \alpha'.$$

Así tenemos

$$\alpha = w^{\alpha_0}\mu+\alpha', \quad \beta = w^{\alpha_0}v + \alpha',$$

y si ponemos

$$w^{\alpha_0}+\alpha' = \gamma$$

tenemos, por (11)

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma v.$$

Supongamos, por otro lado, que α y β son dos números que pertenecen a la segunda clase-numérica, son de la primera clase, y satisfacen la condición

$$\alpha\beta=\beta\alpha,$$

y supongamos que

$$\alpha>\beta.$$

Imaginaremos ambos números, por teorema G, en su forma-producto, y sea

$$\alpha=\delta\alpha', \quad \beta=\delta\beta',$$

donde α' y β' no tienen factor común (en comparación de 1) en el final izquierdo. Nosotros tenemos entonces

$$\alpha' > \beta',$$

y

$$\alpha' \delta \beta' = \beta' \delta \alpha'.$$

Todos los números que ocurren aquí y más adelante son de la primera clase, porque esto fue supuesto de α y β.

En la última ecuación, cuando referimos el teorema G, mostramos que α' y β' no pueden ser ambos transfinitos, porque, en este caso, habría un factor común en el final izquierdo. Tampoco pueden ser ambos finitos; pues entonces δ sería tranfinito, y, si k es el factor finito en el final izquierdo de δ, tendríamos

$$\alpha' k = \beta' k,$$

y así

$$\alpha' = \beta'.$$

Así queda solamente la posibilidad que

$$\alpha' > w, \quad \beta' < w.$$

Pero el número finito β' debe ser 1:

$$\beta' = 1,$$

porque de otro modo estaría contenido como parte en el factor finito en el final izquierdo de α'.

Nosotros llegamos a el resultado que $\beta = \delta$, consecuentemente

$$\alpha = \beta \alpha',$$

donde α' es un número perteneciente a la segunda clase-numérica, el cual es de la primera clase, y debe ser menor que α:

$$\alpha' < \alpha.$$

Entre α' y β la relación

$$\alpha' \beta = \beta \alpha'$$

subsiste.

Consecuentemente si también $\alpha' > \beta$, nosotros concluimos en el mismo sentido la existencia de un número transfinito de la primera clase α'' que es menor que α' y tal que

$$\alpha' = \beta\alpha'', \quad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Si también α'' es mayor que β, hay un número α''' menor que α'', tal que

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \quad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

y así sucesivamente. Las series de números decreciendo, $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots,$ deben, por teorema B de § 16, terminar. Así, para un índice finito definido p_0, debemos tener

$$\alpha^{(p_0)} \leqq \beta .$$

Sí

$$\alpha^{(p_0)} = \beta,$$

tenemos

$$\alpha = \beta^{p_0+1}, \quad \beta = \beta ;$$

el teorema K estaría entonces probado, y tendríamos

$$\gamma = \beta, \quad \mu = p_0 + 1, \quad \nu = 1.$$

Pero sí

$$\alpha^{(p_0)} < \beta,$$

entonces ponemos

$$\alpha^{(p_0)} = \beta_1,$$

y tenemos

$$\alpha = \beta^{p_0}\beta_1, \quad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \quad \beta_1 < \beta .$$

Así también hay un número finito p_1 tal que

$$\beta = \beta_1^{p_1}\beta_2, \quad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \quad \beta_2 < \beta_1.$$

En general, tenemos anãlogamente:

$$\beta_1 = \beta_2^{p_2}\beta_3 \,,\; \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2 \,,\; \beta_3 < \beta_2 \,,$$

y asĩ sucesivamente. Las series de nũmeros decreciendo β_1, β_2, β_3,... deben tambiẽn, por teorema B de § 16, terminar. Asĩ, existe un nũmero finito k tal que

$$\beta_{k-1} = \beta_k^{p_k} \,.$$

Si ponemos

$$\beta_k = \gamma,$$

entonces

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \quad \beta = \gamma^{v},$$

donde μ y v son numerador y denominador de la fracciõn continuada:

$$\frac{\mu}{v} = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cdots + \cfrac{1}{p_k}} \,.$$

Los Números-ϵ de la Segunda Clase-Numérica

El grado α_0 de un número α es, como es inmediatamente evidente de la forma normal:

$$(1)\quad \alpha = w^{\alpha_0}k_0 + w^{\alpha_1}k_1 + \ldots,\quad \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots,\quad 0 < k_v < w,$$

cuando ponemos atención al teorema F de § 18, nunca mayor que α; pero es una pregunta sí no hay números para los cuales $\alpha_0 = \alpha$. En tal caso la forma normal de α se reduciría al primer término, y este término sería igual a w^{α}, es decir, α sería una raíz de la ecuación

$$(2)\qquad w^{\xi} = \xi.$$

Por otro lado, cada raíz α de esta ecuación tendría la forma normal w^{α}; su grado sería igual a sí misma.

Los números de la segunda clase numérica que son iguales a su grado coinciden, por tanto, con las raíces de la ecuación (2). Es nuestro problema determinar esas raíces en su totalidad. Al distinguirlas de todos los otros números las llamaremos los "números-ϵ de la segunda clase-numérica". Que "hay" tales números-ϵ resulta del siguiente teorema:

A. Si γ es cualquier número de la primera o segunda clase-numérica que no satisface la ecuación (2), éste determina una serie fundamental $\{\gamma\}$ por medio de las ecuaciones

$$\gamma_1 = w^{\gamma},\quad \gamma_2 = w^{\gamma_1},\quad \ldots,\ \gamma_v = w^{\gamma_{v-1}},\ \ldots$$

El límite $\operatorname{Lim}_v \gamma_v = E(\gamma)$ de esta serie fundamental es también un número-ϵ.

Prueba.- Como γ no es un número-ϵ, tenemos $w^{\gamma} > \gamma$, es decir,

$\gamma_1 > \gamma$. Así, por teorema B de § 18, tenemos también $w^{\gamma_1} > w^{\gamma}$, es decir, $\gamma_2 > \gamma_1$; y en la misma forma sigue que $\gamma_3 > \gamma_2$; y así sucesivamente. La serie $\{\gamma_v\}$ es así una serie fundamental. Nosotros denotamos su límite, que es una función de γ, por $E(\gamma)$ y tenemos:

$$w^{E(\gamma)} = \operatorname*{Lim}_{v} w^{\gamma} = \operatorname*{Lim}_{v} \gamma_{v+1} = E(\gamma).$$

Consecuentemente $E(\gamma)$ es un número-ϵ.

