

CÁLCULO DIFERENCIAL  
E INTEGRAL



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Facultad de Ciencias

*De los Fluidos a los Teoremas  
de  
Green, Stokes y Gauss*

UNA CONSTRUCCIÓN INTUITIVA

*Efraín Juárez González*

*Tesis Profesional para Recibir el Título  
de Matemático*

*AGOSTO - 1985.*



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Prólogo

En este trabajo, se obtienen los teoremas de Green, Stokes y Gauss, teniendo como objetivos principales, primero, mostrar el proceso intuitivo a través del cual se alcanza la formulación de dichos teoremas y, segundo, hallar el significado físico y geométrico de los mismos.

Aunque estos teoremas surgieron al realizar investigaciones en electricidad y magnetismo, aquí son motivados por los fenómenos que se presentan en los fluidos, pues estos son más observables y por tanto, menos abstractos que los del electromagnetismo.

Inicio con el estudio de las vorticidades, ya que ligada a estas surge el concepto de rotacional que luego, generalizado a cualquier campo vectorial, aparecerá en los teoremas de Green y de Stokes.

Seguidamente, se procede a desarrollar la integral de un campo de velocidades sobre una curva cerrada, la que motivada por el movimiento circular de un líquido, es llamada "circulación".

Sólo después de esto, se desarrollan los teoremas, primero el de Green y luego el de Stokes.

Se continúa, dando el significado de la integral de superficie y finalmente se expone el teorema de Gauss, siendo en este último en el que aparece el concepto de la divergencia de un campo vectorial.

Debo advertir que durante toda la exposición, siempre se hace referencia a flujos estacionarios, es decir, a aquellos cuyo campo de velocidades es independiente del tiempo.

La intención al escribir esta tesis, es de que - luego de ser puesta a consideración de alumnos y profesores de Cálculo, tomando en cuenta sus observaciones y sugerencias, sea publicada como material de apoyo al curso de Cálculo IV.

Agradezco a los profesores, Francisco Struck, - por la dirección de este trabajo, y Santiago López de Medrano, Guillermo Gómez, Emilio Jesús Flores y Jefferson King por la revisión del borrador.

Efrain Juárez González

Ciudad Universitaria, D.F., agosto de 1985.

# Contenido

— PRÓLOGO	v
— ANTECEDENTES	1
Los Vórtices	1
EL Campo de Velocidades	4
EL Campo de Velocidades del Movimiento Circular	6
Relación entre las Vorticidades y la Magnitud $\nabla \times \vec{V}$	7
— LA CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL DE VELOCIDADES	9
La Circulación en Curvas con Esquinas	25
Interpretación de la Circulación en Casos Especiales	27
— EL TEOREMA DE GREEN	30
Presentación Formal del Teorema de Green	38
Importancia de las Hipótesis	40
Aplicación	46
— EL TEOREMA DE STOKES	47
EL Teorema de Stokes para Gráficas	62
EL Teorema de Stokes para Superficies Parametrizadas	63
Interpretación Física	63
Significado del Rotacional	66
Consecuencias del Teorema de Stokes	68
— EL TEOREMA DE GAUSS	73
La Integral de Superficie	73
Presentación Formal del Teorema de Gauss	81
Significado de la Divergencia	82

El Teorema de la Divergencia en el Plano	84
Significado de $\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} dl$	84
Presentación Formal del Teorema de la Divergencia en el Plano	87
— CONCLUSIONES	88
— BIBLIOGRAFÍA	89

# ANTECEDENTES

## LOS VÓRTICES

Todos hemos visto alguna vez, cómo se mueve el agua cuando se vacía un depósito por un agujero hecho en su base, y decimos que se forma un remolino.

Ahora bien, al movimiento de rotación del fluido, que se produce en el centro del remolino, se le llama vórtice, FIG. 1.

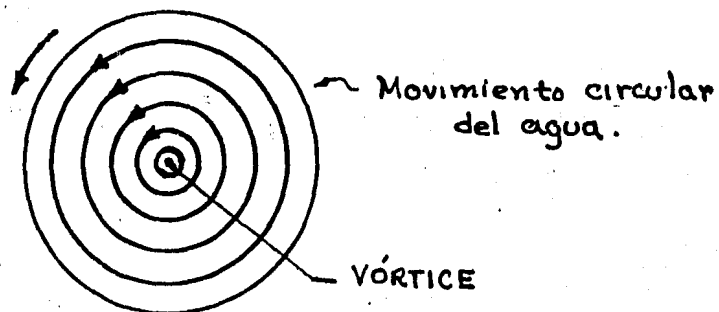


FIG. 1.

Otro caso en que se presenta un vórtice, es cuando disolvemos el azúcar en nuestra taza de café. FIG. 2

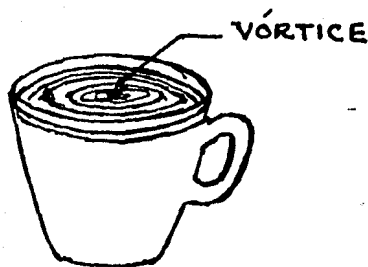


FIG. 2

Recalcamos pues, que los vórtices se producen en la vecindad de algún punto. Así, se presentarán en la vecindad del orificio o en la vecindad del punto en que hagamos centro al disolver el azúcar.

Los vórtices aparecen en forma, digamos natural, cuando el fluido se mueve en forma desordenada o turbulenta como se dice en Física.

A continuación, se muestran algunos vórtices que se forman en una corriente de agua y en las corrientes de aire en torno al ala de un avión.

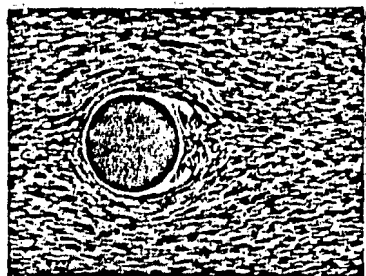


FIG. 3a. - Formación de dos vórtices

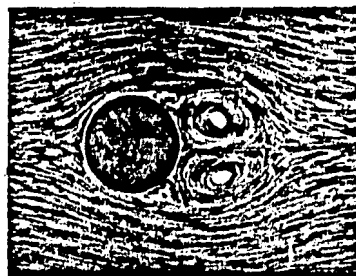


FIG. 3b. - Los remolinos aumentan de tamaño

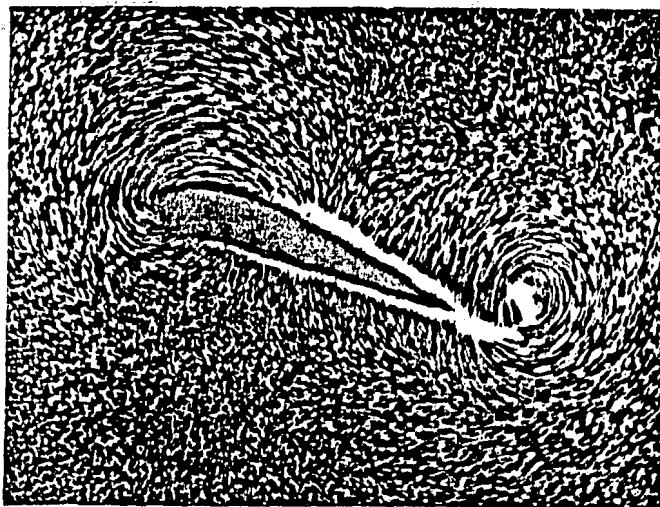


FIG. 4a. - Generación de un gran vórtice en torno a un modelo de ala de avión

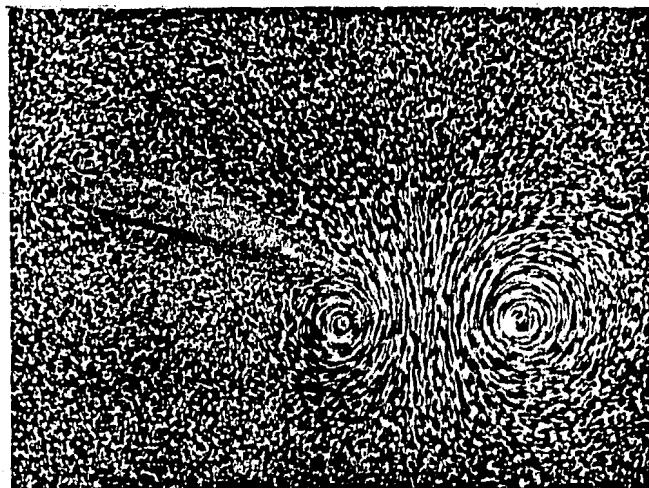


FIG. 4b. - AL dejar de moverse el modelo, se tiene el presente fenómeno



Para entender un poco más a los vórtices, tendremos que recordar algunas cuestiones relativas al movimiento circular.

Si se tiene una partícula  $m$  que gira en torno a un punto  $P$ , Fig. 5, y queremos conocer el ángulo que describe el radio

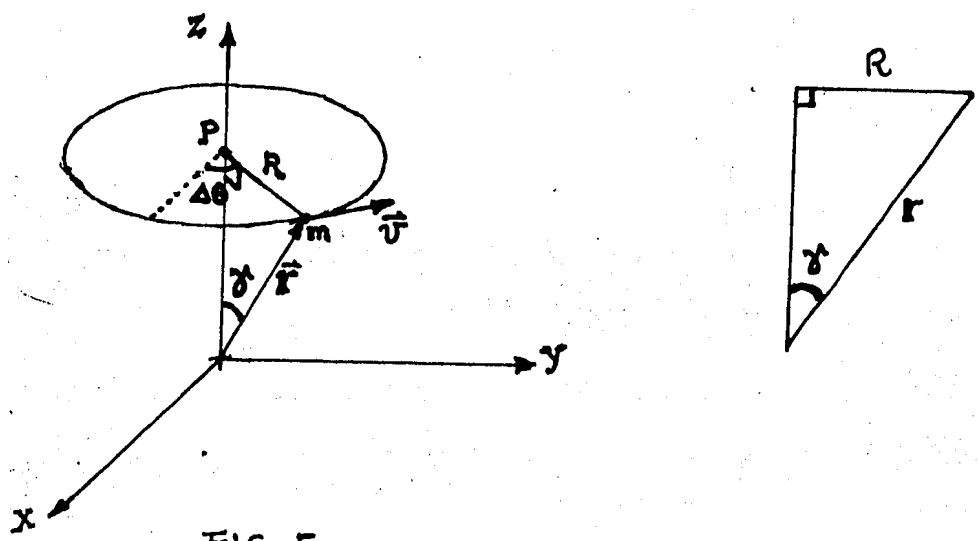


FIG. 5

vector  $R$  de  $m$  en la unidad de tiempo, nos fijamos en la velocidad media que será  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  y entonces la velocidad instantánea es  $\frac{d\theta}{dt}$  a esta cantidad, se le conoce como la magnitud de la velocidad angular y se acostumbra representarla con la letra  $\omega$  (omega).

Por otra parte, la magnitud de la velocidad tangencial en el movimiento circular, es la distancia  $\Delta l$  recorrida en la unidad de tiempo, esto es  $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ , por lo que la velocidad tangencial instantánea, tiene por magnitud  $\frac{dl}{dt}$ .

Ahora, ya que el ángulo  $\Delta\theta$  en radianes se define por  $\Delta\theta = \frac{\Delta l}{R}$  donde  $\Delta l$  es la longitud del arco y  $R$  es el radio, se tiene que  $\Delta l = R\Delta\theta$ , por lo que la magnitud de la velocidad tangencial  $v$  puede reescribirse como sigue:

$$v = \frac{dl}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega.$$

de la figura 5, se tiene que  $R = r \text{ Sen } \theta$

y de aquí que  $v = \omega r \text{ Sen } \theta$

¡ y esta magnitud se parece a la de un producto cruz de vectores! . Pues si  $\omega$  fuese un vector, tendríamos que:

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|$$

Pero como conocemos la dirección del vector  $\vec{v}$  y del vector  $\vec{r}$ , podemos asignarle una dirección a  $\omega$  de tal manera que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

y por la regla de la mano derecha, se obtiene que la dirección que se le debe asignar a  $\omega$ , es de acuerdo a la figura 6, hacia arriba, en la dirección del eje z.

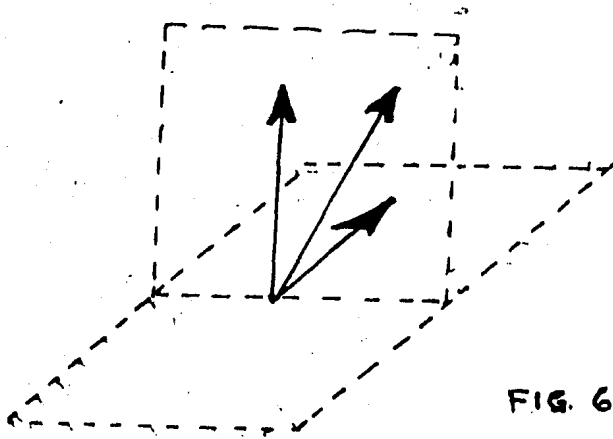
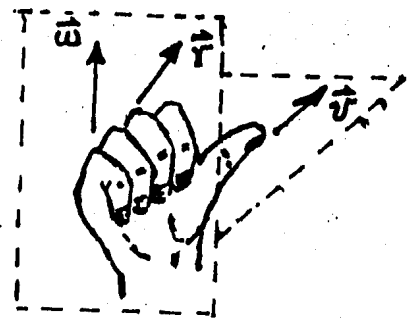


FIG. 6



y ahora sí, tanto en magnitud como en dirección:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Esto es, en un movimiento circular, la velocidad  $\vec{v}$  es igual al producto "cruz" de la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y el vector de posición  $\vec{r}$  del punto considerado.

Tengase presente que nada se mueve en el sentido en que señala el vector  $\vec{\omega}$  ya que su sentido ha sido determinado por los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{r}$  y esto con el único fin de expresar a  $\vec{v}$  en forma vectorial, como el producto cruz de aquellos.

### EL CAMPO DE VELOCIDADES

Si a cada punto del líquido en movimiento, le asignamos su vector velocidad, el cual será tangente en cada punto a las trayectorias respectivas, para el caso de un movimiento circular se tendría la figura siguiente:

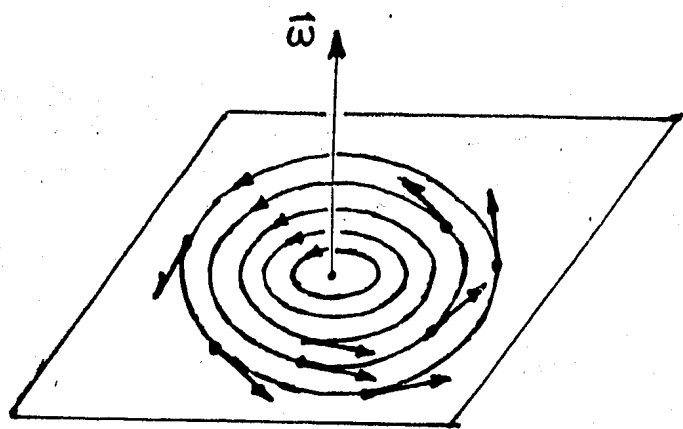


FIG. 7. El campo de velocidades de un movimiento circular.

Para poder referirnos a algún punto y a su velocidad, parece conveniente ubicar el plano de movimiento del fluido, en un sistema de coordenadas  $XY$ , de manera que la dirección del vector  $\vec{\omega}$  coincida con la dirección del eje  $Z$  en el sistema  $XYZ$  como se muestra en la figura 8.

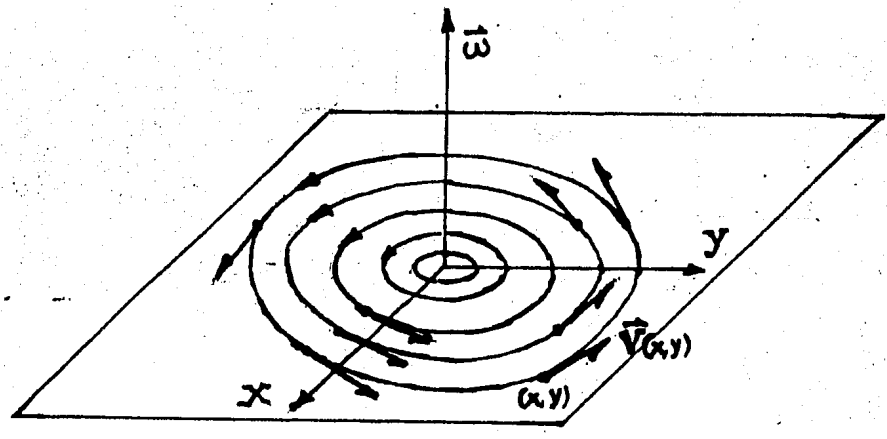


FIG. 8.

Ahora sí, podemos hablar de la velocidad  $\vec{V}(x, y)$  en el punto  $(x, y)$  para cualquier punto  $(x, y)$  del fluido. A este conjunto de velocidades  $\vec{V}(x, y)$  asignadas a cada punto  $(x, y)$ , le llamaremos campo de velocidades.

Veamos dos puntos del fluido, muy cercanos entre sí, denotémoslos como  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $Q = (x, y)$ , si ocurre que el vector velocidad  $\vec{V}$  tiene una variación muy pequeña de un punto al otro, esto es, si los vectores  $\vec{V}(P_0)$  y  $\vec{V}(Q)$  son muy parecidos tanto en magnitud como en dirección; y si esto sucede para cualquier punto  $P_0$ , se dice que el campo de velocidades es un campo vec-

-torial continuo.

Para precisar esta idea, diremos que el campo vectorial  $\vec{v}(x, y)$  es continuo si:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $\|Q - P_0\| < \delta$  entonces:  
 $\|\vec{v}(Q) - \vec{v}(P_0)\| < \epsilon$  y esto para todo punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  en el dominio del campo  $\vec{v}$ .

En lo sucesivo al referirnos a un campo vectorial, lo consideraremos continuo.

### EL CAMPO DE VELOCIDADES DEL MOVIMIENTO CIRCULAR EN UN PLANO.

Para el movimiento circular en un plano, se tiene que la velocidad angular  $\vec{\omega}$  esta en la dirección del eje  $z$ , por lo que  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ . El vector de posición  $\vec{r}$  de los puntos  $(x, y)$  del plano puede darse como un vector de  $\mathbb{R}^3$  con componente  $z$  igual a cero, es decir  $\vec{r} = (x, y, 0)$ .

Entonces calculando  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{i}\omega y + \hat{j}\omega x = (-\omega y, \omega x)$$

se obtiene que el campo de velocidades para un fluido con movimiento circular en un plano, es:

$$\vec{v}(x, y) = (-\omega y, \omega x) = \omega(-y, x)$$

Observese que la velocidad  $\vec{v}$  tiene la dirección del vector  $(-y, x)$  el cual es ortogonal al vector  $(x, y)$ , así  $\vec{v}(x, y)$  es tangente a las trayectorias

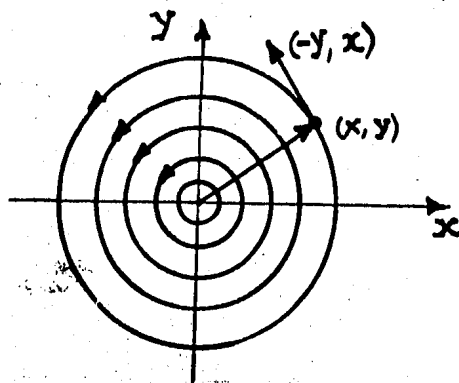


FIG. 9

## RELACIÓN ENTRE LAS VORTICIDADES Y LA MAGNITUD $\nabla \times \vec{V}$ .

Sabemos ya, que el campo de velocidades  $\vec{V}(x, y)$  para el movimiento circular en un plano, está dado como:

$$\vec{V}(x, y) = (V_x, V_y) = (-\omega y, \omega x)$$

Esto se puede expresar en  $\mathbb{R}^3$  con componente  $z=0$ , es decir:

$$(V_x, V_y, 0).$$

Ahora calculemos  $\nabla \times \vec{V}$ , donde  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

pero  $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y} = 2\omega$

por tanto  $\nabla \times \vec{V} = 2\omega \hat{k}$

Como en este cálculo están implicadas las derivadas parciales, la cantidad  $\nabla \times \vec{V}$  nos determina un comportamiento local en cada punto del fluido.

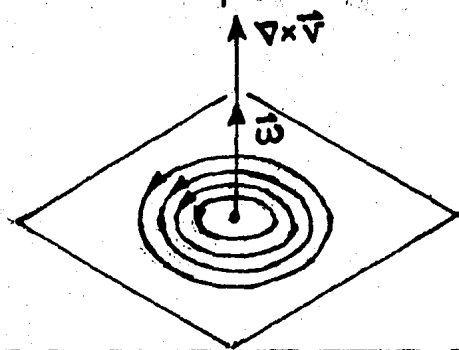


FIG. 10 .. RELACION ENTRE  $\vec{\omega}$  y  $\nabla \times \vec{V}$  EN CADA PUNTO.

Así de la igualdad  $\nabla \times \vec{V} = 2\omega \hat{k} = 2\vec{\omega}$  se tiene que si  $\vec{\omega} \neq 0$  es decir si existen vórtices, entonces  $\nabla \times \vec{V} \neq 0$  y se tendrá un efecto de rotación en la vecindad de cada punto.

Si embargo puede ocurrir que  $\nabla \times \vec{V} \neq 0$  y no existir vorticidades, como es el caso del campo representado en la figura 11.

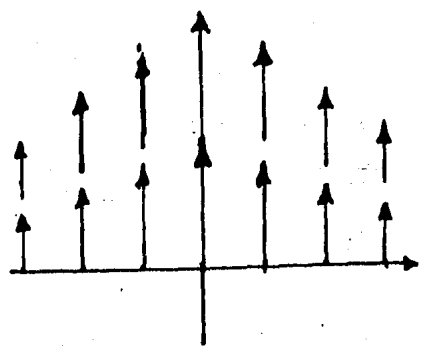


FIG. 11. CAMPO EN EL QUE  $\nabla \times \vec{V} \neq 0$

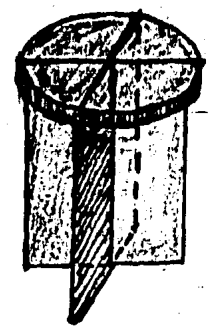


FIG. 12. ASPAS PARA ANALIZAR SI EXISTEN O NO ROTACIONES.

En un campo de velocidades así, unas aspas, Fig. 12, que se movieran junto con el fluido, girarían, debido a que las velocidades varían sobre el eje X, produciendo un efecto de torsión sobre las aspas, el cual las hace rotar, Fig. 13.

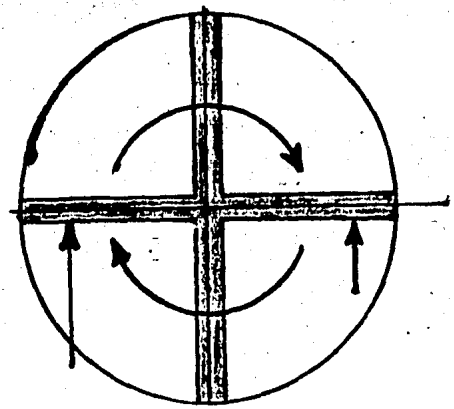


FIG. 13. ASPAS GIRANDO

De cualquier manera, la magnitud  $\nabla \times \vec{V}$  está relacionada con rotaciones. Por lo que si se conoce el campo de velocidades  $\vec{V}(x,y)$ , uno puede saber si hay o no rotaciones, o mejor dicho, si estas se producen o no en el líquido; solo con calcular  $\nabla \times \vec{V}$ . Un buen nombre para esta cantidad que nos recuerde la relación con las rotaciones, es el de rotacional del campo  $\vec{V}$ , que abreviaremos como  $\text{rot } \vec{V}$ , es decir:

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Entonces, localmente  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$ , esto significa que si un elemento de fluido de radio menor que  $\epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , de pronto se congelara y al mismo tiempo desapareciera el resto

del fluido, este elemento sólido rotaría con la velocidad angular  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$ .

## LA CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL DE VELOCIDADES

Consideremos por conveniencia, un fluido con movimiento circular y supongamos que de alguna forma podemos trazar sobre él una curva cerrada que permanezca fija, como se muestra en la fig. 14.

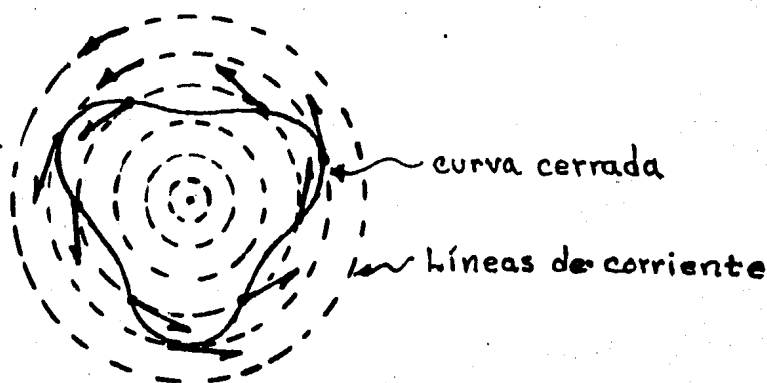


FIG. 14.

