UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS.

Cuando se conoce en matemáticas según Aristóteles.

Tesis para obtener el titulo de matemático

presentada por: María Marcela Rosales Rodríguez.

México, D. F. 1985

I N D I C E.

Introduccion.

El tema central en esta tesis es el significado que para Aristóteles tiene el concepto "saber" ó conocer; más concretamente, aquí nos importa el significado de tal concepto en relación con la matemática.

Escribámos la definición de dicho concepto, el cuál viene explicado en la Metafísica de este filosofo:

> Evidentemente es preciso adquirir la ciencia de las causas primeras, puesto que decimos que se sabe, cuando creemos que se conoce la causa primera. Se distinguen cuatro causas. La primera es la esencia (la forma propia de cada cosa). La segunda es la materia o sujeto. La tercera es el principio de movimiento. La cuarta es la causa de finalidad.(1)

Posteriormente explicaremos el significado de las cuatro causas. Una vez que hemos dado la definición del "saber", preguntémonos con Aristóteles ¿Qué tipo de conocimiento es mejor?. Dice que;(2)

> La demostración universal es superior, porque está más relacionada con la causa y con el porqué.(2)

La palabra causa, Aristóteles la ocupa en el libro primero, y en lo sucesivo usa más la de principio Y esto es porque los primeros principios son las primeras causas, Escribe en Metafísica 1973 pág 7:

(1) Aristóteles Metafísica 1973 pág 9

(2) Aristóteles Organón 1972 pág 185.

> Lo más cientifico que existe lo cons
> tituyen los principios y las causas.

Preguntémonos ahora ¿ Pertenece a una sóla cien_
cia examinar toda especie de causa?

Responde Aristóteles que no es así. Dice que :

Cada ciencia examina a las causas dentro del gé
nero que le corresponde.

Los generos de ciencias diferentes, son diferen_
tes, como el género de la matemática es diferente del
de la biología; ya que el género de la primera está
formado por los objetos matemáticos, y el género de l
la biología es todo lo que tiene vida.

Y con respecto a la matemática ¿ Qué tipo de cau
sa o principio le corresponde a su género?.

Dice Aristóteles que:

> Nada se demuestra en las ciencias matemá
> ticas por medio de la causa de movimien-
> to.(3)

Esto lo dice porque un fín necesita de una ac-
ción y no hay acción sin movimiento y los objetos ma-
temáticos son inmóviles -dice-.

En el interior de esta tesis explicaremos amplia
mente el porqué, la causa de movimiento no incumbe a
la matemática (según Aristóteles). También explicare_
mos porqué la causa de finalidad tampoco interfiere
con la matemática y en cambio las de esencia y exis -
tencia (material) si son aquí ocupadas.

Puesto que los principios son tan importantes ..

para el conocer o saber preguntémonos ¿Dé donde proce_ den los principios de la ciencia?.

Para Aristóteles los principios de la ciencia no son juicios apriori, ya que responde así:(4)

> No es posible que tengámos primitiva mente estos principios. Ni que se for men en nosotros sin que tengamos nin- gún conocimiento de ellos.
> Es de necesidad que tengamos algún po der de adquirirlos, sin que por ésto- ésa facultad poseída por nosotros sea superior en exactitud a los principios Esta facultad, ese poder para adquirir los principios surge de la sensación.

Dice que todo animal posee la sensación, sólo que en unos se borra en el momento, y no pasa de la sensa- ción misma; otros después de la sensación conservan al go en el alma y entre éstos hay unos en los que se for ma la razón a causa de esta persistenciade las sensa - ciones. Esto és:

1) Sensación--2) Memoria-- 3) Experiencia.

Escribe:(5)

> De la experiencia o sea de todo lo uni versal que se ha depositado en el alma, unidad que siempre subsiste, además de los objetos multiplos, y que es una e - identica en todos los objetos, viene el principio del arte y de la ciencia; del arte si se trata de producir cosas; de la ciencia si se trata de conocer las - cosas que existen.
> Por lo tanto, estos conocimientos de los principios no están en nosotros comple-

(4) Aristóteles Organón 1972 pág 215
(5) Aristóteles Organón 1972 pág 215

tamente determinados; no proceden tampoco de otros conocimientos más notorios que ellos; vienen unicamente de la sensación.
Desde el momento que una de estas ideas se detiene en el alma; en seguida esta concibe lo universal; hay sensación del ser particular, pero la sensibilidad se eleva hasta lo general. Se tiene la sensación de hombre por ejemplo, y no de tal hombre particular. Se fijan en el alma las ideas indivisas es decir universales. Así se para por ejemplo la idea de tal animal en el alma hasta que se forma la idea de animal, que sirve también de punto de partida para otras ideas.

$\boxed{\text{Es pues evidente, que la inducción es la que necesariamente nos dá a conocer los principios poque es la sensación misma la que produce en nosotros lo universal.}}$

Resumiendo lo anterior:

1) Los principios de la ciencia no son juicios a-priori.

2) Los principios de la ciencia son obtenidos del mundo real.

3) La unión entre el conocimiento y el mundo real es la sensación.

4) La experiencia es la base para el método inductivo.

5) Por lo tanto la manera de obtener los principios de la ciencia es la inducción.

6) Ya que la inducción nos lleva a los universales

partiendo de lo particular, y los principios de la ciencia son universales.

Finalmente Aristóteles hace tres señalamientos, crremos que lo hace para darle validéz a la manera como se obtienen los principios de la ciencia, ya que escribe:

1) Toda ciencia va acompañada de razonamiento.

2) No hay especie de conocimiento fuera del entendimiento que sea más exacto que la ciencia.

3) Los principios son más evidentes que las demostraciones.

I) CONCEPTOS IMPORTANTES.

1) La sustancia Aristótelica.

En el estudio de lo que son los objetos matématicos no se puede omitir la aportación de la Metafísica de Aristóteles, porque es en esta obra dónde este filósofo analiza este tema. Tampoco se puede dejar de lado a Platón, puesto que Aristóteles crea parte de su obra como alternativa a la anulación de muchas partes de la teoría de las ideas de Platón.

Existen conceptos que no se pueden ni deben ignorar como es el de sustancia, puesto que gran parte de la obra de Aristóteles gira en torno de este concepto. La sustancia es un tema que procede de las doctrinas filosoficas anteriores a Aristóteles. Este escribe en la Metafísica las respuestas a preguntas como: los principios, ya formales, ya sustenciales ¿ són númericamente distintos o reducibles a géneros? ó ¿ la unidad y el ser constituyen la sustancia de los seres, como lo pretenden los pitágoricos y Platón, ó acaso hay algo que les sirva de sujeto, de sustancia como la amistad de Empédocles, el fuego, el agua, el aire, etc. de éste o de aquél filosofo?.

También se ocupa Aristóteles de responder a la pregunta que más interesa en esta tesis, ¿ los números las longitudes, las figuras, los puntos, son o nó sustancias?, también se ocupa en contestar a la pregunta si es que los objetos matemáticos son sustancias ¿ son independientes de los objetos sensibles, o existen en estos objetos?.

En esta obra también se pregunta:

¿ Deberán admitirse sólo las sustancias sensibles o deberán admitirse también otras? ¿ No hay más que una especie de sustancia o hay muchas?.

A continuación explicaremos los conceptos "sustancia" y "proposición", ya que son necesarios para comprender la respuesta a ¿Qué son los objetos matemáticos?

Escribe Aristóteles en Metafísica 1973:

> Sustancia se dice de los cuerpos simples tales como la tierra, el fuego, el agua, y todas las cosas análogas; y en general de los cuerpos, así como de los animales, de los seres divinos que tienen cuerpo. A todas estas cosas se llama sustancia, porque no son los atributos de un sujeto, sino que son ellos mismos sujetos de otros seres.
> Desde otro punto de vista, la sustancia es causa intrínseca de la existencia de los seres que no se refieren a un sujeto: el alma por ejemplo es la sustancia del ser animado.
> Se dá también el nombre de sustancia a las partes integrantes de los seres de que hablamos, partes que los limitan y delimitan su esencia y cuyo anonadamiento sería el anonadamiento del todo. Así la existencia del cuerpo, según los filosofos, depende de la superficie, la existencia de la superficie de la de la línea; y así ascendiendo más el número, según otras doctrinas es una sustancia porque anonadando el número, ya

no hay nada sino él, el que determina las cosas. Por último, el carácter propio de cada ser, carácter cuya noción es la definición del ser, es la esencia del objeto, sustancia misma.
De aquí se sigue, que la palabra sustancia tiene dos acepciones: ó designa al último sujeto, al que no es atributo de ningún ser, o el ser determinado, pero independiente del sujeto, es decir la - forma y figura de cada ser.

El concepto"sustancia" es también importa
que está relacionado con la proposición, y a
ta es importante porque es la base para const
zonamiento, y éste es necesario para la cons
una demostración.

Con la finalidad de analizar las carac
de los objetos matemáticos, lo cuál harémos
ente capítulo, en el II, y también con la f
comprender a lo que es la base de la demost
matemáticas, la "proposición", seguirémos e
concepto "sustancia".

Así:

La proposición se compone de sujeto y pr
¿Pero qué tipo de palabras puede servir de suj
¿Qué otro tipo de palabras componen el predicad

A todo tipo de palabras Aristóteles las cla
en lo que el llama categorías, las cuáles son: su
cia, cualidad, relación, cantidad, relación, tiemp
tuación, estado, acción, pasión. Ejemplos:

a) De cantidad: 2 kilos, 3 metros, etc.

..icado en una propo..

El sujeto está en la ..

ejemplo: Juan, Pedro, Popocaté..

¿ Cómo es la relación entre

más categorías?.

Pueden relacionarse para forma..

siendo ésta una proposición cuyo pre..

sencialmente al sujeto. Ejemplos:

a) El triángulo es un poligono

b) El hombre es un animal raci..

c) La luna es el satélite natu..

rra.

La sustancia y las demás cate..

relacionarse para formar una pro..

no es esencial para el sujeto

Estas son las proposi..

Hay palabras que no designan a un sólo individuo y que no hemos mencionado, como ejemplo: hombre, pez, montaña, arbusto, ó más generales como: animal, mineral, vegetal, las cuáles son palabras importantes que sirven para predicar, como ejemplo:

a) Luis es un hombre.

b) Micifuz es un gato siamés.

c) La jacaranda es un árbol.

Estas palabras que sirven para predicar son también sustancia.

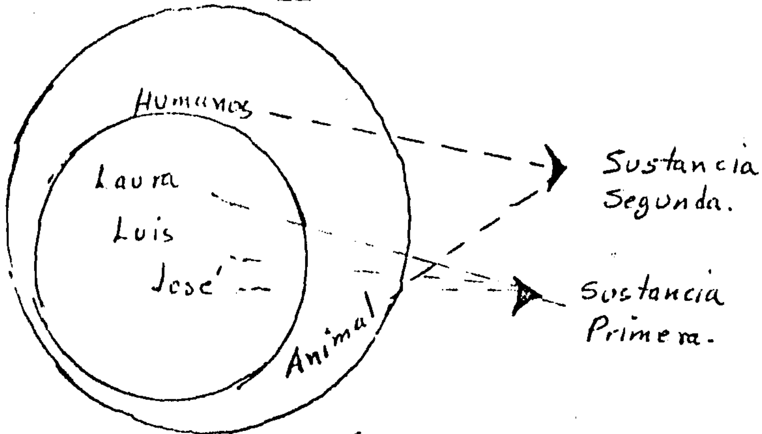
Aristóteles llama sustancia primera a los individuos, y sustancia segunda a este otro tipo de palabras.