B.- El número $\epsilon_0 = E(1) = \operatorname*{Lim}_{v} w_v$, donde

$$w_1 = w, \quad w_2 = w^{w_1}, \quad w_3 = w^{w_2}, \ldots, \quad w_v = w^{w_{v-1}}, \ldots,$$

es el menor de todos los números-ϵ.

Prueba.- Sea ϵ' cualquier número-ϵ, de modo que

$$w^{\epsilon'} = \epsilon'.$$

Como $\epsilon' > w$, tenemos $w^{\epsilon'} > w^{w}$, es decir, $\epsilon' > w_1$. Similarmente $w^{\epsilon'} > w^{w_1}$, es decir, $\epsilon' > w_2$, y así sucesivamente. Tenemos en general

$$\epsilon' > w_v,$$

y consecuentemente

$$\epsilon' \geqq \operatorname*{Lim}_{v} w_v,$$

es decir,

$$\epsilon' \geqq \epsilon_0.$$

Así $\epsilon_0 = E(1)$ es el menor de todos los números-ϵ.

C. Si ϵ' es cualquier número-ϵ, ϵ'' es el siguiente número-mayor, y γ es cualquier número que está situado entre ellos:

$$\epsilon' < \gamma < \epsilon'',$$

entonces $E(\gamma) = \epsilon''$.

Prueba.- De

$$\epsilon' < \gamma < \epsilon''$$

sigue

$$w^{\epsilon'} < w^{\gamma} < w^{\epsilon''},$$

es decir,

$$\epsilon' < \gamma_1 < \epsilon''.$$

Similarmente concluimos

$$\epsilon' < \gamma_2 < \epsilon'',$$

y así sucesivamente. Tenemos, en general,

$$\epsilon' < \gamma_v < \epsilon'',$$

y así

$$\epsilon' < E(\gamma) \leqq \epsilon''.$$

Por el teorema A, $E(\gamma)$ es un número-ϵ. Como ϵ'' es el número-ϵ que sigue a ϵ' en orden de magnitud, $E(\gamma)$ no puede ser menor que ϵ'', y así debemos tener

$$E(\gamma) = \epsilon''.$$

Como $\epsilon'+1$ no es un número-ϵ, simplemente porque todos los números-ϵ, como sigue de la ecuación de la definicón $\xi = w^{\xi}$, son de la segunda clase, $\epsilon'+1$ es ciertamente menor que ϵ'', y así tenemos el siguiente teorema:

D. Si ϵ' es cualquier número-ϵ, entonces $E(\epsilon'+1)$ es el siguiente número-ϵ mayor.

Al menor número-ϵ, ϵ_0, sigue, entonces, el siguiente mayor:

$$\epsilon_1 = E(\epsilon_0+1),$$

a éste el siguiente mayor:

$$\epsilon_2 = E(\epsilon_1+1),$$

y así sucesivamente. Muy generalmente, nosotros tenemos para el (v+1)vo número-ϵ en orden de magnitud la fórmula de recursión

(3) $$\epsilon_v = E(\epsilon_{v-1}+1).$$

Pero que la serie infinita

$$\epsilon_0, \epsilon_1, \dots \epsilon_v, \dots$$

no signifique abrazar la totalidad de números-ϵ, resulta del siguiente teorema:

E. Sí $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots$ es cualquier serie infinita de números-ϵ tales que

$$\epsilon < \epsilon' < \epsilon'' \dots \epsilon^{(v)} < \epsilon^{(v+1)} < \dots,$$

entonces $\operatorname{Lim}_v \epsilon^{(v)}$ es un número-ϵ, y, de hecho, el número-ϵ que sigue en orden de magnitud a todos los números $\epsilon^{(v)}$.

Prueba.-

$$w^{\left(\operatorname{Lim}_v \epsilon^{(v)}\right)} = \operatorname{Lim}_v w^{\epsilon^{(v)}} = \operatorname{Lim}_v \epsilon^{(v)}.$$

Que $\operatorname{Lim}_v \epsilon^{(v)}$ es el número-ϵ que sigue en orden de magnitud a todos los números $\epsilon^{(v)}$ resulta del hecho que $\operatorname{Lim}_v \epsilon^{(v)}$ es el número de la segunda clase-numérica que sigue en orden de magnitud a todos los números $\epsilon^{(v)}$.

F. La totalidad de números-ϵ de la segunda clase-numérica forma, cuando se arregla en orden de magnitud, un conjunto bien-ordenado del tipo Ω de la segunda clase-numérica en su orden de magnitud, y tiene así la potencia Alef—uno.

Prueba.- La totalidad de números-ϵ de la segunda clase-numérica, cuando se arregla en su orden de magnitud, forma, por teorema C de § 16, un conjunto bien-ordenado:

(4) $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_v, \ldots \epsilon_{w+1}, \ldots \epsilon_{\alpha'} \ldots,$

cuya ley de formación es expresada en los teoremas D y E. Ahora, si el índice α' sucesivamente no tomó todos los valores numéricos de la segunda clase-numérica, habría un número menor α al cual no alcanzó. Pero esto contradicería el teorema D, si α fuera de la primera clase, y al teoream E, si α fuera de la segunda clase. Así α' toma todos los valores numéricos de la segunda clase-numérica.