Estamos interesados en conocer el flujo tangencial del campo vectorial  $\vec{V}(x,y)$  a lo largo de la curva.

En la figura 14, se aprecia que los vectores velocidad, los cuales son tangentes a las líneas de corriente en cada punto, en general no son tangentes a la curva que se ha trazado, esto se observa mejor en la figura 15 en la que se ha hecho abstracción de las líneas de corriente.

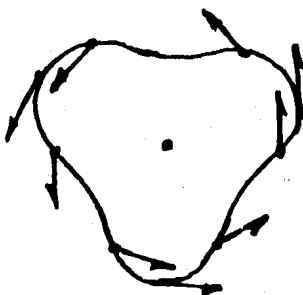


Fig. 15

La curva anterior, se trazó en torno al centro del movimiento, ahora veamos una curva cerrada que no encierra al centro. Fig. 16.



Fig. 16

CAMPO VECTORIAL SOBRE LA CURVA.

Para poder determinar el flujo tangencial del campo vectorial  $\vec{V}$  sobre una curva cerrada cualquiera, necesitamos saber cual es la contribución del vector  $\vec{V}(x_0, y_0)$ , en cada punto  $(x_0, y_0)$  de la curva, a dicho flujo.

Con el fin de encontrar la componente de  $\vec{V}(x_0, y_0)$  que influye en el flujo sobre la curva, consideremos el movimiento en un plano aunque la conclusión será válida para el movimiento en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

En la figura 17, se muestra un punto que en su movimiento, describe una curva.

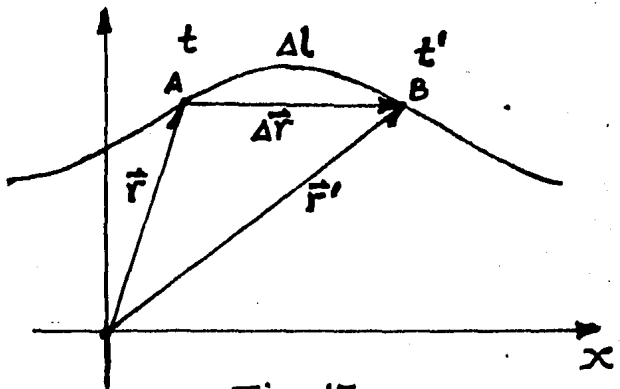


Fig. 17

En esta curva se muestran dos posiciones del punto, la posición A que es ocupada en el tiempo t, dada por el vector de posición  $\vec{r}$ , y la posición B ocupada en el tiempo t', dada por el vector  $\vec{r}'$ .



La velocidad media esta definida en física como:

$$\vec{v}_m = \frac{\text{DESPLAZAMIENTO}}{\text{TIEMPO}}$$

y el desplazamiento de la posición A a la posición B esta dado por la diferencia  $\vec{r}' - \vec{r}$  de los vectores de posición respectivos, representada en la figura 17 por  $\Delta\vec{r}$  que siendo una cantidad vectorial, nos determina además de la magnitud, el sentido del desplazamiento; entonces la velocidad media tiene la expresión:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

donde la cantidad escalar  $\Delta t$  es el tiempo requerido por el punto para trasladarse de A a B, es decir  $\Delta t = t' - t$ . Del hecho de que siempre  $\Delta t$  es positivo, se concluye que la velocidad media tiene el mismo sentido que el del desplazamiento  $\Delta\vec{r}$  como se ilustra en la figura 18.

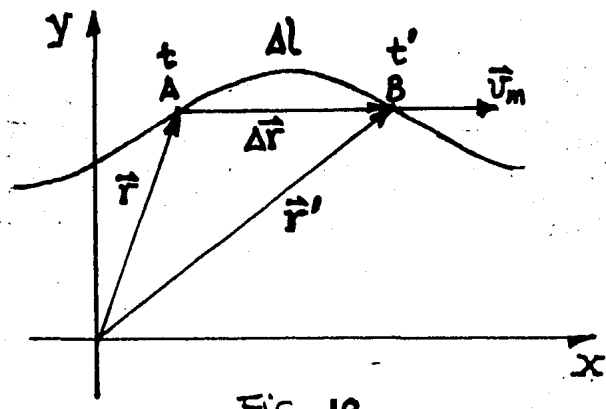


FIG. 18

Ahora bien, lo que nos interesa conocer es cómo es la velocidad media  $\vec{v}_m$  cuando el intervalo  $\Delta t$  se aproxima a cero.

La nueva velocidad  $\vec{v}$  que resulta de este proceso, será la velocidad instantánea en el punto A de acuerdo a nuestra figura de referencia; Así:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Mostraremos geométricamente, que esta velocidad  $\vec{v}$  es tangente a la curva en el punto A.

Al hacerse  $\Delta t$  cada vez más pequeño, el punto B se aproxima cada vez más al punto A, teniéndose las posiciones sucesivas  $B', B'', \dots$  etc.

- como se aprecia en la figura 19, La posición del vector  $\vec{v}_M$ , que como ya vimos tiene la dirección del desplazamiento, va cambiando a medida que el punto B se acerca a A hasta llegar a ser tangente a la curva cuando se toma el límite  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ .

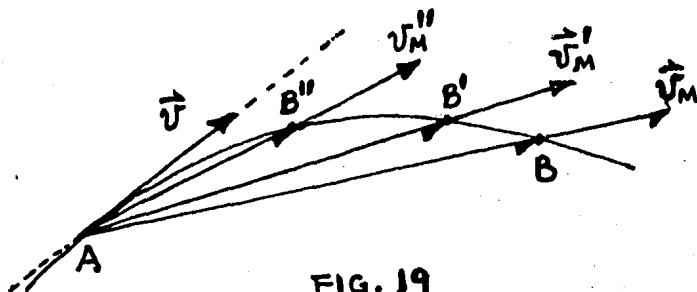


FIG. 19

De aquí concluimos pues, que la curva recorrida por un punto en movimiento, es generada debido a velocidades que son tangentes a la curva en cada uno de sus puntos.

Volviendo a nuestro problema, tenemos que las velocidades que contribuyen al flujo a lo largo de la curva, son velocidades tangentes a ella en cada punto.

Regresando a la cuestión del fluido, sabemos que el campo de velocidades asigna a cada punto del fluido la velocidad en ese punto, para encontrar el flujo tangencial sobre la curva, nos fijamos únicamente en las velocidades asignadas por el campo a los puntos del fluido coincidentes con los puntos de la curva; velocidades que como se ha mostrado en las figuras 15 y 16 no son tangentes a la curva, por lo que estas velocidades no son directamente las que nos interesan, sino las componentes tangenciales a la curva, de las velocidades dadas por el campo, como se ilustra en la figura 20.

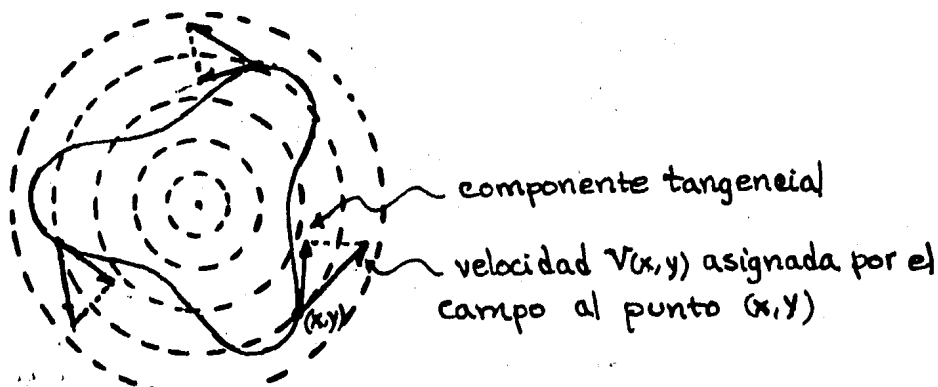


Fig. 20

Se nos presentan aquí dos cuestiones a resolver, la primera es cómo hallar para un punto  $(x, y)$  cualquiera de la curva, la componente tangencial de la velocidad  $\vec{v}(x, y)$ . La segunda cuestión - consiste en cómo calcular la magnitud total de las componentes tangenciales a lo largo de toda la curva.

La primera se resuelve recordando la operación vectorial conocida como producto escalar o producto "punto" y, especialmente la igualdad  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$  para dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  formando un ángulo  $\theta$  como se muestra en la figura 21.

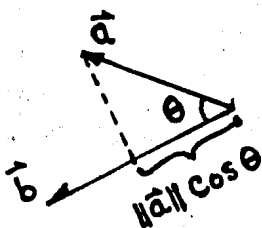


Fig. 21

En esta figura se aprecia que  $\|\vec{a}\| \cos \theta$  es la componente dirigida, del vector  $\vec{a}$  en la dirección del vector  $\vec{b}$  y entonces  $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \theta$  es  $\|\vec{b}\|$  veces dicha componente. Debemos tener presente que lo que se obtiene es una cantidad escalar.

Nos interesa conocer cuanto es "una vez la componente del vector  $\vec{a}$  en la dirección del vector  $\vec{b}$ ", por lo que se debe tomar a  $\|\vec{b}\| = 1$  ya que aquí es  $\|\vec{b}\|$  quien nos indica el número de veces que se tiene la componente referida.

Es decir si  $\vec{b}$  es un vector unitario, entonces:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cos \theta$$

obteniendo así la componente de  $\vec{a}$  en la dirección de  $\vec{b}$ .

Aplicando lo anterior a nuestro problema, lo expresamos en la forma siguiente: queremos conocer la componente de  $\vec{v}(x, y)$  en la dirección de la tangente a la curva en el punto  $(x, y)$ . Para lo cual, trazamos un vector unitario  $\vec{T}$  sobre la recta tangente a la curva en  $(x, y)$ , Fig. 22, luego efectuando el producto punto  $\vec{v} \cdot \vec{T}$  del vector  $\vec{v}(x, y)$  del campo y el vector unitario tangencial  $\vec{T}$ , tendremos como resultado, la componente tangencial de  $\vec{v}(x, y)$  en el punto  $(x, y)$  de la curva, quedando así resuelto el problema.

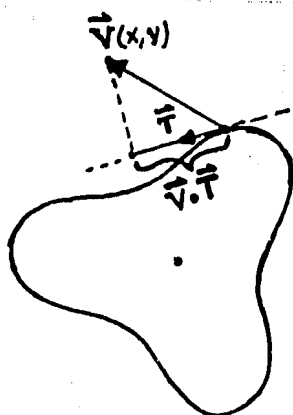


Fig. 22

Para resolver la segunda cuestión, marquemos sobre la curva, los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_N$  tales que la dividan en  $N$  arcos  $C_i$  todos de igual longitud  $\Delta l_i$ ; en este caso en que la curva es cerrada, se toma  $P_0 = P_N$ . Fig. 23.

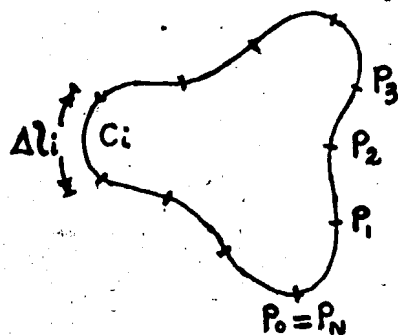


Fig. 23

Así conforme  $N$  aumenta, la longitud  $\Delta l_i$  de cada arco  $C_i$  se hace pequeña y ya que el campo de velocidades es continuo, la componente tangencial  $\vec{v} \cdot \vec{T}$  es aproximadamente constante para los puntos en el arco  $C_i$ . Haciendo las sumas:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(x_i, y_i) \cdot \vec{T}(x_i, y_i) \Delta l_i$$

donde  $(x_i, y_i)$  es algún punto sobre el arco  $C_i$ .

Al tomar el límite de estas sumas cuando  $N \rightarrow \infty$  y siempre que los arcos  $C_i$  sean de igual longitud para cada  $N$ , obtenemos la integral de la función escalar  $\vec{v}(x, y) \cdot \vec{T}(x, y)$  a lo largo de la curva; es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_C \vec{v}(x, y) \cdot \vec{T}(x, y) dl = \int_C \vec{v} \cdot \vec{T} dl$$

obteniendo con esta integral, el total de las componentes tangenciales  $\vec{v} \cdot \vec{T}$  a lo largo de toda la curva  $C$ . Este resultado es válido para cualquier curva, no necesariamente cerrada.

Para mayor claridad, cuando se trata de una curva cerrada, se acostumbra representar esta integral en la forma siguiente:

$$\oint_C \vec{v} \cdot \vec{T} dl$$

donde el círculo indica que se está integrando sobre una curva cerrada y la flecha en él, indica el sentido en que se recorre la curva.

Una expresión más concisa se obtiene si en las sumatorias la cantidad vectorial  $\vec{T} \Delta l_i$  se representa por  $\vec{\Delta l}_i$  que es un vector con magnitud  $\Delta l_i$  y en el sentido del vector unitario  $\vec{T}$ , pues así, al tomar el límite nos quedará  $d\vec{l}$  en lugar de  $\vec{T} dl$ ; simbólicamente:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(x_i, y_i) \cdot \vec{T} \Delta l_i = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(x_i, y_i) \cdot \vec{\Delta l}_i$$

por lo tanto:

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{T} dl = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(x_i, y_i) \cdot \vec{T} \Delta l_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(x_i, y_i) \cdot \vec{\Delta l}_i = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Tenemos entonces, la nueva expresión:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Al valor de esta integral, que como sabemos es el flujo tangencial del campo de velocidades  $\vec{v}(x, y)$  sobre la curva cerrada  $C$ , se le da el nombre de "CIRCULACIÓN" del campo vectorial  $\vec{v}(x, y)$  sobre la curva  $C$ .

Por la forma en que se obtiene la circulación, es claro que cualquiera que sea el campo de velocidades, la expresión  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$  es la circulación de  $\vec{v}(x, y)$  sobre la curva cerrada  $C$ .

Es decir, no importa cómo se mueva el fluido, siempre puede hallarse la integral, a lo largo de la curva, de las componentes tangenciales del campo de velocidades de dicho movimiento.

Así, se puede calcular la circulación para el campo  $\vec{V}(x,y)$  y la curva  $C$  de la figura 24, que correspondería aproximadamente al movimiento en un río tranquilo.

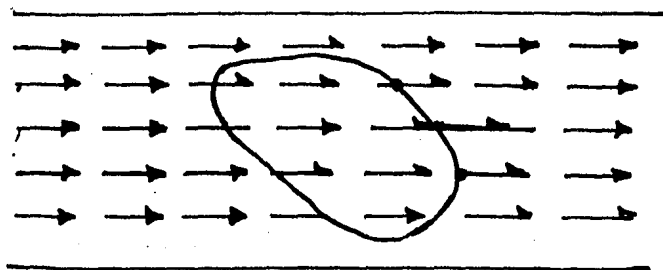


FIG. 24

### DESCRIPCIÓN DE CURVAS.

En todo el desarrollo seguido para obtener la expresión de la circulación, se ha supuesto que los puntos de la curva son conocidos, pero aún no sabemos cómo especificarlos para diferenciar los de los que no pertenecen a la curva y mientras no se haga esto, no podremos calcular la circulación del campo  $\vec{V}$ .

Una forma de identificar estos puntos, es a través de una función  $\vec{\sigma}$  que tenga como valores a los puntos de la curva.

Como la curva está en el plano, cada punto de ella es un punto en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que sus puntos son de la forma  $(x,y)$  y, ya que estos puntos deben ser los valores de la función  $\vec{\sigma}$ , entonces ésta deberá tener dos componentes en sus valores, es decir será una función vectorial.

¿Cuál deberá ser el dominio de tal función? Para dar respuesta a esto, veamos qué es lo que hace dicha función; toma puntos de algún dominio y los va "formando" en  $\mathbb{R}^2$  describiendo así la curva; entonces es natural tomar como dominio un segmento de recta  $[a, b]$  al cual  $\vec{\sigma}$  le cambia su longitud y lo curva, por lo que  $\vec{\sigma}$  es una función vectorial con dominio  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Simbólicamente:

$$\vec{\sigma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Siendo  $t$  la variable que corre sobre  $[a, b]$ , se tiene que  $\vec{\sigma}(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$  y como cada uno de estos valores vectoriales debe determinarnos algún punto  $(x, y)$  de la curva, establecemos la igualdad  $(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = (x, y)$

es decir  $\sigma_1(t) = x$  y  $\sigma_2(t) = y$   
 donde  $\sigma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Así, para los puntos de la curva,  $\sigma_1$  nos dice cómo varían las abscisas  $x$  en función de  $t$  y  $\sigma_2$  nos determina las ordenadas en función de  $t$ .

Cuando se trata de una curva cerrada,  $\vec{\sigma}$  manda los puntos  $t=a$  y  $t=b$  al mismo punto sobre la curva, o sea:

$$\vec{\sigma}(a) = \vec{\sigma}(b)$$

La descripción de una curva mediante la función  $\vec{\sigma}$  se ilustrará a través de un ejemplo con una curva cerrada:

Una forma de describir a la elipse centrada en el origen con semi-eje mayor 3 y semi-eje menor 2 es por la función  $\vec{\sigma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como:

$$\vec{\sigma}(t) = (3 \cos t, 2 \sin t)$$

Obteniéndose la siguiente tabulación:

$t \in [0, 2\pi]$	$(x, y)$ en la elipse
$t = 0$ -----	$(3, 0)$
$t = \pi/2$ -----	$(0, 2)$
$t = \pi$ -----	$(-3, 0)$
$t = 3/2\pi$ -----	$(0, -2)$
$t = 2\pi$ -----	$(3, 0)$

Observese que por tratarse de una curva cerrada:

$$\vec{\sigma}(0) = (3, 0) = \vec{\sigma}(2\pi)$$

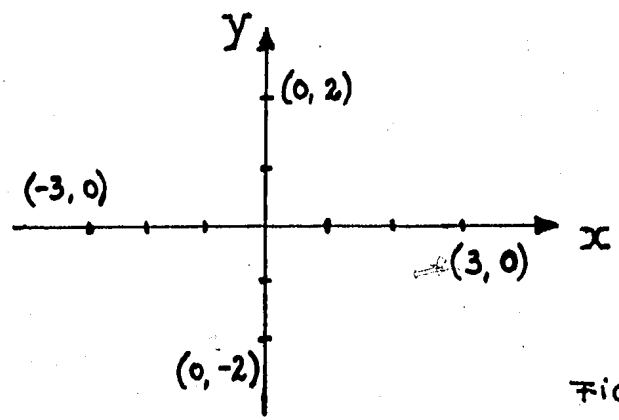


Fig. 25

Observamos que cuando la variable  $t$  avanza de  $0$  a  $2\pi$ , los valores  $\vec{\sigma}(t)$  parten de  $\vec{\sigma}(0) = (3, 0)$  y avanzan en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, estando la curva orientada como se muestra en la Fig. 26.

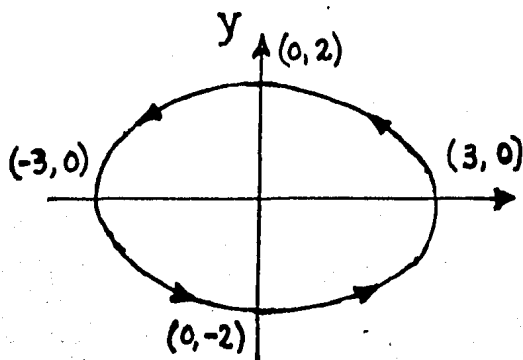


FIG. 26.. Elipse orientada positivamente

En general, cualquier curva con la orientación de la figura 26 - es decir descrita por  $\vec{\sigma}(t)$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj, diremos que tiene orientación positiva y se representará como  $C^+$ .

Otra forma de describir a esta elipse, es mediante la función  $\vec{\sigma}$  teniendo el mismo dominio  $[0, 2\pi]$  pero definida como  $\vec{\sigma}(t) = (3\cos(2\pi-t), 2\text{Sen}(2\pi-t))$ , con esta función se obtiene la tabulación:

$t$	$\vec{\sigma}(t)$
$0$	$(3, 0)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, -2)$
$\pi$	$(-3, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	$(0, 2)$
$2\pi$	$(3, 0)$

Aquí al avanzar  $t$  de  $0$  a  $2\pi$ , los valores  $\vec{\sigma}(t)$  parten de  $(3, 0)$  y avanzan en el sentido de las manecillas del reloj, quedando descrita la elipse como se observa en la fig. 27.

Una curva cualquiera, orientada como la fig. 27, se dice que tiene orientación negativa y se indica por  $C^-$ .



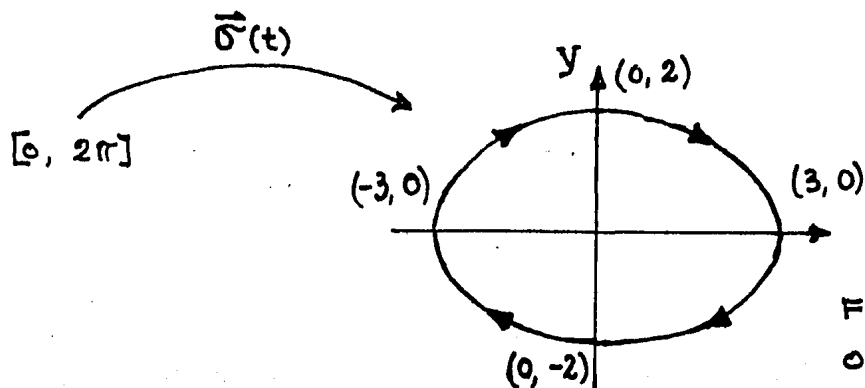


FIG. 27. · Elipse orientada negativamente

La función  $\vec{\sigma}(t)$  debe cumplir ciertos requisitos con tal de que sirva a nuestro fin, que es calcular la circulación.

Como necesitamos los vectores tangentes en cada punto de la curva para poder obtener las componentes del campo, se pedirá que la función  $\vec{\sigma}$  sea diferenciable en  $(a, b)$  pero además se requiere que los vectores tangentes no cambien bruscamente en puntos cercanos, pues si esto ocurre, también la componente tangencial del campo cambiará en forma brusca y no será válida la suposición de que en cada  $\Delta l_i$  tal componente es aproximadamente constante. Por lo que  $\vec{\sigma}$  tiene que ser más que derivable, su derivada debe ser continua; esto se abrevia diciendo que  $\vec{\sigma}$  sea de clase  $C^1$ .

Un ejemplo de curva que cumple las condiciones, se da en la figura 28.

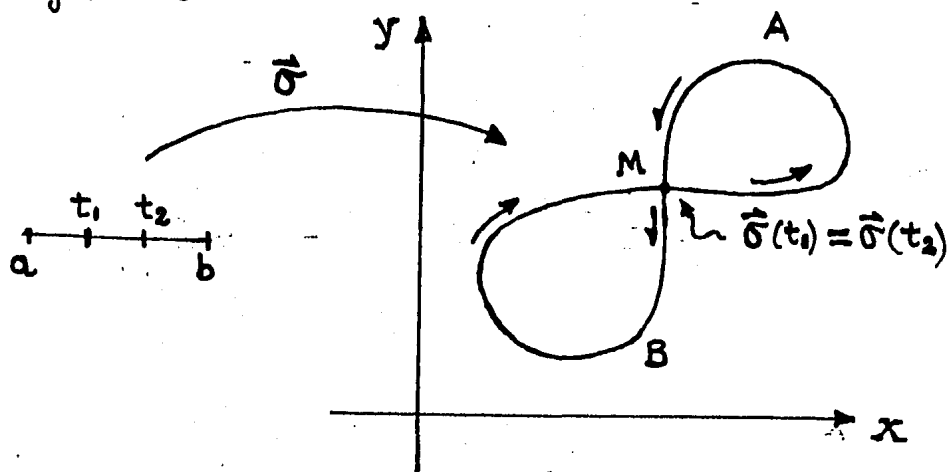


FIG. 28

Como se observa en la figura, en esta clase de curva se tiene un inconveniente, la orientación no está bien definida, pues la parte A está orientada positivamente y la B, negativamente.

Es claro que este problema se presenta debido a que la

curva se corta a sí misma en el punto  $M$ , o en forma más precisa, debido a que existen dos puntos diferentes  $t_1$  y  $t_2$  en el interior del intervalo  $[a, b]$  que bajo la función  $\vec{\sigma}$  determinan al mismo punto  $M$  de la curva. De aquí que para evitar esta ambigüedad, requeriremos que  $\vec{\sigma}$  sea uno a uno en el intervalo semiabierto  $[a, b)$ . Notese que la inyectividad de  $\vec{\sigma}$  será en el intervalo semiabierto y no en  $[a, b]$ , ya que al tratarse de una curva cerrada,  $\vec{\sigma}(a) = \vec{\sigma}(b)$ .