Estas segundas sustancias son la especie y el género.

Escribe Aristóteles en Organón 1972 pag 24:

> La sustancia en su acepción más exacta, la sustancia primera, la sustancia por exelencia, es aquélla que ni se dice de un sujeto, ni se encuentra en un sujeto, por ejemplo: Lucero, José, Margarita. Se llaman sustancias segundas, las especies en que existen las sustancias que llamamos primeras, y no sólo las especies, sino también los géneros de estas especies, por ejemplo: Un hombre está en la especie hombre; pero el género de la especie hombre es animal; y así hombre y animal son las llamadas sustancias segundas.

Un esquema de ésto, es :



Para dar la definición de un individuo, se escribe éste como sujeto, a continuación se escribe su género y a continuación se señala su diferencia con respecto a las demás especies que están contenidas dentro del mismo género.

Ejemplos:

1) El perro es un mamífero que ladra.
Sujeto. género diferencia.

2) El cuadrado es un polígono de cuatro lados igua
Sujeto. género diferencia.
y cuatro ángulos rectos.

El sujeto es llamado por Aristóteles, sustancia primera mientras que la sustancia segunda es la especie y el género, que son conjuntos de dónde se obtiene la atribución que se le va a hacer al sujeto.

Señala el filosofo que la sustancia primera es la sustancia por exelencia y que por debajo de ella, o antes de ella no hay otro tipo de sustancia. No hay sustancia más elemental que la primera que es la que contiene al individuo, al sujeto.

Esto es:

INDIVIDUO = Sustancia primera.

ESPECIE Y GENERO = Sustancia segunda.

También señala que la especie está más cerca del individuo que el género, por lo que la especie es más sustancia que el género. Y para definir a un individuo queda más claro echar mano de la especie que del género.

Ejemplos:

1) Para definir avestruz queda mejor comprendido si se dice que es un ave que si se dice que es un animal.

2) Para definir "naranja" es más claro decir que es un fruto cítrico, que el decir que es un vegetal.

3) Para definir al "dos" es mejor decir que es un número par a decir que es un número natural.

También menciona que son sinónimos especie y diferencia; porque todos los elementos de un género están divididos en especies ajenas. Cada especie agrupa individuos con semejanzas. Mientras que si tomamos dos especies diferentes, notarémos las diferencias. Estas se dan de una especie a otra. Ejemplos:

1) <u>Perro</u> es un <u>mamífero</u> <u>que ladra.</u>
sujeto género especie o diferencia.

2) <u>Pino</u> es un <u>árbol</u> de <u>coníferas.</u>
sujeto género especie o diferencia.

Habiendo descrito el concepto de "sustancia" para Aristóteles, podemos pasar al siguiente tema, el cuál involucra a este concepto.

2) El género.

Hemos visto que al concepto "género" Aristóteles lo define en la Metafísica como sustancia segunda, la cuál está cerca del objeto empírico. Aquí usa él este concepto en función del individuo, del sujeto, éste no sirve de predicado o de atributo a otros términos, sino que él (el sujeto) recibe todas las atribuciones posibles. Aristóteles escribe que es usual que el sujeto (empírico) se use para predicar, pero que ésto es incorrecto, por ejemplo cuando se dice: "Esta cosa blanca es nieve" ó "El que canta es Pedro Ruíz".

En el Organón este concepto "género"es utilizado frecuentemente pero con diferente aplicación.

Aquí él ocupa este concepto para designar a todos los objetos de la aritmética, los cuáles están dentro de un mismo conjunto, o los utiliza para designar a todos los objetos de la geometría, o a los objetos de una ciencia particular.

En concreto usa este concepto cuando define a las nociones anteriores o principios de una ciencia demostrativa. Dice:

> Llamo principios en cada género a aquéllos términos cuya existencia no puede demostrarse.(1)

Escribe también en la Metafísica 1972 pág. 55:

> El objeto de cada ciencia es el estudio del ser dentro de su género correspondiente.

(1) Aristóteles *Organón* 1972 pág 166.

No habría cierta diferencia en el uso de este concepto "género" en la Metafísica con respecto al Organón sino fuéra porque en la primera obra género designa sustancia, y en la segunda obra está aplicado a los objetos matemáticos, pero como lo analizaremos más adelante, éstos, no resultan ser sustancia.

Lo que podemos concluír con respecto al significado del concepto "género" es que el estagirita lo usa para designar a todos los objetos de un mismo tipo.

En lo que sigue analizarémos este concepto más profundamente. Por lo pronto hemos querido advertir el doble uso que le dá el filósofo.

3) El silogismo.

Otro concepto importante en esta tesis es el del silogismo.

Aristóteles define proposición en el Organón 1972 pág 71:

> La proposición es una enunciación que afirma o niega una cosa de otra cosa.

De otra manera dicho, una proposición es un enunciado el cuál es verdadero o es falso.

Escribe en la misma obra que:

	Universal
La proposición	Particular
puede ser:	Indeterminada.

La proposición es Universal.- Cuando el atributo pertenece a toda la cosa, o no se dice de parte alguna de la cosa. Tienen la forma "Todos... son..." ó "Ningún... es...".

La proposición es Particular.- Cuando el atributo se afirma o niega de una parte de la cosa, o bién cuando no pertenece a toda la cosa. Tienen la forma: "Algo ... es..." ó "Algo ... no es...".

La proposición es Indeterminada.- Cuando el atributo se afirma o niega del sujeto, sin indicación de universalidad, ni de particularidad. Como ejemplos: "Juan es atleta" ó "La tierra es mayor que mercurio".

Nosotros conocemos a las proposiciones anteriores como universales afirmativas, universales negativas, -

particulares afirmativas, particulares negativas, y particulares las cuáles pueden también ser afirmativas o- negativas.

Para el silogismo la definición de término es importante. Escribe Aristóteles:(1)

> Llamo término al elemento de la proposición; es decir al atributo y al sujeto a que aquél se atribuye, ya se una a él, ya se separe, la idea de ser o no ser.

Actualmente sabemos que este término es llamado término medio, término mayor, término menor.

El término mayor es el predicado de la conclusión, El término menor es el sujeto en la conclusión.

Ambos términos mayor y menor también aparecen en las otras proposiciones de las que se desprende la conclusión, las cuáles son llamadas premisas.

El término medio es él sujeto o predicado que sólo aparece en las premisas (no en la conclusión) y que sirve de enlace entre ambas premisas para después poder dar una conclusión.

Habiéndo aclarado esto, escribámos la definición de silogismo que Aristóteles dá:(2)

> El silogismo es una enunciación, en la que una vez sentadas ciertas proposiciones se concluye necesariamente en otra proposición diferente, sólo por el hecho de haber sido sentadas las primeras proposiciones, quiero decir que a causa de ellas resulta probada la otra proposición.

(1) Aristóteles _Organón_ 1972 pág 71.
(2) Aristóteles _Organón_ 1972 pág 71.

Dicho de otra manera, el silogismo es el conjunto de tres proposiciones de las cuáles las dos primeras - son las premisas y la tercera es la conclusión. Las dos primeras implican a la conclusión, ya que aquéllas están relacionadas mediante el término medio, y entonces necesariamente se puede dar una conclusión.

Ejemplo:

Todo vegetal produce su propio alimento.

término medio. — término mayor ó predicado.

Todo árbol es vegetal.

término menor ó sujeto. — término medio.

∴ Todo árbol produce su propio alimento.

término menor — término mayor.

Definámos ahora a las figuras del silogismo.

El término medio se puede colocar dentro de las premisas de diferentes maneras, aunque Aristóteles sólo considera tres, adoptando entonces el silogismo las siguientes formas:

Fig I	Fig II	Fig III
M P	P M	M P
S M	S M	M S
∴ S P	∴ S P	∴ S P

Estas formas son las llamadas figuras del silogismo. Existe otra figura, la cuarta, pero no es creación de Aristóteles. Es de la forma:

P M

M S

.·. S P

Definámos ahora los modos del silogismo.

En cada figura las proposiciones componentes pueden ser de los tipos ya mencionados como la universal afirmativa, universal negativa, particular afirmativa o negativa, ó singular la cuál también puede ser afirmativa o negativa.

Esto dá lugar a los llamados "modos" del silogismo.(4)

Los modos de la figura I se llaman:

a) Barbara.

b) Celarent.

c) Darii.

d) Ferio.

Donde las vocales "a, e, i, o" que aparecen en esos nombres representan respectivamente:

a.- Proposición universal afirmativa.

e.- Proposición universal negativa.

i.- Proposición particular afirmativa.

o.- Proposición particular negativa.

La primer vocal que aparece en un modo cualquiera representa a la primer premisa o premisa mayor, la cuál debe ser del tipo de proposición que representa. La segunda vocal representa a la segunda premisa o premisa

(4) Estos nombres, Barbara, Celarent, etc no son dados por Aristóteles, sino por la escolastica (nota del traductor del Organón al español).

menor; y la última vocal representa a la conclusión.

Ejemplos:

1.- Demos un ejemplo de Celarent.

e.- Ningún cuadrilátero tiene cinco ángulos.
M P

a.- Todo rombo es cuadrilátero.
S M

.·. e.- Ningún rombo tiene cinco ángulos.

2.- Un ejemplo de Ferio.

e.- Ningún número primo admite divisores diferentes de sí mismo y la unidad.
M P

i.- Algún número entero es número primo
S M

.·. o.- Algún número entero no admite divisores diferentes de sí mismo y la unidad.
S P

Aristóteles no describe a los modos de las figuras como lo hemos hecho, él simplemente dice:(5)

> Si A se atribuye a toda B, y B se atribuye a toda C, es necesario que A se atribuya a toda C.
> Si A no es atribuída a ninguna B, y B se atribuye a toda C, A no es atribuída a ninguna C.

Los modos de la figura II tienen los nombres:

a) Cesare.

b) Camestres.

c) Festino.

d) Baroco.

(5) Aristóteles Organón 1972 pág 74. Estos modos son el Barbara y el Celarent.

Los modos de la figura III tienen los nombres:

a) Disamis.

b) Datisi.

c) Bocardo.

d) Ferison.

Por último expliquemos la validéz de los silogismos:

La validéz de los silogismos de la primera figura, es evidente según Aristóteles, pero no es así para la ségunda y tercer figura. Lo que Aristóteles hace para probar la validéz de éstas, es transformar cada modo de estas figuras en uno de los de la primera. Dice:

> Se ve igualmente que todas las especies de conclusiones résulten probadas por esta figura; porque en ella se encuentra: ser atribuído a todo, no serlo a ninguno, serlo a alguno, no serlo a alguno. A esto llamó yo primera figura.(6)

Las transformaciones que se aplican a las proposiciones de las figuras II y III para convertirlas en algún modo de la figura I, son operaciones lógicas que dan por resultado proposiciones también válidas, las cuáles formarán algún modo de la figura I. Algunas de esas operaciones son llamadas "conversión simple", "reducción al absurdo", la "conversión por accidente", etc.

