



# Universidad Nacional Autónoma de México

---

Facultad de Ciencias

ASIGNACION Y DESPACHO DE UNIDADES HIDRO-  
ELECTRICAS Y TERMOELECTRICAS PARA LA  
OPTIMIZACION DEL COSTO DE OPERACION EN  
EL SISTEMA ELECTRICO NACIONAL

T E S I S

Que para obtener el Título de:

MATEMATICO

P r e s e n t a

Luis Ignacio Hernández Vivar



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

NOTACION .....	1
ABREVIATURAS .....	4
SISTEMA DE NUMERACION .....	5
RESUMEN .....	6
CAPITULO 1 "INTRODUCCION" .....	1-1
1.1 COORDINACION HIDROTERMICA A CORTO PLAZO, SU ENTORNO .....	1-3
1.1.1 INICIACION SEMANAL Y SU ENTORNO .....	1-9
1.1.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACION POR INTERVALOS. PLANTEAMIENTO Y COMENTARIOS .....	1-13
1.2 COMENTARIOS AL CONTENIDO DE ESTE TRABAJO .....	1-17
CAPITULO 2 "ALTERNATIVAS DE SOLUCION" .....	2-1
2.1 PROGRAMACION CUADRATICA .....	2-4
2.2 ALGUNOS ASPECTOS IMPORTANTES DE NUESTRO PROBLEMA .	2-10
2.2.1 APROVECHAMIENTO DE LA ESTRUCTURA DE RED .....	2-11
2.2.2 ELIMINACION DE COTAS INFERIORES .....	2-16
2.2.3 APROXIMACION DE LA FUNCION DE COSTO POR PEDAZOS DE LINEA .....	2-29
2.3 EL ALGORITMO PRIMAL-DUAL (AP-D) .....	2-41
2.3.1 DESARROLLO DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL .....	2-44
2.3.2 EL AP-D EN PROBLEMAS DE FLUJO A COSTO MINIMO .....	2-56

2.3.3 EL AP-D Y EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE.

ALGORITMO ALFABETA ..... 2-72

2.3.3.1 ALGUNOS RESULTADOS UTILES DEL

ALGORITMO ALFABETA ..... 2-88

2.3.4 TRANSFORMACION DE WAGNER ..... 2-89

2.3.5 OTRAS ALTERNATIVAS PRIMALES-DUALES ..... 2-98

2.4 SOLUCION POR UN METODO HEURISTICO ..... 2-99

CAPITULO 3 " IMPLANTACION DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL

EN EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CAPACITADO

CON ARCOS PARALELOS ..... 3-1

3.1 CONSTRUCCION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE CAPACITADO

CON FUNCION DE COSTO CONVEXA, APROXIMADA

LINEALMENTE, A PARTIR DEL PROBLEMA ORIGINAL ..... 3-3

3.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

CAPACITADO CON ARCOS PARALELOS ..... 3-4

3.3 ANALISIS Y DESARROLLO DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL

EN EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CAPACITADO

CON ARCOS PARALELOS ..... 3-9

3.3.1 DESARROLLO DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL EN

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CAPACITADO

CON ARCOS PARALELOS ..... 3-11

3.3.2 EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MAXIMO,

ALGUNOS RESULTADOS Y EJEMPLOS ..... 3-19

3.3.3 COMENTARIOS SOBRE LA APLICACION DEL

ALGORITMO PRIMAL-DUAL EN EL PROBLEMA

DEL TRANSPORTE CAPACITADO CON ARCOS PARALELOS .....	3-26
3.4 EJEMPLO DE LA IMPLANTACION DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL EN EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CAPACITADO CON ARCOS PARALELOS .....	3-34
CAPITULO 4 "ALGORITMO OUT OF KILTER" .....	4-1
4.1 TRANSFORMACION DE UNA RED DE FLUJOS EN UNA RED CIRCULATORIA .....	4-6
4.1.1 TRANSFORMACION DE LA RED ASOCIADA A NUESTRO PROBLEMA EN UNA RED CIRCULATORIA .....	4-9
4.2 RESULTADOS SOBRE CIRCULACION .....	4-11
4.3 EL PROBLEMA DE CIRCULACION A COSTO MINIMO .....	4-15
4.4 ESTRATEGIA DEL ALGORITMO OUT OF KILTER .....	4-29
4.5 EL ALGORITMO OUT OF KILTER .....	4-48
4.6 VALIDEZ Y CONVERGENCIA DEL ALGORITMO OUT OF KILTER .....	4-52
4.7 IMPLANTACION DEL ALGORITMO OUT OF KILTER EN NUESTRO PROBLEMA .....	4-58
4.7.1 MODIFICACION EN LOS DATOS DEL PROBLEMA ORIGINAL .....	4-60
4.7.2 ESTADO INICIAL DE LOS ARCOS DE LA RED AL APLICAR EL ALGORITMO OUT OF KILTER .....	4-69
4.7.3 RESULTADOS DE LA IMPLANTACION DE LA SUBROUTINA PRIDUA .....	4-73

4.8 ADAPTACION DEL ALGORITMO OUT OF KILTER AL

CASO ESPECIAL  $a(i,j) = 0, c(i,j) \geq 0$

$\forall (i,j) \in A - \{ (t,s) \}$  ..... 4-76

CAPITULO 5 "CONCLUSIONES, CONJETURAS Y RECOMENDACIONES" . 5-1

APENDICE A ..... A-1

APENDICE B ..... B-1

BIBLIOGRAFIA

## NOTACION

$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\rightarrow$	Tal que
$\in$	Elemento de
$\subset$	Subconjunto
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\langle \text{-----} \rangle$	Si y sólo si
$\text{---} \langle \text{---} \rangle$	Contradicción
$\infty$	Infinito
$\alpha$	Alfa
$\beta$	Beta
$\gamma$	Gama
$\Sigma$	Sumatoria

Por lo que respecta a los modelos de flujo en redes:

V	Conjunto de vértices
A	Conjunto de arcos
$G=(V,A)$	Gráfica G
N	Red N
i	Índice del nodo i
j	Índice del nodo j
(i,j)	Arco
$f(i,j)$	Flujo en el arco (i,j)
$a(i,j)$	Cota inferior para el arco (i,j)
$b(i,j)$	Cota superior para el arco (i,j)
$c(i,j)$	Costo unitario para el arco (i,j)
$d(i)$	Flujo externo en el nodo i
s	Nodo fuente
t	Nodo pozo

Por lo que respecta al problema que resuelve este trabajo

<b>P</b>	Conjunto de plantas hidroeléctricas
<b>I</b>	Conjunto de intervalos en el horizonte de planeación
<b>p</b>	Índice de la planta p
<b>i</b>	Índice del intervalo i
<b>e(p)</b>	Energía disponible de la planta p en el horizonte de planeación
<b>G(i)</b>	Límite superior de generación en el intervalo i
<b><math>\bar{H}(i,p)</math></b>	Límite superior de generación de la planta p en el intervalo i
<b><math>\underline{H}(i,p)</math></b>	Límite inferior de generación de la planta p en el intervalo i
<b>H(i,p)</b>	Generación de la planta p en el intervalo i

## ABREVIATURAS

(Q)	Problema Q
sii	Si y sólo si
i.e.	Es decir
p.a.	Para algun
f. o.	Función objetivo
P.d.	Por demostrar
PFC	Problema de programación cuadrática
PFL	Problema de programación lineal
s.c.	Sujeto a condiciones
AP-D	Algoritmo primal dual
A00K	Algoritmo out of kilter
AFF	Algoritmo de Ford y Fulkerson para el problema de flujo máximo
CHT	Coordinación Hidrotrémica a corto plazo

## **SISTEMA DE NUMERACION**

Cada capítulo está dividido en secciones. De esta manera, la sección tercera del capítulo 2 tiene el numeral 2.3. Eventualmente, las secciones de un capítulo se dividen en subsecciones. Así, la subsección 2 de la sección 1 del capítulo 4 tiene el numeral 4.1.2.

Los teoremas y las figuras tienen su propia enumeración por capítulo. Y así tenemos que el teorema 3.4 es el cuarto teorema del capítulo 3. Similarmente, 4.V es la quinta figura del capítulo 4.

Algunas definiciones, resultados menores o ejemplos son enumerados por sección-capítulo. Así, al hablar de (2.3.4) nos referimos al cuarto resultado, ejemplo o definición de la sección 3 del capítulo 2.

Un comentario extra, se intercambiará libremente en el texto el nombre de apéndice 1 (2) por apéndice A (B).

## RESUMEN

El problema tratado en este trabajo, se ubica en un esquema de Coordinación Hidrotérmica a corto plazo, i.e. en un esquema para la planeación, hasta de una semana, de uso de recursos hidráulicos y térmicos en sistemas eléctricos de potencia. De tal forma que cumpliendo con restricciones de operación, el costo de generación sea mínimo.

En este sentido, el problema a resolver se refiere a la búsqueda de una solución hidráulica inicial, cuyo planteamiento en términos matemáticos, se localiza en la clase de problemas de distribución, a costo mínimo, de flujo en redes con costos cuadráticos. En este contexto nuestro objetivo es, dentro de un tiempo de ejecución corto, encontrar el método de solución que mejor se ajuste a nuestras restricciones.

Varias alternativas son estudiadas:

- 1] Solución del problema general de programación cuadrática,
- 2] Aproximación lineal a la función objetivo y uso de metodologías primales duales, y

### 3] Técnicas heurísticas

Se escoge un método que contiene un heurístico muy rápido (eficiente) que no siempre converge y, en caso de no convergencia (que son muy pocos) se procede a la utilización de un algoritmo "out of kilter" especialmente modificado.

Finalmente, como resultado del análisis surgen varios caminos para investigación futura.

**CAPITULO 1**  
**INTRODUCCION**

Los objetivos de este capítulo son:

- 1] Ofrecer al lector una idea general del problema de Coordinación Hidrotérmica a Corto Plazo \* y su esquema de solución.
- 2] Ubicar, en el contexto de CHT, el problema que resuelve esta tesis, dando un breve comentario sobre su planteamiento.
- 3] Esbozar el desarrollo que se sigue en los capítulos posteriores para la solución de nuestro problema.

---

En lo que sigue se denominará por CHT a este problema

El lector que desee mayor información sobre CHT puede remitirse (ver bibliografía) a [Ni,1984] y [NIF,1985].

El capítulo 1 se compone de dos secciones:

En 1.1 se presenta a grandes rasgos el problema CHT y el modelo conceptual para su solución. De este último, se describen las funciones que lo componen y su relaciones entre si. En particular, se ubica el problema a resolver en esta tesis en el contexto de CHT y se comenta su formulación.

La sección 1.2 indica a grandes rasgos el desarrollo y contenido del presente trabajo.

## 1.1 COORDINACION HIDROTERMICA A CORTO PLAZO, SU ENTORNO

En el marco de referencia de la operación de sistemas eléctricos de potencia, el problema CHT consiste en decidir cuáles unidades generadoras (tanto hidroeléctricas, como termoeléctricas) deben programarse para entrar en operación durante c/u de los intervalos, generalmente horarios, que integran un horizonte de planeación entre 24 y 168 horas. CHT debe minimizar el costo de operación que resulta del consumo de combustible en las unidades termoeléctricas y satisfacer la demanda pronosticada de energía eléctrica con un margen adecuado de reserva generadora, respetando las restricciones físicas y operativas de los elementos del sistema eléctrico de potencia: las unidades generadoras, la red de transmisión y el sistema de ríos y vasos de almacenamiento hidráulico.

Una adecuada planeación operativa a corto plazo reporta dos beneficios fundamentales: uno, permite detectar anticipadamente problemas de operación y plantear las soluciones convenientes; y dos, por el volumen anual de los recursos energéticos que se manejan en el país, cuyo costo en el mercado internacional es del orden de los miles de millones de dólares, permite el ahorro para México de decenas de millones de dólares en comparación con el costo que se obtendría de seguir una estrategia de operación diferente a la recomendada. Ver [GZ,1981].

Planteado en términos matemáticos, CHT constituye un problema de programación matemática con f. o. y restricciones no lineales. El gran número de variables enteras y reales (al menos 16800 de c/tipo para un sistema de 100 unidades generadoras), así como el gran número de restricciones simples (cotas sobre las variables) y generales (involucrando varias variables) hacen del problema un ejemplo típico de optimación en sistemas de gran escala (ver [Ni,1984]).

Con el advenimiento de las computadoras digitales y con los avances registrados en el campo de la programación matemática \*\*, se hace evidente la necesidad de desarrollar y utilizar métodos y programas de computadora para resolver CHT. De hecho, un requerimiento existente para la solución de CHT en el sistema eléctrico nacional obliga a dar una buena solución en tiempos razonables de cómputo (60' de procesamiento central).

Bajo esta circunstancia, el Departamento de Análisis de Redes, de la División de Sistemas de Potencia, del Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE), ha desarrollado un paquete de programas de computadora para la solución de CHT en el sistema eléctrico nacional \*\*\*. El paquete se llama SPCP

---

er [Ca,1979], donde un extenso comentario y bibliografía sobre las técnicas actuales y sus posibles tendencias en problemas de optimación en sistemas de potencia a gran escala es incluida.

(Sistema de Planeación a Corto Plazo: Coordinación Hidrotérmica) y ha sido instalado en la computadora VAX/11730 del IIE.

Algunos beneficios en el uso de este paquete de programas son:

1. Menor costo de operación.
2. Menor probabilidad de error en las decisiones.
3. Un sistema de información flexible
4. Un medio eficaz para evaluar el impacto de distintas estrategias o prácticas operativas.

La fig. 1.I presenta la estructura jerárquica del modelo conceptual SPCP como un sistema formado por cuatro subsistemas:

- ] Definición de escenario.
- ] Preparación de la información.
- ] Cálculo del plan de operación.
- ] Resultados

---

\*\*\* Para el lector que carezca de información sobre el sistema eléctrico nacional se recomienda ampliamente consultar [AG,1981], donde una descripción de las características más relevantes del sistema, jerarquización de funciones en su operación y criterios operativos es presentada.

La tabla 1 muestra las funciones realizadas por cada subsistema.

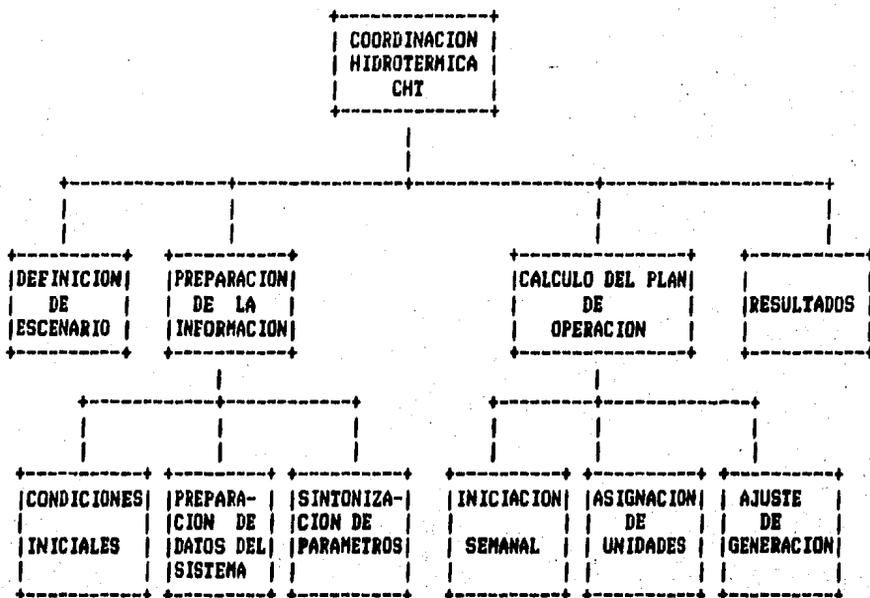


FIG. 1.1 MODELO CONCEPTUAL DE SPCP.

TABLA 1  
FUNCIONES DEL SISTEMA GPCP

SUBSISTEMA	FUNCION
DEFINICION DE ESCENARIO	DEFINICION Y CONSULTA DE DATOS MEDIANTE DESPLEGADOS
	DEFINICION DE DATOS MEDIANTE COMANDOS
PREPARACION DE LA INFORMACION	PREPARACION DE DATOS DEL SISTEMA
	CONDICIONES INICIALES
	SINTONIZACION DE PARAMETROS
CALCULO DEL PLAN DE OPERACION	INICIACION SEMANAL
	ASIGNACION DE UNIDADES
	AJUSTE AUTOMATICO DE GENERACION
RESULTADOS	REPORTE DE DE ETAPAS INTERMEDIAS
	RESULTADOS FINALES
	RESULTADOS GRAFICOS

Enfocamos ahora nuestra atención al subsistema CALCULO DEL PLAN DE OPERACION, el cual constituye la parte medular en la solución del problema CHT. De hecho, los otros tres subsistemas son creados como una manera de dar soporte a ésta.

El subsistema CALCULO DEL PLAN DE OPERACION resuelve el problema CHT para el escenario definido por el subsistema DEFINICION DEL ESCENARIO. Básicamente, el plan resultante incluye, para c/hora, el estatus de las unidades generadoras

(arranque o paro) y el punto base de operación de las unidades en línea.

El esquema de solución empleado se compone de varios pasos y permite la interacción al final de c/uno de éstos para que el usuario, con su experiencia, oriente el proceso de búsqueda o se entere de problemas en las condiciones operativas, antes de que se consuma un mayor tiempo de ejecución. Estas etapas de solución son:

a) Iniciación Semanal (IS).

b) Asignación de unidades (AU).

c) Ajuste automático de Generación (AG).

A continuación, se presenta un breve comentario de los pasos del esquema de solución:

#### Iniciación Semanal:

Su objetivo es proporcionar un plan inicial de operación del sistema de plantas hidrogeneradoras, a nivel horario, en un tiempo de ejecución razonablemente corto. De hecho, el problema a resolver en esta tesis surge durante el desarrollo de esta etapa. Una mayor información sobre IS y la formulación del problema a resolver, se posponen momentáneamente.

## **Asignación de Unidades**

A partir de los resultados que se obtienen para plantas hidroeléctricas en IS, este paso obtiene una asignación económica a nivel horario de unidades hidro y termoeléctricas, respetando límites de operación y de reserva generadora.

## **Ajuste de Generación**

Este paso tiene por objeto verificar violaciones a las restricciones de red de transmisión y en caso necesario redistribuir la generación de las unidades asignadas para eliminar violaciones.

### **1.1.1 INICIACION SEMANAL Y SU ENTORNO**

En los párrafos anteriores se comentó que el objetivo de IS es proporcionar un plan preliminar de operación del sistema de plantas hidrogeneradoras, a nivel horario, en un tiempo de ejecución razonablemente corto. De manera más explícita:

IS tiene por objeto obtener una estimación preliminar de la energía y volúmenes de agua que será posible turbinar por planta hidroeléctrica, para que el usuario analice el efecto de diferentes alternativas de uso de agua en los vasos; además, es importante decir, IS deberá elaborar el plan con una buena aproximación y en un tiempo corto de ejecución (en particular, un

satisfactorio programa de generación de plantas hidro debiera obtenerse en menos de 3' de procesamiento central).

Como el lector puede observar, IS es sólo una herramienta preliminar en la solución de CHT, ejecutable en un tiempo muy corto (3' de procesamiento vs 60' del problema completo) y susceptible de cambios en las otras etapas que componen el subsistema CALCULO DEL PLAN DE OPERACION. No debiera, por tanto, pretenderse dar una modelación completa del sistema hidrogenerador; más bien, la idea es relajar la modelación considerando sólo las restricciones más representativas.

La fig 1.II presenta el esquema funcional de IS.

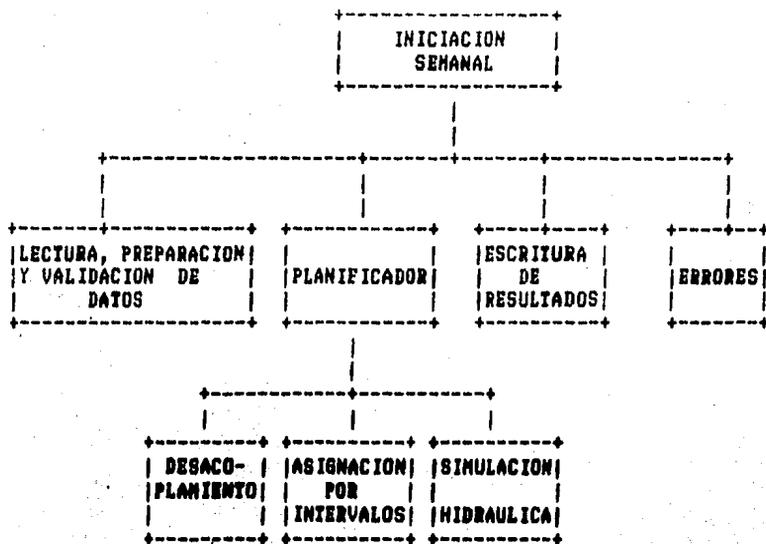


FIG. 1.II ESQUEMA FUNCIONAL DE IS

Un comentario sobre c/u de las tareas asignadas a IS se escribe a continuación:

#### **LECTURA, PREPARACION Y VALIDACION DE DATOS**

Su función es leer, preparar y validar los datos requeridos por IS para su ejecución. Estos datos se encuentran almacenados en los archivos del usuario.

## PLANIFICADOR

Constituye la parte medular de IS. Su función es obtener un plan de operación del sistema hidrogenerador utilizando el escenario leído en la tarea anterior. Los pasos usados y una breve descripción se muestra a continuación:

### DESACOPAMIENTO

Su objetivo es relajar la restricción asociada al balance hidráulico entre vasos (embalses) en cascada. Adicionalmente, determina la producción de energía por planta hidro en el horizonte de planeación a través de un PPL que minimiza el costo de generación termo. Un comentario más extenso se encuentra en [NIF,1985].

### ASIGNACION POR INTERVALOS

Su objetivo es determinar el plan de operación, a nivel horario, en las plantas hidrogeneradoras. Tal plan es obtenido al distribuir la energía de c/u de las plantas hidro a través de los intervalos del horizonte de planeación, usando un algoritmo de "rasaje de picos". El proceso para determinar el plan de operación es definido como un PPC y constituye en si el problema a resolver en este trabajo. La formulación completa del problema y algunos comentarios sobre ésta se posponen momentáneamente.

## **SIMULACION HIDRAULICA**

Su objetivo es obtener una estimación más realista del plan de operación construido. En particular, se introducen restricciones del sistema que no fueron contempladas en el paso anterior. Un comentario más extenso se encuentra en [NIF,1985].

## **ESCRITURA DE RESULTADOS**

Su función es escribir en los archivos del usuario, el plan de operación obtenido en la tarea PLANIFICADOR.

## **ERRORES**

Detecta los errores en datos, inconsistencias o infactibilidades del escenario y detiene la ejecución del problema.

### **1.1.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACION POR INTERVALOS.**

#### **PLANTEAMIENTO Y COMENTARIOS.**

Denótese por

- P** conjunto de plantas hidro;
- I** conjunto de intervalos horarios en el horizonte de planeación;
- p** índice de la planta  $p$ ;
- i** índice del intervalo  $i$ ;

$e(p)$  energía disponible de la planta  $p$  en el horizonte de planeación;

$G(i)$  límite superior de generación en el intervalo  $i$ ;

$H(i,p)$  generación de la planta  $p$  en el intervalo  $i$ ;

$\bar{H}(i,p)$  límite superior de generación de la planta  $p$  en el intervalo  $i$ ;

$\underline{H}(i,p)$  límite inferior de generación de la planta  $p$  en el intervalo  $i$ .

El planteamiento matemático para el problema de asignación por intervalos es:

$$\text{Min } Z = \sum_p \sum_i [H(i,p)]^2$$

s.c.

$$\sum_i H(i,p) = e(p) \quad \forall p \in P$$

$$\sum_p H(i,p) \leq G(i) \quad \forall i \in I$$

$$0 \leq \underline{H}(i,p) \leq H(i,p) \leq \bar{H}(i,p) \quad \forall i \in I ; \forall p \in P$$

Algunos comentarios a c/u de las restricciones y la f. o. del problema introducido se presentan a continuación:

$$R1: \sum_i H(i,p) = e(p) \quad \forall p \in P.$$

Esta familia de restricciones refleja fielmente la idea de distribuir la energía de las plantas hidro a través del horizonte de planeación, idea que constituye la esencia de la etapa ASIGNACION POR INTERVALOS.

$$R2: \sum_P H(i,p) \leq G(i) \quad \forall i \in I$$

La familia de restricciones R2 forma parte de las restricciones operativas de CHT e indica que la generación total por intervalo debe ser menor o igual que un límite especificado y definido por el usuario. Esta restricción incorpora la experiencia operativa del usuario, pues se conoce que, restringiendo la generación de grupos específicos de plantas puede controlarse el flujo de potencia en enlaces críticos y/o reducirse el riesgo de perder la estabilidad del sistema de generación ante determinadas contingencias.

$$R3: 0 \leq \underline{H}(i,p) \leq H(i,p) \leq \overline{H}(i,p) \quad \forall p \in P, \forall i \in I.$$

La familia de restricciones R3 forma parte de la familia de restricciones operativas de CHT e indican que la generación por planta-intervalo debe acotarse entre límites específicos. Los límites de c/planta son diferentes en los distintos intervalos.

Por último, la f. o. se forma como la suma al cuadrado de las generaciones planta-intervalo en todas las plantas e intervalos del horizonte de planeación, retratando, de esta manera, la idea de "rasaje de picos" de la etapa de asignación por intervalos.

Resta por comentar algunos puntos correspondientes a la dimensión del problema y los requerimientos asociados al tiempo de ejecución.

Usando un modelo reducido del sistema eléctrico nacional ( $|P|=13$ ) y si el horizonte de planeación es de una semana ( $|I|=168$ ), el problema a resolver incluye más de 2000 variables, igual número de restricciones simples y cerca de 200 restricciones generales.

Por otra parte, un requerimiento asociado a la solución de este problema es que el tiempo de ejecución no sobrepase más de 90" de procesamiento central. De tal manera que todo IS no sobrepase su requerimiento máximo de 3'.

## 1.2 COMENTARIOS AL CONTENIDO DE ESTE TRABAJO.

Una vez planteado el PPC asociado a la etapa de ASIGNACION POR INTERVALOS, la idea de esta tesis consiste en analizar, discutir y comparar diferentes alternativas que permitan la solución eficiente del problema, aprovechando de este estudio aquella que mejor se ajuste a los requerimientos (tiempo de procesamiento no mayor de 90") para su implantación en computadora. Adicionalmente, es objetivo comentar los resultados de la implantación, recalcando la posibilidad de continuar la investigación en aquellos puntos de interés localizados durante la solución del problema y que permitan tener una mejor perspectiva de él y su circunstancia.

En este marco de ideas, el trabajo comienza por analizar las dificultades implícitas en el manejo de la f. o. no lineal, estudiando como cualesquier PPC, ( $Q$ ), puede ser convertido en un cuasi PPL, digamos ( $Q'$ ), de mayor dimensión que el problema ( $Q$ ) y ser resuelto mediante una leve modificación del algoritmo simplex (ver 2.1). Desafortunadamente para nuestro problema particular, la dimensión del nuevo problema haría que el tiempo necesario para su solución mediante algún paquete de programación lineal vaya más allá del tiempo requerido, haciendo prácticamente imposible su uso.

Como contraparte, y en un afán de aprovechar la estructura de red de nuestro problema (ver 2.2.1), el trabajo desarrolla una transformación que permite eliminar las cotas inferiores sobre los arcos (ver 2.2.2), seguida de una aproximación lineal a la f.o. (ver 2.2.3). De esta manera, al problema original le es asociado un nuevo PPL perteneciente a la clase de problemas de flujo a costo mínimo o bien a la clase de problemas de transporte capacitado. En este contexto, el estudio se orienta hacia el desarrollo de metodologías primales-duales que deriven a la solución de este problema.

La primera de ellas es el Algoritmo Primal-Dual, AP-D, (ver 2.3) que constituye per se una herramienta general para la solución de PPL's. El interés por analizar este método radica en que fue construido a partir de un algoritmo menos general ideado para ciertos problemas de redes y proporciona la clave para generar algoritmos especializados para muchos problemas relacionados con gráficas.

Referente al AP-D, el trabajo incluye la exposición formal del método (ver 2.3.1) y su especialización tanto en los problemas de flujo a costo mínimo (ver 2.3.2) como en el problema del transporte (ver 2.3.3). Además, es a partir del éxito obtenido en la aplicación del AP-D al problema del transporte que resulta de interés analizar y desarrollar el problema de transporte capacitado con función de costo convexa y lineal por pedazos bajo la estrategia del AP-D (ver capítulo 3). Algunas deficiencias

surgen tras haber incorporado dicha herramienta, de tal manera que no hacen práctico el uso de esta opción (ver 3.3).

La segunda metodología primal-dual es el algoritmo Out Of Kilter, AOOK, desarrollado por D. Fulkerson (ver capítulo 4), que proporciona una herramienta general para la solución de problemas de flujo restringido a costo mínimo.

Aquí, el trabajo desarrolla formalmente el estudio del AOOK (ver 4.2,...,4.6), mostrando que las dificultades inherentes a la metodología AP-D del capítulo 3 no aparecen en este caso. Asimismo, la facilidad de comprensión hace de esta alternativa una buena opción para resolver nuestro problema. Luego, el trabajo ha implantado dicho método (ver 4.7) a través de un programa estructurado, incluido en los apéndices, escrito en el lenguaje Fortran-77 de la computadora VAX/11730 del IIE.

Por otra parte, y saliéndose de las metodologías primales-duales, el trabajo propone en forma alternativa una búsqueda heurística (ver 2.5), denominada por HEURIST en el trabajo, para la solución del problema de asignación por intervalos, la cual ha sido desarrollada y probada en el mismo sistema VAX/11730 demostrando su eficiencia para determinar la solución.

Finalmente (ver capítulo 5), el trabajo selecciona un método que contiene un heurístico muy "rápido" que no siempre converge y, en caso de no convergencia (que creemos son muy pocas) se

procede a la utilización de un A00K especialmente modificado, i.e. que explote algunas de las particularidades de nuestro problema. Además, se deja abierta la posibilidad de continuar la investigación de tal manera que sea posible "corregir" las deficiencias de la aplicación del AP-D en nuestro problema.

## CAPITULO 2

### ALTERNATIVAS DE SOLUCION

Como su nombre lo indica, el presente capítulo consiste en el desarrollo de cursos alternativos de acción o soluciones tentativas que parezcan prometedoras en términos de los requerimientos asociados a la solución de nuestro problema. En lo que sigue, dichos cursos o soluciones asumirán la forma de desarrollos matemáticos que pueden ser estudiados con instrumentos apropiados del oficio, o bien, contruidos a la medida para ajustarse al problema del mundo real. Conforme se presente c/opción se harán evidentes sus respectivas deficiencias, luego será necesario desechar algunas soluciones que inicialmente parecían prometedoras.

Una perspectiva del capítulo se presenta a continuación:

- 1] Un primer enfrentamiento con el problema original indica que éste pertenece a la clase de PPC's. La sección 2.1 presenta una metodología que permite resolver el planteamiento general de este problema mediante una especialización del algoritmo simplex de programación lineal.
- 2] Dejando a un lado el desarrollo de programación cuadrática, la sección 2.2 explora la estructura de nuestro problema. Como resultado, se asocia un problema de flujo en redes a costo mínimo en donde se han eliminado las cotas inferiores sobre el flujo en los arcos. Adicionalmente, se incluye un estudio que permite realizar una aproximación lineal a cualesquiera f. o. convexa del problema de flujo en redes. En particular, este último estudio se aplica a la versión de redes de nuestro problema.
- 3] A partir de los resultados descritos en 2], la sección 2.3 representa un punto de transición en el desarrollo que se viene realizando en este trabajo, pues se pasa de la aplicación de algoritmos generales de programación lineal a algoritmos más especializados para ciertos problemas de flujo en redes, todos ellos derivados del Algoritmo Primal-Dual, AP-D. Tanto el desarrollo del AP-D como aplicaciones para el problema del transporte y el problema de flujo a costo mínimo son presentados en esta sección.

También, se incluye un estudio sobre la transformación de Wagner, la cual brinda una equivalencia entre problemas de transporte y problemas de flujo a costo mínimo. Finalmente, se deja abierto el camino para en los siguientes capítulos seguir explotando los desarrollos primales-duales en la construcción de algoritmos especializados para la solución de nuestro problema.

- 4) Por último, el desarrollo expuesto en la sección 2.4, ofrece un enfoque conceptualmente distinto al de las secciones anteriores al proponer un heurístico para resolver nuestro problema; en caso de que el heurístico no finalice con una solución factible, el desarrollo se complementará con el uso del algoritmo de Ford y Fulkerson para el problema de flujo máximo (AFF).

## 2.1 PROGRAMACION CUADRATICA

Tal y como se indica en los parrafos anteriores, el problema al que nos enfrentamos se ubica en la clase de PPC's. Luego, resulta de interés conocer alguna metodologia que nos ayude a resolverlo.

El PPC se refiere al problema de maximizar o minimizar una f. o. cuadrática sujeta a restricciones de tipo lineal. Su diferencia respecto al PPL, consiste en que el PPC también incluye en la f. o. términos  $X(j)$  y  $X(j).X(k)$  ( $j \neq k$ ). De esta forma, se desea encontrar  $X(1), X(2), \dots, X(n)$   $\rightarrow$

$$\text{Max} \quad \sum_{j=1}^n C(j) X(j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q(j,k) X(j) X(k)$$

s.c

$$\text{(PPC)} \quad \sum_{j=1}^n a(i,j) X(j) \leq b(i) \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$X(j) \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

donde las  $q(j,k)$  son constantes dadas  $\rightarrow q(j,k)=q(k,j)$ .

Diferentes algoritmos han sido desarrollados para el PPC donde la f. o. es una función cóncava. En particular, se desarrollará uno de estos métodos, el cual supone que la f. o. es estrictamente cóncava, y que simplemente necesita del método simplex con una ligera modificación [W,1959]. Para ello, se hará

uso de las condiciones de Kuhn y Tucker (las personas con escaso conocimiento de este tema pueden remitirse a [HL,1974] para más información). Es conveniente indicar que el cumplimiento de dichas condiciones para un punto X, no garantiza que el punto sea óptimo. Las condiciones de Kuhn y Tucker sólo son condiciones necesarias pero no suficientes para la optimalidad. Sin embargo, agregando condiciones adicionales de concavidad en la f. o. y convexidad en las restricciones, X es una solución óptima si y sólo si las condiciones de Kuhn y Tucker son satisfechas.

Primeramente, se formulan las condiciones de Kuhn y Tucker para el PPC. Una forma conveniente de expresarlas en este caso es:

$$\sum_{k=1}^n q(j,k) X(k) + \sum_{i=1}^m a(i,j) Y(n+i) - Y(j) = C(j) \quad j=1, \dots, n \quad (2.1.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a(i,j) X(j) + X(n+i) = b(i) \quad i=1, \dots, m \quad (2.1.2)$$

$$X(j) \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n+m \quad (2.1.3)$$

$$Y(j) \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n+m \quad (2.1.4)$$

$$X(j) Y(j) = 0 \quad j=1, 2, \dots, n+m \quad (2.1.5)$$

donde las Y(n+i) son de alguna forma análogas a las variables

duales de programación lineal y donde  $Y(j)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) y  $X(j)$  ( $j=n+1,\dots,n+m$ ) son variables de holgura.

Dado que la f.o. se supuso cóncava (de hecho estrictamente cóncava), y las restricciones que componen el problema son lineales (de hecho convexas), se tiene que  $(X(1),\dots,X(n))$  es óptima si y sólo si existen valores de  $X(n+1),\dots,X(n+m)$ ,  $Y(1),\dots,Y(n+m) \rightarrow (X(1),\dots,Y(n+m))$  que satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker. El problema se reduce entonces a encontrar una solución factible a dichas condiciones.

Obsérvese que a excepción del grupo de restricciones (2.1.5), las condiciones de optimalidad son restricciones lineales para  $2(m+n)$  variables. Aún más, este grupo de restricciones indica que no se permita a las dos variables  $X(j)$  y  $Y(j)$  ser variables básicas cuando se consideren soluciones básicas factibles no degeneradas.

Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar una solución inicial básica factible a cualquier PPL teniendo esas restricciones, sujeto a la restricción adicional dada por la familia de restricciones contenidas en (2.1.5).

Si no hay una solución inicial básica factible que se deduzca fácilmente, la técnica de programación lineal estándar introduciría variables artificiales que son finalmente forzadas a abandonar la base. (recuérdese, por ejemplo, la fase I del método de las dos fases de programación lineal).

Supóngase que  $b(i) \geq 0$  ( $i=1, \dots, m$ ), las variables básicas iniciales para el segundo grupo de ecuaciones serían  $X(n+1)$ .

Sin embargo, dado que la mayoría o todos los coeficientes  $C(j)$  normalmente son positivos, no es obvio indicar qué variables básicas serán las iniciales en la otra familia de restricciones,

(2.1.1). Sean  $Z(1), Z(2), \dots, Z(n)$  las variables artificiales en (2.1.1)  $\rightarrow Z(j) \geq 0 \forall j=1, \dots, n$ . Las ecuaciones serán (salvo que el coeficiente de  $Z(j)$  es  $-1$ , cuando  $C(j) < 0$ ):

$$\sum_{k=1}^n q(j,k) X(k) + \sum_{i=1}^m a(i,j) Y(n+i) - Y(j) + Z(j) = C(j) \quad \forall j=1, \dots, n \quad (2.1.6)$$

La técnica de la restricción artificial ofrece una solución básica factible con la cual se inicia el proceso para encontrar la solución óptima. Sin embargo, una solución básica factible a este problema artificial, es factible para el problema real si y sólo si  $Z(j)=0 \forall j$ .

Por lo tanto:

$\sum_{j=1}^n Z(j)$  debe decrementarse hasta cero para obtener la solución deseada. Para llegar a este punto se necesita:

Comenzar con la solución básica factible inicial para el problema artificial y aplicar una modificación del método simplex al siguiente problema:

$$\text{Min } \sum_{j=1}^n Z(j) \quad (2.1.7)$$

s.c.

$$\sum_{k=1}^n q(j,k) X(k) + \sum_{i=1}^m a(i,j) Y(n+i) - Y(j) + Z(j) = C(j) \quad j=1, \dots, n \quad (2.1.8)$$

$$\sum_{j=1}^n a(i,j) X(j) + X(n+i) = b(i) \quad i=1, \dots, m \quad (2.1.9)$$

$$X(j) \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m+n \quad (2.1.10)$$

$$Y(j) \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, m+n \quad (2.1.11)$$

$$Z(j) \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.1.12)$$

La modificación es que no se permita a  $Y(j)$  ser una variable básica siempre que  $X(j)$  ya lo sea y viceversa ( $j=1,2,\dots,m+n$ ). Esto asegura que  $X(j)Y(j) = 0 \forall j$ .

Una vez que se obtiene la solución óptima al problema artificial:

$$(\overset{\star}{X(1)}, \dots, \overset{\star}{X(n+m)}, \overset{\star}{Y(1)}, \dots, \overset{\star}{Y(n+m)}, Z(1)=0, \dots, Z(n)=0) \quad (2.1.13)$$

$(\overset{\star}{X(1)}, \dots, \overset{\star}{X(n)})$  es la solución óptima para el original (PPC).

Es necesario observar que la metodología desarrollada transfiere un original (PPC) con  $n$  variables y  $m+n$  restricciones ( $n$  restricciones de no negatividad), en un PPL de  $3n + 2m$  variables y  $4n + 3m$  restricciones ( $3n + 2m$  restricciones de no negatividad).

Luego, el problema al que se enfrentará este trabajo aumentaría de dimensión, de tal forma que resultaría prácticamente imposible solucionarlo mediante un paquete de programación lineal en un tiempo de ejecución corto. De donde, la búsqueda de una mejor alternativa prosigue.

## 2.2 ALGUNOS ASPECTOS IMPORTANTES DE NUESTRO PROBLEMA

En general, cuando un equipo de trabajo se enfrenta a un nuevo problema trata de abstraer su esencia y determinar si ese mismo tipo de problema se ha estudiado previamente. Si los integrantes del equipo encuentran uno semejante en su propio campo, puede determinarse si ciertos métodos usados anteriormente pueden adaptarse al que ahora se estudia. De ese modo, los diversos miembros, con sus antecedentes respectivos, pueden aplicar métodos o crear nuevos. Es en este proceso de exploración que se obtienen las ideas a las cuales se referirá la presente sección.

Así, la subsección 2.2.1 asocia al problema original la estructura de red (de hecho, se asocian dos estructuras) y da la pauta para que la subsección 2.2.2 presente un método general para eliminar las cotas inferiores sobre el flujo en los arcos, dicho método se aplica a las redes asociadas a nuestro problema. Finalmente, la subsección 2.2.3 estudia una forma de aproximación lineal a la f.o. cuadrática de nuestro problema.

## 2.2.1 APROVECHAMIENTO DE LA ESTRUCTURA DE RED -

Dado el problema

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_p [H(i,p)]^2 \quad (2.2.0)$$

s.c.

$$\sum_i H(i,p) = e(p) \quad \forall p \in P \quad (2.2.1)$$

$$\sum_p H(i,p) \leq G(i) \quad \forall i \in I \quad (2.2.2)$$

$$0 \leq \underline{H}(i,p) \leq H(i,p) \leq \bar{H}(i,p) \quad \forall i, \forall p \quad (2.2.3)$$

el primer aspecto interesante es que las familias de restricciones (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) pueden interpretarse en una red como la indicada en la fig. 2.1.a). De hecho en esta red, el problema se interpreta como encontrar un s-t flujo de valor  $\sum_p e(p)$  con costo mínimo, sujeto a restricciones sobre el flujo en c/arco (cota inferior y superior) y a restricciones de conservación de flujo en c/nodo (flujo externo).

De esta forma, si  $f^+(i)$  ( $f^-(i)$ ) representan el flujo total que sale (entra) del (al) nodo  $i$  a través de los arcos de la red, y  $d(i)$  es el parámetro flujo externo del nodo  $i$ , se debe satisfacer

$$f^+(i) - f^-(i) = d(i) \quad (2.2.4)$$

(Se conviene desde ahora, y para efectos de las figuras incluidas en este trabajo, en que si para una red  $N$  existen vértices en los cuales no se indica su flujo externo, este es cero).

ESUTO DI  
INVESTIGAZIONE  
E LAVORI

El costo asociado por unidad de flujo que circula en cualesquiera arco, así como las restricciones de éste, se encuentran indicadas en la siguiente tabla:

ARCO	COTA INFERIOR	COTA SUPERIOR	COSTO
$(s,p)$	0	$e(p)$	0
$(p,i)$	$\underline{H}(i,p)$	$\bar{H}(i,p)$	$[H(i,p)]^2$
$(i,t)$	0	$G(i)$	0

Para finalizar, obsérvese que si el flujo es de valor  $\sum e(p)$ , entonces los arcos  $(s,p)$ ,  $\forall p \in P$ , se encuentran saturados.

Por otra parte, una manera alternativa, y de hecho equivalente, de visualizar el problema con una estructura de red es la siguiente:

Supóngase que  $|P|=n$ , entonces introduzca una planta artificial  $\beta=p(n+1) \rightarrow$  la energía asociada a dicha planta sea  $\sum_i G(i) - \sum_p e(p)$ , su costo por distribución sea cero y las cotas asociadas a los arcos  $(\beta, i)$ ,  $i \in I$ , sean  $\underline{H}(i, \beta)=0$ ,  $\bar{H}(i, \beta) = 00$ .

De esta forma, el conjunto  $P$  obtiene un nuevo elemento y la energía distribuida por las plantas del nuevo conjunto  $P$  es igual a la energía requerida por el conjunto de intervalos  $I$ .

La red asociada a este nuevo planteamiento se visualiza en 2.I.b). En dicha red, el problema se traduce a como encontrar una distribución de energía a costo mínimo que agote la energía de las plantas y cumpla los límites de transmisión por intervalo. Además de satisfacer para c/u de los arcos  $(p, i)$ ,  $p \in P$  e  $i \in I$ , tanto las cotas superiores  $(\bar{H}(i, p))$  como las inferiores  $(\underline{H}(i, p))$ . Finalmente, el costo asociado por distribuir energía de la planta  $p$  al intervalo  $i$ ,  $(H(i, p))$  se hereda del costo indicado en la f. o. del problema anterior  $[H(i, p)]^2$ , excepto para  $\beta$  cuyo costo como se indicaba es cero.

En resumen, la fase de exploración del problema ha redituado en dos modelos equivalentes de flujo en redes. La importancia de este paso radica en que desde el desarrollo del método simplex por G. Dantzig, en 1947, los modelos de flujo en redes han sido exhaustivamente estudiados, debido al hecho de que existen numerosas aplicaciones para ellos. Además de que dichos modelos exhiben una estructura más bien elegante, que puede ser explotada en el desarrollo de algoritmos especializados que produzcan

soluciones más eficientes, en tiempo y costo, que algoritmos generales. Aún más, la geometría de una red puede ser fácilmente expuesta en una figura bidimensional, simplificando la comunicación en el desarrollo del análisis del problema.

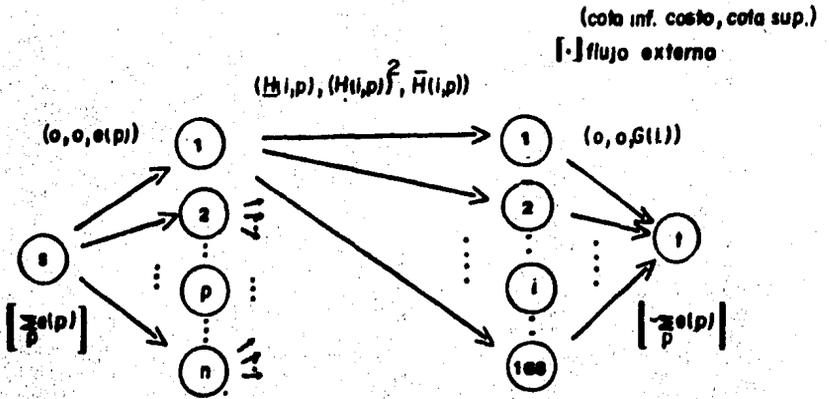


figura 2.1a) Red asociada a las restricciones (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3)

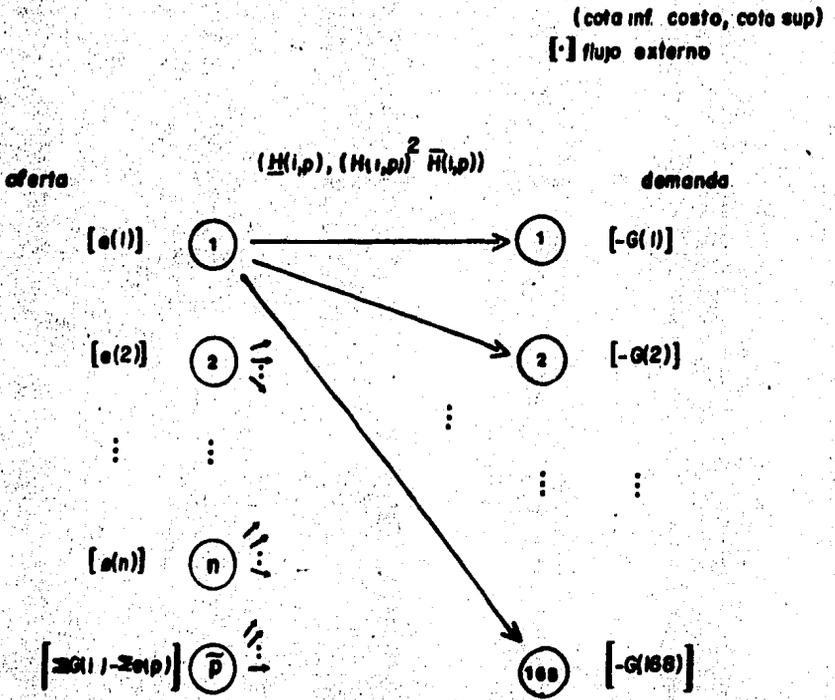


figura 2.1b) Introducción de la planta artificial  $\bar{p}$

## 2.2.2 ELIMINACION DE COTAS INFERIORES -

Una vez construidos los problemas de flujo en redes asociados a las fig's. 2.I.a) y 2.I.b), resulta de interés practicar una simplificación en su estructura; de tal manera, que se haga menos complejo (más fácil) su manejo y adicionalmente se obtenga un ahorro de memoria durante la implantación en computadora del método de solución apropiado.

En este sentido, es útil conocer la posibilidad de expresar cualquier problema de flujo en redes con cotas inferiores diferentes de cero en sus arcos, como un problema con todas sus cotas inferiores iguales a cero, ver [JB,1980]. En particular, esto permite borrar la cota inferior en los arcos de la lista de parámetros tras hacer la siguiente transformación para  $c/\text{arco } (i,j)$  con una cota inferior  $a(i,j) \neq 0$ .

### PROCESO PARA LA ELIMINACION DE COTAS INFERIORES

1. Reemplace  $a(i,j)$  por cero
2. Reemplace  $b(i,j)$  por  $b'(i,j) = b(i,j) - a(i,j)$

3. Remplace  $f(i,j)$  por  $f'(i,j) = f(i,j) - a(i,j)$

4. Remplace  $d(i)$  por  $d'(i) = d(i) - a(i,j)$

5. Remplace  $d(j)$  por  $d'(j) = d(j) + a(i,j)$

Esta transformación es realizada arco por arco, para todos los arcos con cotas inferiores distintas de cero. Cada nueva transformación usa los valores actualizados de los parámetros que resultaron del paso anterior.

El procedimiento es ilustrado en la fig. 2.II, donde el arco (2,3) con cota inferior igual a 1 es transformado a un arco con cota inferior igual a cero.

(COTA IRE, FLUJO, COTA SUP)

[ FLUJO EXTERNO ]

[-1]

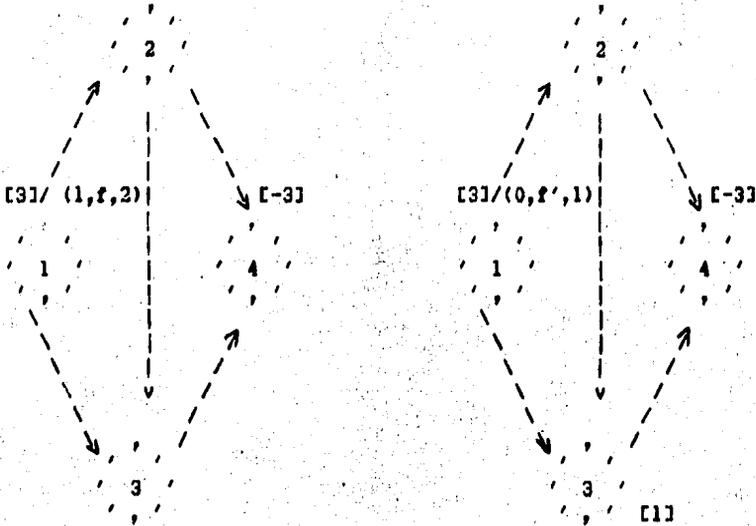


FIG. 2.II ELIMINACION DE COTAS INFERIORES

Una vez que se conoce el procedimiento que cancela las cotas inferiores diferentes de cero, resulta de interés conocer el efecto que éste produce en los parámetros de la red asociadas a nuestro problema. Para ello, considérese la red de la fig. 2.1.a) donde se ha colocado un flujo tal y como se indica en la siguiente tabla.

ARCO	FLUJO	
$(p,i)$	$\underline{H}(i,p)$	$V_i, V_p$
$(s,p)$	$\sum_i \underline{H}(i,p)$	$V_p$
$(i,t)$	$\sum_p \underline{H}(i,p)$	$V_i$

Obsérvese que dicho flujo surge de colocar en c/u de los arcos  $(p,i)$   $p \in P$  e  $i \in I$ , un flujo igual a su cota inferior y de conocer que  $d(p) = d(i) = 0 \forall i, Vp$ ; esta última propiedad, permite recolectar todo el flujo que sale de la planta  $p \in P$ , a saber  $\sum_i \underline{H}(i,p)$ , y colocarlo como flujo que circula en el arco  $(s,p)$ . Un desarrollo análogo se hace para conocer el flujo que circula en la familia de arcos  $(i,t)$ .

Al colocar el flujo señalado en la tabla y realizar el procedimiento indicado, la red de la fig. 2.1.a) se convierte en la red que muestra la siguiente figura:

(cota inf., flujo, cota sup)  
[flujo externo]

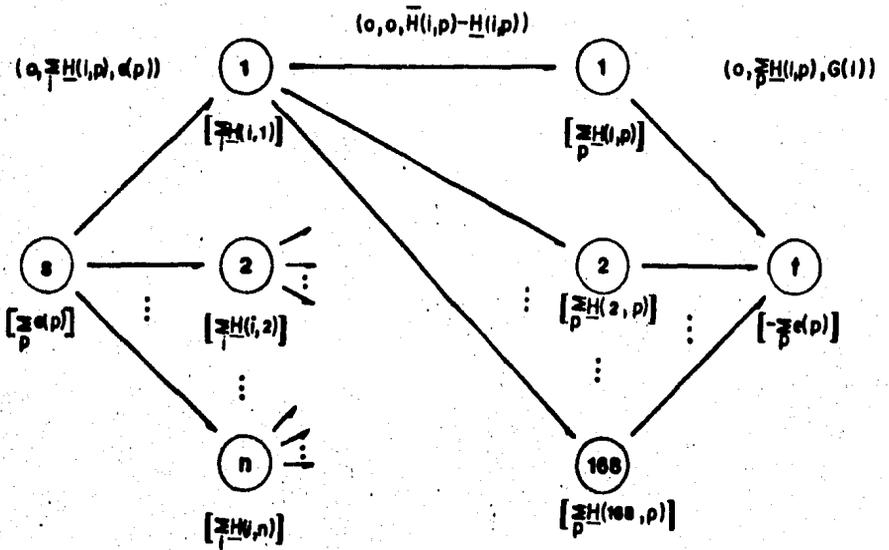


figura 2 III Aspecto de la red de la fig.2.1.a), una vez hecha la eliminacion de cotas inferiores.

En la red de la fig. 2.III, nuestro problema ha eliminado sus cotas inferiores. De hecho, ahora el problema se interpreta como encontrar un s-t flujo de valor  $\sum_p e(p)$  con costo mínimo, sujeto a restricciones sobre el flujo en c/arco (estas restricciones sólo incluyen el respeto a la cota superior modificada) y a restricciones de conservación de flujo en c/nodo (donde se considera el nuevo flujo externo).

Un aspecto interesante de esta transformación, resulta en el costo asociado por la distribución de las unidades de flujo en las tres familias de arcos ((s,p), (p,i), (i,t)). Al igual que en el modelo de flujo en redes sugerido por la fig. 2.1.a), el costo por unidad de flujo que circula en los arcos de la forma (s,p) y (i,t) es cero. Un análisis extra se necesita para conocer el nuevo costo en los arcos de la forma (p,i). Veamos:

En el modelo sugerido por la fig. 2.1.a) el costo asociado para un arco (p,i) cualesquiera es un función solamente del flujo en dicho arco y es independiente del flujo en otros arcos.

Si denotamos por:

$H(i,p)$  las unidades de flujo que transitan en el arco (p,i)

$C(i,p)$  la función de costo para el arco (p,i)

$$C(i,p): \quad R \quad \text{----} \rightarrow \quad R \quad \left. \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \right\} (2.2.5)$$

$$C(i,p) (H(i,p)) = [ H(i,p) ]$$

Ahora bién, al realizar la transformación indicada en esta sección y si denotamos por

- $H'(i,p)$  las unidades de flujo que transitan en el arco  $(p,i)$
- $\underline{H}(i,p)$  cota inferior para el flujo en el arco  $(p,i)$
- $\bar{H}(i,p)$  cota superior para el flujo en el arco  $(p,i)$
- $C'(i,p)$  función de costo para el arco  $(p,i)$

Se tiene:

$$\underline{H}'(i,p) = \underline{H}(i,p) - \underline{H}(i,p) = 0; \bar{H}'(i,p) = \bar{H}(i,p) - \underline{H}(i,p) \quad (2.2.6)$$

$$0 \leq H'(i,p) \leq \bar{H}'(i,p) \quad (2.2.7)$$

(2.2.6) y (2.2.7) indican para  $c/\text{arco } (p,i)$  un desplazamiento de  $\underline{H}(i,p)$  unidades para pasar del modelo de la fig. 2.I.a al modelo indicado en esta sección, fig. 2.III. Geométricamente, el desplazamiento comentado y su efecto se visualizan en la fig. 2.IV, en la cual se refiere la función de costo por unidad de flujo para ambos modelos.