Una curva cerrada que no se corta a sí misma, es decir descrita por una función  $\vec{\sigma}(t)$  uno-a-uno en  $[a, b)$ , la llamaremos curva cerrada simple, ejemplos de estas son todas las curvas cerradas que se han trazado en este trabajo a excepción de la figura 28 que es una curva cerrada no simple.

Ahora sí podemos identificar a los puntos de la curva, pues estos quedan determinados por la función vectorial  $\vec{\sigma}(t)$  de clase  $C^1$  inyectiva en  $[a, b)$  o bien en  $[a, b]$ , según que se trate de una curva cerrada o no.

Si nos fijamos en algún valor  $\vec{\sigma}(t_0)$  donde  $t_0 \in [a, b]$  y luego evaluamos el campo  $\vec{V}$  en  $\vec{\sigma}(t_0)$ , esto es, calculamos  $\vec{V}(\vec{\sigma}(t_0))$ , entonces como  $\vec{\sigma}(t_0) = (x_0, y_0)$  para algún punto  $(x_0, y_0)$  perteneciente a la curva, lo que hallamos es la velocidad asociada por el campo al punto  $(x_0, y_0)$ .

En general al hacer la composición  $\vec{V}(\vec{\sigma}(t))$ , obtenemos el vector velocidad asignado por el campo a cada punto  $\vec{\sigma}(t)$  de la curva.

Por otra parte, como  $\vec{\sigma}$  es de clase  $C^1$ , existe la derivada  $\vec{\sigma}'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t))$  para todo  $t \in (a, b)$ , veamos cómo es geoméricamente este vector  $\vec{\sigma}'(t)$  con respecto a la curva  $\vec{\sigma}(t)$ .

Ya que cada punto de la curva está dado por  $\vec{\sigma}(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$  podemos considerar a cada  $\vec{\sigma}(t)$  como el vector de posición del punto  $(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$  de la curva, en base a esto se tiene la figura 29.

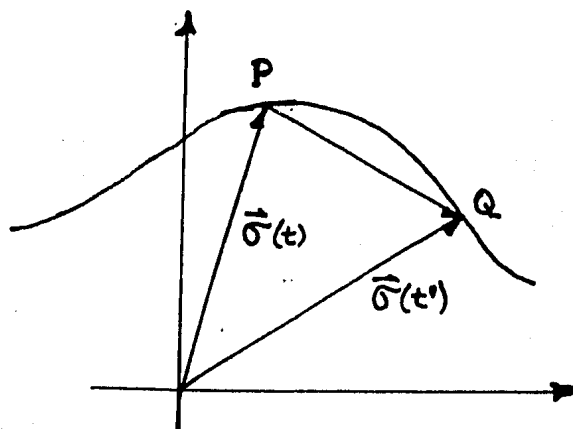


FIG. 29

Relacionando la definición analítica de  $\vec{O}'(t)$  con la figura 29, escribimos la igualdad:

$$\vec{O}'(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{O}(t') - \vec{O}(t)}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{PQ}}{t' - t}$$

conforme  $t'$  se aproxima a  $t$ , el punto  $Q$  se aproxima a  $P$  y en el límite  $\frac{\vec{PQ}}{t' - t}$  toma la dirección de la tangente, FIG. 30

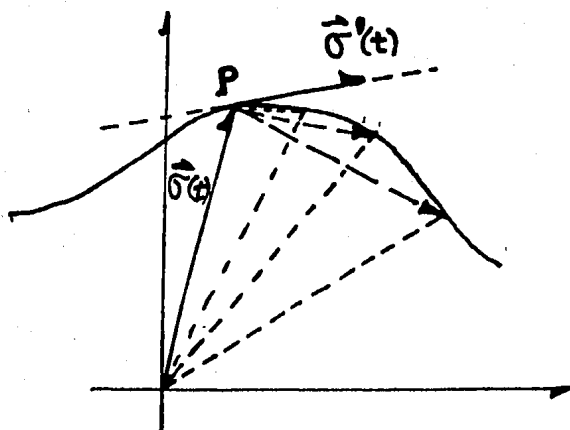


FIG. 30

Así  $\vec{O}'(t)$  está en la dirección de la tangente a la curva en  $\vec{O}(t)$ .

Para determinar el sentido de  $\vec{O}'(t)$ , observemos que  $P = \vec{O}(t)$  y  $Q = \vec{O}(t')$  con  $t < t'$  es decir  $P$  es una posición ocupada antes que  $Q$ , así el vector  $\vec{PQ}$  señala en el sentido en que  $\vec{O}(t)$  avanza describiendo la curva y esto sin importar que tan cerca este  $Q$  de  $P$  por lo que en el límite  $\frac{\vec{PQ}}{t' - t}$  señala en el sentido en que se describe la curva.

Sabiendo que  $\vec{\sigma}'(t)$  es tangente a la curva en  $\vec{\sigma}(t)$ , podemos tomar el vector tangente unitario  $\vec{T}$  como  $\frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}$  el cual por lo anterior, señala en el sentido en que se describe la curva.

Entonces la componente tangencial del valor del campo  $\vec{V}(\vec{\sigma}(t))$  en cada punto  $\vec{\sigma}(t)$  de la curva, estará dada por:

$$\vec{V}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}$$

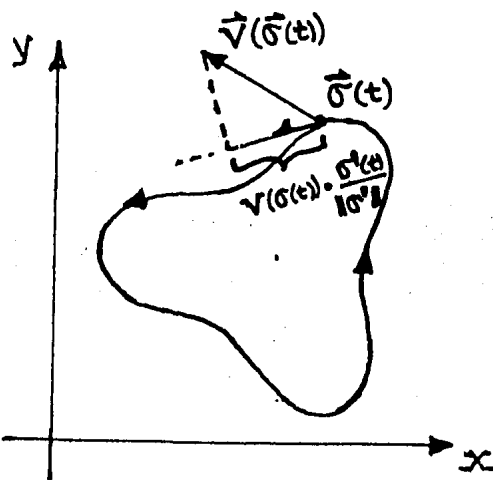


FIG. 31

Solo nos falta hallar la expresión correspondiente a  $dl$ , es decir queremos saber a qué es igual  $dl$  cuando la curva esta dada por la función  $\vec{\sigma}(t)$ .

Para esto, dividamos el intervalo  $[a, b]$  por los puntos  $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , esta partición induce sobre la curva una división en  $n$  arcos  $C_i$  mediante los puntos:

$$\vec{\sigma}(t_0), \vec{\sigma}(t_1), \dots, \vec{\sigma}(t_n).$$

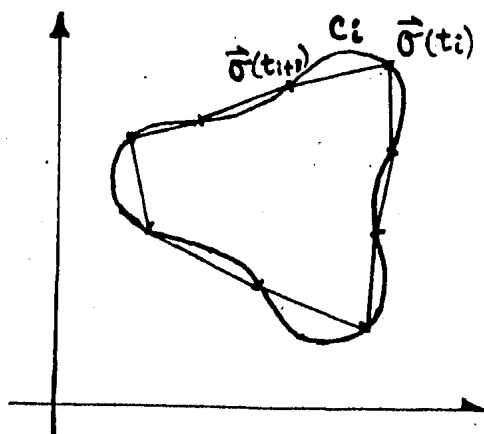


FIG. 32

Trazando segmentos de recta de  $\vec{\sigma}(t_i)$  a  $\vec{\sigma}(t_{i+1})$   $i=0, \dots, n$  se obtiene una poligonal  $\mathcal{P}$  de  $n$  lados.

Como la longitud de cada segmento es  $\|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\|$ , la longitud  $l(\mathcal{P})$  de la poligonal es la suma de estas longitudes:

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\|$$

Ahora, por el teorema del valor medio\*, se tiene que:  $\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i) = \vec{\sigma}'(t_0)(t_{i+1} - t_i)$  para alguna  $t_0 \in (t_i, t_{i+1})$  por lo tanto:

$$\|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\| = \|\vec{\sigma}'(t_0)\| (t_{i+1} - t_i)$$

sustituyendo en  $l(\mathcal{P})$

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\vec{\sigma}'(t_0)\| (t_{i+1} - t_i)$$

Es intuitivamente claro, que conforme el número de lados de la poligonal aumente, su longitud  $l(\mathcal{P})$  estará más próxima a la longitud  $l(\mathcal{C})$  de la curva.

Como el número de lados aumenta cuando el número  $n$  de puntos de la partición aumenta; necesitamos que  $n \rightarrow \infty$  pero de tal forma que todas las distancias entre los puntos sucesivos  $t_i, t_{i+1}$  tiendan a 0, pues podría ser que  $n \rightarrow \infty$  y una de dichas distancias permaneciera fija, así en los polígonos se tendría un lado, común a todos, con magnitud constante, lo que impediría alcanzar la longitud de la curva.

Para especificar lo anterior, en cada partición  $\mathcal{P}$  nos fijamos en la máxima distancia que se obtenga, es decir en  $\max\{|t_{i+1} - t_i|, i=0, \dots, n\}$  y pedimos que la sucesión de estas distancias máximas tienda a cero.

$\left\{ \max_{i=0}^n |t_{i+1} - t_i| \right\} \rightarrow 0$ . Esto se abrevia diciendo que la norma  $|\mathcal{P}|$  de la partición, tienda a 0.

Así, al tomar el límite de las longitudes  $l(\mathcal{P})$  cuando  $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$  se obtiene la longitud  $l(\mathcal{C})$  de la curva,

Simbólicamente:

\* Este teorema es aplicable, ya que  $\vec{\sigma}$  es continua en cada segmento  $t_i t_{i+1}$  y derivable en el intervalo abierto  $(t_i, t_{i+1})$ .

$$l(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \|\vec{\sigma}'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i) = \lim_{|P| \rightarrow 0} l(P) = \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| dt \quad *$$

Por lo que expresando la longitud de arco  $l$  como función de  $t$ , tenemos:

$$l(t) = \int_a^t \|\vec{\sigma}'(u)\| du$$

y de aquí:  $dl = l'(t) = \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$

luego sustituyendo en la fórmula de la circulación, las expresiones obtenidas:

$$\oint_{C^+} \vec{V}(x,y) \cdot \vec{T}(x,y) dl = \int_a^b \vec{V}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = \int_a^b \vec{V}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt$$

Hemos hallado una forma explícita para calcular la circulación en una curva cerrada simple. Para mostrar la aplicación de esta fórmula, daremos un ejemplo.

Calculemos la circulación del campo de velocidades a lo largo de una elipse ubicada en un fluido con movimiento circular uniforme en el plano, Fig. 33.

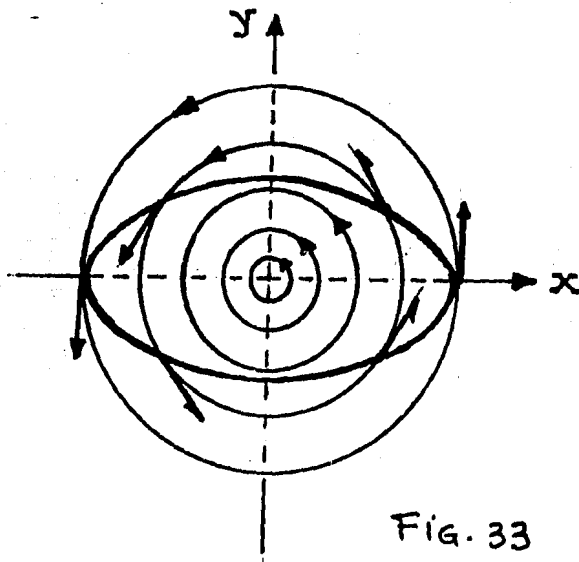


Fig. 33

\* Para una demostración rigurosa de la fórmula de longitud de arco, se recomienda el *ANÁLISIS MATEMÁTICO*, Vol. 2 de Hassler - LaSalle, Sullivan. Págs: 136 y siguientes.

El campo de velocidades del movimiento circular uniforme, esta dado por  $\vec{v}(x,y) = (-\omega y, \omega x)$  con  $\omega$  constante, y consideremos que la elipse es la ya conocida o sea, la descrita por la función:

$\vec{\sigma}(t) = (3\cos t, 2\sin t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , la cual esta orientada positivamente. Entonces la circulación será:

$$\begin{aligned} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} &= \int_a^b \vec{v}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \vec{v}(3\cos t, 2\sin t) \cdot (-3\sin t, 2\cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\omega \sin t, 3\omega \cos t) \cdot (-3\sin t, 2\cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 6\omega (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 6\omega dt = 6\omega \int_0^{2\pi} dt = 6\omega t \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 6\omega (2\pi - 0) = 12\pi\omega. \end{aligned}$$

Así, para esta elipse, la circulación del campo es de  $12\pi$  veces la magnitud de la velocidad angular  $\vec{\omega}$ .

### LA CIRCULACIÓN EN CURVAS CON ESQUINAS

Si en lugar de una curva suave, sin esquinas, se tiene una curva formada por una línea quebrada, por ejemplo un cuadrado; ¿Cómo podremos calcular la circulación en este tipo de curvas?

FIG 34.

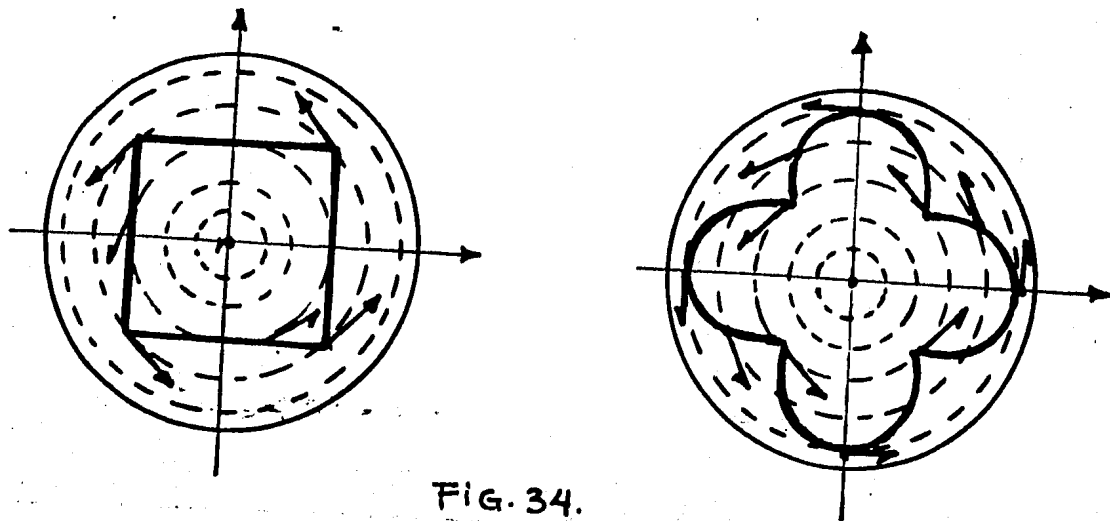


FIG. 34.

De las figuras anteriores, puede observarse que el único problema para hablar de la circulación se presenta en las esquinas o picos; pues aún que en dichos puntos, el campo sí está definido, no existe la tangente a la curva y por lo tanto no se tiene componente tangencial del campo.

El hecho mismo de que en las esquinas no se tenga componente tangencial del campo  $\vec{v}(x,y)$ , nos da una idea para hallar la circulación sobre la curva, pues esta se podrá conocer, calculando el flujo tangencial del campo sobre cada parte de la curva en cuyos puntos sí está definida la tangente, luego sumando estos flujos, es claro que obtendremos la circulación sobre toda la curva.

La descripción de una curva así, se hace parte por parte es decir, mediante una función que sea de clase  $C^1$  en cada parte.

Con el fin de ilustrar esto, veamos el procedimiento para calcular la circulación en un cuadrado.

La función  $\vec{\sigma}(t)$  que nos describa a la curva estará compuesta por cuatro funciones, cada una describiendo un lado del cuadrado; sean  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\eta$  estas cuatro funciones todas de clase  $C^1$ .

Así  $\vec{\sigma}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como:

$$\vec{\sigma}(t) = \begin{cases} \vec{\alpha}(t) & \text{si } a \leq t \leq b_1 \\ \vec{\beta}(t) & \text{si } b_1 \leq t \leq b_2 \\ \vec{\gamma}(t) & \text{si } b_2 \leq t \leq b_3 \\ \vec{\eta}(t) & \text{si } b_3 \leq t \leq b \end{cases}$$

Considerando que cada lado se describe en el sentido positivo y que por lo tanto, el cuadrado queda descrito en el sentido positivo, entonces la circulación sobre él, es:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\vec{\sigma}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_a^{b_1} \vec{v}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) dt + \int_{b_1}^{b_2} \vec{v}(\vec{\beta}(t)) \cdot \vec{\beta}'(t) dt + \\ + \int_{b_2}^{b_3} \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt + \int_{b_3}^b \vec{v}(\vec{\eta}(t)) \cdot \vec{\eta}'(t) dt$$



## INTERPRETACIÓN DE LA CIRCULACIÓN EN CASOS ESPECIALES.

CASO 1.- Si  $\vec{V} \cdot \vec{T} \neq 0$  para todos los puntos de la curva.

Como el campo de velocidades  $\vec{V}$  es continuo, el hecho de que  $\vec{V} \cdot \vec{T}$  sea diferente de cero para todos los puntos de la curva, implica que  $\vec{V} \cdot \vec{T}$  no cambia de signo a lo largo de la curva, es decir que o siempre es positivo o siempre es negativo.

Ahora de la igualdad  $\vec{V} \cdot \vec{T} = \|\vec{V}\| \|\vec{T}\| \cos \theta = \|\vec{V}\| \cos \theta$  con  $0 \leq \theta \leq \pi$ , se tiene que  $\vec{V} \cdot \vec{T} > 0$  sólo si  $\cos \theta > 0$  y esto ocurre sólo si  $0 \leq \theta < \pi/2$ .

Por lo que  $\vec{V} \cdot \vec{T}$  es positivo cuando el ángulo que forma el vector  $\vec{V}(x,y)$  del campo con la tangente unitaria  $\vec{T}(x,y)$  es igual o mayor que  $0^\circ$  y menor que  $90^\circ$  como se muestra en la figura 35.

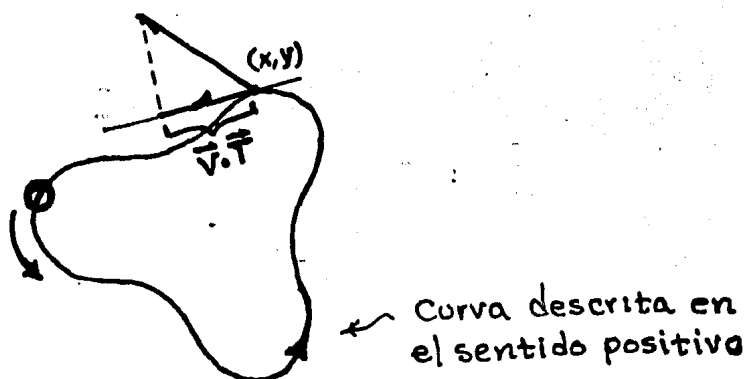


FIG. 35

En esta figura se aprecia que la componente de  $\vec{V}(x,y)$  - tangente a la curva, queda en el lado en que señala el vector tangente  $\vec{T}(x,y)$ , y esto para todos los puntos de la curva. por lo que es claro que en este caso:

$$\oint_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{l} > 0$$

En forma análoga se obtiene que  $\vec{V} \cdot \vec{T}$  es negativo cuando el ángulo que forma  $\vec{V}(x,y)$  con  $\vec{T}(x,y)$  es mayor que  $90^\circ$

y menor o igual que  $180^\circ$ . Fig. 36.

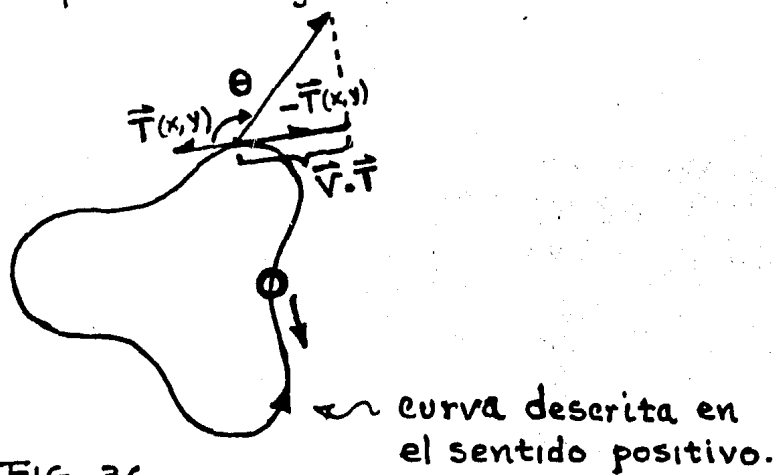


FIG. 36.

Como se observa en la figura, la componente de  $\vec{V}(x,y)$  tangente a la curva, esta en el lado en que señala el vector unitario  $-\vec{T}(x,y)$  opuesto a  $\vec{T}(x,y)$ , esto en todos los puntos de la curva, por lo tanto:

$$\oint_{c^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} < 0$$

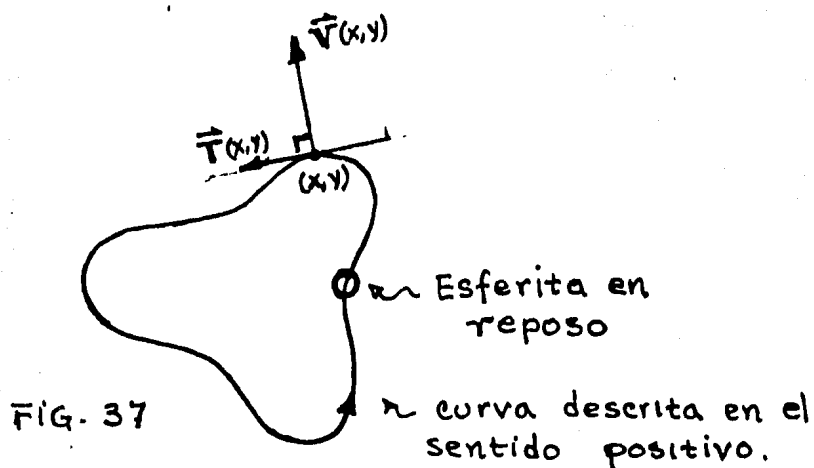
Suponiendo que en ambas situaciones, se tiene una "curva material" y que sobre ella se monta una pequeña esferita móvil, ésta se movería recorriendo la curva en el sentido en que es descrita o en sentido contrario, según que la circulación sea positiva o negativa respectivamente.

Tengase presente que esta interpretación sólo es válida bajo la condición de que  $\vec{V} \cdot \vec{T} \neq 0$  en toda la curva.

CASO 2. - Si  $\vec{V} \cdot \vec{T} = 0$  para todos los puntos de la curva.

La igualdad  $\vec{V} \cdot \vec{T} = 0$  significa que  $\vec{V}$  y  $\vec{T}$  son ortogonales, Fig 37, por lo cual la componente de  $\vec{V}(x,y)$  tangente a la curva, es nula y esto para todos los puntos de la curva, entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$



En estas condiciones, la esferita ubicada en la curva, - permanecerá en reposo.

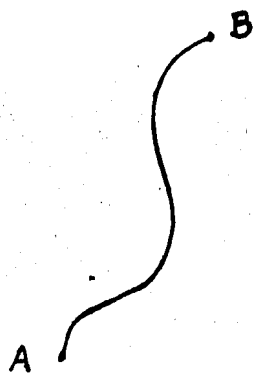
La razón de que sólo en estos casos especiales podamos dar una interpretación de la "circulación", se debe a que ésta nos proporciona una información global de las componentes del campo sobre toda la curva y no nos dice cómo es  $\vec{V} \cdot \vec{T}$  en cada punto, es decir que sólo nos da un resultado neto.

# EL TEOREMA DE GREEN

## RELACION ENTRE LA CIRCULACION Y LAS VORTICIDADES EN EL PLANO

Dada una curva cualquiera, determinaremos la relación entre la circulación cuando la curva se describe en un sentido, y la circulación cuando se describe en sentido contrario.

Sea  $C$  la curva de la figura 38



"Trazada" en un fluido cuyo campo de velocidades es  $V(x,y)$ . Consideremos primeramente la curva descrita con la orientación de A a B, Fig. 39 a).