Expliquémos mediante un ejemplo, la reducción que hace Aristóteles de las figuras II y III a la figura I Pero antes expliquémos que:

a) La consonante "s" que aparece en los nombres

(6) Aristóteles <u>Organón</u> 1972 pág 75.

de los modos, significa conversión simple, ésta significa unicamente intercambio de lugar entre el sujeto y el predicado, y el resultado es también una proposición válida. Ejemplos:

i)El triángulo es un polígono de tres lados.
Se convierte en: El polígono de tres lados es un triángulo.

ii) Algunos hombres son justos.
Se convierte en:Algunos justos son hombres.

b) La consonante "m" significa mutación, esto es cambio de lugar entre las premisas, la mayor en el lugar de la menor y recíprocamente.

c) La consonante "p" representa a la operación lógica llamada conversión por accidente. Significa cambio de cantidad y el único caso es de universal afirmativo a particular afirmativo con cambio de lugar entre sujeto y predicado. Para simplificar ésto, se dice que hay transformación de "SaP a PaS". Ejemplos:

i) Todos los leones son felinos" a "Algunos felinos son leones".

ii)"Todo niño es inocente" a "Algunos inocentes son niños".

d) La consonante "c" representa a la operación "reducción al absurdo"

Escribámos el ejemplo:

Todo número par es divisible entre dos.
Ningún número primo es divisible entre dos.

.'. Ningún número primo es par.

Primeramente debemos idêntificar la figura a la que pertenece el ´silogismo dado, esto lo hacemos obser vando el lugar que ocupa el término medio. Así que este silogismo pertenece a la figura II.

Ahora identifiquémos el modo, lo cuál se logra por el tipo de proposición en la premisa mayor, menor y com clusión, y tomemos sus vocales representativas, las cuá les son : AEE, así que el modo es camestres, la prime_ ra consonante de este modo nos indica a que modo de la figura I hay que transformarlo, debe ser uno que comien ce con la misma vocal, aquí hay que hacerlo entonces a Celarent. Ahora la "m" de camestres significa mutación de premisas y las dos "s" que aparecen significan con- versiones simples, las cuáles se deben de aplicar una a la segunda premisa y otra a la conclusión.

De esta manera se transforma al Celarent y como - las operaciones lógicas aquí aplicadas son válidas y el Celarent también lo es, entonces el Camestres tam_ bién lo será. Entonces queda:

Ningún divisible entre dos es primo

Todo número par es divisible entre dos.

.'. Ningún par es primo.

Finalmente queremos volver a decir que Aristóteles no ocupa para los Modos los nombres que aquí hemos dado, ésto sólo lo hemos hecho para simplificar la comprensión de este tema.

II) CARACTERIZTICAS DE LOS OBJETOS MATEMATICOS.

Debido al acercamiento que había entre Aristóteles y Platón, aquél estudió los temas analizados por éste y la Academia, Conocía las doctrinas de Pitágoras y Platón con respecto a la matemática; y al principio de su estancia en la Academia, no hízo criticas a éstas y otras doctrinas. Fué al final de los 20 años de estancia en la Academia, cuando el estagirita empezó a exteriorizar sus divergencias con respecto a su maestro.

Al inicio de su Metafísica, el filósofo hace mención de las diferentes doctrinas anteriores a él, con respecto a los principios que son causa del universo. Menciona y analiza las doctrinas como por ejemplo la de Tales de Mileto, la de Anáxagoras, la de los pitagoricos, etc. Y al final escribe y critica la doctrina de Platón, en concreto a la doctrina de las ideas.

En el libro tercero y en los otros siguientes de La Metafísica, escribe acerca de lo que <u>no son</u> los entes matemáticos, y los problemas que acarrean algunas opiniones al respecto anteriores a él. Y no es sino hasta el final del citado libro, donde escribe las caracterizticas de los objetos matemáticos, así como la respuesta a si son o nó los objetos matemáticos sustancia.

Al principio de esta obra, él hace la pregunta: ¿ los números, los cuerpos, las superficies y los puntos son o nó sustancias?. Podrían haber varias respues tas, pero no son válidas, ya que llevan a complicaciones en lugar de aclaraciones. El analisis que Aristóteles hace es:

1) Ni las relaciones, ni las proposiciones, ni los movimientos podrían ser sustancias, ya que son atribuciones de los sujetos, y recordemos que los sujetos son más sustancia que su predicado. Además recordemos que la relación (menor que, mayor que) y los movimientos están clasificados como categorías diferentes de la categoría sustancia.

2) Existen cosas que tienen más caracteriztica de sustancia que lo citado en 1), como son: el agua, el el fuego, la tierra, el aire, pero no obstante que son más sustancia, éstas son caracterizticas o modificaciones que se dan en los cuerpos. Porque es el cuerpo el que posee el fuego, el cuerpo el que percibe el viento, es el cuerpo el que absorve el agua, así que éstos vienen siendo atribuciones, predicados del cuerpo. Entonces si es el cuerpo el sujeto de tales atribuciones ¿ es éste sustancia?.

El cuerpo está compuesto de superficies, éstas a su vez están compuestas de líneas, y éstas están compuestos de puntos.

3) ¿ Entonces son los puntos, las superficies,las líneas sustancias?.

Aquí se presentan también problemas con respecto a estos tres conceptos, ya que son sujetos de producción y destrucción. Cuando tenemos un cuerpo y lo partimos digámos a la mitad, aparecen dos superficies que antes no estaban. Si cortamos un hilo o línea un hilo o- línea aparecen dos puntos en el lugar de corte, los cuáles no estaban. Cuando soldamos dos cuerpos las superficies en contacto se hacen una sóla. Así, sí estos conceptos son sujetos de producción y destrucción esto significa que proceden de algo.

No es sino hasta el final de la Metafísica en el libro decimotercero donde entonces aclara y dá las caracteriztticas de los entes matemáticos.

La geometría, la astronomía y otras ramas de la- ciencia tratan de lo suprasensible. La geometría trabaja con los puntos, las líneas, las superficies, los - cuerpos, etc. Parece ser que el "punto" es el "elemento en geometría. Pero -dice él- punto por sí mismo no produce nada, tampoco las líneas, ni las superficies . El cuerpo tiene una existencia más completa que aqué - llos. El cuerpo lo encontramos en el mundo empirico,éste si tiene una existencia independiente, y por ésto el cuerpo es sustancia; y conforme vamos haciendo abs- tracciones en el cuerpo, hasta llegar a las superficies a las líneas y a los puntos, cada vez vamos encontrando menos sustancia.

Entonces: ¿ No son sustancia los entes matemáti - cos?

4) Cabe hacer la siguiente aclaración:

a) Como ya lo hemos explicado, el cuerpo lo hayamos en el mundo empírico, ya que tiene una existencia independiente del ser humano. Esto es, si anulamos la conciencia, con ésto no se anula la existencia de los cuerpos, de los objetos sensibles.

Estos objetos sensibles son lo primero, en el sentido de que existen de manera inmediata, sin necesidad de crear su existencia.

En cambio los entes matemáticos como la superficie, la línea, no existen de manera natural, empírica, ya que éstos son producto de la razón.

Por otro lado si recordamos el concepto de sustancia dado por Aristóteles:

> Sustancia se dice de los cuerpos simples tales como la tierra, el fuego, etc. y en general de los cuerpos así como de los animales.
> ... Desde otro punto de vista, la sustancia es causa intrinseca de la existencia de los seres que no se refieren a un sujeto.(1)

Todo ésto nos lleva a la conclusión de que si queremos ordenar los objetos matemáticos en un orden de mayor a menor cantidad sustancial, nos queda:

1o) CUERPO ---> 2o) { punto. / línea. / superficie. }

Dicho de otra manera: El cuerpo es más sustancial que los entes matemáticos.

b) Aristóteles también habla aquí del orden de -

(1) Aristóteles Metafísica pág 84

prioridad lógico en contraste con el orden sustancial, y él aunque aquí no lo dice al hablar de tal orden se está refiriendo al orden usado en matemáticas cuando hace demostraciones; ésto es al orden de una axiomatica ya que este es el orden descrito detalladamente por él en sus obras. Y por ejemplo en la Metafísica escribe en varios capítulos lo que son los principios causa del universo y después en particular habla sobre los principios de los que parte la demostración matemática.

Así que recordemos que los elementos primitivos en una axiomática son aquéllos conceptos básicos suficientes para la construcción de los otros, por ejemplo el punto y la línea en el caso de la geometría. Por otro lado Aristóteles escribe:

> Un principio es unicamente el primitivo del género mismo respecto del cuál se debe demostrar.(2)
>
> Llamo principios en cada género a aquéllos términos cuya existencia no puede demostrarse.(3)

Entonces el punto, la línea, la superficie, son principios primitivos, son los principios del género de la geometría; por ésto ocupan el primer lugar en este orden lógico.

Es importante aclarar que Aristóteles les llama principios de una ciencia demostrativa no sólo a los que son comunes a toda ciencia, como por ejemplo: "Es posible afirmar o negar algo de cualquier cosa" ó "Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los resultados

(2) Aristóteles Organón 1972 pág 163

(3) Aristóteles Organón 1972 pág 163.

son iguales", sino también a los entes matemáticos que son primitivos dentro de su género como por ejemplo en la aritmética es la unidad, y en la geometría los puntos y las líneas. Escribe:

> También se llaman principios propios, cuya existencia se admite sin demostración, aquéllas cosas en las que la ciencia encuentra las propiedades esenciales que ella estudia. Así la aritmética admite sin demostración las unidades y la geometría los puntos y las líneas.(4)

Por esto que hemos explicado, el orden de los entes matemáticos dentro de una axiomática (ó como dice Aristóteles, el orden de prioridad lógica) es:

$$1o)\left\{\begin{array}{l}\text{Punto}\\ \text{línea.}\\ \text{superficie.}\end{array}\right. \longrightarrow 2o)\ \text{Cuerpo.}$$

El orden sustancial y el orden lógico son contrarios. El primer orden es el seguido por la inducción, ya que éste parte del estudio de los seres particulares hasta llegar a los universales; y el orden de la axiomática parte de lo contrario, de éstos universales y demuestra la existencia delas cosas particulares así como sus relaciones. A este respecto escribe Aristóteles:(5)

> Puesto que las demostraciones son universales y que no se puede sentir lo universal, es evidente que tampoco se puede adquirir la ciencia (deductiva) por la sen

(4) Aristóteles *Organón* 1972 pág 163.

(5) Aristóteles *Organón* 1972 pág 190.

> sación.
> Son necesariamente las cosas particulares las que percibimos por la sensación, y no hay ciencia sino cuando se conoce lo universal.
> Es por tanto evidente que es imposible saber por la sensación nada de lo que es demostrable; a menos que se quiera confundir estas dos cosas: sentir y tener ciencia por demostración.