Si denotamos el tipo de la segunda clase-numérica por Ω, el tipo de (4) es

$$w + \Omega = w + w^2 + (\Omega - w^2).$$

Pero como $w + w^2 = w^2$, tenemos

$$w + \Omega = \Omega;$$

y consecuentemente

$$\overline{\overline{w + \Omega}} = \overline{\overline{\Omega}} = \aleph_1.$$

G. Si ϵ es cualquier número-ϵ y α es cualquier número de la primera o segunda clase-numérica que es menor que ϵ:

$$\alpha < \epsilon,$$

entonces ϵ satisface las tres ecuaciones:

$$\alpha + \epsilon = \epsilon \quad , \quad \alpha\epsilon = \epsilon \ , \quad \alpha^{\epsilon} = \epsilon \ .$$

Prueba.- Si α_0 es el grado de α, tenemos $\alpha_0 \leqq \alpha$ y consecuentemente, como $\alpha < \epsilon$, también tenemos $\alpha_0 < \epsilon$. Pero el grado de

$\epsilon = w^{\epsilon}$ es ϵ ; así α tiene un grado menor que ϵ . Consecuentemente, por teorema D de § 19,

$$\alpha + \epsilon = \epsilon \ ,$$

y así

$$\alpha_0 + \epsilon = \epsilon \ .$$

Por otro lado, tenemos, por fórmula (13) de § 19,

$$\alpha\epsilon = \alpha w^{\epsilon} = w^{\alpha_0 + \epsilon} = w^{\epsilon} = \epsilon \ ,$$

y así

$$\alpha_0\epsilon = \epsilon \ .$$

Finalmente, poniendo atención a la fórmula (16) de § 19,

$$\alpha^{\epsilon} = \alpha w^{\epsilon} = w^{\alpha_0} w^{\epsilon} = w^{\alpha_0\epsilon} = w^{\epsilon} = \epsilon \ .$$

H. Si α es cualquier número de la segunda clase-numérica, la ecuación

$$\alpha^{\xi} = \xi$$

tiene no otra raíz que los números-ϵ que son mayores que α.

Prueba.- Sea β una raíz de la ecuación

$$\alpha^{\xi} = \xi \ ,$$

de modo que

$$\alpha^{\beta} = \beta \ .$$

Entonces, en el primer lugar, de esta fórmula sigue que

$$\beta > \alpha .$$

Por otro lado, β debe ser de la segunda clase, pues, si no, tendríamos

$$\alpha^{\beta} > \beta .$$

Así tenemos, por teorema F de § 19,[19]

$$\alpha^{\beta} = w^{\alpha_0 \beta}$$

y consecuentemente

$$w^{\alpha_0 \beta} = \beta .$$

Por teorema F de § 19, tenemos

$$w^{\alpha_0 \beta} \geqq \alpha_0 \beta ,$$

y así

$$\beta \geqq \alpha_0 \beta .$$

Pero β no puede ser mayor que $\alpha_0 \beta$; consecuentemente

$$\alpha_0 \beta = \beta ,$$

y así

$$w^{\beta} = \beta .$$

Por tanto β es un número-ϵ el cual es mayor que α .

CAPITULO III

EL TEOREMA DEL BUEN ORDEN

La primera demostración del Teorema del Buen Orden, teorema que destaca por su fuerza y consecuencias de gran alcance entre los logros de las matemáticas modernas, fue presentada por Ernest Zermelo en el año de 1904. Esta demostración reduce el problema a una pregunta sobre la existencia de conjuntos, cuya examen puede basarse en el Axioma de Elección y en la reducción del (buen) orden a la relación de membrecía. El Teorema del Buen Orden afirma que para cualquier conjunto M existe un buen orden de M. Conviene anotar, sin embargo, que se trata de un enunciado puramente existencial, no constructivo.

El Axioma de Elección desempeña un papel decisivo en la prueba de este enunciado, transmitiendo su naturaleza existencial a la prueba del Teorema. A saber, el Axioma General de Elección, enuncia: A todo conjunto M, cuyos elementos sean conjuntos no vacíos, corresponde al menos una función f(x) tal que para cada elemento x de M, f(x) es un elemento del conjunto x. Se llama a f en este caso función de elección.

Si M_1, M_2, ... son elementos de M, este principio afirma la existencia de una función f tal que $f(M_1)$ pertenece a M_1, $f(M_2)$ a M_2, etc...

Otra formulación (forma "multiplicativa") de este principio es la siguiente:

Axioma Multiplicativo: Si M es un conjunto de conjuntos no vacíos ajenos entre sí, esto es, tales que cualesquiqera dos miembros de M no tienen ningún elemento en común, entonces existe al menos un conjunto C que contiene un solo elemento de cada elemento de M.*

El Axioma de Elección no sólo es la base de cualquier prueba del Teorema del Buen Orden (Zermelo 1904, Zermelo 1908 ó Bernays 1937), sino que puede deducirse fácilmente de este teorema, tomado como hipótesis. De hecho, si asumimos ese teorema, obtenemos el axioma en su forma "multiplicativa" la cual comienza con un conjunto M de conjuntos no vacíos ajenos entre sí. El argumento es como sigue: asúmase la unión de los elementos de M como bien ordenada. Por tanto los sobconjuntos de la unión, entre ellos los elementos de M, están también bien ordenados. Entonces el conjunto que contiene solamente el primer elemento de cada elemento bien ordenado de M es un conjunto de elección de M. En particular estos primeros elementos son distintos unos de otros, puesto que M es un conjunto de elementos ajenos entre sí. Por lo tanto el axioma de elección y el teorema del buen orden son principios equivalentes; si uno de ellos se asume como verdadero entonces el otro puede probarse.

De hecho lo que Zermelo probó es que el Axioma de Elección implica el Teorema del Buen Orden. Analizaremos, en lo que sigue, esta primera prueba* del Teorema del Buen Orden, la cual descansa esencialmente sobre métodos y resultados matemáticos, principalmente sobre la comparabilidad de conjuntos bien ordenados.

Formularemos el Teorema como sigue:

Teorema del Buen Orden: Dado un conjunto M, existe un conjunto bien ordenado L_γ que contiene exactamente los elementos de M.

Prueba.-

Por demostrar: Que dado un conjunto M, podemos bien ordenar M, es decir, podemos formar un conjunto bien ordenado L_γ que contenga exactamente los elementos de M.

*Heijenoort (1971) p. 141-143.

(1) Por hipótesis, Zermelo supuso a M un conjunto arbitrario de cardinalidad $\mathfrak{m}$, donde m denotó un elemento arbitrario de éste y supuso a M', de cardinalidad $\mathfrak{m}'$, como un subconjunto de M que contuvo por lo menos un elemento m y pudo contener todos los elementos de M, y llamó a M-M' el subconjunto "complementario" a M'. También supuso al conjunto de todos los subconjuntos M' que denotaremos por P(M).

