UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL AXIOMA DE SOLOVAY EN ANALISIS FUNCIONAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

MARIA ELENA RIVERA LOPEZ

México, D. F. 1989

INDICE

Introducción.

En el artículo el axioma de Solovay y el Analisis Funcional de H. G. Garnir se plantea que actualmente se puede desarrollar el Analisis Funcional en tres direcciones según las conviciones de cada matemático.

La primera el análisis funcional constructivo en donde se trabaja con las formas tradicionales del razonamiento admitido universalmente, incluyendo el axioma de elección y mas precisamente el axioma de la definición inductiva de sucesiones que dice "Existe una regla que asocia a cada conjunto de una sucesión de conjuntos un elemento de este conjunto".

La segunda es el análisis funcional agregando el axioma de elección y que es el actual Análisis Funcional Clásico.

Por último el análisis funcional agregando el axioma de Solovay, que H. G. Garnir llama Analisis Funcional de Solovay. Y por el que se inclinan los matemáticos que no piensan que sea posible construir una funcion no-medible de una manera "honesta", es decir sin agregar axiomas.

La finalidad principal de H. G Garnir es presentar el impacto del axioma de Solovay en Analisis Funcional.

En este trabajo se tratara en el capitulo I el axioma de elección y una de sus consecuencias, que hace que algunos matemáticos prefieran otro axioma.

El axioma de Solovay y algunas de sus consecuencias se desarrollaran en los capitulos restantes. Haciendo notar las diferencias de estos resultados con los obtenidos suponiendo el axioma de elección.

Preliminares

Conjunto bien ordenado

Un conjunto X es bien ordenado si es un conjunto parcialmente ordenado y si todo subconjunto distinto del vacio de X tiene un elemento minimal.

Conjunto parcialmente ordenado

Se dice que un conjunto X tiene un orden parcial, si existe una relación r en X tal que sea reflexiva, antisimetrica y transitiva.

Caracter finito.

Un conjunto P tiene caracter finito si $(A \in P)$ si y solo si todo subconjunto finito de A está en P.

Grupo.

Un grupo es un semigrupo (es un conjunto G con una operación binaria) G tal que:

Existe un elemento e en G con

$$e * a = a \quad \text{para toda } a \text{ en } G$$

Para toda a en G, existe b en G con

$$b * a = e$$

La operación binaria es asociativa.

Medida.

Una medida es una función μ en un espacio medible $(\mathfrak{X}, S)$ (donde $\mathfrak{X}$

es un conjunto no vacío y S una sigma-álgebra de subconjuntos de X) que va de S en los reales extendidos con las siguientes propiedades

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(A) \geq 0$ para toda A en S

3) μ es contablemente aditiva es decir si (A_n) está en S es una sucesión de subconjuntos disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Espacio vectorial Topológico

E es un espacio vectorial topológico si:

1) E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2) E es un espacio topológico

3) La suma y la multiplicación por escalares son continuas, es decir

a) $+ : E \times E \longrightarrow E$ donde

$(x, y) \longrightarrow x + y$ es continua

b) $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ donde

$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda \cdot y$ es continua

Espacio vectorial topológico localmente convexo.

Sea E un espacio vectorial topológico, se dice que E es un espacio vectorial topológico localmente convexo si el origen tiene un sistema fundamental de vecindades convexas, es decir, para toda vecindad V de N_0 (familia de las vecindades del 0), existe U en N_0, U convexo tal que U está contenido en V.

Espacio vectorial topológico localmente convesco separable.

Es un espacio vectorial topológico localmente convesco Haussdorf.

Espacio de Fréchet.

Es un espacio localmente convexo metrizable completo, es decir, un espacio en el cual toda sucesión que es de Cauchy para la métrica converge para la métrica a un punto del espacio.

Espacio topológico metrizable.

Se dice que un espacio (X, τ) es metrizable si y solo si existe una métrica para X la cual induce a la topología τ.

Espacios homeomorfos.

Dos espacios topológicos son homeomorfos si y solo si existe un homeomorfismo de un espacio en el otro. Donde un homeomorfismo es: una función f de un espacio X a un espacio X^* es un homeomorfismo si y solo si f es biyectiva, continua y abierta.

Medida de Haav

La medida de Haar λ cumple las siguientes propiedades:

1) $0 < \lambda(U)$ para todo conjunto abierto distinto del vacío

2) $\lambda(U) < \infty$ para un conjunto abierto U

3) $\lambda(aB) = \lambda(B)$ para todo B contenido en G y a en G, es decir, λ es invariante. Donde G es un grupo.

Funcional

Una función f definida en un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con valores en $\mathbb{K}$ se llama una funcional (real si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, compleja si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Funcional lineal

Es una función f de X en $\mathbb{K}$ (X espacio vectorial de $\mathbb{K}$) que es

i) aditiva. $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para toda x, y

ii) homogenea: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para toda α en $\mathbb{K}$.

Capitulo I

Axioma de Elección

El axioma de elección fue planteado por primera vez por Ernest Zermelo en 1904. Kurt Gödel entre 1938-1940 demostró su consistencia en la teoría de Zermelo-Fraenkel. Y más adelante Paul Cohen probó su independencia con respecto a los axiomas de la misma teoría.

La teoría de Zermelo-Fraenkel está integrada por los siguientes axiomas:

Axioma de Extensionalidad.

$\forall u\,(u \in X \longleftrightarrow u \in Y) \longrightarrow X = Y$

"Si dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos entonces son iguales. Aquí iguales tiene el sentido de idénticos".

Axioma Par

$\forall u\ \forall v\ \exists X\ \forall z\,(z \in X \longleftrightarrow z = u \vee z = v)$

"Para cualesquiera dos conjuntos hay un conjunto cuyos elementos son exactamente ellos dos".

Axioma Compresión.

$\forall \vec{p}\ \forall X\ \exists Y\ \forall u\,(u \in Y \longleftrightarrow u \in X \wedge \phi(u, \vec{p}))$

para cualquier fórmula de la teoría de los conjuntos, $\vec{p} = p_1, \ldots, p_n$

"Si X es un conjunto cualquiera y ϕ es una propiedad acerca de los conjuntos, la colección de los elementos de X que tienen la propiedad ϕ, es un conjunto".

Axioma Unión.

$\forall X \exists Y \forall z \forall u (u \in z \wedge z \in X \rightarrow u \in Y)$

"Para cualquier conjunto X, la colección de los elementos de los elementos de X es un conjunto, el cual se denota $\cup X = Y$"

Axioma Potencia.

$\forall X \exists Y \forall u (u \subseteq X \rightarrow u \in Y)$

"Para cualquier conjunto X, la colección de los subconjuntos de X, es un conjunto."

Axioma Reemplazo.

Sea φ una fórmula tal que

$F = \{(x, y) : \varphi(x, y, \vec{p})\}$ es una función.

Entonces $\forall X \exists Y (F X \subseteq Y)$

"La imagen de un conjunto por una función, es un conjunto."

Axioma Infinito

$\exists Y [0 \in Y \wedge \forall u (u \in Y \rightarrow \{u\} \in Y)]$

"Existe un conjunto Y tal que el 0 es elemento de Y y siempre que u sea elemento de Y, también $\{u\}$ es elemento de Y."

