UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPUESTA DE PROGRAMAS DE MATEMATICAS PARA LAS PREPARATORIAS DE LA U.A.G. Y ALGUNAS NOTAS PARA SU INSTRUMENTACION.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A N:

IDALIA FLORES DE LA MOTA

JOSE MACLOVIO SAUTTO VALLEJO

MEXICO, D. F. 1985.

I N D I C E

PROGRAMAS

PRESENTACION.

Hace tres años cuando iniciamos éste trabajo, pretendiamos plasmar en él, nuestra experiencia adquirida en las aulas preparatorianas de nuestra querida Universidad de Guerrero, así como los distintos puntos de vista de los docentes que participaron en los Foros Académicos de Transformación, que con la finalidadde reestructurar los planes y programas se realizaron en la pasada adeministración de la U.A.G.

La posibilidad de desarrollar un trabajo con la perspectiva deaplicarlo en forma generalizada en nuestra universidad, fué la mayor motivación que tuvimos. Junto al compañero Ricardo Peña, profesor de la U.AG., nos dimos a la tarea de revizar programas y libros de texto de primaria y secundaria con la finalidad de garantizar continuidad en la preparatoria, conocimos distintos proyectosde formación para docentes que tratan de incidir en ésta problemática así como el proyecto de la S.E.P., de los 10 años de Educación Básica.

Concluimos que para lograr verdaderos avances en el terreno educativo, se requiere de un trabajo sistematizado que permanentemente se nutra de la propia experiencia del docente y desde luego no dependa de los vaivenes políticos. Descubrimos el agua tibia: soluciones dentro del actual sistema político-económico no hay, paliativos y parches tal vez.

La U.AG., no es una isla, el acoso económico y político que desde hace dos años se ha agudizado y la poca disposición de la ac---

tual administración de intentar una transformación, nos hace pen - sar que éste trabajo tendrá el mismo fín que la mayoría de las tesis: empolvarse en las bibliotecas de nuestra Alma Mater.

"El enseñar es un arte - tan grande y difícil de dominar que un hombre o- una mujer pueden emplear una larga vida en él sin darse cuenta mas que de sus limitaciones y erro- res, y lo distante de lo ideal"

William Lyons Phelps

FUNDAMENTACION

En este tiempo resulta evidente la importancia de las matemáti- cas en la vida del hombre. Es muy difícil referirnos a alguna acti vidad humana donde no se encuentre alguna aplicación de los conoci mientos matemáticos. Dichas aplicaciones se encuentran en muy va-- riadas formas ya sea a través de modelos, cálculos, mediciones, -- etc., también las encontramos en diversos campos de actividad huma- na como las efectuadas en los procesos tecnológicos e industriales, las ciencias naturales, las ciencias sociales e incluso el arte.

Aunado a este cúmulo de aplicaciones de utilidad social en los procesos productivos, tenemos también que las matemáticas cuentan- con características formativas que la hacen ser una de las disci-- plinas de estudio pilares de la educación preparatoria. No está -- por demás mencionar que el estudio de esta ciencia debería estimu- lar en gran medida el desarrollo intelectual del ser humano, al me jorar su habilidad para descubrir características comunes de diver sos fenómenos o sucesos de la realidad, distinguir sus elementos - esenciales, establecer leyes acerca de los mismos, ordenar, clasi- ficar hechos o entidades, crear sistemas teóricos, etc. Esto lo -- dota de una metodología científica que le permita abstraer, analizar, discernir, generalizar y sistematizar los conocimientos y experiencias que a diario se presentan en la realidad, impulsandole a - conocer, interpretar, criticar y transformar el mundo en que vive.

El enfoque que se sigue a travēs de todo el programa global se - sustenta en las siguientes consideraciones:

Una adecuada presentación de cualquier ciencia no puede consistir en ningún caso, sólo de una información detallada y extensa de los fenómenos que estudia, ni en un análisis superficial de los conceptos y categorías que la conforman, sino que debe, además de lo - anterior, incluirse a la par, una visión lo más general posible de su estructura interna, de su esencia y de su estrecha ligazón con - las demás ciencias. Esto que es válido para todas las ciencias es - la esencia misma de las matemáticas debido a su caracter abstracto- que además de ser el principal obstáculo para su enseñanza, determina también su caracter interdisciplinario.

