Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Temas de ecuaciones diferenciales susceptibles de impartir a nivel medio superior.

Tésis Profesional
Que para obtener el Título de :
Licenciado en Matemáticas
Presenta

Flavio Gómez Arredondo

México, D.F., a 29 de Noviembre de 1985.

Indice

Introducción

El objeto del presente trabajo es dar un cuadro general de la naturaleza escencial de las ecuaciones diferenciales. Para ello no hay necesidad de entrar en detalle de teoría, pues el pensamiento, que avanza de lo concreto a lo abstracto siempre que sea correcto no se aleja de la verdad sino que se acerca a ella. La abstracción de la materia, de una ley natural, la abstracción del valor de uso, Etc., en pocas palabras, todas las abstracciones científicas correctas reflejan la naturaleza en forma más profunda, veraz y completa. De la percepción viva al pensamiento abstracto y de éste a la práctica: Tal es el camino dialectico del conocimiento de la verdad.

Se hace mucho énfasis en el principio determinista pues sin el cuál habria un vacio que no podriamos llenar.

Agradesco la participación entusiasta del seminario de enseñanza y titulación, que con su critica fué posible construir el trabajo de tésis.

A mis hijos:

Ani,

Aura

y

Jesús.

Capítulo I

Planteamiento del problema

Es deseable poner el acento en un aspecto difícil de la concepción filosófica de algunos tópicos elementales de la Física y la Matemática a saber, en algunos elementos del razonamiento dialéctico.

Basándonos en los clásicos, el movimiento y la dialéctica aparecen en la Matemática cuando se introducen en esta las variables. En los primeros niveles de la enseñanza matemática, lo usual, es manejar como variable a una Literal, en cuyo lugar puede sustituirse la denominación de cualquier elemento de un cierto conjunto numérico.

En suma la dialéctica en este caso está mucho más profundamente y no son suficientes las anteriores explicaciones formales.

En rigor el esclarecimiento de este tipo de situaciones exige ser desdoblado del enfoque histórico.

En el presente trabajo tal enfoque no será intentado pues nuestro objetivo es mucho más modesto, sólo ilustraremos con algunos ejémplos las ideas que al respecto tenemos.

De manera similar a como en las ecuaciones algebráicas, digamos del tipo:

$ay^2 + by + c = 0$, se plantea determinar -

los valores numéricos de la variable y para los cuáles dicha ecuación se satisface* (conjunto solución), en las ecuaciones diferenciales donde la función incógnita está afectada del operador derivada, se plantea como problema fundamental el determinar la función incógnita (solución general). Aqui se presentan tres posibles métodos de solución.

I.- Método de integración. Basta con conocer a nivel manipulativo las nociones de derivada e integral para estar en la posibilidad de resolver problemas, cuyo planteamiento nos lleva a ecuaciones como la del crecimiento exponencial.

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = Ky$$

O como la del movimiento armónico simple

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -w^2y$$

donde en ambos casos $y = y(t)$ es la función incógnita y las constantes $K>0$ y w^2 son constantes de proporcionalidad.

A este respecto recuérdese que el mismo Newton consideraba el problema de hallar primitivas ó integrales indefinidas de una función $f(x)$ como la (integración de la ecuación particular $\frac{dy}{dx} = f(x)$)

* "Satisface" significa que la igualdad se transforma en una identidad para tales valores que se denominan solución.

II.- Basta con conocer la noción de derivada y algunas de las propiedades de ésta, de manera que pueda indagarse el comportamiento de las soluciones sin conocer explicitamente tales soluciones. (Método cualitativo)

III.- Basta con conocer el método de aproximaciones - sucesivas para obtener en forma aproximada las soluciones (Método numérico).

En diferentes áreas de la actividad humana surgen -- problemas que en forma natural se reducen a ecuaciones -- tipo (1). El carácter de estor problemas y el método para resolverlos podemos describirlos aproximadamente asi:- se estudia un cierto proceso, cuya naturaleza puede ser,- Física, Biológica, Geológica, Etc. Supongamos que de este proceso nos interesa cómo varia con el tiempo cierta ca-- racterística del mismo, esto es, nos interesa determinar una cierta magnitud incógnita tipo temperatura de un cuerpo, presión, tamaño de una población, Etc..

Si tenemos suficientes datos podemos intentar la --- construcción de su modelo matemático. En muchos casos, - de los datos experimentales acerca del desarrollo del proceso ó bién de las leyes particulares de las diferentes - ciencias (2a. ley de Newtón, ley de acción de masas, Etc) Se logra tener información sobre la velocidad instantamea de cambio de la magnitud incógnita $y = y(t)$ respecto al tiempo, es decir sobre la derivada $y' = y'(t)$ donde $' \equiv \frac{d}{dt}$

Precisamente esta información la podemos escribir - como una ecuación tipo ($y' = f(t,y)$...(3) con función incógnita igual a la característica que nos interesa -- $y(t)$, esta ecuación describirá nuestro proceso, bajo ciertas restricciones, desde el punto de vista de su caracte-- rística $y(t)$.

Hallar todas las posibles soluciones de la ecuación diferencial, es en si un problema estrictamente matemático y significa obtener todos los posibles tipos de variación de la magnitud y.

Señalemos como a travéS de esta descripción (a tal descripción se le llama modélo) siempre resulta necesario hacer ciertas suposiciones simplificadoras: despreciar tales ó cuáles hechos ó fenómenos colaterales, aceptar ciertas condiciones "ideales", en fin abstraerse de muchos detalles concretos. Esto naturalmente lleva a ciertas restricciones en la aplicación del modélo.

La experiencia acumulada de diferentes ciencias, --- muestra que muchos problemas de contenidos distintos se - reducen al mismo modelo. Por motivos de clasificación de los modelos resulta conveniente elaborar métodos de solución de tales ecuaciones ó su análisis cualitativo, independientemente de los problemas que las generaron.

Si un problema queda reducido a una ecuación diferen cial con al menos un método de solución conocido, entonces se considera que tal problema está con principio resuelto. En este caso se considera que la parte creativa del problema termina con el planteamiento del modélo, -- pues la segunda etápa consistente en la búsqueda de la - solución es aunque importante un problema técnico. Aqui de nuevo estamos ante un problema análogo (reducción a - ecuaciones comunes).(*)

(*) Cabe mencionar que debido a la rápida y creciente complejidad de las ecuaciones diferenciales, este último problema deja rápidamente de ser un problema técnico y obliga al análisis numérico ó al análisis cualitativo de las soluciones sin conocerlas.

Capítulo II

Construcción de modelos y reglas de manipulación.

1.- Es seguramente bién conocido el modelo a travéS del cuál la velocidad de crecimiento de una magnitud es proporcional a la misma magnitud, esto es:

$$f'(t) = Kf(t)$$

(La ' significa la derivada $\frac{d}{dt}$)

(vease el capítulo I)

Para este tipo de fenómenos el típico ejémplo de los textos se refiere a la desintegración de una sustancia radiactiva: $f(t)$ denota la masa radiactiva al tiempo t, y el coeficiénte K es la tasa promedio de crecimiento, en nuestro caso negativo. Hasta aqui, escencialmente, no surge ninguna dificultad, pero no se nos ocurra como segundo ejémplo tratar el crecimiento de la población del país al 3.5% anual, porque a muchos dejará perplejos y hasta protestas podrá provocar. Cómo es posible, dirán los defensores del rigor matemático, derivar una función que sólo toma valores enteros.

La indignación puede convertirse en confución total si aclaramos que, incluso en el primer ejémplo de la desintegración radiactiva, nos encontramos en un caso similar al segundo, esto es, también en el primer ejémplo, realmente, la función $f(t)$ esta referida al número entero -

de átomos que se conservan sin desintegrarse al tiempo t.

Esto nos lleva a hacer una aclaración importante sobre los modelos matemáticos en general. Por lo regular el modelo matemático de un fenómeno esquematiza a dicho fenómeno. Es por esto que un modelo matemático nos da buenas predicciones sólo dentro de ciertos límites. Así en el segundo ejémplo sólo para poblaciones muy grandes y para intervalos de tiempo suficientemente pequeños el modelo es válido, fuera de tales límites el modelo pierde su sentido real y su aplicación sin la debida reflexión lleva a resultados erróneos ó absurdos.

2.- Ahora resultan ampliamente conocidos ciertos ejémplos ya clásicos. La Física Newtoniana para velocidades terrestres de móviles usuales, indudablemente refleja en forma correcta ciertos fenómenos reales pero deja de ser aplicable para velocidades comparables con la velocidad de la luz, pues lleva a contradicciones con los experimentos. Esto significa que fuera de los límites de validez de la mecánica Newtoniana actúa otra mecánica, la mecánica de la teoría de la relatividad de Einstein.