Para terminar este inciso 4o) ¿ Son los entes matematicos sustancia?, hagámos otra citá a Aristóteles ya que aquí resume lo anteriormente dicho: (6)

> Los puntos,las líneas, las superficies tienen convengo en ello, la prioridad lógica. Pero todo lo que es anteriormente desde el punto de vista de la lógica, no por esto es sustancialmente anterior. La prioridad sustancial es patrimonio de aquéllos seres que tomados aisladamente no pierden con esto su existencia; aquéllos cuyas nociones entran en otras nociones, tienen la prioridad lógica.

5) Por otro lado puesto que un punto no existe separadamente, tampoco una línea, ni una superficie, y sin embargo un cuerpo, un ente empírico, sí existe por sí mismo, de aquí se concluye que:

Los objetos matemáticos no tienen una existencia absoluta.

Resumiendo este capítulo:

i) No son sustancia.
ii) Están sujetos a producción y

(6) Aristóteles Metafísica 1973 pág 221.

Los objetos matemáticos:	destrucción. 3o) Son anteriores lógicamente. 4o) No tienen una existencia separada de los cuerpos sensibles. Su existencia depende de la existencia del cuerpo.

III) COMO SE CONOCE EN MATEMATICAS.

En la obra "Los primeros analíticos" Aristóteles estudia al silogismo, el cuál hemos expuesto en el inciso anterior, éste nos enseña las reglas básicas para poder demostrar la válidez de proposiciones o razonamientos complicados. Como ejemplos de silogismos tenemos a los llamados: Modus ponendo ponens, El silogismp hipotético, etc, éstos tienen las formas:

Modus Ponendo Ponens

A--- B
A
$\therefore$ B

Silogismo hipotético

A--- B
B--- C
$\therefore$ A--- C

En matématicas, en la época de Aristóteles ya existía el método axiomatico (aprox. siglo IV A.C.), el cuál se basa en el silogismo, siendo aquél usado para ordenar las proposiciones matemáticas de menera consecuente desde las proposiciones más universales hasta las más particulares. Aristóteles describe perfectamente este método en los Segundos analíticos. Esta descripción la hacemos a continuación:

Comienza Aristóteles por enunciar el principio de toda ciencia que dice:"Todo conocimiento racional se basa en el llamado principio lógico que es la <u>derivación</u> el cuál dice que el conocimiento se deriva de nociones anteriores, ya sea aquél inductivo, deductivo o dialéc tico".

Las nociones anteriores (ya lo hemos explicado) pueden ser de dos tipos:

1) El primer tipo de noción anterior consiste en saber la existencia de las proposiciones o entes matemáticos con los que se va a hacer la derivación. Como por ejemplo se debe saber la existencia de proposiciones como: "Si a cantidades iguales se restan cantidades cantidades iguales, los resultados son iguales" ó "En una ecuación toda cantidad se puede reemplazar por su igual".

2) El segundo tipo de noción anterior consiste en comprender el nombre de la cosa con la que se va a trabajar en la derivación. Como por ejemplo tenemos: El - tener que comprender el significado de "magnitud"; de lo que significa "número"; también tener que comprender el significado de "axioma", etc.

Entonces ¿Cómo se llega a conocer en matemáticas?

Aristóteles asegura que: La matemática llega a conocer por medio de la demostración.

¿Y qué es la demostración?

El, define a la demostración como: El silogismo que produce ciencia.

Expliquémos ésto:

1) Una demostración es un silogismo que parte de nociones anteriores, como axiomas y postulados que son las proposiciones más universales dentro del género en cuestión (ya sea el de la geometría, el de la aritmética, etc.). En cambio un silogismo no tiene por qué partir de proposiciones que sean las más universales.

Toda demostración es un silogismo, pero no todo silogismo es una demostración.

2) La demostración se basa en el principio de la derivación y por tanto procede de nociones anteriores.

Las nociones anteriores son muy importantes puesto que dentro de estas se encuentran las proposiciones universales.

Para Aristóteles son de suma importancia los universales y así dice que: "No hay ciencia si no hay universales".(1)

Escribe también que: "No se sabe o no se llega a conocer sino se conocen las causas de las cosas. Pero estas causas son los universales". Así él identifica a la ciencia por exelencia con la ciencia de la demostración.

Así:

Demostración = Silogismo compuesto de proposiciones las más generales dentro del género en cuestión.

Escribe Aristóteles con respecto a lo escrito en 1) y 2);(2)

(1) Aristóteles <u>Organón</u> 1972 pág

(2) Aristóteles <u>Organón</u> 1972 pág 73 y 157

> Partiendo de principios verdaderos se puede formar un silogismo, sin que por ésto resulte demostración; pero partiendo de principios necesarios no se puede formar silogismo sin que resulte demostración; porque ésto es lo propio de la demostración.
> Puesto que para creer en una cosa y saberla es preciso poseer este silogismo que llamamos demostración, silogismo que no existe sino porque las cosas de que se componen existen también, no sólo hay necesidad de conocer anteriormente los primitivos, ya en totalidad, ya en parte sino que debe conocer necesariamente más que todo lo demás.

Por otra parte, las caracterizticas de los principios demostrativos (o nociones anteriores) son según el autor de los Segundos Analiticos:

Caracterizticas de los principios:

i) Deben ser verdaderos.
ii) Ser indemostrables
iii) Ser causa de la conclusión.
iv) Ser más notorios que la conclusión.
v) Ser anteriores a la conclusión.
vi) Saber que existen, y conocer las palabras que los expresan.

Expliquémos algunas de estas caracterizticas:

ii) Puesto que los principios sirven de base para demostrar la validéz de proposiciones, deben ser entonces indemostrables, puesto que si se tuviéran que demostrar, ésta se haría a partir de otros principios y entonces aquéllos no serían los principios. Y este pro ceso podría entonces continuar hasta el infinito.

iv) Los principios deben ser más notorios que la conclusión. Aquí Aristóteles hace una diferencia entre lo que es más notorio para nosotros y lo más notorio dentro de la demostración. Lo más notorio para nosotros es lo que está proximo a la sensación, como por ejemplo; "Estas son cinco flores grandes y rojas". Y lo más notorio dentro de la demostración es lo que está más alejado de la sensación, porque es lo más general, por ejemplo; "Cada cosa es igual a sí misma" ó "Cosas iguales a la misma cosa, son iguales entre sí".

Clasificación de los principios.

Los principios para la demostración, Aristóteles los clasifica en: Principios comunes y principios propios.

Los principios comunes son aquéllos aplicables a la ciencia en general, como por ejemplo:

"Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los resultados son iguales" ó "Es imposible afirmar y negar a la vez una misma cosa".

Aristóteles llama principios propios a; "Aquéllas cosas que la ciencia encuentra las propiedades esenciales que ella estudia; como la unidad en la aritmética y los puntos y líneas en geometría; también llama principios propios o especiales a proposiciones como: "Todos los ángulos rectos son iguales", él dá aquí como ejemplo a la definición de línea. Dice: (3)

(3) Aristóteles <u>Organón</u> 1972 pág 166

Son principios especiales, por ejemplo
la definición de línea, de la recta.

Finalmente aquí es importante aclarar que la palabra axioma que es utilizada por nosotros para designar a los principios comunes, y el concepto postulado utilizado para designar a los principios propios de una rama de la ciencia, Aristóteles los usa poco.

La conclusión de lo anterior es:

Para Aristóteles creer y saber deductivamente, es poseer el silogismo resultante de los principios primitivos o nociones anteriores. Esta es la definición de demostración.

Creencias equivocadas respecto a la ciencia.

Aristóteles dice que hay creencias equivocadas respecto a la ciencia como:

i) No hay ciencia posible, puesto que hay que conocer a los primitivos.

ii) Todo puede demostrarse.

A ésto responde Aristóteles que:

i) Estas personas que opinan de esta manera creen que no hay ciencia puesto que se tendría que caminar hasta el infinito para encontrar a los primitivos, y entonces no se podría comenzar a deducir a partir de ellos. Pero esto es absurdo, ya que los principios primitivos o nociones anteriores son los enunciados más generales los cuáles enuncian ciertas propiedades o relaciones a-

Son principios especiales, por ejemplo la definición de línea, de la recta.

Finalmente aquí es importante aclarar que la palabra axioma que es utilizada por nosotros para designar a los principios comunes, y el concepto postulado utilizado para designar a los principios propios de una rama de la ciencia, Aristóteles los usa poco.

La conclusión de lo anterior es:

Para Aristóteles creer y saber deductivamente, es poseer el silogismo resultante de los principios primitivos o nociones anteriores. Esta es la definición de demostración.

Creencias equivocadas respecto a la ciencia.

Aristóteles dice que hay creencias equivocadas respecto a la ciencia como:

i) No hay ciencia posible, puesto que hay que conocer a los primitivos.

ii) Todo puede demostrarse.

<u>A ésto responde Aristóteles que</u>:

i) Estas personas que opinan de esta manera creen que no hay ciencia puesto que se tendría que caminar hasta el infinito para encontrar a los primitivos, y entonces no se podría comenzar a deducir a partir de ellos. Pero esto es absurdo, ya que los principios primitivos o nociones anteriores son los enunciados más generales los cuáles enuncian ciertas propiedades o relaciones atribuídas a los objetos matemáticos más generales, los cuáles son aquéllos contenidos en todos los demás, por ejemplo el concepto punto en geometría. De esta manera sabemos cuando un enunciado es el primitivo; no es necesario caminar hasta el infinito para encontrarlos. Entoncesencontrando el enunciado más general dentro de cada género, hemos hallado al primitivo.

Aristóteles ocupa el concepto género para designar objetos de un mismo tipo como por ejemplo todos los objetos de la aritmética. El ha ocupado este concepto ya anteriormente cuando explica el concepto sustancia, ahí la reunión de individuos, de seres concretos, ó como él dice de sustancias primeras, dá lugar a las sustancias segundas las cuáles son, tanto la especie como el género. Entonces ahí el concepto género lo utiliza en función del concepto sustancia.

Ahora, aquí en el tema de la demostración vuelve a usar este concepto, el "género"; pero aquí hay una gran diferencia, porque punto y línea no son sustancia, ésto lo hemos ya analizado, éstos conceptos no son usados como los seres concretos, los cuáles son sustancia primera si recordamos éstos no se usan para predicar, sinó que por el contrario son objeto de predicación, por ejemplo: "El Popocatépetl se cubre de nieve en invierno" ó "Este libro es de lógica", sino que punto y línea sirven para predicar puesto que son conceptos que entran en la construcción de los otros objetos de la geometría, como por ejemplo: Superficie es una sucesión de líneas, ó Angulo plano es la inclinación de una línea sobre de otra en un plano las cuáles se cruzan y no están en línea recta. (definición de Euclides). Estos objetos no son predica - bles, sino que ellos predican a los restantes objetos - geométricos.

Entonces el concepto género tiene un doble signifi cado uno sustancial y otro lógico y en ambos sentidos - designa la reunión de objetos de un mismo tipo.