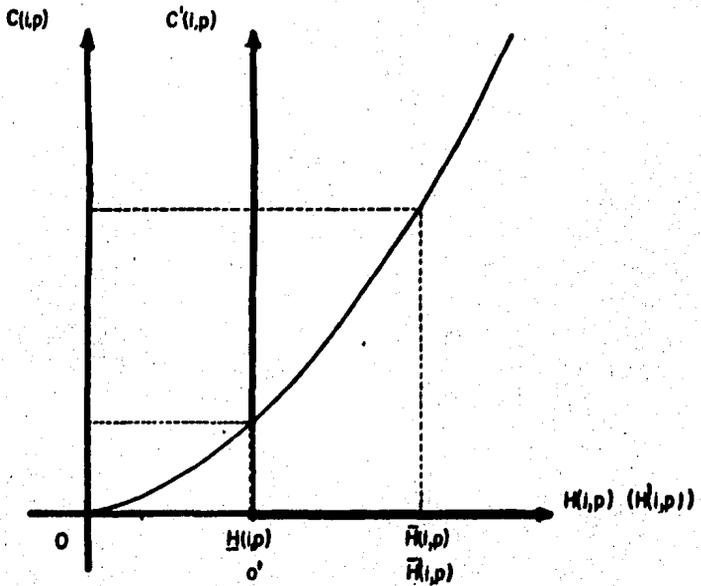


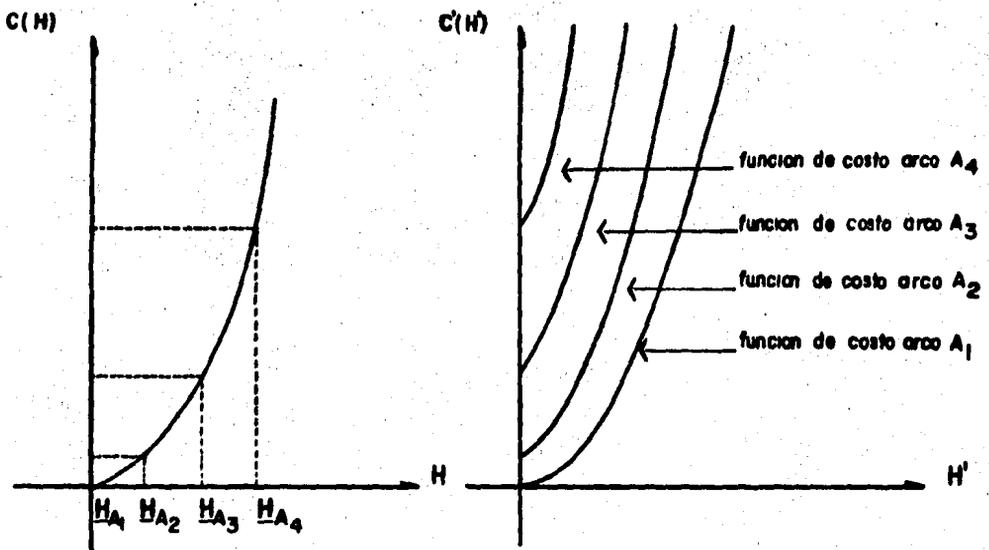
figura 2.IV costo asociado al flujo que circula en  $(p,i)$   
para las redes indicadas en 2.Ia) y 2.III

Es claro, a partir de la gráfica de la fig. 2.IV, que el costo en el modelo de la presente sección es una función cuadrática que depende del flujo circulante y de la cota inferior original del arco en particular. De hecho

$$C'(i,p): \quad R \quad \text{---->} \quad R \quad \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. > \quad (2.2.8)$$

$$C'(i,p) (H'(i,p)) = [ H'(i,p) + \underline{H}(i,p) ]^2 \quad \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. >$$

Una visualización interesante de como se transforma el costo en arcos de la familia (p,i), al pasar del modelo indicado en 2.I.a) al de esta sección, se representa en la fig. 2.V.



donde  $A_j$  es un arco cuetesquera de la familia  $(p, i)$

$H_{A_j}$  es la cota inferior del arco  $j$

figura 2V Transformacion de la funcion de costo para arcos con diferentes cotas inferiores

INSTITUTO DE  
 INVESTIGACIONES  
 ELECTRICAS

En resumen, las siguientes tablas presentan las cotas, flujos y costos por arco, así como los flujos externos por nodo, que sirven de parámetros al modelo de la fig. 2.III.

ARCO	COTA INE	FLUJO	COTA SUPERIOR	COSTO
(s,p)	0	$\sum_i \underline{H}(i,p)$	e(p)	0
(p,i)	0	0	$\bar{H}'(i,p)$	C'(i,p)
(i,t)	0	$\sum_p \underline{H}(i,p)$	g(i)	0

NODO	FLUJO EXTERNO
s	$\sum_p e(p)$
p	$-\sum_i \underline{H}(i,p)$
i	$\sum_p \underline{H}(i,p)$
t	$-\sum_p e(p)$

Por otra parte, una red equivalente puede ser construida para la red de la fig. 2.III al considerar un reacondicionamiento de los flujos externos en los nodos del conjunto P e I. Esto es, al colocar un flujo externo de valor cero en cualesquiera nodos p e

$i$ , tal y como se encuentra la red de la fig. 2.I.a). De esta forma, serán necesarios cambios en la capacidad de los arcos de la red que llegan al nodo  $p \in P$ , así como cambios en la capacidad de los arcos que salen del nodo  $i \in I$ .

Los cambios anteriormente referidos pueden ser observados en la fig. 2.VI.a). En esta red, el problema se identifica como el de encontrar un  $s$ - $t$  flujo de valor  $(\sum_p e(p) - \sum_i \sum_j \underline{H}(i,j))$  de costo mínimo, sujeto a restricciones de capacidad en los arcos y de conservación de flujo en los nodos, tal y como lo indican los parámetros colocados en dicha red.

Aquí es importante recalcar que el planteamiento del problema asociado al problema de flujo en redes de la fig. 2.VI.a) es:

$$\text{Min } Z' = \sum_i \sum_p [H'(i,p) + \underline{H}(i,p)]^2 \quad (2.2.9)$$

s.c.

$$\sum_i H'(i,p) = e(p) - \sum_i \underline{H}(i,p) = e'(p) \quad \forall p \quad (2.2.10)$$

$$\sum_p H'(i,p) \leq G(i) - \sum_p \underline{H}(i,p) = G'(i) \quad \forall i \quad (2.2.11)$$

$$0 \leq H'(i,p) \leq \bar{H}(i,p) - \underline{H}(i,p) = \bar{H}'(i,p) \quad \forall i, \forall p \quad (2.2.12)$$

Obsérvese que al igual de la subsección 2.2.1, se puede introducir una planta artificial  $\beta$  que reparta la diferencia de energía  $\sum_i G(i) - \sum_p e(p)$  con un costo gratuito y capacidad infinita en los arcos  $(\beta, i)$ ,  $i \in I$ . De esta manera, un planteamiento equivalente sería obtenido. Ver fig. 2.VI.b).

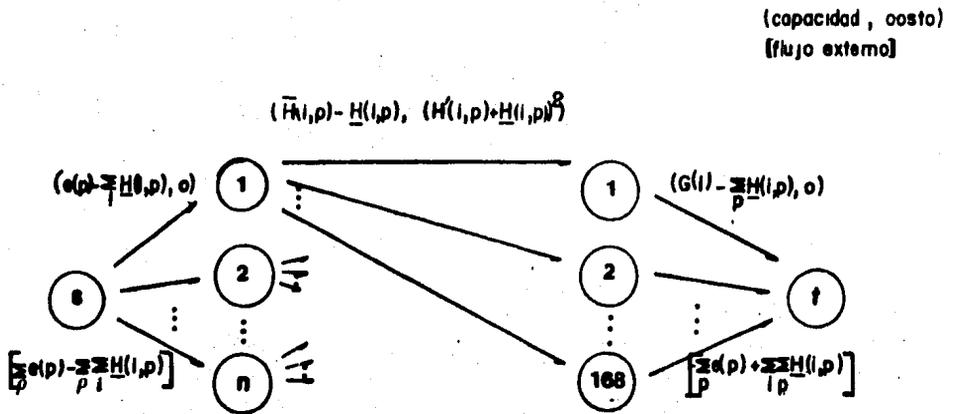


figura 2.VI.a) Red equivalente a la de la fig. 2.III. una vez realizadas las modificaciones en el flujo externo de los nodos en p e l

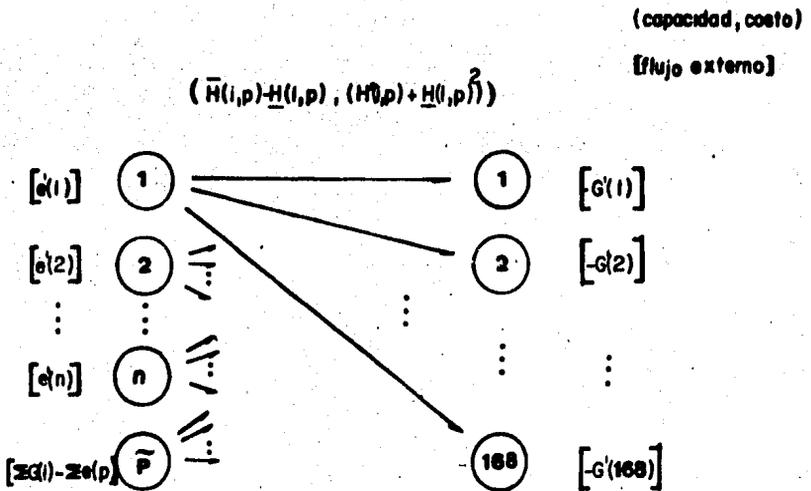


figura 2.VI.b) Red equivalente a la indicada en la fig. 2.VI.a)

Se terminan los comentarios de esta subsección indicando que a partir de este momento y para discusiones posteriores, se asumirá que todas las cotas inferiores asociadas a nuestro problema son cero, a menos que explícitamente se diga lo contrario.

### 2.2.3 APROXIMACION DE LA FUNCION DE COSTO POR PEDAZOS DE LINEA

En general, dado un problema de flujo en redes a costo mínimo, el costo del flujo en un arco puede ser una función lineal, convexa o cóncava. Esta subsección estudia como algunos costos en los arcos correspondientes a funciones no lineales, pueden ser representados por una aproximación a través de segmentos de línea, donde los costos resultantes pueden ser fácilmente modelados en una red lineal si la función de costo es convexa.

Considere, por ejemplo, la fig. 2.VII que muestra una función convexa y lineal por segmentos, representando el costo por transportar flujo en un arco cualesquiera. En un modelo de redes (ver fig. 2.VIII), este arco puede substituirse por un número de arcos paralelos igual al número de segmentos lineales que componen su función de costo, dando a c/u de estos arcos el costo asociado a cada segmento; estos costos serán ascendentes, i.e.  $m(1) < m(2) < m(3) < \dots$

Por lo tanto, cuando el flujo sea incrementado del nodo  $i$  al nodo  $j$ , el flujo primero pasará a través del arco 1. Cuando este arco sea saturado, el flujo comenzará a pasar a través del arco 2. El arco 3 tiene flujo diferente de cero si y sólo si el arco 2 está saturado. Debido a que el objetivo es minimizar el costo, si dos o más arcos son paralelos, aquél con el costo más bajo se usará primero. Si la función lineal por segmentos fuera una aproximación para una función continua, la aproximación pudiera ser mejorada si se dividiera el intervalo de flujo factible en más segmentos y de aquí se definirían más arcos. El costo de esta simplificación se refleja en una multired, i.e. una red que contiene arcos paralelos.

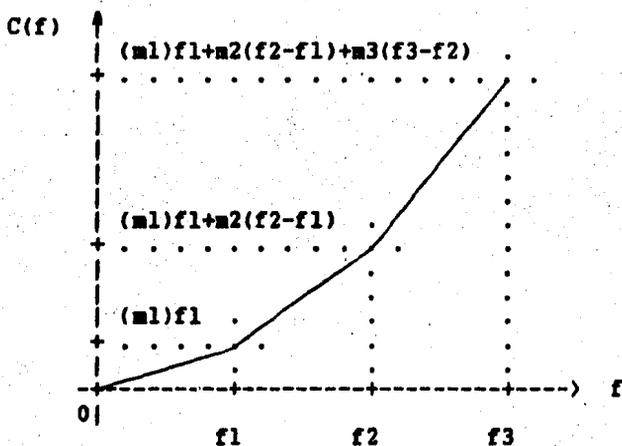


FIG. 2.VII: FUNCION DE COSTO CONVEXA Y LINEAL POR SEGMENTOS PARA UN ARCO CUALESQUIERA

(COTA INF, COTA SUP, COSTO)

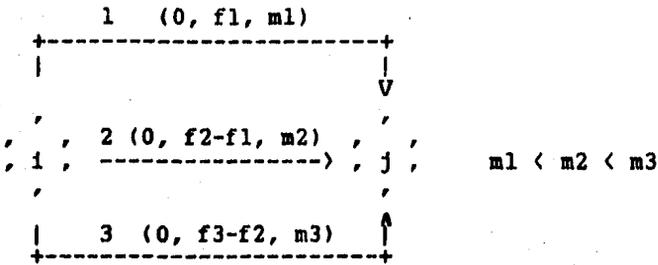


FIG. 2.VIII: MODELACION EN REDES PARA EL ARCO CON LA FUNCION DE COSTO DE LA FIG. 2.VII. EL PROCESO CREA UNA MULTIRRED.

A continuación, se desarrolla de una manera más formal la aproximación de funciones de costo por pedazos de línea para modelos de flujo en redes. Simplemente, se conviene para el resto de esta subsección que dada una red  $N$  con gráfica asociada  $G=(V,A)$ , teniendo  $|V|$  nodos y  $|A|=n$  arcos, se ha impuesto un ordenamiento sobre éstos, colocándolos en una correspondencia uno a uno con  $1, \dots, |V|$  y  $1, \dots, n$ , respectivamente. De esta forma, la variable de decisión  $x(j)$  denota la cantidad de flujo a través del arco  $j$ , y el vector  $X=(x(1), x(2), \dots, x(n))$  representa el vector de flujos. Adicionalmente,  $b(j)$  es la capacidad del arco  $j$ .

Sea  $H$  una función,  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $X=(x(1), x(2), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $H$  es separable si

$$H(X) = \sum_{j=1}^n h(j)[x(j)]$$

Si  $H$  es separable, se denomina a  $h(j)$ ,  $j=1, \dots, n$ , función componente o simplemente componente.

De los párrafos anteriores, una idea para la solución del problema consiste en aproximar c/u de las funciones componentes con una función continua y lineal por pedazos, resolviendo el problema derivado. Si las aproximaciones usadas satisfacen ciertas condiciones, este problema puede ser resuelto como un problema de flujo en redes a costo mínimo.

Luego, sea  $N$  una red con gráfica asociada  $G=(V,A)$ . Considérese el problema de flujo a costo convexo mínimo, (PFCC):

$$\text{Min } H(X)$$

s.c.

$$\text{(PFCC)} \quad AX = r$$

$$0 \leq X \leq b$$

donde  $H$  es una función convexa,  $A$  es la matriz de incidencia nodos-arcos para la gráfica  $G=(V,A)$  y  $r$  es un vector  $\rightarrow (r_1, r_2, \dots, r_m) \cdot (1, 1, \dots, 1) = 0$ .

Sin pérdida de generalidad, se han colocado cotas inferiores iguales a cero, cualquier otro vector de cotas inferiores a puede ser usado en el siguiente desarrollo, mientras  $0 \leq a \leq b$ , esto

implicaría que la transformación de la subsección anterior no ha sido realizada.

Obsérvese también, por lo que respecta a nuestro problema, que las f.o.'s  $Z, Z'$  (ver (2.2.0), (2.2.9)) son funciones separables. Aún más, las funciones componentes  $Z(i,p)=[H(i,p)]^2$ ,  $Z'(i,p)=[H'(i,p)+H(i,p)]^2$  son funciones convexas, luego  $Z, Z'$  también lo son.

#### APROXIMACION LINEAL POR PEDAZOS

Supóngase que  $H$  es separable. Se puede mostrar que cada función componente  $h(j)$  debe ser convexa, a partir de la convexidad de  $H$ .

También supóngase que  $K$  segmentos de línea van a ser usados para aproximar la  $j$ -ésima componente de  $H$ ,  $h(j)[x(j)]$ . Luego, hágase una partición del intervalo  $[0, b(j)]$  en  $K$  segmentos,  $c/u$  de longitud  $V(j,k)$   $k=1, \dots, K$ ,  $\rightarrow b(j) = \sum_k V(j,k)$ . Sea  $b(j,0)=0$  y denótese por  $b(j,k)$  el extremo derecho para el  $k$ -ésimo segmento, de tal forma que

$$b(j,k) = \sum_{l=1}^k V(j,l) \quad (2.2.13)$$

Ahora bien, se puede definir una partición del flujo sobre el arco  $j$ ,  $e(j)$ , correspondiente a la partición de  $[0, b(j)]$ , simplemente definase  $V$   $k=1, \dots, K$

$$x(j,k) = \text{Max} [ 0, \min \{ x(j)-b(j,k-1), b(j,k)-b(j,k-1) \} ] \quad (2.2.14)$$

Si el costo unitario  $C(j,k)$  es asignado al flujo  $x(j,k)$ , la función

$$\hat{h}(j)[x(j)] = h(j)[0] + \sum_k C(j,k) x(j,k) \quad (2.2.15)$$

proporciona una aproximación lineal por pedazos y continua a  $h(j)[x(j)]$ . Dado que  $h(j)[x(j)]$  debe ser convexa, es deseable que su aproximación  $\hat{h}(j)[x(j)]$  mantenga esta propiedad ( $\hat{h}(j)[x(j)]$  es convexa si y sólo si  $C(j,1) \leq C(j,2) \leq \dots \leq C(j,K)$ ).

Suponiendo que  $K$  segmentos lineales se usaron en la aproximación de  $h(j)[x(j)]$ , para  $c/\text{arco } e(j)$ , y que las particiones y costos unitarios han sido asignados. El problema de optimización derivado se expresa a continuación:

$$\text{Min} \sum_{j,k} C(j,k) x(j,k) \quad (2.2.16)$$

s.c

$$\sum_k AX(k) = r \quad (2.2.17)$$

$$0 \leq X(k) \leq V(k) \quad (2.2.18)$$

$$x(j,k-1) = b(j,k-1), \text{ si } x(j,k) > 0 \quad (2.2.19)$$

Obsérvese que la constante  $\int h(j)[0]$  ha sido omitida de (2.2.16) y que el efecto de la aproximación ha sido reemplazar  $c/u$  de los arcos en  $G$  por  $K$  arcos. También, si  $C(j,1) \leq C(j,2) \leq \dots \leq C(j,K) \forall e(j) \in A$  es fácil ver que la restricción (2.2.19) puede ser omitida.

Suponiendo que una partición de cada  $[0, b(j)]$  usando  $K$  segmentos ya ha sido escogida, resta aún por determinar los costos unitarios  $C(j,k)$ . Un primer método para obtenerlos es usar una simple aproximación por cuerdas, esto es:

$$C(j,k) = \{ h(j)[b(j,k)] - h(j)[b(j,k-1)] \} / V(j,k) \quad (2.2.20)$$

Se puede mostrar que esta aproximación automáticamente producirá la propiedad deseada ( $C(j,1) \leq C(j,2) \leq \dots \leq C(j,K)$ ). También nótese que este método asigna un costo sobrestimado, excepto en los puntos  $b(j,0), b(j,1), \dots, b(j,K)$ .

Otro método que puede ser aplicado al determinar los costos unitarios está basado en la idea de ajuste por mínimos cuadrados. Suponiendo de nueva cuenta que las particiones de  $[0, b(j)]$  ya han sido hechas, se pueden determinar los costos unitarios recursivamente. Este método no garantiza que  $C(1) \leq C(2) \leq \dots \leq C(K)$ . Dicha propiedad puede ser lograda tras una cuidadosa selección del número de segmentos y de la posición de

$b(j,1), b(j,2), \dots, b(j,K) \forall e(j)$ . El lector interesado en el segundo método puede dirigirse a [KH,1980].

Naturalmente, si las funciones envueltas en cualesquiera de los métodos contienen porciones lineales, sería indicado usar aproximaciones que estén de acuerdo con éstas. Además la selección de cualquiera de las dos técnicas variará de acuerdo a la circunstancia del problema original que se resuelve.

Regresando al planteamiento de nuestro problema, es necesario decir que se ha considerado el enfoque de aproximación por cuerdas para la determinación de los costos unitarios, pues además de ser un método conceptualmente sencillo, da la pauta para el siguiente desarrollo:

Sea  $Z'$  la función de costo asociada al problema (Ver (2.2.9)) y considérese  $Z'(i,p) = [H'(i,p) + \underline{H}(i,p)]^2$  una función componente arbitraria de  $Z'$  cuya capacidad viene dada por  $\bar{H}'(i,p)$ . Se desea aproximar linealmente y por medio de  $K$  segmentos dicha componente. (En lo que sigue y para simplificar la notación se suprimen los subíndices  $i,p$ ).

Supóngase:

1)  $\underline{H} \in Z$

2)  $H'(1), H'(2), \dots, H'(K)$ , los puntos que denotan el extremo final para el  $k$ -ésimo segmento, son  $\dagger$   
 $H'(k) \in N \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}$ . En particular,

$H'(K) = \bar{H}'$  y para completar se agrega  $H'(0) = 0$ .

Entonces, a través de la aproximación lineal por segmentos de cuerda, ver (2.2.20), el costo del k-ésimo arco usado en la aproximación es:

$$C(k) = \frac{[H'(k) + \underline{H}]^2 - [H'(k-1) + \underline{H}]^2}{H'(k) - H'(k-1)} \quad (2.2.21)$$

$$= \frac{(H'(k) + \underline{H} + H'(k-1) + \underline{H})(H'(k) + \underline{H} - H'(k-1) - \underline{H})}{H'(k) - H'(k-1)} \quad (2.2.22)$$

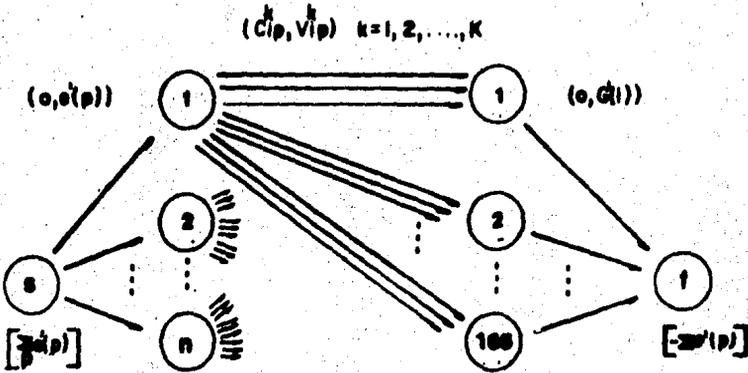
$$= \frac{(H'(k) + H'(k-1) + 2\underline{H})(H'(k) - H'(k-1))}{H'(k) - H'(k-1)} \quad (2.2.23)$$

$$= H'(k) + H'(k-1) + 2\underline{H} \quad (2.2.24)$$

Como el lector puede observar, el costo del k-ésimo arco usado es también un número natural. Esta propiedad, que no es general al realizar cualquier aproximación, brinda la posibilidad de tener parámetros enteros asociados a la red del problema. La importancia de este resultado se verá en la implantación.

Una vez realizada la aproximación a c/uno de las componentes, el efecto para la red de la fig. 2.VI.a) se muestra en la fig. 2.IX, donde los nuevos arcos dirigidos del conjunto P hacia el conjunto I poseen cotas superiores y costos de acuerdo a la aproximación hecha.

(costo, capacidad)  
[flujo externo]



donde  $C^k_{ip}$  es el costo del  $k$ -ésimo arco uniendo  $p$  con  $i$   
 $V^k_{ip}$  es la capacidad de  $k$ -ésimo arco uniendo  $p$  con  $i$

figura 2.1X Ilustración de los cambios en la red 2.VI.a) una vez realizada la aproximación lineal

Observe el lector que la fig. 2.IX muestra una red con una multigráfica asociada. Una multigráfica análoga se obtiene para la red 2.VI.b) asociada al problema, en particular para  $\beta$  sólo se necesitaría un arco por intervalo para representar el costo asociado por enviar energía.

Por último, en caso de no poder manejar una red con multigráfica, una red con gráfica asociada (a lo más un arco conectando cualquier par de nodos) puede ser obtenida tras hacer la transformación indicada en la fig. 2.X, donde  $I(k)$ ,  $k=1, \dots, K$  es la "k-ésima repetición" del conjunto  $I$ .

(COSTO, CAPACIDAD)  
[FLUJO EXTERNO]

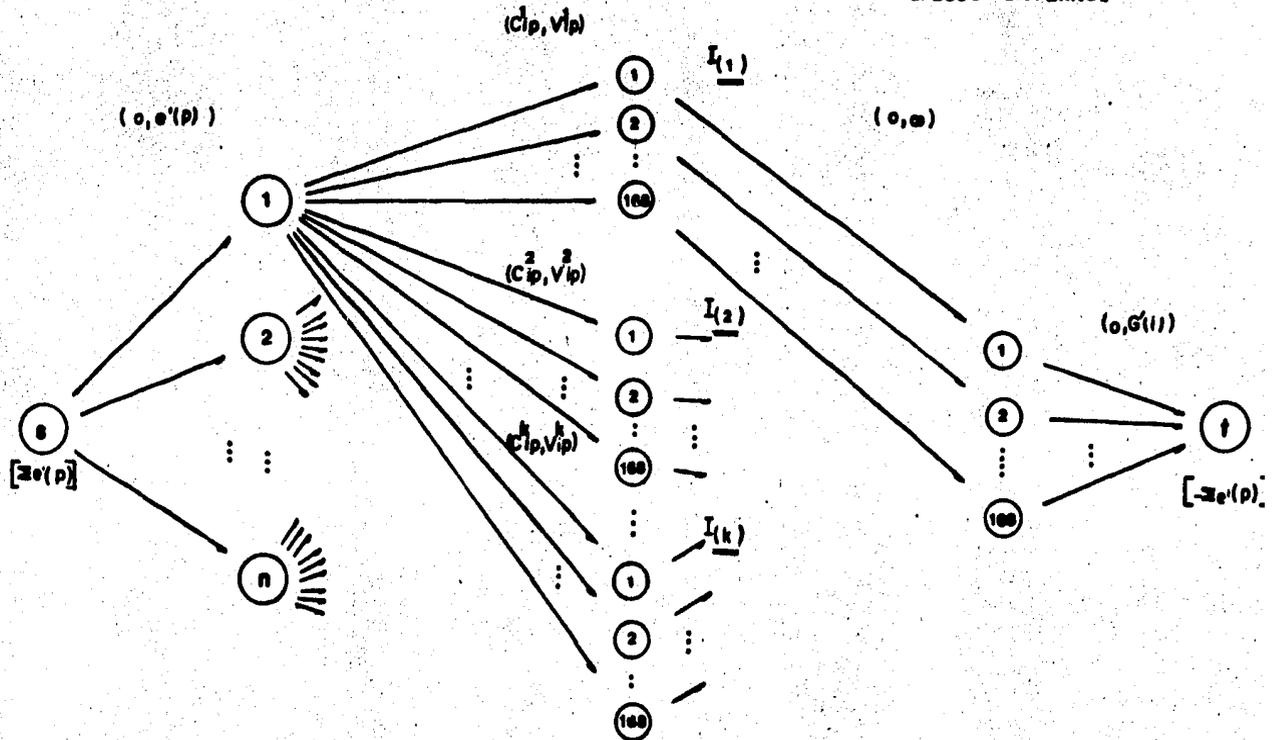


figura 2 x Red con grafica equivalente a la multigrafica de la figura anterior.

### 2.3 EL ALGORITMO PRIMAL-DUAL (AP-D)

Desde una perspectiva histórica, el AP-D ha sido desarrollado a partir de un algoritmo menos general que fue ideado para ciertos problemas de redes y que proporciona la clave para generar algoritmos especializados (simples y eficientes) para muchos problemas relacionados con éstas, v.gr. problemas del transporte y problemas de flujo a costo mínimo. Además, el AP-D facilita una mayor intuición y un mejor entendimiento de las técnicas de programación lineal. En consecuencia, esta metodología merece y recibirá nuestra atención en las siguientes páginas.

Al desarrollar esta sección, será necesario usar ideas básicas de programación lineal para poder establecer resultados útiles acerca de una variedad de problemas de redes. El lector que carezca de estos fundamentos puede remitirse, entre otros, a [BJ,1981] cap. 1 al 5; adicionalmente, y por lo que corresponde al estudio de la metodología AP-D, se recomienda al lector interesado dirigirse a [PS,1982] cap. 5 al 7, [BJ,1981] cap.6 y [FF,1962] cap. 3.

Para mayor comodidad, la exposición del AP-D ha sido dividida. Así, la subsección 2.3.1 introduce al estudio del AP-D, visto como una herramienta general que permite resolver cualesquiera

PPL. Algunos comentarios sobre su metodología y uso también son incluidos.

En 2.3.2, el AP-D se implanta a la clase de problemas de flujo a costo mínimo. Como resultado, se obtiene la posibilidad de atacar éste problema a través de ópticas distintas. En particular, se comentan las desventajas que sucederían al usar las técnicas desarrolladas en la red de la fig. 2.X asociada a nuestro problema.

A su vez, 2.3.3 estudia el problema del transporte y su solución a través del AP-D. De esta manera, se obtiene el algoritmo alfabeta cuya implantación transfiere el problema del transporte a subproblemas de flujo máximo; algunos comentarios y la presentación de algunos resultados útiles al algoritmo alfabeta son incluidos en esta subsección y en 2.3.3.1.

Es conveniente indicar que las ideas desarrolladas en esta subsección señalan caminos para posibles investigaciones futuras.

Por otra parte, la subsección 2.3.4 presenta una herramienta que proporciona una equivalencia útil entre la clase de los problemas de transporte y la clase de problemas de flujo a costo mínimo: la transformación de Wagner. Su uso, en combinación con el algoritmo alfabeta de la subsección anterior, ofrece una alternativa más en la solución de nuestro problema.

- Finalmente, la subsección 2.3.5 deja abierto el camino a seguir en el uso del AP-D para la solución del problema.

### 2.3.1 DESARROLLO DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL -

Considérese el siguiente PPL, expresado en forma estándar, al cual denominaremos problema primal (P).

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = C'X \\ \text{s.c.} \\ AX = b \geq 0 \quad \text{A matriz de } m \times n \\ X \geq 0 \end{array} \right.$$

Asociado al problema primal (P) se encuentra el problema dual (D)

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } W = Y'b \\ \text{s.c.} \\ Y'A \leq C' \\ Y' \text{ s.r.s.} \end{array} \right.$$

De las condiciones de holgura complementaria sabemos:

Si Y es factible en (D) y X es factible en (P), una condición necesaria y suficiente para la optimalidad de ambas soluciones en sus respectivos problemas es:

$$y(i) (a(i)X - b(i)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.3.1)$$

$$x(j) (c(j) - Y'A(j)) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2.3.2)$$

donde  $a(i)$  es el  $i$ -ésimo renglón de la matriz A y

$A(j)$  es la  $j$ -ésima columna de la matriz A

Obsérvese, que cualquier solución (P)-factible satisface (2.3.1) por estar (P) en forma estándar. De esta manera, el problema de obtener la optimalidad en (P) y (D) se reduce a satisfacer (2.3.2) para X, Y soluciones factibles en sus respectivos problemas.

Ahora bien, supóngase que se tiene Y, solución (D)-factible. Si se pudiera de alguna forma encontrar un X (P)-factible que satisfaga

$$x(j) = 0, \text{ si } c(j) - Y'A(j) > 0$$

entonces, la X hallada e Y serían soluciones óptimas asociadas a (P) y (D).

El AP-D surge de la idea de buscar tal X, dada Y. La búsqueda de tal X, se realiza a través de la solución de un PPL auxiliar llamado el problema primal restringido (PR), determinado por la solución dual factible Y, dada. Si la búsqueda de X no conduce a la optimalidad, se obtendrá información del dual de (PR), denominado (DPR), que indicará como mejorar la Y particular con la cual se comenzó. Iterando de esta manera, se tiene:

- 1] Se converge a la optimalidad en un número finito de pasos.
- ó bien,
- 2] La solución dual se hace no acotada.

En resumen, el AP-D comienza con factibilidad dual, que será mantenida durante todo el algoritmo, y procede a obtener factibilidad primal, manteniendo durante el proceso las condiciones de holgura complementaria.

La fig. 2.XI ilustra la metodología del AP-D.

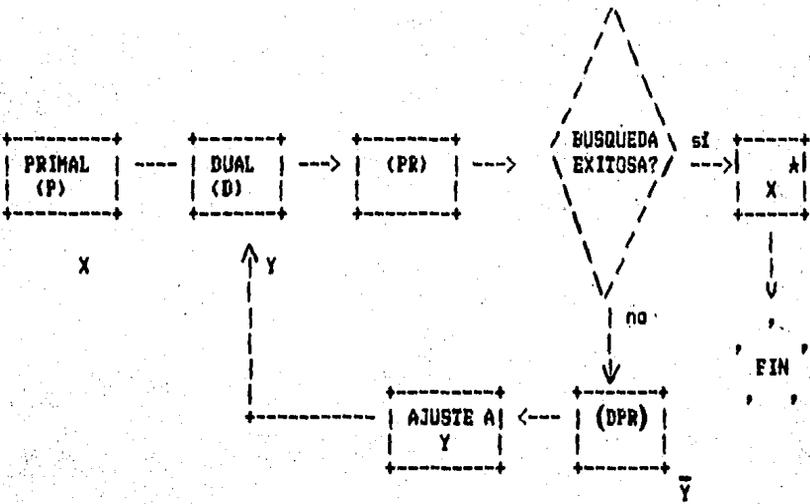


Fig. 2.XI. UNA PERSPECTIVA DEL AP-D

Abundando en la solución dual factible, se tiene:

- 1) Si  $C_j > 0$ , una solución dual factible que puede servir como inicio al AP-D es p.e.  $Y=0$ .

2] En caso contrario, se puede construir una  $Y$  factible usando una idea atribuida a Beale, entre otros. Véase [BJ,1981] pag. 259.

Entonces, supóngase que se tiene una solución dual factible  $Y$ .  
 Considérese el conjunto de restricciones del problema dual

$$Y'A < C' \quad | \quad (2.3.3)$$

i.e.  $Y'A(j) \leq c(j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$   $|$

Luego, se satisface una de las siguientes condiciones  
 $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$1] Y'A(j) < c(j) \quad (2.3.4)$$

o

$$2] Y'A(j) = c(j) \quad (2.3.4.bis)$$

Defínase el siguiente conjunto de índices a partir de la segunda condición

$$J = \{ j / Y'A(j) = c(j) \} \quad (2.3.5)$$

De (2.3.1) y (2.3.2) se deduce que  $X$ , solución (P)-factible, es óptima cuando

$$x(j) = 0, \forall j \in J \quad (2.3.6)$$

Esto dirige la búsqueda hacia una  $X$  que satisfaga:

$$\sum_{j \in J} a(i,j)x(j) = b(i) \quad i=1, \dots, m \quad (2.3.7)$$

$$x(j) \geq 0 \quad j \in J$$

$$x(j) = 0 \quad j \notin J$$

Este conjunto de igualdades usa solamente aquellas columnas de A correspondiente a igualdades en (D), las cuales a su vez corresponden a los índices del conjunto J; es por ello, que el conjunto J se denomina el conjunto de columnas admisibles.

De esta manera, para la búsqueda de tal X, se diseña un nuevo PPL, llamado el problema primal restringido (PR), el cual se escribe a continuación:

$$\text{Min } \xi = \sum_{i=1}^m x(i,a)$$

s.c.

$$\sum_{j \in J} a(i,j)x(j) + x(i,a) = b(i) \quad i = 1, \dots, m$$

$$(PR) \quad x(j) \geq 0 \quad \forall j \in J$$

$$x(j) = 0 \quad \forall j \notin J$$

$$x(i,a) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Observemos lo siguiente:

- 1) Se ha introducido una variable artificial  $x(i,a)$  por c/ecuación del problema original (P), la cual brinda una "medida" de las unidades que faltan a la restricción original

por satisfacer la igualdad requerida.

$$2] \xi \geq 0$$

Luego, una vez resuelto (PR), p.e. usando el algoritmo simplex, se tiene que la solución óptima,  $\xi^*$ , satisface  $\xi^* \geq 0$ . Distinguiremos dos casos:

$\xi^* = 0$ , se ha encontrado una solución a (2.3.7), de donde también se ha encontrado una solución óptima a (P).

$\xi^* > 0$ , en este caso se deberá considerar el problema dual de (PR), (DPR), y efectuar modificaciones en la solución dual dada inicialmente.

(DPR) se expresa a continuación:

$$\text{Max } \phi = Y'b$$

s.c.

$$Y'A(j) \leq 0 \quad j \in J$$

$$(DPR) \quad y(i) \leq 1 \quad i=1, \dots, m$$

$$y(i) \text{ s.r.s.}$$

Denótese por  $\bar{Y}$  a la solución óptima obtenida en (DPR) cuando (PR) es resuelto.

Nos encontramos en la siguiente posición:

Se ha tratado de encontrar, por medio de (PR), un  $X$  factible usando únicamente columnas admisibles, pero como  $\xi^* > 0$ , hemos fracasado. Lo que podemos rescatar de esta búsqueda, es el óptimo de (PR) y el de su correspondiente dual en (DPR),  $\bar{Y}$ . Se sugiere examinar una  $Y$  "corregida", dada por una combinación lineal de nuestra original  $Y$  e  $\bar{Y}$ .

$$Y^* = Y + \theta \bar{Y} \quad (2.3.8)$$

En analogía con el algoritmo simplex de programación lineal, se puede determinar como escoger  $\theta$   $\rightarrow Y^*$  permanezca factible en (D) y dirija a un mejoramiento en la  $f$ . o.

Primeramente se examina el cambio en la  $f$ . o.

$$Y^* b = (Y + \theta \bar{Y})' b = (Y' + \theta \bar{Y}') b = Y' b + \theta \bar{Y}' b \quad (2.3.9)$$

Dado que (PR) y (DPR) son un par primal-dual de PPL's, sus costos óptimos son iguales

$$0 < \xi^* = \bar{Y}' b \quad (2.3.10)$$

Por lo tanto, debemos tomar  $\theta > 0$  de tal manera que exista un mejoramiento en la  $f$ . o. del problema (D).

Lo que resta, es considerar el efecto de sumar  $\theta \bar{Y}$  a  $Y$ , sobre la factibilidad en (D).

Si se desea seguir manteniendo factibilidad en (D), se debe tener:

$$\begin{array}{l}
 Y' A \leq C' \\
 \text{i.e. } (Y+\theta\bar{Y})' A \leq C' \\
 \text{i.e. } (Y+\theta\bar{Y})' A(j) \leq c(j) \quad \forall j \\
 \text{i.e. } Y'A(j) + \theta\bar{Y}'A(j) \leq c(j) \quad \forall j
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} Y' A \\ \text{i.e. } (Y+\theta\bar{Y})' A \\ \text{i.e. } (Y+\theta\bar{Y})' A(j) \\ \text{i.e. } Y'A(j) + \theta\bar{Y}'A(j) \end{array}} \right\} (2.3.11)$$

Obsérvese que si  $\bar{Y}'A(j) \leq 0$ , como lo es  $\forall j \in J$  por ser  $\bar{Y}$  óptimo, no hay problema en satisfacer la factibilidad. Aún más, si  $\bar{Y}'A(j) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ , se puede incrementar  $\theta$  indefinidamente en la ecuación (2.3.8), produciendo un costo indefinidamente grande en (2.3.9). Así, el problema (D) tiene un costo no acotado, esto implica que el problema original (P) es infactible.

Luego, se ha demostrado el siguiente teorema:

-----  
**Teorema 2.1**

Si  $\xi^* > 0$  en (PR) y  $\bar{Y}$ , solución óptima de (DPR), satisface

$$\bar{Y}'A(j) \leq 0 \quad \forall j \in J$$

Entonces, (P) es infactible.  
 -----

Por lo tanto, el problema de seguir siendo factible deberá interesar sólo cuando  $\bar{Y}'A(j) > 0$  p.a.  $j \in J$ .

En este caso, el criterio de factibilidad es:

$$Y^* A(j) = Y'A(j) + \theta \bar{Y}'A(j) \leq c(j), \quad j \in J, \quad \bar{Y}'A(j) > 0 \quad (2.3.12)$$

En forma similar al algoritmo simplex, se puede mover  $\theta$  hasta un cierto límite y no más; siendo más preciso, se puede presentar este resultado en el siguiente teorema:

-----  
**TEOREMA 2.2.**

Si  $\xi^* > 0$  en (PR) y existe  $j \in J$  con  $\bar{Y}'A(j) > 0$ .

El máximo valor de  $\theta$  que mantiene la factibilidad de  $Y^* = Y + \theta \bar{Y}$ , en (D), es:

$$\theta(1) = \text{Min}_{\substack{j \in J \\ \bar{Y}'A(j) > 0}} \left\langle \frac{|c(j) - Y'A(j)|}{|\bar{Y}'A(j)|} \right\rangle \quad (2.3.13)$$

En particular, el nuevo costo en (D) es

$$W^* = Y^* b = Y'b + \theta(1)\bar{Y}'b = W + \theta(1)\bar{Y}'b > W \quad (2.3.14)$$

-----  
 Cuando (PR) es resuelto y se llega a una solución mejorada en (D), se debe redefinir el conjunto  $J$  y repetir el procedimiento hasta que ya sea  $\xi^* = 0$ , y se alcanza el óptimo en (P), o hasta que se muestre que (P) es infactible, según el teorema 2.1.

Finalmente, es interesante notar que si el mínimo en el cálculo de  $\theta(1)$ , ver ecuación (2.3.13), ocurre para  $j=j$ , entonces  $j$  se hace un nuevo miembro del conjunto  $J$ , ya que de (2.3.12).

$$Y^* A(j) = Y'A(j) + \left\langle \frac{|c(j) - Y'A(j)|}{|Y'A(j)|} \right\rangle \bar{Y}'A(j) = c(j) \quad (2.3.15)$$

y por lo tanto, la variable  $x(j)$  podrá tomar valores positivos en la nueva iteración de (PR).

## ESQUEMA DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL

1] Sea  $Y$  factible en (D).

2] Sea  $J = \{ j / Y'A(j) = c(j) \}$ .

Construye (PR) y resuélvelo.

$$\xi^* = 0 ?$$

2.1] Si. Alto, se ha obtenido el óptimo de (P).

2.2] No. Ve a 3].

3] Sea  $\bar{Y}$  la solución óptima de (DPR)

$$\bar{Y}' A(j) \leq 0 \quad \forall j \in J ?$$

3.1] Si. Alto, el problema (P) es infactible.

3.2] No. Ve a 4].

4] Redefine  $Y$ , como:

$$Y = Y + \theta(1) \bar{Y} \quad (\text{Ver (2.3.13)})$$

Regresa a 2]

## COMENTARIOS SOBRE EL AP-D:

Es importante mencionar que en c/iteración del AP-D, se puede comenzar (PR) a partir de la solución óptima obtenida en la iteración anterior. Esto es debido, a que ninguna variable que esté en  $J$ , y que también se encuentre en la base óptima de (PR) al fin de una iteración, puede dejar al conjunto  $J$  al inicio de la siguiente. Más formalmente, se presenta el siguiente teorema. (El lector interesado en su prueba puede remitirse a [PS,1982]).

-----

### TEOREMA 2.3

Cada columna admisible en la base óptima de (PR) permanece admisible al inicio de la siguiente iteración.

-----

Por otra parte, y relativo a la convergencia finita del algoritmo, recuérdese que en c/iteración se añade a (PR) una variable que mejora el objetivo.

Por lo tanto, en ausencia de degeneración en (PR), el objetivo óptimo,  $\xi^*$ , decrece estrictamente. Esto significa que el conjunto  $Q$ , generado en c/iteración es distinto de todos aquellos conjuntos generados en iteraciones anteriores. Puesto que sólo hay un número finito de conjuntos de la forma  $Q$  y ninguno de ellos se puede repetir, el algoritmo termina en un número finito de pasos.

En el caso de degeneración en (PR), se puede garantizar finitud usando una regla para evitar la repetición de bases, como en el algoritmo simplex.

Por último, una vez estudiado el AP-D, resulta conveniente adentrarse más en los movimientos que lleva a cabo el algoritmo. Véase:

Al comenzar con el problema original (P), la metodología del AP-D lo transfiere a una solución iterativa de (PR), la cual no depende del vector C explícitamente, sino más bien del conjunto de columnas admisibles J.

A través del ciclo iterativo que se visualiza en la fig. 2.XI, se han eliminado las complicaciones del manejo de un vector de costo. Algo similar resulta con el problema (D) y el vector del lado derecho del respectivo problema.

Esta técnica de comenzar con un problema e iterativamente resolver subproblemas, al aplicar el APD, es la base para construir algoritmos eficientes para problemas de flujo en redes.

### 2.3.2 EL AP-D EN PROBLEMAS DE FLUJO A COSTO MINIMO -

Una vez hecho el comentario sobre la metodología del AP-D, esta subsección aplicará dicho algoritmo al problema de flujo a costo mínimo, para ello se cuenta con dos maneras de realizarlo:

**Opción 1.** Se puede considerar al problema original como el dual (D) y reducir las complicaciones del vector del lado derecho, de tal forma que la solución iterativa transfiera a subproblemas de flujo a costo mínimo

**Opción 2.** En este caso, se puede considerar al problema original como el primal (P) y reducir las complicaciones del vector de costos.

La red de la fig. 2.X servirá completamente para el desarrollo de ambos análisis.

Primeramente se desarrolla la opción 1, la cual mantiene una solución factible al problema original (D) en todas las iteraciones y no trata explícitamente con el primal (P) o su restricción. Posteriormente se presenta la opción 2, en la cual será necesario efectuar algunos cambios al problema original (P), que nos permitan llegar a un algoritmo que evite al problema dual.

Para unificar criterios, el problema a considerar puede ser definido como sigue:

Sea  $G = (V, A)$  la gráfica asociada a una red  $N$ , donde se distingue la presencia del nodo fuente  $s$ , nodo pozo  $t$  y un flujo de valor  $v(i) \geq 0$ . Asimismo,  $V(i, j) \in A$ , existe  $b(i, j)$ ,  $c(i, j)$  ambos pertenecientes a  $\mathbb{R}^+$  que representan, respectivamente, la cota superior y el costo por unidad de flujo en el arco  $(i, j)$ . El problema de flujo a costo mínimo es determinar un  $s$ - $t$  flujo

factible de valor  $v(0)$  que tenga costo mínimo. Expresado como un (PPL) se tiene

Min  $C'f$

s.c.

$$Af = -v(0)d$$

$$f \leq b \text{ para cada arco}$$

$$f \geq 0 \text{ para cada arco}$$

donde  $A$  es la matriz de incidencia nodos-arcos y  $d(i) = \begin{cases} -1, & \text{si } i=s \\ 1, & \text{si } i=t \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Se hace notar que el problema de flujo a costo mínimo requiere de un flujo de valor fijo,  $v(0)$ , que es el más barato entre todos los flujos de ese mismo valor, a diferencia del problema de flujo máximo que sólo requiere encontrar el mayor flujo entre  $s$  y  $t$ .

Obsérvese que la red de la fig. 2.X satisface el formato del problema de flujo a costo mínimo.

#### OPCION 1, ALGORITMO DE CICLOS

En primer lugar, se escribe el problema de flujo a costo mínimo como el dual de un problema primal en forma canónica.

$$\text{Max } -C'f$$

s.c.

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad & Af \leq -v(0)d \\ & f \leq b \quad \text{para cada arco} \\ & -f \leq 0 \quad \text{para cada arco} \end{aligned}$$

Obsérvense los siguientes aspectos:

- 1] Se han remplazado las ecuaciones de conservación de flujo en desigualdades, ya que un déficit en la ecuación de balance de algún nodo implica un exceso en la ecuación de balance de algún otro nodo. Por lo tanto, para cualquier flujo factible, el primer grupo de desigualdades se cumplirá en igualdad.
- 2] Para encontrar un flujo factible inicial de valor  $v(0)$  en (D) se puede hacer uso del AFF.

Ahora bien, el dual del primal restringido, (DPR), puede deducirse por inspección, en este caso se tiene

$$\text{Max } -C'f$$

s.c.

$$\begin{aligned} \text{(DPR)} \quad & Af = 0 \\ & f \leq 0 \quad \text{para arcos saturados} \\ & -f \leq 0 \Leftrightarrow f \geq 0 \quad \text{para arcos vacíos} \\ & f \geq -1 \quad \text{para todos los arcos (ya que } -C \leq 0) \end{aligned}$$

Nótese que se ha remplazado  $Af \leq 0$  por  $Af=0$ , con la misma justificación que en la observación 1]. Luego, se recobra la idea de conservación de flujo en c/nodo.

Como se sabe, un flujo que satisface  $Af=0$ , recibe el nombre de circulación. Entonces, obsérvese que la solución óptima a (DPR) es una circulación especial que debe cumplir:

- 1] No debe tener flujo positivo sobre un arco saturado
- 2] No debe tener flujo negativo sobre un arco vacío
- 3] El flujo que recorre cualquier arco no debe ser menor que -1

Dadas las condiciones anteriores, resulta de interés incorporarlas en una nueva red capacitada y con costos. Para ello se hace uso de la red incremental, cuya definición se presenta a continuación.

Dado un flujo factible  $f$  en la red  $N$  con gráfica asociada  $G=(V,A)$ , se define la red incremental,  $N'(f)$ , como sigue:

- 1)  $N'$  tendrá el mismo conjunto de nodos que  $N$
- 1i)  $\forall (i,j) \in A \rightarrow f(i,j)=v, b(i,j)=b, c(i,j)=c$  se colocan 2 arcos en  $N'$ 
  - 1) Un arco  $(i,j)$  con capacidad  $b-v \geq 0$  y costo  $c$

2) Un arco  $(j,i)$  con capacidad  $v \geq 0$  y costo  $-c$

En particular, se omiten todos aquellos arcos con capacidad cero. Véase la siguiente figura:

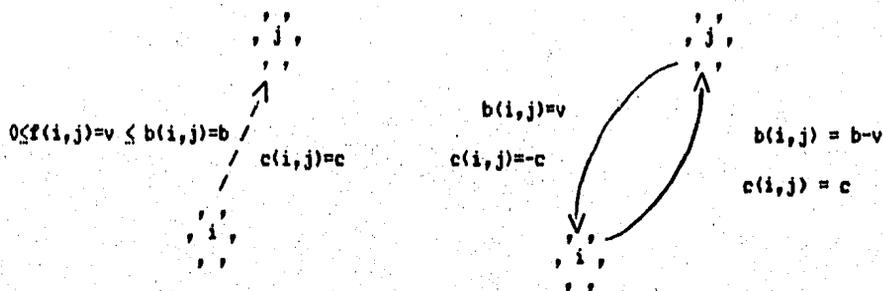


Fig. 2.XII UN ARCO EN LA RED  $N$  Y SUS CORRESPONDIENTES

ARCOS EN LA RED INCREMENTAL  $N'$

Se sigue, de la definición anterior, que un camino (dirigido) de  $s$  a  $t$  en  $N'(f)$  con peso  $X$ , determina una cadena aumentante de  $s$  a  $t$  en  $N$ , y que un incremento de una unidad en el valor del flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  a lo largo de esta cadena resulta en un incremento en el costo total del flujo en  $X$  unidades. Asimismo, una circulación  $\bar{f}$  en  $N'(f)$  de costo  $X$ , determina un nuevo  $s$ - $t$  flujo  $f + \bar{f}$  en  $N$  del mismo valor, con un incremento de costo de  $X$  unidades.

Ahora bien, el AP-D indica que el flujo  $f$  es óptimo si y sólo si la solución óptima al (DPR) tiene costo cero, lo cual es equivalente a que no haya circulaciones de costo negativo en  $N'(f)$ . Pero, la red incremental  $N'(f)$  tiene una circulación de costo negativo si y sólo si tiene un circuito (camino cerrado) de costo negativo.

La condición para la optimalidad en (DPR) se exhibe en el siguiente teorema.

-----  
**TEOREMA 2.4**

Un s-t flujo,  $f$ , en una red  $N$ , es un flujo de costo mínimo si y sólo si no existen circuitos en  $N'(f)$  con costo negativo.

-----

En esta opción, el AP-D puede ser implantado tras obtener un flujo  $f$  de valor  $v(0)$ , v.gr. usando el AFF, y buscar por circuitos de costo negativo en la red incremental asociada, p. ej. mediante el algoritmo de Floyd y Marshall. (El lector que desconozca dicho algoritmo puede remitirse a [PS,1982]).

Si  $N'$  no contiene más circuitos negativos, se finaliza con el flujo óptimo  $f$  en la red  $N$ . En caso contrario, sea  $C'$  el circuito negativo en  $N'(f)$ , la parte iterativa del AP-D procede a realizar los cambios pertinentes en la red  $N$ , hasta encontrar el nuevo flujo  $f+\bar{f}$  del mismo valor pero de menor costo. El proceso

para realizar los cambios es el siguiente:

$$\text{Sea } \theta = \min \{ b(i,j) / (i,j) \in C' \} \quad (2.3.16)$$

$\theta$  representa el máximo flujo permitido en el circuito  $C'$  de  $N'$ .

Con esta información, un flujo de  $\theta$  unidades puede "viajar" a través de  $C'$ , de donde un flujo  $\bar{f}$  del mismo número de unidades circula a través del ciclo  $C$  en  $N$  asociado a éste. Se ha obtenido una circulación  $\bar{f}$  de costo negativo. De esta forma, se determina un nuevo flujo  $f + \bar{f}$  en  $N$  del mismo valor pero con un decremento en costo.

Es en base al nuevo flujo  $(f + \bar{f})$  que se forma la nueva red incremental y se repite el proceso hasta que no existan circuitos negativos en  $N'$ . Por último, resulta indicado comentar que una vez encontrado el flujo de valor  $v(0)$ , la opción 1 mantiene factibilidad hasta encontrar la solución óptima.

### RESUMEN DEL AP-D, OPCION 1

#### 1) INICIO

Usa el algoritmo de flujo máximo de Ford y Fulkerson para encontrar un flujo  $f$  de valor  $v(0)$ .

Se encuentra el flujo de valor  $v(0)$  ?

1.1] Si. Ve a 2].

1.2] No. El problema es infactible. Fin.

2] Diseña la red incremental  $N'$  asociada al flujo  $f$ .

Existen circuitos negativos en  $N'(f)$  ?

2.1] Si. Sea  $C'$  dicho circuito.

Calcula  $\theta$  (ver 2.3.16). Aumenta flujo sobre  $C$

Regresa a 2]

2.2] No. El flujo  $f$  es óptimo. Fin.

## OPCION 2. ALGORITMO ACUMULATIVO

Como se indica al inicio de esta subsección, la opción 2 consiste en aplicar el AP-D al problema de flujo a costo mínimo, considerando este problema como un primal (P). De esta forma, se reduciría el trabajo de manejar el vector costo. Esto se complica, dado que, por ejemplo, se debiera tratar con el correspondiente dual (D) para encontrar las columnas admisibles.