Este proceso dialéctico de transformación de ciertos modelos objetivamente correctos en ciertos rangos a otros modelos, resulta ser crucialmente importante como para ser ilustrado en ejémplos sencillos. Intentaremos analizar con más detalle un ejémplo de la mecánica:

Incluso en los cursos a nivel de secundaria, correctamente se afirma que en muchos problemas un cuerpo material "Suficientemente" pequeño puede considerarse como un "punto material" despreciando así sus dimensiones. Esto ocurre, por ejémplo, con una pelota lanzada hacia arriba desde la superficie de la tierra, sin tomar en cuenta la resistencia del aire, la cuál se moverá en una recta vertical solo bajo la acción de la fuerza de gravedad:

($F_{gr} = -mg$, donde g es la aceleración de la gravedad y m la masa), sabiendo además la posición y velocidades iniciales, las cuales denotaremos por

$$Z(o) = o$$
$$V(o) = V_o$$

En este caso la "Ley" física que está detrás del problema del movimiento del punto material es la 2a. ley de Newtón. En efecto

$$(1) \quad ma(t) = F$$

Aqui m es la masa y a la aceleración del punto material y F representa la suma de todas las fuerzas que intervienen, que en nuestro problema es sólo la fuerza de gravedad $F_{gr} = -mg$ por lo tanto la ley 1 nos queda:

$$ma(t) = -mg \quad \text{ó sea}$$
$$(2) \quad a(t) = -g$$

donde debe recordarse que la aceleración de la gravedad g se considera constante e igual a 9.8 m/seg^2.

Con el primer método este problema se resolverá así: Dado que la aceleración de un punto material $a(t)$ tiene la interpretación mecánica de ser la razón de cambio instantanea de la velocidad respecto del tiempo, ó sea:

$$(3) \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

entonces de (2) y (3)

$$(4) \quad \frac{dv}{dt} = -g$$

con la condición adidional dada.

$$(5) \quad V(o) = V_o$$

El problema (4) - (5) puede resolverse integrando, para lo cuál usaremos el hecho de que la diferencial de toda función que tiene derivada es igual a su derivada por la diferencial de la variable:

$$dv = \frac{dv}{dt} \cdot dt \qquad (*)$$

pero por (4)

$$dv = -g\, dt$$

e integrando en forma indefinida

$$\int dv = -g \int dt \qquad (**)$$

ó sea:

$$(6) \quad v(t) = -gt + C_1$$

donde C_1 es la constante arbitraria de integración, susceptible de determinar debido a la condición (5). En efecto, sustituyendo en (6) $t = o$ tendremos:

$$V(o) = -g.o + C_1$$

es decir:

$$(7) \quad V_o = C_1$$

que sustituyendo en (6) nos lleva a:

$$(8) \quad V(t) = -gt + V_o$$

*) vease el apéndice 1.

**) puede integrarse en forma definida tomando en cuenta la dondición (5), quedando:

$$\int_{v_o}^{v} dv = -g \int_{0}^{t} dt \Rightarrow V \Big]_{v_o}^{v} = -gt \Big]_{0}^{t} \Rightarrow$$

$$V - V_o = -g \left[t - o \right] \Rightarrow V(t) = V_o - gt$$

En forma análoga dando la interpretación mecánica de la velocidad $V(t)$ como la razón de cambio instantanea de la posición Z con respecto del tiempo t, tendremos de nuevo que:

$$(9) \quad \frac{dz}{dt} = V$$

De (8) y (9) obtenemos:

$$(10) \quad \frac{dz}{dt} = -gt + V_o$$

pero como Z es una función que tiene derivada dada por -- (10), entonces:

$$dz = \frac{dz}{dt} \cdot dt$$

y sustituyendo (9) llegamos a :

$$dz = (-gt + V_o) \, dt$$

e integrando en forma indefinida, tendremos:

$$\int dz = \int (-gt + V_o) \, dt \quad (*)$$

ó bién:

$$Z \, (t) = -g \int (\, tdt + V_o \int dt$$

esto es:

$$(11) \quad Z(t) = -g \frac{t^2}{2} + V_o \, t + C$$

donde C es la constante arbitraria de integración que podemos determinar de la condición inicial dada arriba:

$$(12) \quad Z \, (o) = o$$

En efecto sustituyendo: $t = o$ en (11)

$$Z \, (o) = -g \frac{o^2}{2} + V_o \cdot 0 + C$$

(13) $0 = C$

Consecuentemente de (11) tenemos que:

$$Z(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t$$

Esto nos da la ley del moviemiento de la pelota.

(*) Aqui podemos integrar también en forma definida pero a su vez la integral definida puede calcularse por aproximaciones sucesivas como es usual hacerse en los cursos de Matemáticas IV de los C.C.H.

La coordenada que nos da la altura Z y la velocidad V cambian con el tiempo. Usualmente en los libros de texto sólo se afirma que dichas magnitudes cambian continuamente y que esto ocurre en el caso general del movimiento de un punto material. En realidad lo que ocurre es que las fuerzas que actuan sobre el cuerpo en cuestión son magnitud finita. Es por esto que también es finita la aceleración transmitida al cuerpo y consecuentemente se concluye la continuidad de la velocidad V y de la posición Z respecto del tiempo, pero en realidad la pelota al pegar sobre el suelo instantaneamente cambia la dirección de su movimiento y rebota. Puesto que la pelota no es completamente elástica al iniciar su primer salto su velocidad inicial será menor que la velocidad inicial del lanzamiento original, ó bién:

$$V_1 = K V_0 ,$$

donde en coeficiente de proporcionalidad $K < 1$.

Considerando al coeficiente K como constante en - los sucesivos saltos es posible calcular todo el últerior desarrollo del proceso.

Estos resultados sorprenden y propician grandes -- discuciones. (*)

Por ejémplo, resulta que los instantes sucesivos tn, en que la pelota rebota sobre el piso, convergen, al crecer n, a un cierto límite finito T:

$$\lim_{n \to \infty} T_n = T . \quad \text{esto es:}$$

Ocurren infinitos rebores de alturas decrecientes en el intervalo de tiempo $[0,T]$

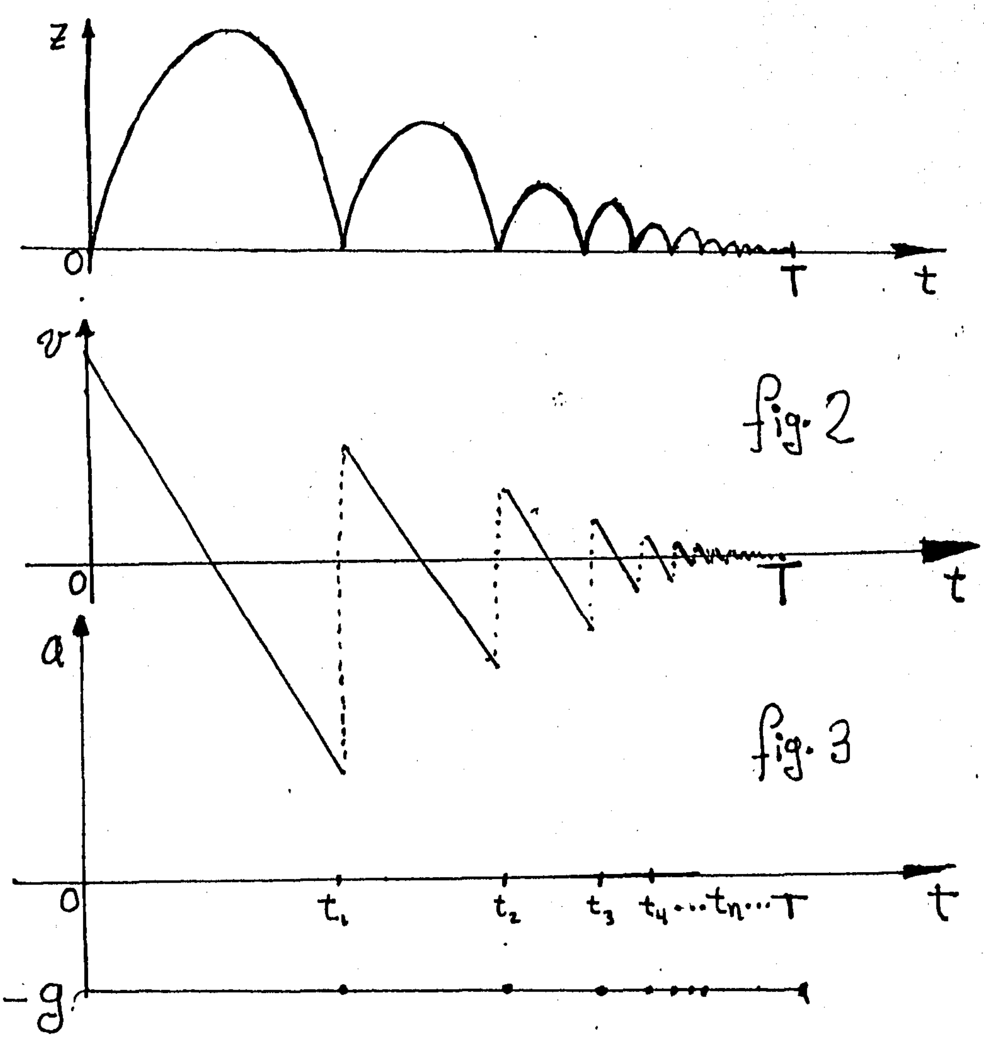
Evidentemente este modélo es idealizado, pues no es - aplicable para saltos cuya altura sea del órden del diámetro de la pelota.. Pero el modélo es completamente realista: La rápida acumulación de los instantes del golpeteo de la pelote sobre el piso y la completa paralización de élla al tiempo T son claras, incluso "al oido".