Aristóteles escribe: (4)

> Tales son las diversas acepciones de la palabra género. Se aplica pues, a la generación continua de los seres - que tienen la misma forma, o a la pro ducción de una misma especie por un - primer motor común, o a la comunidad de materia. Porque lo que tiene dife- rencia, cualidad, es el sujeto común es lo que llamamos materia.

ii) Por otra parte, el estagirita opina contra los que dicen que "Todo se tiene que demostrar", que no toda ciencia es de demostración, que hay ciencia basada en - silogismos, o como la ciencia inductiva. Y aún dentro de la ciencia basada en la demostración, hay cosas que no se demuestran, es más no deben demostrarse, porque cuan do se han encontrado los principios de una ciencia, en- tonces éstos serán la base para comenzar la demostración, pero hasta entonces se demuestra; no antes.

III)

1) Consideraciones importantes para la demostración.

Anteriormente ya explicamos lo que es la demostración pero seguirémos con este tema debido a su importancia.

Recordemos que la demostración es un silogismo pero no cualquiera. Un silogismo utiliza proposiciones verdaderas, pero esto no es suficiente para que resulte demostración.

La demostración es el silogismo cuyas proposiciones de las que parte son principios necesarios.

Un principio es necesario cuando lo demostrado procede de éste y no de otro principio; dicho de otra manera cuando este principio es causa de lo demostrado.

Un ejemplo para probar que la demostración debe partir de principios necesarios -dice Aristóteles- es aquél cuando adversarios en un discurso creen tener la causa de cierto hecho, así forman un silogismo para su "demostración" y por ser verdaderas y probadas sus proposiciones, creen que ésta es la demostración, pero por lo general ocurre que esa prueba puede provenir de otros principios que son los más generales y por lo tanto de manera absoluta. A este respecto dice Aristóteles:(1)

> Un principio es unicamente el primitivo del género mismo, respecto del cuál se

(1) Aristóteles Organón 1972 pág 163.

debe demostrar. Y toda proposición pro
pia de este mismo género, sólo por el-
hecho de ser verdadera, no es principio.

Recordemos que un hecho es accidental cuando no es necesario, aunque sea verdadero. Como por ejemplo:"Luis está triste".

Así tenemos las siguientes conclusiones: (2)

No hay de los acciden tes conclusiones nece sarias.

Jamáz se puede demostrar respecto de accidentes, que la conclusión es necesaria, porque un accidente puede ser de muchas maneras y por lo tanto la conclusión es- accidental y no necesaria.

Consideraciones para las demostraciones:

1) Deben tener como princi- pio lo esencial de cada gén nero de cosas.
2) El término medio debe - ser atribuído esencialmente al tercero y el primero al medio para que haya verda- deramente demostración.
3) Como el género de seres de la geometría y el género de seres de la aritmética - son diferentes, no se puede por ésto demostrar una cosa de la aritmética por medio de la geometría ni recíprocamente.

Ejemplos:

1) La primer caracteriztica de las demostraciones tiene como ejemplos:

a) En la aritmética el objeto matemático que sirve de principio es la unidad, porque con ésta se forman los demás números.

b) En geometría el objeto que sirve de principio es el punto, porque éste entra en la construcción de los demás conceptos geométricos como la línea, el plano, etc.

2) La segunda caracteriztica de la demostración tiene como ejemplo:

Supongámos que se desea demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°. Entonces el silogismo es:

Si $\underbrace{\text{hay ángulos que formen un ángulo de media vuelta}}_{M}$ entonces tales ángulos $\underbrace{\text{suman } 180^{\circ}}_{P}$.

Los $\underbrace{\text{ángulos internos de cualquier triángulo}}_{S}$ pueden ser $\underbrace{\text{colocados formando un ángulo de media vuelta}}_{M}$.

$\therefore$ $\underbrace{\text{Los ángulos internos de cualquier triángulo}}_{S}$ $\underbrace{\text{suman } 180^{\circ}}_{P}$.

En este silogismo M es atribuído esencialmente a P, y S es esencialmente atribuído a M. Por lo que S es Atribuído a P.

3) La tercer caracteriztica de la demostración tiene por ejemplo:

Aquí escribirémos algunos hechos en los que se ba sa Aristóteles para decir lo que menciona como tercer caracteriztica; a) El, como sus predecesores creen que una cosa es magnitud y otra diferente el número, la diagonal de un cuadrado es una magnitud, pero a ésta no le corresponde un número. b) El término mayor, el menor, y el medio deben los tres pertenecer al mismo género para poder dar una conclusión coherente. Escribe Aristóteles:(3)

> Pero la demostración aritmética se limita siempre al género que constituye su objeto y todas las demostraciones hacen lo mismo y así el género ha de ser, o absolutamente el mismo, o el mismo por lo menos bajo cierto concepto, para que la demostración pueda pasar de un género a otro. Es claro que sin esta cuestión, la cosa sería completamente imposible; porque es necesario que los extremos y los medios sean de un mismo género, puesto que no son esenciales y sólo accidentales. He aquí porqué en general una ciencia no puede nunca demostrarlo que le pertenece a otra ciencia, a no ser que las dos estén entre sí en una relación de subordinación, como lo está la óptica con la geometría, y la armonía con con la aritmética.

En la Metafísica Aristóteles escribe una argumentación para esta tercer caracteristica, desde el punto de vista filosófico, define primeramente el concepto-género y después explica cuando dos géneros o más son diferentes. Escribe:(4)

> Se dice que hay diferencia de género cuando el sujeto primero es diferente, cuando

(3) Aristóteles Organón 1972 pág 1[illegible].
(4) Aristóteles Metafísica 1973 pág 97

las cosas no pueden resolverse las unas en las otras, ni entrar todas en la misma cosa. Y así la forma y la materia difieren por el género, y lo mismo sucede con todos los objetos que se refieren a categorías diferentes; estos modos no pueden efectivamente entrar los unos en los otros ni resolverse en uno sólo.

III)

2) Partes de la demostración.

Ya hemos explicado que la demostración es un silogismo que parte de principios o nociones anteriores - que son las proposiciones y objetos matemáticos más generales dentro del género en cuestión (como el de la - geometría, el de la aritmética, etc.)

También ya hemos explicado la importancia que para Aristóteles tiene el concepto género, este se encuentra definido y analizado en la Metafísica y en el Organón. Aquí en el tema "la demostración"el género - tiene un papel muy importante. El, escribe que no se puede demostrar dentro de cierto género proposiciones pertenecientes a otro género, dice él, a menos que se trate de una ciencia contenida dentro de otra, o subordinada a ésta, en este caso si se pueden demostrar- proposiciones de la subordinada utilizando principios de la ciencia que la contiene. Esto ya lo hemos explicado ampliamente. El también escribe que:(1)

> El término medio ha de ser atribuído esencialmente al tercero; y el primero al medio para que haya verdaderamente demostración. Por esto no es posible pasar de un género a otro; <u>no se puede</u> por ejemplo, demostrar por la aritmética una cuestión de la geometría.

En este capítulo nos dedicaremos a explicar las

(1) Aristóteles <u>Organón</u> 1972 pág 164.

partes de la demostración. Porque una cosa es la definición de demostración, y otra cosa son sus partes.

Las partes de la demostración son las observaciones internas que debemos tener en cuenta para el silogismo y las nociones anteriores. Porque ¿Cualquier silogismo que parta de nociones anteriores es una demostración?.

¿ Podrá el silogismo ser construído de manera arbitraria, esto es, podría estar formado por una proposición de un género y otra proposición de otro género? No, no válido esto, por lo cuál escribe Aristóteles que las partes de la demostración son:(2)

1) El género.

2) Los axiomas (nociones anteriores).

3) La conclusión.

Ya hemos explicado el significado e importancia de cada uno de estos tres conceptos, pero debemos expliquemos más.

1) El género: Añadamos a lo ya escrito sobre este concepto, que el estagirita escribe en la Metafísica, que el significado de esta palabra "género" proviene de la "generación continua de los seres que tienen la misma forma".

2)Los axiomas: Son los elementos de los que parte la demostración.

3) La conclusión: Es el atributo esencial del género que se concluye, El escribe que:

---

(2) Aristóteles Organón 1972 pág 164

> En efecto, son tres las cosas que deben tomarse en cuenta en las demostraciones Primero la conclusión probada, es decir el atributo esencial del género de que-se trata; la segunda los axiomas, los cuáles son los elementos de donde sale-la demostración; tercero el género de - que se trata, y cuya demostración prueba los atributos y accidentes esenciales.

Aristóteles recalca la importancia que tiene el genero en las demostraciones. Hace el señalamiento de que la aritmética por ejemplo debe limitarse al género que constituye su objeto.

La importancia que tienen las partes de la demostración, es porque:

1) El silogismo es la base, el elemento para la - construcción de la demostración.

2) El silogismo tiene como parte integrante y muy importante al llamado término medio que sirve de enlace entre las proposiciones para poder dar una conclusión.

Entonces si tál término es de género diferente al sujeto al cuál se atribuye, entonces no podrá haber enlace o relación. Ejemplo:

El dos es un ángulo.
sujeto término medio

Un ángulo es un grupo abeliano.
termino medio predicado

∴ (No puede haber conclusión, porque no se pueden enlazar las partes constitutivas del silogismo).

3) Por último, Aristóteles cree que una magnitud

inconmensurable como lo es la diagonal al lado del cuadrado (concepto geométrico) no puede ser representado por un número (concepto aritmético); también por esta razón el género es importante.

Caracterizticas de la ciencia de la demostración.

1) Las proposiciones.

a) Las proposiciones de las que parte la demostración deben ser universales; ya que la ciencia tiene por objeto lo universal. Si se parte de proposiciones universales, la conclusión a la que se llega será eterna. A Aristóteles (como a otros) le preocupa el poder dar definiciones de los elementos primitivos que sean esenciales; así entonces serán universales, y como estas definiciones son base para la demostración, eh ahí su importancia. Lo que es esencial es universal y eterno porque es la forma de los objetos primitivos en cada género. Como por ejemplo:

En la geometría, un hexaédro, o el hecho de que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, no es lo primitivo dentro de este género; lo es el punto y la línea, y entonces se tendrá que dar una definición esencial de éstos para que lo que se concluya a partir de éstos sea igualmente verdadero, no cambie, o sea eterno dentro de este género.

b) Para las cosas perecederas no hay demostración.

2) Principios Propios.

Una ciencia puede estar contenida en otra como la zoología lo está dentró dé la biología, ó la trigonometría dentro de la geometría (o como escribe Aristóteles la armonía dentro de la aritmética ó la óptica dentro de la geometría) y entonces no es suficiente que la subordinada parta de principios verdaderos, indemostrables inmediatos, como serían los de la ciencia que los contiene, sino que son necesarios los principios propios de la ciencia. Como por ejemplo;

La geometría analítica está subordinada a la euclideana y se basa en los principios de ésta, pero también requiere los propios, de los cuáles uno es: "A todo punto en el plano cartesiano le corresponde una pareja de números ordenados, y recíprocamente a cada pareja de números ordenados le corresponde un punto en aquél plano"

Para hacer una demostración dentro del mismo género se requiere, claro está que el término medio se encuentre en el mismo género. Ejemplos:

1) Escribamos un ejemplo de la trigonometria subordinada a la geometría.

Si el seno de A es positivo entonces $\underbrace{\text{A está en el II ó III cuadrante}}_{\text{término medio}}$.