Es por tanto conveniente colocar el problema original en términos ligeramente diferentes: primeramente, se introduce el valor del flujo  $v$  como una variable explícita del problema. En segundo lugar, en vez de minimizar la función  $c'f$ , se maximiza  $pv - c'f$ , donde  $p$  puede pensarse como un parámetro que consecutivamente asume valores  $0, 1, 2, \dots$ . (El lector interesado puede remitirse a [FF, 1962], donde se presenta el desarrollo completo). De esta forma, se obtiene una sucesión de flujos de valor creciente,  $c$ /uno de costo mínimo. El efecto total de este desarrollo es obtener un algoritmo que evite al dual (D).

El fundamento de dicho algoritmo viene dado por el siguiente

-----

#### TEOREMA 2.5

Sea  $f(1)$  un flujo óptimo de valor  $v$  en un problema de flujo a costo mínimo.

Sea  $f(2)$  un flujo de valor  $\theta$  a lo largo de la  $s$ - $t$  cadena aumentante,  $P$ , inducida por un  $s$ - $t$  camino de costo mínimo,  $P'$ , en  $N'(f(1))$ .

Entonces,  $f(1) + f(2)$  es un flujo óptimo de valor  $v + \theta$ .

DEMOSTRACION:

Si  $f(1) + f(2)$  no es un flujo óptimo de valor  $v+\theta$ , entonces, del teorema anterior, existe un circuito de costo negativo  $C'$  en la red incremental  $N'[f(1) + f(2)]$ .

Ahora, debido a que el flujo de valor  $v$  era óptimo,  $N'(f(1))$  no contenía circuitos negativos. Luego, el circuito apareció en la red incremental cuando el flujo incrementó de valor.

Obsérvese que el flujo  $f(1) + f(2)$  se diferencia  $f(1)$ , sólo en aquellos arcos que forman la cadena aumentante  $P$  en  $N$ , correspondiente al camino  $P'$  en  $N'(f(1))$ .

$$\text{Sea } A(P) = \{ (i,j) / (i,j) \in P \} \quad (2.3.17)$$

Entonces, al construir la red incremental asociado al flujo  $f(1) + f(2)$ ,  $N'[f(1)+f(2)]$ , se tiene que:

-] Para cada  $(i,j) \in A(P)$  sus arcos asociados en  $N'[f(1) + f(2)]$  son idénticos a los arcos asociados en  $N'(f(1))$ .

-] Para cada  $(i,j) \in A(P)$  sus arcos asociados en  $N'[f(1) + f(2)]$  son diferentes a los arcos asociados en  $N'(f(1))$ .

Luego,  $C'$  tiene un arco  $e=(i,j)$  de costo  $-c$  correspondiente a un arco  $(j,i)$  de  $P'$ , como se muestra en la siguiente figura:

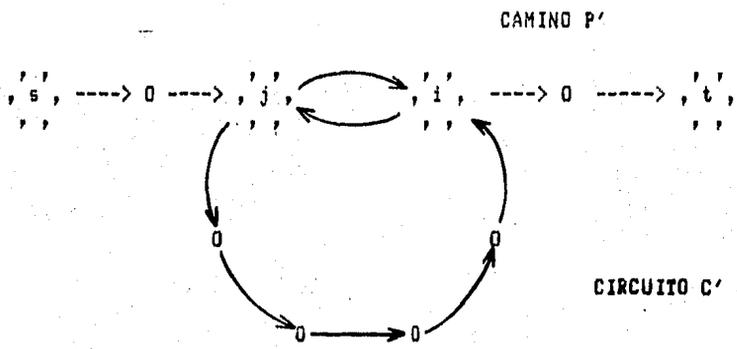


FIG. 2.XIII. VISUALIZACION DEL CAMINO P' Y EL CIRCUITO C'

Ahora bién, remplace el arco  $(j,i)$  en  $P'$ , por  $C' - (e)$  y llámese  $P''$  a este nuevo camino de  $s$  a  $t$ . Nótese que:

$$-c + (\text{costo del resto de } C') = \text{costo de } C' < 0$$

de donde

$$\text{costo del resto de } C' < c.$$

Luego, en  $N'(f(1))$ ,  $P'$  no es el camino de costo mínimo de  $s$  a  $t$ .  $\implies \Leftarrow$

Esto prueba que  $f(1) + f(2)$  es óptimo.

A partir de este teorema, se pueden ir acumulando los flujos óptimos paso por paso tras agregar flujo a lo largo de s-t caminos de costo mínimo en  $N'$ . El proceso de búsqueda de s-t caminos más cortos nos lleva a 2 casos:

Caso 1] Se encuentra un camino de costo mínimo  $P'$  en  $N'$ .

Luego, una cadena aumentante  $P$  en  $N$  y se aumenta el flujo a través de  $P$  hasta que:

1.1] El flujo alcanza el valor  $v(0)$ , en cuyo caso se finaliza.

ó

1.2] Alguno de los arcos se satura ó se vacía, en cuyo caso se repite el proceso de búsqueda.

Caso 2] No existe un camino entre  $s$  y  $t$  y el problema no tiene solución.

El investigar caminos de costo mínimo de  $s$  a  $t$  en  $N'$ , equivale a buscar rutas s-t más cortas. Luego, se puede implantar un algoritmo que resuelva dicho problema, simplemente obsérvese que algunos arcos en  $N'$  pueden tener costo negativo y el algoritmo (de rutas más cortas) debe enfrentar este problema. Un hecho agradable, es que siempre se tiene, en cualquier etapa, un flujo óptimo de algún valor  $f < v(0)$ , luego, por el teorema de la opción 1, no hay circuitos de costo negativo en  $N'$ .

Finalmente, se puede mencionar que ambos algoritmos pueden ser combinados para resolver el mismo problema, en lo que sigue nos referiremos a dicha metodología como OPCION 1 + OPCION 2. La idea de este procedimiento es muy sencilla y consta de un paso inicial y dos fases c/u de ellas correspondiendo respectivamente a las opciones 1 y 2.

Los detalles de la metodología OPCION 1 + OPCION 2 se presentan a continuación:

#### OPCION 1 + OPCION 2

1. INICIO: Sea  $f = (f(i, j))$  un flujo factible de valor  $v \leq v(0)$ , dde  $v(0)$  es el valor deseado.
2. FASE 1: Aplíquese el procedimiento de la opción 1 hasta construir el flujo óptimo de valor  $v$ .

$v = v(0) ?$

2.1 Si. Haz obtenido el flujo óptimo de costo mínimo. Fin.

2.2 No. Ve a 3.

3. FASE 2: Aplíquese el procedimiento de la opción 2 en donde se resuelve un problema de rutas más cortas

respecto a los costos en  $N'$ .

Existe la ruta más corta entre  $s$  y  $t$  ?

3.1] Si. Incremente el valor del flujo a lo largo de la cadena aumentante de  $N$  en  $\theta = \min \{ \delta, v(0) - v \}$ , dde  $\delta$  es el máximo incremento permitido en la cadena.

Sea  $f'$  el nuevo flujo de valor  $v + \theta$ .

$v + \theta = v(0)$  ?

3.1.1] Si. El flujo  $f'$  es óptimo. Fin.

3.1.2] No. Repita el procedimiento con el nuevo flujo  $f'$ . Ve a 3].

3.2] No. El problema es infactible. No hay flujo de valor  $v(0)$ . Fin.

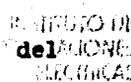
Antes de finalizar la presente subsección, es conveniente comentar la aplicación de cualquiera de los procedimientos descritos en la red de la fig. 2.X.

Es claro que si bien el problema queda resuelto tras la aplicación de los procedimientos estudiados, la carga extra del modelo 2.X convierte su aplicación en una tarea poco atractiva. Veamos:

Si  $K$  representa el número de segmentos usados en la aproximación lineal de las funciones componentes de costo ( $K > 1$ ). El proceso que lleva de la red con multigráfica asociada 2.IX a la red con gráfica asociada 2.X, implica la aparición en el problema de flujo a costo mínimo de hasta  $K(168)$  nuevas variables (una por cada arco construido) y  $(K-1)168$  nuevas restricciones (una por cada nodo del conjunto  $I(k)$ ,  $k=2, \dots, K$ ). Luego, los algoritmos empleados en las diferentes opciones verán incrementados sus tiempos de ejecución en perjuicio de los requerimientos de tiempo dados para la solución del problema; a partir de este momento, resulta alentador presentar una metodología que resuelva el problema en el modelo presentado por la fig. 2.IX, o su análogo como problema del transporte capacitado. Esto es, resolver nuestro problema en una multigráfica mejor que en su gráfica asociada, ahorrando la carga extra que representa la introducción de nuevos arcos y nodos. El trabajo desarrollado en las siguientes páginas persigue esta idea.

### 2.3.3 EL AP-D- Y EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE. ALGORITMO

#### ALFABETA. -



Como un primer acercamiento a la solución del problema del transporte capacitado (ver fig. 2.VI.b) por medio del AP-D, resulta de interés la aplicación de esta metodología en el problema del transporte.

El problema del transporte (PT), es un caso especial de problemas de flujo a costo mínimo y está motivado por la siguiente circunstancia:

Considérese  $m$  orígenes, donde el origen  $i$  tiene una oferta de  $o(i)$  unidades de un cierto artículo. Además, están localizados  $n$  destinos, donde el destino  $j$  demanda  $d(j)$  unidades del artículo. Supóngase que  $o(i), d(j) > 0$ . Asociado con  $c$ /arco del origen  $i$  al destino  $j$ ,  $(i,j)$ , se tiene un costo unitario,  $c(i,j)$ , por transporte. El problema consiste en determinar el programa de envíos factible de los orígenes a los destinos que minimice el costo total del transporte. En forma más precisa:

Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  
ofertas en los orígenes  $o(i) \in \mathbb{R}^+$  ( $i=1, \dots, m$ ),  
demandas terminales  $d(j) \in \mathbb{R}^+$  ( $j=1, \dots, n$ ) y  
costos unitarios  $c(i,j) \forall i, \forall j$ .

Sea  $f(i,j)$  las unidades del bien que se transportan del origen  $i$  al destino  $j$ .

El modelo de programación lineal para el problema del transporte es:

$$\text{Min } Z = \sum_{i,j} c(i,j) f(i,j)$$

s.c.

$$\sum_{j=1}^n f(i,j) = o(i) \quad i=1, \dots, m \quad (2.3.18)$$

$$(PT) \quad \sum_{i=1}^m f(i,j) = d(j) \quad j=1, \dots, n \quad (2.3.19)$$

$$f(i,j) \geq 0$$

$$\text{donde} \quad \sum_{i=1}^m o(i) = \sum_{j=1}^n d(j) \quad (2.3.20)$$

Obsérvese que (PT) se pudo haber formulado con las desigualdades

$$\sum_{j=1}^n f(i,j) \leq o(i) \quad i=1, \dots, m \quad (2.3.21)$$

$$\sum_{i=1}^m f(i,j) \geq d(j) \quad j=1,\dots,n \quad (2.3.22)$$

expresando el hecho que  $o(i)$  está disponible como oferta y  $d(j)$  es una demanda que debe ser satisfecha.

Las igualdades (2.3.18), ..., (2.3.20) pueden ser usadas sin pérdida de generalidad, dado que siempre se puede introducir un destino ficticio ( $n+1$ ) con demanda y costo iguales a:

$$\begin{aligned} d(n+1) &= \sum_{i=1}^m o(i) - \sum_{j=1}^n d(j) \\ c(i,n+1) &= 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} d(n+1) &= \sum_{i=1}^m o(i) - \sum_{j=1}^n d(j) \\ c(i,n+1) &= 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned}} \right\} (2.3.23)$$

Este destino extra consumirá el exceso de oferta (asumido no negativo) sin costo alguno. Nótese que su funcionamiento depende de la suposición  $c(i,j) \geq 0 \quad \forall i, \forall j$ , pues en caso contrario su introducción puede conducir a errores.

Como muestra, considérese el siguiente ejemplo expresado en forma de desigualdades.

$$\text{Min } -2f(1,1) + (-4)f(2,1)$$

s.c.

$$f(1,1) \leq 3$$

$$f(2,1) \leq 2$$

(P)

$$f(1,1) + f(2,1) \geq 4$$

$$f(1,j) \geq 0$$

Evaluando en los puntos extremos (2,2), (3,2) y (3,1) de la región de soluciones factibles (ver fig. 2.XIV) se tiene:

$$(2,2) \text{ ----} \rightarrow (-2)2 + (-4)2 = -12$$

$$(3,2) \text{ ----} \rightarrow (-2)3 + (-4)2 = -14$$

$$(3,1) \text{ ----} \rightarrow (-2)3 + (-4)1 = -10$$

luego,  $f^* = (3,2)$  es la solución óptima a (P).

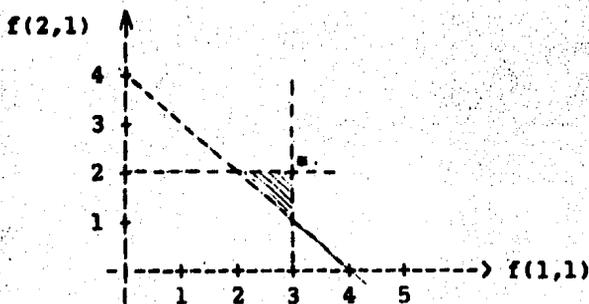


FIG. 2.XIV: ILUSTRACION DEL ESPACIO DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA (P)

Ahora introduzcamos el destino artificial,

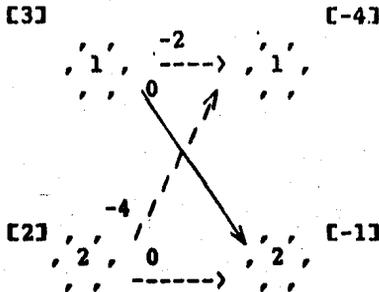


FIG. 2.XV INTRODUCCION DEL DESTINO ARTIFICIAL.

En este caso, el problema (P') se expresaria como:

$$\text{Min } -2f(1,1) + (-4)f(2,1)$$

s.c.

$$\begin{aligned} f(1,1) + f(1,2) &= 3 \\ f(2,1) + f(2,2) &= 2 \\ (P') \quad f(1,1) + f(2,1) &= 4 \\ f(1,2) + f(2,2) &= 1 \\ f(1,j) &\geq 0 \end{aligned}$$

y obsérvese como los valores óptimos de las variables  $f(1,1)$ ,  $f(2,1)$  en el problema (P)

$$f(1,1) = 3, \quad f(2,1) = 2$$

no forman una solución en (P').

Por otra parte, si  $o(i)=1 \forall i \in \{1, \dots, m\}$  y  $d(j)=1 \forall j \in \{1, \dots, n\}$ , el problema del transporte se denomina problema de asignamiento. De hecho, cuando el AP-D se aplica a (PT), se está "en posición de invertir la historia pues el "Método

Húngaro" de Kuhn para el problema de asignamiento fue el precursor del algoritmo primal-dual" [PS,1982] pag. 144.

## EL AP-D Y EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE:

Al aplicar el AP-D al problema del transporte, la idea será reducir las complicaciones del vector costo en (PT) y examinar su dual, (D), explícitamente, más bien que eludirlo como se hizo en la subsección anterior. Primeramente se plantea el problema (D).

Si asociamos variables  $\alpha(i)$ ,  $\beta(j)$  al grupo de restricciones (2.3.18) y (2.3.19) respectivamente, se tiene:

$$\text{Max } w = \sum_{i=1}^m \alpha(i) \alpha(i) + \sum_{j=1}^n \beta(j) \beta(j)$$

s.c.

$$(D) \quad \alpha(i) + \beta(j) \leq c(i, j) \quad \forall i, j$$

$$\alpha(i), \beta(j) \text{ s.r.s}$$

No se requiere mucha imaginación para encontrar una solución inicial factible a (D). Por ejemplo:

$$\alpha(i) = 0, \beta(j) = \min_i [c(i, j)] \quad (2.3.24)$$

Lo siguiente, es determinar el conjunto de columnas admisibles.

Sea  $IJ$  el conjunto de columnas admisibles, cuyos elementos son índices de variables descritos por pares  $(i,j)$  para los cuales la igualdad es alcanzada en (D).

$$\text{i.e. } IJ = \{ (i,j) / \alpha(i) + \beta(j) = c(i,j) \} \quad (2.3.25)$$

Luego, el primal restringido (PR) está definido por:

$$\text{Min } \xi = \sum_{i=1}^m x(i,a) + \sum_{j=1}^n x(m+j,a) = \sum_{i=1}^{m+n} x(i,a)$$

s.c.

$$\sum_{j=1}^n f(i,j) + x(i,a) = o(i) \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m f(i,j) + x(m+j,a) = d(j) \quad j=1, \dots, n$$

(PR)

$$f(i,j) \geq 0 \quad \text{si } (i,j) \in IJ$$

$$f(i,j) = 0 \quad \text{si } (i,j) \notin IJ$$

$$x(i,a) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m, m+1, \dots, m+n\}$$

donde  $x(i,a)$  ( $i=1, \dots, m+n$ ) representan las variables artificiales.

Ahora bien, reescribiendo la f. o.  $\xi$  se tiene:

$$\xi = \sum_{i=1}^m o(i) + \sum_{j=1}^n d(j) - 2 \sum_{(i,j) \in IJ} f(i,j) \quad (2.3.26)$$

de donde

$$\text{Mín } \xi \Leftrightarrow \text{Max } \sum_{(i,j) \in IJ} f(i,j)$$

y

$$\xi = 0 \Leftrightarrow \sum_{(i,j) \in IJ} f(i,j) = \sum_{i=1}^m o(i) = \sum_{j=1}^n d(j) \quad (2.3.27)$$

De (2.3.27), se deduce que el problema (PR) es equivalente al de maximizar flujo sobre los arcos admisibles. Aún más, la solución óptima se logra cuando el flujo sobre los arcos admisibles tiene un valor igual a la suma de las ofertas en los orígenes.

Por lo tanto, se puede reescribir (PR) sin las variables artificiales pero con desigualdades en las restricciones. Denominemos por (PR') a este nuevo problema. Se tiene:

$$\text{Max } \sum_{(i,j) \in IJ} f(i,j)$$

s.c.

$$(PR') \quad \sum_j f(i,j) \leq o(i) \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_i f(i,j) \leq d(j) \quad j=1, \dots, n$$

$$f(i,j) \geq 0 \quad (i,j) \in IJ$$

$$f(i,j) = 0 \quad (i,j) \notin IJ$$

(PR') es un problema de flujo máximo para la red  $N(IJ)$  de la siguiente figura, en donde se ha creado un nodo superorigen  $s$  y un nodo super destino  $t$ ; un arco de  $s$  a  $c/u$  de los  $m$  orígenes con capacidad  $o(i)$ ; un arco de  $c/u$  de los  $n$  destinos a  $t$  con capacidad  $d(j)$ . Finalmente, se colocará un arco del origen  $i$  al destino  $j$  si y sólo si  $(i,j) \in IJ$ , dicho arco tendrá capacidad infinita. Esto asegura que  $f(i,j)$  puede ser mayor que cero solamente cuando  $(i,j) \in IJ$ .

(capacidad)

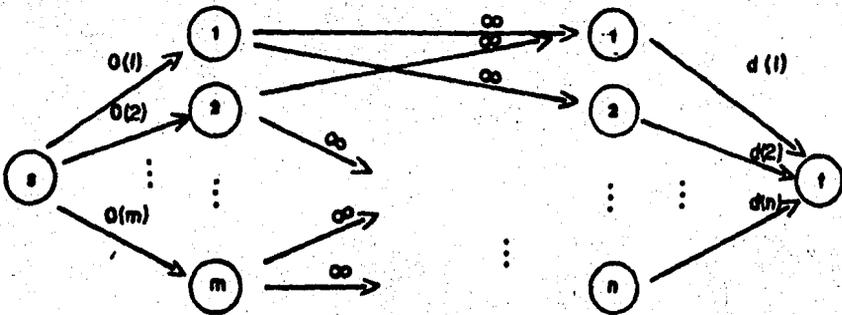


figura 2.xvii: Red asociada a un problema de flujo maximo equivalente al problema primal restringido de un (PT). los arcos de capacidad infinita corresponden a indices admisibles en el dual

El AP-D procederá de la siguiente forma:

- 1] Considera una solución dual factible  $(\alpha, \beta)$ , v.gr. (2.3.24).
- 2] Determina  $IJ$ .
- 3] Construye la red asociada  $N(IJ)$ . Ver fig. 2.XVI.
- 4] En  $N(IJ)$  resuelve un problema de flujo máximo.

Sea  $v$  el valor de dicho flujo.

$$\text{Luego, } v \leq \sum_{i=1}^n o(i)$$

$$v < \sum_{i=1}^n o(i) ?$$

4.1] Si. Ve a 5].

4.2] No. Hemos obtenido el programa de envíos que minimiza el costo total del transporte. Fin.

- 5] Mejora la solución dual factible  $(\alpha, \beta)$ , con la solución óptima del dual del primal restringido, (DPR), digamos  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ . Se regresa a 2].

En lo que sigue, se abundará en la mecánica de 5]. Luego, se requiere conocimiento de algunos resultados sobre flujos máximos, cortaduras mínimas y el AFF. El lector que desconozca estos resultados puede dirigirse a [FF,1962], [La,1976]. También, se necesita alguna terminología para discutir la aplicación del AFF en (PR'). Esta se presenta a continuación:

Cuando se encuentre una cadena aumentante s-t después de la aplicación del AFF en la red N(IJ) asociada a (PR'), se dirá que estamos en **PENETRACION** (en inglés Breakthrough). En caso contrario, cuando se logre la optimalidad en N(IJ), se dirá que estamos en **NO PENETRACION** (en inglés Nonbreakthrough).

Además en no penetración, sea

$$\begin{array}{l} \star \\ I = \{ i / \text{origen } i \text{ está etiquetado} \} \quad (2.3.28) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \star \\ J = \{ j / \text{destino } j \text{ está etiquetado} \} \quad (2.3.29) \end{array}$$

Se está entonces, en condiciones de proponer una solución óptima al dual de (PR), (DPR).

-----

**TEOREMA 2.6:** En no penetración, una solución óptima al problema (DPR) está dada por:

$$\bar{\alpha}(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in I^* \\ -1, & \text{si } i \in I \end{cases} \quad (2.3.30)$$

$$\bar{\beta}(j) = \begin{cases} -1, & \text{si } j \in J^* \\ 1, & \text{si } j \in J \end{cases}$$

Prueba: A partir de (PR), por inspección se escribe (DPR)

$$\text{Max} \sum_{i=1}^m c(i) \alpha(i) + \sum_{j=1}^n d(j) \beta(j)$$

s.c.

$$\begin{aligned} \alpha(i) + \beta(j) &\leq 0 \quad (i, j) \in IJ \\ \alpha(i) &\leq 1 \\ \beta(j) &\leq 1 \\ \alpha(i), \beta(j) &\text{ s.r.s.} \end{aligned}$$

(DPR)

Ahora bien, se puede mostrar que:

- 1]  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es una solución (DPR)-factible.
- 2] El costo de  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es óptimo en (DPR).

Los detalles se pueden encontrar en el apéndice 1.



$$\alpha^*(i) = \begin{cases} \alpha(i) + \theta(1) & i \in I^* \\ \alpha(i) - \theta(1) & i \notin I^* \end{cases} \quad (2.3.35)$$

$$\beta^*(j) = \begin{cases} \beta(j) - \theta(1) & j \in J^* \\ \beta(j) + \theta(1) & j \notin J^* \end{cases} \quad (2.3.36)$$

De esta forma se completa la mecánica de 5]. Observe que:

- 1] Como era de esperarse, ningún arco que lleve flujo en la terminación del algoritmo puede hacerse inadmisibile en la siguiente iteración, así como ninguna columna básica puede convertirse inadmisibile en el desarrollo general del AP-D.
- 2] El punto 1] permite continuar el etiquetado del AFF a partir del flujo que fue óptimo en la anterior no penetración.
- 3] Finalmente, se alcanza un flujo máximo de valor  $\sum o(i)$

Es así como la aplicación del AP-D en el problema del transporte, ha producido un algoritmo especializado, llamémosle algoritmo alfabeta.

## ESQUEMA DEL ALGORITMO ALFABETA

- 1) Sea  $\Pi = (\alpha, \beta)$  una solución dual factible.
- 2) Determina  $IJ$ .
- 3) Construye la red asociada  $N(IJ)$ , ver fig. 2.XVI.
- 4) Resuelve el problema de flujo máximo en  $N(IJ)$ .

Sea  $v$  el valor del flujo óptimo.

4.1] Si  $v = \sum_i c(i)$ . Alto, se obtiene la solución

óptima de (PT).

4.2] Si  $v < \sum_i c(i)$ , ve a 5].

5) Haz lo siguiente:

5.1] Encuentra  $I^*, J^*$ .

5.2] Calcula  $\theta(1)$ . Ver ecuación (2.3.34).

5.3] Actualiza  $\Pi$ . Ver (2.3.35), (2.3.36).

5.4] Regresa a 2].

Es conveniente señalar como el algoritmo alfabeto ha transferido al problema original, (PT), en subproblemas de flujo máximo. De esta forma, el AFF se convierte en el eje principal para la solución de (PT). Luego, las complicaciones en el manejo del vector de costo han sido olvidadas mediante el uso del AP-D.

Un par de resultados útiles sobre el algoritmo alfabeta se enuncian a continuación, a través de dos teoremas cuya demostración se delega al apéndice 1.

### 2.3.3.1 ALGUNOS RESULTADOS UTILES DEL ALGORITMO ALFABETA -

Durante el desarrollo siguiente, deberá suponerse que  $o(i)$ ,  $d(j)$ ,  $c(i,j)$  son enteros o equivalentemente racionales.

El primer teorema encuentra una cota sobre el número total de operaciones de penetración y no penetración requeridas para resolver un (PT) que depende de la oferta ( o demanda totales) y del tamaño del problema.

-----  
**TEOREMA 2.7**

El número máximo de operaciones de penetración y no penetración que realiza el algoritmo alfabeta para obtener la solución óptima de (PT) es a lo más.

$$\sum_1 o(i) + \left( \sum_1 o(i) - 1 \right) (\min(m,n) + 1) \quad (2.3.37)$$

-----

El segundo teorema nos brinda una manera de verificar el valor del flujo máximo en (PR').

-----

**TEOREMA 2.8**

En No penetración dentro de (PR')

$$\sum_{i \in I} o(i) + \sum_{j \in J} d(j) = \sum_{(i,j) \in IJ} f(i,j) \quad (2.3.38)$$

-----

**2.3.4 TRANSFORMACION DE WAGNER -**

Resulta evidente que el problema del transporte es un caso especial del problema de flujo a costo mínimo (precisamente de valor  $\sum_i o(i) = \sum_j d(j)$ ). Simplemente:

- 1] Se agrega un nodo super origen  $s$  y un nodo super destino  $t$ .
- 2] Se agregan arcos  $(s,i)$  con capacidad  $o(i)$  y costo cero  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ .
- 3] Se agregan arcos  $(j,t)$  con capacidad  $d(j)$  y costo cero  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

!!Lo realmente sorprendente es que el problema de flujo a costo minimo es caso especial del problema del transporte!!. Esto es, dado un caso de problema de flujo a costo minimo se puede construir un caso de problema de transporte que tenga la misma solución.

De esta forma, a partir del problema asociado a la gráfica de la fig. 2.X se puede diseñar un caso del problema del transporte que de la solución de nuestro problema y resolverlo, por ejemplo, a través del algoritmo alfabeta.

La herramienta que nos auxilia en este cambio de problemas es precisamente la transformación de Wagner. Veamos:

Dado un caso de problema de flujo a costo minimo en una red  $N$  con gráfica asociada  $G=(V,A)$ , se deberá construir un caso del problema del transporte de acuerdo a la siguiente correspondencia:

====>

FLUJO A COSTO MINIMO	TRANSPORTE
ARCO (i,j)	ORIGEN ij
NODO i	DESTINO i
COSTO c(i,j)	ARCO (ij,j) CON COSTO c(i,j) Y CAPACIDAD INFINITA ARCO (ij,i) CON COSTO CERO Y CAPACIDAD INFINITA
CAPACIDAD b(i,j)	OFERTA b(i,j) AL ORIGEN ij

Para especificar las demandas, primeramente necesitamos la

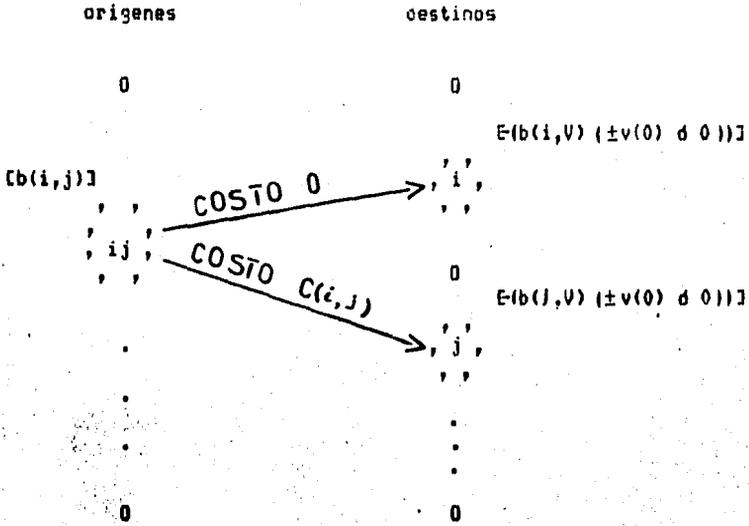
notación

$$b(i,V) = \sum_{j/(i,j) \in A} b(i,j) \quad \forall i \in V \quad (2.3.39)$$

donde A es el conjunto de arcos en la red N del problema de flujo a costo mínimo. El segundo miembro de la ecuación (2.3.39) representa la capacidad "exterior" total del nodo i. De esta forma, la demanda en el destino i es

$$\begin{array}{ll} b(i,V) - v(0) & i = s \\ b(i,V) + v(0) & i = t \\ b(i,V) & i \neq s, t \end{array} \quad (2.3.40)$$

la construcción se muestra en la siguiente figura:



**FIG. 2.XVII. EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CONSTRUIDO A PARTIR DE UN PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO**

El problema del transporte construido se plantea como encontrar un flujo  $f(ij,k)$  +

$$\text{Min } \sum_{ij} f(i,j)c(i,j)$$

B.C.

$$f(i,j)+f(i,j,1) = b(i,j) \quad (2.3.41)$$

(la oferta en el origen  $ij$  es usada completamente)

$$\sum_j (f(i,j,1) + f(j,1,1)) = \begin{cases} b(i,V)-v(0), & i=s \\ b(i,V)+v(0), & i=t \\ b(i,V), & i \neq s,t \end{cases} \quad (2.3.42)$$

(la demanda en el destino  $i$  es satisfecha)

$$f(i,j,k) \geq 0 \quad \forall i,j,k \quad (2.3.43)$$

Obsérvese en el planteamiento que la oferta total es igual a la demanda total.

Se presenta a continuación el resultado deseado:

### TEOREMA 2.9

El caso original del problema de flujo a costo mínimo y el caso construido del problema del transporte son equivalentes en el sentido que un flujo factible en cualesquiera de ellos corresponde a un flujo factible en el otro con el mismo costo.

Demostración:

1) Sea  $f(i,j)$  una solución factible al caso del problema de flujo a costo mínimo. Entonces, en el caso del problema del

transporte, considérese

$$f(i,j) = f(i,j) \geq 0 \quad (2.3.44)$$

$$f(i,j) = b(i,j) - f(i,j) \geq 0 \quad (2.3.45)$$

El par de asignaciones anteriores satisface claramente (2.3.41). Para (2.3.42) substituyamos

$$\begin{aligned} \sum_j ( f(i,j) + f(j,i) ) &= \sum_j ( [b(i,j) - f(i,j)] + [f(j,i)] ) \\ &= \sum_j b(i,j) + \sum_j ( f(j,i) - f(i,j) ) \end{aligned}$$

y por (2.3.39)

$$= b(i,V) + \sum_j ( f(j,i) - f(i,j) ) = \begin{cases} b(i,V) - v(0), & i=s \\ b(i,V) + v(0), & i=t \\ b(i,V), & i \neq s, t \end{cases}$$

luego, la asignación propuesta en (2.3.44), (2.3.45) forma una solución factible en el caso construido del (PT).

2) Sea  $f(i,j,k)$  una solución factible en el caso del (PT).  $f(i,j,k)$  es diferente de cero solamente cuando  $k=i$  ó  $k=j$ . En el caso original del problema de flujo a costo mínimo, considérese:

$$f(i,j) = f(i,j,j) \quad (2.3.46)$$

De (2.3.41),  $0 \leq f(i,j) \leq b(i,j)$

Bajo esta asignación, en el caso del problema de flujo a costo mínimo se tiene:

$\forall i \in V$

$$\sum_j f(i,j) - \sum_j f(j,i) = \sum_j f(ij,j) + \sum_j f(ji,i)$$

De (2.3.41)

$$\begin{aligned} &= \sum_j b(i,j) - f(ij,i) + \sum_j f(ji,i) \\ &= \sum_j b(i,j) - \sum_j ( f(ij,i) + f(ji,i) ) \end{aligned}$$

Por (2.3.39)

$$= b(i,V) - \sum_j ( f(ij,i) + f(ji,i) )$$

Por (2.3.42)

$$= \begin{cases} v(0), & i = s \\ -v(0), & i = t \\ 0, & i \neq s, t \end{cases}$$

luego, la asignación propuesta en (2.3.46) forma una solución factible al caso original del problema de flujo a costo mínimo.

3) Es fácil probar que los costos de los flujos que corresponden a las ecuaciones (2.3.44) y (2.3.47) son iguales en sus respectivos problemas.

Entonces el teorema queda demostrado.

-----

Desde un punto de vista matemático, la importancia del resultado anterior es evidente, pues:

- 1] Permite plantear cualquier problema de flujo a costo mínimo en un equivalente problema de transporte. De aquí, dirige nuestra atención sólo a problemas de flujo en gráficas bipartitas.
  
- 2] La dificultad existente en resolver un problema de flujo a costo mínimo, ver subsección 2.3.2 (encontrar circuitos de costo negativo en la red incremental, etc.), queda reducida al plantear el problema del transporte. De hecho con el algoritmo alfabeta, cuyo eje es una rutina de flujo máximo, el problema de flujo a costo mínimo se traduce en encontrar cadenas aumentantes de un supernodo  $s$  al otro supernodo  $t$ . Suponiendo que  $a(i)$ ,  $b(j)$  o  $c(i, j)$  son enteros o racionales se tiene completa certeza de que el algoritmo alfabeta dará en un número finito de iteraciones (ver 2.3.37) la solución óptima del problema del transporte y por (2.3.46) la solución óptima de nuestro problema de flujo a costo mínimo.

Sin embargo, dado el problema que se desea resolver y sus requerimientos de tiempo asociados. Al aplicar la transformación de Wagner en la red de la fig. 2.X, uno se enfrentaría a un problema del transporte cuya carga computacional es todavía más grande que la del problema que lo genera. De tal manera, que no se justifica la aplicación del resultado anterior.

Simplemente, considérese un problema de flujo a costo mínimo con  $G = (V, A)$  la gráfica asociada a una red  $N$  y  $|V|=n$ ,  $|A|=m$ . Entonces, su correspondiente problema del transporte, tendrá asociada una gráfica bipartita  $G' = (V(1), V(2), A')$  donde

$$|V(1)| = |A| = m, |V(2)| = |V| = n, |A'| = 2|A| = 2m$$

luego, existirán  $m+n$  vértices y  $2m$  arcos. Y una oferta demanda en los vértices por un total de

$$\sum_{(i,j) \in A} b(i,j) \text{ unidades}$$

Suponiendo un horizonte de planeación de 168 intervalos horarios y un número de 13 plantas, el lector puede realizar los cálculos y tener una idea de la magnitud que adquiere el problema al usar la red de la fig. 2.X seguida de la transformación de Wagner.

Queda entonces descartado el uso de esta alternativa en la solución de nuestro problema.

### - 2.3.5 OTRAS ALTERNATIVAS PRIMALES - DUALES -

A partir de los logros obtenidos en las subsecciones precedentes, resulta de interés proseguir el estudio de otras metodologías primales - duales que permitan enfrentar nuestro problema de una manera más eficiente.

Bajo esta perspectiva, la idea de los próximos desarrollos será trabajar con la multigráfica asociada a nuestro problema, v.gr. fig. 2.IX, más bien que su gráfica, v.gr. fig. 2.X. De esta manera, serán ahorrados el manejo de una buena cantidad de arcos y nodos con su consabida economía en tiempos de CPU y espacio en memoria durante la implantación en computadora de dichos desarrollos. Los capítulos 3 y 4 del presente trabajo realizan esta labor, presentando cada uno de ellos una metodología distinta.

Así, el capítulo 3 estudia, basado en el éxito del AP-D en el problema del transporte, la implantación del AP-D en el problema del transporte capacitado. El método descrito supone que una aproximación lineal a la función de costo ha sido realizada.

A su vez el capítulo 4 nos introduce en el algoritmo Out of Kilter, AOOK, el cual es una herramienta general para la solución de problemas de flujo restringido a costo mínimo. Al igual que la metodología expuesta en el capítulo 3, el desarrollo del capítulo 4 supone que una aproximación lineal a la función de costo ha sido realizada.

## 2.4 SOLUCION POR UN METODO HEURISTICO

El objetivo de esta sección no es proveer la receta general para la construcción de métodos heurísticos en nuestro problema original, ver (2.2.0),..., (2.2.3). Más bien, el objetivo es expresar algunas ideas básicas de porque escoger una solución heurística, mencionar algunas particularidades propias en la estructura del problema y como combinarlas para obtener una buena solución, discutir una "medida apropiada" que nos permita calificar la calidad del heurístico, y comentar los resultados de su implantación.

La literatura presenta varias definiciones sobre un método heurístico. Silver, Vidal y De Werra mencionan en [SVW,1980] una definición sugerida por Nicholson ([Ni,1971]) en la cual se define un método heurístico como un procedimiento "... para resolver problemas por un enfoque intuitivo en el cual la estructura del problema puede ser interpretada y explotada inteligentemente para obtener una solución razonable". En este trabajo se adopta esta definición; adicionalmente, se deberá suponer que para cualesquiera problema de optimación bajo consideración, siempre existe un modelo apropiado y matemáticamente bien definido. Esto es, se pueden determinar valores a las variables de decisión a través de una solución propuesta y se puede determinar:

- 1) Si la solución es o no factible.

ii) El valor de la medida de efectividad de la solución.

i.e. se tiene una representación matemática de la f.o. y sus restricciones.

El procedimiento será matemáticamente bien definido; sin embargo, no se garantizará dar una solución óptima. La palabra "intuitivo" en la definición de arriba quiere decir que la intuición práctica del tomador de decisiones (conjunto de personas que poseen el problema), y/o la intuición matemática del analista debiera probablemente guiar a la selección y elaboración del procedimiento.

Por qué usar un método heurístico en el problema original ?

Existen varias razones para usar un método heurístico en nuestro problema. Sin importar el orden se mencionan algunas:

- 1] Aunque un procedimiento de solución exacto puede existir, tal vez sea computacionalmente prohibitivo usarlo, v.gr. ver sección 2.1.
- 2] Los métodos heurísticos "por diseño", contruidos ad-hoc, pueden ser más sencillos de entender para el tomador de decisiones. En palabras de persona común, la gente preferiría vivir con un problema que ellos no pueden resolver, que aceptar una solución que no puedan entender.

En este sentido, y para nuestro problema particular, sería de gran utilidad desarrollar alguna(s) forma(s) de visualizar el procedimiento heurístico, de tal manera que se facilitara su comprensión.

3] Para un problema bien definido que puede ser resuelto optimamente, un método heurístico puede ser usado en una primera fase de aprendizaje o sensibilización (v.gr. desarrollando una noción intuitiva sobre el comportamiento de ciertas variables y/o restricciones), de tal manera que en un futuro pudiera llevar a un nuevo o mejor procedimiento de solución.

Observe el lector que al enumerar estas razones, no se trata de despreciar el esfuerzo por intentar obtener de una primera vez un método exacto. Esto es, no se aboga por el abandono de algoritmos exactos de optimización donde su uso (incluyendo consideraciones de implantación) sea apropiado. Aun más, el uso de métodos heurísticos no es de ninguna manera sencillo, principalmente al momento de desarrollarlos y evaluarlos con propiedad.

En la definición de método heurístico, se mencionan las palabras "para resolver problemas (bien definidos matemáticamente) por ... para obtener una solución razonable". En los siguientes párrafos se interpreta el significado de la palabra 'razonable'.

Siguiendo el punto de vista sugerido en [SVW,1980], un buen heurístico debiera poseer las siguientes cualidades:

- 1] Un esfuerzo computacional realista para obtener la solución.
- 2] La solución debiera ser cercana al óptimo en el promedio.
- 3] La probabilidad de una solución muy pobre (lejos del óptimo) debiera ser muy pequeña.
- 4] El método heurístico debiera ser tan sencillo como fuera posible para que el usuario lo entienda preferiblemente en términos intuitivos.

En general, un factor de mucha significancia al decidir sobre la importancia relativa de 2] y 3], es el número de veces que el problema, sobre el cual el heurístico está siendo empleado, será resuelto. Al incrementar la frecuencia de la solución uno esperaría que más peso fuera dado a 2] que a 3]. Adicionalmente, 4] que es mucho más difícil de cuantificar que las otras tres cualidades, ha sido enormemente omitida en la literatura aunque pudiera ser la razón más importante de éstas.

Una discusión de pros y contras en la medida de calidad de un heurístico, principalmente de 2] y 3], se puede encontrar en [SVW,1980]. Aquí, sólo se enumeran posibles criterios, dando un ligero comentario sobre aquellos que son de interés en nuestro problema.

1] Comparación con la solución óptima.

2] Relajación y acotamiento del problema.

Cuando la solución óptima no puede ser encontrada (frecuentemente el caso cuando un heurístico es usado), un enfoque alternativo es relajar el problema, de tal manera que una solución óptima al problema derivado pueda ser evaluada (de hecho no es necesario la solución, basta su valor o cuando menos una cota sobre ésta) proporcionando así, una cota al menos tan buena a la solución óptima del problema. Se pudiera checar entonces, que tan cerca la solución heurística está de la cota, pues obviamente el valor de la solución óptima del problema se halla entre el valor de la solución heurística y la cota misma. La manera más común de relajar un problema es ignorando una o más restricciones.

3] Métodos estadísticos para valores extremos.

4] Otras comparaciones.

4.1] Comparación con un método enumerativo que requiriese mucho más esfuerzo computacional.

4.2] Comparación con el desempeño del tomador de

decisiones.

#### 4.3] Comparación con otros métodos heurísticos.

Uno ciertamente puede comparar 'nuestro' heurístico en contra de otros, donde los otros métodos de solución heurística han sido usados y/o propuestos. El peligro existente en este criterio, es que los otros métodos heurísticos puedan ser particularmente malos, de tal manera que aún cuando el desempeño de 'nuestro' heurístico fuera juzgado como el mejor, pudiera aún ser un método de solución pobre.

#### 4.4] Comparación con una regla de decisión aleatoria.

#### 4.5] Comportamiento con el peor caso

Buena cantidad de la literatura se inclina por identificar el peor error posible bajo el uso de un heurístico particular. Pues, de hecho, siempre es reconfortante conocer que la actuación de un heurístico nunca será peor que un determinado valor; sin embargo, y esto es muy importante para el problema al que nos enfrentamos, esta información no es suficiente para escoger entre diferentes procedimientos heurísticos, ya que,

como se menciona anteriormente, un tomador de decisiones probablemente está más interesado en el desempeño promedio para la estructura especial de su problema. De esta manera, un heurístico particular pudiera tener un comportamiento muy pobre en el peor caso, causado por casos patológicos, y aún con esto pudiera desempeñarse excelentemente bajo otras condiciones. Por el contrario, el análisis del peor caso, como un beneficio lateral, puede indicar bajo que condiciones el heurístico se "empobrece", y de aquí señalar cuando no usarlo.

Por el momento, dejamos de lado los comentarios relativos a la medida de calidad de un heurístico (un nuevo enfrentamiento se pospondrá hasta el capítulo 5) para presentar a continuación algunas peculiaridades de nuestro problema original (ver (2.2.0), ..., (2.2.3)), que pueden ser usadas en el desarrollo de un heurístico. La idea aquí, es cambiar la naturaleza del modelo en alguna manera que facilite la solución y permita, v. gr., crear un procedimiento constructivo para la solución de nuestro problema.

Considérese, por ejemplo, nuestro problema original incluyendo sólo la familia de restricciones (2.2.1). Esto es:

$$\text{Min} \sum_p \sum_i [H(i,p)]^2 \quad (2.2.0)$$

$$(P1) \quad \text{s.c.} \quad \sum_i H(i,p) = a(p) > 0 \quad \forall p \in P \quad (2.2.1)$$

Evidentemente, (P1) es equivalente a resolver  $|P|$  veces el siguiente problema:

Sea  $p \in P$

$$\text{Min} \sum_i [H(i,p)]^2$$

$$(P1') \quad \text{s.c.} \quad \sum_i H(i,p) = a(p) > 0$$

Desde una perspectiva distinta, el problema (P1') puede pensarse en como determinar c/u de las longitudes de una serie de  $|I|$  cuadrados (representados, respectivamente, por las variables  $H(i,p)$ ), cuya suma de perímetros es igual a una cte., de tal manera que la suma total de sus respectivas áreas sea mínima. Véase fig. 2.XVIII.

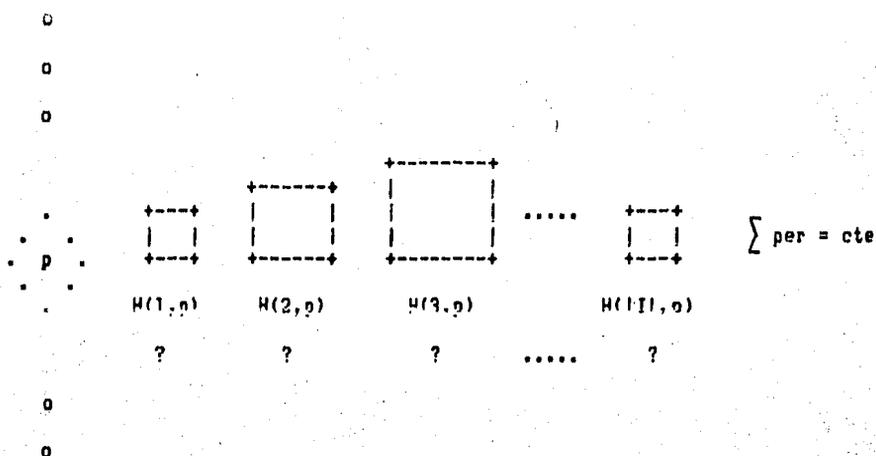


FIG. 2.XVIII. VISUALIZACION DEL PROBLEMA (P1')

El lector interesado podría dar la solución óptima a (P1') usando, por ejemplo, el método de los multiplicadores de Lagrange. Aquí presentamos una forma alternativa para la solución de (P1').

Considérese el hiperplano

$$\sum_i H(i,p) = e(p).$$

Un vector perpendicular y "sentado en el origen" a la familia de hiperplanos  $\sum H(i,p) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , viene dado por los coeficientes asociados a éste, i.e.  $(1,1,\dots,1)$ . Luego, para dar la solución óptima a (P1') bastaría encontrar un escalar adecuado  $t \in \mathbb{R} \rightarrow t(1,1,\dots,1) = (t,t,\dots,t)$  pertenezca al

hiperplano  $\left\{ \begin{array}{l} H(i,p) = e(p) \end{array} \right.$ .

De donde

$$t + t + \dots + t = e(p)$$

$$|I| t = e(p)$$

$$t = e(p) / |I| \quad (2.4.1)$$

luego, la solución óptima a (P1') es

$$H(i,p) = e(p) / |I| \quad (2.4.1.bis)$$

Más aún, la solución óptima a (P1) viene dada por

$$H(i,p) = e(p) / |I| \quad \forall p, \forall i \quad (2.4.2)$$

Al interpretar esta solución en términos de la fig. 2.XVIII, se observa que la solución óptima está dada al construir todos los cuadrados asociados a una misma  $p$  de la misma área. En términos de nuestro problema original, diremos que la solución óptima a procedido mediante una repartición en banda de la energía de  $c/u$  de las plantas.

Estudienmos ahora el problema original incluyendo sólo las familias de restricciones (2.2.1) y (2.2.3). Ver fig. 2.XIX.

$$\text{Min } \sum_i \sum_p [H(i,p)]^2$$

s.c.

$$(P2) \quad \sum_i H(i,p) = e(p) \quad \forall p \in P$$

$$\underline{H}(i,p) \leq H(i,p) \leq \bar{H}(i,p) \quad \forall i \in I, \forall p \in P$$

Al igual que (P1), el problema (P2) es equivalente a resolver  $|P|$  veces el siguiente problema:

Sea  $p \in P$

$$\text{Min } \sum_i [H(i,p)]^2$$

s.c.

$$(P2') \quad \sum_i H(i,p) = e(p)$$

$$\underline{H}(i,p) \leq H(i,p) \leq \bar{H}(i,p) \quad \forall i \in I$$



Aún más, la introducción de las cotas simples dificulta el uso de los multiplicadores de Lagrange. Luego, resulta de interés desarrollar un método ad-hoc para el problema (P2') y por tanto para (P2). Considérese el siguiente procedimiento:

**PROCEDIMIENTO PARA LA SOLUCION DE (P2)**

0] Sea  $p \in P$ . Comienza la solución de (P2').

$$1] \sum_i \underline{H}(i,p) > e(p) \text{ ó } \sum_i \bar{H}(i,p) < e(p) ?$$

1.1] Si. (P2) es infactible. Fin.

1.2] No. Ve a 2].

2] Satisfaz las cotas inferiores para todos los intervalos.

i.e.  $\underline{H}(i,p) = \underline{H}(i,p) \forall i \in I$

Asigna en la variable FALTA el sobrante de energía.

$$FALTA = e(p) - \sum_i \underline{H}(i,p)$$

FALTA = 0 ?

2.1] Si. Haz obtenido la solución óptima de (P2').

Ve a 5]

2.2] No. Ve a 3].

3] Sea  $D = \{ i / \underline{H}(i,p) \leq \underline{H}(j,p) \forall j \in I \}$

( D representará en las iteraciones subsecuentes, el

conjunto de intervalos en los que la planta p debe distribuir la energía )

Ve a 4].

4] Da una repartición en banda de la energía sobrante, "FALTA", sobre los intervalos pertenecientes al conjunto D, hasta que se satisfaga una de las siguientes condiciones:

$$4.1] H(i,p) = \bar{H}(i,p) \quad \text{p.a. } i \in D.$$

En cuyo caso, el índice i debe abandonar D.

Actualiza FALTA.

Regresa a 4]

$$4.2] \sum_i H(i,p) = e(p).$$

En cuyo caso, se ha obtenido el óptimo de (P2').

Ve a 5].

$$4.3] H(i,p) = H(i^*, p) \quad i^* \in D.$$

$i \in D$

En cuyo caso,  $i^*$  ingresa a D.

Actualiza FALTA.

Regresa a 4]

5] Haz resuelto (P2')  $\forall p \in P$  ?

5.1] Si. Haz obtenido el óptimo de (P2). Fin.

5.2] No. Regresa a 0] por una nueva planta p.

Algunos comentarios sobre la mecánica del procedimiento se presentan a continuación:

Sea  $p \in P$  la planta escogida en el paso 0] del procedimiento. Adicionalmente, supóngase que no se ha detectado infactibilidad en 1]. Se iniciaría entonces, la fase constructiva del procedimiento (pasos 2] , 3] y 4]).

Al desarrollar la fase constructiva, primeramente se asigna en los arcos  $(p,i)$  i  $E I$  un flujo idéntico a su respectiva cota mínima. Seguidamente se repartiría, si existiera, el sobrante de energía (FALTA) de manera uniforme (repartición en banda) a través del conjunto de intervalos  $D$ , hasta que alguna de las opciones 4.1], 4.2], 4.3] fuera satisfecha. Si la condición dada fuese 4.2], el análisis para la planta  $p$  habría terminado; en caso contrario, se debiera actualizar tanto FALTA como el conjunto  $D$ , y una nueva iteración deberá cumplirse.

De hecho, obsérvese que en  $c$ /iteración del procedimiento, el conjunto  $D$  indicará los intervalos en los que el sobrante de energía debe ser repartido en banda.

Una manera de visualizar la mecánica de los pasos 2], 3] y 4] se muestra en la fig. 2.XX.

Puede el lector imaginarse un modelo físico que de la solución óptima de los subproblemas (P2'), luego de (P2) ?

Cómo construiría dicho modelo ?

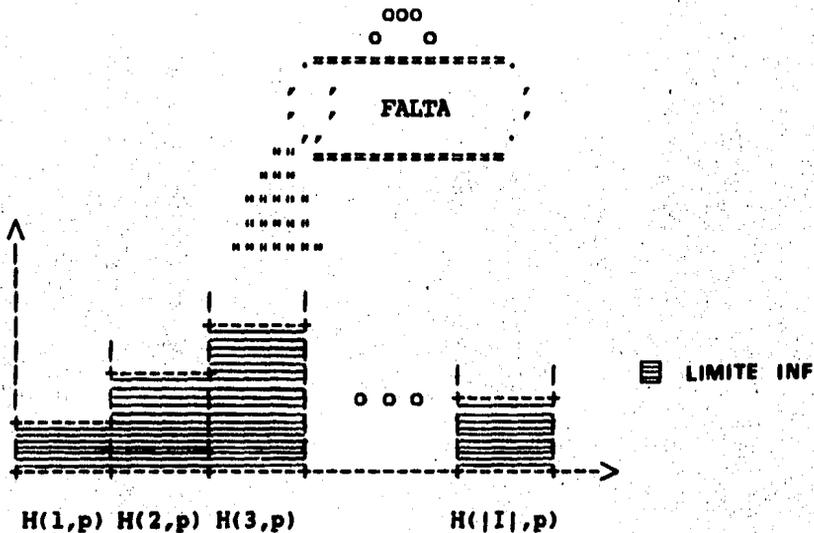


FIG. 2.XX. UNA VEZ QUE SE HAN SATISFECHO LAS COTAS MINIMAS, LOS PASOS 2J, 3J Y 4J REPARTEN EL SOBROANTE DE ENERGIA DE UNA MANERA OPTIMA SEGUN (P2')

Demostremos a continuación, que el procedimiento descrito proporciona al finalizar una solución óptima a (P2') y por tanto a (P2). Esto es, dada  $p \in P$ , supóngase que el problema (P2') asociado es factible, se probará a continuación que la solución dada por el procedimiento despues de realizar los pasos 2J, 3J y 4J es óptima.

Sea  $p \in P$ .

Sea  $H^*(p) = (H^*(1,p), \dots, H^*(|I|,p))$  la solución obtenida al finalizar la aplicación del procedimiento antes descrito.

Denotemos por :  $O = \{ i / H^*(i,p) = \bar{H}^*(i,p) \}$

$R = \{ j / \underline{H}^*(j,p) < H^*(j,p) < \bar{H}^*(j,p) \}$

$Q = \{ k / H^*(k,p) = \underline{H}^*(k,p) \}$

-----

### Corolario 2.1

$O, R, Q$  forman una partición del conjunto de intervalos  $I$ .

### Corolario 2.2

Sea  $i \in O, j \in R, k \in Q$ .

$H^*(i,p) \leq H^*(j,p) \leq H^*(k,p)$

### Corolario 2.3

Sea  $j, j'$  ( $j \neq j'$ ) dos intervalos cualesquiera elementos del conjunto  $R$ . Se tiene

$H^*(j,p) = H^*(j',p)$

-----  
 -----  
**Teorema 2.10**

Sea  $p \in P$ .

$H^*(p) = (H^*(1,p), H^*(2,p), \dots, H^*(|I|,p))$  es una solución óptima al problema  $(P2')$ .