El no comprender cabalmente este carácter interdisciplinario de- las matemáticas ha tenido como consecuencia su excesiva parcialización, llegando a reducir su enseñanza en una suma de cursos de Lógica, Conjuntos, Algebra, Geometría, Trigonometría, Cálculo, etc.,- mismos que en la mayoría de los casos se presentan completamente -- desligados entre sí y con mayor razón de las demás ciencias. De ahí que debe presentarse como un todo que evoluciona de continuo y donde un nuevo conocimiento no viene únicamente a sumarse a los anteriores, sino que como ocurre de manera frecuente, viene a transformar el todo existente.

Los contenidos del programa global, están apoyados en un hilo -- conductor o esqueleto interno que nos permite, por un lado obtener una secuencialidad lógica y didáctica de los conceptos fundamenta-- les, por otro lado, se logra una mayor interdisciplinariedad con -- las demás ciencias. En la base de este esqueleto se encuentra el - concepto de función. Es a través del mismo como se han desarrollado casi todos los contenidos programáticos.

Los contenidos programáticos se han desarrollado, aprovechando - el cúmulo de nociones y conceptos fundamentales que el estudiante - ha manejado y asimilado durante su instrucción primaria y secunda-- ria. El mecanismo seguido consiste en construir sobre estas nocio-- nes, colocando al estudiante en situaciones en las que observe, compare, manipule, analice y concluya, hasta alcanzar por medio de la práctica reiterada de este proceso, el concepto que interesa elaborar.

Este proceso se completa con la formalización de los conceptos,- entendida ésta, no como la repetición o memorización de términos, - reglas y formulas, sino como la capacidad de formular de manera coherente y con cierto grado accesible de rigurosidad lógica y simbólica las conclusiones personales obtenidas como corolario del proceso arriba descrito.

Hay que evitar en lo posible el "quemar" etapas en el desarrollo de este proceso ya que esto va en detrimento del aprendizaje matemático del estudiante. Es importante que permitamos que siga todos -- y cada uno de los pasos del proceso anteriormente descrito, que en esencia son los que se realizan en la labor de creación y descubrimiento.

Finalmente cabe mencionar que todos los contenidos programáticos han sido seleccionados, secuenciados y desarrollados tomando en cuenta los criterios antes mencionados pero además de ello principalmente debido a su importancia dentro de las matemáticas y de conformidad con los OBJETIVOS GENERALES DE LAS MATEMATICAS EN LAS ESCUELAS PREPARATORIAS, mismos que han sido discutidos y aprobados en los distintos foros académicos que se han realizado con anterioridad en esta Universidad por maestros en el área y que son los siguientes:

OBJETIVOS GENERALES DE LAS MATEMATICAS EN LAS ESCUELAS PREPARATORIAS.

1. Fomentar y desarrollar el interés por el trabajo matemático en los estudiantes.
2. Desarrollar la capacidad de aplicación interdisciplinaria de las matemáticas con las demás ciencias a la realidad social en que se desenvuelve con el fin de transformarla.
3. Fomentar hábitos por el estudio, razonamiento e investigación que permitan al estudiante la producción de nuevos conocimientos.
4. Familiarizar al estudiante con la simbología de las matemáticas tratando la materia con mayor rigor científico.
5. Adquirir una formación matemática básica, entendida ésta como el conocimiento de los elementos de las matemáticas que per-

mitan el acceso a mayores niveles de profundización, especialización y aplicación.

6. Contribuir al desarrollo de las operaciones mentales como la observación, comparación, abstracción, generalización, concreción, definición y formalización, mediante el análisis científico.

Buscando alcanzar los objetivos anteriormente citados y siguiendo el enfoque general antes descrito, se ha dividido el programa global en las siguientes partes:

I. MODELOS Y LENGUAJES SIMBOLICOS.
II. CONJUNTOS DE NUMEROS
III. RELACIONES.
IV. FUNCION LINEAL
V. FUNCION CUADRATICA.
VI. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.
VII. FUNCIONES ASINTOTICAS.
VIII. RELACIONES QUE NO SON FUNCIONES.
IX. DESIGUALDADES INTERVALOS Y VECINDADES.
X. SUCESIONES Y SERIES.
XI. LIMITE Y CONTINUIDAD.
XII. DERIVADA.
XIII. INTEGRAL.

En cada una de ellas se incluyen: propósitos generales, objetivo general, objetivos particulares, contenidos programáticos, bibliografía básica, bibliografía complementaria, recomendaciones metodologicas y en algunos casos recomendaciones técnicas.

> "La formulación de un problema es a menudo más importante que su solución"
>
> A. Einstein.

PARTE I. MODELOS Y LENGUAJES SIMBOLICOS.