Si $\underbrace{\text{A está en el II ó III cuadrante}}_{\text{término medio}}$ entonces $0^{\circ} < A < 90^{\circ}$ ó $180^{\circ} < A < 270^{\circ}$.

∴ Si el seno de A es positivo entonces $0^{\circ} < A < 90^{\circ}$ ó

$180^{\circ} < A < 270^{\circ}$.

2) Ejemplo de la geometría analítica subordinada a la euclideana.

Si se cumple el teorema de pitágoras entonces el triángulo en cuestión es rectángulo.
medio

Si el producto de las pendientes de dos lados de un triángulo es igual a -1 entonces se cumple el teorema de pitágoras.
medio

.·. Si el producto de las pendientes de dos lados es igual a -1 entonces el triángulo es rectángulo.

3) Lo que es el saber.

Escribe Aristóteles que hay quienes creen saber porque parten de premisas verdaderas, pero dice que sabe más aquél que lo hace por las causas superiores que el que donoce sólo los efectos. Para saber se requiere -dice-partir de los principios indemostrables, así como también que la conclusión sea homogénea con los principios, queriendo decir esto que la conclusión sea consecuente con las premisas o que estén tanto unas como la otra dentro del mismo género.

4) Se admiten sin demostración

Para que exista ciencia de la demostración, se admiten sin demostración:

a) La existencia del género: Como en la geometría se admite la existencia de entes como punto, línea, ángulo, etc.

b) Los axiomas: Los cuáles según el estagirita pueden ser de dos tipos: comunes y especiales.

Anteriormente ya hemos explicado esto, con los nombres de noción anterior común y noción anterior especial.

Un axioma o noción anterior es común cuando se trata de alguna proposición universal o general cuya aplicación es para toda la ciencia. Como por ejemplo:"El todo es mayor que la parte"(noción dada por Euclides) ó "Siempre es posible afirmar o negar algo de cualquier cosa".

Un axioma o noción anterior es especial cuando se trata de alguna proposición o ente matemático siempre que sean lo más general dentro de su género y que tengan una aplicación particular dentro de un género. Como por ejemplo: "Todos los ángulos rectos son iguales" ó las nociones:punto, línea, recta, etc. Esto en geometría.

c) Las modificaciones del género: Aquí, El se refiere al tener que aceptar el nombre de cada uno de los modos que se dan dentro del género. Como por ejemplo tener que aceptar que tal cosa se llama punto, y ya no indagar porqué se llama así, porque entonces podría darse un proceso, fuera del género, como penetrar en cuestiones gramaticales, o históricos e incluso psicologicos.

5) La definición.

La definición es un tema muy importante para la -

ciencia porque una de las metas de ésta es precisamen_te el poder dar una definición esencial de las cosas. Se pretende dar la definición de las cosas en función de lo que permanece por debajo de las apariencias, esto es, de lo eterno. Para lograr esto ¿ cuáles deben ser las caracteristicas de la definición? Escribe El:(3)

La definición:

1) No es hipótesis, porque no dice que las cosas definidas existan o no - existan.
2) Basta comprenderlas.
3) Muestra un sólo hecho, lo que la co sa es aunque el ser jamás es la e- sencia de alguna cosa porque el ser jamás es género.
4) Otro hecho aparte, es que la cosa definida exista o nó. El geometra por ejemplo, define primero lo que es el triángulo y después demuestra que existe.
5) No muestra lo que significan las - palabras que entran en la defini - ción.
6) <u>Una definición y el silogismo no - son en ningún concepto una misma - cosa.</u>
7) <u>No demuestra nada y no es posible reconocer la esencia de la cosa ni por definición ni por demostración</u>

Para Aristóteles es muy importante la "definición" y en la caracteriztica 7 dice que no es posible conocer la esencia de la cosa ni por definición ni por demostración.

Aunque más adelante señala que no hay demostración ni silogismo de la esencia; sin embargo mediante el si

(3) Aristóteles <u>Organón</u> 1972 pág 199.

logismo y mediante la demostración la esencia se hace evidente.

De suerte que ni se puede sin demostraciónconocer la - esencia de una cosa, de la que es causa otra cosa, ni-hay demostración de la esencia. Más adelante Aristóteles escribe que es mediante el silogismo que se va conociendo la esencia, ¿pero cómo es ésto posible?, él - cree que se llega a la esencia no con un sólo silogismo, sino mediante varios. Un primer silogismo nos lleva a una definición más o menos esencial de la cosa por definir. Si a ésta le aplicamos un segundo silogismo obtendrémos una segunda definición todavía más esencial. Y así sucesivamente.

En el siguiente capítulo estudiarémos ésto más detalladamente.

6) Una ciencia es más elevada y exacta cuando sabela existencia de la cosa y la causa de la cosa.

Aquí Aristóteles dice que no debe haber separación entre la ciencia que demuestra que la cosa en cuestión existe, de la ciencia que demuestra porqué existe.

7) Una ciencia que no tiene un objeto sensible, - está por encima de la que si lo tiene. El objeto de la aritmética son los números y sus relaciones. El objeto de la música es el sonido armonico. Así que el objeto-de la aritmética no es sensible mientras que el de la música sí lo es, por ésto la aritmética es superior a la música -según Aristóteles-.

8) Una ciencia que procede de un número menor de principios es superior a otra que procede de un número mayor de ellos. Aquí escribe Aristóteles que la aritmetica es superior a la geometría porque esta necesita de principios adjuntos en el sentido de que la unidad de la aritméticano necesita de posición o localización en el plano y en cambio el punto de la geometría si la necesita.

9)Una ciencia es diferente a otra cuando procede de diferentes principios.

10) Lo que es producto del azar no es objeto de la ciencia, porque lo que ocurre al azar no es ni lo más frecuente ni necesario. Todo silogismo se forma de proposiciones verdaderas o necesarias, y todo lo que ocurre al azar no es generalmente ni verdadero ni necesario.

11) La ciencia no se adquiere por la sensación, - porque ésta es especial y de tal momento, y por lo mismo no puede ser universal.

12) Puesto que las demostraciones son universales y que no se puede sentir lo universal, es evidente que tampoco se puede adquirir la ciencia por la sensación No hay ciencia sino cuando se conoce lo universal.

13) Los principios son de dos especies: a) Los principios base de la demostración, y b) El objeto al que se aplica la demostración que son los principios propios como el número y la magnitud. Recordemos que Aris

toteles les llama nociones anteriores o particulares. Las correspondientes definiciones ya las hemos explicado. Estos principios en conjunto son también llamados principios primitivos.

IV) ¿ Cuándo se conoce en matemáticas?

En la obra de Aristóteles no hay algún capítulo que El titule ¿cuándo se conoce en matemáticas?; sin embargo al final de los Segundos Analíticos (titulo dedicado al método usado en matemáticas) vuelve a escribir sobre las cuatro causas. Aquí explica mediante ejemplos la utilización de cualquiera de las cuatro causas para demostrar; aunque no aclara plenamente cuándo y dónde pueden usarse (además de que los ejemplos no los escribe ordenadamente). Dice:(1)

> No creemos saber una cosa sino cuando conocemos su causa; ahora bién hay cuatro tipos de causas; la primera se refiere a la esencia de la cosa; la segunda hace que desde el momento que existen ciertas circunstancias, sea necesario que la cosa exista; la tercera es para la cosa el principio de movimiento y por último la cuarta, que es el fín en vista del cuál la cosa tiene lugar.

Esto anterior, lo que es saber y las cuatro causas, lo menciona en casi todos los capítulos de la *Metafísica*, pero aquí en el Organón lo hace ahora y en los Segundos Analíticos, que es el libro dedicado al método en matemáticas, y lo menciona aquí precisamente porque vincula el "cuando se conoce" con las matemáticas.

De la lectura de la última sección de los Segundos Analíticos, podemos concluír que la matemática utiliza

(1) Aristóteles *Organón* 1972 pág 203

de las cuatro causas sólo una la de existencia, ya que la de esencia sólo en las definiciones; las otras ciencias se pueden valer de las otras causas.Ejemplos:

1) En matemáticas se utiliza la de existencia para demostrar la existencia de un númerocon tales caracterizticas "dados dos racionales, siempre existe otro racional entre ellos".

2) O como explica Aristóteles esta causa, que dadas ciertas circunstancias es necesario que exista otra cosa; como por ejemplo en cualquier sistema axiomatico dadas ciertas definiciones, axiomas y postulados implican necesariamente la existencia del teorema 1, y dado este conjunto anterior implica la existencia del teorema 2, y así sucesivamente.

3) La causa de esencia es utilizada en matemáticas cuando se dan las definiciones de los elementos primitivos y en general de todos los demás objetos matemáticos, ya que la esencia está intimamente unida al concepto "definición"pues la definición de un elemento se hace atribuyendo a este su esencia. Ejemplos:

a) Línea es la sucesión de puntos.

b) Triángulo es una figura con tres ángulos.

Las otras dos causas no son usadas en matemáticas pero las mencionaremos aquí en este capítulo.

La unión que resulta de la pregunta ¿cuándo se conoce en matemáticas? con la matemática, queda:

¿Cuándo se conoce?---- Cuando se conocen las cuatro causas.

¿Cuándo se conoce en matemáticas?--- Cuando se demuestra.

¿Y cómo es posible tal unión entre causas, matemáticas y demostración? ----- Mediante el silogismo.

Para el tema que aquí nos importa que es el ¿cuando se conoce en matemáticas? los conceptos importantes son los de causay silogismo; así que explicaremos la relación que hay entre estos dos conceptos. Aristóteles escribe que:(2)

> En efecto para demostrar que existiendo ésto, resulta necesariamente que aquéllo existe; no basta una proposición, se necesitan por lo menos dos, y para que la demostración sea posible, es preciso que estas dos proposiciones tengan un sólo y mismo medio; y basta que haya este medio único para que la conclusión se haga necesaria.

Cuando en un silogismo escribimos que:

A es B

B es C

∴ A es C

Lo que se pretende aquí es que B sea atribuído esencialmente a A (esto en la premisa menor). Y al decir en la premisa menor que B es C, estamos diciendo el porque de esa esencia. Así que al concluír A es C lo que hemos hecho es probar la esencia de A y porqué B es esta esencia.

En el caso que se trate de un silogismo no de esencia sinó de existencia, entonces A es B denota que

A existe, luego B es C denotará, porqué existe. Así que al concluír que A es C hemos probado que A existe y porqué existe.

El término medio juega un papel importante, porque él, viene siendo la esencia de la cosa ó la existencia de ésta. Escribe Aristóteles que:(3)

> Las cuatro causas sin exepción sirven para demostrar, como términos medios.
> ...Y así lo repetimos, saber lo que es una cosa se confunde con saber porqué es.
> ... Es claro, por lo tanto que todas las indagaciones no son en el fondo otra cosa que el descubrimiento del término medio.
> En primer lugar, saber la esencia de una cosa se confunde, como ya lo hemos dicho con la causa de la existencia de esta cosa.

Examinemos las causas mediante ejemplos:

1) Causa de existencia.

a) Este ejemplo es de Aristóteles.(los ejemplos no los escribe ordenadamente, así que los ordenaremos para apreciar el papel del término medio)

Por demostrar : ¿Porqué el ángulo inscripto en la semicircunferencia es un ángulo-recto?