(*) Aqui puede tener interes dejar de tarea dibujar las - gráficas de Z (t), V (t) y a(t) para una K diferente:

$$(0 < K < 1)$$

A continuación ilustraremos el tipo de gráficas - obtenidas para Z, V y a como funciones de t para una K fija:

fig. 1



En el instante t_n la velocidad cambia dando un salto del valor negativo $-V_{n-1}$ al valor $V_n = K V_{n-1}$ (dis-- continuidad en t_n)

La aceleración a tiene todo el tiempo el valor constante $-g$, excepto en los momentos de rebote t_n. En tales instantes la pelota recibe "impulsos virtuales" (instantaneos) de magnitud finita. Tales impulsos virtuales que instantaneamente cambian la velocidad son de larga tradición en la Física y eran tradicionalmente tratados en problemas sobre colisiones de esferas y sobre los botes de las bolas en las bandas de una mesa de billar. Resumiendo, si se desea hablar sobre las aceleraciones de la pelota en los momentos de rebote tendrá que acudirse a la idea de los impulsos virtuales, ó en lenguaje moderno tendriamos que referirnos a ciertas "funciones" tipo la "función δ de Dirac", pero entonces nos saldriamos de los marcos elementales prefijados, pues tales funciones constituyen un aparato matemático sofisticado fuera de las pretensiones de este trabajo.

El discutir lo anteriormente expuesto nos puede llevar a la siguiente conclusión: Lo correcto de la tesis acerca de la finitud de las fuerzas involucradas (y la continuidad de la velocidad respecto del tiempo que se desprende de élla) lleva a una contradicción al considerarse a la pelota como un punto material. Sin embargo, resultó correcto no pasar a considerar a la pelota como un cuerpo de dimensiones finitas deformable, simo la introducción práctica al modélo de lo que llamamos impulsos virtuales.

Desde el punto de vista matemático este problema es interesante en cuanto ejémplo de aplicación a un fenómeno real (aunque ingenuo) de funciones discontinuas: La velocidad V (t) en los puntos de discontinuidad t_n que se acumulan al punto T donde en este último punto la función V (t) es continua. Más aún la función Z ($_t$) en el punto T resulta incluso derivable con derivada Z igual a 0. Esta última observación resulta sólo ser atractiva a los interesados en la Matemática, ya que aquí estabamos empezando a analizar el modélo construido más allá de los límites de su aplicabilidad. Esto resulta típico para el estílo de trabajo del llamado matemático "puro".

3.- Otra justificación de porqué estudiar ecuaciones diferenciales a nivel medio superior:

Es un hecho que enseñar la concepción científica del mundo, incluso a nivel medio superior, es imposible sin al menos los rudimientos de la historía de la ciencia y la ubicación de las principales etápas de su desarrollo. Una de tales etápas es la correspondiente a la concepción determinista de las ciencias naturales y ésta, a su vez, es imposible, incluso de enunciar, sin la noción del modélo matemático a travéz del cual fué originalmente planteado, a saber la noción de ecuación diferencial.*

Toda la ideología de las ciencias naturales matematizadas, desde Newton hasta Laplace, está íntimamente re lacionada con la noción de ecuación diferencial. En -- particular Laplace formuló su principio General Determinista a partir de la hipótesis consistente en que -- las principales leyes de la naturaleza se expresan mediante ecuaciones diferenciales y que resolver dichas ecuaciones permite en forma real predecir el futuro unívocamente.

En la práctica se sabe que el problema de integrar una ecuación diferencial (resolverla) es un verdadero - problema, que se resuelve sólo en forma aproximada vía los llamados métodos numéricos. Sin embargo, como se afirma al pie de la página anterior, incluso a nivel de Preparatoria, es posible dar una clara noción de lo que es una ecuación diferencial, para lo cuál se propone -- analizar mínimamente los problemas de crecimiento orgánico exponencial, movimiento uniformemente <u>acelerado</u> y el de oscilaciones armónicas.

Recuerdese también que para Newton existian dos -- problemas fundamentales en el análisis: i) hallar las derivadas, dadas las funciones. ii) Hallar de las relaciones entre funciones y sus derivadas tales funciones. Esto último es integrar una ecuación diferencial (resolverla).

* A nivel medio superior el programa de ecuaciones diferenciales podría reducirse al estudio de las ecuaciones: $y' = K$, $y' = f(x)$, $y' = Ky$, $y'' = a$, $y'' = -K^2y$

Capitulo III

Ecuaciones Diferenciales Lineales
(con coeficientes constantes)

1.- La ecuación diferencial.

(1) $y' = K y \quad , \quad K \neq 0$

se llama lineal debido a que la función incógnita y como su derivada y' aparecen en forma lineal (elevadas a la primera potencia).

Es fácil comprobar directamente via derivación (1) tiene la forma:

(3) $y(t) = c\, e^{Kt}$ (*)

(*) En efecto dividiendo (1) entre $y \neq 0$ obtenemos $\frac{y'}{y} = K$, esto es $\frac{d}{dt}(\ln y) = K$, donde aplicando las propiedades de la integral indefinida a la última ecuación tendremos que $\ln y = K t + C_1$, donde C_1 es un real arbitrario /por comodidad pondremos $C_1 = \ln C$/ luego $\ln \frac{y}{c} = Kt$, ó sea $\frac{y}{c} = e^{Kt}$ que es (3) donde C es una constante arbitraria.

Resulta que si en el plano de coordenadas (t,y) representamos las gráficas de estas soluciones para todos los posibles valores de C , tendremos todo el plano cubierto por éllas y por cada punto del plano pasa una y sólo una gráfica. El plano queda como "tejido" de gráficas de (3) que no se cortan, véase la figura 4.

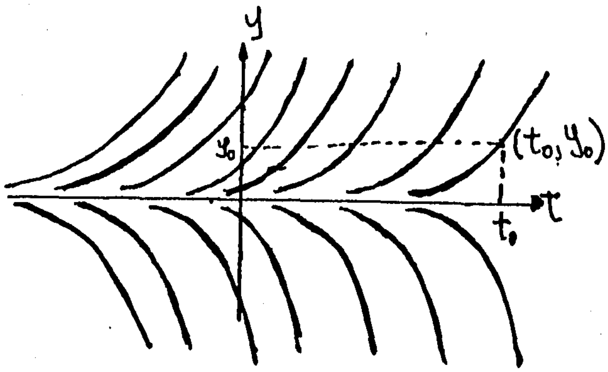


fig. 4

$K > 0$

El que por cada punto (t_0, y_0) pasa una única gráfica, en nuestro caso, es fácil de demostrar, basta para ello con encontrar todas las gráficas tipo (3) que pasan por dicho punto (t_0, y_0) del plano coordenado. Determinemos los valores de C para los que la gráfica de (3) pasa por (t_0, y_0): $y_0 = c\, e^{K t_0}$ que nos da un único valor de $C = y_0\, e^{-Kt_0}$, por lo tanto por nuestro punto (t_0, y_0) pasa una única gráfica tipo (3), a saber:

$$(4) \quad y = (y_0 e^{-Kt})\, e^{Kt} = y_0\, e^{K(t - t_0)}.$$

Es frecuente formular el hecho anterior diciendo que, la ecuación diferencial (1) admite una única solución que satisface la condición inicial $y(t_0) = y_0$, y tal solución está dada por (4).

2.- Una ecuación diferencial lineal un poco más general esta dada por:

$$(5) \quad \boxed{y' = Ky + a}$$

donde tanto K como a son constantes.

Esta ecuación fácilmente se redude a una ecuación tipo (1) si su parte derecha se pone en la forma siguiente:

(5') $\quad y' = K\left(y + \frac{a}{K}\right)$, donde estamos suponiendo que evidentemente $K \neq 0$ y donde denotaremos al paréntesis obtenido $\left(y + \frac{a}{K}\right)$ por una nueva función incógnita - Z ($Z = Z(t)$ ya que $y = y(t)$), esto es hacemos:

(6) $\quad Z = y + \frac{a}{K}$, de donde:

$$Z' = \frac{d}{dt}\left(y + \frac{a}{K}\right) = y' \underset{=}{(5')} K\left(y + \frac{a}{K}\right) = KZ$$

de este modo hemos obtenido que la nueva función incógnita (6) satisface la nueva ecuación diferencial.

$$Z' = KZ$$

que efectivamente es de la forma (1) por lo cual sus soluciones son de la forma (3)

$$Z(t) = C e^{Kt}$$

ó bién, dado que Z está dada por (6) serán de la forma

$$(7) \qquad \boxed{y(t) = -\frac{a}{K} + c\, e^{Kt}}$$

Aquí de nuevo C (la constante arbitraria de integración) se determina unívocamente si tenemos dada una condición inicial tipo $y(t_0) = y_0$.