Demostración (por contradicción):

Supóngase que  $H^*(p)$  no fuera óptimo. Esto es, supóngase que existiera  $H'(p) = (H'(1,p), H'(2,p), \dots, H'(|I|,p))$ , una solución factible diferente de  $H^*(p)$   $\rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{|I|} [H'(i,p)]^2 \leq \sum_{i=1}^{|I|} [H^*(i,p)]^2 \quad \forall H$$

Luego, existe al menos un par de índices  $(i,j)$  ambos del conjunto de intervalos  $\rightarrow$

$$H'(i,p) = H^*(i,p) + \theta(i), \quad \theta(i) > 0$$

$$H'(j,p) = H^*(j,p) - \theta(j), \quad \theta(j) > 0$$

donde  $i \in R \cup Q$ ,  $j \in O \cup R$ .

En particular (ver corolario 2.2 y 2.3)

$$H^*(j,p) \leq H^*(i,p)$$

Denótese por  $\theta = \min \{ \theta(i), \theta(j) \} > 0$ .

Podemos construir una nueva solución factible  $H''(p)$ , diferente

de  $H'(p)$ , de la siguiente manera:

$$H''(p) = \begin{cases} H'(i,p), & \forall i \in I - \{i, j\} \\ H'(i,p) - \theta, & \text{si } i = i \\ H'(j,p) + \theta, & \text{si } i = j \end{cases}$$

+

$$\sum_i [H''(i,p)]^2 < \sum_i [H'(i,p)]^2 \quad \text{-----} < \text{-----}$$

∴  $H(p)$  es una solución óptima al problema (P2').

-----

Como se puede apreciar, la solución óptima al problema (P2) ha sido localizada. Seguiría a continuación, la tarea de encontrar la solución del problema completo (incluyendo la restricción (2.2.2)).

Es en este contexto, donde el heurístico construido, PROCEDIMIENTO HEURIST, empieza a funcionar como tal. Esto es, se tiene un heurístico para la solución del problema original, que explotando las ideas demostradas en las páginas anteriores, hace uso de reglas empíricas para la satisfacción de la tercera familia de restricciones. El lector interesado en una mayor discusión de la construcción y metodología del heurístico puede dirigirse a [IRGP,1984].

Las características de este procedimiento son:

1] HEURIST termina en la mayoría de los casos (hasta ahora todos los probados); existen, sin embargo, casos teóricos patológicos en los cuales el procedimiento se detendría sin llegar a la solución. De hecho, en los casos patológicos, el procedimiento terminaría sin agotar la energía de alguna(s) planta(s), i.e.

$$\exists p \in P \rightarrow \sum_i H(i,P) < e(p)$$

Luego, la familia de restricciones (2.2.1) no es completamente satisfecha, y no se obtendría una solución factible.

2] HEURIST arroja en la mayoría de los casos soluciones "muy buenas", incluso óptimas al problema original. De hecho, en todos los casos probados la solución ha sido óptima. Sin embargo, eso no nos permite asegurar la optimalidad del algoritmo. No se conocen tampoco contraejemplos.

A partir de 1], es posible que HEURIST no haya podido encontrar una solución factible. En este caso, la solución parcial del heurístico puede ser usada por el AFF para determinar un s-t flujo máximo en la red sugerida por la fig. 2.I.a) o 2.VI.a), y de aquí una solución factible al problema original.

De esta manera, la combinación de HEURIST y el AFF se constituye en una alternativa más para la solución de nuestra problema. Esquemáticamente, esta nueva opción se muestra en la siguiente figura.

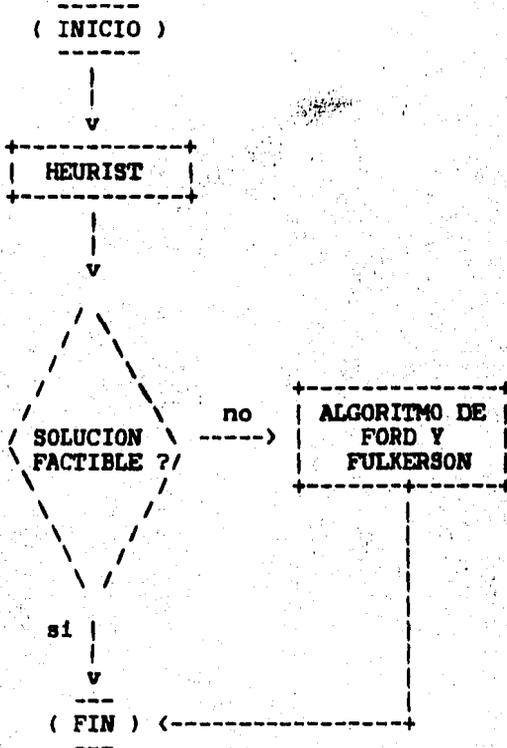


FIG. 2.XXI. DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA ALTERNATIVA HEURISTICO MAS ALGORITMO DE FORD Y FULKERSON

Respecto a esta alternativa, es necesario comentar que al hacer uso del AFF, el único objetivo que se persigue es construir una solución factible al problema original, de tal manera que la convergencia de esta alternativa quede completamente validada. Ahora bien, es precisamente este punto donde la solución que se obtendría al problema original puede ser descompuesta drásticamente, pues el AFF determinaría una solución a nuestro problema sin importarle el parámetro costo.

Una forma de corregir este defecto, pudiera ser eliminando el módulo correspondiente al AFF por un método diferente que incluya al costo en su búsqueda de una solución al problema original. Por el momento, se deja de lado esta discusión hasta no haber completado las técnicas de los capítulos siguientes. Nuevamente hablaremos de este tema en el capítulo 5.

Por lo que respecta al esfuerzo computacional desarrollado por esta alternativa, se puede decir que este es mínimo (respecto a las alternativas trabajadas), excepto en el caso (que creemos será mínimo) en que se requiera usar el AFF. En este último caso, algunas providencias han sido tomadas, al usar una rutina de flujo máximo especializada en la estructura de red asociada al problema original, en vez de un problema general de flujo máximo válido para cualquier red. De esta manera, se disminuye cuantitativamente el esfuerzo computacional asociado al uso del AFF. SE TIENE:

1] Cualesquier arco que "sale" ("entra") de  $s$  (a  $p$ ) es de la forma  $(s,p)$ . Aún más,

$\forall p \in P \exists i (s,p) \in A.$

2] Cualesquier arco que "sale" ("entra") de  $p$  (a  $i$ ) es de la forma  $(p,i)$ . Aún más,

$\forall p \in P \forall i \in I \exists i (p,i) \in A.$

3] Cualesquier arco que sale ("entra") de  $i$  (a  $t$ ) es de la forma  $(i,t)$ . Aún más,

$\forall i \in I \exists i (i,t) \in A.$

Señalamos por último, que la rutina especializada de Ford y Fulkerson, construida durante el desarrollo de esta sección, puede ser usada por el algoritmo alfabeto del problema del transporte, pues, de hecho, los subproblemas de flujo máximo que éste debe resolver, mantienen una estructura muy parecida con la del problema aquí resuelto.

## CAPITULO 3

### IMPLANTACION DEL ALGORITMO PRIMAL-DUAL EN EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CAPACITADO CON ARCOS PARALELOS

Siguiendo la idea indicada en la subsección 2.3.5, el estudio expuesto a continuación surge con el ánimo de resolver el problema asociado a la red de la fig. 2.VI.b), el cual se puede ubicar en la clase de problemas de transporte capacitado con función de costo convexa. Dicho estudio supone que una aproximación lineal a la función de costo ha sido realizada. De esta manera, el problema se puede colocar en la clase de PPL's y es posible usar el AP-D para su solución.

El capítulo se compone de la siguiente manera:

En 3.1 se hace un breve repaso de como nuestro problema original, ver fig. 2.I.b), pasa a ser PPL una vez realizada la aproximación lineal a la función de costo. Ahora bien, debido a

que el efecto de la aproximación en la red original ha consistido en la creación de arcos paralelos con sus respectivos parámetros, nos referiremos a este nuevo problema como problema del transporte capacitado con arcos paralelos. Un planteamiento más completo de éste, así como algunas ideas que lo complementan, v.gr. planteamiento de su problema dual, obtención de las condiciones de holgura complementaria, etc. son introducidas en 3.2.

Con las herramientas desarrolladas en 3.2, se está a punto para que el AP-D inicie su implantación en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos. Tanto el desarrollo como el análisis de dicha implantación son expuestos en 3.3

Finalmente y para clarificar ideas, la sección 3.4 resuelve un problema de transporte capacitado con arcos paralelos mostrando para  $c$ /iteración el avance que proporcionan los problemas primal y dual restringidos en la búsqueda de la solución óptima del problema primal.

3.1 Construcción del problema de transporte  
capacitado con función de costo convexa,  
aproximada linealmente, a partir del  
problema original.

Durante el desarrollo del capítulo 2 se observó que el problema original tiene su interpretación en términos de flujo en redes. En forma general, se puede decir que la primera de éstas se ubica en la clase de problemas de flujo a costo convexo mínimo (ver fig. 2.I.a)) y la segunda se localiza más bien en la clase de problemas de transporte capacitado con función de costo convexa (ver fig. 2.I.b)). Una vez hecha la eliminación de las cotas inferiores, el aspecto de ambas interpretaciones se visualiza en las gráficas 2.VI.a) y 2.VI.b) respectivamente.

Ahora bien, considérese la red asociada a la fig. 2.VI.b). Al realizar la aproximación lineal a la función de costo de nuestro problema (cfr. 2.2.3), el aspecto que guarda esta nueva red se visualiza en la fig. 3.I.

Tal y como se observa en la fig. 3.I, el efecto de la aproximación lineal ha consistido en la creación de arcos paralelos con sus respectivos parámetros. En lo que sigue, y por convención, denominaremos a esta clase de problema como problema de transporte capacitado con arcos paralelos. Su planteamiento y desarrollo se formaliza en la siguiente sección.

$$(C(i, p, k), V(i, p, k)) \quad k=1, \dots, K$$

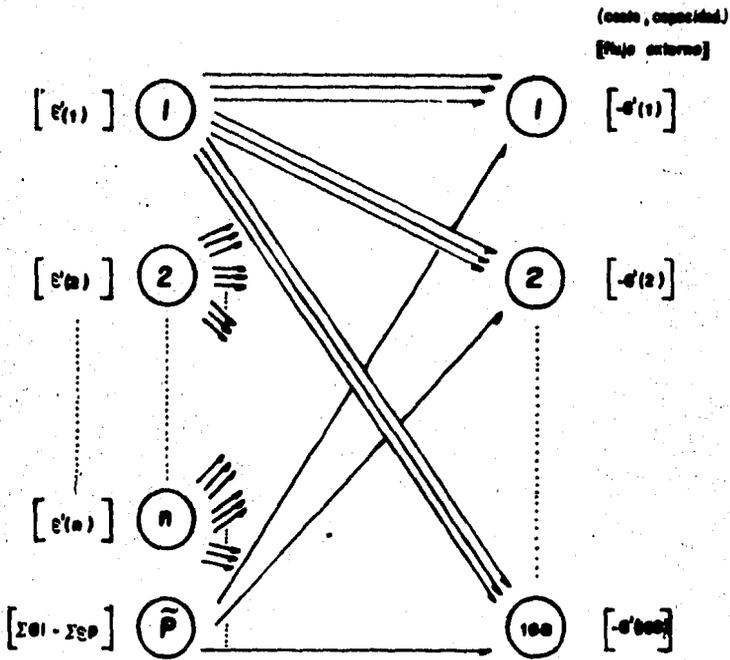


Figura 3.1 Ilustración de los cambios en la red s.v. si una vez realizada la aproximación lineal

### 3.2 Planteamiento del problema del transporte capacitado con arcos paralelos.

Sea  $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$ ;  $k=1, \dots, K$  y denotemos por

- $(i, j, k)$  el  $k$ -ésimo arco que va de  $i$  a  $j$ ,
- $f(i, j, k)$  el flujo que pasa por  $(i, j, k)$ ,
- $b(i, j, k)$  la capacidad de  $(i, j, k)$ ,
- $c(i, j, k)$  el costo por unidad de flujo en  $(i, j, k)$ ,
- $o(i)$  la oferta en el origen  $i$ ,
- $d(j)$  la demanda en el destino  $j$ .

El problema del transporte capacitado con arcos paralelos, denotado por (F) en este capítulo, es un caso especial de problemas de flujo a costo mínimo y está motivado por la siguiente circunstancia:

Considérese  $m$  orígenes, donde el origen  $i$  tiene una oferta de  $o(i)$  unidades de un cierto artículo. Además, están localizados  $n$  destinos, donde el destino  $j$  tiene una demanda de  $d(j)$  unidades. Supóngase  $o(i) > 0$  y  $d(j) > 0$ . Adicionalmente, entre el origen  $i$  y el destino  $j$  existen  $k$  arcos o rutas  $c/u$  de ellas con su respectivo costo unitario,  $c(i, j, k)$ , y capacidad,  $b(i, j, k)$ . El problema (P) consiste en determinar el programa de envíos factible de los orígenes a los destinos que minimice el costo total del transporte.

Ahora bien, supóngase sin pérdida de generalidad que la red de la fig. 3.1 tiene las siguientes propiedades:

$$\forall i, \forall j, \forall k \quad \exists (i, j, k) \quad (3.2.1)$$

$$\forall i, \forall j \quad 0 \leq c(i, j, 1) \leq \dots \leq c(i, j, K) \quad (3.2.2)$$

$$\sum_i o(i) = \sum_j d(j) \quad (3.2.3)$$

La suposición anterior es plenamente justificable: pues en caso de existir sólo  $p$  arcos,  $p < K$ , del nodo  $i$  al nodo  $j$  (v.gr. si  $i = \beta$  y  $j = 1, \dots, n$  donde existe sólo un arco de  $\beta$  a  $j$ ) una manera artificial de colocar precisamente  $K$  arcos consiste en crear los restantes  $K-p$  con su respectiva capacidad igual a cero. Esto es, agréguese  $(i, j, p+1), \dots, (i, j, K) \rightarrow b(i, j, p+1) = \dots = b(i, j, K) = 0$ . Para completar, cualquier costo puede ser asignado a estos nuevos arcos, en particular uno que satisfaga (3.2.2), pues de hecho no se transportará flujo a través de éstos. De donde, en lo que resta de este capítulo y para clarificar la exposición, supóngase que todas las redes consideradas satisfacen (3.2.1), ..., (3.2.3).

De manera más precisa, el planteamiento de programación lineal para el problema (P) es el siguiente:

$$\text{Min} \sum_{i,j,k} c(i,j,k) f(i,j,k) \quad (3.2.4)$$

s.c.

$$\forall i \sum_j f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) = o(i) \quad (3.2.5)$$

$$(P) \quad \forall j \sum_i f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) = d(j) \quad (3.2.6)$$

$$\forall (i,j,k) \quad 0 \leq f(i,j,k) \leq b(i,j,k) \quad (3.2.7)$$

Una manera de visualizar la red asociada al problema (P) se muestra en la fig. 3.II.

Agregando variables de holgura  $x(i,j,k)$  a la familia de restricciones (3.2.7) obtenemos el problema (P) en forma estándar, al cual denotaremos por (P'). Su planteamiento es:

$$\text{Min} \sum_{i,j,k} c(i,j,k) f(i,j,k) \quad (3.2.8)$$

s.c.

$$\forall i \sum_j f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) = o(i) \quad (3.2.9)$$

(P')

$$\forall j \sum_i f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) = d(j) \quad (3.2.10)$$

$$\forall (i,j,k) \quad f(i,j,k) + x(i,j,k) = b(i,j,k) \quad (3.2.11)$$

$$F, X \geq 0 \quad (3.2.12)$$

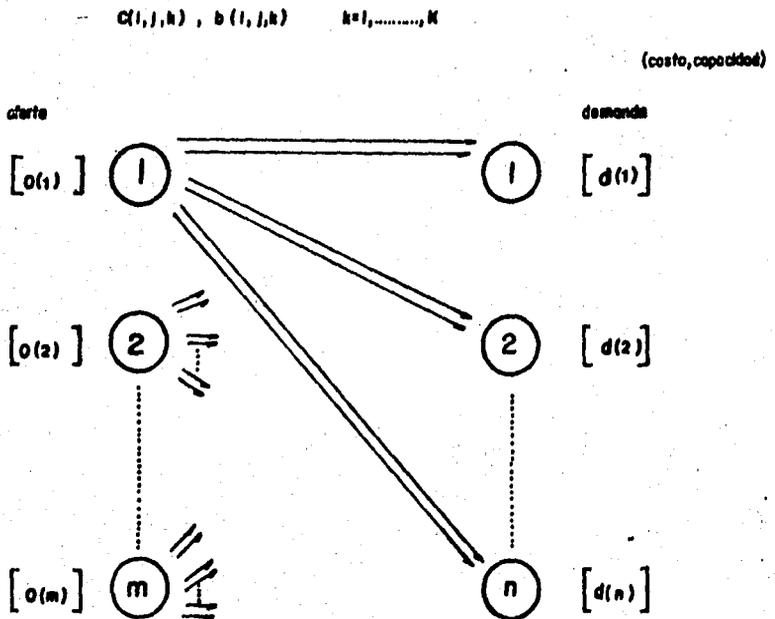


Figura 3.11 Aspecto general de las redes asociadas al problema del transporte capacitado con arcos paralelos.

Si en (P') asociamos variables  $\alpha(i)$ ,  $\beta(j)$ ,  $\gamma(i,j,k)$  a los grupos de restricciones (3.2.9), ..., (3.2.11) respectivamente, el problema dual, (D'), es el siguiente:

$$\text{Max} \sum_i c(i) \alpha(i) + \sum_j d(j) \beta(j) + \sum_{i,j,k} b(i,j,k) \gamma(i,j,k) \quad (3.2.13)$$

s.c.

$$(D') \quad \forall (i,j,k) \quad \alpha(i) + \beta(j) + \gamma(i,j,k) \leq c(i,j,k) \quad (3.2.14)$$

$$\forall (i,j,k) \quad \gamma(i,j,k) \leq 0 \quad (3.2.15)$$

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ s.r.s.} \quad (3.2.16)$$

Al igual que en 2.3.3, una asignación sencilla en el dual que proporciona una solución (D')-factible es:

$$\forall i \quad \alpha(i) = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\forall (i,j,k) \quad \gamma(i,j,k) = 0 \quad (3.2.18)$$

$$\forall j \quad \beta(j) = \min_{i,k} [c(i,j,k)] = \min_i [c(i,j,1)] \quad (3.2.19)$$

Ahora bien, considérese un par de soluciones (F,X) (P')-factible y (A,B, $\Gamma$ ) (D')-factible, estas soluciones son óptimas si y sólo si satisfacen las condiciones de holgura complementaria, i.e.

$$\forall i \quad \alpha(i) [c(i) - \sum_j f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K)] = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\forall j \quad \beta(j) [d(j) - \sum_i f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K)] = 0 \quad (3.2.21)$$

$$\forall (i,j,k) \quad \gamma(i,j,k) [b(i,j,k) - (f(i,j,k) + x(i,j,k))] = 0 \quad (3.2.22)$$

$$\forall(i,j,k) \quad f(i,j,k) [c(i,j,k) - (\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(i,j,k))] = 0 \dots$$

...(3.2.23)

$$\forall(i,j,k) \quad x(i,j,k) \gamma(i,j,k) = 0$$

INSTITUTO DE  
(3.2.24) CACIONES  
ELECTRICAS

Ahora bien, por estar (P') en forma estándar, el grupo de condiciones (3.2.20), ..., (3.2.22) se satisfacen inmediatamente. Luego, el problema de encontrar el óptimo de (P') y (D') se reduce a encontrar un par de soluciones primal y dual factibles que satisfagan (3.2.23) y (3.2.24). La búsqueda de tales soluciones se hará a través del AP-D cuyo desarrollo se incluye en la próxima sección.

### 3.3 Análisis y desarrollo del algoritmo primal-dual en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos

A partir del trabajo realizado en la sección anterior (planteamiento del problema, construcción del problema dual, identificación de una solución dual factible y obtención de las condiciones de holgura complementaria) se tienen los elementos para iniciar la aplicación del AP-D en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos. En este punto, es conveniente indicar que las tareas de análisis y desarrollo del algoritmo usarán ideas y nomenclatura expuesta en la sección 2.3, en particular las subsecciones 2.3.1 y 2.3.3.

Para una mayor claridad en la exposición se ha descompuesto la sección 3.3 en tres subsecciones:

En 3.3.1 se inicia el desarrollo del AP-D. Esto es, se determina el conjunto de columnas admisibles y se construye tanto el problema primal restringido (P'R) como su dual (DP'R). Un replanteamiento de (P'R) nos transfiere al problema equivalente (P''R), consistente en determinar el flujo de mayor costo sobre los arcos flujos admisibles de (P'R).

Debido al carácter del problema (P''R), la subsección 3.3.2 presenta algunos resultados y ejemplos sobre problemas de flujo en redes a costo máximo.

Una vez conocidos los resultados de 3.3.2, la subsección 3.3.3 concluye el análisis de la implantación del AP-D en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos al comentar algunas deficiencias en el uso de esta metodología.

3.3.1 Desarrollo del algoritmo primal-dual  
 en el problema del transporte capacitado  
 con arcos paralelos.

INSTITUTO DE  
 INVESTIGACIONES  
 MATEMÁTICAS

Dada una solución (D')-factible, v.gr. (3.2.17), ..., (3.2.19), lo primero es determinar el conjunto de columnas admisibles del problema (P'). Aquí es conveniente indicar que relacionadas a la terna de índices  $ijk$  existen dos columnas asociadas en (P'). A saber una de flujo,  $f(i,j,k)$ , y la otra de holgura,  $x(i,j,k)$ . Será por tanto útil identificar en forma distinta a la terna  $ijk$  como columna de flujo ó de holgura.

Si denotamos por  $(i,j,k)$  a la terna de índices asociada a la columna  $f(i,j,k)$  y por  $(i,j,k')$  a la terna de índices asociada a la columna  $x(i,j,k)$  se tiene:

$$IJ(1) = \{ (i,j,1) / \alpha(i) + \beta(j) + \gamma(i,j,1) = c(i,j,1) \} \quad (3.3.1)$$

$$IJ(1') = \{ (i,j,1') / \gamma(i,j,1) = 0 \} \quad (3.3.2)$$

y similarmente para  $k=2, \dots, K$

$$IJ(k) = \{ (i,j,k) / \alpha(i) + \beta(j) + \gamma(i,j,k) = c(i,j,k) \} \quad (3.3.3)$$

$$IJ(k') = \{ (i,j,k') / \gamma(i,j,k) = 0 \} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Sea } IJ[K] = \bigcup_{k=1}^K IJ(k) \quad (3.3.5)$$

$$IJ[K'] = \bigcup_{k=1}^K IJ(k') \quad (3.3.6)$$

Luego, el conjunto de columnas admisibles,  $IJK$ , queda definido

como

$$IJK = IJ \cup IJ \cup IJ \cup IJ \quad (3.3.7)$$

INSTITUTO DE  
INVESTIGACIONES  
ELECTRICAS

Al determinar las variables duales que corresponden a restricciones duales ligantes o activas ( de tal manera que la holgura complementaria se satisfaga ), el lector debe observar:

1] Si la columna  $(i,j,k) \in IJ(k)$ ,  $(i,j,k') \in IJ(k')$ , entonces  $f(i,j,k) \geq 0$ ,  $x(i,j,k) \geq 0$ , durante el proceso de búsqueda de una solución  $(P')$ -factible por el AP-D.

2] Por otra parte, si  $(i,j,k) \in IJ(k)$ , entonces  $f(i,j,k) = 0$  y si  $(i,j,k') \in IJ(k')$ , entonces  $x(i,j,k) = 0$ .

3] Al formar el conjunto de columnas admisibles,  $IJ \cup IJ \cup IJ \cup IJ$ , proporcionan las columnas admisibles vía flujo y vía holgura, respectivamente.

Una vez que se ha construido el conjunto  $IJK$ , lo siguiente es dirigir nuestro proceso de búsqueda hacia el problema primal restringido, denotado por  $(P'R)$ .

El planteamiento de  $(P'R)$  se expresa a continuación:

$$\text{Min } \zeta = \sum_{i=1}^{m+n} x(i|a) + \sum_{i,j,k} y(i,j,k|a) \quad (3.3.8)$$

s.c.

$$\forall i \sum_j f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) + x(i|a) = o(i) \quad (3.3.9)$$

$$\forall j \sum_i f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) + x(m+j|a) = d(j) \quad (3.3.10)$$

(P'R)

$$\forall (i,j,k) f(i,j,k) + x(i,j,k) + y(i,j,k|a) = b(i,j,k) \quad (3.3.11)$$

$$f(i,j,k) \geq 0, \text{ si } (i,j,k) \in IJ(k) \quad (3.3.12)$$

$$f(i,j,k) = 0, \text{ si } (i,j,k) \notin IJ(k) \quad (3.3.12.bis)$$

$$x(i,j,k) \geq 0, \text{ si } (i,j,k') \in IJ(k') \quad (3.3.13)$$

$$x(i,j,k) = 0, \text{ si } (i,j,k') \notin IJ(k') \quad (3.3.13.bis)$$

$$x(i|a), y(i,j,k|a) \geq 0 \quad (3.3.14)$$

Analizemos la estructura del problema (P'R):

Primeramente, dado un arco  $(i,j,k)$ , las columnas asociadas a las variables  $x(i,j,k)$  e  $y(i,j,k|a)$  son linealmente dependientes. Luego, para cualesquiera solución básica se debe cumplir  $x(i,j,k) \cdot y(i,j,k|a) = 0$ , esto es  $x(i,j,k)$  e  $y(i,j,k|a)$  no pueden asumir valores positivos en una misma solución básica.

Por otra parte, dada la terna de índices  $ijk$ . Sea  $(F, X, X|a, Y|a)$  una solución óptima de (P'R). Existen 4 posibilidades a saber:

1] Si  $(i, j, k) \in IJ[K]_j$  e  $(i, j, k') \in IJ[K']_j$ , entonces  $f(i, j, k) \geq 0$ ,  $x(i, j, k) \geq 0$ . Luego  $f(i, j, k) + x(i, j, k) = b(i, j, k)$ .

2] Si  $(i, j, k) \in IJ[K]_j$  e  $(i, j, k') \in IJ[K']_j$ , entonces  $f(i, j, k) \geq 0$ ,  $x(i, j, k) = 0$ . Si  $f(i, j, k) \leq b(i, j, k)$ , entonces  $y(i, j, k|a) = b(i, j, k) - f(i, j, k)$ .

3] Si  $(i, j, k) \in IJ[K]_j$  e  $(i, j, k') \in IJ[K']_j$ , entonces  $f(i, j, k) = 0$ ,  $x(i, j, k) \geq 0$ . Luego  $x(i, j, k) = b(i, j, k)$ .

4] Si  $(i, j, k) \in IJ[K]_j$  e  $(i, j, k') \in IJ[K']_j$ , entonces  $f(i, j, k) = x(i, j, k) = 0$ . Luego  $y(i, j, k|a) = b(i, j, k)$ .

Asociando variables  $\alpha(i)$ ,  $\beta(j)$ ,  $\gamma(i, j, k)$  a los grupos de restricciones (3.3.9), ..., (3.3.11), el problema dual correspondiente a (P'R), denotado por (DP'R), es el siguiente:

$$\text{Max } \omega = \sum_{i=1}^m o(i) \alpha(i) + \sum_{j=1}^n d(j) \beta(j) + \sum_{i, j, k} b(i, j, k) \gamma(i, j, k) \quad (3.3.15)$$

s.c.

$$\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(i, j, k) \leq 0, \quad \text{si } (i, j, k) \in IJ[K]_j \quad (3.3.16)$$

$$\gamma(i, j, k) \leq 0, \quad \text{si } (i, j, k') \in IJ[K']_j \quad (3.3.17)$$

$$(DP'R) \quad \forall i \quad \alpha(i) \leq 1 \quad (3.3.18)$$

$$\forall j \quad \beta(j) \leq 1 \quad (3.3.19)$$

$$\forall (i, j, k) \quad \gamma(i, j, k) \leq 1 \quad (3.3.20)$$

$$\alpha, \beta, \gamma \quad \text{s.r.s.} \quad (3.3.21)$$

Ahora bien, al igual que en la aplicación del AP-D en el problema del transporte (algoritmo alfabeta), resulta de interés reescribir la f. o. de (P'R).

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \sum_{i=1}^{m+n} x(i|a) + \sum_{i,j,k} y(i,j,k|a) \\
 &= \left( \sum_i o(i) - \sum_{IJKJ} f(i,j,k) + \sum_j d(j) - \sum_{IJKJ} f(i,j,k) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i,j,k} b(i,j,k) - \sum_{IJKJ} f(i,j,k) - \sum_{IJK'J} x(i,j,k) \right) \\
 &= \left( \sum_i o(i) + \sum_j d(j) + \sum_{i,j,k} b(i,j,k) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \sum_{IJKJ} 3f(i,j,k) + \sum_{IJK'J} x(i,j,k) \right) \right) \quad (3.3.22)
 \end{aligned}$$

De donde:

Mín  $\zeta$

$$\langle \text{====} \rangle \text{Max } \sum_{IJKJ} f(i,j,k) + \sum_{IJK'J} x(i,j,k) \quad (3.3.23)$$

$$\langle \text{====} \rangle \text{Max } \sum_{IJKJ} f(i,j,k) + \sum_{IJK'J} b(i,j,k) - f(i,j,k) \quad (3.3.24)$$

$$\langle \text{====} \rangle \text{Max } \sum_{IJKJ} f(i,j,k) - \sum_{IJK'J} f(i,j,k) \quad (3.3.25)$$

Si denotamos por:

$$A = \{(i, j, k) \in IJCK\} / \{(i, j, k') \in IJCK'\} \quad (3.3.26)$$

$$B = \{(i, j, k) \in IJCK\} / \{(i, j, k') \in IJCK'\} \quad (3.3.27)$$

$$C = \{(i, j, k') \in IJCK'\} / \{(i, j, k) \in IJCK\} \quad (3.3.28)$$

$$D = \{(i, j, k') \in IJCK'\} / \{(i, j, k) \in IJCK\} \quad (3.3.29)$$

Es claro que:

$$A \cup B = IJCK, \quad A \cap B = \emptyset \quad (3.3.30)$$

$$C \cup D = IJCK', \quad C \cap D = \emptyset \quad (3.3.31)$$

$$(i, j, k) \in A \iff (i, j, k') \in C \quad (3.3.32)$$

Luego,

$$\text{Min } \zeta \iff \text{Max } \left\{ \begin{array}{l} 3 \left[ \sum_A f(i, j, k) + \sum_B f(i, j, k) \right] \\ - \left[ \sum_C f(i, j, k) + \sum_D f(i, j, k) \right] \end{array} \right\} \quad (3.3.33)$$

$$\iff \text{Max } 2 \sum_A f(i, j, k) + 3 \sum_B f(i, j, k) \quad (3.3.34)$$

Por otra parte,  $\zeta = 0$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 3 \sum_{IJCK} f(i, j, k) + \sum_{IJCK'} x(i, j, k) = \\ = \sum_i o(i) + \sum_j d(j) + \sum_{i, j, k} b(i, j, k) \end{array} \right. \quad (3.3.35)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_A f(i, j, k) + 3 \sum_B f(i, j, k) = \\ = \sum_i o(i) + \sum_j d(j) + \sum_E b(i, j, k) \end{array} \right. \quad (3.3.36)$$

$$\text{donde } E = \{ (i,j,k') / (i,j,k') \in IJCK' \} \quad (3.3.36.1)$$

Como se puede apreciar de (3.3.34), el problema (P'R), min  $f$ , es ahora equivalente a encontrar el flujo de mayor costo sobre los arcos flujo admisibles en IJCKJ. Al resolver este problema, se puede describir (P'R) sin las variables artificiales y de holgura, pero con desigualdades en las restricciones. Denominemos por (P''R) a este nuevo problema, su planteamiento se expresa a continuación.

$$\text{Max } 2 \sum_A f(i,j,k) + 3 \sum_B f(i,j,k) \quad (3.3.37)$$

s.c.

$$\forall i \sum_j f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) \leq o(i) \quad (3.3.38)$$

(P''R)

$$\forall j \sum_i f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K) \leq d(j) \quad (3.3.39)$$

$$\forall (i,j,k) \quad f(i,j,k) \leq b(i,j,k) \quad (3.3.40)$$

$$f(i,j,k) \geq 0, \text{ si } (i,j,k) \in IJCKJ \quad (3.3.41)$$

$$f(i,j,k) = 0, \text{ si } (i,j,k) \notin IJCKJ \quad (3.3.41.bis)$$

De manera similar a la subsección 2.3.3, el problema (P''R) encuentra una sencilla interpretación en términos de flujo en redes. Basta considerar una red en la cual se ha creado:

-] Un nodo superorigen  $s$  y un nodo superdestino  $t$ .

-] Un arco de  $s$  a  $c/u$  de los orígenes con capacidad  $o(i)$  y costo cero.

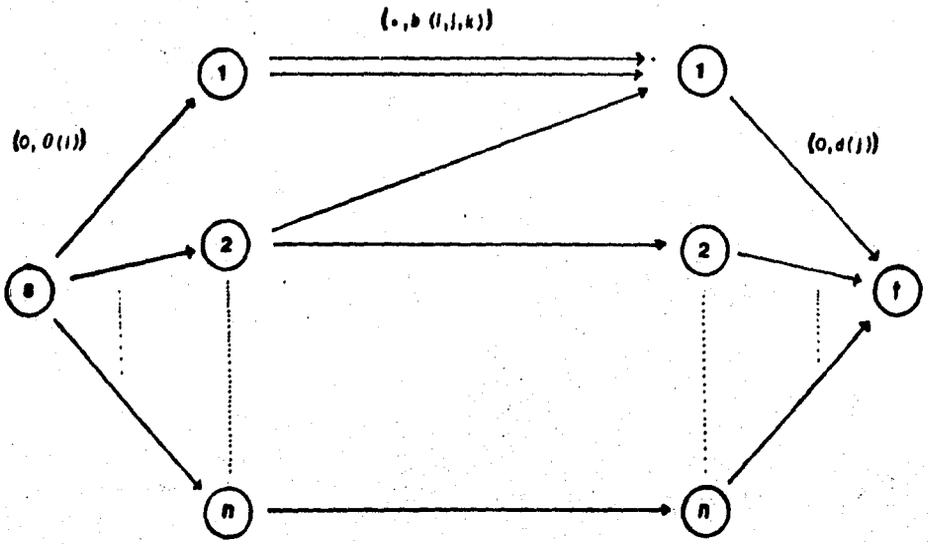
-] Un arco de  $c/u$  de los destinos a  $t$  con capacidad  $d(j)$  y costo cero.

-] Finalmente, se colocará el arco  $(i,j,k)$  si y sólo si  $(i,j,k) \in IJCKJ$ . Tal arco tendrá capacidad  $b(i,j,k)$  y costo 2 ó 3 dependiendo si  $(i,j,k')$  pertenece ó no al conjunto  $IJCK'J$ , asegurando de esta manera que  $f(i,j,k)$  puede ser mayor que cero cuando  $(i,j,k) \in IJCKJ$ .

Denotemos por  $N(IJCKJ)$  a la red construida según las anteriores indicaciones, ver fig. 3.III. El problema (P"R) se convierte ahora en el problema de encontrar el flujo de mayor costo sobre los arcos flujo admisibles de dicha red, i.e. determinar del conjunto de flujos factibles en  $N(IJCKJ)$  aquel que tenga mayor costo.

Una vez que se ha referido (P"R) a la red  $N(IJCKJ)$ , es necesario hacer una pausa en el desarrollo para conocer algunos resultados sobre problemas de flujo a costo máximo. Así pues, y siguiendo la idea de la subsección 2.3.2, se presentan a continuación algunos resultados y ejemplos de problemas de flujo a costo máximo.

(costo, capacidad)



donde  $\cdot = \begin{cases} 2, & \text{Si } (i,j,k) \in W[K'] \\ 3, & \text{Si } (i,j,k) \notin W[K'] \end{cases}$

Figura 3.111 Red  $N(W[K])$  asociada al problema  $(P^r)$ . Los arcos que no aparecen no pertenecen a  $W[K]$ .

3.3.2 El problema de flujo a costo máximo,  
algunos resultados y ejemplos.

Sea  $G=(V,A)$  la gráfica asociada a una red  $N$ , donde  $s$  distingue la presencia del nodo fuente  $s$ , nodo pozo  $t$ .

$V(i,j) \in A \Rightarrow b(i,j), c(i,j)$  ambos no negativos y que representan la capacidad y el costo por unidad de flujo en  $(i,j)$ , respectivamente.

Sea  $f$  un flujo factible de valor  $v > 0$ . Al igual que en la subsección 2.3.2, sea  $N'(f)$  la red incremental asociada a dicho flujo. Un primer resultado (análogo al teorema 2.4) es:

-----  
**Teorema 3.1**

Un  $s$ - $t$  flujo  $f$  de valor  $v$ , es un flujo de costo máximo si y sólo si no existen circuitos en  $N'(f)$  con costo positivo.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Suponga que existe  $C'$  un circuito con costo positivo en  $N'(f)$ . Entonces, el flujo  $f$  puede ser modificado a través del ciclo asociado  $C$ , en  $N$ , de tal forma que se construya un nuevo flujo  $\bar{f}$  de mayor costo que  $f$ .

$\Leftarrow$ ) Suponga que  $f=(f(i,j))$  y  $\bar{f}=(\bar{f}(i,j))$  son dos flujos ambos de valor  $v$ , donde  $f$  es más costoso que  $\bar{f}$ . La diferencia entre esos dos flujos  $Y=f-\bar{f}$  puede ser expresada como una suma de ciclos flujo aumentantes con respecto a  $\bar{f}$ , i.e. como una suma de

circuitos en  $N'(\bar{f})$ .

Debido a que el costo de  $f$  es mayor que el de  $\bar{f}$ , al menos uno de esos circuitos debe tener costo positivo.

MINISTERIO DE  
COMERCIO EXTERNO  
ELECTRICAL

-----

Por otra parte, un resultado cuyo enunciado es análogo al teorema 2.5 es el siguiente (su demostración no se incluye porque es similar a la del teorema 2.5):

-----

### Teorema 3.2

Sea  $f_1$  un flujo de costo máximo de  $v$  unidades.

Sea  $f_2$  un flujo de valor  $\theta$ , a lo largo de la  $s$ - $t$  cadena aumentante  $P$ , asociada al  $s$ - $t$  camino de costo máximo,  $P'$ , en  $N'(f_1)$ .

Entonces  $f_1 + f_2$  es un flujo de costo máximo de valor  $v + \theta$ .

-----

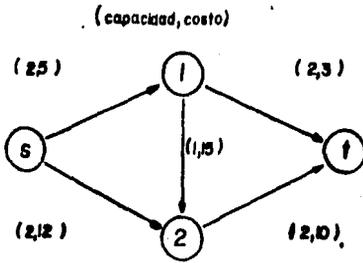
De esta manera, y al igual que en la subsección 2.3.2, los resultados anteriores pueden ser implantados a través de diversos algoritmos que resuelvan el problema de flujo a costo máximo.

Por ejemplo, considérese la aplicación del teorema 3.1 en la red de la fig. 3.IV.a) donde se desea obtener un flujo de valor dos de costo máximo.

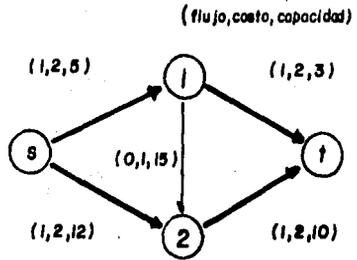
Inicialmente, se construye un flujo  $f$  de valor 2, v.gr. usando el AFF. Ver 3.IV.b). Como deseamos incrementar el costo de dicho flujo, construimos la red incremental  $N'(f)$  en la cual se ha detectado el circuito de costo positivo  $1, (1,2), 2, (2,t), t, (t,1), 1$ . Ver fig. 3.IV.c). Entonces, se realizan los cambios en el flujo inicial  $f$ , obteniendo un nuevo flujo  $f'$ . El lector debiera observar que efectivamente el costo del flujo  $f'$  es mayor que el costo del flujo  $f$ . Ver 3.IV.d). Finalmente, se construye la red incremental  $N'(f')$ . Ver 3.IV.e). Debido a que no existen circuitos de costo positivo en dicha red y haciendo uso del teorema 3.1 se deduce que  $f'$  es un flujo de valor dos de costo máximo.

Otra opción para obtener un flujo de valor dos de costo máximo en 3.IV.a) es la que propone el teorema 3.2. En esta alternativa, una sucesión de  $s$ - $t$  cadenas aumentantes, formadas a partir de  $s$ - $t$  caminos de costo máximo en  $N'$ , serían construidas hasta que el valor del flujo deseado sea alcanzado.

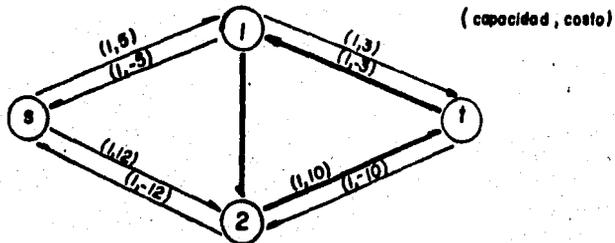
Para ser más precisos, obsérvese que no existen circuitos de costo positivo en la red de la fig. 3.IV.a). De esta manera,  $f \equiv 0$  es el flujo de costo máximo de valor cero. Los cálculos necesarios para llegar a un flujo de valor dos de costo máximo son:



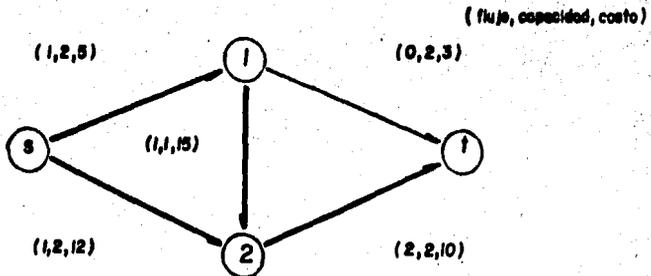
a) Red N



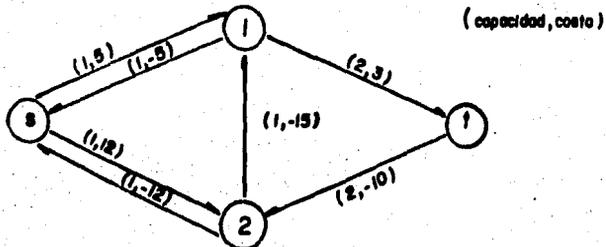
b) Flujo inicial de valor 2 (costo = 30)



c) RED incremental para el flujo b)  
Se detecta el circuito de costo positivo



d) Nuevo Flujo de valor 2 (costo = 52)



e) RED incremental para el flujo del d). No existen circuitos de costo positivo.

Figura 3.14 Red con costos asociados que ilustra la aplicación del teorema 3.1



1) Comienza con un flujo  $f$ ,  $f \equiv 0$ , a partir del cual se construye  $N'(0)$  (de hecho  $N'(0) = N$ ).

2) En  $N'(f)$  detecta el s-t camino de costo máximo,  $C'$ .

3) Incrementa por  $\theta$  el flujo en la red  $N$  para aquellos arcos que forman la s-t cadena aumentante asociada a  $C'$ . Sea  $f'$  este nuevo flujo.

4) Es el flujo  $f'$  de valor dos ?

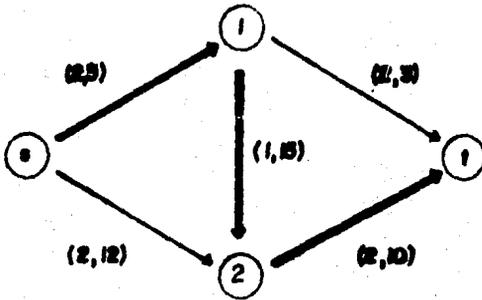
4.1) Si. Fin.  $f'$  es un flujo de valor dos de costo máximo en la red  $N$ .

4.2) No. Haz  $f=f'$  y regresa a 2).

La fig. 3.V muestra los pasos necesarios para llegar a la solución óptima en la red de la fig. 3.IV.a).

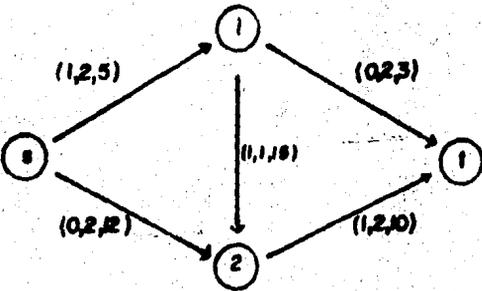
Continuando con los resultados sobre flujos a costo máximo, el siguiente teorema se convierte en una especialización del teorema 3.1 para el caso específico en que se requiere construir un flujo de costo máximo de valor  $v$ , donde  $v$  es el valor del flujo máximo. Para ello, se hará uso del siguiente lema cuya demostración es inmediata a partir del proceso de etiquetamiento del AFF.

Considérese una red  $N$  con gráfica asociada  $G=(V,A)$ .



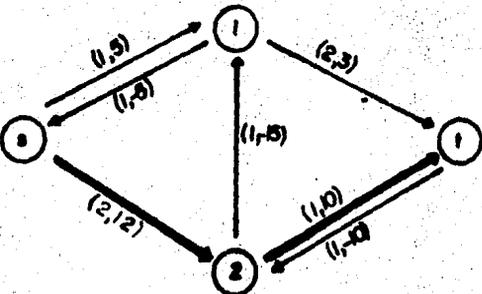
(capacidad, costo)

A) RED INCREMENTAL  $N(0)$ . El 1<sup>er</sup> camino de costo mínimo está formado por  $s, (0,1), 1, (1,2), 2, (2,3), t$ .



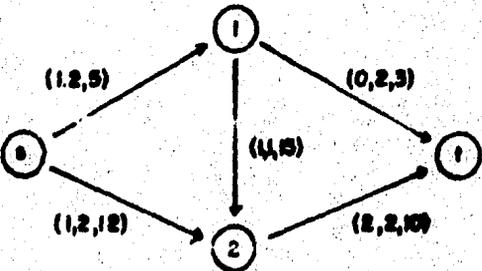
(flujo, capacidad, costo)

B) FLUJO DE COSTO MÍN. de valor 1 en la red  $N$ .



(capacidad, costo)

C) RED INCREMENTAL para el flujo indicado en b). EL 1<sup>er</sup> camino de costo mínimo es  $s, (0,2), 2, (2,1), t$ .



(flujo, capacidad, costo)

D) FLUJO DE COSTO MÍN. de valor 2 en la red  $N$ .

Figura 3 V Red con costos asociadas que ilustra la aplicación del teorema 3.2

$V(i,j) \in A \exists b(i,j), c(i,j)$  que representan respectivamente la capacidad y el costo del arco  $(i,j)$ .

Aplicuese el AFD para la obtención de un s-t flujo máximo y sea  $(S,T)$  la cortadura de capacidad mínima construida tras la aplicación de dicho algoritmo.

-----

### Lema 3.1

$V \in S, i \neq s$ , existe una s-i cadena aumentante a través de nodos de S.

-----

Estamos ahora en condiciones de presentar el siguiente teorema.

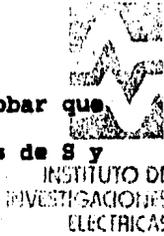
-----

### Teorema 3.3

Suponga que un flujo de costo máximo de valor  $V$ , donde  $V$  es el valor del flujo máximo, es deseado.

Sea  $(S, T)$  la cortadura de capacidad mínima obtenida tras la aplicación del algoritmo de Ford y Fulkerson.

Un flujo  $f$  de valor máximo es de costo máximo si y sólo si  $N'(f)$  no admite circuitos de costo positivo en  $S$  ni en  $T$ . (Es innecesario considerar circuitos con nodos en ambos conjuntos,  $S$  y  $T$ ).



**Demostración:** A partir del teorema 3.1, sólo resta probar que no existe un circuito de costo positivo en  $N'(f)$  con nodos de  $S$  y  $T$ .

Supongamos que exista un circuito de costo positivo,  $C'$ , en  $N'(f)$  con nodos de  $S$  y  $T$ . Sea  $i \in C'$  ( $j \in C'$ )  $\rightarrow$   $i \in S$  ( $j \in T$ ). Luego, existe una  $i$ - $j$  cadena aumentante en  $N$ . Más aun, existe una  $s$ - $j$  cadena aumentante (Lema 3.1). De donde el nodo  $j$  puede ser etiquetado, i.e.  $j \in S \implies \langle \dots$ .

Por lo tanto no existe un circuito de costo positivo en  $N'(f)$  con nodos de  $S$  y  $T$ .

El teorema 3.3 queda de esta manera demostrado.

-----

Es conveniente indicar que el teorema 3.3 puede ser generalizado a cualesquiera cortadura  $(S, T)$  mientras  $(S, T)$  sea una cortadura de capacidad mínima. El lector puede remitirse a [La;1976], Cap III.

Asimismo, se debiera notar que la implantación de los teoremas 3.1 y 3.2 a través de un algoritmo similar al de la sección 2.3.2, brinda la oportunidad de realizar un análisis paramétrico del problema de flujo a costo máximo como una función del valor del flujo  $v$ .

Sea  $v \in [0, V]$  el valor de un s-t flujo en  $N$ , y denotemos por  $C(v)$  el costo máximo de un s-t flujo de valor  $v$ . De esta manera hemos construido una función  $C$ .

$$C: [0, V] \rightarrow \mathbb{R} \quad v \mapsto C(v)$$

Una gráfica de dicha función, obtenida de sucesivas cadenas aumentantes se muestra en la fig. 3.VI.

Intuitivamente es de esperar que las sucesivas cadenas aumentantes sean a lo más tan costosas como la previa así que  $C$  debiera ser una función concava. En verdad la concavidad de  $C$  es fácilmente demostrada.

#### Teorema 3.4

$C$  es una función concava.

Demostración: Sea  $f$  ( $f'$ ) un flujo de costo máximo de valor  $v$  ( $v'$ ), donde  $v < v'$ . Entonces,  $\lambda f + (1-\lambda)f'$  es un flujo factible (el conjunto de soluciones de un PPL es convexo) con valor  $\lambda v + (1-\lambda)v'$  y su costo es  $\lambda C(v) + (1-\lambda)C(v')$ , donde  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Se sigue que  $C(\lambda v + (1-\lambda)v') \geq \lambda C(v) + (1-\lambda)C(v')$ , y la función  $C$  es concava.

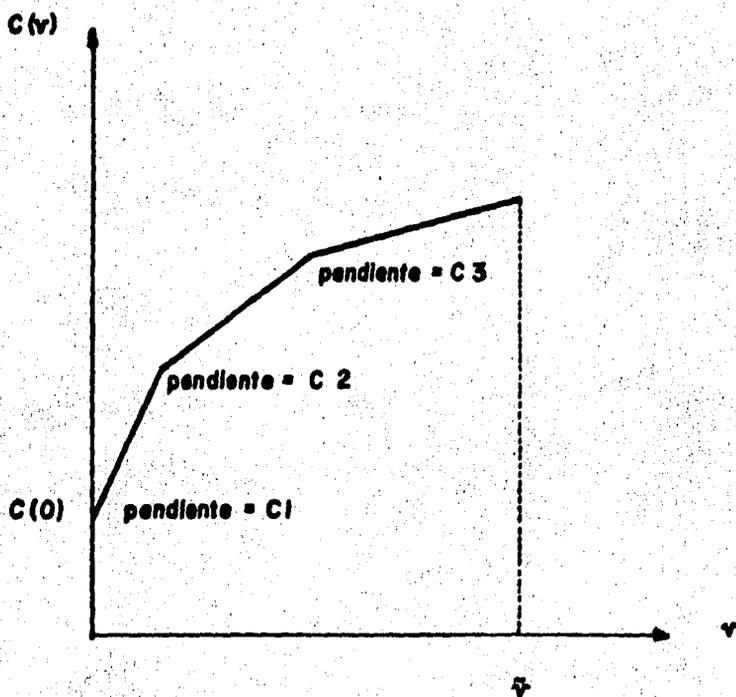


Figura 3.vi Gráfica de la función  $C$ ,  
 costo máximo de un s-f flujo de valor  
 $v$ .

### Corolario 3.1

Sea  $C_i$  el costo de la  $i$ -ésima s-t cadena aumentante que se usa para determinar el flujo de costo máximo de valor  $v$ .

$$C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_i$$

-----

### 3.3.3 Comentarios sobre la aplicación del algoritmo primal-dual en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos.

Tal y como se menciona en la subsección 3.3.1, (P"R) es un problema donde se desea encontrar el flujo de mayor costo sobre los arcos flujo admisibles en  $IJKJ$ . Esto es, (P"R) no desea un flujo de determinado valor de costo máximo, sino más bien el flujo de mayor costo entre aquellos flujos factibles en la red  $N(IJKJ)$ .

Luego, si nosotros conociéramos para la red  $N(IJKJ)$  la gráfica de la función  $C$ , sería sencillo determinar aquellos valores de  $v$  que maximizan dicha función.

Si denotamos por:

$$M = \{ v / C(v) \geq C(x) \ \forall x \in [0, v] \} \quad (3.3.42)$$

Sea  $v \in M$ , bastaría construir un flujo de valor  $v$  con costo  $C(v)$  para lo cual se haría uso de alguna de las siguientes opciones:

1] Dando un flujo de valor  $v$ , p.e. usando el AFF, y eliminando los circuitos positivos (teorema 3.1).

2] Construyendo, a partir de  $f \equiv 0$ , s-t cadenas aumentantes de costo máximo hasta encontrar el valor del flujo deseado (teorema 3.2)

3] Combinando 1] y 2]. Esto es, dado un flujo de valor  $v' \in v$ .

3.1] Se eliminan circuitos de costo positivo hasta alcanzar un flujo de costo máximo de valor  $v'$ .

3.2] Si  $v = v'$ . Alto, se ha solucionado nuestro problema. En caso contrario, se construyen s-t cadenas aumentantes de costo máximo hasta encontrar el valor del flujo deseado.

Ahora bien, por ser mayores o iguales a cero los costos asociados a los arcos en  $N(IJ[K])$ , una pregunta que surge de manera natural es :

$$C(v) \geq C(v) \quad \forall v \in [0, v] ? \quad (3.3.43)$$

o equivalentemente

$$v \in M ? \quad (3.3.43.bis)$$

En caso de ser afirmativa la respuesta,  $C$  sería una función concava no decreciente, y como un primer paso para obtener el óptimo en  $(P''R)$  se podría usar un procedimiento que maximice el flujo sobre los arcos admisibles en  $IJ[KJ]$ , v.gr. el AFF. Una vez que se hubiera finalizado la aplicación de este algoritmo, el segundo paso consistiría en verificar, o en su defecto reconstruir (ver teorema 3.1), el flujo que maximice el costo en  $(P''R)$ . En este punto sería de gran utilidad el uso del teorema 3.3 al restringir la búsqueda de los circuitos de costo positivo sólo a nodos en el conjunto  $S$  o a nodos sólo del conjunto  $T$ .

Pero considérese el siguiente ejemplo:

Sea  $N$  la red de la fig. 3.VII.a) y constrúyase la función  $C$  para dicha red. Algunos comentarios sobre la red  $N$  se escriben a continuación:

1] Al igual que en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos, los costos son mayores o iguales que cero.

1.1] Los arcos que salen del nodo  $s$  y los arcos que llegan al nodo  $t$  tienen costo cero.

2]  $N$  no contiene circuitos de costo positivo.

A partir de 2] es claro que  $C(0)=0$ . Se puede usar ahora el teorema 3.2 en  $N'(f \equiv 0)=N$ . Como indica la fig. 3.VII.b), el camino de costo máximo es  $s, (s,2), 2, (2,5), 5, (5,t), t$  (el

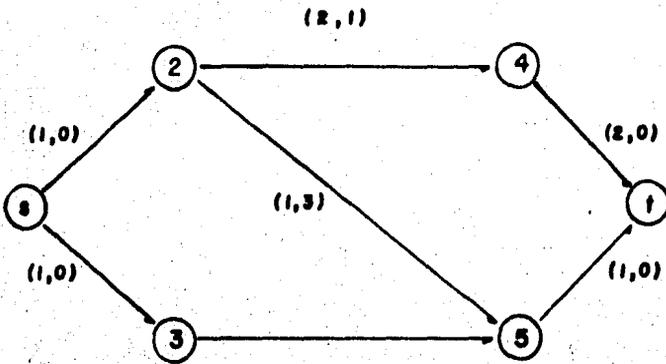
lector debiera observar que el costo de dicho camino es 3). Luego, el flujo se puede incrementar hasta en una unidad a través de la cadena aumentante asociada. Sea  $f$  este nuevo flujo. Ver fig. 3.VII.c). Se tiene  $C(v) = 3v$ ,  $v \in [0,1]$ .