Axioma Regularidad.

$(\forall S \neq \emptyset)(\exists x \in S)(x \cap S = \emptyset)$

"Todo conjunto no vacío tiene un elemento, cuyos elementos ya no están en el conjunto".

La aplicación del axioma de elección en distintas áreas de las matemáticas como Algebra, Teoria de los Conjuntos, Topología y Análisis es necesaria y de importantes consecuencias.

El enunciado del axioma es el siguiente:

"Para toda familia $\mathfrak{F}$ de conjuntos no vacíos, existe una función f tal que $f(s)$ está en S para todo conjunto S en la familia $\mathfrak{F}$". Donde f es la función de elección en $\mathfrak{F}$.

Ejemplo:

Sea $\mathfrak{F}$ la familia que consta de los conjuntos de la forma $\{a,b\}$ donde a y b son números reales Entonces la función

$$f(\{a,b\}) = \min(a,b)$$

es la función de elección en $\mathfrak{F}$.

Existen formas débiles del axioma de elección como: el axioma de elección numerable; el principio de las elecciones dependientes; el teorema "Todo conjunto infinito tiene un subconjunto contable".

Por otro lado es equivalente a muchos otros teoremas entre los que se encuentran:

El principio del buen orden. "Todo conjunto se puede bien ordenar"

Principio máximal I (Lema de Zorn) " Sea $(P, <)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado donde toda cadena en P tenga una cota superior. Entonces P tiene un elemento máximal".

Principio máximal II (Lema de Tuckey)

"Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos. Si $\mathcal{F}$ tiene caracter finito, entonces $\mathcal{F}$ tiene un elemento máximal (máximal con respecto a la inclusión).

Teorema de Tychonoff.

"El producto de una familia de espacios compactos es compacto en la topología producto". [8]

Pero también el axioma de elección lleva a consecuencias que desde el punto de vista de algunos matemáticos no son convenientes o bien que van en contra del sentido común, como lo es la paradoja de Banach-Tarski, que dice:

"Una esfera sólida unitaria U se puede descomponer en dos conjuntos ajenos

$$U = X \cup Y$$

tal que

$$U \simeq X \quad y \quad U \simeq Y."$$

Es decir se puede dividir una esfera sólida unitaria en un número finito de piezas y después reunirlas formando dos esferas sólidas unitarias.

En este trabajo no se demostrara la paradoja, solo se demostraran los teoremas necesarios para la descomposición de la esfera en n piezas.

Descomposición de la Espera en N Piezas.

Primeramente considere el grupo rotacional G:

$$G = \{ \varphi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi_i(0) = 0 \}$$

Se denotara por $\varphi_i(u)$ la transformación de un punto u bajo φ_i. Y por $\varphi_i(A)$ la transformación de un conjunto de puntos bajo φ_i.

Se dice que m rotaciones son independientes si y solo si para toda φ_i en G, el producto de las φ_i para $i=1, \ldots, m$ es distinto de la identidad y su representación es única.

Construcción de m rotaciones independientes.

Suponga que tiene dos rotaciones φ y ψ en G que son independientes salvo posible periodicidad. Ya que puede suceder que una o ambas de las rotaciones cumplan las ecuaciones $\varphi^{r} = 1$ y $\psi^{s} = 1$ donde r y s son enteros positivos y sólo éstas.

Suponga que r es mayor que 1 y s mayor que m. Entonces se puede escribir:

$$\alpha_{k} = \varphi\,\psi^{k} \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots m.$$

Teniendo así m rotaciones independientes. Ya que si se considera cualquier producto de factores $\alpha_{k}^{\pm 2}$, que no se puedan simplificar en términos de las α's y se substituyan las α's por sus valores correspondientes, cancelando todos los factores posibles, el primero y último factor de la forma $\alpha_{k}^{\pm 1}$ no se cancelan.

Las rotaciones α_{k} generan un subgrupo H del grupo rotacional G, ya que φ, ψ, φ^{-1}, ψ^{-1} $\varphi^{\pm 1}\psi^{\pm 1}$ estan en G.

Sean $\varphi_{1}, \ldots \varphi_{m}$ m rotaciones independientes entonces los puntos de la esfera S bajo estas rotaciones, hacen que la esfera se subdivida en clases de puntos equivalentes, es decir puntos que se pueden transformar de uno a otro punto por rotaciones de H.

Se demostrará que existe una relación de equivalencia entre los puntos de S bajo $\varphi_1, \ldots \varphi_m$.

Demostración.

i) $u \sim u$

existe u en H tal que $I(u) = u$ por lo tanto $u \sim u$

ii) $u \sim v \Rightarrow v \sim u$

sea β elemento de H entonces $\beta(v) = u$ y como β es biyectiva se tiene que $\beta^{-1}(u) = v$, por lo tanto $v \sim u$

iii) $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$

Sean β, γ elementos de H entonces $\beta(u) = v$ y $\gamma(u) = w$, lo que implica $\gamma(\beta(u)) = w$, por lo tanto $u \sim w$.

Un punto u de la espera S tal que $\varphi(u) = u$ se llamara punto fijo.

Afirmación.

Cualquier punto equivalente a un punto fijo es un punto fijo.

Demostración.

Sea u en S tal que $\varphi(u) = u$

Si $v \sim u$ entonces $\beta(v) = u$ que implica

$$\varphi(\beta(v)) = \varphi(u) = u = \beta(v)$$

entonces

$$\varphi(\beta(v)) = \beta(v)$$

y

$$\beta^{-1}\varphi(\beta(v)) = \beta^{-1}\beta(v) = v$$

por lo tanto v es un punto fijo para $\beta^{-1}\varphi\beta$.

Por lo que las clases de puntos equivalentes consisten de puntos fijos o - bien de puntos no-fijos.

Sea NF una clase que consista de puntos no-fijos. Por el axioma de elección se elige un punto u de NF, entonces cualquier punto de la clase se puede representar de manera única como $\beta(u)$ donde β es una rotación de H.

Demostración.

Sea v un elemento de NF entonces $v = \beta(u)$.

Suponga que v se puede escribir como $v = \gamma(u)$ entonces

$$\beta(u) = \gamma(u)$$

lo que implica que

$$\gamma^{-1}\beta(u) = u$$

por lo tanto

u es un punto fijo para $\gamma^{-1}\beta$. Lo que contradice la hipótesis.

Ahora bien considere cualquier clase que consista de puntos fijos y elija una rotación θ tal que tenga un - punto fijo en la clase. Donde θ se expresa como un producto de factores $\varphi_k^{\pm 1}$ tal que el número de factores $\varphi_k^{\pm 1}$ es el menor posible.

Afirmación.

Los factores primero y último de θ no pueden ser inversos.

Demostración.

Sea v el punto fijo de θ.