Representemos por:
- A--- Angulo recto.
- B--- La mitad de dos ángulos rectos.
- C--- El ángulo que está en la se

(3) Aristóteles *Organón* 1972 pág 203

micircunferencia.

Demostración:

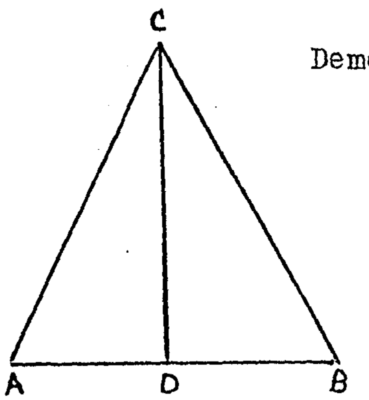
C es B --- Puesto que C es la mitad de dos án_
gulos rectos.

B es A ---Puesto que la mitad de dos ángulos
rectos es un ángulo recto.

∴ C es A --- B es la causa que hace que A sea el
atributo de C

Luego existiendo B, que es la mitad de dos ángulos rectos A es atributo de C. Y B es el término medio y causa.

2) Demostrar que; Si ABC es un triángulo isóseles y CD es la altura sobre AB entonces ADC = DCB.



Demostración:

a) $\measuredangle A = \measuredangle B$---A lados iguales se oponen ángulos igual

b) $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC$---Por hipótesis CD es altura.

c) $\measuredangle A + \measuredangle ADC + \measuredangle DCA = 180^{o}$--- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180^{o}.

d) $\measuredangle B + \measuredangle BDC + \measuredangle DCB = 180^{o}$--- La misma justificación anterior.

e) $\measuredangle A + \measuredangle ADC + \measuredangle DCA = \measuredangle B + \measuredangle BDC + \measuredangle DCB$--Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí

f) $\sphericalangle$ DCA = $\sphericalangle$ DCB --- Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los resultados son iguales(Aplicado a a), b) y e))

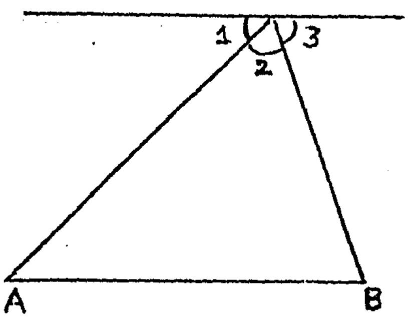
g) CA = CB Por hipótesis ABC es isóseles.

h) $\triangle$ ADC $\cong$ $\triangle$ DBC--- Por el caso ALA de congruencia, aplicado a a), f) y g).

Aquí el término medio es que "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, porque une - las circunstancias (hipótesis) con la tesis.

3) Demostrar que: En todo triángulo (en el plano euclideano) la suma de los ángulos interiores es de dos rectos.

Demostración:



a)Hacer pasar por cuálquier vértice una paralela al lado opuesto.

b) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle A$ y $\sphericalangle 3 = \sphericalangle B$ porque si las rectas son paralelas entonces los ángulos alterno interno seán iguales.

c) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^{\circ}$ por formar un ángulo llano.

d)Sustituyendo b) en c) queda:

$\sphericalangle A + \sphericalangle 2 + \sphericalangle B = 180^{\circ}$--- Con lo cuál queda demostrado

Aquí el término medio es e) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^{\circ}$ porque une a b) con la tesis.

Esta causa, la de existencia es la más empleada en matemáticas, razón por la cuál hemos escrito varios ejemplos.

Por otro lado las causas de finalidad y movimiento pueden tener una aplicación más frecuente, en ciencias que traten de lo empírico, como son la Biología, la Física, etc.

2) Causa de finalidad.

Ejemplos:

a) ¿Con que finalidad se pasea después de comer?---- Para gozar de salud (ejemplo de Aristóteles).

Representar:
C--- Paseo después de comer.
B--- Alimentos que no vaguen en la entrada del estómago.
A--- Gozar de salud.

Prueba:

C es B--- Atribuyamos al paseo después de comer al efecto de que los alimentos no vaguen en la entrada del estomago.

B es A--- Si los alimentos no vagan en la entrada del estómago entonces se goza de salud.

∴ C es A--- C es atribuída a A, esto es, pasear después de comer para gozar de salud.

Aquí el término medio es B.

Con respecto a esta causa de finalidad, escribe Aristóteles en Organón 1972 pág 204.

> Los ejemplos de este género, son por lo demás muy numerosos sobre todo en las cosas cuya constitución y formación son puramente naturales, porque la naturaleza obra ya en vista de al

guna finalidad, ya necesariamente.

Por otro lado el estagirita también escribe lo siguiente, queriendo hacer resaltar la importancia del término medio. Aristóteles Organón 1972 pág 204.

> La causa es siempre el término medio, sólo que cuando las cosas existen, la causa existe; cuando las cosas se hacen la causa se hace; cuando las causas han existido, la causa ha existido; cuando las cosas existirán, la causa existirá.

Aquí hay algo importante que Aristóteles también quiere hacer ver, que es que para el ser humano el cuál pretende saber o conocer, primero son las cosas, los hechos y después son las causas. En cambio la naturaleza ya que obra de manera expontánea, ella dá primero las causas y después las cosas o efectos.

También El hace la distinción entre: 1) Las causas que ocurren al mismo tiempo que sus efectos y 2) Aquéllos fenómenos que no ocurren simultaneamente con su causa.

En el primer caso es posible encontrar la causa que es el término medio, ejemplo:

a) ¿Porqué ha tenido lugar el eclipse?---Porque ha tenido lugar la interposición de la tierra.

El eclipse tiene lugar porque porque la interposición tiene lugar.

El eclipse tendrá lugar porque tendrá lugar la interposición.- dice Aristóteles-.

b) Por demostrar ¿ Qué es el hielo?

C--- Agua.

A--- Congelada

Representemos: B--- Desaparición completa de calor (es el término medio o causa)

Prueba:

B es A

C es B

∴ C es A

Dice Aristóteles: "el hielo se forma cuando B se forma, se ha formado cuando B se ha formado; se formará cuando B se formará.(3)

3) Causas de movimiento.

Esta causa representa un problema para Aristóteles y sus contemporáneos, por ésto El en esta causa dá más soluciones, muchas objeciones. Define Aristóteles en Organon 1972 pág

> Causas de movimiento son aquéllas que no ocurren simultaneamente con el efecto.

Asegura Aristóteles que en un tiempo continuo saber que cierta cosa, determinará el advenimiento de cierto efecto, no es posible, porque:

El silogismo no parte jamás en este caso sino del hecho posterior.

Esto El lo dice porque el silogismo es un instrumento que parte de lo universal que es el hecho posterior y demuestra lo particular o por lo anterior; y el movimiento como El lo plantea es propio de la ciencia inductiva.

b) "No hay silogismo posible partiendo del hecho anterior.

c) Jamás estamos autorisados para afirmar que, sólo porque, sea cierto decir que tal cosa ha tenido lugar, lo sea también que una cosa posterior a ésta haya tenido lugar puesto que durante todo el tiempo que ha transcurrido de la una a la otra será un error decir que la segunda cosa exista porque la otra se ha verificado.

d) Sería un error decir que el efecto futuro exista durante todo el intervalo. Sería preciso estudiar que es la continuidad. Los hechos pasados son límites, son individuos.

Aristóteles ve los instantes de tiempo separados y con hoyos entre uno y otro, por esto menciona lo anterior.

> Así como en geometría los puntos, no siguen los unos a los otros, en igual forma las cosas pasadas no se siguen entre sí. Sólo hay individuos.(1)

Entonces como Aristóteles explica la causa de movimiento es:

> Suponiendo que es posible tomar el efecto que ha tenido lugar, A, y su causa C que le ha dado lugar. C ha sucedido posteriormentey A antes que C. C es el principio porque es el más proximo al instan

(1) Aristóteles Organón 1972 pág 206.

> te presente.
> Ahora bién, C ha tenido lugar si D se ha verificado; luego habiendose realizado D, es necesario que A se haya realizado igualmente y C entonces es la causa.

Esto lo escribe Aristóteles porque para investigar sobre un movimiento, éste tiene que suceder primero y hasta después se habrá encontrado su causa.

Con un esquema podemos explicar lo anterior:

D--- C --- A.

O en forma silogistica:

C--- A

D--- C

∴ D--- A

Pero C es la causa o principio inmediato de A, pero no un primer principio. Se pregunta al respecto:

¿Podrá venirse a parar en un término inmediato? ó

¿ Sucederá que se ingerirán siempre medios, cuyo número será infinito?. Responde: (2)

> Se ha dicho que lo que ha sucedido no se une en manera alguna con lo que ha sucedido anteriormente; pero no por eso deja de ser necesario comenzar por el término medio y por el instante primitivo.

En un tema anterior a este, Aristóteles demuestra que este proceso no puede ser infinito. Entonces se puede comenzar a resolver el problema tomando la causa inmediata.

(2) Aristóteles Organón 1972 pág 206

4) Causa de esencia.

La esencia es un concepto relacionado con la definición; ya que lo deseable es dar una definición esencial de las cosas. Por éso el tema de esencia se reduce al de definición.

En el libro segundo de los Segundos Analíticos, Aristóteles escribe sobre este tema difícil que es el relacionado con la esencia y la demostración de la esencia; y aunque aquí escribe sobre estos temas, El no titula así esta sección: "Causa de esencia".

En el libro citado analiza las causas, pero no lo hace con la de esencia; supongo que es porque la cree discutida en la seccion anterior, en el que analiza el tema de la definición.

Cuando se quiere averiguar si una cosa es otra cosa o si tal cosa existe, lo que se hace -dice- es buzcar si hay término medio (para el silogismo) ó no lo hay. Y si queremos saber porque existe tal cosa, entonces el término medio es lo que se buzca. Escribe que:(3)

> En efecto es la causa el medio, y la causa es lo que se buzca en todas las cosas. Sabiendo que hay una causa indagamos en seguida, cuál es esta causa.
> Es claro que en todas las indagaciones no se buzca en el fondo otra cosa que el término medio.

Ahora, de esto se desprende que si todas las indagaciones, no son más que el descubrimiento del término

(3) Aristótels Organón 1972 pág 195

medio entonces en particular la definición es por lo menos un silogismo, pero ¿será una demostración?.

Para contestar esto veámos que dice Aristóteles en el Organón 1972 pág 195:

> Una definición debe ser esencial. Explica lo que la cosa es. Y todo lo que explica lo que la cosa es, es universal y afirmativo.
> Sólo los silogismos de la figura I son así universales y afirmativos, los de las demás figuras no lo son.
> La definición puede ser una manera de conocer la sustancia, pero es evidente que las cosas demostrables no son sustancias.
> Las cosas se saben por definición o por demostración, pero no hay intersección entre ambos conceptos. Porque lo que es sabido por definición entonces ¿para que demostrarlo?. Si se quiere demostrar lo que se sabe por definición se caerá en una petición de principio.
> Los principios de las demostraciones son las definiciones para las cuáles no hay demostración posible.