Una vez construido el flujo  $f$  de valor 1 y por una nueva aplicación del teorema 3.2 en  $N'(f)$ , el camino de costo máximo es  $s, (s,3), 3, (3,5), 5, (5,2), 2, (2,4), 4, (4,t), t$ . Ver fig. 3.VII.d). (Observe el lector que el camino de costo máximo tiene costo -1). Luego, el flujo se puede incrementar hasta en una unidad a través de la cadena aumentante asociada alcanzando un valor de 2, ver fig. 3.VII.e). De donde  $C(v) = 3 + (-1)(v-1)$ ,  $v \in [1,2]$ . Una gráfica de la función  $C$  se localiza en la fig. 3.VII.f).

Se sigue de este ejemplo que no necesariamente el flujo de mayor costo debe ser de valor máximo en una red cuyos costos asociados son mayores o iguales a cero, así la respuesta a la pregunta planteada en (3.3.43) es no.

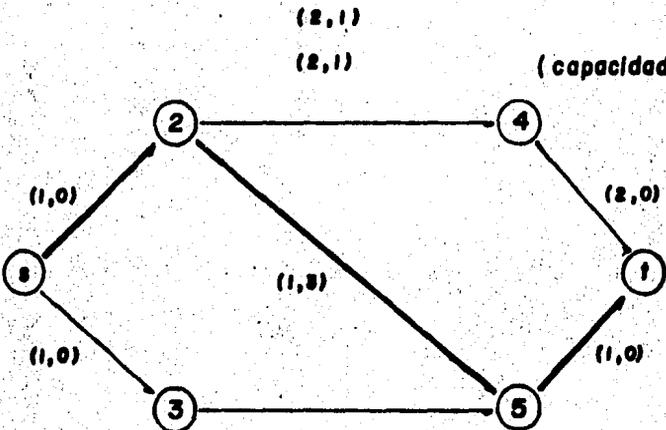
Aquí se debiera notar, que si bien los costos sobre los arcos de la red de la fig. 3.VII.a) no son los que se indican en la f. o. de  $(P^*R)$ , un ejemplo que considere una red como la de nuestro problema (que incluya los costos indicados en (3.3.37)) puede ser construida generalizando la idea del ejemplo anterior. De esta forma, para los subproblemas  $(P^*R)$ , el determinar el valor del flujo que maximice el costo en la red  $N(IJ[EK])$  se convierte en un problema al cual se deberá enfrentar el AP-D durante la solución

( capacidad, costo )



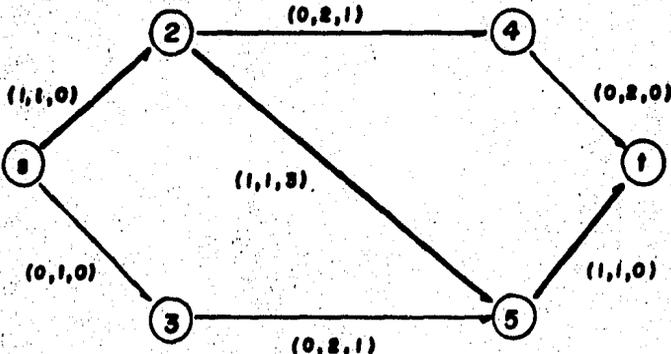
a) Red  $N$

( capacidad, costo )

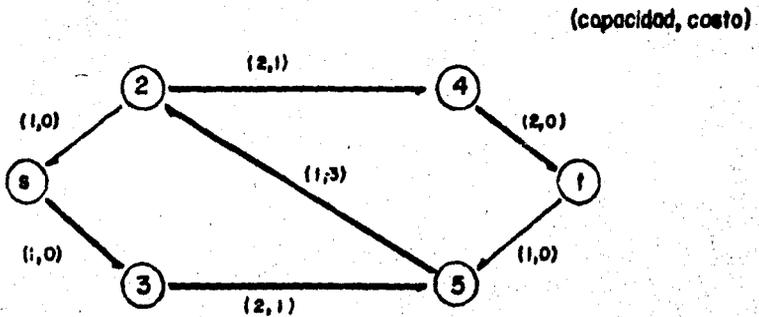


b) Red incremental  $N'(f)$  para  $f=0, (2,1)$   
 el camino de costo máximo es  
 $s, (s,2), 2, (2,5), 5, (5,t), t,$

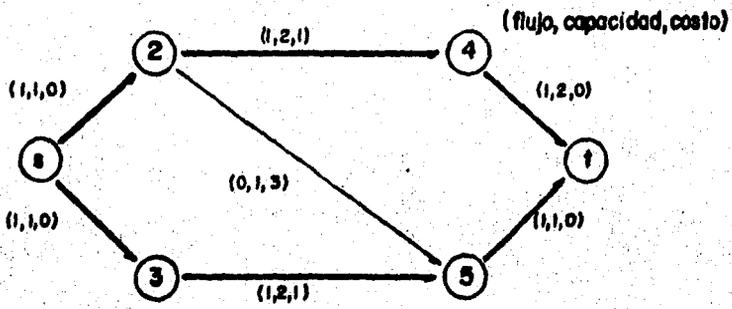
( flujo, capacidad, costo )



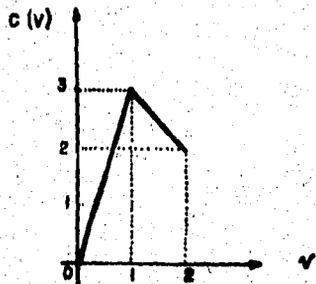
c) Flujo de valor 1 de costo  
 máximo = 3



d) Red incremental  $N'(f)$  para el flujo de  $c$ . El camino de costo máximo es  $s, (s,3), 3, (3,5), 5, (5,2), 2, (2,4), 4, (4,1), f$ .



e) Flujo de valor 2 de costo máximo = 2



f) Grafica de la función  $C$  para la red del a)

Figura 3.VI ejemplo de una red para la cual la función  $C$  no es no-decreciente

del problema primal ( $P'$ ). Una forma de salvar este obstáculo se sirve de los resultados de la subsección anterior relativos a la función  $C$  ( $C$  es una función concava y lineal por pedazos), conocimiento del corolario 3.1 y la aplicación del teorema 3.2) pues, su uso nos proporciona un método para encontrar la solución óptima a ( $P''$ ). Por convención y durante el planteamiento del presente método denotaremos por  $N$  a la red  $N(IJCK)$ , y similarmente si  $f$  es un flujo factible en  $N(IJCK)$  la red incremental asociada a dicho flujo la denotaremos por  $N'(f)$ .

El método referido, considera inicialmente la red  $N$  con el flujo  $f \equiv 0$  (de hecho  $f \equiv 0$  constituye el flujo de costo máximo de valor cero pues,  $N$  no contiene circuitos y  $N'(0) = N$ ) e incrementa el flujo a través de las s-t cadenas aumentantes asociadas a los s-t caminos de costo máximo localizados en  $N'$  hasta que el costo de dicha cadena aumentante sea cero o negativo. De manera más precisa, el procedimiento sería:

Procedimiento para la solución óptima de (P"R)

1] Comienza con el flujo  $f \equiv 0$ .

2] Construye  $N'(f)$ .

3] Existe un s-t camino en  $N'(f)$  ?

3.1] Si. Sea  $C'$  el s-t camino de costo máximo.

3.2] No. Alto. El flujo de mayor costo es de valor máximo.

4] Sea  $c$  el costo de  $C'$ .  $c \leq 0$  ?

4.1] Si. Alto.  $f$  optimiza (P"R).

4.2] No. Incrementa el flujo en  $N$  a través de la cadena aumentante asociada a  $C'$ . Sea  $f$  este nuevo flujo. Regresa a 2].

El procedimiento anterior garantiza que el flujo  $f$  obtenido al detenerse la aplicación es el de mayor costo en la red  $N(IJ[K])$ . Luego,  $f$  optimiza (P"R).

Restaría aun la verificación de (3.3.35) ó (3.3.36). Si dichas igualdades son satisfechas, equivalentemente se tiene  $\zeta=0$  y se habría obtenido la solución óptima al problema (P'). En caso contrario  $\zeta > 0$  y se deberá obtener la solución óptima del problema (DP'R) para así poder cambiar la solución al problema (D') en tal forma que se admita al menos una nueva variable en el

problema (P'). Esto se continuará hasta que la solución primal se haga factible, o bien la solución dual se haga no acotada.

INSTITUTO DE  
INVESTIGACIONES  
ALTERNAS

Ahora bien, después del análisis desarrollado en torno al problema del transporte capacitado con arcos paralelos y su solución mediante el AP-D, resulta de interés reflexionar en el problema (P) y el estado al que nos ha llevado la implantación de la metodología AP-D. A diferencia de los problemas anteriores, relativos a flujo en redes, en los que la aplicación del AP-D nos ha transferido a subproblemas cuyo grado de dificultad es menor que el del problema original, v.gr. el algoritmo alfabeta con subproblemas de flujo máximo para el problema del transporte, el problema aquí expuesto nos ha transferido a subproblemas cuyo planteamiento no ha cambiado sustancialmente del problema (P).  
Veamos:

Dado el problema original (P) o equivalentemente (P'), nuestro objetivo es encontrar el flujo de costo mínimo que satisfaga tanto las restricciones de ofertas y demandas en los nodos como las capacidades en los arcos. Luego, al aplicar la metodología AP-D en (P'), nuestra idea es más bien evitar el manejo del vector de costo, asociado a (P'), en los subproblemas derivados.

Por otra parte, al proporcionar una solución (D')-factible y formar el problema (P'R), los subproblemas equivalentes, (P''R), consisten en determinar el flujo factible de costo máximo en la red N(IJKJ). De esta forma, y a diferencia del problema del transporte, en los subproblemas (P''R) el parámetro costo asociado

al flujo en c/arco aparece. Luego, (P"R) ya no es un problema de flujo máximo, como intuitivamente se esperaba. Se tiene entonces un problema original (P) ó (P') para el cual se desea evitar el manejo del vector costo y la metodología AP-D nos transfiere a subproblemas (P"R) donde un nuevo vector de costo es usado. Así, la ventaja ofrecida inicialmente por el AP-D queda sin efecto en este problema particular.

Es conveniente indicar que pese a existir en  $N(IJKJ)$  sólo 2 valores para el parámetro costo, las herramientas conocidas para resolver la clase de subproblemas (P"R) no disminuyen la complejidad de las ya ofrecidas en el capítulo 2 para el problema de flujo a costo mínimo. De tal suerte que la idea generadora del presente capítulo, que se fincaba en el éxito obtenido tras la implantación del AP-D en el problema del transporte, no ha redituado para el caso específico del problema del transporte capacitado con arcos paralelos. Por tanto, la búsqueda de una metodología que resuelva el problema con mejores herramientas, será un trabajo que proseguirá el siguiente capítulo al introducirnos en la metodología desarrollada por Ford y Fulkerson que con el nombre de algoritmo Out of Kilter permite resolver problemas de flujo con costo mínimo en redes.

3.4 Ejemplo de la implantación del algoritmo primal-dual en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos.

Se completa el capítulo 3 resolviendo, bajo la implantación del AP-D, el problema del transporte capacitado con arcos paralelos mostrado en la red N de la fig. 3.VIII. Esto es, se desea encontrar el patrón de envíos con costo mínimo que satisfaga tanto ofertas y demandas en los nodos, y que respete la capacidades de los arcos.

Como el lector puede observar en la red N, la dimensión del problema es  $m=n=3$ ,  $K=2$ . Adicionalmente, las suposiciones hechas a la estructura de la red N en (3.2.1),..., (3.2.3) son satisfechas.

Para dar una mayor claridad a la exposición, en c/iteración del AP-D se mostrará la solución óptima del problema (P'R) en la red N(IJJKJ), así como la del problema (DP'R). A partir de lo cual, se visualizará el avance que guarda el problema del transporte capacitado de la red N en su búsqueda de una solución óptima.

**Convenciones:**

En lo que resta de esta sección y siempre que se refiera a las variables del problema dual, (D'), denotaremos por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma(k)$  a los siguientes vectores:

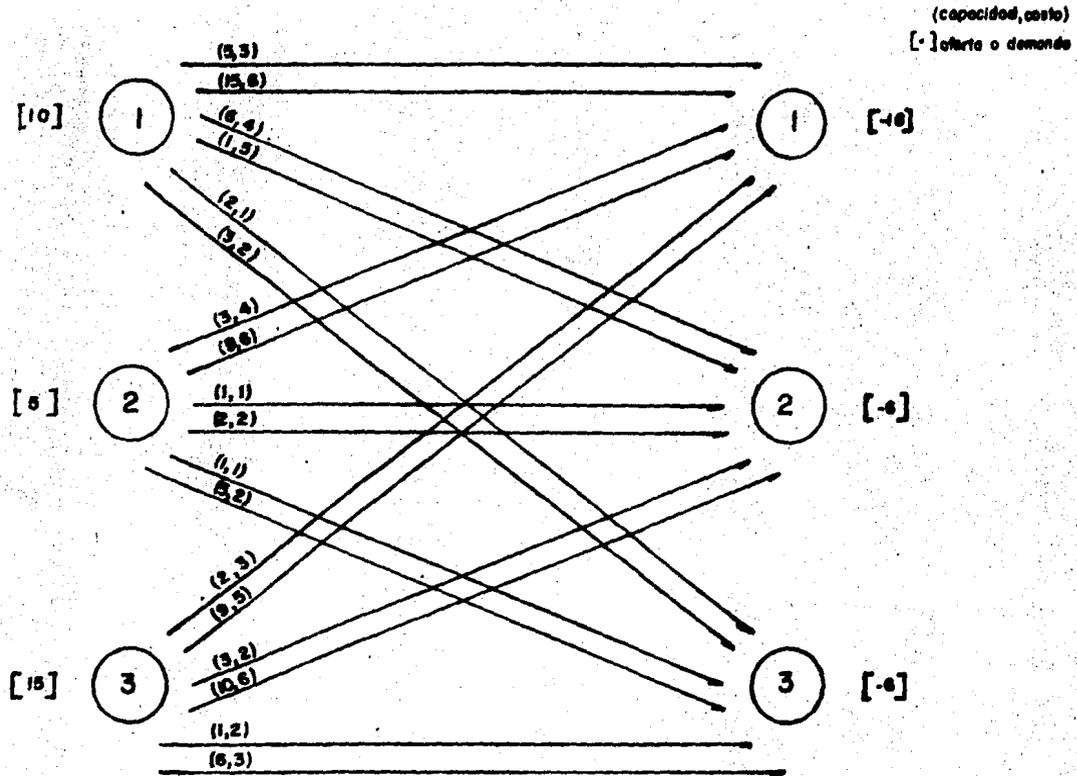


Figura 8 VIII Ejemplo de problema del transporte capacitado con arcos paralelos

$$\alpha = ( \alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(m) );$$

$$\beta = ( \beta(1), \beta(2), \dots, \beta(n) );$$

$$\text{y } \forall k = 1, \dots, K$$

$$\gamma(k) = ( \gamma(1,1,k), \dots, \gamma(1,n,k), \dots, \gamma(m,1,k), \dots, \gamma(m,n,k) )$$

análogamente para las variables del problema (DP'R)

$$\bar{\alpha} = ( \bar{\alpha}(1), \bar{\alpha}(2), \dots, \bar{\alpha}(m) );$$

$$\bar{\beta} = ( \bar{\beta}(1), \bar{\beta}(2), \dots, \bar{\beta}(n) );$$

$$\text{y } \forall k = 1, \dots, K$$

$$\bar{\gamma}(k) = ( \bar{\gamma}(1,1,k), \dots, \bar{\gamma}(1,n,k), \dots, \bar{\gamma}(m,1,k), \dots, \bar{\gamma}(m,n,k) )$$

MANIFIESTA  
 REPRODUCCIÓN  
 ELECTRÓNICA

## Iteración 1



Dada una solución inicial (D')-factible, v.gr. la indicada por (3.2.17), ..., (3.2.19) se tiene:

$$\begin{array}{l} \alpha = (0, 0, 0) \\ \beta = (3, 1, 1) \\ \gamma(1) \equiv 0 \equiv \gamma(2) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} | \\ | \\ | \end{array} \right\} \quad (3.4.0)$$

Véase fig. 3.IX.b), donde se ha colocado el correspondiente valor de la variable dual junto al elemento de la red que lo complementa, excepto para aquellas variables  $\gamma(i,j,k) \neq 0$ . Esta convención de colocar sólo el valor de aquellas variables  $\gamma(i,j,k) \neq 0$  será usada en todas aquellas gráficas usadas en esta sección.

De la anterior solución (D')-factible se tiene:

$$\begin{array}{l} IJ(1) = \left\langle \begin{array}{l} | (1,1,1), (3,1,1) | \\ | (2,2,1), | \\ | (1,3,1), (2,3,1), | \end{array} \right\rangle \\ IJ(2) = 0 \\ IJ(1') = \left\langle \begin{array}{l} | (1,1,1'), (2,1,1'), (3,1,1') | \\ | (1,2,1'), (2,2,1'), (3,2,1') | \\ | (1,3,1'), (2,3,1'), (3,3,1') | \end{array} \right\rangle \\ IJ(2') = \left\langle \begin{array}{l} | (1,1,2'), (2,1,2'), (3,1,2') | \\ | (1,2,2'), (2,2,2'), (3,2,2') | \\ | (1,3,2'), (2,3,2'), (3,3,2') | \end{array} \right\rangle \end{array}$$

Con la información precedente es sencillo construir la red  $N(IJJKJ)$ . Simplemente obsérvese que:

si  $(i,j,k) \in IJJKJ \implies (i,j,k') \in IJJK'J$ .

y el costo asociado a los arcos en  $N(IJJKJ)$  es igual a 2. Se puede entonces determinar la solución óptima al problema  $(P''R)$  asociado, v.gr. usando las herramientas de la sección anterior.

Tanto la red  $N(IJJKJ)$  como la solución óptima se pueden visualizar en la red de la fig 3.IX.a)

En forma paralela a la solución óptima de  $(P''R)$ , el lector puede visualizar en la red  $N$  el avance que ha obtenido el problema  $(P)$  en su búsqueda por encontrar el patrón de envíos factible de costo mínimo. Ver fig. 3.IX.b), donde, por convención, los arcos trazados corresponden a columnas flujo admisibles de la red  $N(IJJKJ)$  de la fig. 3.IX.a).

Podemos calcular  $\zeta$  a partir de los resultados de la subsección 3.3.1, en ese caso se tiene:

$$\zeta = \left\langle \begin{array}{l} \sum_i o(i) + \sum_j d(j) + \sum_E b(i,j,k) \\ - 2 \sum_A f(i,j,k) - 3 \sum_B f(i,j,k) \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

donde  $A = \{ (i,j,k) \in IJJKJ / (i,j,k') \in IJJK'J \}$

$B = \{ (i,j,k) \in IJJKJ / (i,j,k') \notin IJJK'J \}$

$E = \{ (i,j,k') / (i,j,k') \in IJJK'J \}$

y para el flujo óptimo indicado en la fig. 3.IX.a)

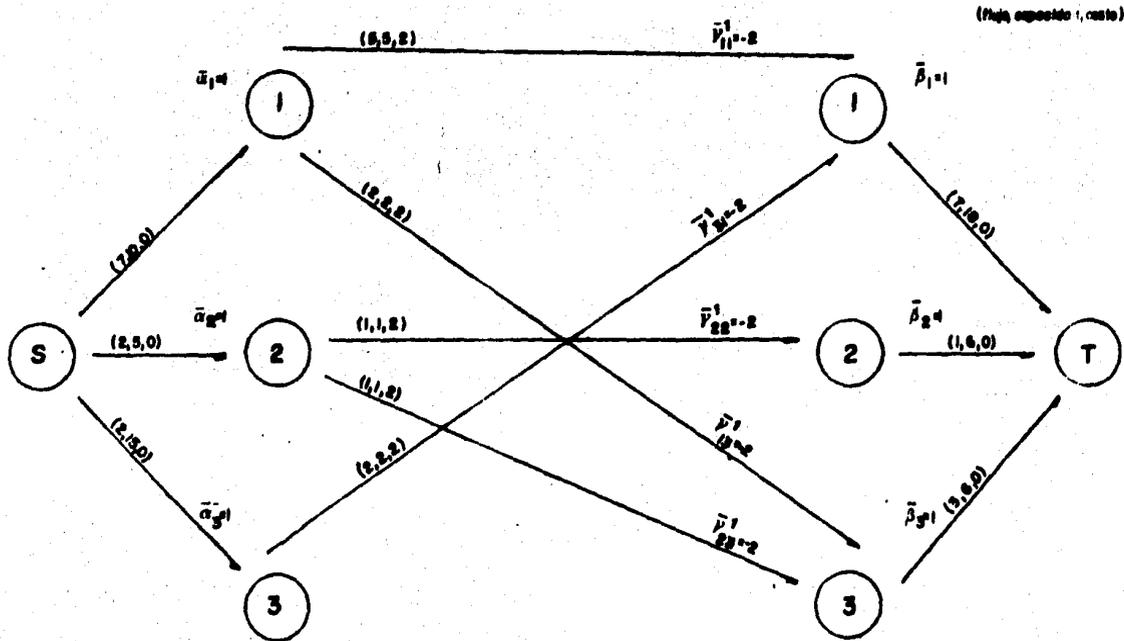


Figura 3 ix a) Ilustración de la red  $N(u, K)$  asociada a la solución  $(\bar{u})$  factible de la  $i$ -ésima iteración. La solución óptima tanto del problema  $(P^N)$  como de  $(DP^N)$  se incluyen en la misma red.

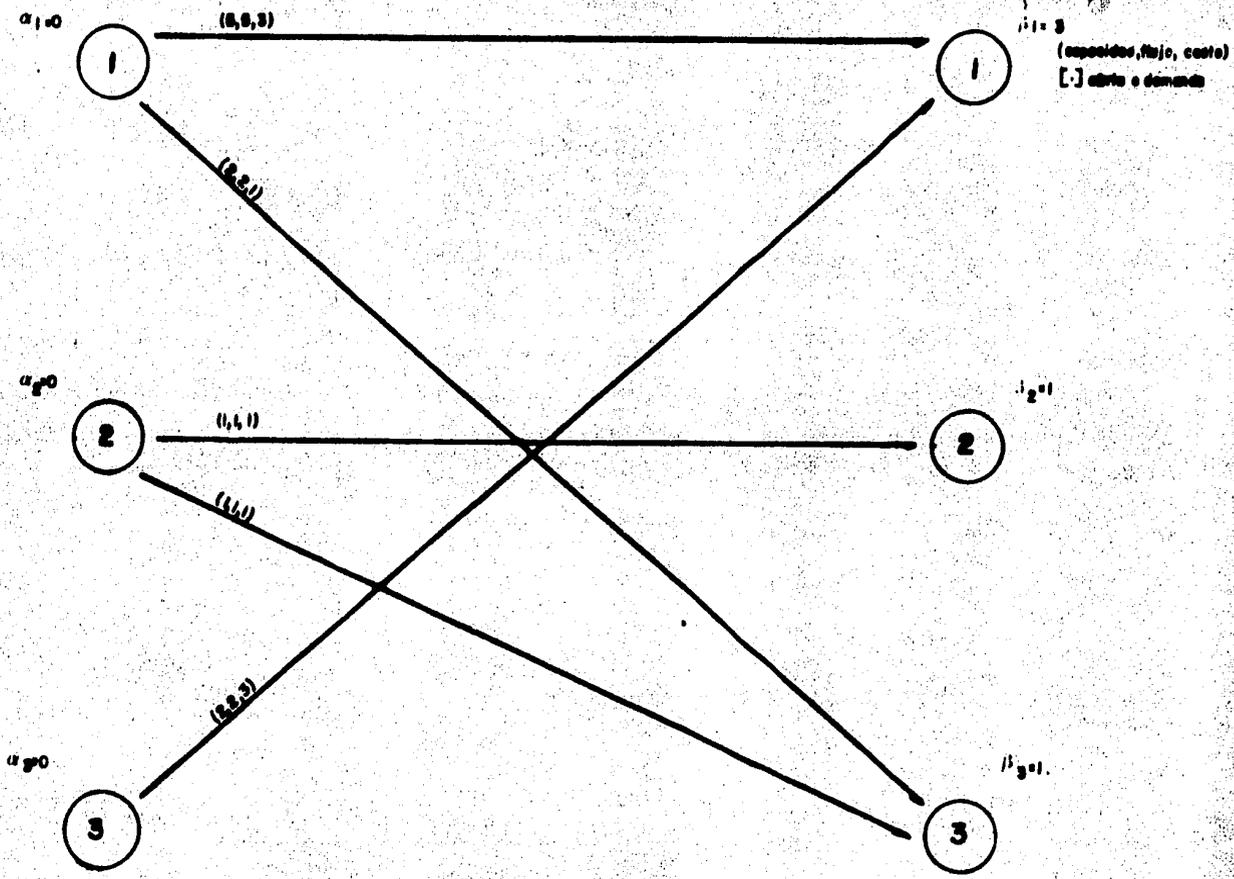


Figura 3.19. b) Estado de la red N después de la 1<sup>ra</sup> iteración del A.P.S.  
 Adicionalmente se localiza la solución (57) factible que inicia esta iteración

$$\zeta = 30 + 30 - 2(11) = 38$$

(3.4.2)

Luego  $\zeta > 0$  y es necesario conocer la solución óptima de (DP'R) JUNTO DE INVESTIGACIONES ( ver (3.3.15), ..., (3.3.21) ) para así poder cambiar la solución al problema (D') en tal forma que se admita al menos una nueva variable en el problema (P'). En este punto, el lector debiera notar que aún no conoce todos los valores de las variables que optimizan la f. o. en el problema (P'R), sin embargo determinarlos es una tarea muy sencilla. Por ejemplo:

-J De (3.3.9) se obtiene

$$\forall i \quad x(i|a) = c(i) - \sum_j (f(i,j,1) + \dots + f(i,j,K)).$$

Luego  $x(1|a)=3$ ,  $x(2|a)=3$ ,  $x(3|a)=13$ .

-J Análogamente de (3.3.10)  $x(4|a)=11$ ,  $x(5|a)=5$ ,  $x(6|a)=3$ .

-J Usando (3.3.11) se tiene:

$\forall (i,j,1) \in IJ(1)$ ,  $x(i,j,1)=0$ , pues  $f(i,j,1)=b(i,j,1)$ .

$\forall (i,j,k') \in IJEK'J \wedge (i,j,k) \in IJ(1)$ ,

$x(i,j,k)=b(i,j,k)$ . Luego  $y(i,j,k|a)=0 \quad \forall i, \forall j, \forall k$ .

Para obtener la solución óptima de (DP'R) recurriremos a las condiciones de holgura complementaria en el par de problemas duales (P'R) y (DP'R). Simplemente obsérvese que por ser (P'R) un problema en forma estándar las condiciones de holgura complementaria se reducen a:

Dado un par de soluciones  $\star=(F,X,X|a,Y|a)$  y  $\star\star=(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  factibles en (P'R) y (DP'R) respectivamente.

$\star$  y  $\star\star$  son óptimas en sus respectivos problemas si y sólo si:

$$(\bar{\alpha}(i)+\bar{\beta}(j)+\bar{\gamma}(i,j,k)) \cdot f(i,j,k)=0, \text{ si } (i,j,k) \in IJ(k) \quad (3.4.3)$$

$$\bar{\gamma}(i,j,k) \cdot x(i,j,k) = 0, \text{ si } (i,j,k') \in IJ(k') \quad (3.4.4)$$

$$(\bar{\alpha}(i)-1) \cdot x(i|a) = 0 \quad \forall i \quad (3.4.5)$$

$$(\bar{\beta}(j)-1) \cdot x(m+j|a) = 0 \quad \forall j \quad (3.4.6)$$

$$(\bar{\gamma}(i,j,k)-1) \cdot y(i,j,k|a) = 0 \quad \forall (i,j,k) \quad (3.4.7)$$

Usando la solución óptima de (P'R) deducida anteriormente, se tiene:

De (3.4.3)

$$(1) (\bar{\alpha}(1)+\bar{\beta}(1)+\bar{\gamma}(1,1,1)) \cdot 8 = 0$$

$$(2) (\bar{\alpha}(1)+\bar{\beta}(3)+\bar{\gamma}(1,3,1)) \cdot 2 = 0$$

$$(3) (\bar{\alpha}(2)+\bar{\beta}(2)+\bar{\gamma}(2,2,1)) \cdot 1 = 0$$

$$(4) (\bar{\alpha}(2)+\bar{\beta}(3)+\bar{\gamma}(2,3,1)) \cdot 1 = 0$$

$$(5) (\bar{\alpha}(3)+\bar{\beta}(1)+\bar{\gamma}(3,1,1)) \cdot 2 = 0$$

De (3.4.4)

$$(6) \bar{\gamma}(1,2,1) \cdot 8 = 0$$

$$(7) \bar{\gamma}(2,1,1) \cdot 8 = 0$$

$$(8) \bar{\gamma}(3,2,1) \cdot 8 = 0$$

$$(9) \bar{\gamma}(3,3,1) \cdot 1 = 0$$

$$(10) \bar{\gamma}(1,1,2) \cdot 15 = 0$$

$$(11) \bar{\gamma}(1,2,2) \cdot 1 = 0$$

$$(12) \bar{\gamma}(1,3,2).3 = 0$$

$$(13) \bar{\gamma}(2,1,2).9 = 0$$

$$(14) \bar{\gamma}(2,2,2).2 = 0$$

$$(15) \bar{\gamma}(2,3,2).5 = 0$$

$$(16) \bar{\gamma}(3,1,2).9 = 0$$

$$(17) \bar{\gamma}(3,2,2).10 = 0$$

$$(18) \bar{\gamma}(3,3,2).6 = 0$$

De (3.4.5)

$$(19) (\bar{\alpha}(1)-1).3 = 0$$

$$(20) (\bar{\alpha}(2)-1).3 = 0$$

$$(21) (\bar{\alpha}(3)-1).13 = 0$$

De (3.4.6)

$$(22) (\bar{\beta}(1)-1).11 = 0$$

$$(23) (\bar{\beta}(2)-1).5 = 0$$

$$(24) (\bar{\beta}(3)-1).3 = 0$$

Usando (19),..., (24)

$$\bar{\alpha} = (1, 1, 1) \quad (3.4.8)$$

$$\bar{\beta} = (1, 1, 1) \quad (3.4.9)$$

y de (10),..., (18)

$$\bar{\gamma}(2) \equiv 0 \quad (3.4.10)$$

finalmente

$$\bar{\gamma}(1) = (-2, 0, -2, 0, -2, -2, -2, 0, 0) \quad (3.4.11)$$

Claramente, la solución dada por (3.4.8), ..., (3.4.11) es (DP'R)-factible y óptima. Ver fig. 3.IX.a). (El lector interesado puede checar c/u de las restricciones del problema (DP'R) así como el costo de dicha solución en la f. o. del mismo problema, que como es de esperar coincide con el indicado en (3.4.2)).

Una vez conocida la solución óptima del problema (DP'R), comienza el análisis para mejorar la solución inicial (D')-factible (ver pasos 3J y 4J del resumen del AP-D en 2.3.1). Se lista entonces, aquellas columnas no admisibles:

$$IJ(1)^c = \left\langle \begin{array}{c} (2,1,1), \\ (1,2,1), \quad (3,2,1) \\ (3,3,1) \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(2)^c = \left\langle \begin{array}{c} (1,1,2), (2,1,2), (3,1,2) \\ (1,2,2), (2,2,2), (3,2,2) \\ (1,3,2), (2,3,2), (3,3,2) \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(1')^c = \emptyset = IJ(2')^c$$

$$(1,2,1) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(2) + \bar{\gamma}(1,2,1) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(2,1,1) \approx \bar{\alpha}(2) + \bar{\beta}(1) + \bar{\gamma}(2,1,1) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(3,2,1) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(2) + \bar{\gamma}(3,2,1) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(3,3,1) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(3) + \bar{\gamma}(3,3,1) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(1,1,2) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(1) + \bar{\gamma}(1,1,2) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(3,3,2) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(3) + \bar{\gamma}(3,3,2) = 1+1+0 = 2 > 0$$

Luego, el máximo valor de  $\theta$ , ver (2.3.13), está dado por:

$$\theta = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{4-(0+3+0)}{2}, \\ \frac{4-(0+1+0)}{2}, \quad \frac{2-(0+1+0)}{2}, \\ \frac{2-(0+1+0)}{2}, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{6-(0+3+0)}{2}, \quad \frac{6-(0+3+0)}{2}, \quad \frac{5-(0+3+0)}{2}, \\ \frac{5-(0+1+0)}{2}, \quad \frac{2-(0+1+0)}{2}, \quad \frac{6-(0+1+0)}{2}, \\ \frac{2-(0+1+0)}{2}, \quad \frac{2-(0+1+0)}{2}, \quad \frac{3-(0+1+0)}{2} \end{array} \right.$$

IJ(1)<sup>c</sup>  
IJ(2)<sup>c</sup>

De donde,  $\theta = 1/2$ . Así, la nueva solución (D') es :

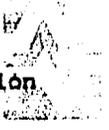
$$Y = \left( \begin{array}{l} \alpha + 1/2 \bar{\alpha} \\ \beta + 1/2 \bar{\beta} \\ \gamma(1) + 1/2 \bar{\gamma}(1) \\ \gamma(2) + 1/2 \bar{\gamma}(2) \end{array} \right.$$

donde:

$\alpha, \beta, \gamma(1), \gamma(2)$  son los indicados en (3.4.0) y

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(2)$  son los indicados en (3.4.8), ..., (3.4.11)

respectivamente.



INSTITUTO DE  
INVESTIGACION CIENTÍFICA Y  
TECNOLÓGICA

Si denotamos nuevamente por  $(\alpha, \beta, \gamma(1), \gamma(2))$  a la solución

(D')-factible se tiene:

$$\alpha = (1/2, 1/2, 1/2) \quad (3.4.12)$$

$$\beta = (7/2, 3/2, 3/2) \quad (3.4.13)$$

$$\gamma(1) = (-1, 0, -1, 0, -1, -1, -1, 0, 0) \quad (3.4.14)$$

$$\gamma(2) \equiv 0 \quad (3.4.15)$$

En este punto se comienza una nueva iteración del AP-D.

### Iteración 2

Dada la solución (D')-factible mostrada en (3.4.12), ..., (3.4.15). Ver fig. 3.X.b). El nuevo conjunto de columnas admisibles está formado por:

$$IJ(1) = \left\langle \begin{array}{c} (1,1,1), (2,1,1), (3,1,1) \\ (2,2,1), (3,2,1) \\ (1,3,1), (2,3,1), (3,3,1) \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(2) = \left\langle \begin{array}{c} (2,2,2) \\ (1,3,2), (2,3,2) \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(1') = \left\langle \begin{array}{c} (2,1,1'), \\ (1,2,1'), (3,2,1') \\ (3,3,1') \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(2') = \left\langle \begin{array}{c} (1,1,2'), (2,1,2'), (3,1,2') \\ (1,2,2'), (2,2,2'), (3,2,2') \\ (1,3,2'), (2,3,2'), (3,3,2') \end{array} \right\rangle$$

Obsérvese que algunos arcos que pertenecen a  $IJKJ$  no pertenecen a  $IJK'J$ , luego el costo asociado a estos arcos en la red  $N(IJKJ)$  es igual a 3.

Nuevamente estamos en condiciones de construir la red  $N(IJKJ)$  para las columnas admisibles de la 2da. iteración. Esta red como la solución óptima al problema (P'R) asociado se muestra en la fig. 3.X.a). En esta figura es útil comentar dos aspectos:

1] Todos los arcos pertenecientes al conjunto  $IJKJ$  de la 1era. iteración han modificado su costo en esta nueva red  $N(IJKJ)$ . El cambio ha sido de dos a tres.

2] El arco  $(2,3,1)$  que había sido saturado en la 1era. iteración ha quedado vacío en la actual red  $N(IJKJ)$ . En términos del problema (P'R) se tiene:

$$(2,3,1) \in IJKJ, (2,3,1') \in IJK'J \text{ y la restricción}$$

$$f(2,3,1) + x(2,3,1) + y(2,3,1|a) = b(2,3,1)$$

$$\implies y(2,3,1|a) = b(2,3,1).$$

Al igual que en la iteración 1, el lector puede visualizar en forma paralela a la solución óptima de (P'R), el avance que ha obtenido el problema (P') en la red  $N$ . Ver fig. 3.X.b) en donde los arcos trazados corresponden a columnas flujo admisibles en la red  $N(IJKJ)$  de la fig. 3.X.a).

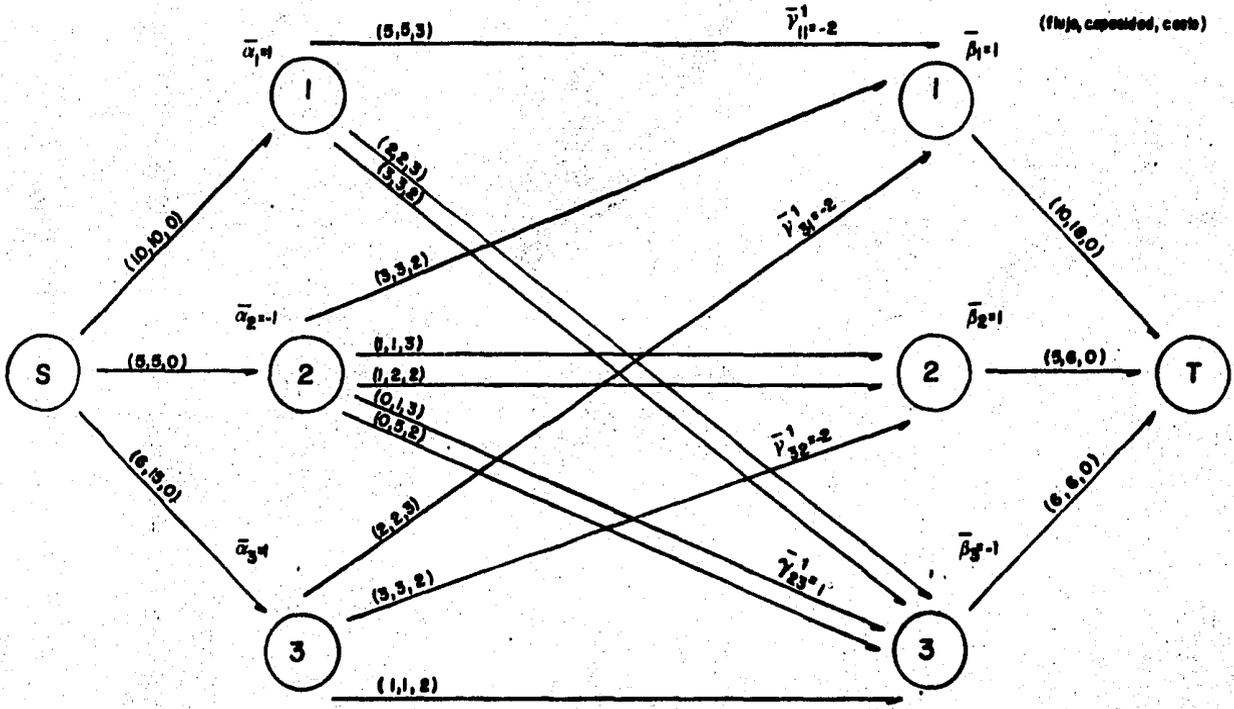


Figura 3x a) ilustración de la red  $W(K)$  asociada a la solución  $(P)$  factible de la 2da. iteración. La solución óptima tanto del problema  $(P^R)$  como de  $(DP^R)$  se incluyen en la misma red.

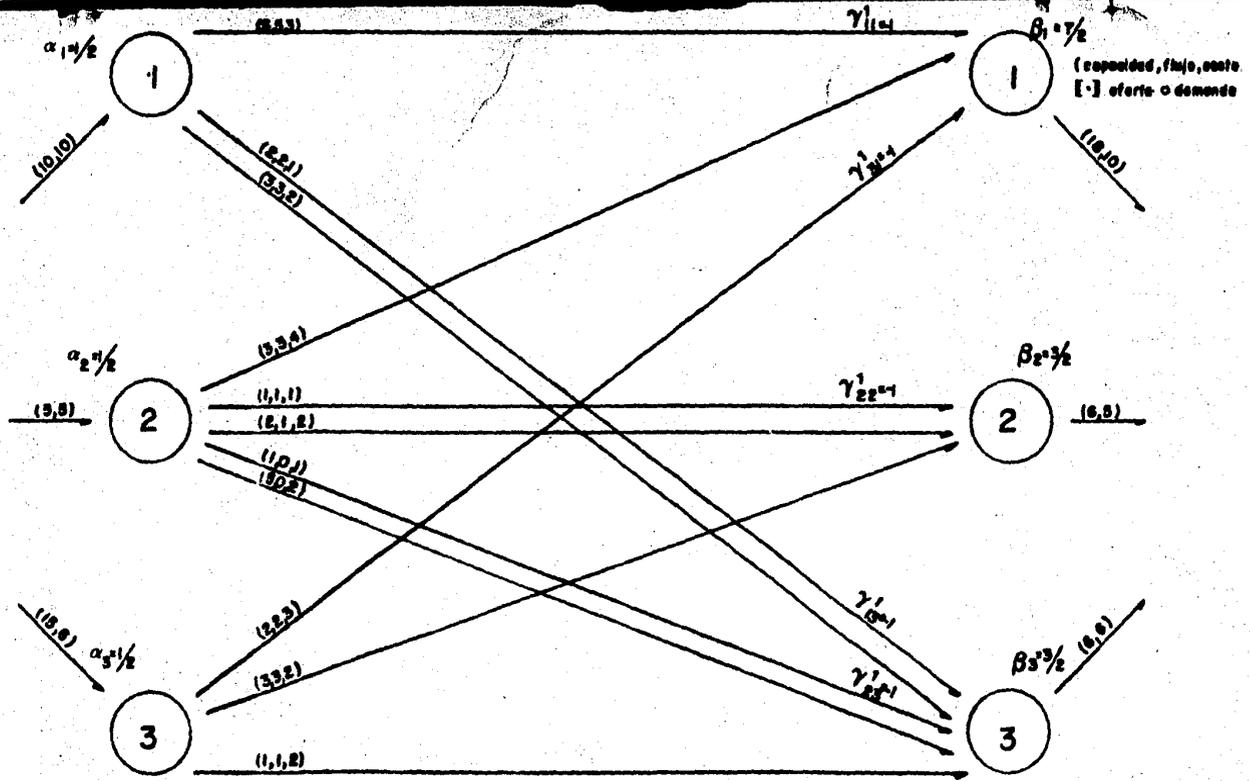


figura 3. x. b) estado de la red  $N$  después de la  $2a.$  iteración del AP-0  
 adicionalmente se localiza la solución ( $v$ ) factible que inicia  
 esta iteración.

Usando (3.4.1):

$$\zeta = \begin{cases} | 30 + 30 + (5+2+1+1+2) \\ | -2(3+3+1+0+3+1) -3(5+2+1+0+2) \end{cases}$$

$$= 60 + 11 -2(11) -3(10)$$

$$= 19 \quad (3.4.16)$$

Luego,  $\zeta > 0$  y es necesario conocer la solución óptima de (DP'R) para así poder modificar la solución al problema (D') en tal forma que se admita al menos una nueva variable en el problema (P').

Siguiendo la idea de la iteración 1, la solución óptima a (DP'R) es la siguiente:

$$\bar{\alpha} = ( 1, -1, 1 ) \quad (3.4.17)$$

$$\bar{\beta} = ( 1, 1, -1 ) \quad (3.4.18)$$

$$\bar{\gamma}(1) = ( -2, 0, 0, 0, 0, 1, -2, -2, 0 ) \quad (3.4.19)$$

$$\bar{\gamma}(2) \equiv 0 \quad (3.4.20)$$

Ver fig. 3.X.a).

El lector interesado puede verificar exhaustivamente (DP'R)-factibilidad. Esto es, checar las restricciones (3.3.16),..., (3.3.21) tomando el conjunto de columnas admisibles descrito al inicio de la iteración. Por nuestra parte, sólo verificamos que el costo en la f. o. de la solución dada es igual al indicado en (3.4.16).

$$\begin{aligned}
 \omega &= (10-5+15) + (18+6-6) + (5(-2)+1(1)+2(-2)+3(-2)) \\
 &= 20 + 18 + (1 - 20) \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

(3.4.21) INSTITUTO DE INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS

Prosiguiendo con los pasos 3J y 4J del AP-D, se lista a continuación el conjunto de columnas no admisibles.

$$IJ(1)^c = \{ (1,2,1) \}$$

$$IJ(2)^c = \left\langle \begin{array}{c} | (1,1,2), (2,1,2), (3,1,2) | \\ | (1,2,2), (3,2,2) | \\ | (3,3,2) | \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(1')^c = \left\langle \begin{array}{c} | (1,1,1'), (3,1,1') | \\ | (2,2,1'), | \\ | (1,3,1'), (2,3,1') | \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(2')^c = \emptyset$$

$$(1,2,1) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(2) + \bar{\gamma}(1,2,1) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(1,1,2) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(1) + \bar{\gamma}(1,1,2) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(1,2,2) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(2) + \bar{\gamma}(1,2,2) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(2,1,2) \approx \bar{\alpha}(2) + \bar{\beta}(1) + \bar{\gamma}(2,1,2) = -1+1+0 = 0$$

$$(3,1,2) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(1) + \bar{\gamma}(3,1,2) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(3,2,2) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(2) + \bar{\gamma}(3,2,2) = 1+1+0 = 2 > 0$$

$$(3,3,2) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(3) + \bar{\gamma}(3,3,2) = 1-1+0 = 0$$

$$(1,1,1') \approx \bar{\gamma}(1,1,1) = -2$$

$$(1,3,1') \approx \bar{\gamma}(1,3,1) = 0$$

$$(2,2,1') \approx \bar{\gamma}(2,2,1) = 0$$

$$(2,3,1') \approx \bar{\gamma}(2,3,1) = 1$$

$$(3, 1, 1') \approx \bar{\gamma}(3, 1, 1) = -2$$

Luego, el máximo valor de  $\theta$  viene dado por:

$$\theta = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{4 - (1/2 + 3/2 + 0)}{2} \\ \dots \\ \frac{6 - (1/2 + 7/2 + 0)}{2}, \quad \frac{5 - (1/2 + 7/2 + 0)}{2} \\ \frac{5 - (1/2 + 3/2 + 0)}{2}, \quad \frac{6 - (1/2 + 3/2 + 0)}{2} \\ \dots \\ \frac{0 - (-1)}{1} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{IJ}(1)^c \\ \\ \\ \text{IJ}(2)^c \\ \\ \text{IJ}(1')^c \end{array}$$

De donde,  $\theta = 1/2$  y la nueva solución (D')-factible es:

$$Y = \left( \begin{array}{l} \alpha + 1/2 \bar{\alpha} \\ \beta + 1/2 \bar{\beta} \\ \gamma(1) + 1/2 \bar{\gamma}(1) \\ \gamma(2) + 1/2 \bar{\gamma}(2) \end{array} \right.$$

donde:

$\alpha, \beta, \gamma(1), \gamma(2)$  son los vectores indicados en (3.4.12), ..., (3.4.15) y  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}(1), \bar{\gamma}(2)$  son los vectores indicados en (3.4.17), ..., (3.4.20), respectivamente.

Si se denota por  $(\alpha, \beta, \gamma(1), \gamma(2))$  a la nueva solución dual se tiene:

$$\alpha = (1/2, 1/2, 1/2) + 1/2(1, -1, 1)$$

$$\beta = (7/2, 3/2, 3/2) + 1/2(1, 1, -1)$$

$$\gamma(1) = \left( \begin{array}{l} (-1, 0, -1, 0, -1, -1, -1, 0, 0) \\ + 1/2 (-2, 0, 0, 0, 0, 1, -2, -2, 0) \end{array} \right)$$

$$\gamma(2) \equiv 0 + 1/2 \cdot 0$$

1.e

$$\alpha = (1, 0, 1) \quad (3.4.22)$$

$$\beta = (4, 2, 1) \quad (3.4.23)$$

$$\gamma(1) = (-2, 0, -1, 0, -1, -1/2, -2, -1, 0) \quad (3.4.24)$$

$$\gamma(2) \equiv 0 \quad (3.4.25)$$

En este punto comienza una nueva iteración del AP-D.

### Iteración 3

Dada la solución (D')-factible mostrada en (3.4.22), ..., (3.4.25). Ver fig. 3.XI.b). El nuevo conjunto de columnas admisibles es:

$$IJ(1) = \left( \begin{array}{l} (1,1,1), (2,1,1), (3,1,1) \\ (2,2,1), (3,2,1) \\ (1,3,1), (3,3,1) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 IJ(2) &= \left\langle \begin{array}{c} (3,1,2) \\ (2,2,2), \\ (1,3,2), \end{array} \right\rangle \\
 IJ(1') &= \left\langle \begin{array}{c} (2,1,1'), \\ (1,2,1'), \\ (3,3,1') \end{array} \right\rangle \\
 IJ(2') &= \left\langle \begin{array}{c} (1,1,2'), (2,1,2'), (3,1,2') \\ (1,2,2'), (2,2,2'), (3,2,2') \\ (1,3,2'), (2,3,2'), (3,3,2') \end{array} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Se está entonces en condiciones de construir la red  $N(IJ[K])$ . Dicha red como la solución óptima al problema (P"R) asociado se muestran en la fig. 3.XI.a). En esta figura es necesario comentar que el arco  $(2,3,1)$  ha dejado de existir, esto es  $(2,3,1) \notin IJ[K]$  y más aun  $(2,3,1') \notin IJ[K']$ .

A partir de la solución óptima de (P"R), el lector puede visualizar en la red  $N$  el avance que ha tenido el problema (P'). Ver fig. 3.XI.b), donde los arcos trazados corresponden a columnas flujo admisibles de la red  $N(IJ[K])$  de la fig. 3.XI.a).

Usando (3.4.1)

$$\begin{aligned}
 \int &= \left\langle \begin{array}{l} 30 + 30 + (5+2+1+1+2+3) \\ -2(3+2+2+9+1) -3(5+2+1+2+3) \end{array} \right\rangle \\
 &= 30 + 30 + 14 - 34 - 39 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

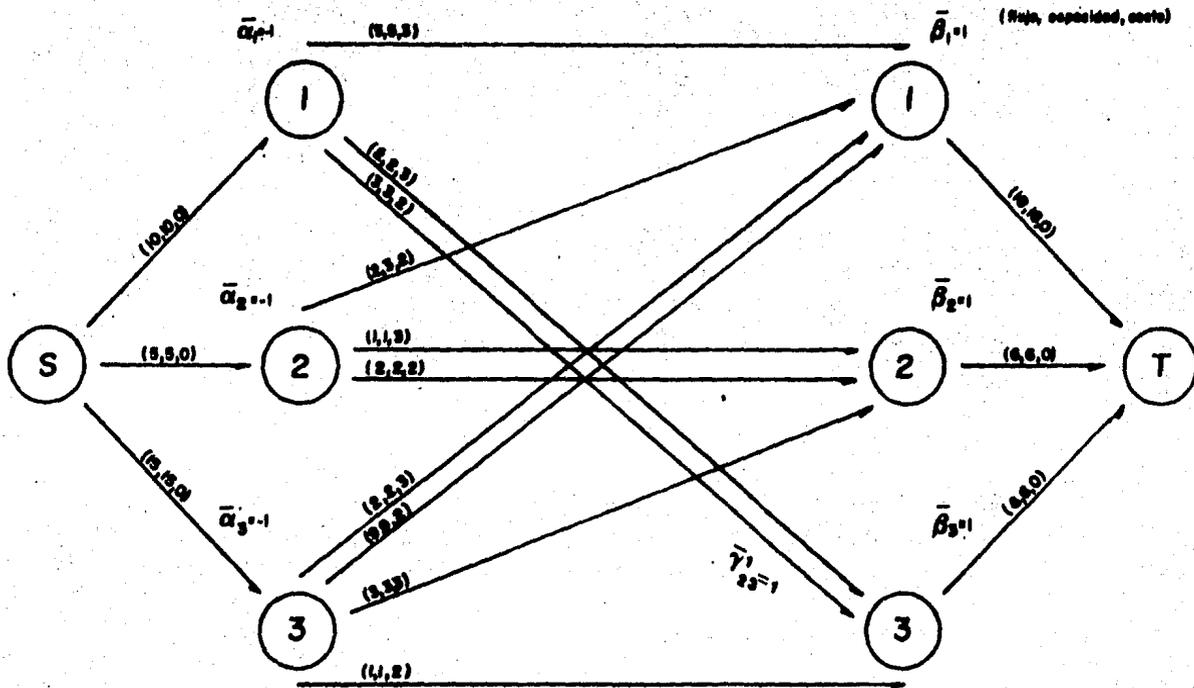


Figura 3.11a) Ilustración de la red  $N(N, K)$  asociada a la solución (D) factible de la 3<sup>era</sup> iteración. La solución óptima tanto del problema (P<sup>1</sup>) como de (OP<sup>1</sup>) se incluyen en la misma red.

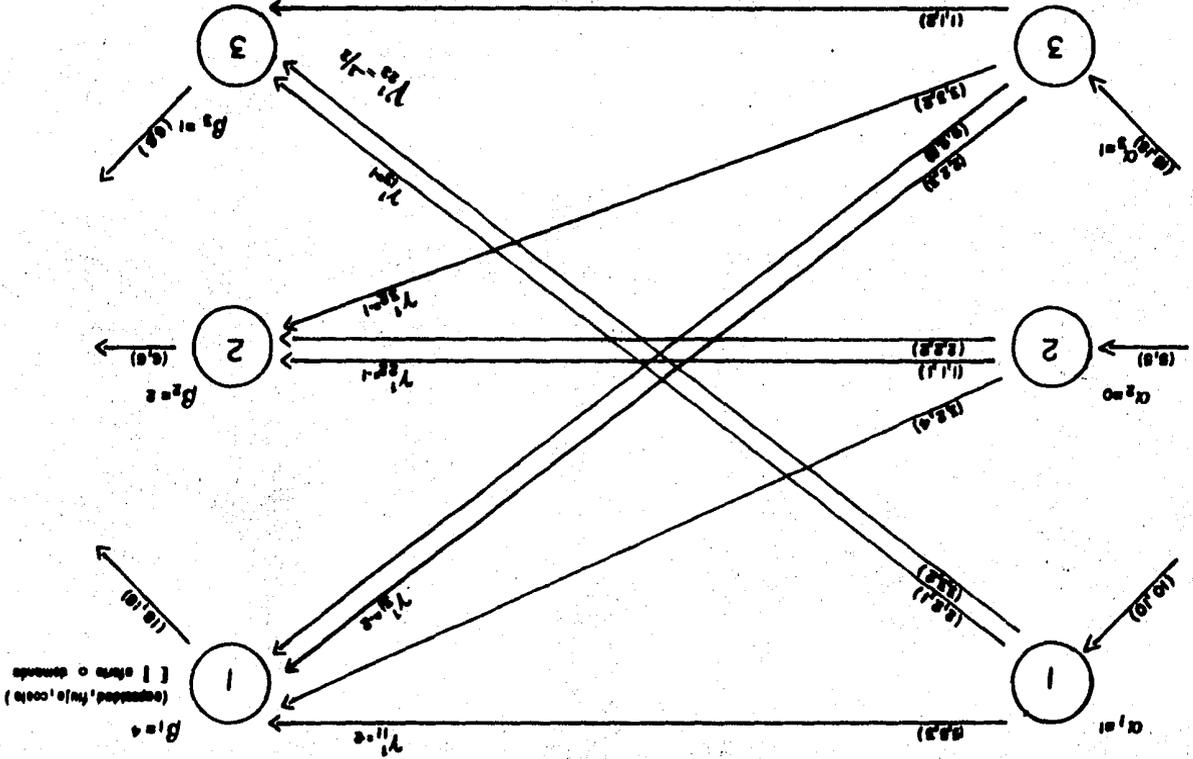


Figura 3 (X) b) Estado de la red N después de la 3era iteración del A.P.O. Observe el flujo que está saliendo ya es (P) factible para (P) factible. Adicionalmente se localiza la solución (P) factible que tiene esta iteración

Una pregunta interesante para el lector pudiera ser:

Por qué  $\zeta \neq 0$  si el flujo indicado en la fig.3.XI.b) ya forma una solución (P)-factible ?