Suponga que θ es de la forma:

$$\varphi \varphi_{t_1} \cdots \varphi_{t_l} \varphi^{-1}$$

entonces

$$\varphi \varphi_{t_1} \cdots \varphi_{t_l} \varphi^{-1}(v) = v$$

implica

$$(\varphi_{t_1} \cdots \varphi_{t_l})(\varphi^{-1}(v)) = \varphi^{-1}(v)$$

sea

$$\varphi^{-1}(v) = v'$$

entonces

$$(\varphi_{t_1} \cdots \varphi_{t_l})(v') = v'$$

por lo tanto existe una rotación con un producto que tiene un menor número de factores con un punto fijo en la clase, lo que contradice las características de θ.

Teorema.

Si $\alpha(u) = u$ donde $u = \theta(u)$ entonces $\alpha = \theta^n$

Observación. Si α tiene el mismo punto fijo que θ entonces $\theta\alpha = \alpha\theta$ cuando las rotaciones α y θ estan en el mismo eje de rotación.

Demostración

Si $\alpha = I$ entonces las condiciones si $n=0$.

Ahora bien si $\alpha\theta$ no se simplifica cuando $\alpha\theta$ se expresa como un producto de $\varphi_{t_k}^{\pm 1}$ entonces $\theta\alpha$ tampoco se simplifica ya que esto implicaría que se puede expresar como un producto con menos factores que $\alpha\theta$, con lo que se tiene una contradicción con el hecho de que la representación es única.

Por lo tanto si $\alpha\theta$ no se simplifica la ecuación

$$\alpha\theta = \theta\alpha$$

implica que α comienza con un bloque θ, ya que α se puede expresar como $\theta^{-1}\alpha\theta$. Sea $\theta^{-1}\alpha = \beta$ entonces $\alpha = \beta_0\theta$ donde β tiene el mismo punto fijo que θ.

Por inducción sobre β_0 se tiene que

$$\beta_0 = \beta_1\theta$$

donde cada vez se tienen menos factores de la forma $\varphi_{\ell_k}^{\pm 1}$ en β_i y así sucesivamente hasta $\beta_n = \beta_{n+1}\theta$ para $i=1 \ldots n$, por lo tanto $\alpha = \theta^n$ con n elemento de los enteros positivos

Si $\alpha\theta$ se simplifica entonces $\alpha\theta^{-1}$ no se simplifica. Razonamiento análogo al anterior. Con lo que para este caso la ecuación $\theta^{-1}\alpha = \alpha\theta^{-1}$ implica que $\alpha = \theta^{-n}$

con n elemento de los enteros positivos, procediendo como en el caso anterior.

Afirmación.

Cualquier punto de una clase de puntos fijos F se puede escribir como $\beta(v)$ donde β es una rotación de H tal que no comienza con un bloque θ (cuando θ se expresa como un producto de factores $\varphi_{l_k}^{\pm 1}$) ni con el inverso de el último factor de θ, es decir $\varphi_{l_k}^{\pm 1}$ y esta representación es única.

Demostración.

Sea ω elemento de F entonces $\omega = \beta(v)$.

Si $\beta = \beta_1 \theta$ entonces como v es punto fijo de θ se tiene $\omega = \beta_1(v)$.

Si $\beta = \beta_1 \varphi^{-1}_{l_k} = \beta_1 \varphi_{l_{k-1}} \cdots \varphi_{l_1} \theta^{-1}$ sea

$$\tilde{\beta} = \beta_1 \varphi_{l_{k-1}} \cdots \varphi_{l_1}$$

entonces $\tilde{\beta}(v) = \omega$.

Si $\tilde{\beta}$ empieza con θ lo quita y podría suceder que

$$\beta_1 = \beta_2 \varphi_{l_k}$$

entonces

$$\tilde{\beta} = \beta_2 \varphi_{l_k} \varphi_{l_{k-1}} \cdots \varphi_{l_1}$$

donde $\varphi_{l_k} \cdots \varphi_{l_1} = \theta$

con lo que $\tilde{\beta} = \beta_2 \theta$ en ese caso se usa

β_2 y note que β_2 tiene menos factores que β_1.

Por lo tanto β no comienza con un bloque θ ni con el inverso de el último factor de θ.

Unicidad

Sea u un punto fijo en F.

Suponga que w se puede escribir como $w = \gamma(u)$ y $w = \beta(u)$ donde β y γ cumplen las condiciones mencionadas.

Entonces $\beta(u) = \gamma(u)$ implica que

$$\gamma^{-1}\beta(v) = v$$

y por el teorema inmediato anterior

$$\gamma^{-1}\beta = \theta^{n}$$

Si $n > 0$

entonces

$$\gamma\gamma^{-1}\beta = \gamma\theta^{n}$$

con lo que

$$\beta = \gamma\theta^{n}$$

lo cual no es posible ya que β no comienza con un bloque θ y $\gamma\theta^{n}$ no se simplifica porque el primer factor de γ no es el inverso del último factor de θ.

Si $n < 0$

entonces

$$\beta\theta^{-n} = \gamma\theta^{n}\theta^{-n}$$

lo que implica

$$\gamma = \beta\theta^{-n}$$

Argumento análogo al anterior.

Por lo tanto β es igual con γ.

Teorema de la descomposición general.

Sea R una relación cuyo dominio y rango es el conjunto de los enteros $\{1 \ldots n\}$.

Se dice que una rotación φ es compatible con la relación R para la subdivisión de S en n piezas $A_1, \ldots, A_n$:

si $\varphi(x)$ está en A_l con x elemento de A_r entonces rRl.

Se define el producto de dos relaciones R y R' como $kRR'l$ si y solo si existe s tal que kRs y $sR'l$.

El inverso de R es la relación R^{-1} tal que $lR^{-1}k$ es equivalente a kRl. En general el producto $R^{-1}R$ no es la identidad.

Se dice que k es un punto fijo para R si kRk.

Teorema.

Sean m relaciones $R_1, \ldots, R_m$ cada una con dominio y rango el conjunto $\{1, 2, \ldots n\}$. Entonces se puede descomponer la esfera S en n piezas disjuntas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y para esta subdivisión encontrar m rotaciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ compatibles con $R_1, \ldots, R_m$ respectivamente si y solo si cualquier producto de cualquier número de factores de la forma $R_i^{\pm 1}$ tiene un punto fijo. Si tales rotaciones existen, se pueden elegir independientes.

Demostración.

Necesaria. Suponga que existen los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y las rotaciones $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ compatibles con $R_1 \ldots R_m$.

Sea R una relación dada tal que

$$R = R_{i_s}^{j_s} R_{i_{s-1}}^{j_{s-1}} \ldots R_i^{j_i} \quad \text{con } j_s = \pm 1$$

y $s = 1, \ldots, s$.

Entonces la rotación

$$\varphi = \varphi_{i_s}^{j_s} \varphi_{i_{s-1}}^{j_{s-1}} \ldots \varphi_{i_1}^{j_1}$$

es compatible con R, ya que por hipótesis φ_{i_s} es compatible con R_{i_s} respectivamente para $s = 1, \ldots, m$.

Demostración.

Por compatibilidad en algún A_k con $k = 1, \ldots, n$ tal que

$$\varphi_{i_1}^{j_1}(u) \text{ en } A_l$$

l elemento de $\{1, \ldots, n\}$ entonces $k R_{i_1}^{j_1} l$.