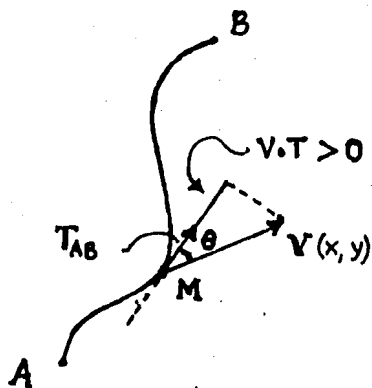


Fig. 39 a).

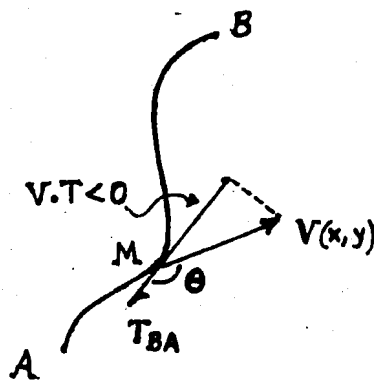


Fig. 39 b).

En la que sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que en el punto  $M$  el ángulo  $\theta$  formado por el vector  $\vec{V}$  del campo y el vector tangente  $\vec{T}_{AB}$  es tal que  $\theta \in [0, \pi/2)$  por lo cual  $\vec{V} \cdot \vec{T}_{AB}$  es positivo.

Pasemos ahora a la figura 39 b), en esta se observa que en el mismo punto M, el vector tangente  $\vec{T}_{BA}$  tiene sentido contrario a  $\vec{T}_{AB}$  y ya que el vector  $\vec{v}(x, y)$  del campo es el mismo independientemente del sentido de la curva, se tiene que el valor de  $\theta$  esta en el intervalo  $(\frac{\pi}{2}, \pi]$  por lo tanto  $\vec{v} \cdot \vec{T}_{BA} < 0$ .

Por otra parte, es claro que  $\vec{v} \cdot \vec{T}_{BA}$  y  $\vec{v} \cdot \vec{T}_{AB}$  tienen la misma magnitud, por lo cual:

$$\vec{v} \cdot \vec{T}_{BA} = -\vec{v} \cdot \vec{T}_{AB} \quad \text{en el punto M.}$$

O de otra forma, ya que para cualquier punto se tiene que  $\vec{T}_{BA} = -\vec{T}_{AB}$  entonces por las propiedades del producto punto:

$$\vec{v} \cdot \vec{T}_{BA} = \vec{v} \cdot (-\vec{T}_{AB}) = -\vec{v} \cdot \vec{T}_{AB}$$

para todos los puntos de la curva. De aquí que la relación de las circulaciones es:

$$\int_{BA} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{BA} \vec{v} \cdot \vec{T}_{BA} dl = \int_{AB} -\vec{v} \cdot \vec{T}_{AB} dl = -\int_{AB} \vec{v} \cdot \vec{T}_{AB} dl = -\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

esto es:

$$\int_{BA} \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Concluimos pues, que la circulación calculada en un sentido tiene la misma magnitud que la circulación calculada en sentido opuesto, pero con signo contrario.

Fijemonos ahora, en la curva cerrada siguiente:

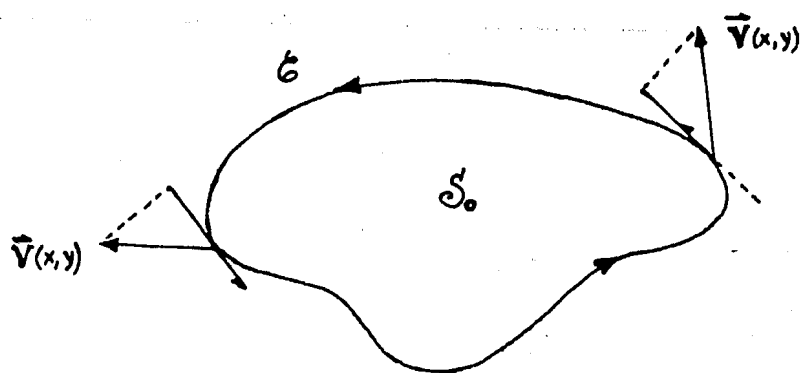


FIG. 40.

Orientada positivamente y "trazada" en un fluido con campo de velocidades  $\vec{V}(x,y)$ . Si la superficie  $S_0$  encerrada por  $C$  se parte en dos con una línea, uniendo los puntos A y B; como se aprecia en la figura 41, se obtienen dos nuevas curvas cerradas  $C_1$  y

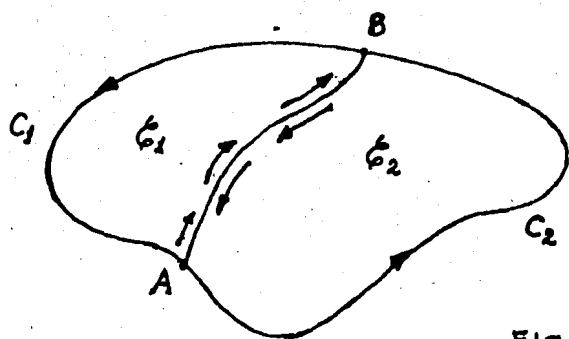


FIG. 41

$C_2$ , cada una orientada positivamente y teniendo como parte común a la línea  $AB$  pero descrita en un sentido para la curva  $C_1$  y en sentido contrario para la curva  $C_2$ .

Veamos cómo se obtendría la circulación de cada una de las curvas.

Debido a las esquinas en los puntos A y B, las curvas  $C_1$  y  $C_2$  se describirán por partes así, la circulación en cada curva cerrada, será la suma de las circulaciones en las partes.

Para la curva  $C_1$  se tiene que:

$$\oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

y para la curva  $C_2$ :

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Sabemos ya que:  $\int_{BA} \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l}$

entonces sumando las circulaciones de las curvas cerradas:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} &= \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Pero  $C_1$  y  $C_2$  forman a la curva exterior, por lo tanto los dos sumandos de la derecha constituyen la circulación ¡Sobre la curva exterior!

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Es decir:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Hemos obtenido así, que la suma de las circulaciones sobre las curvas cerradas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  es igual a la circulación sobre la curva cerrada exterior  $\mathcal{C}$ .

Si en vez de partir a  $S_0$  con una sola línea, la dividimos con varias, Fig. 42, entonces se forman varias curvas cerradas, todas orientadas positivamente y en las cuales, las ra-

-mas comunes se describen en ambos sentidos, por lo que al sumar las circulaciones sobre todas las curvas  $\mathcal{C}_i$ , las circulaciones en di-

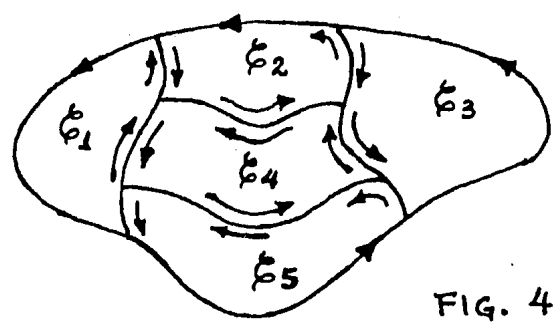


FIG. 42

-chas ramas se cancelarán quedándonos únicamente la circulación sobre la curva exterior  $\mathcal{C}$ .

En general si se tienen  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$  curvas cerradas construidas como antes, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^k \oint_{\mathcal{C}_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Ahora bien, como las vorticidades son fenómenos locales en cada punto, para hallar la relación entre estas y la circulación en la curva  $\mathcal{C}$ , se debe efectuar un proceso de límite - cuando el número de curvas  $\mathcal{C}_i$  tiende a infinito y el área de la región acotada por todas y cada una, tiende a cero.

Por comodidad dividamos la superficie  $S_0$  acotada por  $\mathcal{C}$ , con muchas líneas horizontales y verticales tales que todas sean cuerdas de  $\mathcal{C}$ , construyendo de esta manera un gran número,  $N$ , de pequeños rectángulitos.

Si trazamos una curva que encierre a todos y solo a los rectángulos completos, en general dicha curva será una poligonal  $\mathcal{P}_N$  que depende del número  $N$ , esto se ilustra en la figura 43.



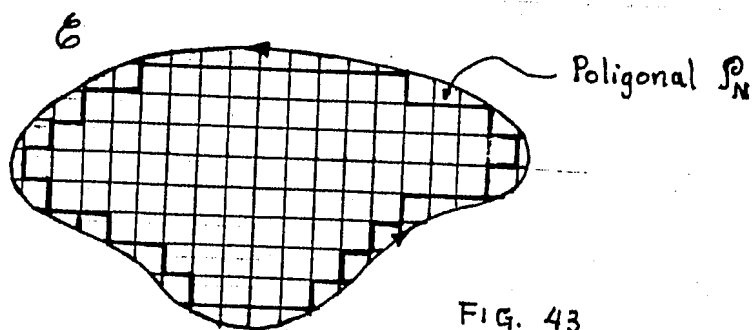


FIG. 43

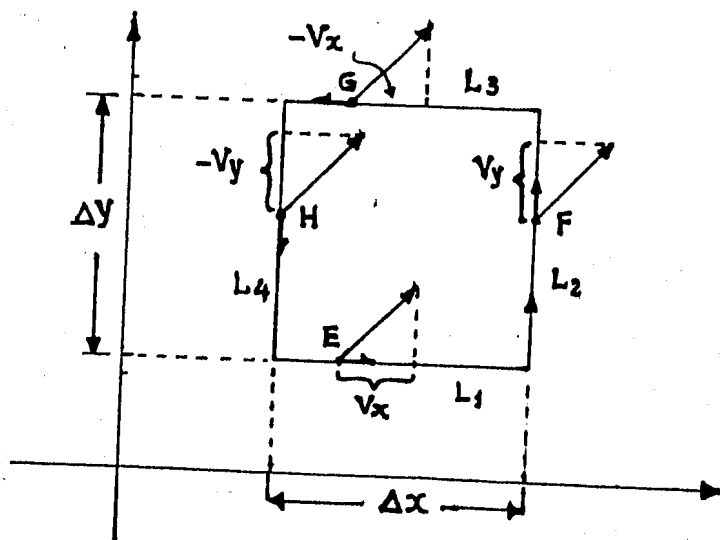
Es intuitivamente claro que cada vez que el número  $N$  de rectángulos, contruidos con cuerdas de  $C$ , aumente, la curva  $P_N$  se aproxima cada vez más a la curva  $C$  y siguiendo un desarrollo análogo al utilizado para determinar la longitud de la curva, se tiene que en el límite, cuando  $N \rightarrow \infty$ , la curva  $P_N$  coincide con  $C$ .

Por lo expuesto antes, sabemos que la relación entre la circulación sobre  $P_N$  y las circulations en los rectángulitos  $\square_i$ , se expresa con la igualdad:

$$\oint_{P_N} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_{\square_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Nos interesa conocer cómo es la circulación  $\oint_{\square_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}$  cuando los rectángulos  $\square_i$  son muy pequeños, es decir cuando debido a la continuidad del campo, las velocidades asociadas por  $\vec{v}(x, y)$  cambian muy poco en los lados de cada rectángulito.

Hagamos el análisis en uno cualquiera de ellos, Fig. 44.



Haciendo una primera aproximación, consideramos que el campo es constante en los lados del rectángulo, esto se ilustra en la figura 44, en la que se aprecia que la velocidad asociada a los lados del rectángulo — esta dada por el vector  $\vec{v}(x,y) = (v_x, v_y)$  y que las componentes tangenciales son  $v_x(E)$ ,  $v_y(F)$ ,  $-v_x(G)$  y  $-v_y(H)$  donde E, F, G, H son puntos — cualesquiera en los lados  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$  respectivamente.

Así la circulación en el lado  $L_1$  es  $v_x(E) \Delta x$ , en el lado  $L_2$  es  $v_y(F) \Delta y$ , en el lado  $L_3$ ,  $-v_x(G) \Delta x$  y en el lado  $L_4$ ,  $-v_y(H) \Delta y$ . Entonces la circulación aproximada sobre el rectángulo es:

$$\oint_{\square} \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx v_x(E) \Delta x + v_y(F) \Delta y - v_x(G) \Delta x - v_y(H) \Delta y = \\ = [v_x(E) - v_x(G)] \Delta x + [v_y(F) - v_y(H)] \Delta y$$

La cual con esta aproximación, es cero.

La razón de tener un resultado sólo aproximado, se debe a que consideramos el campo como constante en cada lado del rectángulo.

Una mejor aproximación puede hacerse si pedimos que el campo de velocidades  $\vec{v}(x,y)$ , sea diferenciable y que sus derivadas sean continuas, ya que así podemos tomar en cuenta la pequeña variación que sufren las componentes tangenciales a causa de la pequeña variación del vector  $\vec{v}$ .

Tomando los puntos E y G de manera que tengan la misma abscisa, es claro que:  $v_x(G) = v_x(E + \Delta y)$  para  $x$  fija.

Por otra parte, ya que el campo es diferenciable, podemos calcular la razón de variación de  $v_x$  con respecto a  $y$  por medio de:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v_x(E + \Delta y) - v_x(E)}{\Delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

y como las derivadas son continuas, podemos considerar que  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$  es constante en  $\Delta y$ , luego la variación total de  $v_x$  será el producto  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y$ , entonces:

$$v_x(G) \approx v_x(E) + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y$$

de aquí:

$$v_x(E) - v_x(G) \approx - \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y$$

y multiplicando por  $\Delta x$

$$[v_x(E) - v_x(G)] \Delta x \approx - \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

Analogamente, tomando los puntos F y H con la misma ordenada, al analizar la variación de  $V_y$  sobre el eje  $x$ , se halla que:

$$V_y(F) \approx V_y(H) + \frac{\partial V_y}{\partial x} \Delta x$$

Luego:

$$V_y(F) - V_y(H) \approx \frac{\partial V_y}{\partial x} \Delta x$$

y multiplicando por  $\Delta y$ :

$$[V_y(F) - V_y(H)] \Delta y \approx \frac{\partial V_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

En la primera aproximación teníamos que:

$$\oint_{\Pi} \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx [V_x(E) - V_x(G)] \Delta x + [V_y(F) - V_y(H)] \Delta y$$

pero ahora, sustituyendo las expresiones de la derecha por las mejores aproximaciones obtenidas, escribimos:

$$\oint_{\Pi} \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx -\frac{\partial V_x}{\partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial V_y}{\partial x} \Delta x \Delta y = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Otra vez, el resultado es aproximado por haber supuesto que las razones de variación  $\frac{\partial V_x}{\partial y}$  y  $\frac{\partial V_y}{\partial x}$  eran constantes en los intervalos  $\Delta y$  y  $\Delta x$  respectivos. Entonces la circulación sobre la curva  $\mathcal{P}_N$  será sólo aproximadamente la suma de estos  $N$  valores, o sea:

$$\oint_{\mathcal{P}_N} \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

para todos los  $i, j$  tales que el rectángulito  $\Pi_{ij}$  está completamente dentro de la poligonal.

La doble sumatoria se debe a que los índices  $i, j$  que numeran a los lados de los rectángulos, corren independientemente.

Esta aproximación será cada vez mejor conforme  $N$  aumenta y ambas  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_j$  se hagan pequeñas, por lo que en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\Delta y_j \rightarrow 0$  se tiene la igualdad:

$$\oint_{\mathcal{P}_N} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1} \sum_j \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

Pero en el límite, determinado por las tres condiciones, la curva  $\mathcal{P}_N$  es la curva  $\mathcal{C}$  misma, por lo que en el lado izquierdo de la igualdad, realmente se tiene la circulación sobre  $\mathcal{C}$  y en el lado derecho una integral doble. Así concluimos que:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $\mathcal{S}$  representa la unión de  $\mathcal{S}_0$  con la curva  $\mathcal{C}$ .

La existencia de la doble integral esta asegurada por la continuidad de  $\frac{\partial v_y}{\partial x}$  y de  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ . Esta integral queda calculada sobre la unión  $\mathcal{S}$  de la superficie y la curva, ya que en el límite se abarea hasta la curva  $\mathcal{C}$ ; por esta razón necesitamos que el campo vectorial  $\vec{V}(x,y)$  sea de clase  $C^1$  en la unión  $\mathcal{S}$ . Como la propiedad  $C^1$  es solo para conjuntos abiertos y  $\mathcal{S}$  es cerrado, pediremos que  $\vec{V}(x,y)$  sea de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $\mathcal{P}_0$  que contenga a  $\mathcal{S}$ .

La igualdad obtenida junto con sus hipótesis, es conocida como el Teorema de Green. A continuación lo enunciamos en forma condensada:

**TEOREMA DE GREEN:** - Sean  $\mathcal{C}$  una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^2$  y  $\vec{V}(x,y) = (v_x(x,y), v_y(x,y))$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $\mathcal{P}_0$  que contiene a la unión  $\mathcal{S}$  de la curva con su interior, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy$$

para escribir el integrando del lado izquierdo también en componentes, recordemos que  $d\vec{l} = \vec{\sigma}'(t) dt$ , siendo  $\vec{\sigma}(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$  la función que describe a la curva  $\mathcal{C}$ ; por lo que, para cada punto  $(x,y)$  en  $\mathcal{C}$  se tiene la igualdad:

$$(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = (x, y)$$

Luego:  $d\vec{l} = \vec{\sigma}'(t) dt = (\sigma_1'(t) dt, \sigma_2'(t) dt) = (dx, dy)$

entonces 
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} (v_x, v_y) \cdot (dx, dy) = \oint_{\mathcal{C}} v_x dx + v_y dy$$

Así se tiene que:

$$\oint_{\mathcal{C}} v_x dx + v_y dy = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Esta relación puede expresarse también vectorialmente, ya que para las vorticidades en un plano, el rotacional es el vector  $(0, 0, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})$  y de aquí:

$$(\text{rot } \vec{v}) \cdot \hat{k} = \left( 0, 0, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Por otra parte, sustituyendo:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad \text{por la expresión equivalente} \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{T} dl$$

hallamos la igualdad en forma vectorial:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{T} dl = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{v} \cdot \hat{k} dx dy$$

Es en esta forma en la que se manifiesta más claramente la relación entre la circulación sobre la curva  $\mathcal{C}$  y los rotacionales en el interior  $\mathcal{S}_0$ ; pues ahora sabemos, hablando intuitivamente, que la circulación en una curva es igual a la "suma" de los rotacionales en la superficie acotada por la curva.

En el caso en que los rotacionales se deban a vorticidades en el fluido, se tiene que la circulación en la curva  $\mathcal{C}$  es igual a la "suma" de los rotacionales de todas las vorticidades en la superficie  $\mathcal{S}_0$ . Teniendo así la relación entre la circulación y las vorticidades.

Relacionado con el rotacional, un flujo se conoce como rotacional si  $\text{rot } \vec{V}(x,y) \neq 0$  para al menos un punto  $(x,y)$  del fluido, y si  $\text{rot } \vec{V}(x,y) = 0$  para todos los puntos, se dice que el flujo es irrotacional.

Con el fin de hacer ver la importancia de las hipótesis, estudiemos el fluido cuyo campo de velocidades es:

$$\vec{V}(x,y) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

este campo corresponde al del movimiento de un líquido que se escapa por un orificio hecho en la base, Fig. 45.

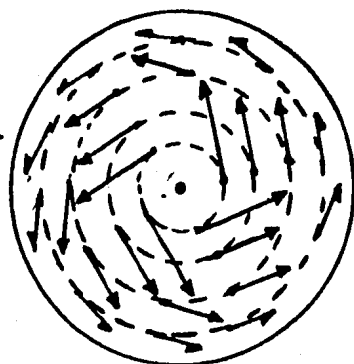


FIG. 45

Como se observa en la figura, los vectores velocidad aumentan al acercarse al centro, pues el campo de velocidades es inverso al radio.

Calculando el rotacional para  $(x,y) \neq (0,0)$

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Luego:  $\text{rot } \vec{V} \cdot \hat{k} = 0$  entonces:

$$\iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \hat{k} \, dx dy = 0$$

y ya que por el Teorema:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{T} dl = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \hat{k} dx dy$$

podría creerse que la circulación sobre cualquier curva cerrada  $\mathcal{C}$  es cero, es decir que:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

Sin embargo, para el círculo unitario descrito por la función  $\vec{\sigma}(\theta) = (\cos \theta, \text{Sen } \theta)$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ , se tiene que la circulación del campo  $\vec{V}$  dado es:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\vec{\sigma}(\theta)) \cdot \vec{\sigma}'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\text{Sen } \theta}{\cos^2 \theta + \text{Sen}^2 \theta}, \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \text{Sen}^2 \theta} \right) (-\text{Sen } \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\text{Sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi ? \end{aligned}$$

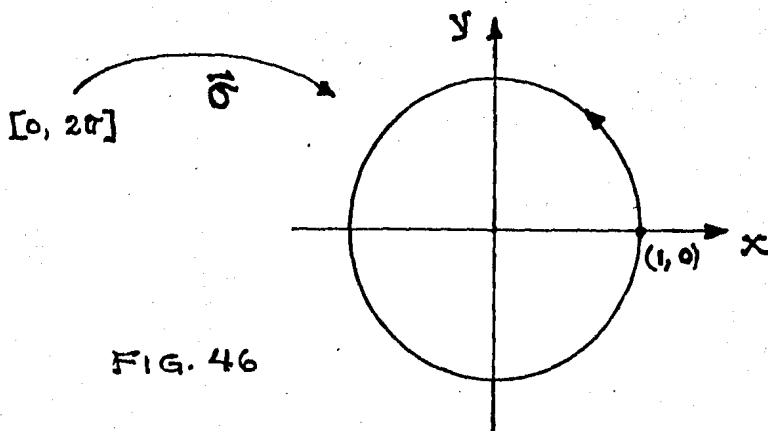


FIG. 46

¿Por qué obtuvimos  $2\pi$  y no 0?

Para responder a esta pregunta, veamos si el campo de velocidades en cuestión, cumple o no, con las hipótesis del teorema.

El campo es  $\vec{V}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

En el teorema se pide que el campo sea de clase  $C^1$  en el interior y sobre la curva  $\mathcal{C}$ . Pero en el punto  $(0, 0)$  que está en

el interior del círculo, el campo  $\vec{v}$  no es de clase  $C^1$ , pues en dicho punto ni siquiera está definido!, por lo que este campo no cumple con las hipótesis, y entonces no puede aplicarse el teorema. Así la circulación

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

sobre el círculo unitario y la integral de superficie

ficie  $\iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \hat{k} \, dx \, dy$  no tienen porque ser iguales.

Tracemos ahora una curva cualquiera  $\mathcal{C}_1$  en torno al origen, y consideremos la región  $\mathcal{R}$  entre la curva  $\mathcal{C}_1$  y el círculo unitario  $\mathcal{C}$  incluyendo también estas curvas. Fig. 47.

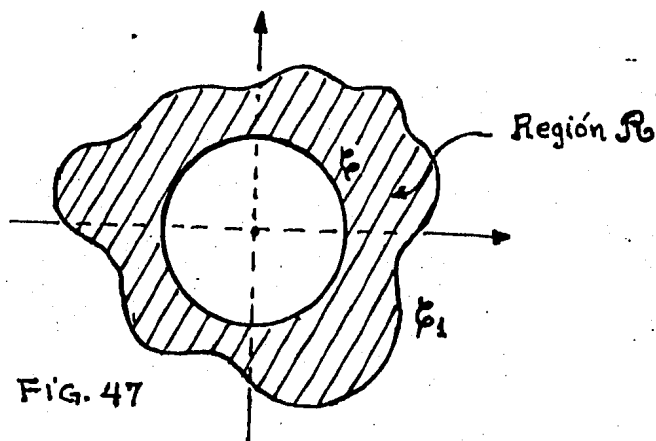


FIG. 47

Con el fin de aplicar el Teorema de Green a la región  $\mathcal{R}$ , introduzcamos un corte transversal de la curva  $\mathcal{C}_1$  a la curva  $\mathcal{C}$ , Fig. 48.

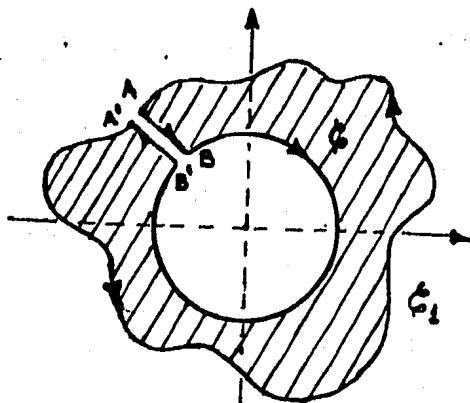


FIG. 48



Así la curva que encierra a la región sombreada, es una curva cerrada simple y si la curva exterior se describe en sentido positivo, la curva interior queda descrita en sentido negativo de tal forma que en el límite cuando el segmento  $\overline{AB}$  se aproxima al segmento  $\overline{A'B'}$  estos coinciden quedando solo un segmento, digamos  $\overline{AB}$ , recorrido en ambos sentidos, Fig. 49.