PROPOSITOS GENERALES

Con esta parte se pretende clarificar en el estudiante el proceso de creación de los conocimientos, es decir, cómo a partir de una situación de la realidad a través de un proceso de abstracción, es posible construir un modelo y lenguaje simbólico de cuyo análisis y deducción lógica podemos obtener diversas alternativas de solución de la situación estudiada, mismas que a través de un proceso de aplicación se trasladarán bajo ciertos criterios específicos (condiciones generales de validez) hacia la situación real de la cual provienen para su verificación. Por otro lado este proceso nos permitirá visualizar cómo un nuevo conocimiento no viene únicamente a sumarse a los demás sino que en algunas ocasiones viene a revolucionar por completo una cierta teoría o concepción de un determinado fenómeno o conjunto de fenómenos.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno construya un modelo simbólico y su lenguaje, identificando el origen de las matemáticas en la busqueda constante de la solución de problemas concretos de la realidad, así mismo que comprenda como a través de la historia han ido evolucionando las matemáticas.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capaz de:

1. Analizar el proceso de producción de conocimientos desarrollado por el hombre a través de su historia.
2. Interpretar la relación realidad-abstracción.
3. Identificar los lenguajes simbólicos como medio de expresión humana.
4. Identificar los modelos simbólicos como representación esquemática de problemas concretos.
5. Entender los lenguajes simbólicos como parte esencial del desarrollo del hombre.
6. Describir la interrelación modelos-lenguajes simbólicos a través de los sistemas de numeración primitivo, Egipcio, Babilónico, Maya y Decimal, mismos que se pueden ver como un ejemplo histórico concreto de la producción humana en el campo de las ideas.
7. Describir el desarrollo esquemático de las diversas formas que ha producido el hombre para representar el concepto de número como ejemplo de la evolución del conocimiento.
8. Analizar los orígenes y el manejo del sistema de numeración decimal.
9. Identificar los símbolos y principios de cada sistema de numeración estudiado.
10. Comparar las características fundamentales de los diferentes sistemas de numeración.

11. Construir un modelo simbólico y su lenguaje.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Modelos simbólicos 6 Hrs.

   1.1 La importancia de las Matemáticas

   1.2 La abstracción

   1.3 Cómo plantear un problema

   1.4 Cómo resolver un problema

   1.5 Algunas características de un modelo

   1.6 Resumen

2. Lenguajes Simbólicos 5 Hrs.

   2.1 Introducción

   2.2 Características principales

      a) Arbitrariedad-convención

      b) Formalización-operatividad

   2.3 Creación y utilización de los lenguajes simbólicos

   2.4 Resumen

3. Sistemas de Numeración 8 Hrs.

   3.1 Introducción

   3.2 Algunos sistemas de numeración (bosquejo histórico, símbolos, principios y limitaciones)

      a) Primitivo

      b) Egipcio

      c) Babilónico

      d) Romano

      e) Maya

      f) Decimal o indo-arábigo

Total 19 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago., Modelos Matemáticos, México, D.F., Edit. A.N.U.I.E.S., 1973, (Temas Básicos).
2. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago., Lenguajes Simbólicos, México, D.F., Edit. A.N.U.I.E.S., 1973, (Temas Básicos).
3. WILLERDING, MARGARET F., Conceptos Matemáticos, Trad. Por Andrés Sestier, México, D.F., C.E.C.S.A., 1976, (Serie Complementaria de Matemáticas).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. POLYA G., Cómo Plantear y Resolver Problemas, Trad. por Julián Zugazagoitia, México, D.F., Trillas, 1979, (Serie de Matemáticas).
2. FOMIN, S.V., Sistemas de Numeración, Trad. por Carlos Vega, Moscú, URSS, MIR, 1975, (Lecciones Populares de Matemáticas).
3. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Sistemas de Numeración para los Números Enteros, por Federico Galván, México, D.F. Trillas, 1981, (Temas de Matemáticas).
4. ASIMOV, Isaac., El Reino de los Números, Trad. por Jesús del Castillo, México, D.F., Diana S.A., 1979.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

Para desarrollar los contenidos programáticos de acuerdo con el enfoque señalado con anterioridad se sugieren actividades de resolución de problemas sencillos (pasatiempos y acertijos). Tratando que el estudiante distinga claramente cuál es el problema a resolver y cuáles son los elementos importantes que intervienen en su -

resolución.