Lo presentado hasta aquí es de hecho todo lo que se necesitaría, a nuestro juicio claro está, para tratar a nivel preparatoria las ecuaciones diferenciales lineales de primer órden, esto es, las ecuaciones donde sólo interviene la derivada de primer órden y tanto ésta como la función incognita aparecen linealmente.

Capitulo IV

Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales.

Los ejémplos típicos de problemas que conduden a ecuaciones diferenciales, apropiados a nivel preparatoria, estan relacionados con los procesos de desintegración radioactiva, del Crecimiento de una población en plazos cortos, su duplicación, agotamiento de recursos naturales, densidad de las hormigas fuera del hormiguero, reacciones químicas de primer órden, enfriamiento de cuerpos, presión barométrica, concentración de sales en soluciones, el crecimiento de la longitud de un pez, Etc.. Nosotros plantearemos aquí tres ejémplos que conducen a ecuaciones lineales que también creemos apropiadas a este nivel.

1.- MODELO DE CRECIMIENTO DE UNA POBLACION DE BACTERIAS.

Sea $N(t)$ el tamaño de una población de bactérias al tiempo t.

Bajo condiciones ideales el incremento del tamaño de la población que denotaremos (*) por:

$$\Delta N(t) \overset{not}{=} N(t+h) - N(t)$$

durante un lapso de longitud h (de t a $t + h$), para muchos tipos de bacterias podemos considerarlo como - proporcional tanto a $N(t)$ como a h, para h pequeño. Lo dicho podemos resumirlo sinbólicamente como:

$$(8) \quad \Delta N(t) \approx K \cdot N(t) \cdot h$$

donde $K > 0$ es la constante de proporcionalidad que naturalmente depende del tipo de bacterias.

De (8) dividiendo entre h obtenemos:

$$(8') \quad \frac{\Delta N(t)}{h} \approx K \cdot N(t)$$

Ahora haciendo abstracción de que la magnitud de una población sólo puede medirse con números enteros consideremos que $N(t)$ cambia en el tiempo continuamente. Más aún tomando en cuenta que la última igualdad aproximada - es más exácta en cuanto más pequeña sea h
de suerte que pasando en (8') al límite cuando h tiende a cero, obtenemos una ecuación diferencial tipo (1):

$$(9) \quad \dot{N} = K N \quad (**)$$

Por lo tanto de (3) del capitulo II tendremos que -- sus soluciones

(*) El símbolo $\stackrel{not}{=}$ significa que la parte derecha de la igualdad se denota por la expresión de la izquierda.

(*) El símbolo $\approx$ significa aproximadamente igual.

(**) El análisis cualitativo de esta ecuación véase en el Apéndice 3.1

están dadas por:

$$(10) \qquad N(t) = c\, e^{Kt}$$

lo que significa que tal población crece según esta ley exponencial. Si además se cuenta con el dato de la población inicial, ó sea la condición de la ecuación diferencial (9):

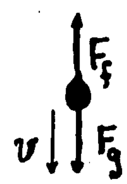
$$(11) \qquad N(0) = N_o ,$$

entonces sustituyendo este dato en (10) determinamos C hallando que $C = N_o$, de donde tendremos que finalmente la ley de crecimiento de las bacterias es:

$$\boxed{N(t) = N_o\, e^{Kt}}$$

2.- CAIDA LIBRE CON FRICCION (Modélo del paracaidas)

Supongamos que se deja caer desde cierta altura un cuerpo de masa m, sobre el que actúa además de la fuerza de gravedad:



$$F_g = m\, g ,$$

donde F_g significa la fuerza de gravedad, m la masa del cuerpo y g la aceleración de la gravedad, la fuerza de fricción (F_f) en dirección contraria a la velocidad v del cuerpo y proporcional a la magnitud de la misma velocidad (hecho determinado empíricamente y en -

este problema dado como un dato)

$$F_f = -\alpha v$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de proporcionalidad de la fuerza de fricción.

Nos proponemos resolver el siguiente problema: Determinar la dependencia de la velocidad respecto del tiempo (ley del cambio de la velocidad).

En nuestro caso, la ecuación diferencial surge inmediatamente, en cuanto se ubica la ley física que rige el fenómeno en cuestión, esto es en este caso la segunda ley de Newton:

$$F = m\ a$$

donde F es la fuerza resultante al cuerpo de masa m y a es la aceleración que se imprime al cuerpo al aplicarle la misma fuerza F. En el problema que nos ocupa esto significa:

$$F_g + F_f = m\ a$$

pero la magnitud de la aceleración a coincide con el valor de la derivada de la velocidad $\dot{v}$, (aquí: $\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$), por lo que tomando además en cuenta las expresiones para F_g y F_f, obtenemos:

$$m\ g - \alpha v = m\ \dot{v}$$

que al dividir entre m se reduce a:

(11) $$\boxed{\dot{v} = -\frac{\alpha}{m} v + g} \quad (*)$$

ecuación diferencial lineal del tipo (5), donde g es la constante 9.81 m/seg.^{2}

De manera similar a como se resolvió (5), la solución de (11) será:

$$v(t) = \frac{g m}{\alpha} + c e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

En particular si la velocidad inicial es dada como:

(12) $$V(0) = 0,$$

obtenemos:

$$C = -\frac{g m}{\alpha}.$$

y por lo tanto la solución de (11) - (12) será:

(13) $$V(t) = \frac{g m}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right)$$

El problema de la caída libre sin fricción, ó sea $F_f = 0$, se reduce a:

$$\dot{V} = g$$

y consecuentemente la magnitud de la velocidad crece linealmente, ya que integrando la última ecuación tendremos:

(*) El análisis cualitativo de esta ecuación en el Apéndice 3.2

$$V(t) = g\,t$$

Al contemplar el mismo problema, pero con fricción - distinta de cero la velocidad V también crece, en efecto de (13) tendremos que su derivada:

$$\dot{V}(t) = g\,e^{-\frac{\alpha}{m}t} > 0$$

y por eso la función $V(t)$ es creciente, Sin embargo, -- cuando t es muy grande (recuérdese (13) la expresión --- $e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ es muy pequeña, tiende a cero (ya que $\alpha > 0$), $(m>0)$ por lo cuál tendremos que (véase la Fig. 2) :

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{gm}{\alpha}$$

(velocidad límite) V_{lim}

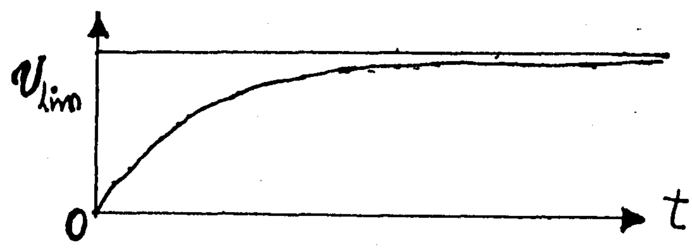


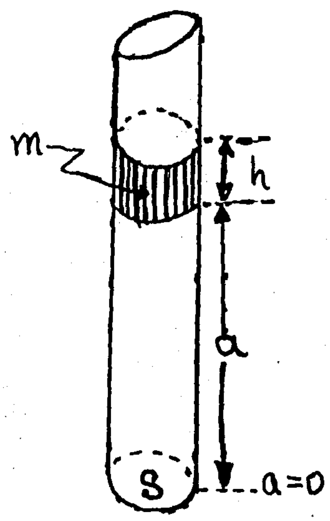
fig. 2

3.- LA FORMULA BAROMETRICA

Es bién sabido que a mayor altura el aire está más - enrrarecido, esto es la presión atmosférica con la altura disminuye, Nos proponemos determinar la dependencia de la presión p respecto de la altura sobre el nivel del mar $a/p = p(a)/$.

Recordemos que como valor de la presión atmosférica se tóma el peso de una columna vertical de aire con área seccional $A = 1\ cm^2$.

fig. 3



Por lo tanto, el incremento de la presión al pasar de una altura a sobre el nivel del mar a otra $a + h$ (véase la Fig. 3) será:

$$\Delta p(a) \overset{not}{=\!=} p(a+h) - p(a)$$

ó sea:

$$-\Delta p(a) = p(a) - p(a+h)$$

que númericamente es igual al peso (*) del pedazo de columna de aire de altura h :

$$(14) \qquad -\Delta p(a) = g \cdot m(h)$$

donde m es la masa del pedazo de columna entre a y $a+h$.