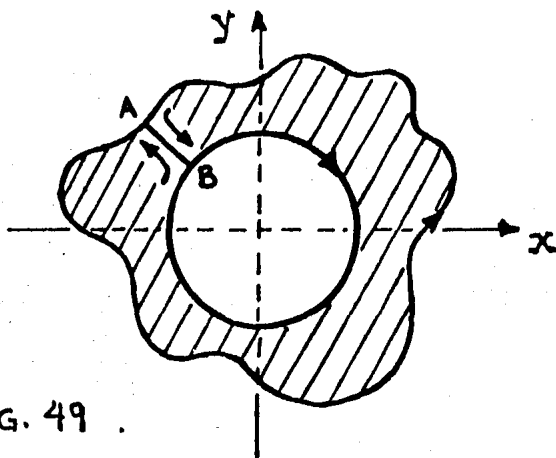


FIG. 49 .

llamando  $\gamma$  a la curva cerrada que en el límite encierra a la región  $R_0$ , se tiene que la circulación sobre ella, es :

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} &= \int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{\xi^-} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{\xi^-} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{\xi^-} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

y por el teorema: 
$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_{R_0} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{k} dx dy$$

o sea: 
$$\int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \int_{\xi^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{R_0} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{k} dx dy$$

pero en este caso:

$$\iint_{\mathcal{R}} \text{rot } \vec{v} \cdot \hat{k} \, dx \, dy = 0$$

es decir:

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi$$

Tenemos pues, que la circulación del campo

$$\vec{v} = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Sobre cualquier curva que encierra al origen, es  $2\pi$ .

Por otra parte, si  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada cualquiera, que deja fuera al origen, entonces aplicando el Teorema de Green:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{T} \, dl = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{v} \cdot \hat{k} \, dx \, dy = 0$$

¿Por qué ocurre todo esto?

Para investigarlo, expresemos los puntos  $(x, y)$  de una curva cerrada cualquiera, en coordenadas polares; esto es:

$(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo que forma el radio vector  $\rho$  con el semieje positivo  $X$ , luego calculando la circulación:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} v_x dx + v_y dy = \oint_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy =$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \frac{-\rho \sin \theta}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} (-\rho \sin \theta) d\theta + \frac{\rho \cos \theta}{\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} (\rho \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \left( \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2} \right) d\theta = \int_{\mathcal{C}} d\theta$$

Nos damos cuenta que la circulación de este campo de velocidades sobre cualquier curva cerrada, ¡sólo depende del parámetro  $\theta$ !

Ahora bien, si la curva encierra al origen, el radio vector  $\rho$  describe un ángulo desde  $\theta_0$  hasta  $\theta_0 + 2\pi$  por lo que:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\theta = 2\pi$$

esto se ilustra en la figura siguiente:

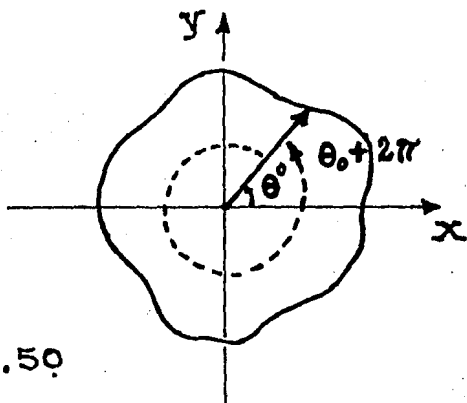
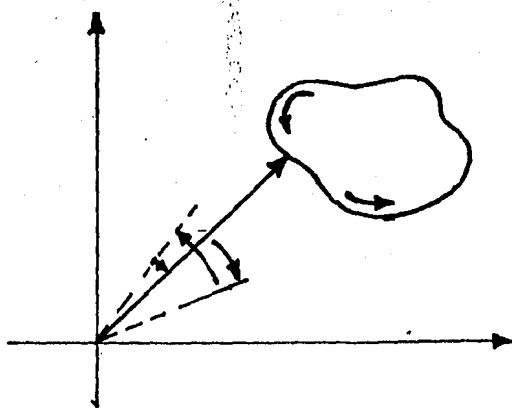


FIG. 50

Para el caso en que la curva no encierra al origen, como se aprecia en la figura 51, el ángulo  $\theta$  varía desde un primer valor  $\theta_0$  hasta el mismo valor final  $\theta_0$ , ya que el radio vector  $\rho$



regresa a la misma posición sin haber girado en torno al polo, de modo que:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\theta = 0$$

### APLICACION:

Una aplicación interesante del Teorema de Green es la siguiente:

Si  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada que acota a una región  $\mathcal{S}$  en la que es aplicable el teorema, entonces el área de  $\mathcal{S}$  está dada por:

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x dy - y dx$$

Para probar esto, se toma un campo vectorial definido como  $\vec{V} = (-y, x)$  es decir  $V_x = -y$  y  $V_y = x$ , entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} x dy - y dx = \oint_{\mathcal{C}} -y dx + x dy = \oint_{\mathcal{C}} V_x dx + V_y dy = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= 2 \iint_{\mathcal{S}} dx dy = 2 A(\mathcal{S})$$

Por lo tanto:

$$A(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x dy - y dx$$

Lo interesante de esta fórmula, es que nos da la medida del área de  $\mathcal{S}$  en función de un recorrido en el borde de  $\mathcal{C}$ ; pues se halla, calculando la circulación del campo  $\vec{V}$  sobre la curva frontera  $\mathcal{C}$ .

## EL TEOREMA DE STOKES

En este capítulo investigaremos la extensión del Teorema de Green cuando el campo de velocidades  $\mathbf{V}$  está definido sobre una superficie en  $\mathbb{R}^3$  como puede ser el caso de un gas fluyendo a través de la superficie o bien, de un líquido deslizándose sobre una lámina curvada, Figs. 52 y 53.

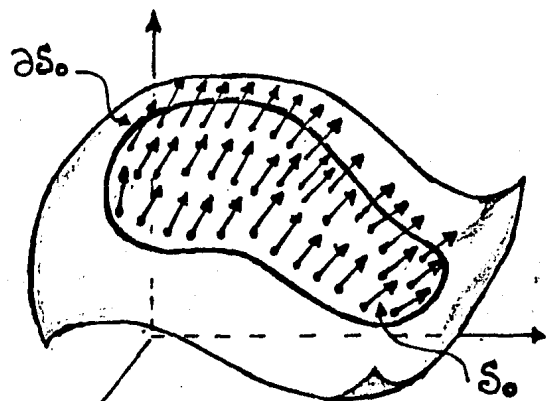


FIG. 52. -- Gas fluyendo a través de la superficie.

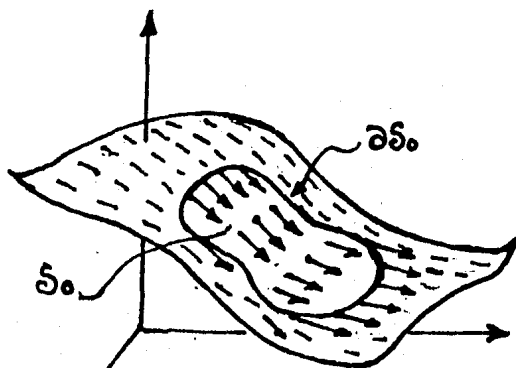


FIG. 53. -- Líquido deslizándose sobre la superficie.

Queremos conocer la relación entre la circulación en torno a la curva  $\partial S_0$  y los fenómenos sobre la superficie acotada  $S_0$ .

Para esto es importante notar que las superficies son básicamente de dos tipos, unas que pueden ser pensadas como la gráfica de una función  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ejemplos de estas se muestran en las figuras siguientes:

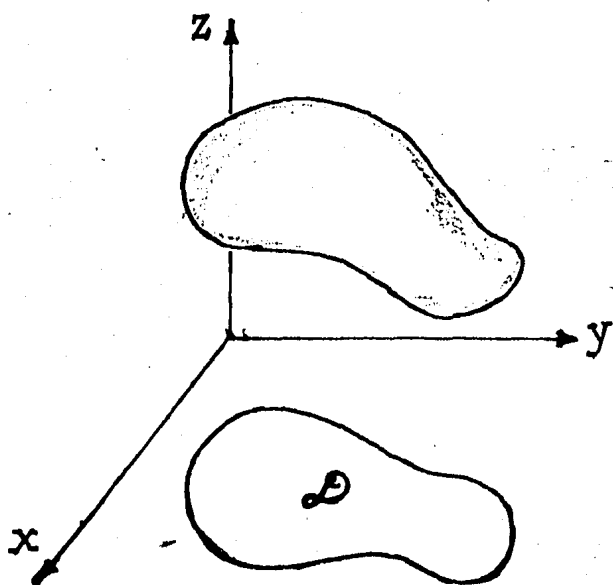


FIG. 54

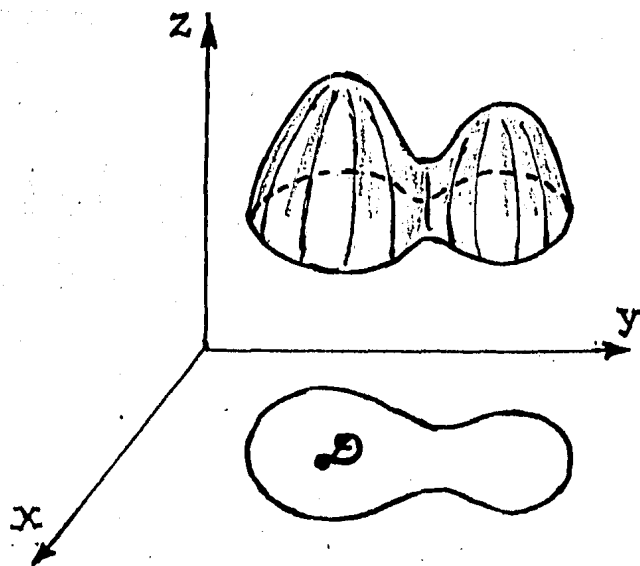


FIG. 55

Otro tipo de superficies, son las que no son gráficas de funciones con valores reales, FIG 56.

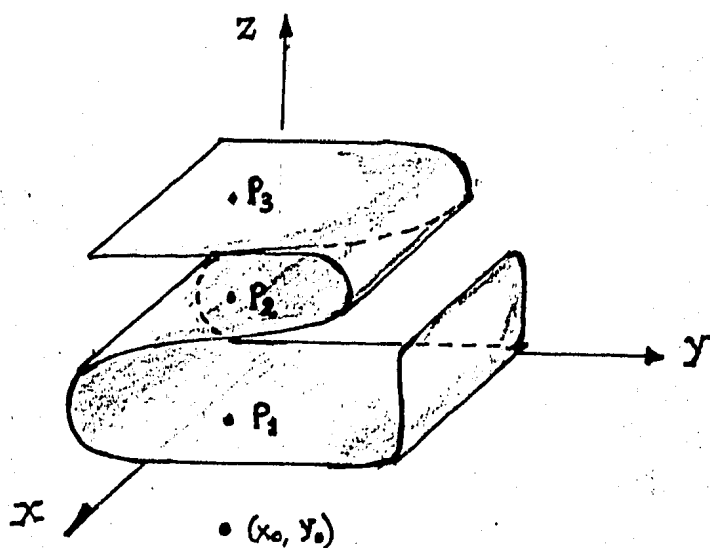


FIG. 56.

Como se observa en la figura, esta superficie no puede ser gráfica de una función  $z = f(x, y)$ , pues el punto  $(x_0, y_0)$  va a tres puntos diferentes  $(x_0, y_0, z_1)$ ,  $(x_0, y_0, z_2)$  y  $(x_0, y_0, z_3)$  en la superficie. Por razones semejantes, no puede ser gráfica de una función  $y = g(x, z)$  ni de una función  $x = h(y, z)$ .

Por comodidad, haremos el análisis sobre las superficies que sí son gráficas de alguna función, intentando un desarrollo análogo al realizado en el plano.

Como en  $\mathbb{R}^3$  es confuso hablar del sentido en que se mueven las manecillas del reloj, la orientación de la curva  $\partial S_0$  no puede estar basada en dicho movimiento.

Una idea para orientar tal curva, es utilizar el hecho de que la superficie acotada es gráfica de una función, digamos  $z = f(x, y)$  y referirse a la orientación de la curva que acota al dominio  $\mathcal{D}$ .

Así la curva frontera de  $S_0$ ,  $\partial S_0$  puede orientarse al orientar la curva  $\partial \mathcal{D}$  que acota a  $\mathcal{D}_0$  y diremos que  $\partial S_0$  está descrita en el sentido positivo o negativo, según que  $\partial \mathcal{D}_0$  esté orientada positiva o negativamente.

Intuitivamente, podemos decir que la curva  $\partial S_0$  está orientada positivamente, si al caminar sobre ella con la cabeza

en el sentido del eje Z, la superficie nos queda siempre a la izquierda como se aprecia en la figura 57.

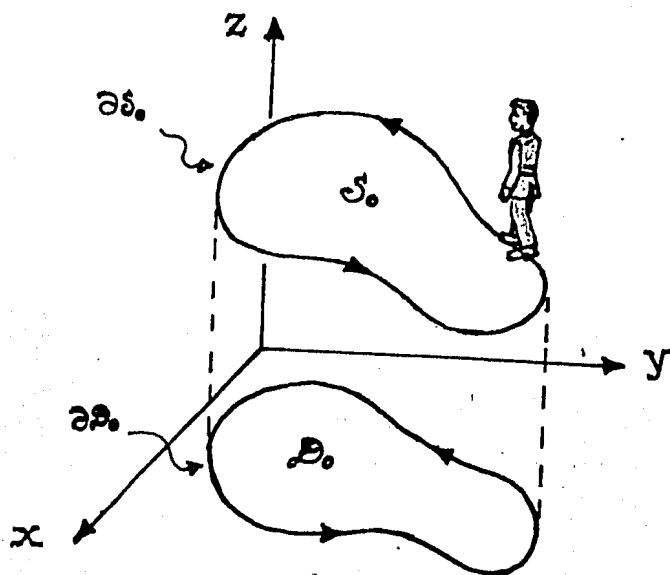


FIG. 57.- Recorriendo la curva  $\partial S_0$  en sentido positivo.

Teniendo la curva orientada  $\partial S_0$ , si se traza una línea sobre la superficie acotada por  $\partial S_0$  uniendo los puntos A y B de la curva, Figs. 58, se obtendrán dos nuevas curvas cerradas, siendo la línea AB común a ambas, por lo que será descrita en ambos sentidos.

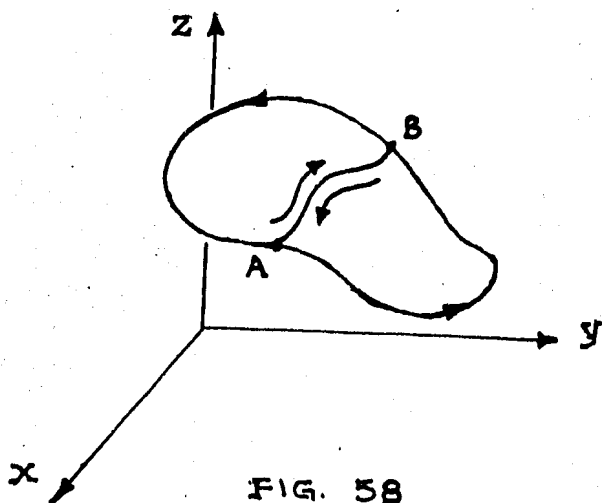
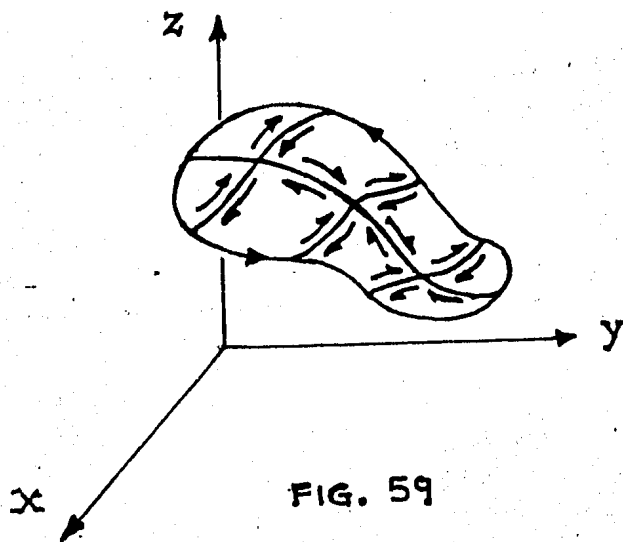


FIG. 58

Ahora bien, sabemos que en general el vector tangente señala en el sentido en que se describe una curva, así en cada punto de la línea AB tendremos dos vectores tangentes  $\vec{T}_{AB}$  y  $\vec{T}_{BA}$  tales que  $\vec{T}_{BA} = -\vec{T}_{AB}$  de manera que la relación:

$$\int_{BA} \vec{v} \cdot \vec{T}_{BA} dl = - \int_{AB} \vec{v} \cdot \vec{T}_{AB} dl$$

Sigue siendo válida en el espacio tridimensional. De aquí que al construir una red con líneas que unan puntos de  $\partial S_0$  y que estén sobre  $S_0$ , la suma de estas integrales en todas las ramas comunes será nula, quedándonos sólo la circulación sobre la curva  $\partial S_0$ , FIG. 59.



Nuevamente, para hallar la relación entre la circulación en la curva  $\partial S_0$  y las rotaciones en la superficie  $S_0$ , construiremos una red bastante fina, de tal forma que la pequeña superficie acotada por cada curva, pueda aproximarse por un planito que en general, es un paralelogramo. Después de hallar la expresión para la circulación en estos pequeños paralelogramos, tomaremos el límite cuando el número de ellos tiende a  $\infty$  y el área de cada uno tiende a 0.

Mediante la aproximación con los paralelogramos, obtenemos una superficie poliédrica acotada por una poligonal en  $\mathbb{R}^3$  conteniendo a todos los pequeños paralelogramos completos, FIG. 60. De manera que, cuanto más fina sea la red, más próxima estará la superficie poliédrica a la superficie  $S_0$  y la poligonal, a la curva  $\partial S_0$ .



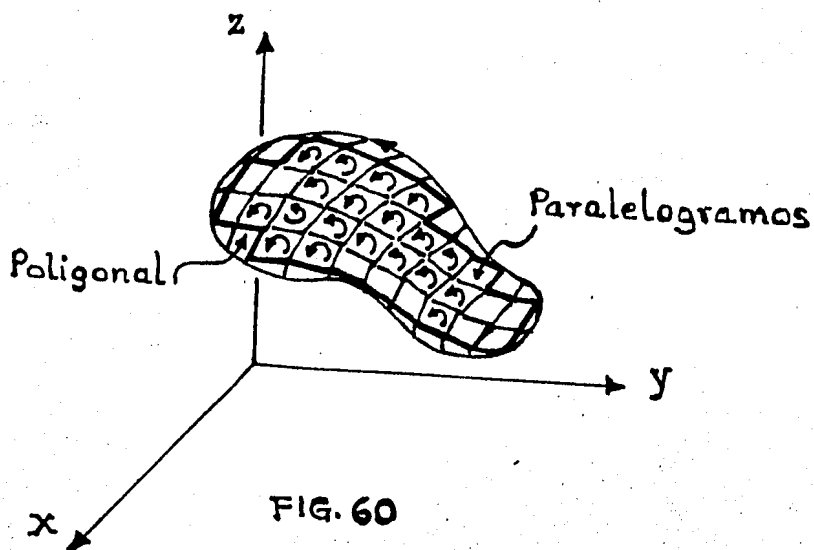


FIG. 60

Con tal de facilitar las cosas, construimos la red, como la imagen en  $\hat{S}_0$  de una red construida en el dominio con curvas de  $\partial D_0$  paralelas a los ejes  $x$  e  $y$ , FIG. 61.

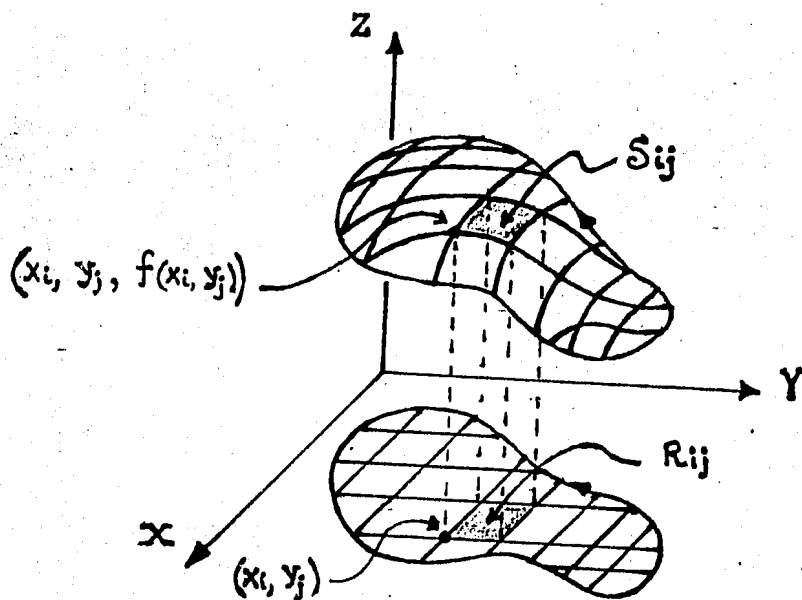


FIG. 61

Ahora veamos cómo quedará determinado el paralelogramo que aproximará a la superficie en el punto  $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ .

Con el fin de construir pequeños paralelogramos tangentes en cada punto y que por lo tanto, serán los que mejor se aproximen a la superficie en una vecindad del punto, exigiremos que la función  $f$  sea diferenciable en un conjunto abierto conteniendo a  $D = D_0 \cup \partial D_0$ .

Parametrizando la superficie mediante la función:  
 $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , luego fijando  $x$  en  $x_i$  se obtiene una función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida a través de  $\phi$  por:

$$g(y) = \phi(x_i, y) = (x_i, y, f(x_i, y))$$

Cuya imagen es una curva que pasa por el punto  $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$   
 FIG. 62.

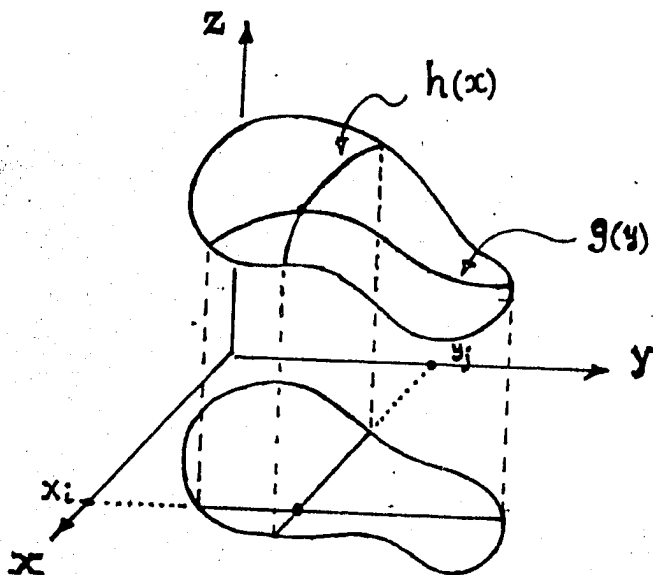


FIG. 62

Analogamente, si se fija  $y$  en  $y_j$ , se tiene la función  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por la igualdad  $h(x) = \phi(x, y_j)$  es decir  $h(x) = (x, y_j, f(x, y_j))$  teniendo otra curva en un plano paralelo al  $xz$ .

Los vectores  $\frac{dg}{dy}(y_j)$  y  $\frac{dh}{dx}(x_i)$  serán tangentes a las curvas respectivas en el punto  $\phi(x_i, y_j)$  siendo:

$$\frac{dg}{dy}(y_j) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_i, y_j) = \left( \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \right) = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \right)$$

$$\frac{dh}{dx}(x_i) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_i, y_j) = \left( \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \right) = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \right)$$

Hemos hallado dos vectores tangentes a la superficie en el punto  $\phi(x_i, y_j)$ :

$$\vec{T}_y = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \right) = \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \hat{k}$$

y

$$\vec{T}_x = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \right) = \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \hat{k}$$

Los cuales nos determinan el plano tangente a la superficie en dicho punto.

Óbserve que estos vectores son constantes para cada punto sin importar qué tan fina sea la red.

En la figura siguiente, se ilustran estos vectores y el paralelogramo que determinan.