(2) Supuso que con cada subconjunto M' hay asociado un elemento arbitrario m_1' que ocurre en M' mismo, y llamó a m_1' el elemento "distinguido" de M'. Esto produjo una función de elección arbitraria γ del conjunto P(M) "cubierta" por ciertos elementos del conjunto M, es decir, una función que asigna un elemento determinado en forma única $\gamma(M')=m_1'$ de M' a todo subconjunto M' de M. En lo que sigue, Zermelo tomó una función γ cubierta arbitrariamente la cual quedó fija a lo largo de la prueba y derivó de ésta un buen ordenamiento definido de los elementos de M.

(3) Definición. Supuso aplicable el término "conjunto-γ" [concepto introducido por Zermelo] a cualquier conjunto bien ordenado M_γ que fué subconjunto de M y tuvo la siguiente propiedad: Cada vez que a fué un elemento arbitrario de M_γ y A fué el segmento "asociado" (que consistió de los elementos x de M tales que $x \prec a$), a fue el elemento distuinguido de M-A, en otras palabras $\gamma(M-A)=a$.

Ilustremos esta propiedad de los conjuntos-γ con algunos ejemplos*: Si $A=\phi$ entonces M-A=M; por otra parte, el elemento a de cualquier conjunto-γ que determina el segmento inicial ϕ es el primer elemento del conjunto-γ. Para $A=\phi$, entonces, esta propiedad expresa el hecho de que el primer elemento de cual

*Fraenkel (1976) p. 119.

quier conjunto-γ es el elemento distinguido de M mismo; denotémoslo por $m_1 (= \gamma(M))$. Así el conjunto singular (m_1), el cual está trivialmente bien ordenado, es un conjunto-γ (el más simple de tales conjuntos).

Si el conjunto-γ contiene al menos dos elementos (de los cuales el primero es ciertamente m_1), entonces la propiedad de estos conjuntos-γ implica que el segundo elemento m_2 del conjunto-γ satisface la relación $m_2 = \gamma(M-(m_1))$, pues el segmento inicial del conjunto-γ determinado por su segundo elemento es el conjunto cuyo único elemento es m_1, el primer elemento del conjunto-γ. Por tanto m_2 es el segundo elemento de cualquier conjunto-γ.

De la misma manera para un conjunto M suficientemente "comprehensivo" (donde por "comprehensión" se entiende una propiedad que es característica de los elementos del conjunto) obtenemos el conjunto-γ $(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n)$ para un entero arbitrario n o aún para todo entero n. Al igual que cualquier conjunto finito ordenado, estos conjuntos están bien ordenados. Sus elementos se caracterizan por la propiedad de que para $k=0,1,\ldots,n-1$; m_{k+1} es el elemento distinguido del subconjunto de M que se obtiene al omitir los elementos $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Por tanto m_{k+1} viene a ser el k-ésimo elemento de cualquier conjunto-γ; si M es un conjunto infinito obtenemos de este modo infinitamente muchos conjuntos-γ.

Como lo muestran estos ejemplos, la conexión entre cualquier elemento a de un conjunto-γ y su segmento inicial A determinado por a es (por su propiedad), que a es, en vista de la función de elección fija γ, el elemento distinguido de M-A, es decir, del subconjunto de M que se obtiene al omitir los elementos de A, Por lo tanto:

(4) Hay conjuntos-γ incluidos en M.

(5) Cada vez que M'_γ y M''_γ fueron dos conjuntos-γ distintos, uno fue idéntico con un segmento del otro.

Por el teorema N de § 13 de nuestro capítulo 2, o los dos conjuntos son similares entre sí o un conjunto es similar a un segmento (inicial) del otro.

Por inducción transfinita y reducción al absurdo se verá que los conjuntos M'_γ y M''_γ, en efecto, no sólo fueron uno similar a un segmento del otro, sino que incluso uno fue igual a un segmento del otro: Los ejemplos anteriores muestran que cualquier conjunto-γ tiene como primer elemento m_1, el elemento distinguido de M. Supongamos que hay elementos correspondientes en M'_γ y M''_γ que son distintos, sea m' el primer miembro de M'_γ que es asignado a un miembro diferente m" de M''_γ por el mapeo de similaridad (sin pérdida de generalidad) de M' sobre M". Entonces los segmentos iniciales M_1 de M'_γ y M_2 de M''_γ determinado por m' y m" respectivamente, deben coincidir: $M_1=M_2$, y por lo tanto, por la propiedad de los conjuntos-γ, los segmentos asociados A' y A" a m' y m" deben coincidir y consecuentemente los elementos distinguidos de M-A' y M-A", m_1 y m_2 respectivamente, también coicidirán, contradiciendo la asunción. Esto completa la prueba de (5).

(6) Consecuencias. Hemos visto que la coincidencia inicial de dos conjuntos-γ cualesquiera se extendió através del conjunto "más pequeño". Por lo tanto, si dos conjuntos-γ tuvieron un elemento a en común, ellos también tuvieron el segmento A de los elementos precediendo en común. Sí ellos tuvieron dos elementos a y

b en común, entonces o en *ambos* conjuntos $a \prec b$ o en *ambos* conjuntos $b \prec a$, es decir, su orden fue el mismo.

(7) Al llamar Zermelo a cualquier elemento de M que ocurre en algún conjunto-γ, "elemento-γ", el siguiente teorema vale: *La totalidad L_γ de todos los elementos-γ puede ser así ordenada que será por sí misma un conjunto-γ, que contiene todos los elementos del conjunto original M.* M por sí mismo es con eso bien ordenado.

Para probar (7), se dividirá en cinco párrafos la demostración:

(I) Si a y b son dos elementos-γ arbitrarios y si M' y M" son cualesquiera dos conjuntos-γ a los cuales ellos pertenecen respectivamente, entonces de acuerdo a (5) el mayor de los dos conjuntos-γ contiene ambos elementos y determina si el orden de relación es $a \prec b$ ó $b \prec a$. De acuerdo a (6) esta relación de orden es independiente de los conjuntos-γ seleccionados.