Precisamente por ser todavía  $\zeta > 0$ , es necesario conocer la solución óptima de (DP'R).

Resolviendo (DP'R), v.g. usando la idea de la iteración 1, la solución óptima es:

$$\bar{x} = (-1, -1, -1) \quad (3.4.27)$$

$$\bar{y} = (1, 1, 1) \quad (3.4.28)$$

$$\bar{z}(1) = (0,0,0, 0,0,1, 0,0,0) \quad (3.4.29)$$

$$\bar{z}(2) \equiv 0 \quad (3.4.30)$$

Ver fig. 3.XI.a)

Al igual que en la iteración 2, el lector interesado puede verificar (DP'R)-factibilidad. Aquí sólo se verificará que el costo en la f. o. de la solución dada coincide con el indicado en (3.4.26)

$$\omega = (-10-5-15) + (18+6+6) + 1(1) = 1 \quad (3.4.31)$$

Al continuar con los pasos 3] y 4] del AP-D, se hace necesario listar el conjunto de columnas no admisibles. En este caso se tiene:

$$IJ(1) = \left( \begin{array}{c|c|c} c & & \\ \hline & (1,2,1), & \\ \hline & & (2,3,1) \\ \hline \end{array} \right)$$

$$IJ(2) \stackrel{c}{=} \left\langle \begin{array}{c} (1,1,2), (2,1,2), \\ (1,2,2), \quad (3,2,2) \\ (2,3,2), (3,3,2) \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(1') \stackrel{c}{=} \left\langle \begin{array}{c} (1,1,1'), \quad (3,1,1') \\ (2,2,1'), (3,2,1') \\ (1,3,1'), (2,3,1') \end{array} \right\rangle$$

$$IJ(2') \stackrel{c}{=} 0$$

$$(1,2,1) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(2) + \bar{\gamma}(1,2,1) = -1+1+0 = 0$$

$$(2,3,1) \approx \bar{\alpha}(2) + \bar{\beta}(3) + \bar{\gamma}(2,3,1) = -1+1+1 = 1 > 0$$

$$(1,1,2) \approx \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(1) + \bar{\gamma}(1,1,2) = -1+1+0 = 0$$

$$\vdots$$

$$(3,3,2) \approx \bar{\alpha}(3) + \bar{\beta}(3) + \bar{\gamma}(3,3,2) = -1+1+0 = 0$$

$$(1,1,1') \approx \bar{\gamma}(1,1,1) = 0$$

$$\vdots$$

$$(2,3,1') \approx \bar{\gamma}(2,3,1) = 1$$

$$\vdots$$

$$(3,2,1') \approx \bar{\gamma}(3,2,1) = 0$$

luego, el máximo valor de  $\theta$  viene dado por:

$$\theta = \min \left\langle \begin{array}{c} | 1-(0+1-1/2) \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} | 0-(-1/2) \\ 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\theta = 1/2$$

De donde la nueva solución (D')-factible es:

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha + 1/2 \bar{\alpha} \\ \beta + 1/2 \bar{\beta} \\ \gamma(1) + 1/2 \bar{\gamma}(1) \\ \gamma(2) + 1/2 \bar{\gamma}(2) \end{pmatrix}$$

Donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma(1)$ ,  $\gamma(2)$  son los vectores indicados en (3.4.22), ..., (3.4.25) y  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}(1)$ ,  $\bar{\gamma}(2)$  los vectores indicados en (3.4.27), ..., (3.4.30), respectivamente.

Como el lector puede notar, los cocientes sobre los que se determinó el valor de  $\theta$  son los asociados con las variables  $f(2,3,1)$  y  $x(2,3,1)$ . Luego, en la próxima iteración ambas variables reaparecerán en las columnas admisibles de la nueva solución dual. En particular, el arco (2,3,1) aparecerá en la próxima red  $N(IJ[K])$  con un costo igual a 2.

Si se denota por  $(\alpha, \beta, \gamma(1), \gamma(2))$  a la nueva solución dual se tiene:

$$\alpha = (1, 0, 1) + 1/2 (-1, -1, -1)$$

$$\beta = (4, 2, 1) + 1/2 (1, 1, 1)$$

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} (-2, 0, -1, 0, -1, -1/2, -2, -1, 0) + \\ 1/2 (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

$$\gamma(2) \equiv 0 + 1/2 0$$

i.e.

$$\alpha = ( 1/2, -1/2, 1/2 ) \quad (3.4.32)$$

$$\beta = ( 9/2, 5/2, 3/2 ) \quad (3.4.33)$$

$$\gamma(1) = ( -2, 0, -1, 0, -1, 0, -2, -1, 0 ) \quad (3.4.34)$$

$$\gamma(2) \equiv 0 \quad (3.4.35)$$

En este punto comienza una nueva iteración del AP-D.

#### Iteración 4

Dada la solución (D')-factible mostrada en (3.4.32), ..., (3.4.35). Ver fig. 3.XII.b). El nuevo conjunto de columnas admisibles es:

$$\begin{aligned}
 IJ(1) &= \left\langle \begin{array}{c} (1,1,1), (2,1,1), (3,1,1) \\ (2,2,1), (3,2,1) \\ (1,3,1), (2,3,1), (3,3,1) \end{array} \right\rangle \\
 IJ(2) &= \left\langle \begin{array}{c} (3,1,2) \\ (2,2,2) \\ (1,3,2) \end{array} \right\rangle \\
 IJ(1') &= \left\langle \begin{array}{c} (2,1,1'), \\ (1,2,1') \\ (2,3,1'), (3,3,1') \end{array} \right\rangle \\
 IJ(2') &= \left\langle \begin{array}{c} (1,1,2'), (2,1,2'), (3,1,2') \\ (1,2,2'), (2,2,2'), (3,2,2') \\ (1,3,2'), (2,3,2'), (3,3,2') \end{array} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Como era de esperar, las ternas (2,3,1) y (2,3,1') nuevamente forman parte del conjunto de columnas admisibles.

Estamos ahora en condiciones de construir la red N(IJIKJ). Tanto la red como la solución óptima al problema (P"R) asociado se muestran en la fig. 3.XII.a).

Usando (3.4.1) para conocer el valor de  $\zeta$  se tiene:

$$\begin{aligned} \zeta &= \begin{vmatrix} 30 + 30 + (5+2+1+2+3) \\ -2(3+2+2+0+9+1) - 3(5+2+1+2+3) \end{vmatrix} \\ &= 30 + 30 + 13 - 34 - 39 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo en la red N(IJIKJ) optimiza el problema (P'), luego el problema (P). Ver fig. 3.XII.b), en donde se han trazado sólo aquellos arcos pertenecientes a la red N(IJIKJ). Evidentemente, aquellos arcos que no aparecen en la red de la fig. 3.XII.b) tienen flujo igual a cero en la solución óptima de (P) o (P').

De esta manera, el AP-D ha convergido a la solución óptima del problema planteado en la red de la fig. 3.VIII.

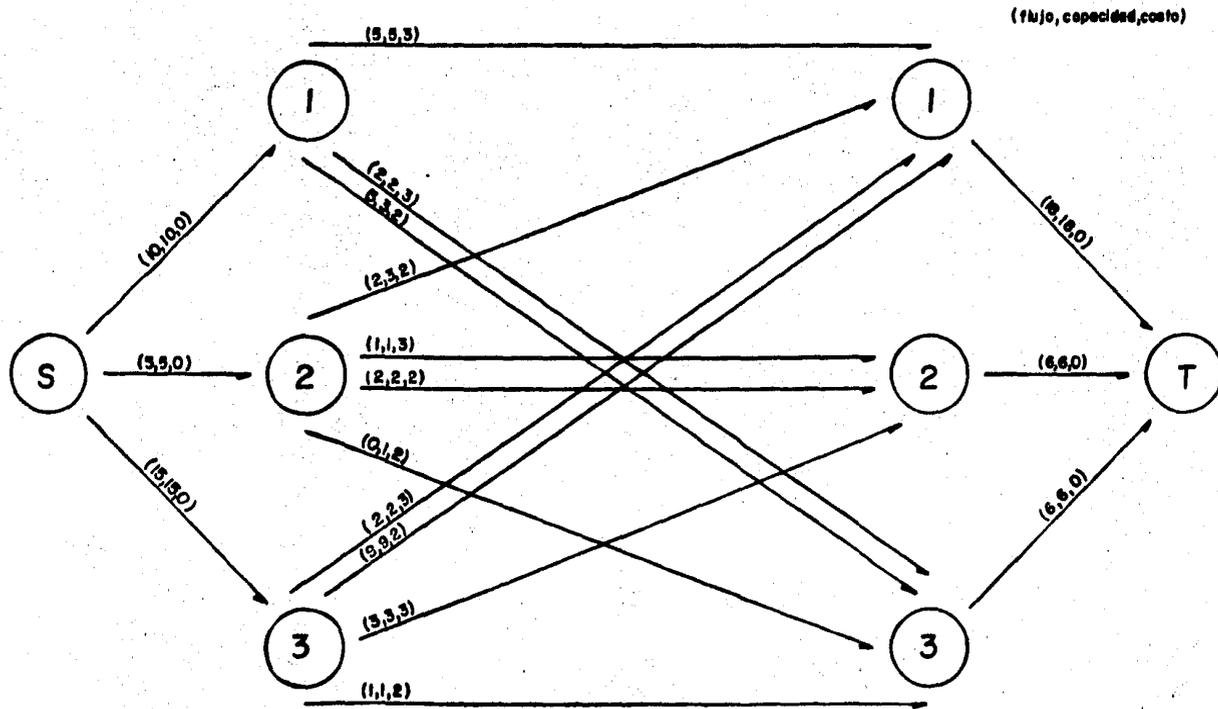


Figura 3.11 a) Ilustración de la red  $N(u, \kappa)$  asociada a la solución  $(\bar{v})$  factible de la 4<sup>ta</sup> iteración. La solución óptima tanto del problema  $(P^*N)$  como de  $(P^*N)$  se incluyen en la misma red. Observe el lector que la solución  $(P^*N)$  satisface (3.3.36) luego se ha obtenido la solución óptima de  $(P')$  luego de  $(P)$ .

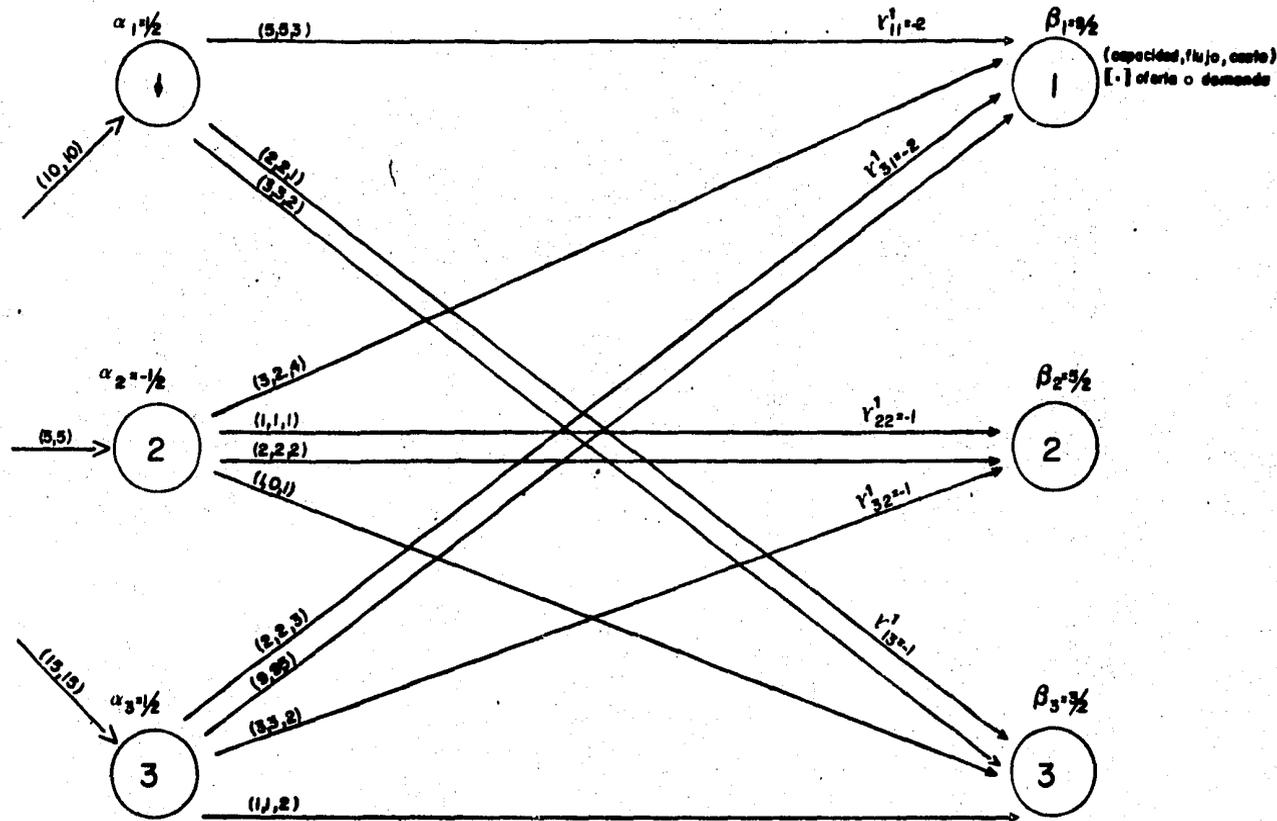


figura 3.XII.b) solución óptima al problema del transporte capacitado con arcos paralelos. también se ha colocado la solución óptima  $a^*$

## CAPITULO 4

### "ALGORITMO OUT OF KILTER"

El objetivo del presente capítulo es el estudio, desarrollo e implantación de un programa de computadora que permita resolver el problema general de flujos restringidos a costo mínimo mediante el algoritmo ideado por Ford y Fulkerson llamado algoritmo Out of Kilter (AOKK). Tanto los tiempos requeridos para la solución de nuestro problema en diferentes escenarios, como algunas ventajas que pueden ser tomadas de su propia estructura son descritos aquí mismo.

Ahora bien, por qué se escoge el AOKK ?

Existen algunas ventajas propias de este algoritmo para el cálculo de soluciones óptimas que le permiten ser más general que los desarrollos anteriores en al menos 4 puntos:

- 1] Tanto cotas inferiores como cotas superiores son asumidas para el flujo en  $c$ /arco.
- 2] El coeficiente de costo asociado a cualesquier arco es arbitrario en signo.
- 3] El algoritmo usa la idea de circulación más bien que la de un  $s$ - $t$  flujo. De esta manera, se hace innecesaria la presencia de un nodo fuente  $s$  o de un nodo pozo  $t$  y todos los nodos se pueden considerar de traspaso.
- 4] El AOOK puede ser iniciado con cualesquiera circulación (factible ó no). Adicionalmente, cualquier conjunto de números puede ser asignado a las variables del problema dual (potencia en  $c$ /uno de los nodos).

De hecho, 4] brinda la libertad de comenzar con cualesquiera circulación y potencial, en vez de comenzar con alguna solución particular que satisfaga ciertas propiedades de optimalidad, como ha sido el caso anterior. Tal vez sea esta la cualidad práctica más importante del AOOK.

Asimismo, en diferentes ocasiones uno está interesado en ver que cambios ocurrirán en la solución óptima cuando alguno de los datos dados se ha alterado. El AOOK está hecho a la medida para tales análisis, pues las soluciones óptimas de los problemas originales primal y dual pueden ser usadas para comenzar el nuevo problema, decrementando en gran medida el tiempo de cálculo.

Aún más, otra razón que valida la importancia práctica de este algoritmo radica en el hecho de que una buena cantidad de la literatura de programación lineal está destinada a su estudio y una variedad de aplicaciones están en su dominio. Así, por ejemplo, los problemas de transporte que involucran cientos de restricciones y miles de variables pueden ser resueltos eficientemente bajo esta metodología, mientras que para resolverlo como un PPL por el método simplex o alguna de sus variantes resulta una tarea "casi imposible", debido a las dimensiones del problema.

Para el lector interesado en una bibliografía más, extensa sobre el tema, se recomiendan los siguientes libros: [BJ,1981] CAP. X; [He,1978]; [Si,1966] CAP'S XIV, XV; [FF,1962] CAP. III. Adicionalmente, se recomienda [La,1976] CAP.IV, el cual da una presentación especialmente útil del AOOK para propósitos de enseñanza, al usar resultados de coloración en gráficas que hacen menos algebraico, y por lo tanto menos tedioso, el proceso para determinar la solución óptima.

El capítulo se desarrolla como sigue:

La sección 4.1 muestra un método general para la transformación de una red en una red circulatoria. Dicho método es aplicado en la red asociada al problema original.

En 4.2, se presenta un teorema sobre factibilidad de circulaciones que será de gran utilidad en el desarrollo formal del AOOK.

La sección 4.3 introduce el problema de circulación a costo mínimo. Se obtiene el problema dual y se establecen las condiciones de optimalidad; la notación y terminología propia del algoritmo también es presentada en esta sección.

Las siguientes tres secciones representan el núcleo en el estudio del AOOK. Así, 4.4 muestra la estrategia para determinar la solución óptima. Esto es, se analizan tanto la fase primal como la fase dual del algoritmo. La siguiente sección presenta el algoritmo completo. Por último, la sección 4.6 concluye el análisis al probar la validez y convergencia del AOOK.

A continuación, la sección 4.7 nos dirige a la estructura del problema original; se comenta tanto la transformación necesaria en el problema para su solución por medio del algoritmo, como el estado inicial que guardan los arcos al comienzo del método. Resultados y comparaciones del programa construido a través de diferentes escenarios de la red del sistema eléctrico nacional son también presentados en esta sección.

Adicionalmente, la sección 4.8 realiza en un plano teórico la adaptación del AOOK a la clase de problemas de flujo restringido a costo mínimo con las propiedades extras de ser las cotas inferiores iguales a cero y los costos por transporte mayores o

iguales a cero para cualesquier arco de la red (excepto el arco  $(t,s)$  construido de manera artificial para completar la circulación); peculiaridades encontradas en muchos problemas prácticos, v. gr. nuestro problema.

Si bien, los resultados de la adaptación no han sido implantados mediante un programa de computadora, fundamentalmente por razones del tiempo establecido para el desarrollo de esta tesis, la simplificación exhibida permite aumentar las ventajas de este enfoque sobre cualesquier otro método exacto presentado anteriormente. Aún más, el mecanismo introducido por la modificación del AOOK en la solución de esta nueva clase de problemas, es de hecho similar al proporcionado por el algoritmo alfabeta en el problema del transporte y dará la pauta para que en el siguiente capítulo se conjeturen las deficiencias de la implantación del AP-D en nuestro problema (recuérdese el capítulo 3).

#### 4.1 TRANSFORMACION DE UNA RED DE FLUJOS EN UNA RED CIRCULATORIA

A continuación, se muestra un método general para transformar una red con varios nodos fuente (nodos tales que su flujo externo es positivo) y varios nodos pozo (nodos tales que su flujo externo es negativo) en una red circulatoria.

Considérese, por ejemplo, la red de la figura siguiente, donde  $s_1, s_2$  son nodos fuente y  $t_1, t_2, t_3$  son nodos pozo. El resto de los nodos son tales que su flujo externo es cero. Implícitamente se supone que todo arco posee un vector con parámetros asociados.

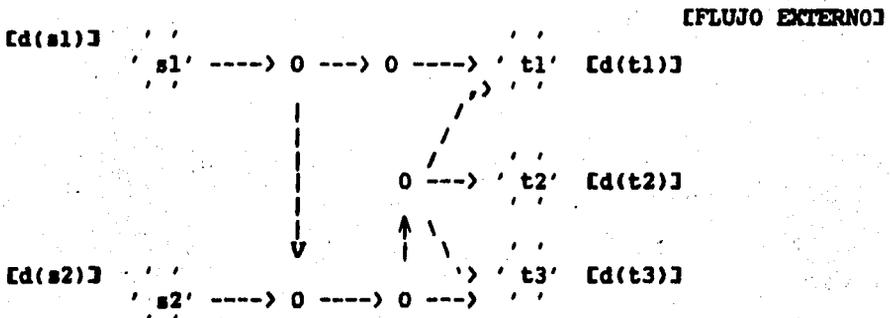
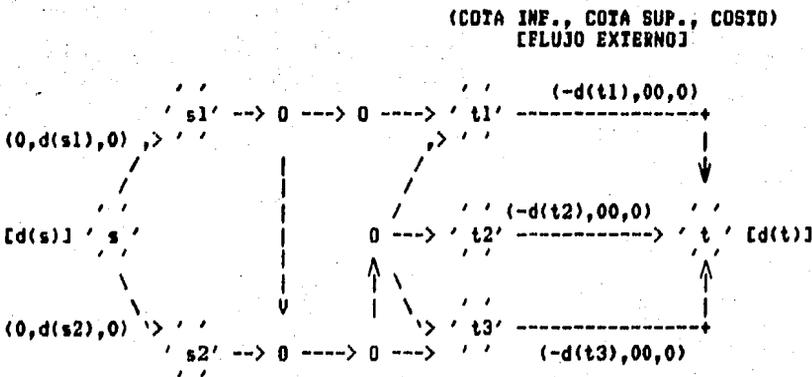


FIG. 4.1 RED CON FUENTES Y DESTINOS MÚLTIPLES

Una forma de convertir la red anterior a una red circulatoria es la siguiente:

Primeramente se construye una red equivalente con un nodo superfuente y un nodo superpozo. Esto se construye adicionando un nodo artificial  $s$  unido a los nodos fuente originales por los arcos  $(s, s_1)$  y  $(s, s_2)$  con costo cero, capacidad mínima cero y capacidad máxima igual a  $d(s_1)$ ,  $d(s_2)$  respectivamente. Análogamente, se construye un nodo pozo artificial  $t$ , unido a los nodos pozo originales por los arco  $(t_1, t)$ ,  $(t_2, t)$ ,  $(t_3, t)$  con costo cero, capacidad máxima infinita y capacidad mínima igual a  $-d(t_1)$ ,  $-d(t_2)$ ,  $-d(t_3)$  respectivamente.

De esta forma, los nodos fuente y pozo originales cambian su flujo externo, positivo o negativo, a cero. El resto de arcos y nodos permanece con sus parámetros asociados tal y como en la red original. Gráficamente se muestra en la siguiente figura.



donde  $d(s) = d(s_1) + d(s_2)$  y  $d(t) = d(t_1) + d(t_2) + d(t_3)$

FIG. 4.II INTRODUCCION DE NODOS Y ARCOS ARTIFICIALES

Finalmente, para convertir la red anterior (con un sólo nodo fuente y un sólo nodo pozo), a una red circulatoria, basta con agregar un arco  $(t, s)$ , que una el nodo superpozo con el nodo superfuente. Este arco tendría:

- Un costo cero o negativo, para obligar a la circulación de flujo.
- Capacidad mínima ( máxima ) dada por  $-d(t)$  (  $d(s)$  ), según la notación de la fig. 4.II.

Ahora bien, si la capacidad máxima es menor que la capacidad mínima el problema original no tiene solución factible.

Gráficamente se tiene:

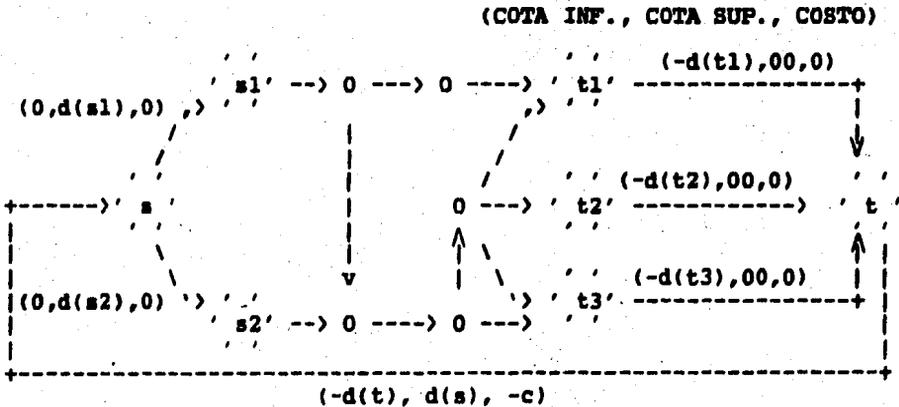


FIG. 4.III RED CIRCULATORIA ASOCIADA

## 4.1.1 TRANSFORMACION DE LA RED ASOCIADA A NUESTRO

## PROBLEMA EN UNA RED CIRCULATORIA

Considérese la red de la fig. 2.IX. Como el lector puede apreciar, una vez aplicado el método desarrollado en 4.1, la red circulatoria obtenida tiene el aspecto de la fig. 4.IV.

En particular, obsérvese que las capacidades superior e inferior en el arco  $(t, s)$  son iguales. De esta manera queda fielmente representado que el flujo deseado en la fig. 2.IX sea de un determinado valor, a saber  $\sum_p e'(p)$ .

(cota inf. cota sup. costo)

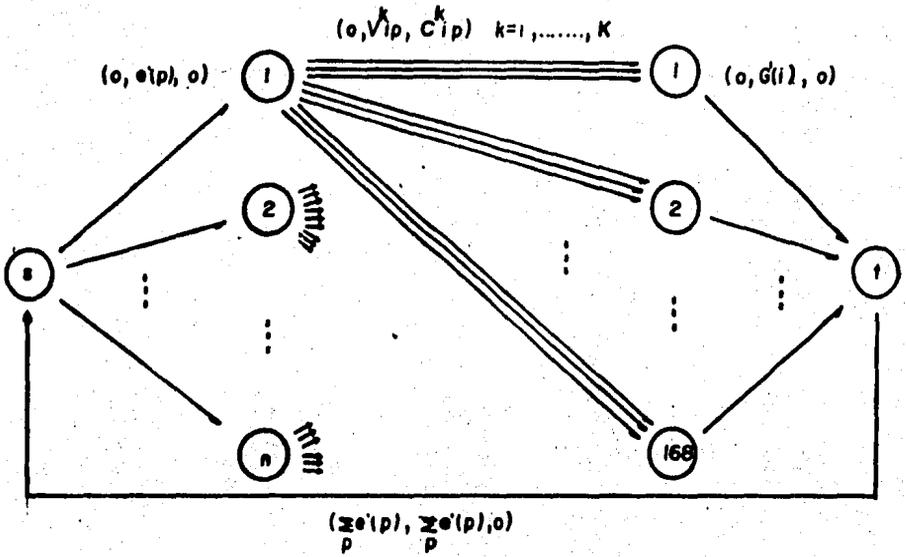


figura 4.14 Red circulatoria asociada a nuestro problema

## 4.2 RESULTADOS SOBRE CIRCULACION

En algunos problemas de flujo en redes es útil enfocar el problema de infactibilidad a través del estudio de circulaciones.

Una circulación es simplemente un flujo en una red en la cual las condiciones de conservación son satisfechas en todos los nodos, i.e. no se puede distinguir la presencia de un nodo fuente o nodo pozo como en otros problemas. (v. gr. flujo máximo).

Un método para encontrar una circulación factible en una red circulatoria con cotas superiores ( $b(i,j)$ ) e inferiores ( $a(i,j)$ ) es el siguiente:

- 1] Comience con la circulación cero, i.e.  $f = f(i,j) = 0$ .
- 2] Todas las cotas inferiores son satisfechas ?
  - 2.1] Si. La circulación es factible. Fin.
  - 2.2] No. Vea a 3].
- 3] Considérese un arco  $(p,q) \rightarrow f(p,q) < a(p,q)$ . Constrúyase una cadena de flujo aumentante de  $q$  a  $p$ , donde esta trayectoria es del tipo convencional excepto que se requiere  $f(i,j) > a(i,j)$  para todo arco dirigido hacia atrás y  $\theta$  es escogido de tal forma que  $\theta \leq f(i,j) - a(i,j)$ .  
Si dicha cadena puede ser construida, vaya a 4].

En caso contrario el problema es infactible. Fin.

4] Aumente el flujo de  $q$  a  $p$  por  $\theta$ . Ve a 2].

Finalmente una circulación factible se obtiene, si la red admite tal circulación.

Pero suponga que en algún momento una cadena aumentante no puede ser encontrada. Más formalmente:

Sea  $(t,s)$  con  $f(t,s) < a(t,s)$  el arco para el cual la cadena aumentante no puede ser encontrada y denominemos por  $S$  el conjunto de nodos que pueden ser alcanzados desde  $s$  por una cadena aumentante,  $T$  su complemento.

Obsérvese que  $s \in S$  y  $t \in T$ , de donde  $S$  y  $T$  no pueden ser conjunto vacíos. Se tienen dos casos (ver fig. 4.V.):

1]  $V(i,j)$  dirigido de  $S$  a  $T$ ,  $f(i,j) = b(i,j)$

2]  $V(i,j)$  dirigido de  $T$  a  $S$ ,  $f(i,j) \leq a(i,j)$

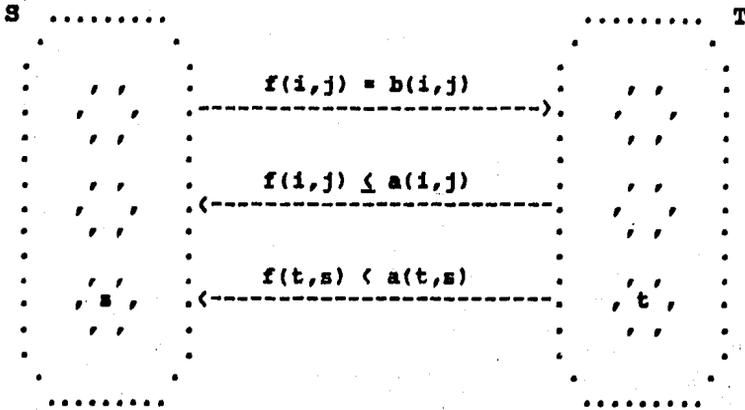


FIG. 4.V INFACIBILIDAD DE CIRCULACION

Considérese la cortadura (S,T)

$$\sum_{i \in S, j \in T} f(i,j) = \sum_{i \in T, j \in S} f(i,j) \quad (4.2.1)$$

Pero observese que:

$$\sum_{i \in S, j \in T} f(i,j) = \sum_{i \in S, j \in T} b(i,j) \quad (4.2.2)$$

y

$$\sum_{i \in T, j \in S} f(i,j) < \sum_{i \in T, j \in S} a(i,j) \quad (4.2.3)$$

(la desigualdad es estricta por el mismo arco (t,s)).

De esta manera se ha construido una cortadura (S,T) para la cual:

$$\sum_{i \in S, j \in T} b(i,j) < \sum_{i \in T, j \in S} a(i,j) \quad (4.2.4)$$

Hemos probado el siguiente teorema.

-----

**TEOREMA 4.1**

En una red con cotas inferiores y superiores una  
circulación factible existe si y sólo si

$$\sum_{i \in T, j \in S} a(i, j) \leq \sum_{i \in S, j \in T} b(i, j)$$

para todas las cortaduras (S,T).

-----

### 4.3 EL PROBLEMA DE CIRCULACION A COSTO MINIMO

El problema general que enfrentamos en esta sección, consiste en una red circulatoria en la cual los flujos permitidos en c/arco están sujetos a cotas superiores e inferiores, y donde, además, se tiene un costo asociado por unidad de flujo que pasa en c/arco. El objetivo que se persigue es determinar el flujo factible en la red que proporcione el costo mínimo.

De manera más precisa, considere la red circulatoria  $N$  con gráfica asociada  $G = (V, A)$ .

$V(i, j) \in A$  denotemos por

$x(i, j)$  el flujo que recorre el arco  $(i, j)$

$a(i, j)$  el flujo mínimo permitido en el arco  $(i, j)$

$b(i, j)$  el flujo máximo permitido en el arco  $(i, j)$

$c(i, j)$  costo por unidad de flujo en el arco  $(i, j)$

Supongamos  $0 \leq a(i, j) \leq b(i, j) \leq \infty$

Se considera  $a(i, j), b(i, j), c(i, j)$  enteros

El problema de circulación a costo mínimo es:

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in A} c(i,j) x(i,j)$$

$$\text{(PCCM) s.c. } \sum_{(i,j) \in A} x(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} x(j,i) = 0, \quad i \in V$$

$$a(i,j) \leq x(i,j) \leq b(i,j) \quad (i,j) \in A$$

donde el vector de variables de decisión  $X=(x(i,j))$ , se denomina flujo de la red.

En este problema, se dice que un flujo que satisface las restricciones sobre los nodos, es una circulación o un flujo circulatorio. Una circulación que satisface todas las restricciones del problema, es una circulación factible. Por otra parte, una circulación factible que es una solución básica de las restricciones del problema de redes, se dice que es una circulación factible básica. Finalmente, una circulación factible,  $X=(x(i,j))$ , se dice que es entera, si para c/arco  $(i,j)$  el flujo, esto es  $x(i,j)$ , es cero o un número entero positivo. La misma terminología se aplica para el caso de flujos factibles básicos enteros.

Es conveniente señalar que una gran variedad de problemas prácticos pueden formularse en términos de una circulación a costo mínimo, v.gr. flujo máximo entre dos nodos, ruta más corta, transporte, distribución, etc. Es también necesario puntualizar que si los flujos mínimo y máximo permitidos en c/arco de la red son números enteros, entonces los flujos factibles básicos (y óptimos) son enteros. Esta propiedad de garantizar que las soluciones óptimas sean enteras, no es una propiedad general de los PPL's. Como consecuencia, es frecuente plantear problemas lineales cuyas soluciones deben ser enteras, en términos de redes. El lector interesado puede consultar [La,1976], Cap. IV, Secc. 12.

Una vez hechos los comentarios anteriores, a continuación se obtiene la formulación del problema dual a (PCCM), que se denotará por (DPCCM).

Si asociamos las variables  $u(i)$  con c/ecuación de conservación de flujo en nodos y las variables  $v(i,j)$ ,  $w(i,j)$  con las restricciones  $x(i,j) \geq a(i,j)$  y  $x(i,j) \leq b(i,j)$  ( $-x(i,j) \geq -b(i,j)$ ). El problema dual obtenido es el siguiente:

$$\text{Max } \sum_{(i,j) \in A} a(i,j) v(i,j) - b(i,j) w(i,j)$$

s.c.

$$u(i) - u(j) + v(i,j) - w(i,j) = c(i,j) \quad (i,j) \in A$$

$$(DPCCM) \quad v(i,j), w(i,j) \geq 0$$

$$u(i) \quad \text{s.r.s.}$$

El problema dual tiene una estructura interesante. Veamos:

Supóngase que se selecciona cualquier conjunto de las  $u(i)$ , se considera a través de todo el desarrollo que las  $u(i)$  son enteros.

Defínase  $\bar{c}(i,j)$ , denominado el costo relativo del arco  $(i,j)$

$$\bar{c}(i,j) = c(i,j) - u(i) + u(j) \quad (4.3.1)$$

Entonces la restricción dual para el arco  $(i,j) \in A$  resulta

$$v(i,j) - w(i,j) = c(i,j) - u(i) + u(j) = \bar{c}(i,j) \quad (4.3.2)$$

y puede ser satisfecha por

$$v(i,j) = \text{Max} \{0, \bar{c}(i,j)\} \quad (4.3.3)$$

$$w(i,j) = \text{Max} \{0, -\bar{c}(i,j)\} \quad (4.3.4)$$

Por lo tanto, dado cualquier conjunto de las  $u(i)$ , el problema dual siempre tiene una solución factible. De hecho, las selecciones anteriores de  $v(i,j)$ ,  $w(i,j)$  proporcionan los valores óptimos de  $v(i,j)$ ,  $w(i,j)$  para un conjunto fijo de las  $u(i)$ .

## LAS CONDICIONES DE HOLGURA COMPLEMENTARIA

En el problema de circulación a costo mínimo y su dual, se tiene que si  $X$  es un flujo circulatorio factible y  $(U,V,W)$  es un vector de variables duales factibles, entonces estas soluciones son óptimas en sus respectivos problemas si y sólo si se satisfacen las ecuaciones de holgura complementaria.

I.e. sean  $X, (U,V,W)$  vectores de variables primal y dual factibles respectivamente.

$X, (U,V,W)$  son óptimas si  $X, (U,V,W)$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\forall i \in V \quad u(i) \left[ \sum_{(i,j) \in A} x(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} x(j,i) \right] = 0 \quad (4.3.5)$$

$$\forall (i,j) \in A \quad v(i,j) [x(i,j) - a(i,j)] = 0 \quad (4.3.6)$$

$$\forall (i,j) \in A \quad w(i,j) [b(i,j) - x(i,j)] = 0 \quad (4.3.7)$$

$$\forall (i,j) \in A \quad x(i,j) [c(i,j) - u(i) + u(j) - v(i,j) + w(i,j)] = 0 \quad (4.3.8)$$

Obsérvese que la familia de ecuaciones (4.3.5) se satisface para toda circulación factible por la propiedad de conservación de flujo en la red. Asimismo, la familia (4.3.8) se satisface para toda solución dual factible.

Por lo tanto, se puede decir que en el problema de circulación a costo mínimo y su dual, un par de soluciones primal-dual factibles son óptimas si y sólo si las familias de ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) son satisfechas, donde  $v(i,j)$  y  $w(i,j)$  son calculadas como indica (4.3.3) y (4.3.4).

Es sencillo verificar que estas condiciones de complementaridad son equivalentes a que se cumpla una de las condiciones siguientes para todo arco  $(i,j) \in A$ :

$$x(i,j) = a(i,j), w(i,j) = 0, v(i,j) = c(i,j) - u(i) + u(j) \geq 0 \quad (4.3.9)$$

$$x(i,j) = b(i,j), v(i,j) = 0, w(i,j) = -(c(i,j) - u(i) + u(j)) \geq 0 \quad (4.3.10)$$

$$a(i,j) < x(i,j) < b(i,j), v(i,j) = w(i,j) = c(i,j) - u(i) + u(j) = 0 \quad (4.3.11)$$

En resumen, se puede establecer que una circulación factible  $X=(x(i,j))$ , es óptima si y sólo si, existe un vector de potenciales  $U=(u(i))$  tal que para todo arco de la red se satisface algunos de los estados siguientes:

$$L : \bar{c}(i,j) > 0, x(i,j) = a(i,j) \quad (4.3.12)$$

$$B : \bar{c}(i,j) = 0, a(i,j) \leq x(i,j) \leq b(i,j) \quad (4.3.13)$$

$$K : \bar{c}(i,j) < 0 , x(i,j) = b(i,j) \quad (4.3.14)$$

El problema, entonces, radica en investigar que valores de  $u(i)$  y de  $x(i,j)$  satisfacen las tres condiciones anteriores.

Por otra parte, si el flujo circulatorio  $X$  y el vector de potenciales  $U$  no son óptimos, se tiene que algunos de sus arcos se encuentran en los estados siguientes:

$$L1: \bar{c}(i,j) > 0 , x(i,j) < a(i,j) \quad (4.3.15)$$

$$L2: \bar{c}(i,j) > 0 , x(i,j) > a(i,j) \quad (4.3.16)$$

$$B1: \bar{c}(i,j) = 0 , x(i,j) < a(i,j) \quad (4.3.17)$$

$$B2: \bar{c}(i,j) = 0 , x(i,j) > b(i,j) \quad (4.3.18)$$

$$K1: \bar{c}(i,j) < 0 , x(i,j) < b(i,j) \quad (4.3.19)$$

$$K2: \bar{c}(i,j) < 0 , x(i,j) > b(i,j) \quad (4.3.20)$$

Por definición, diremos que un arco  $(i,j)$ , se encuentra en estado conformable, si se haya en el estado  $L, B$  o  $K$ ; y en estado no conformable, si se haya en alguno de los estados  $L1, L2, \dots, K2$ .

Para aclarar ideas, considérese la red de la fig. 4.VI.a), que representa una red en donde se desea obtener una circulación de costo mínimo. Puede entonces seleccionarse un conjunto inicial de  $u(i)$ 's, v.gr.  $u(i)=0 \forall i \in V$ , y una circulación, v.gr.  $x(1,2) = x(1,3) = x(2,3) = 1$ ,  $x(3,4) = x(4,1) = 2$ .

Se puede entonces verificar optimalidad.

La fig. 4.VI.b) da  $\bar{c}(i,j)$ ,  $x(i,j)$ ,  $u(i)$  para la red de la fig. 4.VI.a). Claramente  $\bar{c}(i,j) = c(i,j)$ , por lo tanto:

$$\bar{c}(1,2)=2, \bar{c}(1,3)=5, \bar{c}(2,3)=-3, \bar{c}(3,4)=-1, \bar{c}(4,1)=0$$

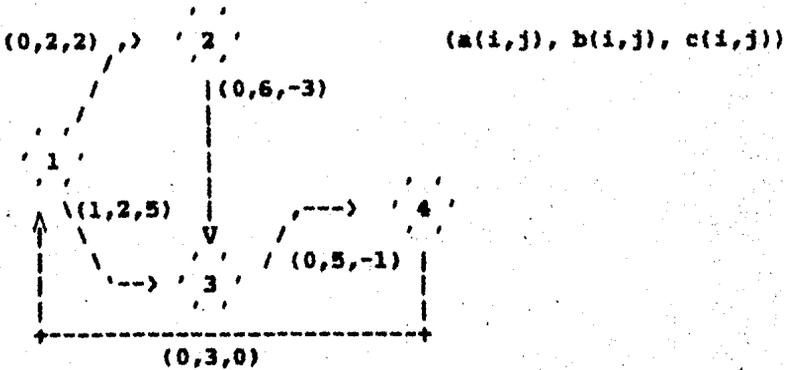


FIG. 4.VI.a) EJEMPLO DE UNA RED CIRCULATORIA

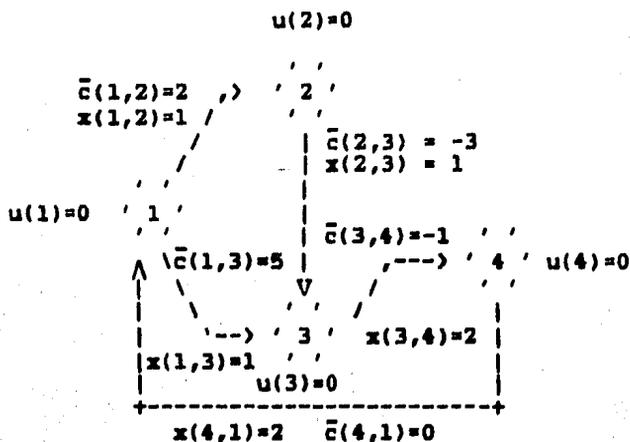


FIG. 4.VI.b) DATOS ASOCIADOS A LA RED CIRCULATORIA

Al checar optimalidad en las soluciones propuestas se tiene, por ejemplo, que:

- 1]  $\bar{c}(1,2)=2$  y  $x(1,2)=1 > 0 = a(1,2)$ , luego el arco (1,2) es no conformable, de hecho se encuentra en el estado L2.
- 2]  $\bar{c}(1,3)=5 > 0$  y  $x(1,3)=1 = a(1,3)$ , luego el arco (1,3) es conformable, de hecho se encuentra en el estado L.

Ahora bien, para hacer que el arco (1,2) sea conformable debe disminuirse  $x(1,2)$  o disminuirse  $\bar{c}(1,2)$  cambiando los  $u(i)$ . Esto es precisamente lo que intenta hacer el AOOK. Durante la fase primal del algoritmo, se modificarán los  $x(i,j)$  en un intento de hacer los arcos conformables; durante la fase dual, se cambiarán los  $u(i)$  en un intento de alcanzar conformabilidad.

En resumen, los estados conformables y no conformables para un arco  $(i, j)$  se sintetizan en el siguiente cuadro.

	$\bar{c}(i, j) < 0$	$\bar{c}(i, j) = 0$	$\bar{c}(i, j) > 0$
$x(i, j) < a(i, j)$	NC	NC	NC
$x(i, j) = a(i, j)$	NC	* C	C *
$a(i, j) < x(i, j) < b(i, j)$	NC	* C	* NC
$x(i, j) = b(i, j)$	* C	C *	NC
$x(i, j) > b(i, j)$	NC	NC	NC

donde C significa ser ARCO CONFORMABLE

" NC " " " " " NO " "

Obsérvese que mientras se cambia el flujo sobre el arco  $(i, j)$ , el arco se mueve hacia arriba o hacia abajo sobre una columna específica del cuadro anterior, dependiendo de que  $x(i, j)$  disminuya o aumente. En forma análoga, conforme se modifican los  $u(i)$ , el arco se mueve hacia atrás o hacia adelante a lo largo de un renglón. Una descripción gráfica de los estados de un arco se muestra en la fig. 4.VII, nótese que c/una de las celdas en el arreglo anterior corresponde a una región en la figura.

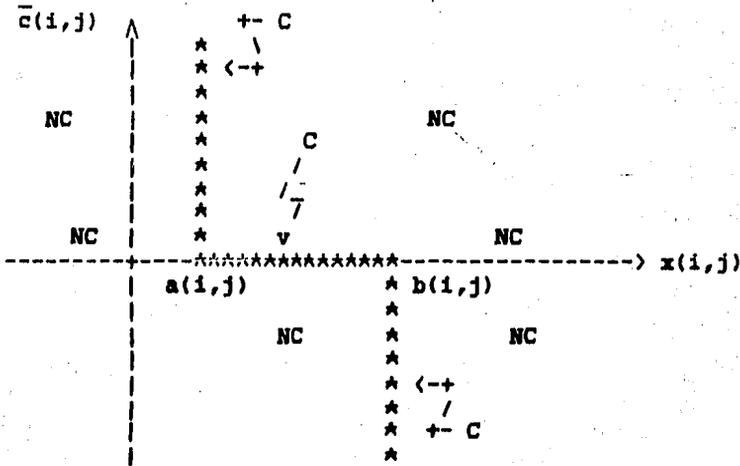


FIG. 4.VII LOS POSIBLES ESTADOS PARA UN ARCO

Ahora bien, para asegurar que el algoritmo convergerá, será necesario una medida de la "distancia" a la optimalidad. Si se puede construir un algoritmo que periódicamente, en un número finito de iteraciones, reduzca la distancia a la optimalidad, entonces el algoritmo convergerá finalmente (realmente es necesario un argumento más sólido acerca de la reducción de dicha distancia, sin embargo, como se verá más adelante, la reducción se hará en números enteros, de tal forma que no exista problema para la finitud).

Existen diferentes medidas de distancia para el AOOK. En particular, la fig. 4.VIII presenta  $V(i,j)$ EA una medida de distancia que llamaremos el número de Kilter,  $K(i,j)$ .

$K(i,j)$  se define como el minimo cambio de flujo requerido en el arco  $(i,j)$  para que sea conformable.

	$\bar{c}(i,j) < 0$	$\bar{c}(i,j) = 0$	$\bar{c}(i,j) > 0$
$x(i,j) < a(i,j)$	$ x(i,j) - b(i,j) $	$ x(i,j) - a(i,j) $	$ x(i,j) - a(i,j) $
$x(i,j) = a(i,j)$	$ x(i,j) - b(i,j) $	0	0
$a(i,j) < x(i,j) < b(i,j)$	$ x(i,j) - b(i,j) $	0	$ x(i,j) - a(i,j) $
$x(i,j) = b(i,j)$	0	0	$ x(i,j) - a(i,j) $
$x(i,j) > b(i,j)$	$ x(i,j) - b(i,j) $	$ x(i,j) - b(i,j) $	$ x(i,j) - a(i,j) $

FIG 4.VIII CUADRO PARA EL CALCULO DEL NUMERO DE KILTER

Una vez que hemos asignado el número de Kilter como una medida de la distancia, surgen de manera natural los siguientes resultados:

1)  $K(i,j) \geq 0 \quad V(i,j) \in A$

2)  $K(i,j) = 0 \iff (i,j) \in A$  se encuentra en estado conformable

3)  $K(i,j) > 0 \iff (i,j) \in A$  se encuentra en estado no conformable

En la fig. 4.IX se ilustran gráficamente los números de Kilter para un arco.

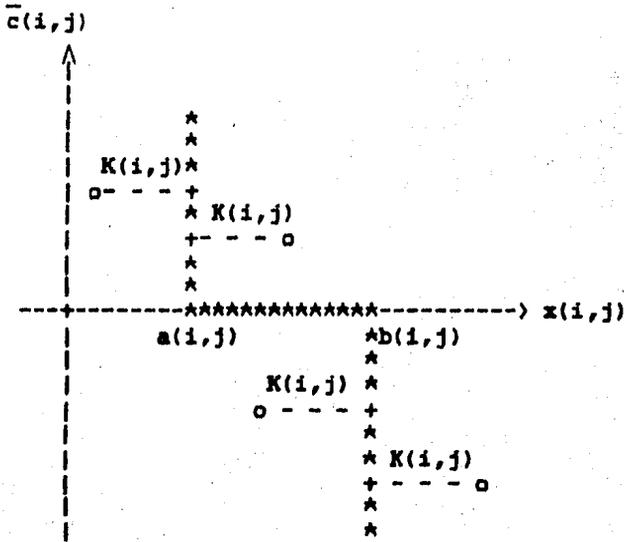


FIG. 4.IX ILUSTRACION GRAFICA DEL NUMERO DE KILTER

Obsérvese que si  $\bar{c}(i,j) > 0$ , entonces el arco  $(i,j)$  es conformable sólo si el flujo es igual a  $a(i,j)$  y, por lo tanto, el número de Kilter  $|x(i,j) - a(i,j)|$  indica que tan alejado está el flujo actual  $x(i,j)$  del caso ideal  $a(i,j)$ . De igual manera, si  $\bar{c}(i,j) < 0$ , el número de Kilter  $|x(i,j) - b(i,j)|$  da la distancia de  $x(i,j)$  al flujo ideal  $b(i,j)$ . Finalmente, si  $\bar{c}(i,j) = 0$ , entonces el arco es conformable si y sólo si  $a(i,j) \leq x(i,j) \leq b(i,j)$ . En particular, si  $x(i,j) > b(i,j)$ , entonces el arco se hace conformable si el flujo se disminuye en la cantidad  $|x(i,j) - b(i,j)|$ , y si  $x(i,j) < a(i,j)$ , entonces el arco se hace conformable si el flujo se incrementa en  $|x(i,j) - a(i,j)|$ , y de aquí se obtienen las componentes en la

fig's. 4.VIII y 4.IX.

Un método para asegurar la convergencia finita del AOOK, y que de hecho será usado en las siguientes secciones, consiste en probar lo siguiente:

- a) El número de Kilter asociado a un arco nunca se incrementa.
- b) En un número finito de iteraciones, el número de Kilter de un arco es disminuido en un número entero.

#### 4.4 ESTRATEGIA DEL ALGORITMO OUT OF KILTER

El AOOK es parecido al AP-D, en el sentido de que empieza con factibilidad dual pero no necesariamente con factibilidad primal e itera entre problemas primales y duales hasta alcanzar optimalidad. Sin embargo, difiere del AP-D, interpretado estrictamente, en que el AOOK no siempre mantiene holgura complementaria. Por lo tanto, se puede ver como una generalización del AP-D para problemas de flujo en redes.

Los pasos generales del AOOK son:

- 1] Considere una circulación, no necesariamente factible, v.gr.  $x(i,j)=0 \forall (i,j) \in A$ , y una solución dual factible, p.e.  $u(i)=0$ , con  $v(i,j)$  y  $w(i,j)$  definidos como en (4.3.3) y (4.3.4).

Se identifican los estados conformables y se calculan los números de Kilter.

- 2] Si la red tiene un arco no conformable, comienza la fase primal del algoritmo, durante la cual se selecciona un arco no conformable y se intenta construir un nuevo flujo circulatorio de tal forma que el número de Kilter de cualesquiera arco no aumente y que disminuya el número de Kilter del arco seleccionado. En particular, los arcos conformables deberán permanecer tal cual.

- 3] Cuando se determina que no se puede construir una circulación mejor en la fase primal, el algoritmo pasa a su fase dual en la cual construye una nueva solución dual de forma que no aumente ningún número de Kilter y se repite el paso 2].
- 4] Iterando entre 2] y 3], el algoritmo construirá una solución óptima, o bien, determina que no existe una solución factible.

Un comentario más extenso sobre la fase primal y dual del A00K se presenta a continuación:

#### FASE PRIMAL, CAMBIOS DE FLUJO

Considérese, por ejemplo, una red circulatoria con gráfica asociada  $G=(V,A)$ . Suponga que  $\exists (i,j) \in A \rightarrow x(i,j) > b(i,j)$  y  $\bar{c}(i,j) < 0$ . i.e.  $(i,j)$  es un arco con su correspondiente estado K2. En este caso puede observarse:

- I]  $x(i,j)$  se puede disminuir tanto como  $|x(i,j)-b(i,j)|$  unidades antes de que el arco sea conformable.
- II] Si  $x(i,j)$  se disminuye en más de  $|x(i,j)-b(i,j)|$  unidades, el arco sobrepasará el estado de conformabilidad.
- III]  $x(i,j)$  no puede aumentarse, pues en este caso su correspondiente  $K(i,j)$  se vería incrementado.

En forma análoga, un análisis de los otros estados proporciona los resultados que aparecen en la siguiente figura.

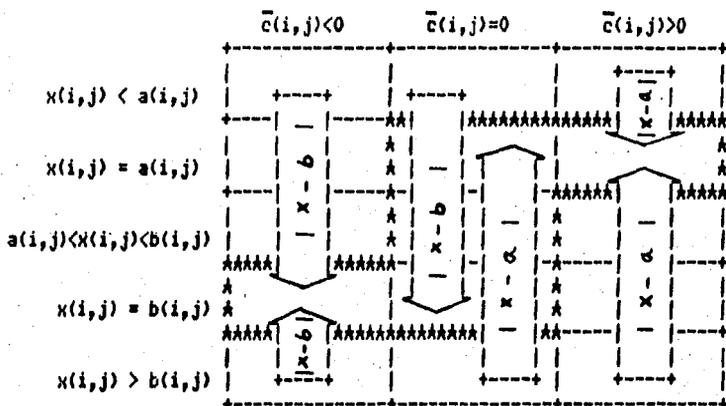


FIG. 4.X DIRECCIONES Y CANTIDADES PERMITIDAS EN EL CAMBIO DE FLUJO DE LA FASE PRIMAL DEL AOKK

Varias celdas del arreglo anterior merecen especial atención. Por ejemplo:

Considérese un arco  $(i,j)$  en el estado B2, i.e.  $\bar{c}(i,j) = 0$ ,  $x(i,j) > b(i,j)$ . La celda correspondiente indica un cambio en el flujo en tanto como  $|x(i,j) - a(i,j)|$  unidades. Puede observarse en la fig. 4.IX que realmente sólo necesitamos un cambio de  $|x(i,j) - b(i,j)|$  unidades, una cantidad menor para alcanzar el estado conformable; sin embargo, en la misma figura se observa que se puede continuar disminuyendo  $x(i,j)$  hasta la cantidad

indicada en la celda y el arco seguirá siendo conformable. Frecuentemente es necesario realizar este cambio, de tal forma que otros arcos puedan alcanzar su estado de conformabilidad.