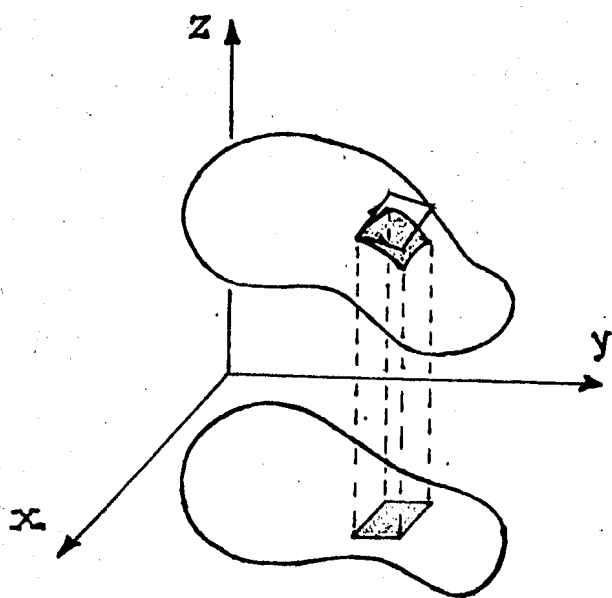


FIG. 63 a).

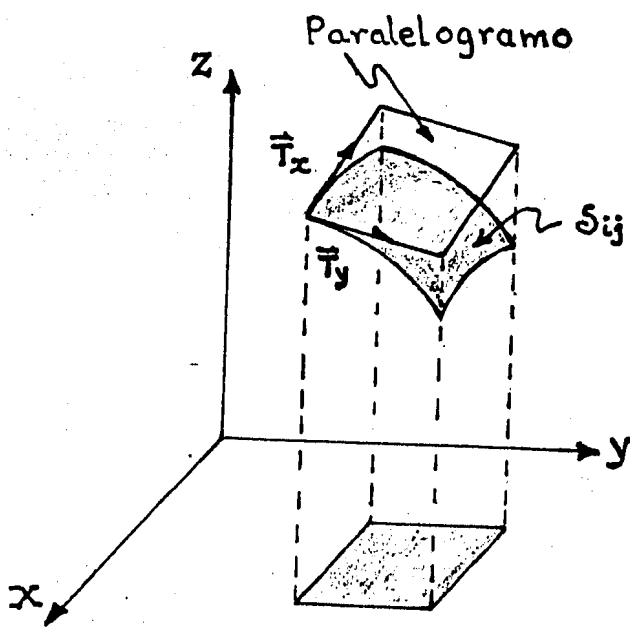


FIG. 63 b).

Necesitamos ahora, conocer el tamaño de los lados del paralelogramo, para esto nos fijamos en la recta, tangente a  $g(y)$ , determinada por el vector  $\vec{T}_y$  sobre el plano YZ trasladado al punto  $x = x_i$ , FIG. 64.

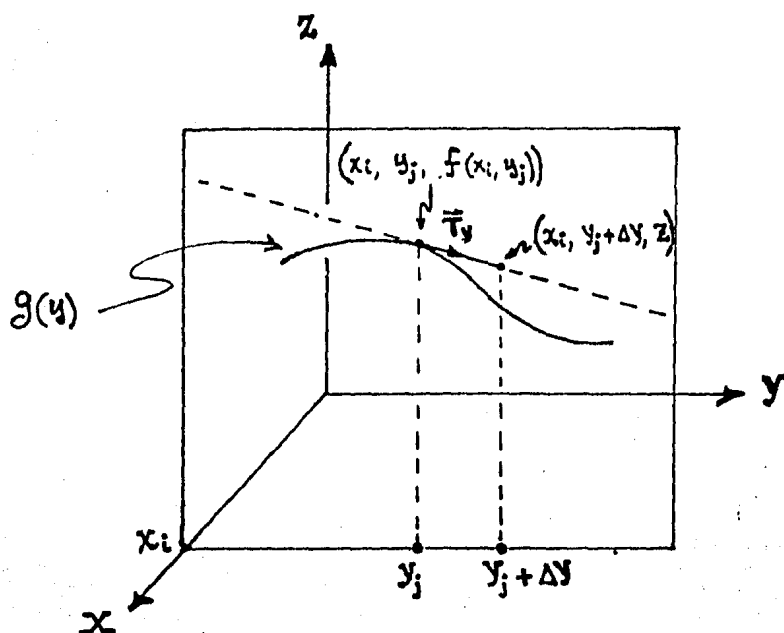


FIG. 64

La ecuación de la recta tangente, puede darse en la forma  $z = z_0 + m(y - y_0)$ , donde la pendiente es  $m = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j)$  y un punto conocido es  $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$  por lo que la ecuación de la recta es:

$$z = f(x_i, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j)(y - y_j)$$

Entonces el valor de  $z$  en el punto  $y = y_j + \Delta y$  es:

$$z = f(x_i, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \Delta y$$

Tenemos ya los puntos  $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$  y  $(x_i, y_j + \Delta y, f(x_i, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y)$  que son los extremos del lado del paralelogramo en la dirección de  $\vec{T}_y$ ; así la magnitud del lado, será igual a la magnitud del vector:

$$\begin{aligned} & (x_i, y_j + \Delta y, f(x_i, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \Delta y) - (x_i, y_j, f(x_i, y_j)) = (0, \Delta y, \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \Delta y) \\ & = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j)) \Delta y = \vec{T}_y \Delta y \end{aligned}$$

En forma similar, al analizar la recta tangente a  $h(x)$  determinada por  $\vec{T}_x$  sobre el plano  $xz$  trasladada al punto  $y = y_j$ , se halla que la magnitud del lado será igual a la

- magnitud del vector  $\vec{T}_x \Delta x$ .

Conociendo ya, los lados del paralelogramo, procedamos a calcular la circulación del campo  $\vec{V}(x, y, z) = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$  sobre él, para lo cual consideraremos que ésta curva queda descrita

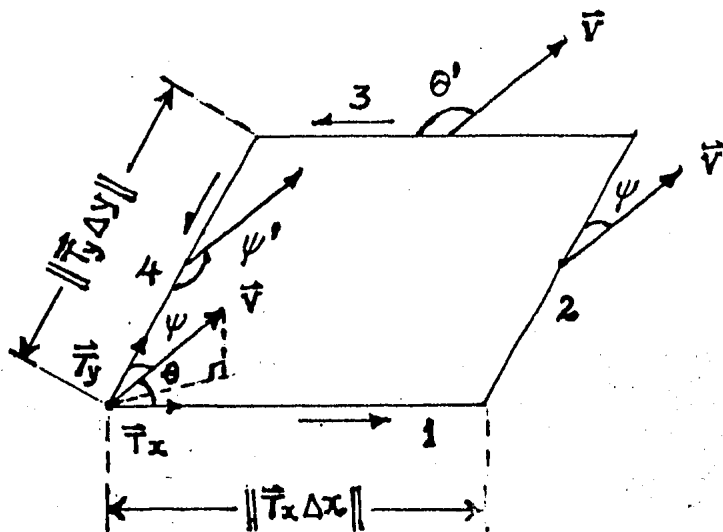


FIG. 65.

en el sentido positivo, FIG 65.

De acuerdo a la figura, la componente de  $\vec{V}$  en la dirección del lado 1 es  $\|\vec{V}\| \cos \theta$  y como el campo es continuo, podemos suponer que esta componente no cambia a lo largo de dicho lado, por lo que la circulación en este lado será el producto de la componente por la longitud del lado, es decir:

$$\|\vec{V}\| \cos \theta \|\vec{T}_x \Delta x\| = (\|\vec{V}\| \|\vec{T}_x\| \cos \theta) \Delta x = (\vec{V} \cdot \vec{T}_x) \Delta x$$

Como esta es la circulación en el lado 1, la representaremos por  $\vec{V} \cdot \vec{T}_x (1) \Delta x$ .

De igual manera, se obtienen las circulaciones en los lados (2), (3) y (4) siendo éstas:  $\vec{V} \cdot \vec{T}_y (2) \Delta y$ ,  $-\vec{V} \cdot \vec{T}_x (3) \Delta x$ ,  $-\vec{V} \cdot \vec{T}_y (4) \Delta y$  respectivamente. Así con estas consideraciones, la circulación en el paralelogramo es:

$$\begin{aligned} \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} &\approx \vec{V} \cdot \vec{T}_x (1) \Delta x + \vec{V} \cdot \vec{T}_y (2) \Delta y - \vec{V} \cdot \vec{T}_x (3) \Delta x - \vec{V} \cdot \vec{T}_y (4) \Delta y = \\ &= [\vec{V} \cdot \vec{T}_x (1) - \vec{V} \cdot \vec{T}_x (3)] \Delta x + [\vec{V} \cdot \vec{T}_y (2) - \vec{V} \cdot \vec{T}_y (4)] \Delta y \end{aligned}$$

que con tal aproximación, será cero.

Hasta aquí, sólo hemos pedido que el campo  $\vec{V}$  sea continuo. Si ahora se pide que sea diferenciable y que sus derivadas sean continuas, esto es, que sea de clase  $C^1$ , se podrá hallar una mejor aproximación, pues así es posible tomar en cuenta la variación de  $\vec{V} \cdot \vec{T}_x$  desde el lado 1 hasta el lado 3 y la variación de  $\vec{V} \cdot \vec{T}_y$  desde el lado 2 hasta el lado 4.

Tengamos presente que los vectores  $\vec{T}_x$  y  $\vec{T}_y$  son constantes para cada punto  $(x_i, y_j)$  y que la variación de los lados del paralelogramo al hacer más fina la red, se debe a la variación de  $\Delta y$  y de  $\Delta x$ . De aquí, que son éstas magnitudes las que determinan la variación de  $\vec{V} \cdot \vec{T}_x$  y  $\vec{V} \cdot \vec{T}_y$ . En base a esto, escribimos:

$$\vec{V} \cdot \vec{T}_x(3) \approx \vec{V} \cdot \vec{T}_x(1) + \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{T}_x}{\partial y}(1) \Delta y$$

donde, utilizando el hecho de que las derivadas son continuas, hemos supuesto que la razón de variación de  $\vec{V} \cdot \vec{T}_x$  es la misma a lo largo de  $\Delta y$ , por lo que es una aproximación.

Luego:

$$\vec{V} \cdot \vec{T}_x(1) - \vec{V} \cdot \vec{T}_x(3) \approx - \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{T}_x}{\partial y}(1) \Delta y$$

y multiplicando por  $\Delta x$  ambos miembros:

$$[\vec{V} \cdot \vec{T}_x(1) - \vec{V} \cdot \vec{T}_x(3)] \Delta x \approx - \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{T}_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

para calcular  $\frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{T}_x}{\partial y}$  necesitamos desarrollar  $\vec{V} \cdot \vec{T}_x$ :

$$\vec{V} \cdot \vec{T}_x = (V_x, V_y, V_z) \cdot (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j)) = V_x + V_z \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j)$$

O bien, sabiendo que  $z = f(x, y)$ :

$$\vec{V} \cdot \vec{T}_x = V_x + V_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

donde cada componente del campo de velocidades es función de  $(x, y, z)$  y  $z$  es función de  $(x, y)$ . Entonces:

$$\frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{T}_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( V_x + V_z \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Por lo tanto:

$$[\vec{V} \cdot \vec{T}_x(1) - \vec{V} \cdot \vec{T}_x(3)] \Delta x \approx - \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] \Delta x \Delta y$$

Así mismo, tenemos que:

$$[\vec{V} \cdot \vec{T}_y(2) - \vec{V} \cdot \vec{T}_y(4)] \Delta y \approx \frac{\partial \vec{V} \cdot \vec{T}_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

$$\text{donde } \vec{V} \cdot \vec{T}_y = v_y + v_z \frac{\partial z}{\partial y}$$

— y al derivar se obtiene:

$$[\vec{V} \cdot \vec{T}_y(2) - \vec{V} \cdot \vec{T}_y(4)] \Delta y \approx \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right] \Delta x \Delta y$$

Notese que para hacer esta aproximación, es necesario pedir que  $z = f(x, y)$  sea dos veces diferenciable, si no  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  no tienen sentido.

La primera aproximación que teníamos para la circulación en el paralelogramo era:

$$\oint_{\square} \vec{V} \cdot d\vec{l} \approx [\vec{V} \cdot \vec{T}_x(1) - \vec{V} \cdot \vec{T}_x(3)] \Delta x + [\vec{V} \cdot \vec{T}_y(2) - \vec{V} \cdot \vec{T}_y(4)] \Delta y$$

Pero al sustituir los sumandos de la derecha por las mejores aproximaciones que hemos encontrado, se halla la expresión:

$$\begin{aligned} \oint_{\square} \vec{V} \cdot d\vec{l} \approx & - \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] \Delta x \Delta y + \\ & + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right] \Delta x \Delta y = \end{aligned}$$

$$= \left[ \left( -\frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left( -\frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] \Delta x \Delta y =$$

$$= \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \left( -\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] \Delta x \Delta y =$$

$$= \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] \Delta x \Delta y$$

Si se pone una restricción más a  $z = f(x, y)$ , exigiendo que las segundas derivadas sean continuas; es decir que  $f$  sea de clase  $C^2$ , entonces las parciales cruzadas son iguales y por lo tanto  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$ , quedandonos lo siguiente:

$$\oint_D \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \right] \Delta x \Delta y$$

Luego, calculando el producto cruz de  $\vec{T}_x$  y  $\vec{T}_y$ , encontramos que:

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$$

el cual es un vector normal al paralelogramo determinado por  $\vec{T}_x$  y  $\vec{T}_y$ .

Veamos ahora, cual es la expresión del rotacional cuando el campo  $\vec{V}$  está definido y toma valores en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

¡Este es justamente el término que aparece en la circulación sobre el paralelogramo!

Sustituyendo pues, en la última aproximación, obtenemos la formulación siguiente:



$$\oint_{\square} \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx \text{rot } \vec{V} \cdot (\vec{T}_x \times \vec{T}_y) \Delta x \Delta y$$

Luego la circulación sobre la poligonal que acota a la superficie poliédrica es aproximadamente:

$$\oint_{\mathcal{P}_N} \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx \sum_i \sum_j \text{rot } \vec{V}(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot (\vec{T}_{x_i} \times \vec{T}_{y_j}) \Delta x_i \Delta y_j$$

para todos los  $i, j$  tales que el paralelogramo  $\square_{ij}$  está completamente dentro de la poligonal  $\mathcal{P}_N$ .

En base a esta expresión, se obtiene la igualdad al tomar el límite cuando el número  $N$  de paralelogramos dentro de la poligonal tiende a  $\infty$  y ambos  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_j$  tienden a cero, así:

$$\oint_{\mathcal{P}_N} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \text{rot } \vec{V}(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) \cdot (\vec{T}_{x_i} \times \vec{T}_{y_j}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Como en el límite, la curva  $\mathcal{P}_N$  es la curva  $\partial \mathcal{S}_0$  misma y la superficie acotada coincide con  $\mathcal{S}_0$  que es la imagen del dominio  $\mathcal{D}_0$ ; en el lado izquierdo de la igualdad, se tiene la integral a lo largo de  $\partial \mathcal{S}_0$  y el lado derecho es la doble integral sobre  $\mathcal{D}$ ; esto es:

$$\oint_{\partial \mathcal{S}_0} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{D}} \text{rot } \vec{V} \cdot (\vec{T}_x \times \vec{T}_y) dx dy$$

La integral de la derecha, se conoce como integral de superficie. Esta queda calculada sobre el dominio  $\mathcal{D}$  de la función  $f$ , ya que las variables son los lados  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_j$  de los rectángulos en  $\mathcal{D}$ . Para convertirla en una integral sobre la superficie  $\mathcal{S}_0$ , observemos que:

$$\|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\| \Delta x \Delta y = (\|\vec{T}_x\| \|\vec{T}_y\| \text{Sen } \alpha) \Delta x \Delta y = \|\vec{T}_x \Delta x\| \|\vec{T}_y \Delta y\| \text{Sen } \alpha$$

es el área  $\Delta A$  del paralelogramo de lados  $\vec{T}_x \Delta x$  y  $\vec{T}_y \Delta y$  como se aprecia en la figura siguiente:

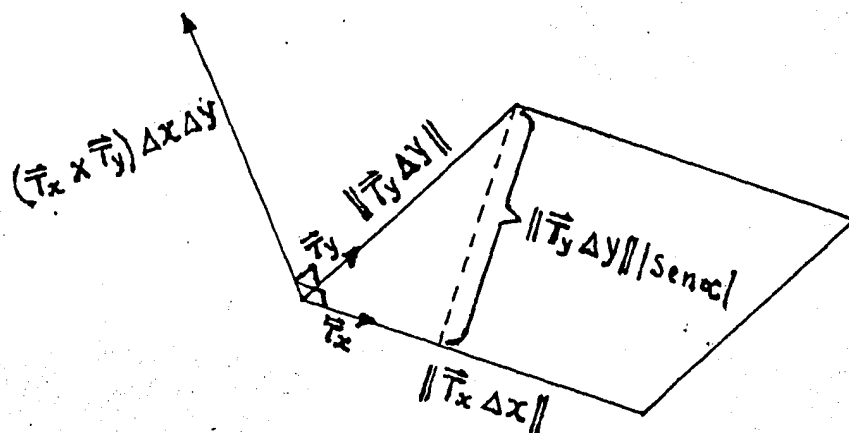


FIG. 66

Entonces el vector  $(\vec{T}_x \times \vec{T}_y) \Delta x \Delta y$  es normal al paralelogramo y con magnitud igual al área del mismo, por lo que podemos escribir:

$$(\vec{T}_x \times \vec{T}_y) \Delta x \Delta y = \vec{n} \Delta A$$

donde  $\vec{n}$  es un vector normal unitario en cada punto  $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$  y cuyo sentido está dado por  $\vec{T}_x \times \vec{T}_y$ , pues  $\vec{n}$  queda definido como:

$$\vec{n} = \frac{\vec{T}_x \times \vec{T}_y}{\|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\|}$$

El lado hacia el que señala este vector, es llamado exterior o positivo de la superficie.

Al sustituir en las sumatorias a  $(\vec{T}_x \times \vec{T}_y) \Delta x \Delta y$  por su igual  $\vec{n} \Delta A$  y tomar el límite, se tiene que:

$$\oint_{\partial S_0} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$S$  es la unión de  $S_0$  con  $\partial S_0$ .

A esta igualdad junto con todas las condiciones que la hacen posible, se le conoce como el Teorema de Stokes, el cual relaciona en  $\mathbb{R}^3$ , una integral curvilínea (circulación) con una integral de superficie.

Para dar la presentación formal, veamos antes, que la superficie  $S$  queda orientada mediante la definición de la normal unitaria  $\vec{n}$ , pues llamandole positivo al lado en que ésta señala, el lado interior o negativo estará indicado por el sentido de  $-\vec{n}$ .

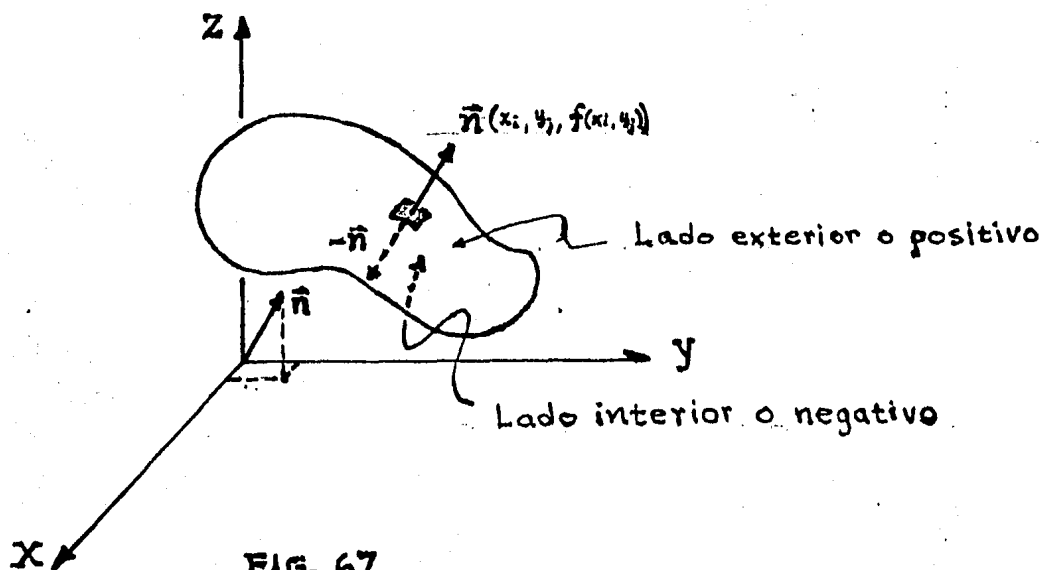
Podemos ilustrar gráficamente esto, recordando la igualdad:

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_y = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$$

Por lo que:

$$\vec{n} = \frac{-i \frac{\partial z}{\partial x} - j \frac{\partial z}{\partial y} + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Los valores  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  varían para cada punto de la superficie, pero algo característico, es que siempre la componente en  $\hat{k}$  es positiva, es decir que siempre apunta hacia la parte superior del plano  $XY$ . Luego  $-\vec{n}$  tiene componente en  $\hat{k}$ , negativa y siempre apunta hacia la parte inferior del plano  $XY$ , Fig. 67.



Al trasladar estos vectores al punto correspondiente en la superficie, se consigue identificar los lados exterior e interior.

Formulamos ahora el teorema:

**TEOREMA DE STOKES (Para Gráficas)** :- Sea  $S_0$  una superficie orientada definida por una función  $Z = f(x, y)$  de clase  $C^2$  en un conjunto abierto conteniendo a la unión  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \partial\mathcal{D}_0$  y sea  $\vec{V}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en la unión  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \partial\mathcal{S}_0$ , entonces:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}_0} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}_0} \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

donde  $\partial\mathcal{S}_0$  es la frontera de  $\mathcal{S}_0$  orientada positivamente.

Observese que al pedir que  $f$  sea de clase  $C^2$  de hecho se pide que  $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  sea de clase  $C^2$ , pues  $\Phi_1(x, y) = x$  y  $\Phi_2(x, y) = y$  ya de por sí lo son.

Así, mediante un desarrollo análogo, el teorema se generaliza a superficies que no son la gráfica de alguna función, siempre que estas puedan describirse por una parametrización de clase  $C^2$ ,  $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uno-a-uno, dada por  $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ . FIG. 68.

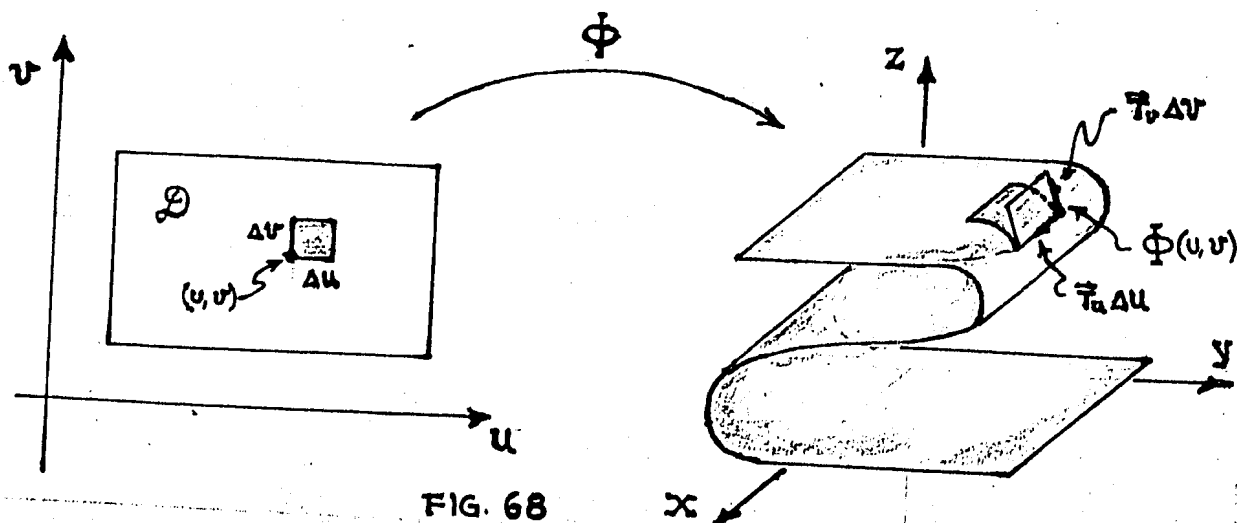


FIG. 68

Con esto, tenemos la formulación general del teorema como sigue:

**TEOREMA DE STOKES** .- Sea  $S$  una superficie orientada, parametrizada por una función  $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uno a uno y de clase  $C^2$  en algún conjunto abierto conteniendo a  $\mathcal{D}_0 \cup \partial\mathcal{D}_0$ , y sea  $\vec{V}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un abierto conteniendo a la unión  $S = \mathcal{D}_0 \cup \partial\mathcal{D}_0$ , entonces

$$\oint_{\partial S_0} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

con la frontera  $\partial S_0$  orientada positivamente.

### Interpretación Física:

El teorema nos dice que, la circulación del campo de velocidades, a lo largo de la frontera de una superficie, es igual a la magnitud total de las componentes normales de los rotacionales sobre toda la superficie.