Ahora bien

$$\varphi_{i_2}^{j_2}(\varphi_{i_1}^{j_1}(u)) \text{ está en } A_s$$

con s en $\{1 \ldots n\}$

entonces

$$\ell R_{i_2}^{j_2} s$$

por lo tanto

$$k R_{i_1}^{j_1} R_{i_2}^{j_2} s$$

y así sucesivamente hasta

$$\varphi_{i_s}^{j_s} (\varphi_{i_{s-1}}^{j_{s-1}} \ldots \varphi_{i_1}^{j_1}(u))$$

que está en A_{t_j} con t en el conjunto $\{1 \ldots n\}$

entonces

$$k R_{i_s}^{j_s} \ldots R_{i_1}^{j_1} t$$

por lo tanto φ es compatible con R.

Afirmación.

Como φ tiene un punto fijo entonces R tiene un punto fijo.

Demostración

Sea u tal que $\varphi(u) = u$

Como φ es compatible con R entonces $\varphi(u)$ está en A_k con k en $\{1 \ldots n\}$ entonces u esta en A_k, lo que implica que $k R k$.

Por lo tanto R tiene un punto fijo.

Suficiente. Suponga que para toda R generada por las relaciones dadas tiene un punto fijo.

Sean $\varphi_1 \ldots \varphi_m$, m rotaciones independientes. Considere el grupo rotacional generado por éstas y que como ya se menciono subdividen la espera S en clases de puntos que son bien de puntos fijos, bien de puntos no-fijos.

De esta manera lo que se tiene que demostrar es como hacer una partición en las clases de puntos equivalentes, es decir como distribuir los puntos de las clases de tal forma que se obtengan los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ y para esta subdivisión, las rotaciones φ_k compatibles con las relaciones R_k. Esta distribución se va a hacer de manera independiente para cada clase.

Puntos no-fijos.

Dada una clase NF de puntos no-fijos. Por el axioma de elección existe un conjunto que contiene un elemento en la clase. Elija aleatoriamente un punto u de la clase. Se sabe que cualquier elemento de la clase se puede escribir de manera única como $\beta(u)$ donde β es una rotación del grupo.

Sea α elemento de G tal que $\alpha(u)$ esté en NF.

Asigne u a cualquier A_s y sea α una rotación suponga que ya asignó $\alpha(u)$ en algún A_k.

Sea $\beta = \varphi_i^j \alpha$ entonces se da el paso inductivo asociando a $\beta(u)$ a algún A_l tal que $k R_i^j l$.

Por lo tanto se tiene que φ_K es compatible con la relación R_K para la subdivisión de S.

Puntos fijos.

Se elige una rotación θ mínima tal que $\theta(u) = u$ en la clase.

Si $\theta = \varphi_{i_s}^{j_s} \dots \varphi_{s_1}^{j_1}$ donde $j_s = \pm 1$

entonces a partir de v se tienen s puntos que forman un ciclo cerrado

$$v, \varphi_{i_1}^{j_1}(v), \varphi_{i_2}^{j_2}(v), \dots, \varphi_{i_j}^{j_s} \dots \varphi_{i_1}^{j_1}(v)$$

donde $\varphi_{i_j}^{j_s} \dots \varphi_{i_1}^{j_1}(v) = v$.

Todo punto de la clase se puede escribir de manera única como $\beta(v)$ donde β no comienza con un bloque θ ni con $\varphi_{i_s}^{-j_s}$.

De este modo no existen ciclos cerrados distintos a este. Por lo que se pueden asignar los s puntos de el ciclo a los conjuntos $A_1 \dots A_n$ de tal forma que las condiciones de compatibilidad se cumplan. Y los puntos que quedan se pueden asignar de manera análoga como para los puntos no-fijos

La relación que corresponde a θ es R tal que

$$R = R_{i_s}^{j_s} \dots R_{i_1}^{j_1}$$

como por hipótesis R tiene un punto fijo k entonces existen $k_0, k_1, \ldots, k_s$ en $\{1 \ldots n\}$ tal que

$$k_{r-1} \, R_{i_r}^{j_r} \, k_r \quad \text{para } r = 1 \ldots s$$

y $k_0 = k_s = k$.

Si se asigna v al conjunto A_k y el punto

$$\varphi_{i_r}^{j_r} \cdots \varphi_{i_1}^{j_1}(v)$$

en el conjunto A_{k_r} para $r = 1, \ldots, s-1$, entonces

$\varphi_{i_1}^{j_1}(v)$ está en A_k con v en A_k, con lo que

$$k \, R_{i_1} \, k_1$$

y así sucesivamente.

Por lo tanto $\varphi_{i_s}^{j_s}$ es compatible con $R_{i_s}^{j_s}$ para la descomposición de S en n conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$.

Sistemas de Congruencias.

Ahora la finalidad es ver como se puede dividir la superficie esférica S en n conjuntos disjuntos $A_1 \ldots A_n$ que cumplan cierto sistema de congruencias dado.

Cada congruencia es de la forma:

$$A_{k_1} + A_{k_2} + \ldots + A_{k_r} \cong A_{l_1} + \ldots + A_{l_s}$$

donde $0 < r < n$, $0 < s < n$ y

$$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$$
$$1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_s \leq n$$

Se dice que dos conjuntos A y B son congruentes:

Si A se puede transformar en B aplicando una rotación φ tal que

$$\varphi(A) = B$$

Afirmación.

La congruencia

$$A_{k_1} + A_{k_2} + \ldots + A_{k_r} \approx A_{l_1} + A_{l_2} + \ldots + A_{l_s}$$

es equivalente a la existencia de una rotación φ compatible para la descomposición dada de S con la relación R cuyo dominio y rango es el conjunto $\{1 \ldots n\}$ y para k, l en $\{1, 2, \ldots n\}$ que cumplen:

k esta relacionado con l si y solo si k es elemento de K si y solo si l es elemento de L donde $K = \{k_1 \ldots k_r\}$ y $L = \{l_1 \ldots l_s\}$.

A esta relación se le llama relación canónica y se dice que corresponde a la congruencia dada.

Demostración

Sea φ tal que

$$\varphi(A_{k_1} + \ldots + A_{k_r}) = A_{l_1} + \ldots + A_{l_s}$$

Por demostrar que φ es compatible con R.

$$\text{Sea } \mathfrak{A} = A_{k_1} + \ldots + A_{k_r} \cong A_{l_1} + \ldots + A_{l_s} = \mathcal{B}$$

$\varphi(x)$ es elemento de $\mathcal{B}$ con x en $\mathfrak{A}$ si y solo si existe k en $\{k_1, \ldots k_r\}$ y l en $\{l_1, \ldots l_s\}$ tales que por definición k está relacionado con l si y solo si k es elemento de K si y solo si l es elemento de L.

Por demostrar que si $\varphi(x)$ está en A_l con x en A_r entonces rRl.

Por lo tanto lo que se tiene que demostrar es que si r está en K entonces l es elemento de L y si l está en L entonces r es elemento de K.