Por otro lado el volúmen V del pedazo de columna (área de la base de la columna por la altura) es:

(*) El peso P del pedazo de columna entre a y $a + h$ representa una fuerza que por la 2a. ley de Newton será P = (masa del pedazo de columna) x (aceleración) = (masa hasta a) $x\ g = m\ g$.

$$V = S \cdot h = h \quad (\text{ya que} \quad S = 1\ cm^2)$$

Podemos adidionalmente introducir la densidad promedio del aire en el pedazo de columna que designaremos por ρ_{prom} (es decir $\rho_{prom} = \frac{\text{masa de aire en el pedazo de columna}}{\text{volumen del pedazo de columna}} = \frac{m}{v} = \frac{m}{h}$) de manera que:

$$m = \rho_{prom} \cdot V = \rho_{prom} \cdot h$$

sustituyendo esta expresión e, (14), obrenemos:

$$-\Delta p(a) = g \rho_{prom}\ h,$$

dividiendo entre h y cambiando de signo en la ecuación anterior, tendremos:

$$(15) \quad \frac{\Delta p(a)}{h} = -g \rho_{prom}$$

Ahora bién, si denotamos por $\rho(a)$ la densidad del - aire a la altura a , entonces al tender el incremento de la altura h a cero, la densidad promedio ρ_{prom} tiende a $\rho(a)$ (véase la Fig. 3), luego entonces si pasamos al límite en (15) cuando $h \longrightarrow 0$ llegaremos a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta p(a)}{h} = \lim_{h \to 0} (-g \rho_{prom})$$

$$\frac{d\ p(a)}{d\ a} = -g \cdot \lim_{h \to 0} \rho_{prom}, \quad (g = 9.81\ m/seg^2)$$

$$(16) \quad \frac{d\ p(a)}{d\ a} = -g \rho(a)$$

donde sin embargo no sólo p es función incógnita, sino que también desconocemos a ρ.

Para poder expresar, digamos, a ρ a travéz de p y así llegar al modelo mediante una ecuación diferencial - que esperamos sea de los tipos que hasta ahora conocemos, impongamos restricciones que hagan posible lo propuesto.

Supongamos que la temperatura del aire se conserva constante en las distintas capas atmosféricas. Entonces de la " Ley de Boylle Mariotte" ó de la ecuación del estado gaseoso es fácil deducir que la presión p es proporcional a la densidad :

$$p\ (a) = r\ \rho\ (a)\ ^{(*)}$$

donde r es la constante de proporcionalidad. Es así -- que sustituyendo esta última igualdad en (16), obtenemos la ecuación diferencial con la presión p como función incognita:

$$(17)\qquad \frac{d\,p}{d\,a} = -\frac{g}{r}\ p\ ^{(**)}$$

(*) p V = R T, donde p es la presión, V el volumen, R la constante universal de los gases y T la temperatura (considerada en nuestro caso constante). Luego $p = \frac{R\ T}{V} = \frac{R\ T}{m\ v} \cdot \frac{m}{v} = r\,\rho$, con m la masa molar del gas, $r = \frac{R\ T}{m}$ y $\rho = \frac{m}{v}$

(**) Observese que de esta ecuación pudo haberse planteado el problema de la siguiente manera. Experimentalmente se sabe que la razón de cambio de la presión p con respecto de la altura a es proporcional a la misma presión.

Observando que (17) resultó ser del tipo (1), llegaremos de nuevo fácilmente, como en (4), a que su solución es:

$$(18) \quad \boxed{P(a) = P_o \, e^{-\frac{g}{r} a}}$$

donde P_o es la presión atmosférica a nivel del mar (a=o)

OBSERVACIONES FINALES

i) La presión disminuye con la altura sobre el nivel del mar, según la ley exponencial obtenida en (18), llamada "fórmula barométrica".

ii) Esta fórmula no es aplicable para alturas comparables con el rádio terrestre. Esto se sigue no sólo de no haber considerado la variación de la temperatura en las diferentes capas de la atmósfera, sino también de no haber considerado la variación de la aceleración por la caída libre.

iii) En este problema la ecuación diferencial describe no el proceso físico en cuestión, sino sólo la variación de una magnitud física (P) dependiente de otra (a).

Capitulo V

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

1.- En esta parte de la exposición entraremos en mucho menos detalle y sólo diremos que tales oscilaciones - nos brindan un ejémplo del segundo tipo de ecuaciones diferenciales que deseabamos estudiar, según planteamos en el Capitulo I. Tales ecuaciones son del tipo:

$$(1) \quad y''(t) = - w^2 \, y \, (t)$$

donde " significa la segunda derivada respecto al tiempo -- $\frac{d^2}{dt}$, W es una constante y particularmente tal ecuación es lineal dado que tanto la función incógnita como sus derivadas aparecen en la ecuación en forma lineal, además es una ecuación de segundo órden, esto es la segunda derivada es la derivada de órden máximo a que aparece afectada la función incógnita.

Directamente se puede comprobar, via sustitución, -- que cualquier solución de (2) es de la forma:

$$(2) \; y(t) = A \cos (w \, t + \varphi) \quad (*)$$

donde A y φ, interpretables como la amplitud y la fasè de la oscilación, son constantes arbitrarias (evidentemente

(*) Observese que las funciones seno y cosno tienen la - propiedad que al derivarse se vuelve a la misma función -- modulo alguna constante es decir (1) vease el apéndice 4.

Hay muchos metodos para resolver la ecuación (2) uno de ellos consiste en buscar las soluciones como las obtenidas para la ecuación similar, pero de primer órden (ecuación (1)), esto es buscar las soluciones como exponenciales (ver (3)). Se propone pues buscar la solución como -

restringibles a $A \geqslant 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$. Las constantes A y φ quedanunívocamente determinadas por las condiciones iniciales que en nuestro caso son:

$$(3) \quad y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = V_0$$

Vale hacer notar que por cada punto (t_0, Y_0) del plano coordenado pasan más de una gráfica tipo (19), sin embargo por el punto (t_0, Y_0) pasa una única gráfica de la solución (19) que además en ese mismo T_0 tenga el valor dado de la derivada Y' (t_0) (coincida con la tangente a la gráfica de la función (19)) Esto evidentemente está relacionado con el hecho de que la ecuación (2) es de segundo órden.

De la magnitud Y , que varía con el tiempo según la ley (19), se dice que raliza "oscilaciones armónicas con frecuencia W".

Es importante hacer notar que la frecuencia W resulta no depender de las condiciones iniciales, queda unívocamente determinada por la constante de proporcionalidad entre Y'' y Y en la ecuación original (2).

La ecuación (2) aparece al describir muchos sistemas oscilatorios no sólo de tipo mecánico.

Los ejémplos típicos más socorridos son:

2.- OSCILACIONES de un BALIN que CUELGA de un RESORTE. Si denotamos por (véase Fig. 4)

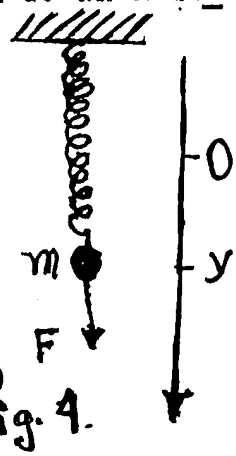


fig. 4.

m = La masa de balín

K = Coeficiente de rigidez del resorte

Y = Desviación del balín de su posición de equilibrio O.

Entonces, basados en la segunda ley de Newton y en que la fuerza que actúa sobre la masa m del balín es proporcional a la desviación Y del mismo, tendremos:

$$m\,a = F$$

$$m\ddot{y} = -K\,Y \qquad \left(\ddot{\ } \equiv \frac{d^2}{dt^2}\right), \text{ de donde}$$

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m}\,Y$$

$$(1) \qquad \ddot{y} = -\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2 Y \ (*)$$

es decir: $W = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (frecuencia en el modélo (1)) y por lo tanto sus oscilaciones armónicas están dadas por

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \varphi\right)$$

(*) El análisis cualitativo de esta ecuación veáse en el Apéndice 5.

donde A y φ son susceptibles de ser determinadas si son dadas las condiciones iniciales (3)

3.- OSCILACIONES PEQUEÑAS DEL PENDULO.

Supongamos que una masa m cuelga de un extremo M - de un alambre "ideal" OM (sin grosor, ni peso, e indeformable) con muelleo y sin fricción en el punto fijo O (- vease la Fig. 5), de manera que tengamos un péndulo oscilando en un plano.

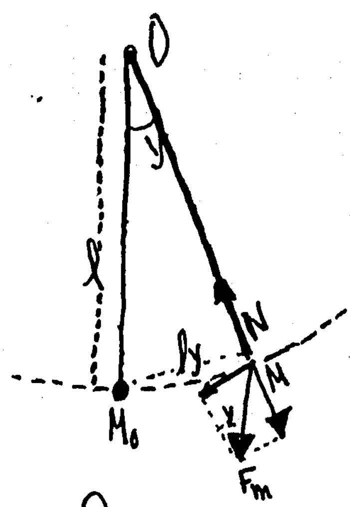


fig.5

La desviación del péndulo OM de la posición de equilibrio OM_0 es conveniente medirla a travéz de la magnitud Y que - nos mide el ángulo M_0 OM medida en radiaciones.

Sobre la masa m actuan dos fuerzas: la"fuerza de - gravedad" dirigida verticalmente hacia abajo, cuya magnitud es:

$$F_g = - mg$$

y la fuerza de reacción del alambre dirigida a lo largo - del alambre MO, cuya magnitud es N.