Una vez que se ha determinado en cuanto podemos variar el flujo de c/arco, resta aún el determinar que combinación de flujos se puede cambiar para mantener la circulación. Para ser más precisos, designemos por  $(s,t)$  un arco no conformable que se encuentra en alguno de los estados L2, B2 o K2. En este caso se desea decrementar el flujo en  $(s,t)$ . Para hacerlo debemos de buscar un ciclo que contenga a  $(s,t)$ , ver fig. 4.XI, de tal manera que al dar al ciclo la orientación  $t \rightarrow s, \dots$  uno pueda, sin incrementar el número de Kilter de cualesquiera arco, incrementar el flujo en c/arco del ciclo que esté orientado en el sentido de la flecha, v. gr.  $(s,a)$  y  $(c,d)$ , y decrementar el flujo en c/arco orientado en la dirección opuesta, v. gr.  $(b,a)$ ,  $(c,b)$  y  $(t,d)$ . Finalmente sería suficiente dar al cambio de flujo en c/arco del ciclo, el mismo valor absoluto de tal forma que se mantenga una circulación en la red.

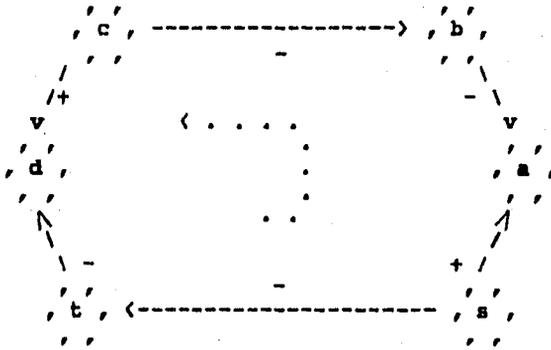


FIG. 4.XI CICLO QUE CONTIENE AL ARCO NO CONFORMABLE (s,t)

Una manera más formal de ver la combinación necesaria para mantener la circulación, es la siguiente:

Si  $\bar{X}$  es el vector de flujos circulatorios (actuales), entonces las ecuaciones de conservación de flujo en (PCCM) se pueden escribir como  $A\bar{X} = 0$ , donde  $A$  es la matriz de incidencia nodo-arco.

Si  $\Delta$  es un vector de cambios de flujo, entonces debe tenerse

$$A(\bar{X} + \Delta) = 0, \text{ i.e. } A\Delta = 0 \quad (4.4.1)$$

Ahora bien, si  $A\Delta = 0$ , para un  $\Delta \neq 0$ , entonces las columnas de  $A$  correspondientes a las componentes distintas de cero de  $\Delta$  deben ser linealmente dependientes. Puesto que  $A$  es una matriz de incidencia nodo-arco, entonces c/columna de  $A$  tiene exactamente un +1 y un -1, y las componentes distintas de cero de  $\Delta$  deben corresponder a un ciclo o a un conjunto de ciclos. (El lector interesado puede consultar [KH,1980], cap. III). Por lo

tanto, los flujos deben cambiarse a lo largo de un ciclo o conjunto de ciclos para mantener las ecuaciones de conservación.

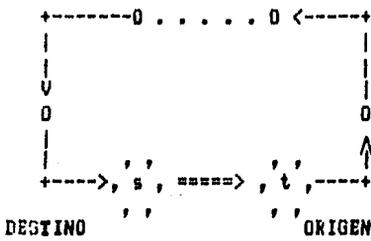
La búsqueda de tal ciclo puede ser realizada por un procedimiento de etiquetación análogo al AFF. Luego, sea  $a$  un arco no conformable, si  $a$  está en algunos de los estados  $L1, B1, K1$  para incrementar su flujo, o si  $a$  está en algunos de los estados  $L2, B2, K2$  para decrementar su flujo, úsese el siguiente procedimiento:

#### PROCEDIMIENTO DE ETIQUETACION

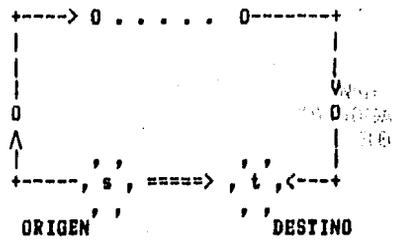
Sea  $(s,t)$  un arco no conformable.

Los nodos en la red jugarán un papel especial durante este procedimiento, se denominarán el origen  $0$  y el destino  $n$ , y se asocian a las extremidades del arco  $(s,t)$  de acuerdo a la siguiente correspondencia:

Si  $(s,t)$  está en alguno de los estados  $L1, B1, K1$ , tómesese  $t$  como origen y  $s$  destino; si  $(s, t)$  está en alguno de los estados  $L2, B2, K2$ , tómesese  $s$  como origen y  $t$  destino. Ver fig. 4.XII.



EDO. L1, B1, K1



EDO. L2, B2, K2

FIG. 4.XII IDENTIFICACION DE ORIGENES Y DESTINOS SEGUN SE AUMENTE O DISMINUYA FLUJO EN EL ARCO (s,t)

a] Dar la etiqueta [0, 00] al origen

b] Considere un nodo  $i$  ya etiquetado, con la etiqueta  $(\hat{z}, \alpha(i))$ . Se etiquetará con  $(\hat{i}, \alpha(j))$  c/nodo  $j$  que satisfaga una de las siguientes condiciones:

$$\lambda : (i, j) \in A, \bar{c}(i, j) > 0, x(i, j) < a(i, j) \quad (4.4.2)$$

$$\mu : (i, j) \in A, \bar{c}(i, j) \leq 0, x(i, j) < b(i, j) \quad (4.4.3)$$

$$\nu : (j, i) \in A, \bar{c}(j, i) \geq 0, x(j, i) > a(j, i) \quad (4.4.4)$$

$$\rho : (j, i) \in A, \bar{c}(j, i) < 0, x(j, i) > b(j, i) \quad (4.4.5)$$

donde

$$i = \begin{cases} +1, & \text{si se da la condición } \lambda, \mu \\ -1, & \text{si se da la condición } \nu, \rho \end{cases} \quad (4.4.6)$$

y  $\alpha(j)$  siendo los valores mínimos:

$$\min \{ \alpha(i), a(i,j) - x(i,j), \min \{ \alpha(i), b(i,j) - x(i,j) \} \} \quad (4.4.7)$$

$$\min \{ \alpha(i), x(j,i) - a(j,i), \min \{ \alpha(i), x(j,i) - b(j,i) \} \} \quad (4.4.8)$$

en los casos  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  respectivamente.

Obsérvese que si el nodo  $j$  es etiquetado por  $(+1, \alpha(j))$ , significa que el arco  $(i, j)$  puede aumentar su flujo; en caso contrario, si  $j$  es etiquetado por  $(-1, \alpha(j))$ , significa que el arco  $(j, i)$  puede disminuir su flujo.

- c] Si el destino puede ser etiquetado por este procedimiento, considérese la sucesión de nodos  $[0, \dots, i, j, \dots, n]$  en la cual  $c/nodo$  está presente en la etiqueta del siguiente, ya sea con signo  $+$  ó con signo  $-$ ; esta sucesión está determinada de manera única comenzando desde  $n$  y dirigiéndose en "reserva" hasta llegar a  $0$ . Es entonces posible cambiar por  $\alpha(n)$  el flujo en la cadena de  $0$  a  $n$ . Para hacer esto, incremente o decremente en  $\alpha(n)$

unidades el flujo en  $(i,j)$  de acuerdo a si este arco está dirigido de 0 hacia  $n$ , o de  $n$  hacia 0.

Las condiciones  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  y la selección de las correspondientes  $\alpha$ 's garantizan que la desviación de todos los arcos en la cadena ciertamente será no creciente. De hecho, se puede verificar que el número de Kilter de  $c/\text{arco}$  no conformable en esta cadena decrementará estrictamente.

d) Si el destino no puede ser etiquetado por este procedimiento, no es posible con los valores actuales de  $u(i)$ ,  $i \in V$ , encontrar una cadena en la cual uno pueda incrementar el flujo de 0 hacia  $n$  sin incrementar el número de Kilter de algún arco. Uno se dirige entonces a la fase dual del AOOK.

#### FASE DUAL DE AOOK, CAMBIOS DE POTENCIAL

Cuando ya no es posible construir un ciclo que contenga al arco no conformable en cuestión, digamos  $(p,q)$ , se procede a la modificación de costos relativos de forma que ningún número de Kilter sea aumentado y nos permita alguna de las siguientes posibilidades:

- I) Dejar al arco  $(p,q)$  conformable.
- II) Proveer arcos que permitan en una nueva fase primal encontrar un ciclo que contenga al arco no conformable en cuestión.

III] Deducir que el problema de circulación a costo mínimo es infactible.

Ahora bien, debido a que  $\bar{c}(i,j) = c(i,j) - u(i) + u(j)$ , la modificación de costo relativo sólo se puede realizar a través de cambios en los  $u(i)$ ,  $i \in V$ .

En un plano intuitivo, sea  $(p,q)$  un arco no conformable para el cual no pudo ser etiquetado el vértice destino por el procedimiento de etiquetación. Sin pérdida de generalidad, suponga que  $(p,q)$  está en alguno de los estados L1, B1 o K1, de tal forma que  $q$  sería el nodo origen y  $p$  el nodo destino.

Sea  $\bar{I}$  el conjunto de nodos que pueden ser etiquetados desde el nodo  $q$  a través del procedimiento de etiquetación

$$\text{Sea } I = V - \bar{I} \quad (4.4.9)$$

Obsérvese que  $q \notin \bar{I}$  y  $p \notin I$ , una vez que se ha pasado a la fase dual, luego  $\bar{I} \neq \emptyset$ ,  $I \neq \emptyset$ .

Se desea cambiar los  $u(i)$ ,  $i \in V$ , de tal forma que ningún  $K(i,j)$  sea aumentado y el conjunto  $\bar{I}$  vaya creciendo periódicamente, de tal forma que si  $(p,q)$  no pudo ser llevado al estado de conformabilidad bajo el cambio, otro nodo pase a formar parte de  $\bar{I}$ . Entonces, en un número finito de iteraciones  $p$  pasaría a formar parte de  $\bar{I}$  y se crearía un ciclo. Implícitamente se ha supuesto que el número de elementos de  $\bar{I}$ ,  $|\bar{I}|$ , no disminuye. Para asegurar que esto ocurra, se debe modificar los  $u(i)$ ,  $i \in V$ ,

de forma que los arcos con ambos extremos en  $\bar{I}$  sean retenidos.

Considere  $\bar{c}(i,j) = c(i,j) - u(i) + u(j)$ . Si las potenciales  $u(i)$ ,  $u(j)$  son modificados en la misma cantidad, el nuevo costo relativo ( $\bar{c}'(i,j)$ ) permanecerá sin cambiar. Por lo tanto, aseguramos que el nuevo conjunto  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}'$ , contendrá al menos todos los elementos (nodos) que contenía después de cambiar la variable dual, si se modifican todos los  $u(i)$ ,  $i \in \bar{I}$ , en la misma cantidad, digamos  $\theta$ .

Por otra parte, supóngase que los  $u(i)$ ,  $i \in I$ , no se cambian. Entonces los únicos arcos afectados serán los arcos dirigidos de  $\bar{I}$  hacia  $I$ , y los arcos dirigidos de  $I$  hacia  $\bar{I}$ . Específicamente si  $\theta > 0$  y modificamos los potenciales de acuerdo a

$$u'(i) = \begin{cases} u(i) + \theta, & \text{si } i \in \bar{I} \\ u(i) & , \text{si } i \in I \end{cases} \quad (4.4.10)$$

Entonces

$$\bar{c}'(i,j) = \begin{cases} \bar{c}(i,j) & , \text{si } i \in \bar{I}, j \in \bar{I} \\ \bar{c}(i,j) & , \text{si } i \in I, j \in I \\ \bar{c}(i,j) - \theta, & \text{si } i \in \bar{I}, j \in I \\ \bar{c}(i,j) + \theta, & \text{si } i \in I, j \in \bar{I} \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Se debe entonces determinar  $\theta$ , de tal forma que:

1) No aumente el número de Kilter de ningún arco.

2] No cambie el estado conformable de los arcos ya conformables.

Primeramente se debe identificar los arcos que pueden estar en el conjunto  $(\bar{I}, I)$  y el conjunto  $(I, \bar{I})$ . (La notación  $(X, Y)$  representa el conjunto  $S = \{(x, y) / x \in X, y \in Y\}$ ).

Si  $(i, j) \in (\bar{I}, I)$ , se sigue del procedimiento de etiquetación (condiciones  $\lambda$  y  $\mu$ ) y del conjunto de posibles estados  $L, B, K, L_1, \dots, K_2$  que este arco está en uno de los siguientes estados (ver fig. 4.XIII.a):

$$\bar{c}(i, j) > 0, \quad x(i, j) \geq a(i, j) \quad (4.4.12)$$

$$\bar{c}(i, j) \leq 0, \quad x(i, j) \geq b(i, j) \quad (4.4.13)$$

Recuérdese que estos arcos tendrán disminuido su costo relativo. Luego, cambiarán su estado de derecha a izquierda tal y como se indica en la fig. 4.XIII.b), donde denotamos por  $P(1), \dots, P(8)$  las posibles celdas en que puede situarse un arco que pertenezca al conjunto  $(\bar{I}, I)$ .

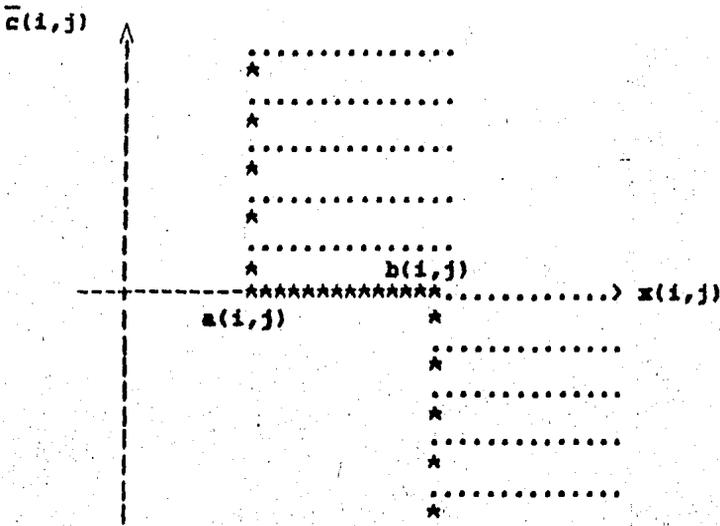


FIG. 4.XIII.a) POSIBLES ESTADOS PARA ARCOS EN EL CONJUNTO  $(\bar{I}, I)$

	$\bar{c}(1, j) < 0$	$\bar{c}(1, j) = 0$	$\bar{c}(1, j) > 0$	LIMITE IMPLICITO SOBRE 0
$x(i, j) < a(i, j)$				
$x(i, j) = a(i, j)$	<---+			
$a(i, j) < x(i, j) < b(i, j)$	<---+	+-----+ *		
$x(i, j) = b(i, j)$	* <---+	P(4)+-----+ *		
$x(i, j) > b(i, j)$	* <---+	P(7) o-----+ *		

FIG. 4.XIII.b) LIMITES SOBRE 0 PARA ARCOS EN EL CONJUNTO  $(\bar{I}, I)$

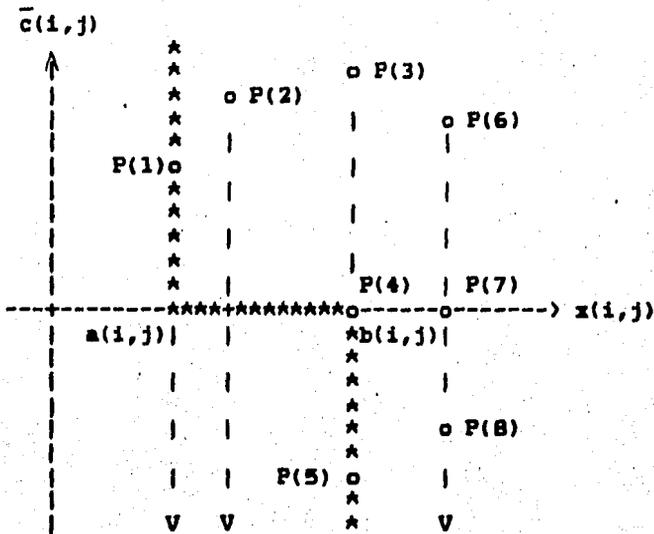


FIG. 4.XIII.c) VISUALIZACION DE LOS LIMITES DE LA FIGURA ANTERIOR

Examinese, por ejemplo, un arco  $(i,j)$  situado en la celda P(6), i.e.  $\bar{c}(i,j) > 0$  y  $x(i,j) > b(i,j)$ , vemos en la fig. 4.XIII.c) que mientras  $\theta$  se incrementa,  $K(i,j)$  permanece constante y luego disminuye; el arco  $(i,j)$  pasará a la celda P(7) e incrementando aún más pasará a la celda P(8); su correspondiente disminución en  $K(i,j)$  será de  $K(i,j) = |x(i,j) - a(i,j)|$  en P(6) a  $K(i,j) = |x(i,j) - b(i,j)|$  en P(7) o P(8). Entonces, para este arco podemos incrementar  $\theta$  tanto como queramos y su  $K(i,j)$  nunca se incrementará. Para estos arcos podemos establecer un limite superior de  $\theta$  en  $00$ , tal y como indica la fig. 4.XIII.b).

Para un arco situado en la celda  $P(3)$ , conforme  $\theta$  se incrementa  $K(i,j)$  disminuye (se vuelve cero), y después permanece constante. De nuevo el límite de variación para  $\theta$  es 00.

No podemos deducir lo mismo para un arco  $(i,j)$  situado en la celda  $P(2)$ , pues en este caso al incrementar  $\theta$  su correspondiente  $K(i,j)$  disminuye a cero para posteriormente volverse positivo. Con el fin de eliminar el incremento en  $K(i,j)$  para el arco, se impone un límite de  $|\bar{c}(i,j)|$  sobre  $\theta$ .

En forma análoga se impone un límite de  $|\bar{c}(i,j)|$  sobre  $\theta$  para los arcos situados en la celda  $P(1)$ .

En una manera similar, si  $(i,j) \in (I, \bar{I})$  se tiene que este arco está en uno de los siguientes estados:

$$\bar{c}(i,j) \geq 0 \quad x(i,j) \leq a(i,j) \quad (4.4.14)$$

$$\bar{c}(i,j) < 0 \quad x(i,j) \leq b(i,j) \quad (4.4.15)$$

Esto da como resultado la información de la fig. 4.XIV. Al igual que la gráfica anterior, se denota por  $P(1), P(2), \dots, P(8)$  las posibles celdas en que puede situarse un arco que pertenezca al conjunto  $(I, \bar{I})$ .

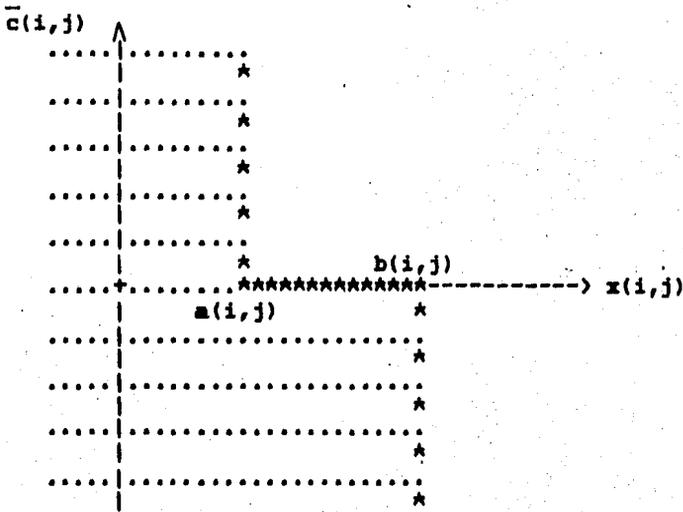


FIG. 4.XIV.a) POSIBLES ESTADOS PARA ARCOS EN EL CONJUNTO (I, I-bar)

	$\bar{c}(i,j) < 0$	$\bar{c}(i,j) = 0$	$\bar{c}(i,j) > 0$	LIMITE IMPLICITO SOBRE $\emptyset$
$x(i,j) < a(i,j)$	*P(1) o-----+ P(2)   P(3) * *   o-----o-----> * $\emptyset \leq 00$   *-----+-----+-----+			
$x(i,j) = a(i,j)$	*P(4) o-----+ P(5)   P(6) * *   o-----o-----> * $\emptyset \leq 00$   *-----+-----+-----+			
$a(i,j) < x(i,j) < b(i,j)$	*P(7) o-----+   +----->   $\emptyset \leq  \bar{c}(i,j) $   *   +-----+   +----->     *-----+-----+-----+			
$x(i,j) = b(i,j)$	* P(8) *   +----->   $\emptyset \leq  \bar{c}(i,j) $   * o-----+   +----->     *-----+-----+-----+			
$x(i,j) > b(i,j)$				

FIG. 4.XIV.b) LIMITES SOBRE  $\emptyset$  PARA ARCOS EN EL CONJUNTO (I, I-bar)

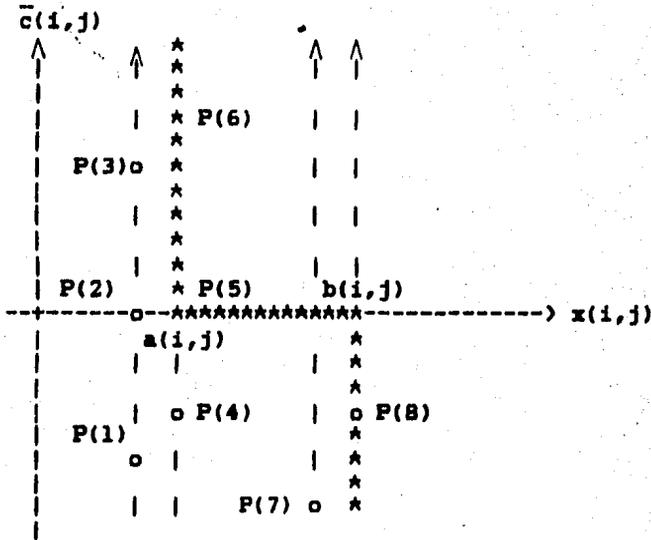


FIG. 4.XIV.c) VISUALIZACION DE LOS LIMITES DE LA FIGURA ANTERIOR

En lo que respecta al empeoramiento de los números de kilter, las fig's. 4.XIII y 4.XIV indican que sólo es necesario calcular  $\theta$  basado en los arcos de  $\bar{I}$  a  $I$  con  $x(i,j) < b(i,j)$  y en los arcos de  $I$  a  $\bar{I}$  con  $x(i,j) > a(i,j)$ . Sin embargo, si se definiera un método para calcular  $\theta$  basado únicamente en estas condiciones, surgirían dificultades al interpretar el significado del valor  $\theta=00$ . Las cosas se simplifican grandemente si en lugar de desigualdades estrictas sobre el flujo (i.e.  $x(i,j) < b(i,j)$ ,  $x(i,j) > a(i,j)$ ), se admiten desigualdades débiles (i.e.  $x(i,j) \leq b(i,j)$ ,  $x(i,j) \geq a(i,j)$ ). La razón para esto, que parece

ser contrario a la intuición, será clara cuando se establezca la convergencia del algoritmo (sección 4.6).

La discusión anterior relativa a los límites sobre  $\theta$  basado en consideraciones sobre los números de kilter y en las propiedades de convergencia (aún no establecidas), conducen al siguiente procedimiento formal para el cálculo de  $\theta$ .

Sea  $\bar{I}$  e  $I$  los conjuntos de nodos etiquetados y no etiquetados, respectivamente, al fin del procedimiento de etiquetación (esto significa que estamos en el caso d) del procedimiento).

Considere los siguientes conjuntos de arcos:

$$S_1 = \{ (i,j) / i \in \bar{I}, j \in I, \bar{c}(i,j) > 0, x(i,j) \leq b(i,j) \} \quad (4.4.16)$$

$$S_2 = \{ (i,j) / i \in I, j \in \bar{I}, \bar{c}(i,j) < 0, x(i,j) \geq a(i,j) \} \quad (4.4.17)$$

y sean

$$\theta(1) = \min_{S_1} \{ \bar{c}(i,j) \} \quad (4.4.18)$$

$S_1$

$$\theta(2) = \min_{S_2} \{ -\bar{c}(i,j) \} \quad (4.4.19)$$

$S_2$

$$\theta = \min \{ \theta(1), \theta(2) \} \quad (4.4.20)$$

en donde  $\theta(i) = 00$ , si  $S(i) = \emptyset$ .

Entonces,  $\theta$  es estrictamente positivo, de hecho es un entero positivo ó 00.

Si  $\theta$  es infinito, nos detenemos. Se deberá mostrar que el problema de circulación a costo mínimo es infactible (se demostrará esto un poco más adelante), esto termina la fase dual del AOOK y proporciona el fundamento del algoritmo completo.

En caso contrario, se obtiene un nuevo potencial ( $u'(i)$ ), tras sumar  $\theta$  al potencial ( $u(i)$ ) de  $c/u$  de los nodos etiquetados ( $i \in \bar{I}$ ), sin modificar el potencial de los nodos no etiquetados ( $i \in I$ ). Los nuevos valores de  $\bar{c}(i,j)$  son:

$$\bar{c}'(i,j) = \begin{cases} \bar{c}(i,j) - \theta, & \text{si } (i,j) \in (\bar{I}, I) \\ \bar{c}(i,j) + \theta, & \text{si } (i,j) \in (I, \bar{I}) \\ \bar{c}(i,j), & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.4.21)$$

y existe al menos un arco  $(i,j)$  para el cual  $\bar{c}'(i,j)=0$  y  $\bar{c}(i,j) \neq 0$ .

Ahora podemos presentar el algoritmo completo.

## 4.5 EL ALGORITMO OUT OF KILTER

a] Comience con cualquier circulación  $X=(x(i,j))$  y cualquier vector de potenciales  $U=(u(i))$ . (Si ninguno mejor puede ser encontrado, coloque  $x(i,j) = 0 \quad \forall (i,j) \in A$  y  $u(i) = 0 \quad \forall i \in V$ .)

b] Para los valores actuales de la circulación y del potencial, cada arco  $(i,j)$  está en uno de los nueve estados  $L, B, K, L1, \dots, K2$ :

Si todos los arcos se encuentran en estado conformable, alto. La circulación es óptima.

En caso contrario, al menos uno de los arcos se encuentra en estado no conformable. Considere un arco arbitrario  $(s,t)$  en estado no conformable. Ve a c].

c] Aplique el procedimiento de etiquetación para el arco  $(s,t)$  tomando  $t$  como origen y  $s$  como destino si  $(s,t)$  está en uno de los estados  $L1, B1$  ó  $K1$ ; o bien,  $s$  como origen y  $t$  como destino si  $(s,t)$  está en uno de los estados  $L2, B2$  ó  $K2$ .

c.1] Si el destino puede ser etiquetado, incremente por  $\alpha$  el flujo en la cadena de esta manera determinada (cfr. c] del procedimiento de etiquetación) y en el

arco  $(s,t)$  ( de  $s$  hacia  $t$  ó de  $t$  hacia  $s$  ),  $\alpha$   
 siendo igual a:

$\min \{ \alpha(s), a(s,t) - x(s,t) \}$ , si  $(s,t)$  está en el edo. L1.  
 $\min \{ \alpha(s), b(s,t) - x(s,t) \}$ , si  $(s,t)$  está en el edo. B1 ó K1.  
 $\min \{ \alpha(t), x(s,t) - a(s,t) \}$ , si  $(s,t)$  está en el edo. L2 ó B2.  
 $\min \{ \alpha(t), x(s,t) - b(s,t) \}$ , si  $(s,t)$  está en el edo. K2.

Si el arco  $(s,t)$  se encuentra en estado conformable,  
 regrese a b];

Si el arco  $(s,t)$  es aún no conformable, borre todas  
 las etiquetas y regrese a c].

c.2] Si el destino no puede ser etiquetado, sea  $\bar{I}$  e  $I$  los  
 conjuntos de nodos etiquetados y no etiquetados,  
 respectivamente, y sea  $\theta$  definido por (4.4.20).

Si  $\theta$  es finito, ve a d].

Si  $\theta = \infty$ , alto; el problema primal no tiene  
 solución: no existe circulación factible.

d] Defina un nuevo potencial por las relaciones

$$u'(i) = u(i), \text{ si } i \in I$$

$$u'(i) = u(i) + \theta, \text{ si } i \in \bar{I};$$

Si  $(s,t)$  se encuentra en estado conformable. Regresa a b].

En caso contrario, regrese a c].

La fig. 4.XV muestra el diagrama del AOK.

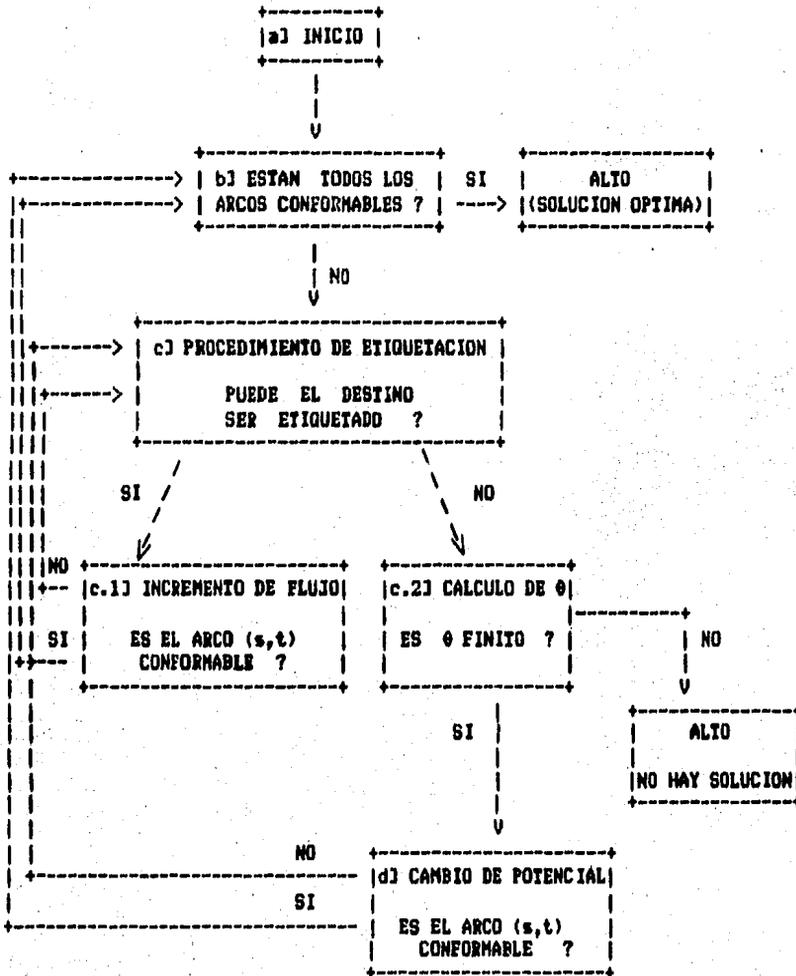


FIG. 4.XV. DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO  
OUT OF KILTER

#### 4.6 VALIDEZ Y CONVERGENCIA DEL ALGORITMO OUT OF KILTER

Se ha mostrado (cfr. 4.3) que una condición suficiente para que una circulación sea óptima es que todos los arcos sean conformables, i.e.  $\forall (i,j) \in A, k(i,j) = 0$ ; lo cual justifica el paso b) del algoritmo. Ahora se mostrará que si se obtiene  $\theta = 00$ , entonces no existe una circulación factible, lo cual justificará el paso c.2) del algoritmo.

Supóngase que durante alguna aplicación de la fase dual del AOK se llega al caso en el que  $\theta = 00$ . Esto es:

$$S1 = S2 = \theta \quad (4.6.1)$$

En particular, de S1 se tiene:

$$\exists (i,j) \in A \wedge i \in \bar{I}, j \in I, \bar{c}(i,j) > 0, x(i,j) < b(i,j) \quad (4.6.2)$$

y haciendo uso de las condiciones (4.4.12) y (4.4.13) se obtiene:

$$\forall (i,j) \in (\bar{I}, I)$$

$$\bar{c}(i,j) > 0, x(i,j) < b(i,j) \quad (4.6.3)$$

o

$$\bar{c}(i,j) \leq 0, x(i,j) \geq b(i,j) \quad (4.6.4)$$

resumiendo:

$$\text{Si } (i,j) \in (\bar{I}, I) \text{ entonces } x(i,j) \geq b(i,j) \quad (4.6.5)$$

Similarmente,

Si  $(i,j) \in (I, \bar{I})$  entonces  $x(i,j) \leq a(i,j)$  (4.6.6)

En particular, esas relaciones son satisfechas por el arco no conformable  $(s,t)$ , pues nos encontramos en el paso c.2] del algoritmo; más precisamente, dado que  $(s,t)$  es un arco no conformable alguna de las desigualdades anteriores se cumple estrictamente. De hecho:

1] Si  $s$  es el nodo origen etiquetado en el procedimiento, entonces  $x(s,t) > b(s,t)$  (4.6.7)

2] Si  $t$  es el nodo origen etiquetado en el procedimiento, entonces  $x(s,t) < a(s,t)$  (4.6.8)

Demostraremos a continuación 2]:

Sea  $(s,t)$  un arco no conformable, tal que  $t$  es el nodo origen en el procedimiento de etiquetación. Luego,

$$(s,t) \in (I, \bar{I}) \quad (4.6.9)$$

y usando (4.6.6)

$$x(s,t) \leq a(s,t) \quad (4.6.10)$$

Supóngase  $x(s,t) = a(s,t)$ . Como  $(s,t)$  es un arco no conformable

$$\bar{c}(s,t) < 0 \quad (4.6.11)$$

lo cual viola la suposición de que  $S_2 = \emptyset$ , ver (4.4.17)

Por lo tanto,  $x(s,t) < a(s,t)$  l.c.d.d.

De una manera similar se puede demostrar 1J.

Sumando las desigualdades (4.6.5) y (4.6.6.) se obtiene

$$\sum_{(\bar{I}, I)} x(i, j) - \sum_{(I, \bar{I})} x(i, j) > \sum_{(\bar{I}, I)} b(i, j) - \sum_{(I, \bar{I})} a(i, j) \quad (4.6.12)$$

Puesto que el flujo actual dado por  $X=(x(i, j))$  es circulatorio e  $I, \bar{I}$  constituyen una partición de  $V$ , la ecuación de conservación se puede escribir como:

$V \text{ e } \bar{V}$

$$\sum_{j \in \bar{I}} x(i, j) + \sum_{j \in I} x(i, j) - \left( \sum_{j \in \bar{I}} x(j, i) + \sum_{j \in I} x(j, i) \right) = 0 \quad (4.6.13)$$

sumando estas ecuaciones sobre  $i \in \bar{I}$

$$\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in \bar{I}}} x(i, j) + \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x(i, j) - \left( \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in \bar{I}}} x(j, i) + \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x(j, i) \right) = 0 \quad (4.6.14)$$

Obsérvese que

$$\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in \bar{I}}} x(i, j) = \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in \bar{I}}} x(j, i) \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x(j, i) + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} x(i, j)$$

la ecuación (4.6.14) se reduce a

$$\sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in I}} x(i, j) - \sum_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{I}}} x(i, j) = 0 \quad (4.6.15)$$

Substituyendo en la desigualdad (4.6.12), se obtiene

$$\begin{array}{l}
 0 > \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(\bar{I}, I)} b(i, j) - \sum_{(I, \bar{I})} a(i, j) \\ \sum_{(I, \bar{I})} a(i, j) > \sum_{(\bar{I}, I)} b(i, j) \end{array} \right\} \quad (4.6.16)
 \end{array}$$

y usando el teorema 4.1, se obtiene que no existe una circulación factible.

De esta manera, se justifica el paso c.2J del algoritmo.

Finalmente, se mostrará que después de un número finito de iteraciones se deberán hacer todos los arcos conformables, ó bien obtener un valor de  $\theta = 00$ .

Cada vez que el destino ( $s$  ó  $t$ ) es etiquetado, paso c.1J del A00K, el flujo en el arco ( $s, t$ ) cambia en una cantidad finita y estrictamente positiva  $\alpha$  (esta cantidad es entera si los flujos iniciales  $X=(x(i, j))$  son enteros, así como los valores de  $a(i, j)$ ,  $b(i, j)$ ), y consecuentemente el número de kilter de este arco decrece. Para los demás arcos del ciclo, el número de kilter disminuye si el arco estaba en un estado no conformable o bien, permanece igual si era un arco conformable.

De esta forma, es suficiente probar que no se puede tener una sucesión infinita de pasos c.2J con  $\theta$  finita en  $c/paso$  y el arco ( $s, t$ ) permaneciendo en estado no conformable.

Cada vez que  $\theta$  es finita, los  $\bar{c}(i,j)$  son modificados según (4.4.21). Note que para todos los arcos con ambas extremidades en  $\bar{I}$ , su  $\bar{c}(i,j)$  no sufre modificación (en particular, aquellos arcos que fueron usados hacia adelante en el procedimiento de etiquetación para pasar del nodo origen al nodo destino). Más aún, dado que el flujo no cambia, c/nodo que fue etiquetado en la iteración precedente todavía será etiquetado en esta, i.e.  $\bar{I} \subset \bar{I}'$ .  
Luego,

$$|\bar{I}| \leq |\bar{I}'| \quad (4.6.17)$$

Supóngase que  $\bar{I}' = \bar{I}$ , i.e. ningún nuevo nodo ha sido etiquetado. Para todo arco de  $(\bar{I}, I)$  se ha disminuido su  $\bar{c}(i,j)$  y para todo arco de  $(I, \bar{I})$  se ha aumentado su costo relativo. Por lo tanto, después del cambio en la variable dual, los nuevos conjuntos  $S1'$  y  $S2'$  satisfacen

$$S1' \subset S1 \quad \text{y} \quad S2' \subset S2 \quad (4.6.18)$$

Aún más, por la selección del valor (finito de  $\theta$ ) y como observamos al final de la sección 4.4, se tiene  $\bar{c}'(i,j) = 0$  para al menos un arco  $(i,j)$  de  $S1$  o  $S2$ , para el cual previamente se tenía  $\bar{c}(i,j) \neq 0$ . Luego  $S1' \cup S2'$  incluye al menos un arco menos que el conjunto  $S1 \cup S2$ , i.e. al menos una de las inclusiones anteriores es propia. Ahora bien,  $S1$  y  $S2$  pueden decrecer a lo más un número finito de veces antes de que  $S1 \cup S2 = \emptyset$  y  $\theta = \infty$ , en cuyo caso el algoritmo se detiene.

Si  $|\bar{I}'| > |\bar{I}|$  un nuevo nodo  $k$  entra al conjunto de nodos etiquetados. Cada vez que esto ocurre, el conjunto  $\bar{I}$  crece en al menos un nodo. Esto puede ocurrir a lo más un número finito de veces, antes de que el nodo destino pase a ser miembro de  $\bar{I}$  y se obtenga el ciclo que se buscaba.

Resumiendo existen 3 casos posibles en cada iteración:

- 1] El arco  $(s,t)$  pasa del estado no conformable al conformable;
- 2] El arco  $(s,t)$  permanece no conformable pero el número de nodos etiquetados incrementa;
- 3] El arco  $(s,t)$  permanece no conformable y el conjunto de nodos etiquetados permanece sin cambio, pero el número de arcos en los conjuntos que son usados para definir  $\theta$  decrece.

De lo anterior se sigue que después de un número finito de iteraciones con  $\theta$  finita, el AOOK se dirige ya sea al caso donde un arco  $(s,t)$  se hace conformable, o a la posibilidad de etiquetar el destino ( $s$  ó  $t$ ), o al caso  $\theta = 00$ .

#### 4.7 IMPLANTACION DEL ALGORITMO OUT OF KILTER EN NUESTRO PROBLEMA

En las secciones precedentes, se ha hecho el desarrollo y análisis del AOOK, una técnica conceptualmente sencilla y plenamente atractiva para la solución de cualesquier problema de flujo restringido a costo mínimo; ahora, en esta sección, se deja esa línea de trabajo, al pasar a la implantación en computadora del AOOK, i.e. a la construcción de un programa de computadora que resuelva mediante esta metodología cualesquier problema de flujo restringido a costo mínimo. Tanto los cambios necesarios en nuestro problema para su solución mediante el programa construido, como los resultados de este último, a través de diferentes escenarios del sistema eléctrico nacional, son comentados en esta sección.

Debido al carácter del trabajo aquí expuesto, y en busca de una mayor comodidad, en lo que sigue será frecuente el uso de terminología propia del problema (ver 1.1.2), en lugar de terminología de uso general en problemas de flujo en redes.

La sección 4.7 se compone de tres subsecciones:

En 4.7.1 se comenta la transformación necesaria en los datos del problema original para su solución mediante el AOOK. La subsección 4.7.2 visualiza el estado inicial que guardan los arcos de la red asociada a nuestro problema y, finalmente, la subsección 4.7.3 presenta los resultados que proporciona la

implementación del AOOK a través de diferentes escenarios de la red del sistema eléctrico nacional.

#### 4.7.1 MODIFICACION EN LOS DATOS DEL PROBLEMA ORIGINAL

Antes de la implantación del AOOK para la solución del problema, será necesario superar algunas deficiencias que se presentan al manejar el conjunto de datos del problema original y el conjunto de datos que requiere el AOOK para su instrumentación. Veamos:

- 1] En el desarrollo del AOOK y especialmente para validar la convergencia de dicho algoritmo, se ha supuesto que el planteamiento del problema de circulación a costo mínimo incluye vectores de costo, cotas superiores e inferiores con entradas enteras.
- 2] Por otra parte, el planteamiento original de flujo en redes asociado a nuestro problema, ver fig. 2.I.a) tiene datos reales, i.e.

$V \in P, V \in I$

$e(p), H(i,p), \bar{H}(i,p), G(i) \in R$

Más aún, al eliminar las cotas inferiores (cfr. 2.2.2) y realizar la aproximación lineal a la función de costo (cfr 2.2.3), los nuevos parámetros asociados también serían números reales.

Luego, en un afán por evitar problemas de convergencia surge la necesidad de pasar los datos reales asociados al problema original hacia datos de tipo entero.

Una primera idea consiste en efectuar un simple redondeo al entero más próximo. El principal obstáculo que surge al tratar de aplicar dicha idea radica en el hecho de que las unidades usadas para expresar la energía de las plantas, los límites de generación por intervalo y las cotas asociadas a la generación por planta-intervalo se expresan en Mw (millón de watt). Al hacer una simple aproximación al entero más próximo, se pueden cometer errores de hasta  $\pm 0.5$  Mw, lo cual no es permitible al sistema.

Otro enfoque que puede ser usado para disminuir el margen de error al pasar de números reales a enteros, es el siguiente:

Si los datos del problema  $(e(p), G(i), H(i,p), \bar{H}(i,p))$ , los cuales constituyen los parámetros de la red asociada, son multiplicados por una constante  $l > 0$  (por decir algo,  $l=10, 100, 1000, \text{etc}$ ), y estos nuevos datos fueran redondeados al entero más próximo, el número de cifras significativas que serían usadas para efectuar el redondeo aumentaría, permitiendo al margen de error disminuir considerablemente. Para completar, sería suficiente "sintonizar" dicho procedimiento, i.e. encontrar un número  $l$  tal que ofrezca un margen de error que pueda ser considerado como despreciable en el problema.

Más formalmente:

Sea (R) el problema asociado a la red de la fig. 2.I.a) ( Sin pérdida de generalidad también puede ser considerado el problema asociado a la red de la fig. 2.I.b) )

En (R) se desea encontrar un s-t flujo de valor  $\sum_p e(p)$  a costo mínimo. Dicho flujo está sujeto a restricciones de capacidad en c/arco y a restricciones de conservación de flujo en c/nodo.

Si denotamos por:

$H(s,p)$  el flujo en el arco  $(s,p)$ ,  $p \in P$ .

$H(i,p)$  " " " " "  $(p,i)$ ,  $p \in P$  e  $i \in I$ .

$H(i,t)$  " " " " "  $(i,t)$ ,  $i \in I$

Analíticamente se tiene:

$$\text{Min } \sum_{(p,i)} [H(i,p)]^2 \quad (4.7.1)$$

s.c.

$$\sum_P H(s,p) \leq \sum_P e(p) \quad \text{nodo } s \quad (4.7.2)$$

$$H(s,p) - \sum_i H(i,p) = 0 \quad \forall p \in P \quad (4.7.3)$$

$$(R) \quad \sum_P H(i,p) - H(i,t) = 0 \quad \forall i \in I \quad (4.7.4)$$

$$- \sum_i H(i,t) \leq - \sum_P e(p) \quad \text{nodo } t \quad (4.7.5)$$

$$0 \leq H(s,p) \leq e(p) \quad \forall p \quad (4.7.6)$$

$$0 \leq \underline{H}(i,p) \leq H(i,p) \leq \bar{H}(i,p) \quad \forall p, \forall i \quad (4.7.7)$$

$$0 \leq H(i,t) \leq G(i) \quad \forall i \quad (4.7.8)$$

A partir de (R) se puede construir un nuevo problema de flujo a costo mínimo denominado (1R), donde  $1 > 0$ . Dicho problema, surge de la idea de multiplicar por una cte.  $1$  los parámetros asociados a la red de la fig. 2.I.a).

Expresado analíticamente el problema (1R) se tiene:

$$\text{Min} \sum_{(p,i)} [\hat{H}(i,p)]^2 \quad (4.7.9)$$

s.c.

$$\sum_p \hat{H}(s,p) \leq 1 \sum_p e(p) \quad \text{nodo } s \quad (4.7.10)$$

$$\hat{H}(s,p) - \sum_i \hat{H}(i,p) = 0 \quad \forall p \in P \quad (4.7.11)$$

$$(1R) \quad \sum_p \hat{H}(i,p) - \hat{H}(i,t) = 0 \quad \forall i \in I \quad (4.7.12)$$

$$- \sum_i \hat{H}(i,t) \leq -1 \sum_p e(p) \quad \text{nodo } t \quad (4.7.13)$$

$$0 \leq \hat{H}(s,p) \leq 1e(p) \quad \forall p \quad (4.7.14)$$

$$0 \leq \underline{1H}(i,p) \leq \hat{H}(i,p) \leq \overline{1H}(i,p) \quad \forall p, \forall i \quad (4.7.15)$$

$$0 \leq \hat{H}(i,t) \leq 1G(i) \quad \forall i \quad (4.7.16)$$

Ahora bien, denotemos por  $SF(R)$ ,  $SF(1R)$  a la región de soluciones factibles del problema (R) y del problema (1R), respectivamente. Como es de esperarse ambos problemas están íntimamente relacionados.

-----

Lema 4.1

$$H \in SF(R) \iff \hat{H} = 1H \in SF(1R)$$

Demostración (  $\implies$  ) :

Sea  $H \in SF(R)$ , luego  $H$  satisface (4.7.2), ..., (4.7.8),

multiplicando por  $1 > 0$  las desigualdades anteriores se tiene:

$$\sum_P 1H(s,p) \leq 1 \sum_P e(p) \quad (4.7.17)$$

$$1H(s,p) - \sum_i H(i,p) = 0 \quad \forall p \in P \quad (4.7.18)$$

$$\sum_P 1H(i,p) - 1H(i,t) = 0 \quad \forall i \in I \quad (4.7.19)$$

$$- \sum_i 1H(i,t) \leq - 1 \sum_P e(p) \quad (4.7.20)$$

$$0 \leq 1H(s,p) \leq 1e(p) \quad \forall p \quad (4.7.21)$$

$$0 \leq 1\underline{H}(i,p) \leq 1H(i,p) \leq 1\bar{H}(i,p) \quad \forall p, \forall i \quad (4.7.22)$$

$$0 \leq 1H(i,t) \leq 1G(i) \quad \forall i \quad (4.7.23)$$

Haciendo  $\hat{H} = 1H$ , i.e.  $\hat{H}(i,j) = 1H(i,j)$

$\hat{H} \in SF(1R)$

l.c.d.d.

Similarmente se demuestra ( <==== )

-----

A partir del lema anterior es sencillo demostrar el siguiente

-----

## Lema 4.2

Sea  $f: SF(R) \rightarrow SF(1R)$   $\dagger$

$$f(x) = 1x$$

$f$  es una función biyectiva

-----

El siguiente teorema presenta el resultado esperado:

-----

## Teorema 4.2

$\star$   
 $H$  es una solución óptima de (R) si y sólo si

$\wedge \star$   $\star$   
 $H = 1H$  es una solución óptima de (1R)

Demostración (  $\implies$  ) :

Sea  $H$  una solución óptima de (R), i.e.  $H \in SF(R)$  y

$$\sum_{(p,i)} [H(i,p)]^2 \leq \sum_{(p,i)} [H(i,p)]^2 \quad \forall H \in SF(R) \quad (4.7.24)$$

Construyase  $H$  como:

$$H = 1H \quad (4.7.25)$$

Del lema 4.1  $H \in SF(1R)$  y multiplicando la desigualdad en

(4.7.24)

$$\sum_{(p,i)} \lambda^* [CH(i,p)]^2 \leq \sum_{(p,i)} \lambda [CH(i,p)]^2 \quad \forall H \in \text{SFR}(R) \quad (4.7.26)$$

i.e.

$$\sum_{(p,i)} \lambda^* [CH(i,p)]^2 \leq \sum_{(p,i)} \lambda [CH(i,p)]^2 \quad (4.7.27)$$

luego,

$$\sum_{(p,i)} \lambda^* [CH(i,p)]^2 \leq \sum_{(p,i)} \lambda [CH(i,p)]^2 \quad \forall H(i,p) \in \text{SFR}(1R) \quad (4.7.28)$$

por lo tanto

$\lambda^*$   
 $H$  es una solución óptima de (1R) l.c.d.d.

Similarmente se demuestra (====)

-----

Una vez demostrado el teorema 4.2, su resultado puede ser usado para la reestructuración de los datos en nuestro problema. Simplemente, restaría la "sintonización" de  $l$ . En este caso se ha considerado suficiente escoger una  $l$  que agregue tres cifras al redondeo efectuado. Específicamente se ha tomado  $l = (10)(168) = 1680$ , donde 168 representa el número de intervalos horarios del horizonte de planeación. Algunas ventajas extras se obtienen de esta  $l$  particular, principalmente al "regresar" del problema (1R) al (R).

En resumen, el procedimiento a efectuar para la conversión a números enteros y obtener la solución a nuestro problema es el siguiente:

- 1] Sea (R) el problema original (ver fig. 2.I.a)).
- 2] Considera  $l$ , suficientemente grande.
- 3] Construye  $(lR)$ .
- 4] Efectua redondeos al entero más próximo en cotas inferiores y superiores por arco, así como en el flujo externo asociado a  $c/nodo$ . Un nuevo problema  $(l'R)$  se obtiene.
- 5] Proceda a la solución del problema  $(l'R)$ .

5.1] Aplíquese la eliminación de las cotas inferiores (cfr. 2.2.2); obsérvese que al usar dicha transformación los nuevos vectores de cotas superiores para el flujo en los arcos así como el nuevo vector de flujos externos tendrán entradas enteras.

5.2] Aplíquese la aproximación lineal al problema derivado (cfr. 2.2.3); si la longitud de  $c/u$  de los segmentos que se proporcionan es entera, los costos y capacidades de los arcos creados también serán números enteros.

5.3] Agregue el arco circulatorio  $(t,s)$  con sus respectivos parámetros. El problema se encuentra en el formato de circulación a costo mínimo, y los parámetros usados son números enteros.

5.4] Aplíquese el algoritmo Out of Kilter. Este paso lleva implícito el desarrollo de un programa en computadora que resuelva el problema general de circulación a costo mínimo por medio del AOOK. El resultado de dicho desarrollo se encuentra en el apéndice 2 del presente trabajo. Ahí se localiza la subrutina PRIDUA escrita en FORTRAN 77 bajo la técnica de programación estructurada, así como comentarios adicionales para su utilización en cualquier problema de circulación a costo mínimo con flujos restringidos y costos unitarios por transporte.

6] Con la solución óptima obtenida en 5.4], reconstruya la solución en términos del problema (R).

#### 4.7.2 ESTADO INICIAL DE LOS ARCOS DE LA RED AL APLICAR EL ALGORITMO OUT OF KILTER

Asumiendo los pasos 1J, 2J, ..., 5.3J del procedimiento de la subsección anterior, la etapa siguiente para la solución del problema es el uso de la subrutina PRIDUA (ver apéndice 2) en una red que tendría el aspecto de la fig. 4.IV. Algunas observaciones son interesantes en la red anterior:

- 1J Excepción hecha del arco que completa la circulación,  $(t,s)$ , el resto de los arcos de la red tienen cotas inferiores iguales a cero.
- 2J Cualquiera arco de la red tiene un costo por transporte mayor o igual a cero.

Ahora bien, es sencillo encontrar una combinación de circulación y potencial  $(X, U)$ , respectivamente, que permita a todos los arcos de la red distintos de  $(t,s)$  ser conformables desde el inicio del AOOK. Considérese, por ejemplo,  $X \equiv 0, U \equiv 0$ , de donde  $\bar{c}(i,j) \geq 0$ . El estado que guardarían los arcos de la red al inicio del AOOK se comenta a continuación:

#### ARCOS SUPERFUENTE-PLANTA

Sea  $(s,p), p \in P$ , un arco que va del nodo  $s$  a un nodo planta  $p$ ,  $\bar{c}(s,p) = c(s,p) - u(s) + u(p) = 0 - 0 + 0 = 0$ , y  $H(s,p) = 0 \leq e'(p)$ . El arco es conformable y se encuentra en estado B. Ver fig. 4.XVI.a).

#### ARCOS PLANTA-INTERVALO

Sea  $(p,i)$ ,  $p \in P$  e  $i \in I$ , un arco cualesquiera que va del nodo  $p$  al nodo  $i$ ,  $\bar{c}(p,i) = c(p,i) - u(p) + u(i) = c(p,i) - 0 + 0 = c(p,i) \geq 0$ . Además  $H(i,p) = 0 \leq \bar{H}'(i,p)$ . El arco es conformable y se encuentra en estado L ó B. Una observación extra: Es precisamente en el costo asociado al arco que va de  $p$  hacia  $i$ , donde la aproximación lineal a la función de costo es realizada (cfr. 2.2.3). De esta manera, aparecerán varios arcos uniendo  $p$  e  $i$  con sus respectivos costos y capacidades.

Siguiendo la notación sugerida en el capítulo 3, sea  $c(p,i,k)$  el costo del  $k$ -ésimo arco uniendo  $p$  con  $i$ . Sin pérdida de generalidad supóngase:

$$0 \leq c(p,i,1) \leq \dots \leq c(p,i,K), \text{ luego}$$

$$0 \leq \bar{c}(p,i,1) \leq \dots \leq \bar{c}(p,i,K).$$

El aspecto que guardan los estados asociados a  $c/\text{arco}$ , se visualizan en la fig 4.XVI.b).

#### ARCOS INTERVALO-SUPERPOZO

Sea  $(i,t)$ ,  $i \in I$ , el arco que va del nodo  $i$  al nodo  $t$ .  $\bar{c}(i,t) = c(i,t) - u(i) + u(t) = 0 - 0 + 0 = 0$  y  $H(i,t) \leq G'(i)$ . El arco es conformable y se encuentra en estado B. Ver fig. 4.XVI.c).

#### ARCO $(t,s)$

$(t,s)$  es el arco que completa la circulación.

$\bar{c}(t,s) = c(t,s) - u(t) + u(s) = 0 - 0 + 0 = 0$  y  
 $H(t,s) < \int_P e'(p) = a(t,s) = b(t,s)$ . El arco no es  
 conformable y se encuentra en estado B1. Ver fig.  
 4.XVI.d).