En algunos textos, viene el teorema expresado en componentes, para obtener tal formulación, veamos lo siguiente:

Sabemos que para un elemento de arco  $d\vec{l}$  en el plano, se cumple que:

$$d\vec{l} = (dx, dy)$$

Es claro entonces, que la expresión correspondiente para un elemento de arco  $d\vec{l}$  en  $\mathbb{R}^3$  será:

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$

Por otra parte, llamando  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  a los ángulos que forma el vector  $\vec{n}$  con los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente. FIG. 69

Así las componentes de  $\vec{n}$  sobre cada eje son:

$\|\vec{n}\| \cos \alpha$ ,  $\|\vec{n}\| \cos \beta$ , y  $\|\vec{n}\| \cos \gamma$ ; es decir:

$$\vec{n} = (\|\vec{n}\| \cos \alpha, \|\vec{n}\| \cos \beta, \|\vec{n}\| \cos \gamma)$$

y ya que  $\|\vec{n}\| = 1$  se tiene que  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  donde -

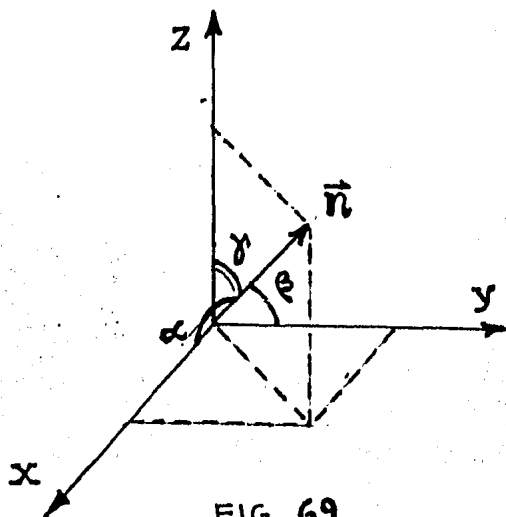


FIG. 69

-  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  varían para cada punto  $(x, y, z)$  de la superficie.

Midiendo los ángulos con respecto a los semiejes positivos, los cosenos quedan expresados por las igualdades:

$$\vec{n} \cdot \hat{i} = \|\vec{n}\| \|\hat{i}\| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\vec{n} \cdot \hat{j} = \cos \beta$$

$$\text{y} \quad \vec{n} \cdot \hat{k} = \cos \gamma$$

Luego:  $\vec{n} dA = (\vec{n} \cdot \hat{i} dA, \vec{n} \cdot \hat{j} dA, \vec{n} \cdot \hat{k} dA)$ . Ahora bien,  $\vec{n}$  es el vector  $\frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}$  y  $dA$  es el área de un elemento de superficie, es decir  $dA = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv$ . Por lo tanto:

$$\vec{n} \cdot \hat{i} dA = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} \cdot \hat{i} \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv = (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot \hat{i} du dv$$

$$\vec{n} \cdot \hat{j} dA = (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot \hat{j} du dv$$

$$\text{y} \quad \vec{n} \cdot \hat{k} dA = (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot \hat{k} du dv$$

Por otra parte, sabiendo que:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{y} \quad \vec{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

calculamos  $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ ;

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

Entonces:

$$\vec{n} \cdot \hat{i} dA = (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot \hat{i} du dv = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du dv$$

$$\vec{n} \cdot \hat{j} dA = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv$$

$$\vec{n} \cdot \hat{k} dA = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv$$

Con el fin de relacionar estas expresiones con  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , y siendo:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Las diferenciales totales de  $X(u,v)$ ,  $Y(u,v)$  y  $Z(u,v)$  respectivamente, supondremos\* que existe una operación entre ellas, simbolizada por una "cuña"  $\wedge$ , tal que las componentes en  $i$ ,  $j$  y  $k$  de  $\vec{n} dA$  ya obtenidas, sean los resultados correspondientes a  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$  y  $dx \wedge dy$ ; es decir:

$$\vec{n} \cdot \hat{i} dA = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du dv = dy \wedge dz$$

$$\vec{n} \cdot \hat{j} dA = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv = dz \wedge dx$$

\* Esta operación existe y es el producto de  $dx$  por  $dy$ , pero en el desarrollo se utilizan formas diferenciales, tema que no se incluye en los cursos de cálculo.

$$\vec{n} \cdot \hat{k} dA = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv = dx \wedge dy$$

Tenemos pues, las igualdades siguientes:

$$\oint_{\partial S_0} V_x dx + V_y dy + V_z dz = \oint_{\partial S_0} (V_x, V_y, V_z) \cdot (dx, dy, dz) = \oint_{\partial S_0} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

$$= \iint_S \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cdot (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$$

$$= \iint_S \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Obteniendo la expresión en componentes, del Teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial S_0} V_x dx + V_y dy + V_z dz = \iint_S \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

#### SIGNIFICADO DEL ROTACIONAL:

Utilizando la forma vectorial del Teorema de Stokes, podemos hallar matemáticamente el significado del rotacional.

Consideremos que  $\partial S_0$  es una curva cerrada circular con centro en  $P$  y con radio  $\rho$ , en la superficie en  $\mathbb{R}^3$  de un fluido, cuyo campo de velocidades es  $\vec{V}(x, y, z)$ .

Ahora, como las derivadas parciales de  $\vec{V}$  son continuas, pues  $\vec{V}$  es de clase  $C^1$ ; se tiene que  $\text{rot } \vec{V}$  es un campo vectorial, también continuo, por lo cual puede aplicarse el Teorema del valor medio para integrales, obteniendo la igualdad:

$$\iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \text{rot } \vec{V}(a) \cdot \vec{n}(a) A(S)$$



donde  $Q$  es algún punto en la superficie  $S$  acotada por  $\partial S$ , y  $A(S)$  es el área de la misma.

Pero  $\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} dA$ , entonces:

$$\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \text{rot } \vec{v}(Q) \cdot \vec{n}(Q) A(S)$$

Luego:  $\text{rot } \vec{v}(Q) \cdot \vec{n}(Q) = \frac{\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{l}}{A(S)}$

Así  $\text{rot } \vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{rot } \vec{v}(Q) \cdot \vec{n}(Q) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{l}}{A(S)}$

Esta es:

$$\text{rot } \vec{v}(P) \cdot \vec{n}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{l}}{A(S)}$$

La igualdad nos dice que el rotacional en un punto  $P$  del fluido, es el límite de la circulación, del campo  $\vec{v}$ , por unidad de área cuando ésta tiende a cero; por lo que en el punto  $P$  se tiene un efecto de rotación local. FIG. 70.

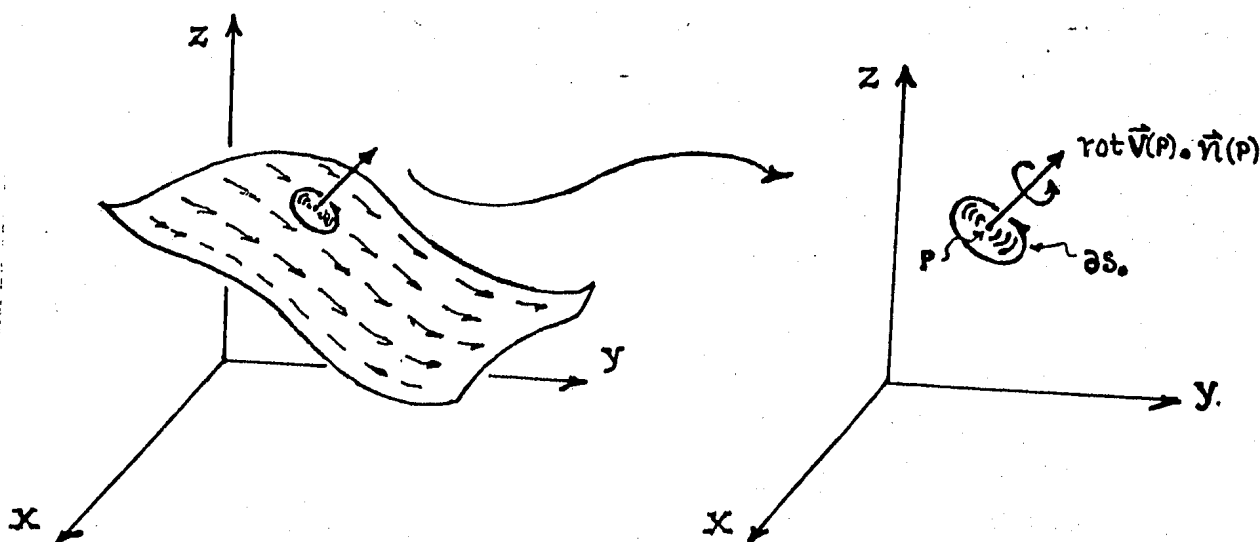


FIG. 70

### CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE STOKES:

Primero daremos alguna nomenclatura para las regiones de acuerdo a los fenómenos que en cada una se presentan.

Continuando con los fluidos, denotamos por  $\mathcal{R}$  el espacio completo ocupado por el fluido con campo de velocidades  $\vec{V}(x, y, z)$ ; el espacio libre de vorticidades por  $\mathcal{R}_L$  y el resto por  $\mathcal{R}_V$  que es el espacio ocupado por las vorticidades. Es decir  $\text{rot } \vec{V}(P) = 0$  si  $P \in \mathcal{R}_L$  y  $\text{rot } \vec{V}(P) \neq 0$  si  $P \in \mathcal{R}_V$ .

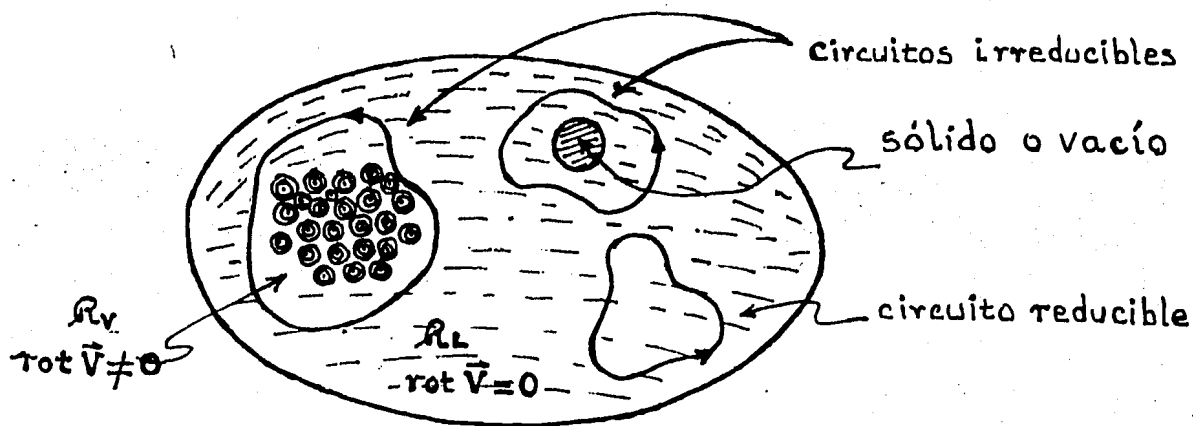


FIG. 71

Diremos que una curva cerrada o circuito  $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_L$  es reducible si puede contraerse hasta un punto sin salir de la región  $\mathcal{R}_L$ , y que es irreducible si en la contracción, la curva  $\mathcal{C}$  se interseca con  $\mathcal{R}_V$  - o bien con un sólido o con un espacio vacío.

Una región  $\mathcal{R}_L$  para la cual todo circuito  $\mathcal{C} \in \mathcal{R}_L$  es reducible, se dice que es simplemente conexa.

Si la velocidad  $\vec{V}$  del fluido, puede expresarse como el gradiente de una función escalar  $\Psi(x, y, z)$ , es decir si  $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \nabla \Psi$ , se dice que el flujo es potencial, y la función escalar  $\Psi$  es llamada velocidad potencial.

Utilizando el Teorema de Stokes, probaremos que en la región  $\mathcal{R}_L$ , el flujo es potencial o sea que existe  $\Psi$  tal que  $\vec{V} = \nabla \Psi$ .

Consideremos dos puntos, uno fijo  $O$  y uno arbitrario  $P$  en una región  $\mathcal{R}_L$  simplemente conexa, donde suponemos que el campo  $\vec{V}$  es de clase  $C^1$ . Uniendo  $O$  y  $P$  con dos curvas distintas, cada una en  $\mathcal{R}_L$ , FIG. 72, la unión de las dos curvas  $OAP$  y  $OBP$  forma la curva cerrada  $\partial S_0$ ,  $OAPBO$  orien-

- tada positivamente, la cual acota a una región  $S$  simplemente

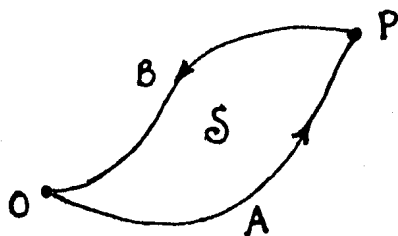


FIG. 72

te conexa, entonces:

$$\int_{OAP} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{PBO} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{OAPBO} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\partial S_0} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

pero por el teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial S_0} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

y ya que  $S = \partial S_0 \cup S_0$  esta en  $\mathcal{R}_L$ ,  $\text{rot } \vec{v} = 0$ , por lo tanto

$$\int_{OAP} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{PBO} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = 0$$

Así:

$$\int_{OAP} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{OBP} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Como las curvas son arbitrarias, la integral sólo depende del punto  $P$  (y del punto fijo  $O$ ) y no de los caminos seguidos.

Ya establecido esto, si  $\mathcal{C}$  es cualquier curva simple orientada, uniendo un punto fijo  $O$  con un punto arbitrario  $P = (x, y, z)$ , entonces al definir la función escalar  $\psi(x, y, z)$  como:

$$\psi(x, y, z) = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

se tiene que  $\psi$  no depende de  $\mathcal{C}$ .

Por comodidad, tomamos el punto fijo como  $(0, 0, 0)$  y siguiendo un primer camino con trazos paralelos a los ejes hasta

- Llegar a  $(x, y, z)$ , FIG. 73. Como se aprecia en la figura, este

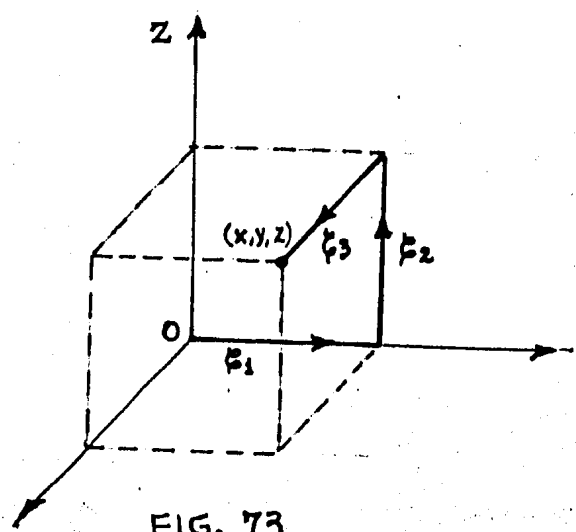


FIG. 73

camino consta de tres partes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , así:

$$\psi(x, y, z) = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{C_3} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  están descritas respectivamente por las parametrizaciones:

- $t \rightarrow (0, t, 0)$  con  $t \in [0, y]$
- $t \rightarrow (0, y, t)$  con  $t \in [0, z]$
- $t \rightarrow (t, y, z)$  con  $t \in [0, x]$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} &= \int_0^y \vec{v}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_0^y \vec{v}(0, t, 0) \cdot (0, 1, 0) dt = \\ &= \int_0^y [V_x(0, t, 0), V_y(0, t, 0), V_z(0, t, 0)] \cdot (0, 1, 0) dt = \int_0^y V_y(0, t, 0) dt \end{aligned}$$

Analogamente se obtiene que:

$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^z V_z(0, y, t) dt \quad \text{y} \quad \int_{C_3} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^x V_x(t, y, z) dt$$

Luego:

$$\Psi(x, y, z) = \int_0^y V_y(0, t, 0) dt + \int_0^z V_z(0, y, t) dt + \int_0^x V_x(t, y, z) dt$$

de donde al derivar con respecto a  $x$  se tiene que:

$$\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} = V_x(x, y, z)$$

Para hallar  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  y  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$  seguimos los caminos mostrados en las figuras 74 y 75.

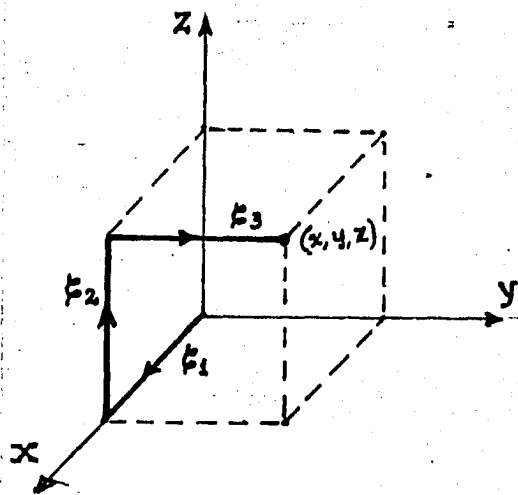


FIG. 74.- Camino para hallar  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$

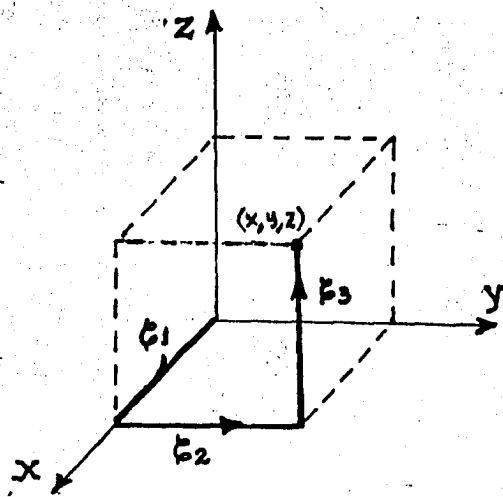


FIG. 75.. Camino para hallar  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$

Obteniendo primero, que:

$$\Psi(x, y, z) = \int_0^x V_x(t, 0, 0) dt + \int_0^z V_z(x, 0, t) dt + \int_0^y V_y(x, t, z) dt$$

y de aquí:

$$\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y} = V_y(x, y, z)$$

Finalmente, al seguir el último camino:

$$\Psi(x, y, z) = \int_0^x V_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y V_y(x, t, 0) dt + \int_0^z V_z(x, y, t) dt$$

de donde:

$$\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} = V_z(x, y, z)$$

Así, pues:

$$\vec{V}(x, y, z) = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z)) = \left( \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} \right) = \nabla \Psi$$

Por tanto, en la región  $R_L$  libre de vorticidades y simplemente conexa, se tiene un flujo potencial. Esto es, si  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$  entonces existe la velocidad potencial o potencial de velocidad  $\Psi(x, y, z)$  tal que  $\vec{V} = \nabla \Psi$ .

## EL TEOREMA DE GAUSS

### LA INTEGRAL DE SUPERFICIE.

En el capítulo anterior, señalamos ya, que:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

es una integral de superficie, pues la componente normal del rotacional,  $\operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n}$  se integra sobre toda la superficie  $S$ .

En general, si  $S$  es una superficie suave orientada y  $\vec{V}$  es un campo vectorial definida en  $S$ , llamaremos integrales de superficie a aquellas en las que se integre sobre la superficie  $S$ , la componente normal del campo  $\vec{V}$ , simbólicamente:

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

donde la normal  $\vec{n}$  apunta al exterior de  $S$ .

Otra forma de expresar esta integral, es con relación a la parametrización de la superficie; siendo  $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  dicha parametrización, entonces:

$$\vec{n} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} \quad \text{y} \quad dA = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, du \, dv$$

así:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}(\phi(u,v)) \cdot \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, du \, dv = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}(\phi(u,v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \, du \, dv \end{aligned}$$

Veamos ahora, el significado geométrico y físico de esta integral:

Como se observa en la figura 76,  $\vec{V} \cdot \vec{n} \, \Delta A$  es el volumen de un paralelepípedo de base  $\Delta A$  y altura  $\vec{V} \cdot \vec{n}$ , por lo que

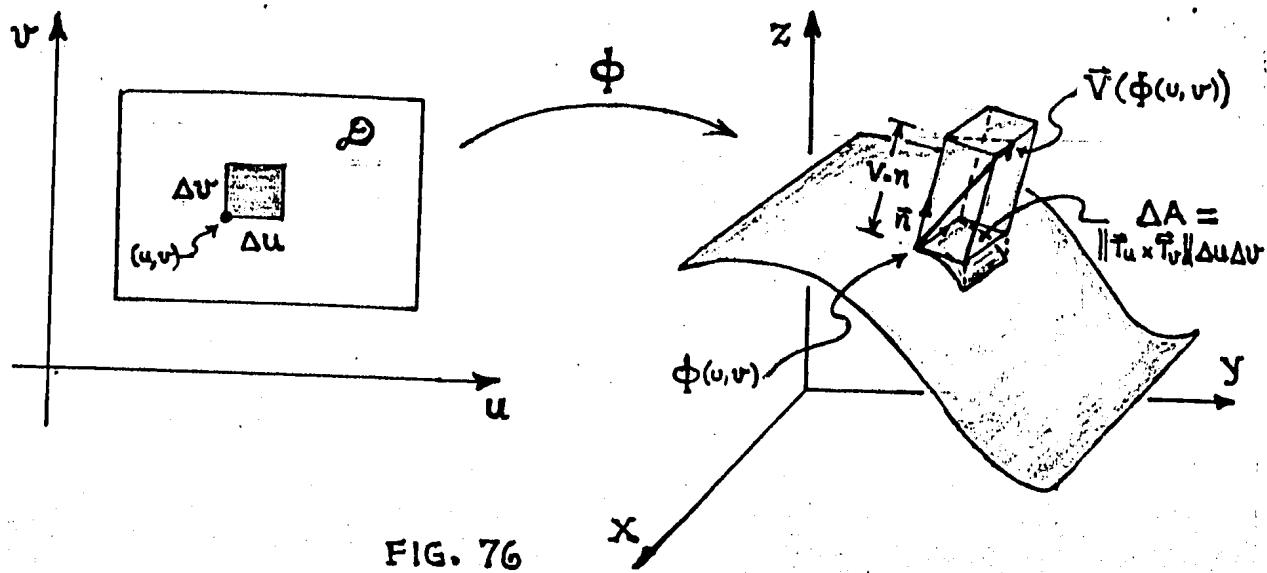


FIG. 76

- la integral:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

nos da el volumen total de todos los paralelepípedos cuando el número de ellos tiende a  $\infty$  y cada base  $\Delta A$  tiende a cero.

Para la interpretación física, consideremos que  $\vec{v}$  es el campo de velocidades de un fluido y tengamos presente que la normal  $\vec{n}$  señala al exterior de  $S$ , entonces la integral de superficie nos da el volumen neto de fluido que pasa del interior al exterior de  $S$ ; teniéndose un flujo hacia el exterior, si la integral es positiva, y hacia el interior si la integral es negativa.

Este significado físico, nos sugiere un nombre para esta integral, y la nombraremos el Flujo de  $\vec{v}$  a través de  $S$ .

Para las superficies cerradas  $S$ , limitando a una región  $\mathcal{E}$  en  $\mathbb{R}^3$ , es intuitivamente claro, cual es el exterior y cual es el interior. Por lo que si la superficie limita un volumen de gas, cuyo campo de velocidades es  $\vec{v}(x, y, z)$ , la integral de superficie nos da el volumen de gas que se escapa a través de  $S$  en la unidad de tiempo.



## EL TEOREMA DE GAUSS:

Para obtener el Teorema de Gauss, fijemonos en una región  $\mathcal{E}$  en  $\mathbb{R}^3$  acotada por una superficie cerrada  $\mathcal{S}$ , FIG. 77. Luego, -

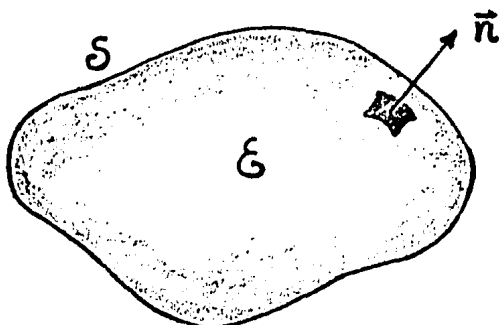


FIG. 77

partamos la región  $\mathcal{E}$  en dos regiones  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  con una superficie  $\mathcal{S}_{ab}$  como se muestra en la figura 78.