Suponga que r es elemento de K y x elemento de A_r entonces $\varphi(x)$ está en A_l que esta contenido en $\mathcal{B}$, lo que implica que A_l es una de las A_{l_i}, entonces l está en $\{l_1, \ldots l_s\}$ por lo tanto l es elemento de L.

Suponga ahora que l es elemento de L.

Como φ es biyectiva entonces x está en A_r que esta contenido en $\mathfrak{A}$, Con lo que A_r es alguna A_{k_i}. Entonces r está en $\{k_1, \ldots k_r\}$ por lo tanto r es elemento de K.

Por lo tanto φ es compatible con R.

Para el recíproco se tiene que demostrar que

$$A_{k_1} + \dots + A_{k_r} \cong A_{l_1} + \dots + A_{l_s}$$

entonces lo que se tiene que demostrar es que $\varphi(\mathfrak{O})$ está contenido en $\mathcal{B}$ y que $\varphi(\mathfrak{O})$ contiene a $\mathcal{B}$

Demostración.

Por demostrar $\varphi(\mathfrak{O})$ está contenido en $\mathcal{B}$.

Sea x elemento $\mathfrak{O}$ entonces si $\varphi(x)$ está en A_l se tiene que $k_i R l$, pero k_i es elemento de K, entonces por la definición de R, l es elemento de L.

Por lo tanto A_l es alguna A_{l_i}

Por lo tanto $\varphi(\mathfrak{O})$ está contenido en $\mathcal{B}$.

Demostración.

Por demostrar $\mathcal{B}$ contenido en $\varphi(\mathfrak{O})$

Sea y en A_{l_q} donde A_{l_q} está contenida en $\mathcal{B}$. Como φ es suprayectiva existe x en $\mathfrak{O}$ tal que $x = \varphi^{-1}(y)$ y A_k tal que x está en A_k entonces $l_q R k$ como l_q está en L. Entonces por definición de R, k está en K.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ esta contenido en $\varphi(\mathfrak{O})$.

Se dice que:

Cada congruencia es equivalente

a su congruencia complementaria.

Demostración.

$A \cong B$ si y solo si $\varphi(A) = B$

(como φ biyectiva)

si y solo si $\varphi(A^c) = B^c$

si y solo si $A^c \cong B^c$.

Si dos congruencias tienen un miembro en común entonces se puede obtener una nueva congruencia por transitividad.

Demostración.

$A \cong B$ y $A \cong C$ Por demostrar $B \cong C$.

Sea φ_1 tal que $\varphi_1(A) = B$ entonces

$$A = \varphi_1^{-1}(B)$$

y φ_2 tal que $\varphi_2(A) = C$ entonces

$$\varphi_2(\varphi_1^{-1}(B)) = C$$

sea

$$\varphi = \varphi_2 \varphi_1^{-1}$$

lo que implica

$$\varphi(B) \cong C$$

por lo tanto $B \cong C$

Teorema.

La espera S se puede descomponer en n conjuntos disjuntos que satisfacen un sistema de congruencias dado si y solo si ningúna de las congruencias del sistema, ni cualquier congruencia que se obtenga de éstas por complementación o transitividad es la congruencia de dos porciones complementarias de S. Si la descomposición es posible entonces cada congruencia puede ejectuarse por una rotación independiente.

Demostración.

Necesaria. Suponga que S se descompone en n conjuntos disjuntos.

Suponga que existe una congruencia tal que

$$A_{k_1} + A_{k_2} + \dots + A_{k_r} \cong A_{l_1} + A_{l_2} + \dots + A_{l_s}$$

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_r\} \qquad L = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$$

$$K \cup L = \{1 \dots n\} \qquad K \cap L = \emptyset$$

Como se vio ésta congruencia es equivalente a la existencia de una rotación $\mathcal{U}$ compatible para la descomposición de S con la relación R tal que $k R l$ si y solo si k es elemento de K si y solo si l es elemento de L.

Por el teorema anterior R tiene un punto fijo. Entonces, sea v el punto fijo de R, se tiene $v R v$. Lo que implica que v es elemento de K, lo que implica a su vez que v está en L que contradice el hecho que $K \cap L = \emptyset$

Por lo tanto dos partes complementarias de S no pueden ser congruentes.

Suficiente. Para cada congruencia se puede encontrar una relación R tal que la existencia de una rotación φ compatible con R es equivalente a la congruencia dada.

Sea R_i la relación que corresponde a la i-esima congruencia. Entonces por el teorema anterior el sistema de congruencias tiene solución si para toda relación R expresada como un producto de factores $R_i^{\pm 1}$ tiene un punto fijo.

Las relaciones $R_i^{\pm 1}$ son canónicas. Como no todo producto formado por estos factores es canónico. Se demostrara que solo se necesitan considerar los productos que lo son.

Si existe l con $1 \leq l \leq n$ tal que kRl para todo k con $1 \leq k \leq n$, entonces R incluye una función definida en el dominio de R que tiene un valor constante l. Se dira entonces que R incluye una constante.

Si R tiene una constante entonces todo producto de R por otras relaciones que tengan el mismo dominio y rango tendran una constante.

Si R tiene una constante entonces R tiene un punto fijo ya que kRl para todo k, en particular lRl.

Por lo tanto los productos de esta forma no sera necesario considerarlos.

Afirmación.

El producto de relaciones canónicas es canónico o incluye una constante.

Demostración.

Suponga que

$$k\ R's \longleftrightarrow (k \in K' \longleftrightarrow s \in L')$$

y

$$k\ R''l \longleftrightarrow (s \in K'' \longleftrightarrow l \in L'').$$

Ahora bien

$k\ R'R''l$ si y solo si existe s tal que

$$k\ R's \quad y \quad s\ R''l$$

si y solo si

$$(k \in K' \longleftrightarrow s \in L') \quad y$$

$$(s \in K'' \longleftrightarrow l \in L'')$$

Si $K'' = L'$ o $K'' = L'^c$ con respecto a $\{1 \ldots n\}$ entonces $R'R''$ es canónico.

Demostración.

Si $K'' = L'$ sea s_1 en L'.

Si $K'' = L'^c$ sea s_2 en L'^c.

Si k es elemento de K' entonces

$$k\ R's_1\ y\ s_1\ R''l.$$

Si k no es elemento de K' entonces

$$k R'' s_2 \quad y \quad s_2 R'' l$$

por lo tanto

$$k R' R'' l$$

con lo que se tiene que el producto $R'R''$ es canónico.

Por otro lado si $K'' \cap L' \neq \emptyset$ y $K'' \cap L'^c \neq \emptyset$ entonces el producto $R'R''$ incluye una constante.

Demostración.

$k R' R'' l$ para toda l en L' para toda k

$k R' R'' l \longleftrightarrow$ existe s tal que $k R' s$ y $s R'' l$

$$(k \in K' \leftrightarrow s \in L') \wedge (s \in K'' \leftrightarrow l \in L'')$$

Sean s_1 elemento de $K'' \cap L'$ y s_2 elemento de $K'' \cap L'^c$

Suponga que $k \in K'$ entonces $k R' s_1$ ya que s_1 está en $K'' \cap L'$ que está contenida en L', pero $s_1 R'' l$ entonces $k R' R'' l$.