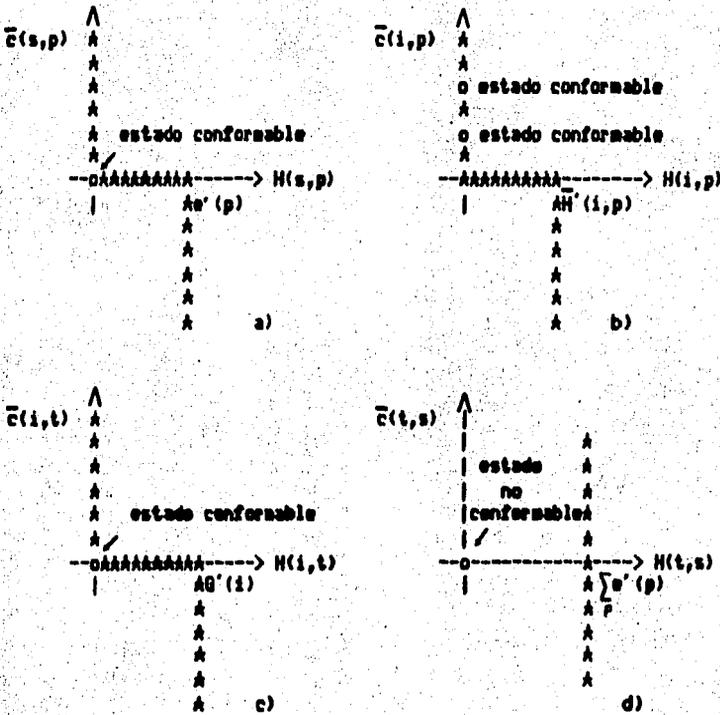


FIG. 4.XVI: ESTADO QUE GUARDAN LOS ARCOS DE LA ASOCIADA AL PROBLEMA, UNA VEZ HECHA LA ASIGNACION  $X \equiv 0, U \equiv 0$ .

Obsérvese que hecha la asignación  $X \equiv 0$ ,  $U \equiv 0$ , todos los arcos son conformables excepto el arco que completa la circulación,  $(t,s)$ . Luego, el trabajo que deberá hacer el AOOK, y por ende la subrutina FRIDUA, será transformar el arco  $(t,s)$  de un estado de no conformabilidad al estado de conformabilidad. Para ello, se deberán incrementar flujos o modificar potenciales de acuerdo a lo indicado en las secciones precedentes.

#### 4.7.3 RESULTADOS DE LA IMPLANTACION DE LA SUBROUTINA FRIDUA

Al igual que la subsección anterior, en la siguiente exposición se asume que nos encontramos al inicio del paso 5.43 del procedimiento incluido en 4.7.1. En este momento, la subrutina FRIDUA, escrita en FORTRAN 77 y desarrollada en la computadora VAX/1130 del IIE se ejecuta para obtener la solución del problema por medio del AOOK.

Diferentes escenarios del sistema eléctrico nacional se han usado para probar la eficiencia de FRIDUA. Algunos comentarios sobre estos se pueden ver en [IRGP,1984]. Los resultados que a continuación se presentan incluyen por escenario:

- 1] El número de escenario asociado, E.
- 2] El número de nodos asociados al problema, |V|.
- 3] El número de arcos asociados al problema, |A|.
- 4] El número de segmentos usados en la aproximación lineal, K.
- 5] El número de iteraciones en la fase primal, IP.
- 6] El número de iteraciones en la fase dual, ID.
- 7] Tiempo de ejecución de la subrutina PRIDUA \*.
- 8] Indicador de salida (óptimo=0, infactible=1)

Observe el lector que:

$$|V| = 1 + |P| + |I| + 1 \quad (4.7.29)$$

$$|A| = |P| + K|P||I| + |I| + 1 \quad (4.7.30)$$

Los resultados se sintetizan en el siguiente cuadro.

---

El tiempo de ejecución no incluye los tiempos de entrada (lectura de los) ni de salida (escritura de resultados)

E	V	A	K	IP	ID	TIEMPO CPU	SALIDA
1	173	1684	3	336	2	(19.91)"	0
1	173	1180	2	336	2	(19.45)"	0
2	173	1684	3	336	2	(19.97)"	0
2	173	1180	2	336	2	(19.35)"	0
3	172	1179	3	336	1	(16.06)"	0
3	172	843	2	336	1	(15.80)"	0
4	172	1179	3	1	1	(00.45)"	0
4	172	843	2	1	1	(00.33)"	0
5	173	1684	3	504	2	(28.15)"	0
5	173	1180	2	504	2	(27.85)"	0

## 4.8 ADAPTACION DEL ALGORITMO OUT OF KILTER AL CASO

ESPECIAL  $a(i,j)=0, c(i,j) \geq 0 \forall (i,j) \in A - \{(t,s)\}$ 

Considérese el problema general de distribución de flujos a costo mínimo, (PGD), en una red con gráfica asociada  $G = (V, A)$ .

Analíticamente:

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in A} c(i,j)x(i,j)$$

s.c.

$$\sum_j x(i,j) - \sum_j x(j,i) \leq d(i) \quad \forall i \in \mathcal{F} \subset V$$

(PGD)

$$\sum_j x(i,j) - \sum_j x(j,i) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{C} \subset V$$

$$\sum_j x(i,j) - \sum_j x(j,i) \geq d(i) \quad \forall i \in \mathcal{J} \subset V$$

$$a(i,j) \leq x(i,j) \leq b(i,j)$$

donde:

$$\mathcal{F} = \{ i \in V / d(i) > 0 \} \quad (4.8.1)$$

es el conjunto de nodos fuente.

$$\mathcal{C} = \{ i \in V / d(i) = 0 \} \quad (4.8.2)$$

es el conjunto de nodos de traspaso.

$$\mathcal{F} = \{ i \in V / d(i) < 0 \} \quad (4.8.3)$$

es el conjunto de nodos pozo.

Suponga que el (PGD) tiene las siguientes características

$$a(i,j) = 0 \quad \forall (i,j) \in A - \{(t,s)\} \quad (4.8.4)$$

$$c(i,j) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A - \{(t,s)\} \quad (4.8.5)$$

Una vez hecha la hipótesis (4.8.5), se sigue necesariamente que el tercer grupo de restricciones de (PGD), aquellas asociadas al conjunto de nodos pozo, son satisfechas con un signo igual para un flujo óptimo.

Transformemos ahora la red inicial a un a red circulatoria, para ello:

- 1] Agréguese un único nodo  $s$  conectado a  $c/nodo i \in \mathcal{F}$  por un arco  $(s,i)$  con cotas  $b(s,i)=d(i)$ ,  $a(s,i)=0$  y costo  $c(s,i)=0$ .
- 2] Agréguese un único nodo  $t$  conectado a  $c/nodo i \in \mathcal{F}$  por un arco  $(i,t)$  con cotas  $b(i,t)=-d(i)$ ,  $a(i,t)=0$  y costo  $c(i,t)=0$ .
- 3] Adicionalmente agréguese el arco  $(t,s)$  con costo  $c(t,s)=0$  y  $a(t,s)=b(t,s)=\sum_{\mathcal{F}} -d(i)$

Como el lector puede apreciar en la nueva red circulatoria, el arco  $(t,s)$  será el único que admita una cota inferior diferente de cero sobre el flujo. Más aún,  $c(t,s)=0$  (cualquier otro valor de  $c(t,s)$  haría lo mismo).

Luego, es sencillo adaptar vectores de flujo y potenciales que permitan tener a todos los arcos diferentes de  $(t,s)$  en un estado conformable al comienzo del algoritmo y, consecuentemente, permanecer así en el resto del desarrollo (dado que el AOOK no incrementa la desviación de los arcos de la red). Simplemente tome  $x(i,j) = 0 \quad \forall (i,j) \in A, \quad u(i) = 0 \quad \forall i \in V$ . Ver fig. siguiente:

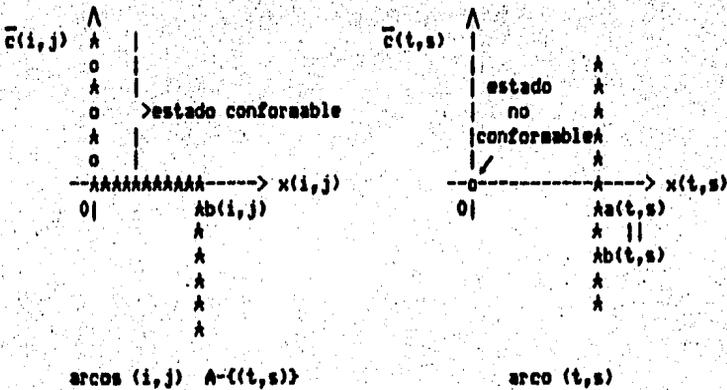


FIG. 4.XVII POSIBLE ESTADO INICIAL PARA LOS ARCOS DE LA RED CIRCULATORIA

Si se comienza con  $X = (x(i,j)) = 0$ , el arco  $(t,s)$  está inicialmente en el edo. B1. De esta manera, el procedimiento de etiquetación del AOOK se aplicará tras tomar el nodo  $s$  como origen y al nodo  $t$  como destino. De hecho para la primera etiquetación, la única condición posible es  $\mu$ , dado que  $x(i,j)=0$  y  $c(i,j) \geq 0$ .

#### PROCEDIMIENTO DE ETIQUETACION

Dado que todos los arcos distintos de  $(t,s)$  son conformables (estado L, B, K con  $a(i,j)=0$ ), las condiciones  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  se reducen a:

$$\mu: \bar{c}(i,j)=0 \quad (0 \leq x(i,j) < b(i,j)) \quad (4.8.6)$$

$$\nu: \bar{c}(i,j)=0 \quad 0 < x(i,j) (\leq b(i,j)) \quad (4.8.7)$$

De donde, el paso c.1] del AOOK no es más que encontrar el s-t flujo máximo en la red inicial, donde los arcos  $(i,j)$  tales que  $\bar{c}(i,j) \neq 0$  han sido suprimidos. El flujo de estos últimos arcos está en cero o saturado (estado L ó K).

#### CAMBIO DE POTENCIAL

Sean  $\bar{I}, I$  los conjuntos de nodos etiquetados y no etiquetados, respectivamente, al fin del procedimiento de etiquetación.

Sea  $(i,j) \in I, j \in \bar{I}$ . Por las mismas razones del párrafo anterior, los resultados (4.4.12), (4.4.13) se reducen a:

$$\bar{c}(i,j) > 0, x(i,j) = 0 \quad (4.8.8)$$

$$\bar{c}(i,j) \leq 0, x(i,j) = b(i,j) \quad (4.8.9)$$

Análogamente, si  $(i,j) \in (I, \bar{I})$ , las relaciones (4.4.14) y (4.4.15) se reducen a:

$$\bar{c}(i,j) \geq 0, x(i,j) = 0 \quad (4.8.10)$$

$$\bar{c}(i,j) < 0, x(i,j) = b(i,j) \quad (4.8.11)$$

Siguiendo un razonamiento similar al de la sección 4.4 los conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  y el escalar  $\theta$  se definen como:

$$S_1 = \{ (i,j) / i \in \bar{I}, j \in I, \bar{c}(i,j) > 0 \} \quad (4.8.12)$$

$$S_2 = \{ (i,j) / i \in I, j \in \bar{I}, \bar{c}(i,j) < 0 \} \quad (4.8.13)$$

$$\theta = \min \left\{ \min_{S_1} ( \bar{c}(i,j) ), \min_{S_2} ( -\bar{c}(i,j) ) \right\} \quad (4.8.14)$$

$$\theta = 00, \text{ si } S_1 = S_2 = \emptyset \quad (4.8.15)$$

Finalmente, la modificación del AOKK puede ser presentada en términos de la red inicial, una vez excluido el arco  $(t,s)$ ; adoptando el lenguaje de flujos, más bien que el de circulaciones.

#### RESUMEN DE LA MODIFICACION DEL ALGORITMO OUT OF KILTER

a] Comience con un flujo  $X=(x(i,j))=0$  y un potencial  $U=(u(i))=0$ .

b] El conjunto de arcos de la red puede ser particionado en subconjuntos:

$$L = \{ (i,j) / \bar{c}(i,j) > 0 \}$$

$$B = \{ (i,j) / \bar{c}(i,j) = 0 \}$$

$$K = \{ (i,j) / \bar{c}(i,j) < 0 \}$$

Aplique el AFF en la red restringida (deducida de la red inicial tras mantener únicamente los arcos de B). En c/iteración, uno tomará como flujo inicial en la red restringida los flujos obtenidos al fin del paso b] de la iteración precedente).

Detenga el algoritmo cuando el valor del flujo en la red completa es igual a  $\sum_j -d(i)$ , o cuando ya no sea posible incrementar el flujo en la red restringida:

b.1] En el primer caso, el flujo obtenido en la red completa es óptimo. Más aún, el último potencial más los valores

$$w(i,j) = \max [ 0, u(i) - u(j) - c(i,j) ]$$

constituyen una solución dual óptima.

b.2] En el segundo caso, ve a c].

c] Sean  $\bar{I}$  e  $I$  los conjuntos de nodos que están etiquetados y no etiquetados, respectivamente, al fin del paso b.2], y sea  $\theta$  definido por (4.8.12), ..., (4.8.15).

c.1] Si  $\theta = \infty$ , no existe flujo de valor  $\sum_{i \in I} -d(i)$ . El problema no tiene solución.

c.2] Si  $\theta$  es finita, defina un nuevo potencial  $u'(i)$  por las relaciones:

$$u'(i) = u(i) \quad i \in I$$

$$u'(i) = u(i) + \theta \quad i \in \bar{I}$$

y regresa a b].

## CAPITULO 5

### CONCLUSIONES, CONJETURAS Y RECOMENDACIONES

La idea del presente capítulo es mostrar una serie de resultados, obtenidos durante la elaboración del presente trabajo, expresados a manera de conclusiones, conjeturas y recomendaciones.

Primeramente, el capítulo comenta la selección de la alternativa más adecuada para resolver nuestro problema en término de los requerimientos de tiempo asociado. Se indica el porqué de ésta y los resultados obtenidos tras su implantación. También se dan algunas recomendaciones a la opción propuesta que, una vez incluidas, la harán más eficiente.

Además se comentan las "deficiencias" en el uso del AP-D durante la solución de nuestro problema. Finalmente, el trabajo da referencias para que el lector interesado enfrente el problema desde perspectivas conceptualmente distintas a las tratadas aquí.

## SELECCION DE LA ALTERNATIVA ADECUADA

Después del trabajo realizado en los primeros cuatro capítulos, nos encontramos en la siguiente posición:

Se han estudiado diferentes alternativas, descartando algunas (PPC, AP-D, etc.) e implantando otras (HEURISTICO + AFF y AOOK). Es ahora el momento de establecer la alternativa que será usada durante la solución de nuestro problema. Esto es, encontrar la mejor alternativa posible en términos de los requerimientos de tiempo asociados a su solución \*.

Ahora bien, durante el desarrollo del heurístico (ver 2.4), se comentó que el procedimiento construido podrá o no determinar una solución "cercana" a la óptima, y precisamente en este segundo caso recurrir al AFF. De acuerdo a los elementos señalados para la "medición de calidad" de un procedimiento heurístico (ver 2.4), creemos que al usar el AFF la "calidad" del procedimiento desarrollado puede empobrecerse notablemente, pues sólo se daría una solución factible a nuestro problema sin importar, en absoluto, el costo asociado a c/arco. Así la

---

Relativo a lo anterior, [SVW,1980] señala que un desafiante tópico de investigación, lleno de actualidad, es: dado un problema particular y un máximo tiempo de CPU permitido (o complejidad), encontrar un método de solución que de la mejor solución posible dentro de esas condiciones.

solución dada por este procedimiento pudiera estar completamente desviada de la idea de "rasaje de picos" del problema de asignación por intervalos (ver 1.1).

Luego, si el heurístico construido en 2.4 pudiera evitar el módulo AFF, haciendo uso de un algoritmo que tome en consideración el costo, por ejemplo a través del AOOK desarrollado en el Cap. 4 e implantado en la subrutina PRIDUA (ver apéndice B), el procedimiento construido mejoraría su calidad. Pues evidentemente la solución proporcionada por el AOOK reflejaría el "rasaje de picos" al considerar el costo en su formulación.

El método de solución sería como se indica en la siguiente figura

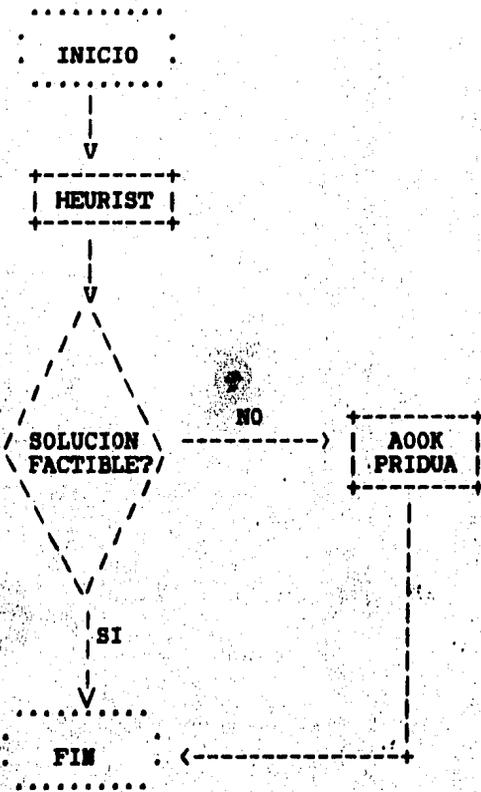


FIG. 5.1 PROCEDIMIENTO INDICADO PARA LA SOLUCION DE NUESTRO PROBLEMA

Al igual que el procedimiento ya construido (ver 2.4), el método propuesto en este capítulo explota, en primer lugar, la búsqueda heurística para la obtención de una solución "cercana" al óptimo en un tiempo muy corto. Sin embargo, en caso de no poder determinar una solución factible a nuestro problema (por no haber podido repartir la energía de una planta), el AOK

complementará el procedimiento. Usando por ejemplo, la solución parcial del heurístico, y continuando hasta encontrar la solución óptima al problema aproximado linealmente, o bien hasta determinar que el problema original no tiene solución factible.

La solución propuesta en la fig. 5.1 ha sido programada en forma estructurada a través del lenguaje Fortran-77 del sistema VAX/11730 del IIE y ha demostrado su eficiencia para solucionar nuestro problema.

Aún más, la incorporación de los resultados exhibidos en la sección 4.8 (especialización del AOOK) a la metodología propuesta, permiten señalar al procedimiento descrito como la opción más viable para la solución de nuestro problema.

Observe el lector que incluso el módulo correspondiente al AOOK puede ayudarse del módulo AFF (ya construido) para determinar la solución a nuestro problema. De esta manera, la modificación exhibida se puede implantar sin hacer un trabajo extraordinario, principalmente al elaborar el código de los programas de computadora.

Ya en este contexto, es útil comentar la "deficiencia" del AP-D en el problema del transporte capacitado con arcos paralelos.

Intuitivamente al desarrollar el AP-D en la estructura particular de nuestro problema, uno esperaba encontrar un algoritmo que:

- 1] Nos ayudará a resolver subproblemas donde el vector costo fuera despreciado y,
- 2] Que fuera de alguna manera similar al algoritmo alfabeta del problema del transporte.

Luego, conforme se desarrolló esta alternativa (ver 3.3), el resultado obtenido fue sorprendente, pues se reincorporó el parámetro costo en los subproblemas construidos (problemas de flujo a costo máximo), perdiéndose completamente el atractivo que motivaba a usar esta metodología.

Más sorprendente resulta lo relativo a 2], una vez que se abandonó la aplicación del AP-D en nuestro problema. Pues en este caso, el trabajo se dirigió al uso de una metodología más general (A00K), y cuya modificación (ver 4.8) obtiene una metodología como la originalmente esperada para el AP-D!

En síntesis, es de notarse como el uso de un procedimiento más general y con una simple especialización, halla conducido a una metodología conceptualmente más "ligera" que la de una especialmente diseñada para nuestro problema.

Este hecho que intuitivamente era inesperado, da la pauta que permite presentar la siguiente conjetura:

¿ Podrá la especialización del AP-D en nuestro problema tener un paralelo con la alternativa desarrollada por la modificación del AOOK, o definitivamente el AP-D no tiene esperanzas de tener una buena actuación en los problemas de transporte capacitado ? \*\*

Historicamente, el AP-D para resolver el problema general de programación lineal fue por primera vez descrito en:

Dantzig , G. B., L. R. Ford, y D. R. Fulkerson, "A Primal-Dual Algorithm for Linear Programs," Linear Inequalities and Related Systems, pp. 171-181, ed H. W. Kuhn y A. W. Tucker. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1956.

y es presentado como una generalización de:

Kuhn, H. W., "The Hungarian Method for the assignment Problem," Naval Research Logistic Quarterly, 2, nos. 1 y 2, pp. 83-97, 1955.

---

\*\* DE ULTIMA HORA: Seria interesante para el lector hojear [Ma,1962] Cap. 11, Secc. 8, donde se presenta una modificación del AP-D para resolver el problema de transporte capacitado, desarrollada por Ford y Fulkerson en [FF,1957], y comparar el algoritmo allí desarrollado con la modificación sugerida en 4.8

por otra parte, el primer trabajo sobre el AOOK se presenta en [Fu,1961]. Surge entonces la siguiente pregunta:

¿ Inducirían las modificaciones hechas al AP-D en [FF,1957] el desarrollo de una metodología primal-dual más general para resolver problemas de flujo a costo mínimo (AOOK) ?

Algunas conclusiones extras del trabajo desarrollado son:

- 1] Una metodología para resolver el problema de asignación por intervalos de la etapa de Iniciación Semanal del problema de CHT ha sido desarrollada e implantada en la paquetería SPCP (Sistema de Planeación a corto plazo: Coordinación Hidrotérmica) del Depto. Análisis de Redes, de la División Sistemas de potencia, del IIE.
- 2] La metodología empleada se desarrolló de una mezcla razonable de métodos heurísticos con rigurosas técnicas de programación matemática.
- 3] La disponibilidad de un programa de computadora que permite resolver el problema de circulación a costo mínimo.
- 4] La utilización racional de los elementos tecnológicos de que dispone la sociedad actual (computadora), para la solución de un problema.

Por último, es preciso comentar que otra forma de atacar el problema, con técnicas conceptualmente diferentes a las utilizadas

aquí, es la actualización de tablas de entrada-salida. En este contexto se menciona el trabajo desarrollado por A. Bachem y B. Korte, ver [BK,1981], y [BK,1978], quienes proponen un algoritmo convergente linealmente, el cual está basado en una modificación del método de Gauss-Seidel. Una comparación de métodos alternativos para la actualización de tablas de entrada y salida se puede encontrar en el trabajo desarrollado por D. Leblanc y M. Queyranne en [LQ,1980].

En otro orden de ideas, es interesante consultar el trabajo desarrollado por D. Romero en [Ro,1984] quien construye un algoritmo para la minimización de normas sobre politopos de transporte.

## APENDICE 1

En el presente apéndice se dan los detalles necesarios para concluir la demostración de los teoremas 2.6, 2.7 y 2.8 referentes al algoritmo alfabeta del problema del transporte; de manera natural, el apéndice se divide en 3 partes.

### PARTE I

Se demuestra el teorema 2.6 , el cual caracteriza la solución óptima de (DPR) a partir del estado que guardan los vértices de la red asociada al problema (PR').

-----

#### TEOREMA 2.6

En no penetración dentro de la solución de (PR') una solución óptima a (DPR) está dada por:

$$\bar{z}(i) \begin{cases} | 1, \text{ si } i \in I^* \\ | -1, \text{ si } i \in I^* \end{cases}$$

$$\bar{z}(j) \begin{cases} | -1, \text{ si } j \in J^* \\ | 1, \text{ si } j \in J^* \end{cases}$$

-----

En primer lugar se demuestra el siguiente lema que será frecuentemente usado en los próximos desarrollos:

-----

**LEMA 1**

En no penetración dentro de la solución de (PR')

1.1]  $j \in J^* \implies$  arco  $(j,t)$  está saturado.

1.2]  $i \in I^* \implies$  arco  $(s,i)$  está saturado.

Prueba: (Se exhibe la demostración de 1.1], para 1.2] es similar)

Una vez lograda la optimalidad en (PR') después de la aplicación del AFF, supóngase que  $j \in J^*$  y el arco  $(j,t)$  no está saturado, i.e.  $f(j,t) < d(j)$ . Al proceder a la reexploración del nodo  $j$ , la parte "hacia adelante"  $*$  del AFF puede

-----

En ingles forward

etiquetar  $t$  a través de  $j$ . Así una  $s$ - $t$  cadena aumentante es encontrada  $\Rightarrow$   $\Leftarrow$ .

Pues por hipótesis nos encontramos en no penetración.

Luego, el lema 1 queda demostrado.

-----

Prosiguiendo con la demostración del teorema 2.6 obsérvese que  $\forall (i, j)$  la selección de los valores  $\bar{\alpha}(i)$  y  $\bar{\beta}(j)$  conduce a 4 posibles casos, siendo estos :

1]  $(\bar{\alpha}(i)=1, \bar{\beta}(j)=1)$ .

2]  $(\bar{\alpha}(i)=1, \bar{\beta}(j)=-1)$ .

3]  $(\bar{\alpha}(i)=-1, \bar{\beta}(j)=1)$ .

4]  $(\bar{\alpha}(i)=-1, \bar{\beta}(j)=-1)$ .

-----

#### LEMA 2

$(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es una solución (DPR)-factible.

i.e. Sea  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Luego,  $\bar{\alpha}(i)$ ,  $\bar{\beta}(j)$  satisfacen las siguientes condiciones:

C1]  $\bar{\alpha}(i) + \bar{\beta}(j) \leq 0$ , si  $(i, j) \in IJ$

C2]  $\bar{\alpha}(i) \leq 1$

C3]  $\bar{\beta}(j) \leq 1$

C4]  $\bar{\alpha}(i), \bar{\beta}(j)$  s.r.s.

DEMOSTRACION (por casos)

1] Si  $\bar{\alpha}(i)=1, \bar{\beta}(j)=1$  ( $\implies i \in I, j \in J$ )

Es claro que C2], C3], C4] son satisfechas.

Para C1], recuérdese el proceso de etiquetación del AFF:

" Si  $i$  está etiquetado, se explora y se etiqueta a sus sucesores no etiquetados  $\rightarrow f(i,j) < 00$ ". Luego, si no se etiqueta a  $j$  es porque el arco  $(i,j)$  no existe en la red  $N(IJ)$ , de donde  $(i,j) \notin IJ$  y esta selección de valores no tiene porque satisfacer C1].

De esta manera, 1] resulta factible.

Por simple inspección, resulta sencillo verificar para 2], 3] y 4] que las condiciones C1], C2], C3] y C4] son satisfechas

Por lo tanto  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  es una solución (DPR)-factible y el lema 2 queda demostrado.

-----

Finalmente, para demostrar que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  forman una solución óptima en (DPR), se hará uso de las condiciones de holgura complementaria.

-----

LEMA 3

Sean  $(f, x(a)), (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  un par de soluciones primal-dual factibles en sus respectivos problemas.  $(f, x(a)), (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  satisfacen las condiciones de holgura complementaria, i.e.

$$H1J \quad (\bar{\alpha}(i) + \bar{\beta}(j)) f(i, j) = 0, \text{ si } (i, j) \in IJ$$

$$H2J \quad (\bar{\alpha}(i) - 1) x(i, a) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$H3J \quad (\bar{\beta}(j) - 1) x(m+j, a) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$H4J \quad \left( \sum_{i=1}^n f(i, j) + x(m+j, a) - c(j) \right) \bar{\alpha}(i) = 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$H4J \quad \left( \sum_{i=1}^m f(i, j) + x(m+j, a) - d(j) \right) \bar{\beta}(j) = 0 \quad j=1, \dots, n$$

(obsérvese que por ser  $(f, x(a))$  una solución (PR)-factible, H4J y H5J quedan inmediatamente satisfechas).

DEMOSTRACION (por casos)

1J Si  $\bar{\alpha}(i) = 1$  y  $\bar{\beta}(j) = 1$ .

H2J y H3J son satisfechos claramente. H1J no tiene porque satisfacerse dado que  $(i, j) \in IJ$ .

2J Si  $\bar{\alpha}(i) = 1$  y  $\bar{\beta}(j) = -1$  ( $\implies i \in I^*, j \in J^*$ )

H1J y H2J son satisfechos. En H3J, obsérvese que  $\bar{\beta}(j) - 1 = -2$

Pd.  $x(m+j, a) = 0$

i.e Pd. En  $N(IJ) \sum_i f(i,j) = d(j)$

Demostración: Como  $j \in J^*$ , del lema 1.1 se tiene que que el arco  $(j,t)$  está saturado. Luego,  $x(m+j,a)=0$ . l.c.d.d.

3J Si  $\bar{\alpha}(i) = -1$  y  $\bar{\beta}(j) = 1$  ( $\implies i \in I^*, j \in J^*$ )

La demostración es análoga a la de 2J. H1J, H3J son satisfechas. Para H2J usese el lema 1.2.

4J Si  $\bar{\alpha}(i) = -1$  y  $\bar{\beta}(j) = -1$  ( $\implies i \in I^*, j \in J^*$ )

H2 y H3 se demuestran a partir del lema 1. Para H1J, obsérvese  $\bar{\alpha}(i) + \bar{\beta}(j) = -2 \neq 0$ .

Pd.  $f(i,j) = 0$

Demostración: Recuérdese la parte "hacia atrás" del AFF una vez que se procede a la exploración del vértice  $j$ . Se etiqueta a todos los predecesores del vértice  $j$  para los cuales  $f(i,j) > 0$ . Luego, si no se etiqueta el vértice  $i$  es por

1. Existe el arco  $(i,j)$ , pero  $f(i,j) = 0$ .
2. No existe el arco  $(i,j)$ , luego  $(i,j) \notin IJ$  y  $f(i,j) = 0$

---

\*\* En ingles backward

En cualquier caso  $f(i,j) = 0$ . l.c.d.d.

El lema 3 queda completamente demostrado.

-----

Así, las soluciones  $(f, x(a))$ ,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  son factibles (ver lema 2) y satisfacen las condiciones de holgura complementaria (ver lema 3). Luego son óptimos en sus respectivos problemas y el teorema 2.6 queda completamente demostrado.

## PARTE 2

Se demuestra a continuación el teorema 2.7, el cual da una cota sobre el número total de operaciones de PENETRACION y NO PENETRACION requeridas para resolver un problema del transporte con el algoritmo alfabeta.

-----

### TEOREMA 2.7

El número máximo de operaciones de penetración y no penetración que realiza el algoritmo alfabeta para obtener la solución óptima de un problema del transporte es

$$\sum_i o(i) + \sum_i (o(i)-1) (\min\{m,n\}+1)$$

Demostración: Claramente cada vez que el algoritmo alfabeta se encuentra en penetración, el valor del flujo incrementa en al

menos una unidad. Luego, el número de apariciones de penetración está acotado por arriba por

$$\sum_i o(i) = \sum_j d(j)$$

Por otra parte, supóngase que en algún momento el algoritmo alfabeto se encuentra en no penetración. En este caso se puede demostrar que el número de apariciones consecutivas de no penetración nunca puede exceder  $\min \{ m, n \} + 1$ . Veamos:

Como se señalaba en la sección 2.4, después de no penetración el etiquetado de la sección anterior permite continuar el trabajo del AFF. De donde un origen y un destino, no etiquetados en la iteración anterior, deberán ser etiquetados en la presente. Para ver esto, recuérdese que después de cambiar las variables duales, al menos un arco  $(\hat{i}, \hat{j})$  se vuelve admisible con  $\hat{i} \in I^*$ ,  $\hat{j} \in J^*$ . De esta forma  $\hat{j}$  recibirá su etiqueta en la presente iteración. Ahora, si el nuevo proceso de exploración y etiquetación resulta en no penetración, del lema 1 de este mismo apéndice, el arco  $(\hat{j}, t)$  está saturado, i.e.

$$\sum_i f(i, \hat{j}) = d(\hat{j}), \text{ y aún más } f(i, \hat{j}) = 0 \quad \forall i \in I^*$$

de donde  $f(i, \hat{j}) > 0$  p.a.  $\bar{i} \in I^*$ , e  $\bar{i}$  puede ser etiquetado. Implícitamente se supone que los orígenes y destinos con oferta o demanda cero han sido borrados del problema original.

Luego, no pueden existir más de  $\min \{m,n\} + 1$  apariciones consecutivas de no penetración.

Por lo tanto, una cota sobre el número total de operaciones requeridas por los subproblemas de flujo máximo para resolver un problema de transporte es

$$\sum_i o(i) + \left( \sum_i o(i) - 1 \right) (\min \{m,n\} + 1)$$

donde el primer sumando acota el número de operaciones de penetración y el segundo las de no penetración.

Así el teorema 2.7 queda demostrado y la parte 2 concluida.

-----

### PARTE 3

Se demuestra el teorema 2.8, el cual ofrece una forma de verificar el valor del flujo máximo en  $(PR')$

-----

#### TEOREMA 2.8

En no penetración dentro de  $(PR')$ .

$$\sum_{i \in I} o(i) + \sum_{j \in J} d(j) = \sum_{(i,j) \in IJ} f(i,j)$$

DEMOSTRACION: Una vez lograda la optimalidad en (PR'), después de la aplicación del AFF. Sean  $(f, x(a))$  y  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  el par de soluciones óptimas del par de problemas (PR) y (DPR). Luego,

$$\xi = \sum_i o(i) + \sum_j d(j) - 2 \sum_{IJ} f(i, j) = \quad (1)$$

$$= \sum_i o(i) \bar{\alpha}(i) + \sum_j d(j) \bar{\beta}(j)$$

pero,

$$= \sum_i o(i) \bar{\alpha}(i) + \sum_j d(j) \bar{\beta}(j) =$$

$$= \sum_{I^*} o(i) \bar{\alpha}(i) + \sum_{I'} o(i) \bar{\alpha}(i) + \sum_{J^*} d(j) \bar{\beta}(j) + \sum_{J'} d(j) \bar{\beta}(j)$$

$$= \sum_{I^*} o(i) - \sum_{I'} o(i) - \sum_{J^*} d(j) + \sum_{J'} d(j) \pm \sum_{I^*} o(i) \pm \sum_{J^*} d(j)$$

$$= \sum_i o(i) - 2 \sum_{I'} o(i) + \sum_j d(j) - 2 \sum_{J'} d(j) \quad (2)$$

De (1) y (2)

$$\sum_i o(i) + \sum_j d(j) - 2 \sum_{IJ} f(i, j) = \sum_i o(i) + \sum_j d(j) - 2 \left( \sum_{I^*} o(i) + \sum_{J^*} d(j) \right)$$

$$\sum_{IJ} f(i, j) = \sum_{I^*} o(i) + \sum_{J^*} d(j)$$

luego, el teorema 2.8 queda demostrado.

-----

## APENDICE 2

Se muestra la subrutina PRIDUA, construida para la solución de cualesquier problema de circulación a costo mínimo, y algunos comentarios para su uso.

Para una mayor claridad, se divide la exposición en tres partes:

En B.1] se comentan algunas generalidades sobre la subrutina PRIDUA. Por otra parte, B.2] exhibe las variables usadas en el desarrollo de la subrutina PRIDUA y su significado. Finalmente, B.3] exhibe la rutina completa.

## B.13 COMENTARIOS GENERALES

PRIDUA es una subrutina estructurada escrita en el lenguaje Fortran-77 A de la computadora VAX/11730 de IIE, que permite resolver el problema de circulación a costo mínimo (Ver 4.3).

Algunas particularidades del código desarrollado son:

1. Dada una red  $N$  con gráfica asociada  $G = (V,A)$ , donde  $|V|=m$  y  $|A|=n$ , PRIDUA requiere que una biyección entre el conjunto  $V$  y el 'segmento' de números naturales comprendidos entre el 1 y el  $m$  sea establecida. Así, los números asignados servirán para identificar los nodos de la red durante el desarrollo del algoritmo out of kilter. Similarmente entre  $A$  y el segmento que va del 1 al  $n$ .
2. Para satisfacer convergencia, PRIDUA requiere parámetros enteros asociados en las cotas por flujo y costos.
3. La dimensión de los arreglos de la subrutina PRIDUA están en función de los valores máximos NMAXAR (número máximo de arcos) y NMAXNO (número máximo de nodos), los cuales son leídos a través de un archivo auxiliar llamado ARRAYSIZE.FOR. De esta manera, para redes que sobrepasen el dimensionamiento previamente asignado, bastará dar una nueva reasignación

---

El lector que desee una mayor información sobre este lenguaje, puede

consultarse a [No,1982], [NI,1979].

acorde al tamaño de red que se desea resolver.

4. Los parámetros asociados a la red circulatoria son pasados por area común (COMMON). El lector también puede pasar los datos requeridos como argumentos de la subrutina. En este caso se debiera modificar la lista de argumentos y eliminar el uso de COMMON's.
5. PRIDUA puede iniciar con cualesquier circulación o potencial. Adicionalmente, PRIDUA puede manejar 'arcos paralelos' entre un par de nodos, en este caso las localidades asociadas a los vectores que denotan el nodo origen y destino de c/u de arcos coincidirían.
6. En la salida PRIDUA muestra a través del indicador SAL si el procedimiento encontró la solución óptima o en caso contrario si el problema es infactible. En el primer caso los vectores FLU y PO contienen los valores óptimos de flujo en c/arco y potenciales en c/nodo, respectivamente.

## B.2J ARREGLOS Y VARIABLES

01/11/77

NSUPN	Número de nodos de la red
MARCOS	Número de arcos de la red
A	Índice del arco A ( $A = 1, \dots, \text{MARCOS}$ )
III(A)	Nodo origen del arco A
JJJ(A)	Nodo destino del arco A
COSI(A)	Costo por unidad de flujo en el arco A
SUP(A)	Límite superior del flujo en el arco A
INF(A)	Límite inferior de flujo en el arco A
FLU(A)	Flujo en el arco A
N	Índice del nodo N ( $N=1, \dots, \text{NSUPN}$ )
PD(N)	Variable dual, es el valor relativo de introducir una unidad de flujo dentro de la red, en el nodo N
IIP	Número de iteraciones primales
IID	Número de iteraciones duales
II	Número de iteraciones ( $II=IIP+IID$ )
SAL	Determina si el flujo sobre la red es factible y óptimo ( $SAL=1$ ), o en caso contrario si no es factible ( $SAL = 0$ )
COR	Costo relativo del arco
NOR	Nodo origen en el procedimiento de etiquetación
NDE	Nodo destino en el procedimiento de etiquetación
NE(N)	Etiqueta del nodo N
ITR	Variable temporal que guarda el valor de la etiqueta del nodo origen
LAB	Indica si fue etiquetado algún nodo

**DEL** Guarda el valor mínimo de la función MINP

**EPS** Valor de aumento (o disminución) de flujo en el arco A

**EXARNC** Variable lógica, indica si existe una arco conformable

**NEARNC** Complemento de la variable anterior

**DESTNE** Variable lógica, indica si el destino del arco no conformable en cuestión, ha sido etiquetado

**ASTNOC** Variable lógica, indica la existencia o no de arcos no conformables

**FUNCION MINP** Calcula el mínimo de dos variables (x,y)

B.3J CODIGO DE LA SUBROUTINA PRIDUA

SUBROUTINE PRIDUA ( NSUPN, MARCOS, SAL, IT )

\*\*\*\*\*

OBJETO

RESOLVER EL PROBLEMA DE CIRCULACION A COSTO MINIMO CON  
FLUJOS RESTRINGIDOS EN CADA ARCO

ENTRADAS

MARCOS NUMERO DE ARCOS.  
COST COSTOS UNITARIOS.  
FLU FLUJOS.  
III NODOS DE LOS QUE SALEN LOS ARCOS.  
INF FLUJOS MINIMOS.  
JJJ NODOS A LOS QUE LLEGAN LOS ARCOS.  
NSUPN NUMERO DE NODOS.  
PO POTENCIALES DE LOS NODOS.  
SUP FLUJOS MAXIMOS.

SALIDAS

SAL SI ES 1 SE ENCONTRO UNA SOLUCION OPTIMA, SI ES 0  
NO EXISTE SOLUCION FACTIBLE.  
IT NUMERO DE ITERACIONES REALIZADAS  
FLU PROPORCIONA EL FLUJO OPTIMO SI EL INDICADOR SAL ES  
IGUAL A 1  
PO PROPORCIONA LOS POTENCIALES OPTIMOS SI EL  
INDICADOR SAL ES IGUAL A 1

OBSERVACIONES

- 1) ESTA SUBROUTINA DETERMINA EL FLUJO A COSTO MINIMO SOBRE  
UNA RED CIRCULATORIA CUYO FLUJO, EN C/ARCO, ESTA  
ACOTADO POR ARRIBA Y POR ABAJO. C/ARCO A ESTA  
CARACTERIZADO POR:  
NODO INICIAL ..... III(A)  
NODO FINAL ..... JJJ(A)  
COTA SUPERIOR ..... SUP(A)  
COTA INFERIOR ..... INF(A)  
COSTO UNITARIO ..... COST(A)
- 2) LOS COSTOS Y CAPACIDADES DE FLUJO PUEDEN SER ENTEROS  
ARBITRARIOS.
- 3) PUEDEN EXISTIR ARCOS PARALELOS CONECTANDO UN PAR DE  
DE NODOS.
- 4) EL ALGORITMO PROPORCIONA COMO RESULTADOS EL INDICADOR  
DE OPTIMALIDAD SAL. SI SAL ES IGUAL A 1 SE ENTREGAN  
LOS VECTORES FLU Y PO. FLU(A) ES EL FLUJO OPTIMO EN  
EL ARCO A. PO(J) ES EL VALOR OPTIMO DE LA VARIABLE  
BUAL ASOCIADA AL VERTICE J.

C                   PROGRAMA: LUIS IGNACIO HERNANDEZ VIVAR                   \*  
C                   \*  
C                   \*\*\*\*\*  
C

C                   INCLUDE 'ARRAYSIZE.FOR'

C                   \*\*\*\*\*  
C                   LAS SIGUIENTES VARIABLES SON PASADAS POR AREA COMUN, Y  
C                   SE ENCUENTRAN DIMENSIONADAS DE ACUERDO A ARRAYSIZE.FOR  
C                   \*\*\*\*\*  
C

C                   COMMON /SUP/ SUP(NMAXARA3)  
C                   COMMON /INE/ INE(NMAXARA3)  
C                   COMMON /III/ III(NMAXARA3)  
C                   COMMON /JJJ/ JJJ(NMAXARA3)  
C                   COMMON /FLU/ FLU(NMAXARA3)  
C                   COMMON /IDUAL/ PD(NMAXND)  
C                   COMMON /COST/ COST(NMAXARA3)

C                   \*\*\*\*\*  
C                   DECLARACION DE VARIABLES  
C                   \*\*\*\*\*  
C

C                   INTEGER SUP ,COST ,FLU ,PD ,SAL,COR,C,EPS,A,AOK,DEL  
C                   INTEGER J, IT, ITP, ITD  
C                   LOGICAL EXARNC, NEARNC, ASTNOC, DESTNE, L1, L2  
C                   LOGICAL LLAVE1, LLAVE2, AUXLOG  
C                   DIMENSION NE(NMAXND)

C                   \*\*\*\*\*  
C                   INICIALIZA EL INDICADOR DE FLUJO OPTIMO Y CONTADORES  
C                   DE ITERACIONES PRIMAL Y DUAL RESPECTIVAMENTE  
C                   \*\*\*\*\*  
C

C                   SAL=1  
C                   ITP = 0  
C                   ITD = 0

C                   \*\*\*\*\*  
C                   PRUEBA "LIGERA" DE FACTIBILIDAD EN LOS ARCOS DE LA RED  
C                   \*\*\*\*\*  
C

C                   DO A=1, NARCOS  
C                    IF (INE(A) .GT. SUP(A)) THEN  
C                      SAL = 0  
C                      PRINT \*, 'LIMITE SUPERIOR MENOR QUE EL INFERIOR EN EL ARCO', A  
C                    END IF  
C                   END DO

C                   \*\*\*\*\*  
C                   INICIA EL ALGORITMO OUT OF KILTER  
C                   \*\*\*\*\*  
C



```
NOR = III(AOK)
NDE = JJJ(AOK)
NE(NOR) = -AOK
NEARNC = .FALSE.
J = AOK
ELSE
  IF ( AOK .EQ. MARCOS ) THEN
```

C  
C  
C  
C  
C

```
*****
HAZ REVISADO TODOS LOS ARCOS Y SON CONFORMABLES (TODOS)
*****
```

```
PRINT *, 'FIN'
SAL = 1
EXARNC = .FALSE.
AOK = AOK + 1
ELSE
```

C  
C  
C  
C  
C

```
*****
EL AOK-ESIMO ARCO ES CONFORMABLE. REGRESA POR UN
NUEVO ARCO Y REPITE EL ANALISIS
*****
```

```
      AOK = AOK + 1
    END IF
  END IF
END IF
END DO
```

C  
C  
C  
C

```
*****
EN CASO DE EXISTIR UN ARCO NO CONFORMABLE "PRENDE" LA BANDERA ASTNOC
*****
```

```
IF ( EXARNC .EQ. .FALSE. ) THEN
  ASTNOC = .FALSE.
ELSE
  ASTNOC = .TRUE.
END IF
```

C  
C  
C  
C  
C

```
*****
SE INICIA PROCEDIMIENTO DE ETIQUETACION PARA DISMINUIR LA
DESVIACION EN EL ARCO, NO CONFORMABLE, ( S, T )
*****
```

```
DO WHILE ( ASTNOC )
  ITR=NE(NOR)
```

C  
C  
C  
C  
C

```
*****
SE BORRAN ETIQUETAS EXCEPTO EN EL NODO ORIGEN
*****
```

```
DO IND = 1, NSUPN
```

```

NE(IND) = 0
END DO
NE(NOR) = ITR
LAB = 1
DO WHILE ( LAB .GT. 0 )
  LAB = 0
  A=1
  DESTNE = .TRUE.

```

```

*****
SE ETIQUETAN TODOS LOS NODOS SIN ETIQUETA QUE SE
CONECTAN POR MEDIO DE UN ARCO A NODOS ETIQUETADOS
*****

```

```

DO WHILE ( A .LE. MARCOS .AND. DESTNE )
  IF ( (NE(III(A)).NE.0.OR.NE(JJJ(A)).NE.0) .AND.
    (NE(III(A)).EQ.0.OR.NE(JJJ(A)).EQ.0) ) THEN
    C=COST(A)-PO(III(A))+PO(JJJ(A))
    IF ( NE(III(A)) .EQ. 0 ) THEN
      L1 = ( FLU(A) .LE. INF(A) .OR.
        (FLU(A) .LE. SUP(A) .AND. C .LT. 0) )
      IF ( L1 .EQ. .FALSE. ) THEN
        NE(III(A)) = -A
        LAB = 1
      END IF
    ELSE
      L2 = ( FLU(A) .GE. SUP(A) .OR.
        (FLU(A) .GE. INF(A) .AND. C .GT. 0) )
      IF ( L2 .EQ. .FALSE. ) THEN
        NE(JJJ(A)) = A
        LAB = 1
      END IF
    END IF
  END IF

```

```

*****
SE ETIQUETA UN NODO Y SE VERIFICA SI ES EL
NODO DESTINO
*****

```

```

IF ( (LAB .EQ. 1).AND.(NE(NDE) .NE. 0) ) THEN
  *****
  SI EL NODO ETIQUETADO ES EL NODO DESTINO
  SE MODIFICA EL FLUJO
  *****

```

```

ITP = ITP + 1
LAB = -1
DESTNE = .FALSE.
ASINOC = .FALSE.
EPS = INFAC
N = NOR

```

```

LLAVE1 = .TRUE.
DO WHILE ( LLAVE1 )
  A = NE(N)
  IF ( A .LE. 0 ) THEN
    M = JJJ(-A)
    IF ( COST(-A)-PO(N)+PO(M).LT.0 ) THEN
      EPS = MINP(EPS,FLU(-A)-SUP(-A))
    ELSE
      EPS = MINP(EPS,FLU(-A)-INF(-A))
    END IF
  ELSE
    M = III(A)
    IF ( COST(A)-PO(N)+PO(M).LE.0 ) THEN
      EPS = MINP(EPS,SUP(A)-FLU(A))
    ELSE
      EPS = MINP(EPS,INF(A)-FLU(A))
    END IF
  END IF
  N=M

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

```

*****
SE PREGUNTA SI DETERMINAMOS EL AUMENTO
DE FLUJO PERMITIDO
*****

```

```

IF ( N .NE. NOR )THEN
  LLAVE1 = .TRUE.
ELSE
  LLAVE1 = .FALSE.
END IF
END DO
LLAVE2 = .TRUE.
DO WHILE ( LLAVE2 )
  A = NE(N)
  IF ( A .LE. 0 ) THEN
    M = JJJ(-A)
    FLU(-A) = FLU(-A) - EPS
  ELSE
    M = III(A)
    FLU(A) = FLU(A) + EPS
  END IF
  N=M
  IF ( N .NE. NOR ) THEN
    LLAVE2 = .TRUE.
  ELSE
    LLAVE2 = .FALSE.
  END IF
END DO

```

```

  END IF
END IF
A = A + 1
END DO

```

IF ( LAB .EQ. 0 ) THEN

\*\*\*\*\*  
NO HAY CICLO QUE CONTENGA AL ARCO NO CONFORMABLE  
Y EMPIEZA EL METODO DE CAMBIO DE POTENCIAL  
\*\*\*\*\*

ITD = ITD + 1  
DEL = INFAC  
DO A = 1, NARCOS  
IF ((NE(III(A)).NE.0.OR.NE(JJJ(A)).NE.0).AND.  
1 (NE(III(A)).EQ.0.OR.NE(JJJ(A)).EQ.0)) THEN  
C = COST(A) - PO(III(A)) + PO(JJJ(A))  
IF (NE(JJJ(A)).EQ.0 .AND. FLU(A).LT.SUP(A))  
1 THEN  
DEL=MINP(DEL,C)  
END IF  
IF (NE(JJJ(A)).NE.0.AND.FLU(A).GT.INF(A))  
1 THEN  
DEL=MINP(DEL,-C)  
END IF  
END IF  
END DO  
IF ( DEL .NE. INFAC ) THEN  
DO N = 1, NSUPN  
IF ( NE(N) .NE. 0 ) THEN  
PO(N) = PO(N) + DEL  
END IF  
END DO  
IF (DEL.GE.IABS(COR).AND.FLU(AOK).GE.INF(AOK)  
1 .AND. FLU(AOK).LE.SUP(AOK)) THEN  
ASTNOC = .FALSE.  
ELSE  
COR = COST(AOK)-PO(III(AOK))+PO(JJJ(AOK))  
LAB = 1000  
END IF  
ELSE  
IF ( ( FLU(AOK) .EQ. SUP(AOK) ) .OR.  
1 ( FLU(AOK) .EQ. INF(AOK) ) ) THEN  
DEL = IABS (COR)  
DO N = 1, NSUPN  
IF ( NE(N) .NE. 0 ) THEN  
PO(N) = PO(N) + DEL  
END IF  
END DO  
IF ( DEL .GE. IABS (COR) .AND.  
1 FLU(AOK) .GE. INF(AOK) .AND.  
2 FLU(AOK) .LE. SUP(AOK) ) THEN  
ASTNOC = .FALSE.  
ELSE  
1 COR = COST(AOK) - PO(III(AOK)) +  
PO(JJJ(AOK))

```
LAB = 1000
END IF
ELSE
```

```
*****
PROBLEMA NO FACTIBLE
*****
```

```
ASTNOC = .FALSE.
SAL = 0
END IF
END IF
END DO
END DO
END DO
```

```
*****
EL NUMERO DE ITERACIONES EN LA FASE PRIMAL Y EN LA FASE
DUAL CONSTITUYEN EL NUMERO TOTAL DE ITERACIONES (IT)
*****
```

```
IT = ITD + ITP
```

```
RETURN
END
```

```
*****
FUNCION AUXILIAR MIMP
*****
```

```
FUNCION MIMP(X,Y)
INTEGER X,Y
IF ( X.LT.Y.AND.X.GE.O ) THEN
MIMP = X
ELSE
MIMP=Y
END IF
RETURN
END
```

## BIBLIOGRAFIA

1. [HL,1974] Hillier, F. y G. Lieberman; "Operations research"; Holden-Day; 1974.
2. [KH,1980] Kennington, J. y R. Helgason; "Algorithms for network programming"; Wiley-Interscience; 1980.
3. [BJ,1981] Bazaraa, J. y J. Jarvis; "Programación lineal y flujo en redes"; Limusa; 1981.
4. [PS,1982] Papadimitrou, C. y K. Steiglitz; "Combinatorial optimization: algorithms and complexity"; Prentice-Hall; 1982.
5. [FF,1962] Ford, L. y D. Fulkerson; "Flow in networks"; Princeton University Press; 1962.
6. [Fu,1961] Fulkerson, D.; "An out-of-kilter method for minimal cost flow problems"; Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 9, no. 1, 18-27; 1961.
7. [FF,1957] Ford, L. y D. Fulkerson; "A primal-dual algorithm for the capacitated Hitchcock problem"; Naval Research Logistics Quarterly 4, 47-54; 1957.
8. [La,1976] Lawler, E.; "Combinatorial optimization: networks and matroids"; Holt, Rinehart & Winston; 1976.

9. [JB,1980] Jensen, P. y J. Barnes; "Network flow programming"; John Wiley and Sons; 1980.
10. [SVW,1980] Silver, E., R.V. Vidal y D. de Werra; "A tutorial on heuristic methods"; European Journal of Operations Research S(1980) 153-162.
11. [Si,1966] Simonard, M.A.; "Linear programming"; Prentice-Hall; 1966.
12. [Ha,1962] Hadley, G.; "Linear programming"; Addison-Wesley Publishing Company; 1962.
13. [Va,1961] Vajda, S.; "Mathematical programming"; Addison-Wesley; 1961.
14. [Wo,1959] Wolfe, P.; "The simplex method for quadratic programming"; Econometrica, 27: 382-398 p.; 1959.
15. [He,1978] Hernández, L.; "El problema de redes y su método de solución"; Tesis Maestría en Investigación de Operaciones DESFI, UNAM; 1978.
16. [Ro,1984]\* Romero, D.; "An algorithm for norm minimization over transportation polytopes"; 1984.
17. [EK,1981] Bachem, A. y B. Korte; "Mathematical programming and estimation of input-output matrices"; Franco Angeli Editore; 1981.
18. [EK,1978] Bachem, A. y B. Korte; "An algorithm for quadratic optimization over transportation polytopes"; Zeitung Angew. Math. Mech. 58: 459-461;1980.

19. [LQ,1980] Leblanc, D. y M. Queyranne; "Comparison of alternative methods of updating input-output tables: A note"; Technological Forecasting and Social Change 16, 143-146; 1980.
20. [IRGF,1984] Inda, A., M. Ruiz, I. Guillén, A. Papacostas; "Reporte de pruebas del prototipo de coordinación hidrotérmica"; Reporte Interno, Depto. Análisis de Redes, IIE; 1984.
21. [MI,1984] Nieva, R.; "Asignación de unidades hidro y termoeléctricas: Un paquete de programas para la planeación de operación a corto plazo, en sistemas eléctricos de potencia"; Boletín IIE, vol. 8, num. 5, sept/oct 1984.
22. [MIF,1985]\* Nieva, R., A. Inda, J. Frausto; "CHT: A digital computer package for solving short term hydro-thermal coordination and unit commitment problems"; 1985.
23. [Ca,1979] Carpentier, J.; "Optimization techniques in large scale power system operation"; Invited lecture Congress IFAC; New Delhi, agosto 1979.
24. [AG,1981] Arroyo, G., J.S. Gámiz; "El sistema eléctrico mexicano, descripción y filosofía de operación. Problemática actual"; III Simposio latinoamericano sobre centros de control para sistemas eléctricos de potencia; Can Cun, Q. R., junio 1981.
25. [GZ,1981] Guzmán, L., D. Zavala; "Planeación operativa a mediano plazo del sistema eléctrico mexicano"; III Simposio latinoamericano sobre centros de control para sistemas eléctricos de potencia; Can Cun, Q. R., junio 1981.
26. [Mo,1982] Montiel, C.; "Programación fortran-77"; Documento interno, Unidad de cómputo IIE; Julio 1982.

27. [HH,1979] Hume, J., R.C. Holt; "Programming fortran 77: a structured approach"; Reslon Publishing Company, Inc.; 1979.

1979-03-01

\* aún no publicado.