Con respecto a las demostraciones dice:

> Una de dos: O los principios de las demostraciones serán demostrables y entonces el principio de aquéllos principios igualmente serán y así hasta el infinito, ó los principios serán las definiciones indemostrables.
> La definición es la esencia de la cosa dice lo que ella es, mientras que la demostración supone tal esencia.
> La definición muestra lo que la cosa es la demostración lo demuestra.

Finalmente afirma que:

> Es por lo tanto claro que la definición y la demostración no se confunden y que no está la una contenida en la otra.

Estas conclusiones de Aristóteles no son del todo compatibles con los conceptos modernos, en el sentido de que una definición puede ser utilizada dentro de una demostración y entonces este paso puede ser justificado diciendo que es válido por definición. Por lo que sí habría intersección entre estos conceptos. Más precisamente, la definición está contenida en la demostración.

La definición es utilizada por las ciencias inductivas y también en las deductivas. En la inductiva la definición es el universal al que se aspira llegar. Y en las deductivas, la defijición es la base de la que se parte para las demostraciones. Y la demostración se basa en el silogismo, entonces Aristóteles se pregunta: ¿Habrá silogismo y demostración de la esencia, o no habrá ni uno ni otra?.

El responde:

> No hay demostración por lo anteriormente dicho.
> La inducción puede acercarnos a la esencia; porque nunca conocemos por definición anterior los atributos esenciales del objeto, ni sus accidentes.
> Sin embargo se dijo al princiõ que todo lo que se indaga es un términõ medio, lo cuál implica que hay silogismo de la esencia, pero ésto ¿cómo es posible?.

A esto dice Aristóteles que de las cosas cuya esencia nos preguntamos, se conoce al menos una parte de su esencia y si se conoce la existencia de la cosa ya se sabrá un poco más de tal esencia.

Entonces sí hay silogismo de la esencia, pero se requiere conocer la existencia de la cosa y además algo de su esencia.

Expliquémos ésto mediante ejemplos (de Aristóteles).

1) ¿Qué es el trueno?

Representemos:
C--- Nuves.
A--- Trueno.
B--- Extinción del fuego.

Prueba:

C es B--- Porque es en la nuve donde se extingue el fuego.

A es C --- El trueno se dá en las nuves

.˙. A es B --- B es la definición de A.

Pero podríamos seguir preguntando, y porqué B, ¿porqué hay extinción del fuego? dice Aristóteles que se podría meter otro termino medio para probar B, y asegura que: "La definición de A será siempre el resultado de las definiciones anteriores".

2) ¿Se eclipsa la luna?

Representemos:
A---Eclipse
B--- La interposición de la tie

rra.

C--- La luna.

Prueba:

B es A--- Debido a la interposición de la tierra hay eclipses.

C es B--- En la luna se manifiesta la interposición de la tierra.

∴ C es A--- La luna se eclipsa.

En algunas indagaciones como esta, dice Aristóteles que se sabe que la cosa existe, y porqué existe. Se sabe en este ejemplo que la luna se eclipsa y porqué se eclipsa, dice:(6)

> Indagar si la luna se eclipsa o no se eclipsa es indagar si B existe o no existe; lo cuál equivale precisamente a indagar si la causa del eclipse, B existe; y si esta causa existe, decimos que el eclipse existe igualmente.

Asegura que si la indagación se hace por términos medios, se sabe que la cosa existe y porqué existe, de otra manera sólo se sabe que existe.

Ejemplo:

¿Se eclipsa la luna?

Representemos: A--- El eclipse.
C---la luna.

(6) Aristóteles Organón 1972 pág 201.

B---No puede haber sombra alguna en la época del plenilunio sino hay algo que se interponga entre la luna y nosotros.

Dice el filósofo que cuando se asegura que la luna se eclipsa, se sabe la existencia de la cosa, pero no porqué existe, saber porqué existe equivale a indagarahora qué es B, (ó sea buzcar porqué si es la época de plenilunio y no hay nada interpuesto entre la luna y nosotros, no obstante hay sombra en la luna).

¿Qué es B? es la interposición de la tierra o el movimiento de la luna sobre sí misma o la extinción de la luz; y esta es precisamente la definición de A.

La indagación de la esencia es algo compleja como lo hemos apreciado en los ejemplos, cuando se trata de problemas de la ciencia inductiva. Consideramos que la matemática no se mete en tales problemas, porque sus definiciones son más simples, ya que si no fuése así, no habría demostración, y por lo tanto no habría matematica, ya que la definición es la base para la demostración.

Si la definición de algún objeto matemático no es del todo esencial, ésto lo hará ver la experiencia, y entonces se modificará la definición para hacerla más general, o sea más esencial. Como ocurrió cuando los

pitagóricos definían número diciendo que éran los nú_
meros naturales; pero posteriormente la experiencia
les mostró la existencia de otro tipo de números, los
irracionales, así que vino necesariamente un cambio
en la definición de número.

Aristóteles resume diciendo:(7)

La esencia de las cosas puede ser:	1) Inmediata, entonces es principio y se admite lo que las cosas son y que existen por hipótesis. 2) No inmediata, aquí se puede probar que la causa esencial de una cosa es otra cosa, pero no se puede demostrar esta otra cosa (la esencia).

Aristóteles concluye los Segundos Analíticos, haciendo un resumen de los tipos de definición que hay

La definición en general puede ser:	1) La enunciación indemostrable de lo que es la cosa (principio en la ciencia de demostración). 2) El silogismo de lo que la cosa es, (que difiere de la demostración en la colocación de los términos). 3) La conclusión de la demostración que prueba lo que la cosa es (la conclusión del silo-

(7) Aristóteles Organón pág 202.

gismo es también una definición, como por ejemplo:"En triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"; aunque ésta no sea definición esencial para el triángulo.

Expliquemos estos resumenes:

1) La esencia, es inmediata como en las definiciones de los objetos matemáticos (en la mayoría), porque muchos de ellos se definen simplemente con un predicado que analiza o desdobla al sujeto, como:

a) Triángulo es una figura plana con tres ángulos

b) Cuadrilátero es la figura plana con cuatro lados, etc.

Si las definiciones de la matemática no fuésen inmediatas, entonces no habría matemática, porque ésta es casi toda deductiva y ya hemos visto que la deducción se basa en las definiciones esenciales.

2) Si la esencia no es inmediata, entonces hay silogismo pero no demostración de la esencia de una cosa. No hay demostración porque como ya hemos estudiado que ésta toma como base a la definición esencial de los elementos primitivos y lo que demuestra en base a éstas son los accidentes esenciales de esos elementos matemáticos. Y hay silogismo de la esencia de una cosa

(como ya lo hemos estudiado), porque mediante éste se prueba que una cosa es otra cosa, y en otro silogismo se puede probar que ésta última cosa es otra cosa y así sucesivamente, y cada vez se llegará a una definición más esencial de la primer cosa.

Expliquémos los tipos de definiciones:

Una definición puede ser esencial o no esencial.

1) Si es esencial entonces es principio primitivo en la ciencia de demostración como ya lo hemòs explicado.

2) Si la definición no es esencial, entonces hay dos opciones:

a) Podemos mèdiante un silogismo probar que una cosa es otra cosa (pero claro accidentalmente, porque estamos suponiendo que no es esencial) pero aquí en realidad lo que estamos haciendo es probar que la cosa existe, porque la cosa es, en función de la existencia de otra cosa que es el término medio. Esto es lo que sucede con el silogismo de la figura II. Ejemplos:

i) Un Cesare.

Ningún pez tiene respiración pulmonar.
S M

Todo mamífero tiene respiración pulmonar.
P M

∴ Ningún pez es mamífero.
S P

En este silogismo se prueba que ningún pez es mamífero pero, el ¿porqué? no se prueba. Ambas premisas son verdaderas pero la respiración pulmonar no es la causa de que un pez no sea mamífero.

ii) Un Camestres. (este ejemplo es de Aristóteles)

Todo lo que respira es animal.
M

Ninguna pared es animal.
M

.·. Ninguna pared respira.

Aquí se prueba que ninguna pared respira; pero no se prueba porque es ésto así, ya que el ser animal no es causa de la respiración

b) La otra opción si la definición no es esencial es la utilización del silogismo de la figura I; por medio de ésta se prueba que una cosa existe y porqué existe.

La diferencia entre ambas figuras I y II, es la colocación del término medio. Escribe Aristóteles:(8)

> De las tres figuras, la primera es la más cientifica. Valiendose de ella hacen sus demostraciones las ciencias matemáticas, la aritmética, la geometría, la óptica y puede decirse que todas las ciencias que estudian el porqué de las cosas; porque en esta figura unicamente, o por lo menos en las más de las cosas, y en las más de las ciencias, se forma el silogismo de la causa.

(8) Aristóteles Organón 1972 pág

Escribámos unos ejemplos:

i) Un Barbara.

Todo racional es humano
M P

Todo concienté es racional.
S M

.·. Todo conciente es humano.
S P

Aquí probamos que lo conciente existe en función de lo humano y además probamos que la causa de ésto es lo racional.

ii) Un celarent.

Ningún número impar tiene mitad entera.
M P

Todo número de la forma 2n+1 es no. impar
S M

.·. Ningún número de la forma 2n+1 tiene mitad entera.
S P

Aquí probamos que ningún número de la forma mencionada tiene mitad entera. La causa de ésto es que ese número es impar.

Finalizamos entonces subrayando que:

a) La demostración es el método usado en matematicas, el cuál es el silogismo que parte de las nociones anteriores.

b) No hay demostración de la esencia, sino de lo que es accidente esencial.

c) La demostración se hace por medio de la prime ra figura.

d) De dónde concluimos que: El silogismo que prue ba lo que la cosa es (y no porque es) difiere de la de mostración en la colocación del término medio.

3) La conclusión tanto de un silogismo como de una demostración, son ambas definiciones aunque no esencia les porque la esencia es hipótesis (en la demostración) ejemplos:

i) "El triángulo es una figura plana con tres án gulos", es definición esencial, y por lo tanto princi pio, y "La suma de los ángulos interiores de un trián gulo es de dos rectos" es un accidente para el trián- gulo, aunque esencial, y ésta proposición se demues - tra.

Con éstas explicaciones sobre la esencia damos por terminada esta tesis.

B i b l i o g r a f i a .

Aristóteles _Metafísica_ Mexico Ed. Porrúa 1973

Aristóteles _Organón_ México Ed. Porrúa 1972

Cassirer _El problema del conocimiento_ México F. C E. 1979

Heath, Sir Thomas _Aristótele_ New York Dover

Jaeger, W. _Aristóteles_ Mexico, F. C. E. 1984.

Platón Timeo (Diálogos) México Ed. Porrúa 1972.

Bibliografia.

Aristóteles *Metafísica* Mexico Ed. Porrúa 1973

Aristóteles *Organón* México Ed. Porrúa 1972

Cassirer *El problema del conocimiento* México F. C E. 1979

Heath, Sir Thomas *Aristótele* New York Dover

Jaeger, W. *Aristóteles* Mexico, F. C. E. 1984.

Platón Timeo (Diálogos) México Ed. Porrúa 1972.