(II) Si a, b y c son tres elementos-γ arbitrarios y si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces siempre $a \prec c$. Esto se debe a que de acuerdo a (6) todo conjunto-γ conteniendo c también contiene b, así también a a, entonces, como éste es simplemente ordenado, sigue $a \prec c$. Por lo tanto el conjunto L_γ [que se compone de elementos-γ] es *simplemente ordenado*.

(III) Para mostrar que L_γ está bien ordenado, es decir, que cualquier subconjunto no vacío L'_γ de L_γ tiene un primer elemento, Zermelo consideró a L'_γ, un subconjunto arbitrario de L_γ y a a, uno de sus elementos, perteneciendo, por ejemplo, al conjunto-γ M_γ, entonces de acuerdo a (6) M_γ contiene a todos los elementos de L'_γ que preceden a a, aquí incluido el subconjunto L''_γ que es obtenido de L'_{γ} cuando quitamos a todos los elementos siguientes a a; L''_{γ}, siendo un subconjunto del conjunto bien ordenado M_{γ}, posee un primer elemento, que es también el primer elemento de L'_{γ}. L_{γ} es por tanto también <u>bien ordenado</u>.

(IV) Si a es un elemento-γ arbitrario y A la totalidad de todos los elementos precedentes $x \prec a$, entonces de acuerdo a (6), en todo subconjunto M_{γ} conteniendo a, A es el segmento asociado con a; de acuerdo a (3), consecuentemente, a es el elemento distuinguido de M-A. <u>Por lo tanto L_{γ} es por sí mismo un conjunto-γ</u>.

(V) Si existe un elemento de M que no pertenece a un conjunto-γ consecuentemente ese fué un elemento de $M-L_{\gamma}$, también existiría un elemento distuinguido m_1' de $M-L_{\gamma}$, y el conjunto ordenado (L_{γ}, m_1'), en el cual todo elmento-γ precede al elmento m_1', sería por sí mismo, de acuerdo a (3), un conjunto-γ. Entonces m_1' también sería un elemento-γ, contrario a la asunción; por tanto realmente $L_{\gamma} = M$, y así M es por sí mismo un <u>conjunto bien ordenado</u>.

Es así como por reducción al absurdo en (V) se termina la prueba de (7) y, más aún, de $L_{\gamma} = M$, y con ello lo que se quería demostrar.

Debido a la importancia, grandes consecuencias y complejidad del Teorema del Buen Orden, que a saber, fué conjeturado por Georg Cantor desde 1883 en su Grundlagen, hubo matemáticos, entre ellos su enunciador, que desde entonces intentaron la demostración de la validez del Teorema por un lado, y por el otro, hubo quienes pretendían probar su invalidez. Hilbert, en el Congreso Internacional de Matemáticas en París, decía que "el descubrimiento de tal prueba era uno de los problemas más importantes que confrontaba el mundo de las matemáticas"*.

Como uno de los últimos casos entre los que intentaron y creyeron probar el "No Teorema del Buen Orden", podemos citar a J. König, quien en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas en Heidelberg, el 10 de agosto de 1904, presentó lo que él consideraba como una prueba de que no hay buen orden en el continuo. Poco después, tuvo que retirar lo dicho, pues a menos de dos meses Ernest Zermelo completaba su prueba de la posibilidad de tal buen ordenamiento.

Para finalizar, analizaremos un trabajo, que aunque se reduce a una falacia, resulta muy interesante. Entre los matemáticos que aseguraron haber probado antes que Zermelo el Teorema del Buen Orden, se encuentra Philip Jourdain, quien en su artículo "Sobre una Prueba de que cada Conjunto puede ser bien-ordenado"**, dice que la prueba de Zermelo es en muchos aspectos análoga a la que él había ya publicado en enero de 1904, bajo el título "Sobre los Números Cardinales transfinitos de Conjuntos Bien-Ordenados"*** y aún más, dice que su prueba de 1904 da resultados más completos.

Lo que Jourdain argumenta**** es que con los mismos principios pero diferente métodos él habia ya demostrado***** el Teorema del Buen Orden, en forma más simple y más completa.

* Heijenoort (1971) p. 143
** Jourdain (1905) p. 465-70
*** Jourdain (1904a) p. 61-75
**** Jourdain (1905) p. 465-70
***** Jourdain (1904a) p. 61-75

Jourdain basó su prueba en el conjunto W, donde W es la serie ascendente de números ordinales finitos e infinitos ordenados en su orden de magnitud, es decir

$$1, 2, \ldots v, \ldots w, w+1, w+2, \ldots w+v, \ldots w2, w2+1,$$

$$\ldots wv, \ldots w^2, \ldots w^v, \ldots w^w, \ldots w^{w^w}, \ldots \alpha,$$

$$\ldots \Omega, \Omega+1, \ldots \gamma, \ldots,$$

e interpretó el teorema en tal sentido, que como él mismo expresa*, ni asegura que el continuo numérico tenga un número cardinal que no sea por sí mismo contradictorio, o en otras palabras, que

$$2^{\aleph_0}$$

es un alef, ni que la exponenciación con número cardinal transfinito sea una operación posible. Esto es, que ni siquiera el continuo requiere ser un alef.

Según Jourdain**, los conjuntos "inconsistentes" son los conjuntos que tienen una parte que es equivalente a W, pero sólo los "consistentes" (que definió como "manifolds"), es decir aquellos que no tienen componentes similares a W, son los que tienen tipos de orden y números cardinales, y precisamente en estas diferencias entre las propiedades de tales conjuntos es donde él vió el mayor alcance de sus resultados.

Jourdain*** en su prueba, define el conjunto (W,m_1), sin tipo de orden ni número cardinal, donde el elemento m_1 sigue a todos los elementos de W y así sucesivamente. Sostiene, que de hecho W es similar a un solo segmento de una serie bien ordenada B, tal que cada serie bien ordenada es similar ó a B ó a un segmento de B. B es aquí considerada como una serie "absolutamente" infinita.