Escribamos la segunda ley de Newton proyectando so--

bre la tangente a la trayectoria que describe la masa m.

$$m\,a = F'$$
$$m\,(\ell\, y)'' = F \cdot \operatorname{sen} y$$
$$m\,\ell\, y'' = -m\,g \cdot \operatorname{sen} y$$
$$y'' = -\frac{g}{\ell} \cdot \operatorname{sen} y$$

Sólo estudiaremos aquí oscilaciones "pequeñas", para que la ecuación obtenida se reduzca a la ecuación tipo (1) es decir en (5) tomarenos a y suficientemente pequeño -- como para que el sen y pueda ser sustituida por y (re-- cuérdese que $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$). Entonces de (22) pasamos a la ecuación de oscilaciones armónicas.

$$Y'' = -\frac{g}{\ell} \cdot Y$$
$$Y'' = -\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)^2 y \quad (*)$$

con oscilaciones armónicas, de frecuencia $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, dadas por

$$y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t + \varphi\right)$$

Esto significa que ante pequeñas perturbaciones de la posición de equilibrio las oscilaciones del péndulo serán casi armónicas, con frecuencia $W = \sqrt{g/\ell}$, la cual no de-- pende de la masa m, ni de las condiciones iniciales siempre y cuando las condiciones iniciales Y_0 y V_0 sean suficientemente pequeñas.

(*) El análisis cualitativo veáse en el Apéndice (5).

De lo anteriormente expuesto vemos que la gran variedad de procesos y fenómenos naturales no pueden reducirse sólo a ecuaciones de los tipos elementales arriba considerados.

Resulta que el mundo de las ecuaciones diferenciales es casi tan rico como lo es el mundo real.

La eeperiencia acumulada desde la época de Newton y Leibnitz nos muestra claramente que el uso de las ecuaciones diferenciales como modélos mateñaticos ha sido fructífero, sin olvidar que el dominio de cualquier modélo tiene sus límites de veracidad.

LISTA DE PROBLEMAS.

1.- Realizar los cálculos completos del movimiento de la pelota estudiada aqui.

2.- Hallar la dependencia de T respecto de V_0 y K.

3.- Dibujar las gráficas de Z (t), V (t) y a (t) para distintas K (por ejémplo 0.9, 0.5 y 0.2)

4.- Analizar la continuidad y diferenciabilidad de las funciones Z (t), V (t) y a (t).

5.- Si la resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo en caida de masa m ejérce una fuerza retardadora proporcional al cuadro de la velocidad, ¿ Cuál es la velocidad terminal ?

6.- La fuerza que ejerce la gravedad sobre un cuerpo de masa m en la superdicie de la tierra es mg. no obstante, en el espacio la ley de la gravedad de Newton establece que esa fuerza varia en proporción inversa al cuadrado de la distancia al centro de la tierra. Para que un proyectil disparado hacia arriba, desde la superficie de la tierra, se mantenga en movimiento indefinidamente, demuestre que su velocidad inicial debe ser de, por lo menos, $\sqrt{2gR}$, donde R es el rádio de la tierra (unas 4,000 millas). Esta velocidad de escape es aproximadamente de 7 millas por segundo, ó sea 25,000 millas por hora.

7.- En el interior de la tierra, la fuerza de la gravedad es proporcional a la distancia del centro. Si se perfora un orificio que atraviese a la tierra, de polo a polo, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿ Con qué velocidad llegará al centro?

8.- La teoría especial de la relatividad, de Einstein, afirma que la masa m de una partícula que se desplaza con una velocidad V, está dada por la fórmula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (*)$$

en donde C es la velocidad de la luz y M_0 es la masa en reposo.

a) Si la partícula parte del reposo en el espacio vacío y se desplaza durante largo tiempo bajo la influencia de un campo gravitacional constante, encuentre V como función del tiempo, tomando W = - V y demuestre que $V \longrightarrow C$ conforme $t \longrightarrow \infty$.

b) Sea $M = m - m_0$ el aumento de la masa de la partícula. Si el incremento correspondiente E en su energía se considera como el trabajo realizado en ella, por la fuerza prevaleciente F, de modo que

$$E = \int_0^V F\,dx = \int_0^V \frac{d}{dt}(mv)\,dx = \int_0^V v\,d(mv)$$

Verificar que :

$$E = mc^2 \qquad (**)$$

Deducir (*) de (**)

9.-Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea (Ley de enfriamiento de Newton).

Un cuerpo se calienta a 110° C y se expone al aire libre a una temperatura de 10° C. al cabo de una hora, su temperatura es de 60° C. ¿ Cuanto Tiempo adicional debe transcurrir para que se enfrie a 30° C ?

10.- Una substancia radiactiva se desintegra a una razón proporcional a su masa.

Si una masa de 10 miligramos se desintegra a razón de 0.051 miligramos por día, ¿ Cuál será el tiempo que se tarda la masa para resucirse a 5 miligramos ?.

11.- La intensidad I de luz transmitida por un vidrio obscuro varia con la distancia X cm. de acuerdo con la relación:

$$\frac{dI}{dx} = - KI$$

Sabemos de la experiencia que I = 100 cuando x = 0,

¿ Cuál es la intensidad si I se reduce de 100 a 30 después de recorrer 25 centimetros ?.

12.- En Biología: El número N de bichos en un cultivo crece a una razón proporcional a N. Si el valor de N inicialmente fué de 100 bichos y se incrementó en 332 en una hora. ¿ Cuantos bichos habrá en una hora y media ?.

13.- En la ingeniería eléctrica un circuito simple consta de cuatro elementos, cuya acción se puede comprender con facilidad sin tener conocimientos especiales de electricidad.

1) Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E (puede ser una pila) impulsa una carga eléctrica y produce una corriente I.

2) Un resistor de resistencia R que se opone a la corriente, reduce la fem en una magnitud.

$$E_R = R\,I$$

3) Un indudtor de indudtancia L, que se opone a cualquier cambio de la corriente, produciendo una disminución de la fem de una magnitud

$$E_L = L\,\frac{dI}{dt}$$

4) Un capacitor (ó conductor) de capacitancia C, almacena una carga Q. La carga acumulada por el capacitor se opone a la entrada de una carga adicional y la disminución de la fem que se produce en este caso es:

$$E_c = \frac{1}{c}\,Q$$

Además, la corriente es la rapidez de flujo de la carga, y por lo tanto el índide al que la carga aumenta en el capacitor, se tiene:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Estos elementos de circuito actúan, de acuerdo a la ley de Kirchoff, que indica que la suma algebráica de las fuerzas electromotrices, en torno a un circuito cerrado es igual a cero.

El principio lo escribimos así:

$$E - E_R - E_L - E_c = 0$$
$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{c}Q = 0$$

ó bién:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{c}Q = E$$

Esta es la forma que tienen las ecuaciones lineales.

Dependiendo de las circunstancias, se puede desear considerar ya sea I ó Q como variable dependiente, en el primer caso eliminamos Q derivando respecto de t. obtenemos:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{c}\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Esta ecuación se llama, una ecuación diferencial lineal de segundo órden.

En el segundo caso, remplazamos I por $\frac{dQ}{dt}$,

Obtenemos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c} Q = F$$

que también resulta ser una ecuación lineal de segundo órden.

Digamos que aquí nos interesamos por la ecuación:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

en $T = 0$ $E = E_o$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E_o$$

$$L \frac{dI}{dt} = E_o - RI$$

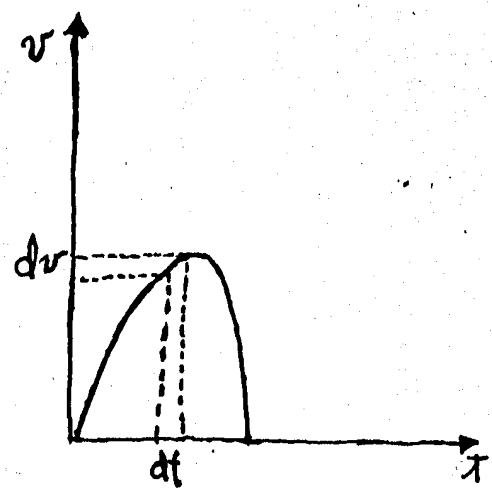
Mostrar que la corriente I consta de una parte de Estado donstante E O/R y una $-Rt/L$ -- transitoria $(I_o - E_o/R)\, e$

14.- En las ciencias de la salud, cuando un termómetro es colocado en un líquido caliente a una temperatura T, la temperatura indicada por el termómetro al tiempo t cambia a una razón proporcional a $T - \theta$. Si T - se mantiene constante, y si $Q_0 = 15^o$, $\theta = 35^o$ cuando $t = 10$ segundos, y $\theta = 50$ cuando $t = 20$ segundos. Probar que $T = 95^o$.