Suponga que k no esta en K' entonces $k R' s_2 \wedge s_2 R'' l$ entonces $k R' R'' l$.

Por lo tanto, para todo l en L'' $k R' R'' l$.

Si fijamos l en L'' tenemos que $R'R''$ contéene la constante l. Los otros casos posibles son análogos. Como todo producto que incluye una constante tiene un punto fijo, queda por demostrar, bajo que condiciones un producto que es canónico tiene un punto fijo.

Afirmación.

Si el conjunto R'R" es canónico entonces tiene puntos fijos.

Demostración

Sea R una relación canónica.

Suponga que R no tiene puntos fijos entonces para toda K, K no está relacionada con K esto implica que

$$K R K \longleftrightarrow ((k \in K \to k \notin L) \wedge (k \in L \to k \notin K))$$

Con lo que $K \cup L = \{1 \ldots n\}$ y $K \cap L = \emptyset$ .... (1)

$K \cup L$ esta contenido en el conjunto $\{1 \ldots n\}$

Si existiera s en $\{1 \ldots n\} / K \cup L$ entonces

$s \notin K \wedge s \notin L$ entonces

$s R s$ que contradice lo que se supuso.

De (1) se tiene que

$$A_{k_1} \cup \ldots \cup A_{k_r} \equiv A_{l_1} \cup \ldots \cup A_{l_s}$$

con $K = \{k_1 \ldots k_r\}$ y $L = \{l_1 \ldots l_s\}$

entonces $A_{k_1} \cup \ldots \cup A_{k_r}$ es el complemento de $A_{l_1} \cup \ldots \cup A_{l_s}$ con lo que se tiene una congruencia de porciones complementarias de S.

Por lo tanto la esfera S se puede descomponer en n conjuntos disjuntos que satisfacen un sistema de congruencias dado.

Ejemplo:

Suponga que quiere descomponer la esfera S en cuatro piezas A_1, A_2, A_3, A_4 tales que

$$A_1 \cong A_2 \cong A_1 + A_2$$

$$A_3 \cong A_4 \cong A_3 + A_4$$

por complementación y por transitividad, se obtienen del sistema las congruencias

$$A_1 + A_2 + A_4 \cong A_1 \cong A_2 \cong A_1 + A_2 \cong A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_2 + A_3 + A_4 \cong A_3 \cong A_4 \cong A_3 + A_4 \cong A_1 + A_3 + A_4$$

que en ningún caso se obtiene una congruencia de dos porciones complementarias de S, en consecuencia por el teorema inmediato anterior la descomposición se puede llevar a cabo.

Según este sistema de congruencias lo que se quiere es subdividir la esfera en dos piezas, cada una de las cuales se divide a su vez en dos piezas congruentes a ellas mismas.

Entonces se rotan A_1 y A_2 de tal manera que juntas formen una copia de S, así como A_3 y A_4 formen la otra copia de S.

Por lo tanto la esfera S se puede subdividir en cuatro piezas, que reunidas por pares, forman dos veces la esfera S.

Capitulo II

Axioma de Solovay

En 1971 Bob Solovay enunció el axioma que lleva su nombre y que se localiza en el area de teoría de la medida. Demostrando además que su axioma se podía agregar al Analisis Constructivo sin llevar a contradicciones, resultado que Gödel había demostrado con anterioridad para el axioma de elección.

El axioma de Solovay dice:

"Cualquier función definida en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es Lebesgue-medible."

Donde una función Lebesgue-medible es una función con dominio en la sigma álgebra de Lebesgue que contiene todo boreliano en $\mathbb{R}$ y rango en los reales extendidos ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$) y es la única que satisface que la medida de un intervalo es igual a la longitud del intervalo para todo intervalo contenido en $\mathbb{R}$. Y su existencia la garantiza el teorema de la extensión de Hahn-Caratheodory. [5]

Este axioma ha sido empleado por mucho tiempo en matemáticas aplicadas para evitar los problemas de medibilidad en la práctica de la teoría de la integración de Lebesgue

Uno de los resultados que se obtienen del axioma de Solovay es la extensión del axioma de Solovay y su enunciado es el siguiente:

"Cualquier función en un conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ es μ medible para cualquier medida μ en Ω"

La medida μ en Ω es una función conjunto aditiva contable con variación finita en los semi-intervalos con cerradura en Ω, o equivalentemente una función conjunto aditiva contable en los conjuntos de Borel con cerradura compacta en Ω.

La demostración se omitira porque es muy técnica. [4]

Ahora bien suponga cierto el axioma de Solovay en Teoría de la Medida.

Por definición se dice que una función real f de X en $\mathbb{R}$ es S-medible (donde S es una sigma-álgebra) si para toda α en $\mathbb{R}$ el conjunto

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

este en S.

Por el axioma de Solovay f es Lebesgue medible, entonces el conjunto - $f^{-1}((\alpha,\infty))$ esta en la sigma-álgebra de Lebesgue.

Por lo tanto se puede demostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible ya que existe una función f (función característica), tal que para todo subconjunto I contenido en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ en } I \\ 0 & \text{si } x \text{ no está en } I \end{cases}$$

entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = I$ está en la sigma-álgebra de Lebesgue.

Pero si se supone cierto el axioma de elección se tiene que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue medibles.

Construcción de Lebesgue

Sea $I = [0,1]$ para todo x, y en I, se define una relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim y$ si y solo si $x - y$ es elemento de los racionales $-1 \leq x - y \leq 1$.

Sea $\mathcal{E}_x$ la clase de equivalencia que contiene a x y sea $\mathscr{C}$ tal que

$$\mathscr{C} = \{ \mathscr{C}_x : x \in [0,1] \}$$

Por el axioma de elección existe un conjunto M que contiene exactamente un representante de cada clase $\mathscr{C}_x$.

Afirmación.

M es no-medible.

Primeramente si r_1, r_2 son elementos de los racionales con $r_1 \neq r_2$ entonces

$$(M+r_1) \cap (M+r_2) = \emptyset$$

donde $M+r = \{ m+r : m \in M \}$ es una traslación ... (1)

Demostración.

Si z es elemento de $(M+r_1) \cap (M+r_2)$ entonces existe m_1, m_2 en M tales que $m_1 + r_1 = z = m_2 + r_2$.

Entonces $m_1 - m_2 = r_1 - r_2$ que estan en los racionales, entonces $m_1 \sim m_2$, lo que implica que $m_1 = m_2$, por lo tanto $r_1 = r_2$ lo cual contradice la hipótesis.

Observación. M esta contenido en $[0,1]$

En seguida

$$[0,1] \subset \bigcup_{\substack{-1 \leq r \leq 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} M+r \subset [-1,2] \ldots (2)$$

Demostración.

que contiene a x y sea $\mathcal{C}$ tal que

$$\mathcal{C} = \{ \mathcal{C}_x : x \in [0,1] \}$$

Por el axioma de elección existe un conjunto M que contiene exactamente un representante de cada clase $\mathcal{C}_x$.

Afirmación.

M es no-medible.