Con esto, escribe Jourdain**** es evidente que los elementos de cualquier conjunto M pueden estar arreglados en una serie similar a B ó a uno de sus segmentos. Si se ordena sucesivamente cada elemento de M, se obtedrá la serie

* Jourdain (1905) p. 469
** Jourdain (1904a) p. 67
*** Jourdain (1905) p. 467
**** Jourdain (1905) p. 468

$$m_1, m_2, \ldots, m_v, \ldots, m_w, m_{w+1}, \ldots, m_\gamma, \ldots,$$

que contiene todos los elementos de M, o, si no los contiene, habría al menos un elemento m' de M que estaría en el resto, y que ordenándolo como el siguiente en la serie, la serie sería similar a B; y consecuentemente podríamos formar un conjunto bien ordenado que sería un segmento de B.

Es ininteligible la proposición, dice con justa razón Zermelo*, que un conjunto bien ordenado no posea tipo de orden o número cardinal.

Este proceso que Jourdain propone para ordenar un conjunto M, resulta demasiado simple: tomar un elemento arbitrario al principio, después otro, y así sucesivamente; después de un número finito o infinito de elementos tomados arbitrariamente del resto de M como los siguientes y continuando este proceso hasta que los elementos del conjunto sean todos tomados. Pero en realidad lo que esto prueba es que cualquier subconjunto M' de M puede extenderse por adición de un elemento tomado del resto M-M' y que este proceso se puede repetir hasta obtener todos los elementos de M. Si entonces pudiera probarse que entre los subconjuntos bien ordenados M' de M existe uno L que es el más grande, así como Zermelo probaría la existencia del conjunto más grande: el conjunto-γ L_γ, entonces necesariamente L=M, y M estaría bien ordenado. Jourdain quiso hacer la misma inferencia, sólo que le faltó la premisa esencial, la prueba de la existencia de L. Jourdain presupuso ésto sin prueba, asumiendo que su procedimiento, en cuanto no se tomen todos los elementos del conjunto M, tendría que terminar en un conjunto bien ordenado similar a B. Con ello, esta prueba se reduce a una falacia.

Por otro lado, el carácter contradictorio del conjunto de todos los ordinales (este concepto constituye la primera paradoja de la teoría de conjuntos, a saber, la de Burali-Forti) vuelve a manifestarse cuando le

* Heijenoort (1971) p. 193

adicionamos un nuevo elemento que sigue a la totalidad W; tal elemento es inadmisible al contradecir la definición de W. El conjunto W contiene sólamente los tipos de orden de la serie o continuidad de todos los conjuntos bien ordenados o de todos los segmentos de conjuntos bien ordenados, pero W por sí mismo no es continuable.

Como vimos en los capítulos precedentes, de acuerdo a la definición de Cantor de las relaciones de orden o precedencia en un conjunto simplemente ordenado, para (W, m_1), m_1 seguiría a todo ordinal α, y en el conjunto (W, m_1) ordenado de acuerdo a su relación de precedencia, m_1 seguiría a todos los elementos de W, esto es, W sería continuable, contrario a su definición y a pesar de toda prohibición, es decir, de considerar a W como "un conjunto que contiene todos los ordinales". Así, la contradicción ineherente en la definición de W no fue resuelta, sino ignorada.

Por todo esto, es claro que Jourdain no probó el Teorema del Buen Orden.

APENDICE

1) El sistema de todos los números finitos v es dado por los números de cardinal finito v y su totalidad conforma el más pequeño cardinal transfinito que nosotros llamamos "Alef-cero" y denotamos por $\aleph_0$; así, definimos

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\{v\}}}$$

2) Un conjunto M es llamado "simplemente ordenado" si un definido "orden de precedencia" regla sobre sus elementos m, tal que, de cada dos elementos m_1 y m_2, uno toma el rango "menor" y el otro el "mayor", y tal que, si de tres elementos m_1, m_2 y m_3, decimos, m_1 es de menor rango que m_2 y m_2 es de menor rango que m_3, entonces m_1 es de menor rango que m_3.

3) Otra definición equivalente pero más concisa de conjunto bien ordenado: Un conjunto ordenado es llamado bien ordenado si todo subconjunto no vacío tiene un primer elemento. De aquí puede seguir el siguiente corolario: Todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es también bien ordenado.

4) Para facilitar la edición, igual que en nuestra introducción, hemos escrito algunas letras griegas, góticas o diferentes a las que podemos escribir por otras posibles, como por ejemplo, ω por w, ν por v, etc...

5) La relación de dos elementos m_1 y m_2 de un conjunto M_1 en la cual m_1 tiene el menor rango en el orden de precedencia y m_2 el mayor, es expresada por la fórmula:

$$m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1.$$

6) En Jourdain (1955) p. 139 aparece erróneamente F' en lugar de F.

7) En Jourdain (1955) p. 139 aparece ahora erróneamente F en lugar de F_1.

8) Nosotros llamamos a dos conjuntos ordenados M y N "similares" si ellos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca uno a otro de tal manera que, si m_1 y m_2 son dos elementos de M y n_1 y n_2 los correspondientes elementos de N, entonces la relación de rango de m_1 a m_2 en M es la misma que la de n_1 a n_2 en N. Tal correspondencia de conjuntos similares la llamamos una "imagen"* de uno de esos conjuntos en el otro. En tal imagen a cada parte -que obviamente también aparece como un conjunto ordenado- M_1 de M corresponde una parte similar N_1 de N.

Nosotros expresamos la similaridad de dos conjuntos ordenados M y N por la fórmula:

$$M \cong N.$$

Cada conjunto ordenado es similar a sí mismo.

Si dos conjuntos ordenados son similares a un tercero, ellos son similares uno a otro.

Una simple consideración muestra que dos conjuntos ordenados tienen el mismo tipo ordinal si, y sólo si, ellos son similares, y así, de las dos fórmulas

$$\overline{M} = \overline{N}, \quad M \cong N,$$

cada una es consecuencia de la otra.

9) El conjunto unión de dos conjuntos M y N, ajenos entre sí, en símbolos (M,N), si M y N están ordenados, puede ser concebido como un conjunto ordenado en el cual las relaciones de precedencia entre los elementos

* Cantor, en alemán, la llamó "abbildung".

de M como también entre los elementos de N se mantienen entre ellos iguales como en M y N respectivamente, y todos los elementos de M tienen un rango menor que todos los de N. Si M' y N' son otros dos conjuntos oredenados, $M \simeq M'$ y $N \simeq N'$, entonces $(M,N) \simeq (M',N')$; así el tipo ordinal de (M,N) depende solamente de los tipos ordinales $\overline{M} = \alpha$ y $\overline{N} = \beta$. Así, definimos:

(1) $$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}.$$

En la suma $\alpha + \beta$ llamamos a α el "primer sumando" (augend) y a β el "segundo sumando" (addend).