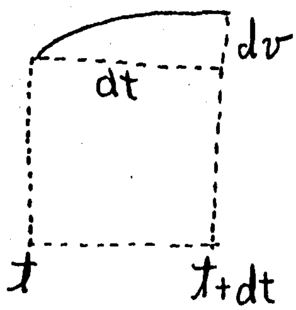
Apéndice I

Teorema. La diferencial de una función $v = v(t)$ - que tiene derivada es igual a la derivada de dicha función por la diferencial de la variable.

$$dv = \frac{dv}{dt} . dt$$



Amplifiquemos



Puesto que: la diferencial

$$dv = v(t + dt) - v(t)$$

$$1 = \frac{dt}{dt} \quad \text{es} \quad \text{finito}$$

$$dv = dv \cdot 1 = \left(v(t + dt) - v(t)\right) \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$\therefore dv = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} \cdot dt = \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

Consecuentemente $d^2v = dv(t + dt) - dv$

pero según teorema:

$$dv(t + dt) = v(t + 2\,dt) - v(t + dt)$$

obteniendose:

$$d^2v = v(t + 2\,dt) - v(t + d\,t) - v(t + dt) + v(t)$$

es decir:

$$d^2v = v(t + 2\,dt) - 2\,v(t + dt) + v(t)$$

Ejémplo:

$$v(t) = \text{Sen}\ t$$

$$dv = \text{sen}(t + dt) - \text{sen}\ t$$

$$dv = \text{sen}\ t \cos dt + \cos t\ \text{sen}\ dt - \text{sen}\ t$$

$$dv = \text{sen}\ t \cdot 1 + \cos t\ dt - \text{sen}\ t$$

$$dv = \cos t\ dt$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \cos t$$

Nota: Al derivar por este método hay que despreciar infinitesimales de primero, segundo órden, Etc.

Ejémplo:

$$v (t) = t^3$$

$$dv = (t + dt)^3 - t^3 = (3 t^2 + 3 tdt + dt^2) dt$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 3 t^2 + 3 tdt + dt^2 \quad \therefore \frac{dv}{dt} = 3 t^2$$

(*) se deja como tarea encontrar la segunda derivada de --
sem t, t^3

Sugerencias a problemas.

1.- Véase desarrollo $\dfrac{d^2 z}{d\,t^2} = -g$

2.- $K^n \longrightarrow 0$ cuando $t_n \longrightarrow T$, $V_n \longrightarrow 0$

3.- Véanse gráficas para una V_o y K dadas. (pag. ax)

(vease adicional)

4.- $Z(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ continuas y diferenciables en $t \quad 0$ escépto en $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$

5.- Integre $v \dfrac{dv}{dx} = g - cv^2$

6.- $m \dfrac{d^2x}{dt^2} = -K \dfrac{Mm}{x^2}$, $v \dfrac{dv}{dx} = - \dfrac{K\,M}{x^2}$ y en

$x = R$, $v(R) = V_o$

7.- $F = G \dfrac{M\,m}{x^2}$, $P = \dfrac{M}{4/3}$, $\dfrac{G\,M\,m}{x^2} = G\ 4/3$

Sigue a la vuelta....

$G\ 4/3 \quad = K$ luego $m \dfrac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

y $\quad mv \dfrac{dv}{dx} = -Kx \quad \therefore \quad v = \sqrt{\dfrac{K}{m}\left(\dfrac{R^2}{2} - x^2\right)}$

8.-

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; , \; \frac{d}{dt}(mv) = F$$

9.- $\dfrac{d\,\theta}{d\,t} = K\ (\theta - T_a)$ en donde T_a es la temperatura ambiental.

10.- $0.051 = 10\ K$, y $\dfrac{d\ N}{d\ t} = K\ N$

11.- $\dfrac{d\ I}{dx} = -K\ I$, $I = 100\ e^{-(.048\ 158\ 9)(25)}$

12.- $\dfrac{d\ N}{d\ t} = K\ N$, $N = 604$

13.- Véase desarrollo

14.- Véase problema No. 9

$$\ln\left(\frac{T - \theta}{T - \theta_0}\right) = -Kt$$

Adicional

$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ haciendo $g = 10\, m/seg^2$

$v_0 = 10\, m/seg$, $k = .9$ obteniendose parábolas

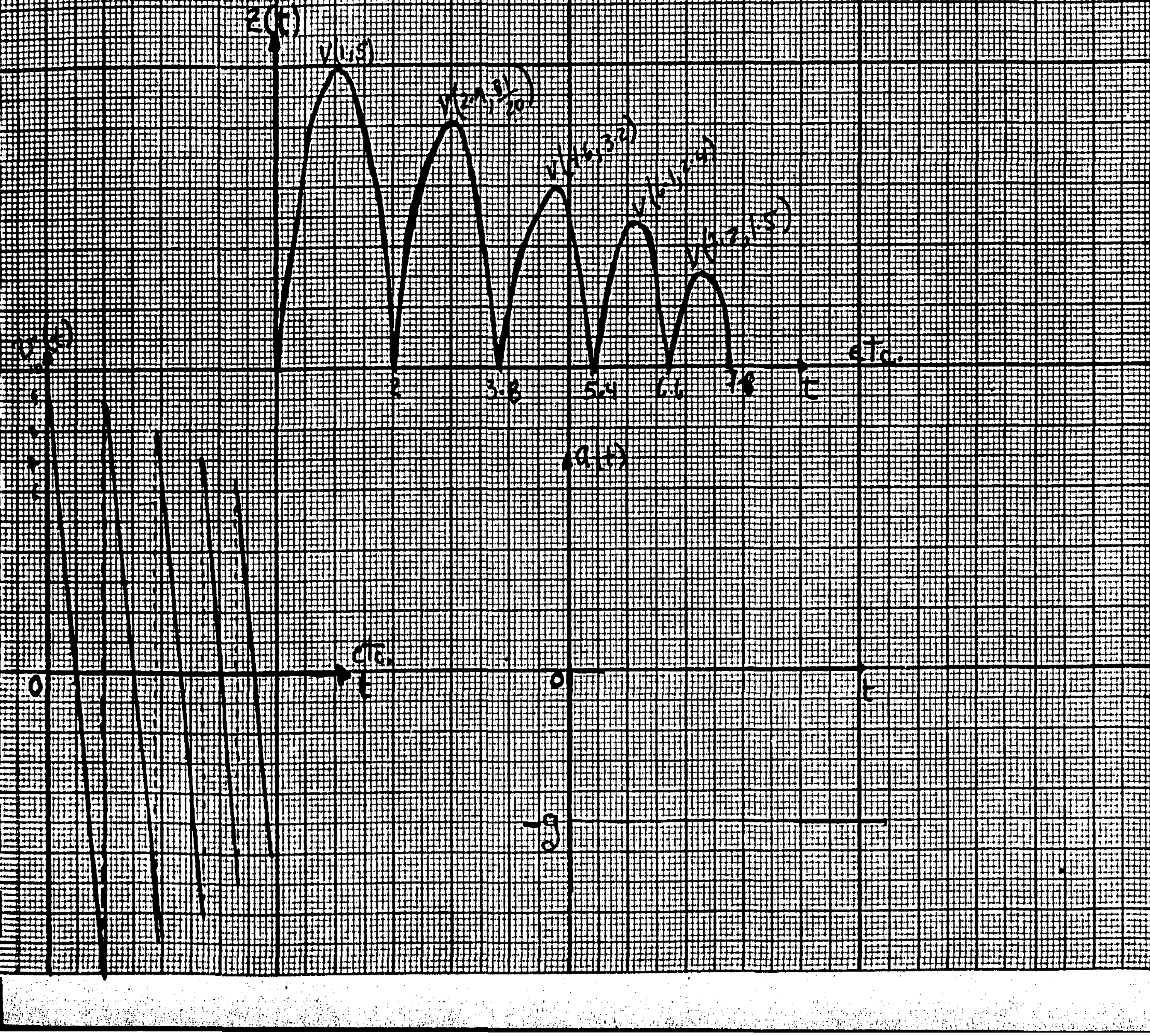
i) $z(t) = 10t - 5t^2$ vértice $V(1,5)$ raíces $0, 2$

ii) $v_1 = .9(10) = 9$
$z(t) = 9t - 5t^2$ " $V(2.9, 81/20)$ raíces $2, 3.8$

iii) $v_2 = .9(9) = 8$
$z(t) = 8t - 5t^2$ " $V(4.6, 3.2)$ raíces $3.8, 5.4$

iv) $v_3 = .9(8) = 7$
$z(t) = 7t - 5t^2$ " $V(6.1, 2.4)$ raíces $5.4, 6.6$

v) $v_4 = .9(7) = 6$ " $V(7.2, 1.5)$ raíces $6.6, 7.8$



Apéndice 3

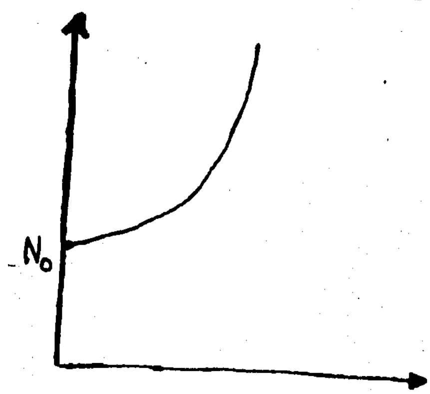
3.1 Análisis cualitativo de:

$$(1) \quad \dot{N}(t) = K\,N(t) \qquad \text{(modélo de Malthus)}$$
$$N(0) = N_o$$