Primeramente si r_1, r_2 son elementos de los racionales con $r_1 \neq r_2$ entonces

$$(M + r_1) \cap (M + r_2) = \emptyset$$

donde $M + r = \{ m + r : m \in M \}$ es una traslación ... (1)

Demostración.

Si z es elemento de $(M + r_1) \cap (M + r_2)$ entonces existe m_1, m_2 en M tales que $m_1 + r_1 = z = m_2 + r_2$.
Entonces $m_1 - m_2 = r_1 - r_2$ que estan en los racionales, entonces $m_1 \sim m_2$, lo que implica que $m_1 = m_2$, por lo tanto $r_1 = r_2$ lo cual contradice la hipótesis.

Observación. M esta contenido en $[0,1]$.

En seguida

$$[0,1] \subset \bigcup_{\substack{-1 \leq r \leq 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} M + r \subset [-1, 2] \quad \dots (2)$$

Demostración.

Claramente $\bigcup M+r \subset [-1,2]$.
Por demostrar $[0,1] \subset \bigcup M+r$.

Sea y elemento del $[0,1]$, elija m en M tal que $m \sim y$ entonces $(y-m)$ está en los racionales y $-1 \leq (y-m) \leq 1$ lo que implica que $y = m+(y-m)$ está en $M+(y-m)$ donde

$$M+(y-m) \subset \bigcup_{\substack{-1\leq r\leq 1 \\ r\in\mathbb{Q}}} M+r$$

Suponga que M está en la sigma-álgebra de Lebesgue $\mathcal{A}^*$.

De 1 y 2 se tiene que $\{M+r\}$ con r en $[-1,1]\cap\mathbb{Q}$ es una unión contable y disjunta y como $\mathcal{A}^*$ es invariante bajo traslaciones, es decir, $\lambda(M+r) = \lambda(M)$, entonces

$$\lambda\Big(\bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} M+r\Big) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(M+r) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(M)$$

finalmente por la monotonía de λ y 2 se tiene que

$$1 \leq \sum \lambda(M) \leq 3$$

De la primera desigualdad se tiene que $\lambda(M)$ es mayor que cero y de la segunda desigualdad que $\lambda(M)$ es igual con cero.

Por lo tanto existe un subconjunto no-medible en $\mathbb{R}$.

De lo que se concluye que el axioma de Solovay es contradictorio al axioma de elección.

Y en consecuencia lo que es interesante saber es que sucede si se cumple el axioma de Solovay y no el axioma de elección en Análisis con los teoremas que usualmente se sirven de este último. Como por ejemplo el teorema de Hahn-Banach.

Capítulo III

Consecuencias del axioma de Solovay en Análisis Funcional.

Otro resultado que se deduce del axioma de Solovay concierne al Análisis Funcional y se refiere a la existencia de los llamados "buenos espacios" que son espacios vectoriales topológicos localmente convexos separables donde toda semi-norma es continua.

En un espacio lineal E una función

$$\pi : E \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

es una semi-norma si cumple

$$\pi(cf) = |c|\, \pi(f)$$
$$\pi(f+g) \leq \pi(f) + \pi(g).$$

Un espacio con semi-normas es un espacio lineal E cuya topología esta descrita por un sistema de semi-normas naturales $\mathcal{P}$ donde las vecindades básicas de la topología son intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\{ y \in E,\ p(x-y) < \epsilon \}$$

donde p es elemento de $\mathcal{P}$.

Se dice que una semi-norma es continua en E si existe c mayor que cero, p elemento de $\underline{P}$ tal que

$$\pi(f) \leq c\, p(f)$$

para toda f en E.

Ejemplo:

Todo espacio de Fréchet es un buen espacio, es decir, en un espacio de Fréchet toda semi-norma es continua.

Demostración.

Sea F un espacio de Fréchet, la topología de un espacio de Fréchet está dada por un conjunto numerable de semi-normas naturales p_K que pueden ser elegidas de tal forma que determinen una sucesión creciente.

Si la semi-norma π no es continua entonces existe una sucesión f_m en F tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m(f_m) < \infty \quad y \quad \pi(f_m) \to \infty$$

Demostración.

Como π es no-continua entonces para todo m y para todo c existe f - tal que

$$\Pi(f) > c\, p_m f.$$

Ahora bien para toda m existe g_m tal que

$$\Pi(g_m) > c\, p_m(g_m).$$

Sea $c = m2^m$

Si $p_m(g_m) = 0$ entonces

$p_m(g_m) < \frac{1}{2^m}$.

Sea $f_m = \alpha_m g_m$ tal que

$\Pi(f_m) = m$ entonces $p_m(f_m) = 0 < \frac{1}{2^m}$

Si $p_m(g_m) > 0$ y $f_m = \alpha_m g_m$

$p_m(f_m) = |\alpha_m| p_m(g_m) = \frac{1}{2^m}$ y

tal que $\Pi(f_m) > 0$.

Entonces $\Pi(f_m) > m2^m p_m(f_m) = m$

con lo que se tiene que

$$p_m(f_m) \leq \frac{1}{2^m} \quad \text{y} \quad \Pi(f_m) \geq m$$

entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m(f_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty$$

y

$$\Pi(f_m) \to \infty \quad \text{cuando } m \to \infty$$

Sea

$$e_m = \{ f : \rho_m(f) \leq \frac{1}{2^m} , \ \pi(f) \geq m \}$$

por la demostración anterior e_m es distinto del vacío.

Ahora elija f_m en e_m para toda m.

Y considere el conjunto de Cantor que se dice es un grupo continuo en $\mathbb{R}$.

Para el conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$ se toma

$$\mathcal{C} = \{ \alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots : \alpha_i = 0 \circ 2 \}$$

Se tiene que $\mathcal{C}$ es un grupo conmutativo si se define una regla de multiplicación que consista en sumar componentes modulo 4

$\gamma = \alpha \cdot \beta$ si y solo si γ_i es para todo i

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i \pmod 4)$$

Así

0,202200... veces el 0,222002... se tiene 0,020202.

Esta multiplicación es conmutativa y asociativa.

Tiene como unidad al 0= 0,000..

y el inverso es tal que $\alpha^{-1} = \alpha$.

El conjunto de Cantor se puede

se puede expresar también como la colección de los x en $\mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/3^i$$

donde cada x_i es igual a 0 o 2, metrizable con la métrica usual. Y además resulta ser homeomorfo al producto cartesiano

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad \text{donde} \quad X_i = \{0, 2\}$$

con la métrica usual. [8]

Entonces $\mathcal{C}$ es un espacio métrico y continuo para la métrica usual por lo tanto:

$x_n \to x$ si y solo si para toda i $x_i^n \to x_i$

si y solo si para todo i existe N tal que

si $n > N$ entonces $x_i^n = x_i$.

Suponga que $\alpha_m \to \alpha$ en $\mathcal{C}$ entonces para todo i $\alpha_i^m \to \alpha_i$ por lo tanto para toda i existe N tal que $m > N$ entonces $\alpha_i^m = \alpha_i$.