Por otro lado, de dos conjuntos ordenados M y N con los tipos α y β, podemos obtener un conjunto ordenado S, sustituyendo a cada elemento n de N por un conjunto ordenado M_n que tenga el mismo tipo α de M, o sea

(2) $$\overline{M_n} = \alpha;$$

y para el orden de precedencia en

(3) $$S = \{M_n\}$$

procedemos de acuerdo a las siguientes dos reglas:

a) Cada dos elementos de S que pertenecen a uno y al mismo conjunto M_n, retienen en S el mismo orden de precedencia que en M_n;

b) Cada dos elementos de S que pertenecen a dos diferentes conjuntos M_{n_1} y M_{n_2} tienen la misma relación de precedencia como n_1 y n_2 la tienen en N.

El tipo ordinal de S depende, como podemos ver fácilmente, solamente de los tipos α y β; así, definimos el producto:

(4) $$\alpha \cdot \beta = \overline{S}$$

En este producto α es llamado el "multiplicando" (multiplicand) y β el "multiplicador" (multiplier).

En cualquier imagen definida de M en M_n sea m_n el elemento de M_n que corresponde a el elemento m de M; entonces podemos también escribir

(5) $$S = \{m_n\}.$$

Consideramos un tercer conjunto ordenado $P = \{p\}$ con el tipo ordinal $\overline{P} = \gamma$, entonces, por (4),

$$\alpha \cdot \beta = \{\overline{m_n}\}, \qquad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \{\overline{(m_n)_p}\},$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \{\overline{m_{(n_p)}}\}.$$

Pero los dos conjuntos ordenados $\{(m_n)_p\}$ y $\{(m_{(n_p)}\}$ son similares, y son imagen uno de otro si consideramos los elementos $(m_n)_p$ y $m_{(n_p)}$ como correspondientes. Consecuentemente, para los tres tipos α, β y γ, la ley asociativa

(6) $$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

se cumple. De las fórmulas precedentes (1) y (4) sigue, fácilmente, la ley distributiva

(7) $$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma;$$

pero solamente en esta forma, donde el factor con dos términos es el multiplicador.

Por el contrario, en la multiplicación de tipos como en su adición, la ley conmutativa generalmente no es válida.

10) En Jourdain (1955) p. 143 aparece erróneamente "segment" en lugar de "remainder".

11) Cada conjunto simplemente ordenado M, o lo que es lo mismo, cada conjunto ordenado M, tiene un "tipo ordinal" definido, o más abreviado, un "tipo" definido, que denotaremos por

$$\overline{M}.$$

Por esto nosotros entendemos el concepto general que resulta de M si nos abstraemos solamente de la naturaleza de sus elementos m, y retenemos el orden de precedencia entre ellos.

12) Si en un conjunto ordenado M todas las relaciones de precedencia de sus elementos se invierten, de modo que en todo caso el "menor" se vuelve el "mayor" y el "mayor" se vuelve el "menor", nosotros obtenemos un conjunto ordenado que denotaremos por

$$*M$$

y lo llamamos el "inverso"* de M. Denotamos el tipo ordinal de *M, si $\alpha = \overline{M}$, (lo cual implica $\overline{*\alpha} = \overline{*M}$), por

$$*\alpha.$$

Por otro lado, por w nosotros entendemos el tipo de un conjunto bien ordenado

$$(e_1, e_2, \ldots, e_v, \ldots),$$

en el cual

$$e_v \prec e_{v+1},$$

y donde v representa todos los números de cardinal finito en turno.

Ahora, consideremos cualquier conjunto transfinito M simplemente ordenado. Cada parte de M es por sí misma un conjunto ordenado. Para el estudio del tipo $\overline{M}$, aquellas partes de M que tienen los tipos w y *w merecen especial atención; las llamaremos "series fundamentales del primer orden contenidas en M", y la forma —de tipo w— la llamaremos una serie "ascendente" y a su inversa —de tipo *w—

* También llamado "dual"

una "descendente". A las series fundamentales del primer orden también las llamaremos simplemente "series fundamentales". Así, una "serie fundamental ascendente" es de la forma

$$\{a_v\}, \text{ donde } a_v \prec a_{v+1};$$

y una "serie fundamental descendente" es de la forma

$$\{b_v\}, \text{ donde } b_v \succ b_{v+1}.$$

La letra v, como la k, λ y μ, tienen en nuestras consideraciones la significación de un número cardinal finito arbitrario o un tipo finito (un número ordinal finito).

Nosotros llamamos a dos series fundamentales ascendentes $\{a_v\}$ y $\{a'_v\}$ en M "coherentes", en signos

$$\{a_v\} \parallel \{a'_v\},$$

si, para cada elemento a_v hay elementos a'_λ tales que

$$a_v \prec a'_\lambda,$$

y también para cada elemento a'_v hay elementos a_μ tales que

$$a'_v \prec a_\mu.$$

Dos series fundamentales descendentes $\{b_v\}$ y $\{b'_v\}$ en M se dice que son "coherentes", en signos

$$\{b_v\} \parallel \{b'_v\},$$

si para cada elemento b_v hay elementos b'_λ tales que

$$b_v \succ b'_\lambda,$$

y para cada elemento b'_v hay elementos b_μ tales que

$$b'_v \succ b_\mu.$$

Una serie fundamental ascendente $\{a_v\}$ y una descendente $\{b_v\}$ se dice que son "coherentes", en signos

(5) $$\{a_v\} \parallel \{b_v\},$$

si: (a) para todos los valores de v y μ

$$a_v \prec b_\mu,$$

y (b), en M existe a los más un (por tanto o solamente un o ningún) elemento m_0 tal que, para toda v's,

$$a_v \prec m_0 \prec b_v.$$

13) Los tipos ordinales de conjuntos ordenados finitos no ofrecen especial interés. Es fácil convencernos de que para uno y el mismo número cardinal finito v_1 todo conjunto simplemente ordenado es similar el uno al otro, y así tienen uno y el mismo tipo. Así, los tipos ordinales finitos simples son sujetos a las mismas leyes de los números cardinales finitos, y es admisible usar los mismos signos 1,2,3,...,v,... para ellos, aunque ellos sean conceptualmente diferentes de los números cardinales. El caso es diferente con los tipos ordinales transfinitos; para uno y el mismo número cardinal pertenecen innumerables tipos diferentes de conjuntos simplemente ordenados, los cuales, en su totalidad, constituyen una "clase de tipos" particular. Cada una de esas clases de tipos, es por tanto, determinada por el número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ que es común a todos los tipos pertenecientes a la clase. Así, para abreviar, la llamaremos la clase de tipos $[\mathfrak{a}]$.