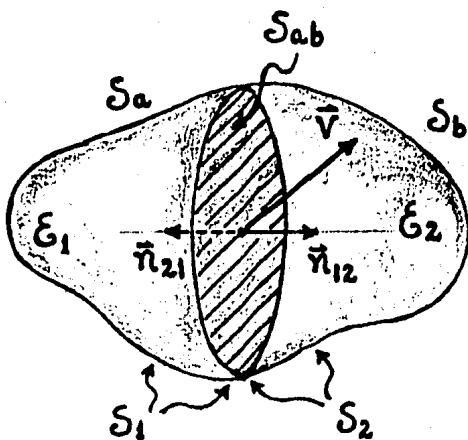


FIG. 78

Así la región  $\mathcal{E}_1$  queda limitada con la superficie cerrada  $\mathcal{S}_1$  constituida por  $\mathcal{S}_a$  y  $\mathcal{S}_{ab}$ , y la región  $\mathcal{E}_2$  queda limitada por la superficie cerrada  $\mathcal{S}_2$  constituida por  $\mathcal{S}_b$  y  $\mathcal{S}_{ab}$ .

Como se observa en la figura, en cada punto de  $\mathcal{S}_{ab}$  se tienen dos normales; la normal exterior a la superficie  $\mathcal{S}_1$  identificada por  $\vec{n}_{12}$  y la normal exterior a  $\mathcal{S}_2$  simbolizada por  $\vec{n}_{21}$ , de manera que  $\vec{n}_{21} = -\vec{n}_{12}$ . Entonces se tiene la siguiente relación:

$$\iint_{\mathcal{S}_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{21} dA = - \iint_{\mathcal{S}_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{12} dA$$

Calculemos ahora, el flujo que sale de  $S_1$  :

$$\iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{S_a} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{12} \, dA$$

y el flujo a través de  $S_2$  :

$$\iint_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{S_b} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{21} \, dA$$

Sumando estos flujos, se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint_{S_a} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{12} \, dA + \iint_{S_b} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{21} \, dA = \\ &= \iint_{S_a} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{12} \, dA + \iint_{S_b} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA - \iint_{S_{ab}} \vec{v} \cdot \vec{n}_{12} \, dA = \\ &= \iint_{S_a} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_b} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA \end{aligned}$$

Es decir, el flujo a través de las dos superficies cerradas  $S_1$  y  $S_2$ , es igual al flujo a través de la superficie cerrada  $S$  original:

$$\iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

En general, si la región  $E$  se parte en  $k$  regiones,  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , acotadas por las superficies  $S_1, S_2, \dots, S_k$  respectivamente, los flujos a través de las superficies comunes a dos regiones, se cancelarán, quedando la igualdad:

$$\sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

donde cada  $S_i$  es una superficie cerrada.

Para hallar la relación existente entre el flujo a través de la superficie  $S$  y el flujo en la vecindad de cada punto en el interior de la región limitada por  $S$ , dividiremos la región  $\mathcal{E}$  en pequeñas regiones, todas acotadas por cubos; quedando en el interior un número  $N$  de cubos completos limitados por una superficie  $S_N$ .

Luego de encontrar la expresión para el flujo a través de cada cubo, tomamos el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  y el volumen de cada cubito tiende a cero; obteniendo así la relación buscada.

Construyamos los cubos, dividiendo la región  $\mathcal{E}$  con superficies planas paralelas a los planos coordenados,  $XY$ ,  $YZ$  y  $ZX$ ; de manera que cada cubo queda ubicado como se aprecia en la figura siguiente:

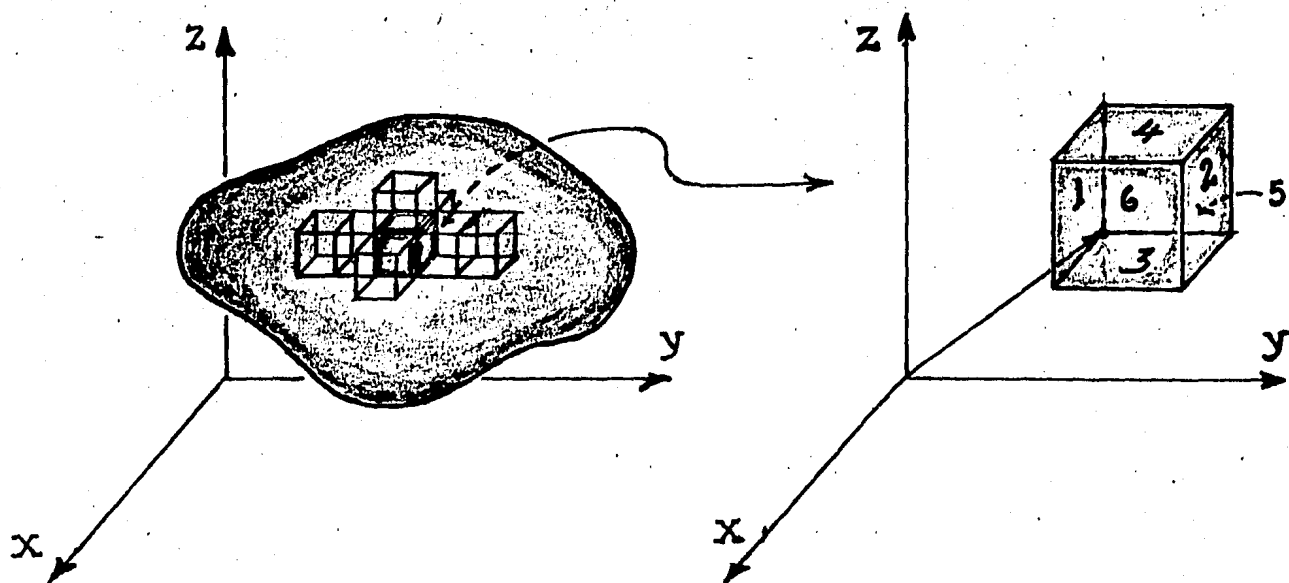


FIG. 79

Siendo  $(x, y, z)$ , las coordenadas del vértice más cercano al origen y  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  las longitudes de los lados en las direcciones de los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  respectivamente, hallemos el flujo del campo  $\vec{v}$  a través de este cubo.

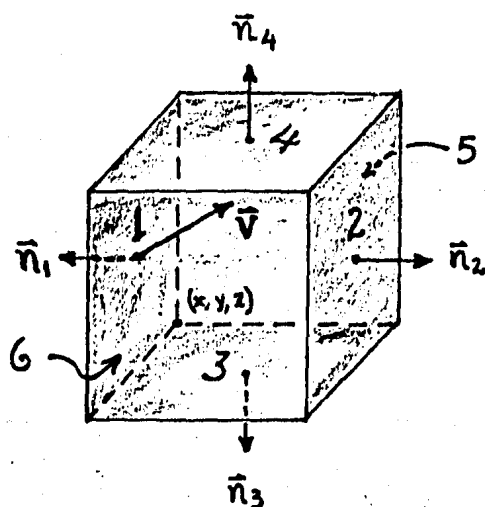


FIG. 80

Observemos que las normales unitarias exteriores a las caras  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , son los vectores:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (0, -1, 0), & \vec{n}_2 &= (0, 1, 0) = -\vec{n}_1 \\ \vec{n}_3 &= (0, 0, -1) & \vec{n}_4 &= (0, 0, 1) = -\vec{n}_3 \\ \vec{n}_5 &= (-1, 0, 0) & \vec{n}_6 &= (1, 0, 0) = -\vec{n}_5 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta, que el campo  $\vec{V}(x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$  es continuo y que el cubo es pequeño, podemos hacer una aproximación, suponiendo que el campo es constante en todas las caras. Así los flujos a través de cada cara, serán los productos de la componente normal del campo por el área de la cara correspondiente, esto es:

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \Delta x \Delta z &= (V_x, V_y, V_z) \cdot (0, -1, 0) \Delta x \Delta z = -V_y(1) \Delta x \Delta z \\ \vec{V} \cdot \vec{n}_2 \Delta x \Delta z &= V_y(2) \Delta x \Delta z \\ \vec{V} \cdot \vec{n}_3 \Delta x \Delta y &= -V_z(3) \Delta x \Delta y \\ \vec{V} \cdot \vec{n}_4 \Delta x \Delta y &= V_z(4) \Delta x \Delta y \\ \vec{V} \cdot \vec{n}_5 \Delta y \Delta z &= -V_x(5) \Delta y \Delta z \\ \vec{V} \cdot \vec{n}_6 \Delta y \Delta z &= V_x(6) \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

donde el número entre paréntesis, indica la cara de que se trata.

Luego, el flujo a través del cubo es aproximadamente, la suma de estos seis productos, que ya reagrupados en caras

paralelas, toman la forma siguiente:

$$\iint_{\partial} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA \approx [V_x(6) - V_x(5)] \Delta y \Delta z + [V_y(2) - V_y(1)] \Delta x \Delta z + [V_z(4) - V_z(3)] \Delta x \Delta y$$

Como supusimos que el valor del campo era el mismo en todas las caras, esta aproximación nos da un flujo cero.

Al igual que en los teoremas anteriores si se pide que el campo sea de clase  $C^1$ , podemos tomar en cuenta la variación del campo de una cara a la opuesta, logrando una mejor aproximación. Pidamos pues, que  $\vec{v}$  sea  $C^1$ , con lo cual tenemos que:

$$V_x(6) \approx V_x(5) + \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x$$

$$V_y(2) \approx V_y(1) + \frac{\partial V_y}{\partial y} \Delta y$$

$$V_z(4) \approx V_z(3) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \Delta z$$

Entonces:

$$V_x(6) - V_x(5) \approx \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x$$

y multiplicando por  $\Delta y \Delta z$

$$[V_x(6) - V_x(5)] \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Así mismo se obtiene que:

$$[V_y(2) - V_y(1)] \Delta x \Delta z \approx \frac{\partial V_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y

$$[V_z(4) - V_z(3)] \Delta x \Delta y \approx \frac{\partial V_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Notese que estas siguen siendo sólo aproximaciones, ya que aprovechando que las parciales son continuas, estamos suponiendo que las razones de variación  $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V_y}{\partial y}$  y  $\frac{\partial V_z}{\partial z}$  son constantes a lo largo de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  respectivamente.

Sustituyendo en el flujo del cubo, estas mejores aproximaciones:

$$\begin{aligned} \iint_{\square} \vec{v} \cdot \vec{n} dA &\approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z = \\ &= \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

o sea:

$$\iint_{\square} \vec{v} \cdot \vec{n} dA \approx \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Entonces el flujo a través de la superficie  $S_N$  que encierra a los  $N$  cubos, es aproximadamente la suma de estos  $N$  valores:

$$\iint_{S_N} \vec{v} \cdot \vec{n} dA \approx \sum_i \sum_j \sum_k \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

para todos los  $i, j, k$  tales que el cubito  $\square_{ijk}$  esta completamente dentro de la superficie  $S_N$ .

La igualdad se consigue al tomar el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  y las longitudes  $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$  tienden a cero.

$$\iint_{S_N} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0, \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \sum_k \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Pero en el límite, la superficie  $S_N$  coincide con la superficie  $S$  y el lado derecho es la integral triple sobre la región  $\mathcal{E}$  acotada por  $S$ . Así:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\mathcal{E}} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

- donde la expresión:

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

es el flujo local en cada punto del interior de la región  $\mathcal{E}$ , es decir, es la cantidad de fluido que "diverge" de cada elemento de volumen  $dV = dx dy dz$ . Para tener presente este significado, nombraremos a la cantidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

La divergencia del campo  $\vec{V}$  y la abreviaremos como  $\text{div } \vec{V}$ , por lo que:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Reescribiendo la igualdad obtenida antes:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\mathcal{E}} \text{div } \vec{V} dV$$

Esta igualdad y sus hipótesis, se conoce como el Teorema de Gauss o de la divergencia. Ahora lo enunciaremos formalmente:

**TEOREMA DE GAUSS.** Sea  $\mathcal{E}$  una región en  $\mathbb{R}^3$ , acotada por una superficie  $S$  cerrada orientable y sea  $\vec{V}$  un campo vectorial de clase  $C^1$ , definido sobre  $\mathcal{E} \cup S$ , entonces:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\mathcal{E}} \text{div } \vec{V} dV$$

El teorema, relaciona una integral de superficie con una integral de volumen, y nos dice que el flujo del campo  $\vec{V}$  a través de una superficie cerrada  $S$ , es igual a la magnitud total de las divergencias de  $\vec{V}$  en todo el volumen  $V$  acotado por  $S$ .

Recordando que la normal unitaria  $\vec{n}$  tiene como coordenadas a los cosenos directores, o sea:

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

escribimos las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \iint_S (V_x \cos \alpha + V_y \cos \beta + V_z \cos \gamma) dA &= \iint_S (V_x, V_y, V_z) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dA = \\ &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\mathcal{E}} \operatorname{div} \vec{v} dV = \iiint_{\mathcal{E}} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Obteniendo la expresión del Teorema de Gauss en componentes:

$$\iint_S (V_x \cos \alpha + V_y \cos \beta + V_z \cos \gamma) dA = \iiint_{\mathcal{E}} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

### SIGNIFICADO DE LA DIVERGENCIA:

A partir del Teorema de Gauss, podemos obtener el significado preciso de la divergencia de  $\vec{v}$ .

Tomemos a la región  $\mathcal{E}_\rho$  como la acotada por la superficie esférica  $\mathcal{S}_\rho$  con centro en P y radio  $\rho$ , conteniendo un gas cuyo campo de velocidades  $\vec{v}(x, y, z)$  es de clase  $C^1$  en la unión  $\mathcal{E}_\rho \cup \mathcal{S}_\rho$ . Luego, por el teorema del valor medio para integrales:

$$\iiint_{\mathcal{E}_\rho} \operatorname{div} \vec{v} dV = \operatorname{div} \vec{v}(a) \cdot \operatorname{Volumen}(\mathcal{E}_\rho)$$

para algún punto  $a$  en  $\mathcal{E}_\rho$ .

y ya que:

$$\iint_{\mathcal{S}_\rho} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\mathcal{E}_\rho} \operatorname{div} \vec{v} dV$$



- entonces

$$\iint_{S_\rho} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \text{div } \vec{V}(Q) \cdot V(\epsilon_\rho)$$

de aquí:

$$\text{div } \vec{V}(Q) = \frac{1}{V(\epsilon_\rho)} \iint_{S_\rho} \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

por lo tanto:

$$\text{div } \vec{V}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\epsilon_\rho)} \iint_{S_\rho} \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Así el significado preciso de la divergencia, es: el límite del flujo por unidad de volumen cuando este tiende a cero.

Para un fluido en una región  $\mathcal{E}$  encerrada por  $S$ , cuya divergencia en todo punto de  $\mathcal{E}$  es cero,  $\text{div } \vec{V} = 0$ , se tiene que:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\mathcal{E}} \text{div } \vec{V} dV = 0$$

es decir, que el flujo a través de  $S$  es cero y por lo tanto el volumen  $V$  de fluido no cambia con el tiempo, esto es, no se expande ni se comprime. Lo cual sugiere los nombres de fluido incompresible para el caso en que  $\text{div } \vec{V} = 0$  y fluido compresible cuando  $\text{div } \vec{V} \neq 0$ .

Una observación muy importante y que por tanto se debe tener presente, es que siempre la superficie  $S$  que acota a la región  $\mathcal{E}$ , no es una superficie material sino la frontera imaginaria de la región que nos interesa analizar; pues si las superficies fuesen materiales, no podríamos hablar del flujo a través de ellas.

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL PLANO.

Recordemos que para establecer el Teorema de Green, dado un campo vectorial  $\vec{V}(x,y)$  y una curva cerrada  $C$  determinando a la región  $S$  del plano, se analizaron las componentes tangenciales del campo  $\vec{V}$  a lo largo de  $C$  y de cada cuadradito en la región  $S$ .

Aquí veremos qué relación aparece si consideramos ya no las componentes tangenciales sino las componentes normales de  $\vec{V}$ .

SIGNIFICADO DE  $\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} dl$

Con el fin de hallar primeramente el significado de la integral de las componentes normales del campo en torno a la curva  $C$ , tracemos en un punto  $(x,y)$  cualquiera sobre  $C$ , una normal unitaria señalando hacia el exterior de  $S_0$ , Fig. 81.

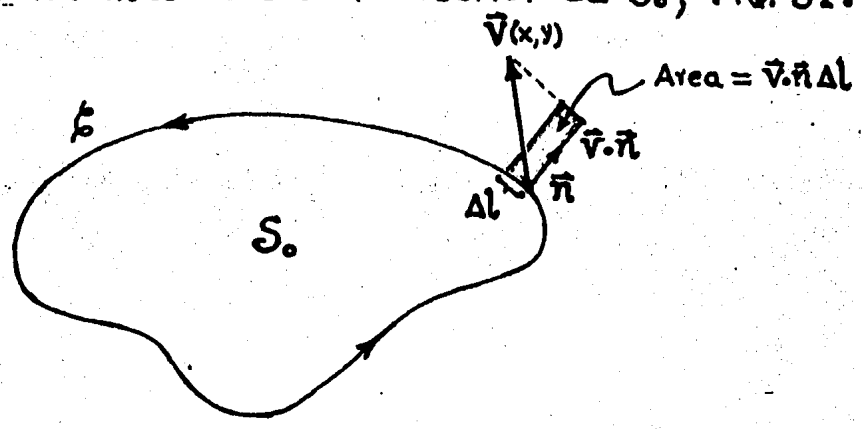


FIG. 81

Como se aprecia en la figura, siendo  $\vec{V}(x,y)$  el valor del campo en el punto  $(x,y)$ , la cantidad  $\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta l$  es el área de un rectángulito de ancho  $\Delta l$  y longitud  $\vec{v} \cdot \vec{n}$ . De aquí que la integral

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} dl$$

nos da el área total de todos estos rectángulos sobre la curva  $C$  cuando  $\Delta l$  tiende a cero.

Ahora, para hallar la relación buscada, dividamos la región  $S_0$  con líneas horizontales y verticales en la misma forma que en el Teorema de Green, FIG. 82, quedando  $N$  cuadraditos -

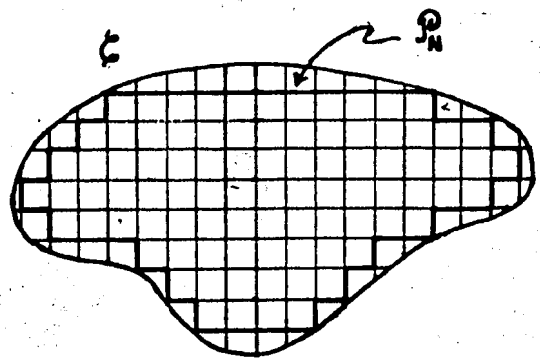


FIG. 82

completos contenidos dentro de la poligonal  $P_N$ .

Suponiendo que el campo  $\vec{V}(x, y)$  es constante en todos los lados de un cuadradito, calculemos el flujo a través de él.

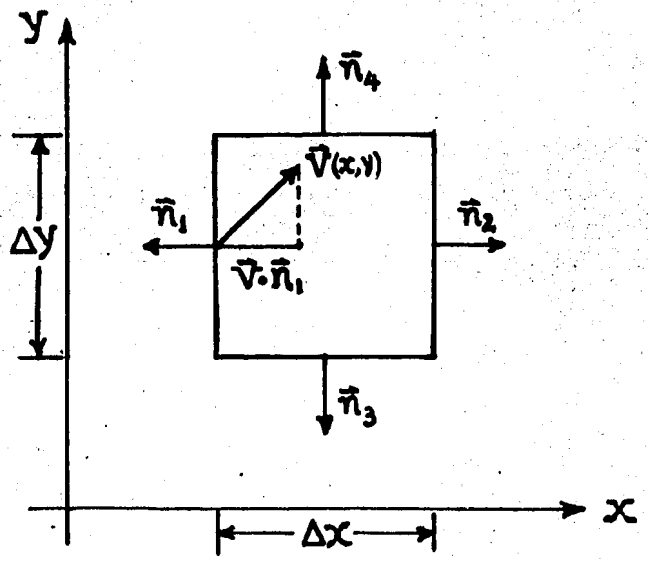


FIG. 83

Siendo  $\Delta x$  y  $\Delta y$  las longitudes de los lados del cuadrado a lo largo de los ejes  $X$  e  $Y$ , y

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (-1, 0), & \vec{n}_2 &= (1, 0) = -\vec{n}_1 \\ \vec{n}_3 &= (0, -1), & \vec{n}_4 &= (0, 1) = -\vec{n}_3 \end{aligned}$$

las normales exteriores a los lados, tenemos que los flujos son:

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}_1) \Delta y = (v_x, v_y) \cdot (-1, 0) \Delta y = -v_x(1) \Delta y$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}_2) \Delta y = v_x(2) \Delta y$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}_3) \Delta x = -v_y(3) \Delta x$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{n}_4) \Delta x = v_y(4) \Delta x$$

Luego el flujo en el cuadrado, es aproximadamente:

$$\int_{\square} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dl \approx [v_x(2) - v_x(1)] \Delta y + [v_y(4) - v_y(3)] \Delta x$$

el cual es cero por haber supuesto que el campo  $\vec{v}$  es constante en el cuadrado.

Una vez más, si  $\vec{v}$  es de clase  $C^1$ , se tienen las relaciones

$$[v_x(2) - v_x(1)] \Delta y \approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

$$[v_y(4) - v_y(3)] \Delta x \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

y sustituyendo en el flujo del cuadrado.

$$\int_{\square} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dl \approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Entonces, el flujo a lo largo de la poligonal  $P_N$ , será - aproximadamente la suma de  $N$  cantidades de estas.

$$\int_{P_N} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dl \approx \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

y en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\Delta y_j \rightarrow 0$ , se tiene la igualdad:

$$\int_{P_N} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dl = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Delta x_i \Delta y_j$$

pero esta relación es la misma que:

$$\int_E \vec{v} \cdot \vec{n} \, dl = \iint_S \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy$$

donde la expresión

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx dy$$

es el flujo local en cada punto de la región  $S$ , por lo que también le llamaremos la divergencia de  $\vec{V}$ , así:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_S \operatorname{div} \vec{V} dx dy$$

Con esto hemos obtenido el Teorema de la divergencia en el plano, que formulamos a continuación:

**TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL PLANO.** — Sea  $\mathcal{C}$  una curva cerrada que acota a la región  $S_0$  del plano y  $\vec{V}(x, y)$  un campo vectorial de clase  $C^1$ , definido en la unión  $S = S_0 \cup \mathcal{C}$ ; entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_S \operatorname{div} \vec{V} dx dy$$

donde  $\vec{n}$  es la normal unitaria exterior a  $\mathcal{C}$ .

Este resultado también puede obtenerse por una aplicación directa del Teorema de Green, como en el **CALCULO VECTORIAL** de Marsden, pag. 356.

## Conclusiones.

- Como se ha visto, los tres teoremas obtenidos, tienen una característica común, esta es, que cada uno de ellos nos relaciona la integral sobre una región del espacio ( $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$ ) con la integral sobre la frontera de dicha región. Es tal característica, la razón de que estos teoremas se presenten conjuntamente.

- La lectura de este material, nos proporciona claridad sobre el contenido de los tres teoremas, por lo que considero que el estudiante comprenderá la importancia de ellos y por lo tanto, estará dispuesto al tratamiento formal que deberá seguir, durante el curso de Cálculo IV, a este tratamiento intuitivo.

- En el presente trabajo, se ha mostrado la primera etapa del proceso que se sigue en el quehacer matemático, pues es así, por la vía de la intuición. como se obtienen los resultados que de ser correctos, en una segunda etapa, se deben de poder demostrar rigurosamente para tener derecho a formar parte del cuerpo de la matemática. Es esta segunda etapa, la única que se expone en los textos, quedando oculta la que aquí se ha desarrollado.

## Bibliografía

- 1.- Theoretical Hydrodynamics .- L.M. Milne Thomson .- The Macmillan Press.- London 1968.
- 2.- Fluid Mechanics.- Landau Lev Davidovic.- Pergamon Press.- London 1959.
- 3.- Mecánica de Fluidos. Selección de Problemas Resueltos.- J. Williams.- Editorial Limusa.- México 1979
- 4.- Física. Vol. I. Mecánica.- Marcelo Alonso y Edward J. Finn.- Fondo Educativo Interamericano.- E.U.A. 1976.
- 5.- The Feynman Lectures on Physics. Vol. II.- Feynman, Leighton, Sands.- Fondo Educativo Interamericano.- E.U.A.. 1972.
- 6.- Div, Grad, Curl, and All That.- H. M. SCHEY.- W.W.- Norton and Company.- New York.
- 7.- Cálculo Vectorial.- J.E. Marsden y A.J. Tromba.- Fondo Educativo Interamericano.- E.U.A. 1981.
- 8.- Análisis Matemático 2.- Haaser, LaSalle, Sullivan.- Editorial Trillas.- México 1976.
- 9.- Calculus. Vol II.- Tom M. Apostol.- Editorial Reverte.- Barcelona 1977.
- 10.- Campos Vectoriales.- L. Marder.- Editorial Limusa.- México 1974.