Análogamente si $\beta_m \to \beta$ entonces $\beta_i^m \to \beta_i$ por lo tanto para toda i $\beta_i^m = \beta_i$ para m suficientemente grande. Con lo que

$$\alpha_i^m \beta_i^m \to \alpha_i \beta_i$$

por lo tanto

$$\alpha_m \beta_m \to \alpha\beta$$

Este grupo tiene una medida de Haar finita tal que la medida del grupo es 1. [3] y [6]

Afirmación.

Para α en $\mathcal{C}$ las series $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j$ son convergentes en F y son de Cauchy.

Demostración.

Se sabe que la sucesión de seminormas p_K es creciente, $p_K \leq p_{K+1}$

Si existe K tal que $s, t \geq K$ entonces

$$p_K\Big(\sum_{j=s}^{t} \alpha_j f_j \Big) \leq 2\sum_{j=s}^{t} p_K(f_j) \leq$$

$$\leq 2\sum_{j=s}^{t} p_j(f_j) < \epsilon \quad \text{para } s, t > N$$

ya que por hipótesis $\sum_{m=1}^{\infty} p_m(f) < \infty$

Por lo tanto considere los conjuntos

$$\mathcal{C}_m = \{ \alpha \in \mathcal{C} : \pi\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k\Big) \leq m \}$$

entonces $\mathcal{C}$ se puede expresar como

$$\mathcal{C} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}_m$$

ya que cualquier α en $\mathcal{C}$ es un elemento de F y $\pi(\sum \alpha_k f_k) \leq m$, donde m es elemento de los enteros.

Como todos los conjuntos $\mathcal{C}_m$ son medibles por el axioma de Solovay, $\mu(\mathcal{C})$ mayor que cero implica que $\mu(\mathcal{C}_{m_0})>0$ para al menos un m_0.

Entonces por el corolario [6] el conjunto

$$\mathcal{C}_{m_0}\mathcal{C}_{m_0}^{-1}=\mathcal{C}_{m_0}^{2}=\{\alpha\cdot\beta:\alpha,\beta\in\mathcal{C}_{m_0}\}$$

tiene una vecindad de la identidad $\alpha=0,00..$ por lo tanto contiene una bola $\{x:|x|\leq\epsilon\}$ pensando a x como $x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i/3^i$

Por lo tanto $e_k=0,0\ldots\underset{k\text{-ésima}}{2}0$ elemento de $\mathcal{C}$ corresponde a $x=\frac{2}{3^k}$

Si $k\geq N$ entonces $2/3^k<\epsilon$.

Entonces e_k esta en $\mathcal{C}_{m_0}^2$ cuando k es suficientemente grande con $\alpha^{(k)},\beta^{(k)}$ en $\mathcal{C}_{m_0}$ tales que $e_k=\alpha^{(k)}\beta^{(k)}$

Por la regla de multiplicación de $\mathcal{C}$ $\alpha^{(k)}$ y $\beta^{(k)}$ difieren solamente en la kesima componente lo que implica que

$$\pm e_k=\alpha^{(k)}-\beta^{(k)}$$

por lo tanto

$$\pm f_K - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(K)} f_j - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{(K)} f_j$$

y como $\alpha^{(K)}, \beta^{(K)}$ son elementos de ℓ_{m_0}

$$\Pi(f_K) \leq \Pi\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(K)} f_j\Big) + \Pi\Big(\sum \beta_j^{(K)} f_j\Big)$$

$$\leq 2 m_0 \quad \text{para toda } K > N$$

que contradice lo supuesto.

Las consecuencias de este resultado son las siguientes:

i) Una funcional lineal τ definida en E con semi-normas naturales $P = \{p\}$ es continuo si

$$\exists \; C > 0, \; p \in P : |\tau(f)| \leq C p(f)$$

para toda f en E.

ii) Un operador lineal T de un espacio E con semi-normas naturales $P = \{p\}$ a un espacio F con semi-normas naturales $Q = \{q\}$ es continuo si

$$\forall \, q \in Q, \; \exists C > 0, \; p \in P : q(Tf) \leq C p(f)$$

para toda f en E.

Ahora bien si se supone el axioma de elección se tiene que no toda funcional es continua.

Ejemplo:

Sea E un espacio de Banach, este espacio en particular es un espacio de Fréchet.

Por el lema de Zorn existe una base $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de E

Sea $\{e_{\alpha_n}\} \subset \{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$

y defina una función $f: E \to \mathbb{R}$ en la base tal que

$$f(e_{\alpha_n}) = \begin{cases} n & \text{si } \alpha = \alpha_n \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha_n \end{cases}$$

Suponga que $\| e_\alpha \| = 1$

Por demostrar que f es no continua.

Sea $x_n = \frac{1}{n} e_{\alpha_n}$

entonces $\| x_n \| = \frac{1}{n} \| e_{\alpha_n} \| = \frac{1}{n}$

y $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

por lo tanto $f(x_n) = f\left(\frac{1}{n} e_{\alpha_n}\right)$

$$= \frac{1}{n} f(e_{\alpha_n})$$

y $\| f(x_n) \| = 1$

pero $f(x_n) \not\to 0$

Conclusiones.

Si E es un buen espacio de dimensión infinita, y se supone el axioma de Solovay entonces

i) toda funcional es continua

ii) todo operador lineal con dominio en E es continuo.

Suponiendo el axioma de elección

i) no toda funcional es continua

En el caso en que el espacio E tenga dimensión finita, donde E es topologicamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$, que una función lineal f de E en $\mathbb{K}$ sea continua es independiente del axioma que se elija.

Por último del teorema de Hahn-Banach (forma analítica):

" Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, F un subespacio vectorial, p una seminorma en E y $f: F \to \mathbb{K}$ una funcional lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo x en F. Entonces existe $\tilde{f}$ una extensión de f tal que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$$

para todo x en E" [1]. Se desprende el siguiente teorema:

"Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{K}$, F un subespacio vectorial de E, y f de F en $\mathbb{K}$ lineal y continua. Entonces existe una extensión $\tilde{f}$ de f que es lineal y continua" [1].

Este teorema si se supone el axioma de Solovay y es E un buen espacio, pierde sentido ya que cualquier extensión lineal en dicho espacio resulta ser una extensión continua.

Bibliografia.

1.- Bosch Giral Carlos y Fernández Bermejo Emiliano, Analisis Funcional I.

2.- De Vito L. Carl, Functional Analysis, Academic Press (1978).

3.- Garnir H. G., De Wilde M, Schmets J., Analyse Fonctionelle, Tome III, Espaces Fonctionnels Usuels, Birkhauser Verlag (1973).

4- Garnir H. G. Solovay's Axiom and Functional Analysis (Articulo).

5.- Grabinsky Steider Guillermo, Notas Análisis Matemático III (1985).

6.- Hewitt E. and Ross K. A., Abstract Harmonic Analysis I, 2nd edition, Springer Verlag (1979).

7.- Jech Thomas and Hrbacek Karel, Introduction to Set Theory, Marcel Dekker Inc.

8.- Pervin J. William, Foundations of General Topology, Academic Press (1965).

9.- Robinson R. M., On the Decomposition of Spheres, Fund. Math. 6, (1947), pags. 246 - 260.