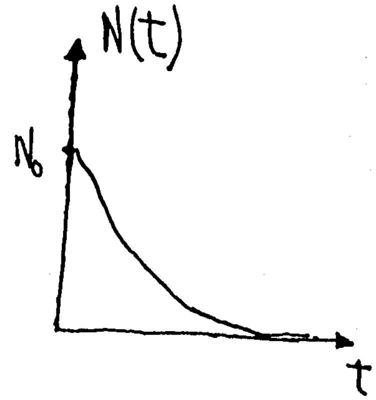
del contexto del problema $N(t)$ es el tamaño de una población al tiempo t, luego los valores de $N(t) \geq 0$ y en particular la población inicial $N_o \geq 0$. Solución de equilibrio: $\dot{N} = 0 \Rightarrow KN = 0 \Rightarrow N(t) \equiv 0$.

i) Si $K > 0 \Rightarrow \dot{N}(t) > 0 \Rightarrow N(t)$ es creciente
$\ddot{N}(t) = K\,\dot{N}(t) = K^2\,N(t) \geq 0$

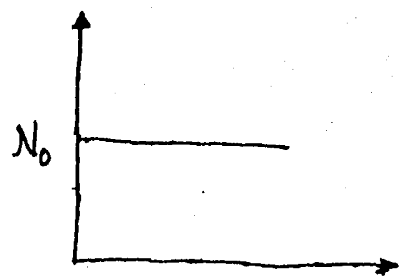
luego $N(t)$ tiene la forma de la figura:



ii) Si $K < 0 \Rightarrow \dot{N}(t) \leq 0 \Rightarrow N(t)$ es decreciente $\ddot{N} = K\,\dot{N} = K^2\,N \geq 0$

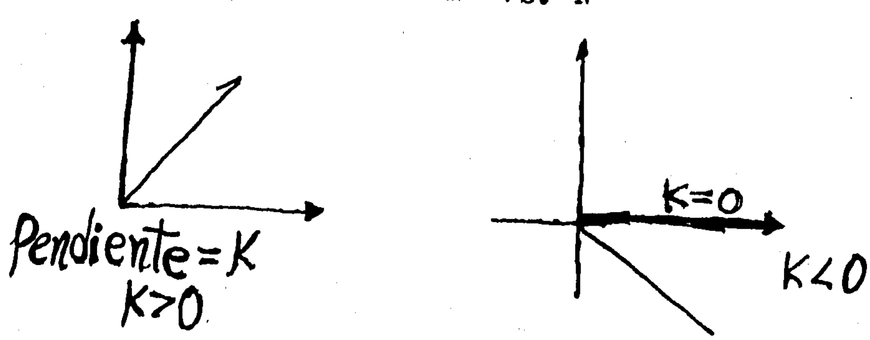


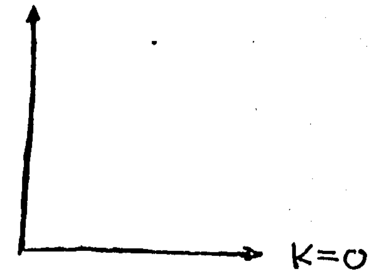
iii) Si $K = 0 \Rightarrow \dot{N}(t) = 0 \Rightarrow N(t) = \text{constante} = N_0$



Cualitativamente esto agota todas las posibilidades de tipos de solución.

Estos mismos resultados pueden obtenerse de la ecuación (1) en el espacio fase $\dot{N}$ VS. N



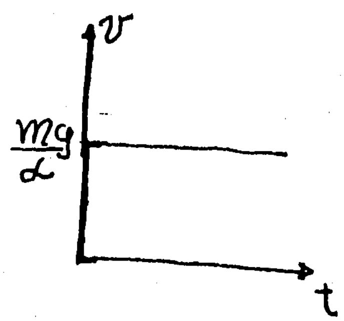


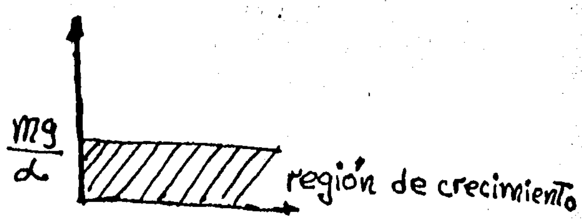
3.2 Análisis cualitativo de la ecuación

$$\dot{V} = -\frac{\alpha}{m} V + g$$

Las soluciones constantes, es decir las soluciones de equilibrio:

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{m} V + g = 0 \Rightarrow V(t) = \frac{mg}{\alpha}$$



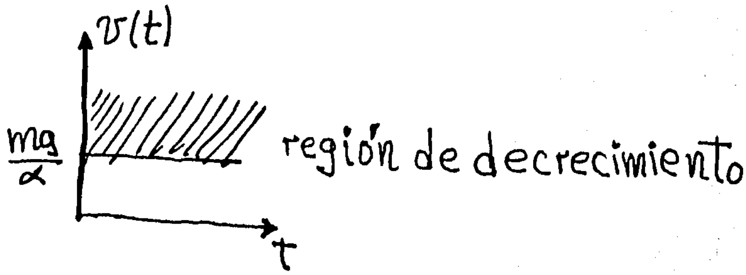


i) Región de crecimiento:

$$\dot{V}(t) > 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{m} V + g > 0 \Rightarrow V(t) < \frac{gm}{\alpha}$$

ii) Región de decrecimiento:

$$\dot{V}(t) < 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{m} V + g < 0 \Rightarrow V(t) > \frac{gm}{\alpha}$$



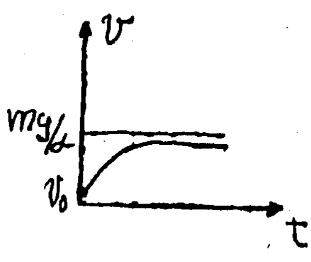
¿ Cómo crece ó decrece la solución ?

¿cómo es $\ddot{v}$?

(1) $\ddot{V}(t) = -\frac{\alpha}{m} \dot{V}$

de i) Si $\dot{V} > 0$, ó sea $V(t)$ creciente en la región --
$V(t) < \frac{gm}{\alpha}$, entonces $\ddot{V}(t) < 0$

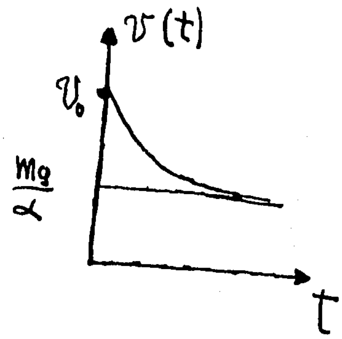
Luego en ésa región V es creciente y cóncava



2) $\ddot{V}(t) = -\frac{\alpha}{m}\dot{V}$ de ii) Si $\dot{V}<0$, entonces --

$\ddot{V}(t) > 0$, luego $\forall\, t>0$ y $V(t) > \frac{gm}{\alpha}$

La función tiene la forma siguiente:



Finalmente $V(t) = \frac{mg}{\alpha}$ es una solución (de equilibrio), luego entonces las soluciones crecientes y de-- crecientes tienden asintóticamente a la solución de equilibrio, pues en caso contrario habría bifurcación de las soluciones cosa que contradiría.

La unicidad de las soluciones; para un mismo tiempo t tendríamos dos velocidades distintas.

3.3 Análisis cualitativo de la ecuación brométrica.

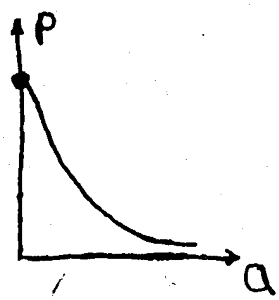
$$\frac{dp}{da} = -\frac{g}{r} P$$

$$P(0) = P_0$$

donde P (a) es la presión atmosférica a la altura a, y es la aceleración de la gravedad ($g = 9.8$ m/seg^2) y r la constante de proporcionalidad entre la presión P(a) y la densidad ρ(a) ($r = \frac{RT}{m}$, donde R es la constante universal de los gases T la temperatura de las diferentes capas de la atmósfera y m la masa molar del aire)

Como en 3.1 y dado que $g > 0$ y $r > 0$, cualquiera que sea la presión inicial $P_0 > 0$ tendremos que:

$\frac{dP}{da} < 0$, luego P (a) es decreciente y tendrá la forma de la figura, pues: $\frac{d^2 P}{da^2} = - \frac{g}{r} \frac{dP}{da} > 0$



Apéndice 4

En efecto si $Y(t) = \cos t$

$$Y'(t) = - \operatorname{sen} t$$

$$Y''(t) = - \cos t$$

(se vuelve a la misma función con signo contrario)

$$\therefore \quad Y''(t) = -Y(t)$$

Si ahora consideramos la composición:

$Y(t) = A \cos(wt + \varphi)$ con A, w y φ constantes

$$Y'(t) = -Aw \operatorname{sen}(wt + \varphi)$$

$$\therefore \quad Y''(t) = -w^2 y(t)$$

ALGUNAS SUGERENCIAS

1) BELLMAN R.,COOKE K.L., Modern Elementary Differental, Eddison W., 1971.

2) BRAUN M., Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones, COM. INT. Fac. Ciencias UNAM.

3) ELSGOLTS L.E., Ecuaciones Diferenciales y Calculo de Variaciones, Mir, 1975.

4) SCHWARSENBERGEN Ecuaciones Diferenciales Elementales CECSA 1976

5) PONAMARIOV Planteamiento de Ecuaciones Diferenciales (por aparecer).