14) El teorema C a que se hace referencia asegura lo siguiente: Cada conjunto finito E no es equivalente a alguna de sus partes.

Para llegar a este resultado se utilizan los siguientes dos teoremas (Cantor, 1895, § 5):

A. Los términos de las series ilimitadas de números cardinales finitos

$$1, 2, 3, \ldots, v, \ldots$$

son todos diferentes uno de otro.

E. Si N es un conjunto con el número cardinal finito v, y N_1 es cualquier parte propia de N, el número cardinal de N_1 es igual a uno de los números precedentes $1, 2, 3, \ldots, v-1$.

15) Si al conjunto $\{v\}$ es agregado un nuevo elemento e_0, el conjunto unión $(\{v\}, e_0)$ es equivalente al conjunto original $\{v\}$. Podemos pensar esta correspondencia recíprocamente unívoca entre ellos: al elemento e_0 del primero corresponde el elemento 1 del segundo, y al elemento v del primero corresponde el elemento v+1 del otro. Ahora, como $(\{v\}, e_0) \sim \{v\}$, tenemos que $\overline{\overline{(\{v\}, e_0)}} \sim \overline{\overline{\{v\}}}$ y por tanto,

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

16) Supongamos que dos conjuntos M y N con los números cardinales $a = \overline{\overline{M}}$ y $b = \overline{\overline{N}}$ son tales que a es "menor" que b ó b es "mayor" que a; en signos

$$a < b \quad ó \quad b > a,$$

entonces, por definición de "menor" y "mayor", ambas condiciones:

a) No hay parte de M que sea equivalente a N,

b) Hay una parte N_1 de N, tal que $N_1 \sim M$,

se cumplen

17) En Juordain (1955) p. 184 aparece erróneamente $w^0 \leqq \alpha$, en lugar de $w^{\alpha}0 \leqq \alpha$

18) En Juordain (1955) p. 185 aparece erróneamente Lim $w^{\alpha}0v$, en lugar de $\lim\limits_{v} w^{\alpha}0v$

19) En Juordain (1955) p. 201 aparece erróneamente $\alpha^{\beta} = \alpha_{o}\beta$ en lugar de $\alpha^{\beta} = w^{\alpha_o\beta}$.

BIBLIOGRAFIA

CANTOR, Georg

1883 Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig; o Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, Mathematische Annalen, Vol. XXI, p, 545-91, en: BINGLEY George, 1941, On Infinite, Linear Point Manifolds, traducción.*

1895 Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, Vol. XLVI, p. 481-512, en: Jourdain (1955) p. 85-136.*

1897 Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, Vol XLIX, p. 207-246, en: Jourdain (1955) p. 137-201.*

COHEN, P.J.

1963 The independence of the continuum hypothesis I, Proceedings of the National Academy of Science. USA 50, p. 1143-1148.*

DAUBEN, Joseph

1979 Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge, Mass: Harvad University.*

FRAENKEL, Abraham

1976 Teoría de los Conjuntos y Lógica. México: UNAM.*

FREGE, G.

1976 Los fundamentos de la aritmética y otros estudios filosóficos. México: UNAM.

GARCIADIEGO, Alejandro

1977 La teoría de Conjuntos: sus orígenes, desarrollo y consecuencias. México: Tesis.*

1984 Teoría de Conjuntos I, Apuntes dirigidos para ese curso. México, D.F., Mecanograma.

1984 Haciendo Historia de las Matemáticas, Para distribución limitada de los cursos de Historia de las Matemáticas I y II. México D.F., Mecanograma.

GÖDEL, K.

1951 The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hipotesis whit the axioms of set theory. Princenton, N.J.

HALMOS, P.

1973 Teoría Intuitiva de los Conjuntos. México: CECSA.

HARDY, G.H.

1903 A Theorem concerning the Infinite Cardinal Numbers, Quart. Journ of Math. 35, p. 87-94.

HEIJENOORT, Jean van

1971 From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical-- logic, 1879-1931. Cambridge, Mass: Harvard University Press.*

JOURDAIN, Philip

1904a On the transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates, Philosophical Magazine 7, p. 61-75.*

1904b On the transfinite Cardinal Numbers of Number-Classes in General, Philosophical Magazine 6, 7, p. 294-303.*

1905 On a Proof that every Aggregate can be well-ordered, Mathematische Annalen 60, p. 465-70.*

1955 Traducción, introducción y notas a: Contributions to the Fouding of the Theory of Transfinite Numbers by Georg Cantor. New York: Dover.*

KUNEN, Kenneth

1980 Set theory: An Introduction to Independence Poofs. Amsterdam: North-Holland.*

QUINE, W.

1963 Set theory and its logic. Cambridge, Mass: Oxford Univ. Press.

RUBIN H. y RUBIN J.E.

1970 Equivalents of The Axiom of Choise, Amsterdam: North-Holland.

RUSSELL, Bernard

1948 Los principios de la matemática. México: Espasa-Calpe.

1919 Introduction to Mathematical Philosophy. New York: Simon. *

SESTIER, Andrés

1982 Pequeño Tratado de Teoría de Conjuntos, carta de Cantor a un maestro berlinés. Matemáticas y Enseñanza 17, Vol. VI, No. 1

ZERMELO, Ernest

1904 Beweis, dab jede Menge wohlgeordnet werden kann, Mathematische Annalen 59, p. 514-16 en: Heijenoort (1971) p. 141-43.*

* Biliografía referida.