Se intenta que el estudiante experimente por sí mismo, en forma permanente la interacción de las matemáticas con su mundo externo. Se pretende que esta interacción le permita cuestionar las cosas, buscar y captar información adecuada, aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones cercanas. Esto es, llevar a la práctica de su vida cotidiana, las conclusiones de su estudio matemático. Por otro lado, se recomienda que el docente elija problemas a partir de los cuales se construyan modelos de simulación, de tal suerte que antes de que el estudiante intente elaborar un modelo simbólico se haya encontrado una solución al problema. Señalando cómo los estudiantes al elaborar los modelos simbólicos, pasan de la utilización de símbolos arbitrarios a convencionales y de lo concreto a lo abstracto.

En cuanto a los sistemas de numeración el énfasis debe colocarse en que son lenguajes simbólicos y como tales surgieron y se desarrollaron en lugares específicos bajo condiciones específicas. Algunos se perfeccionaron, los más perecieron al hacerse inoperantes. Pero sin embargo en su momento contribuyeron notablemente al desarrollo del hombre. En esta parte se deberá afianzar principalmente sus reglas o principios antes que su simbología.

RECOMENDACIONES TECNICAS

Se sugiere el planteamiento de problemas como: cruces de ríos cerillos, monedas, torre de Hanoi, etc. Que además de permitir la construcción de modelos de simulación posibilita abrir la discusión en clase sobre los diferentes aspectos del mismo y aclarar -- las dudas que al respecto presente el alumno.

"¿Cuánto es uno y uno y-
uno y uno y uno y uno y-
uno y uno y uno y uno ?
No lo sé -dijo Alicia- -
he perdido la cuenta".
"No puedo hacer la suma
dijo la Reina Roja"
Lewis Carroll.

PARTE II. CONJUNTOS DE NUMEROS

En la práctica docente con diversos grupos de distintos grados- pudimos constatar que muchos de los problemas que presentan los estudiantes, se derivan de unas bas.. endebles de Aritmética, tales- como: operaciones, representaciones geométricas, comparación e - - identificación de cualquier número real , los ejemplos que nos demuestran esto son muy variados, cualquiera que haya trabajado en este nivel se habrá dado cuenta de ello.

Esta parte tiene como finalidad consolidar y sistematizar los - conocimientos aritméticos adquiridos en los ciclos anteriores, apoyándonos para ello en modelos geométricos. Plantear problemas, cuya resolución implique operar con números. Realizar operaciones,representaciones con mayor facilidad libera al estudiante de la tensión adquirida durante la primaria y secundaria, cuando dichas operaciones y representaciones se le presentaron y por distintas razones no pudo asimilarlas completamente.

PROPOSITOS GENERALES

Con esta parte se pretende afianzar la identificación e inter-- pretación geométrica en la recta numérica de los números reales, -

además de consolidar el manejo de los algoritmos de las operacio--nes basicas (suma, resta, multiplicación, división y potenciación) así como elaborar criterios que permitan establecer las relacio - nes de orden; mayor, menor e igual que, entre dos reales cualquie-ra.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno interprete geométricamente cualquier número real y manipule correctamente los algoritmos de las operaciones funda--mentales.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capaz de:

1. Representar en una recta numérica números reales
2. Comparar dos números reales y establecer relaciones mayor,menor e igual que.
3. Manejar los algoritmos de las operaciones suma, resta, multipli cación, división, potenciación, con exponentes enteros, raices-cuadradas y enésimas exactas.
4. Establecer y resolver proporciones.
5. Establecer equivalencias entre las diferentes maneras de repre sentar un número real.
6. Identificar las relaciones de pertenencia y operaciones fundamentales (unión e intersección) entre los diferentes conjuntos de números.
7. Identificar a qué conjunto de números pertenece un número dado.

8. Entender las propiedades de orden, de densidad y las correspondientes a la suma y multiplicación que cumplen los números reales.

9. Analizar las propiedades que se cumplen en cada uno de los subconjuntos de "R".

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Naturales 8 Hrs.
   - 1.1 Notación
   - 1.2 Representación gráfica
   - 1.3 Relaciones de orden
   - 1.4 Operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

2. Racionales Positivos 12 Hrs.
   - 2.1 Notación
   - 2.2 Representación gráfica
   - 2.3 Relaciones de orden
     - a) Criterio geométrico
     - b) Expansión decimal
     - c) Fracciones equivalentes
   - 2.4 Proporciones
   - 2.5 Operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

3. Irracionales Positivos 2 Hrs.
   - 3.1 Notación
   - 3.2 Representación gráfica de π

3.3 Relaciones de orden

3.4 Expansión decimal

4. Enteros — 10 Hrs.

4.1 Notación

4.2 Representación gráfica

4.3 Relaciones de orden

4.4 Operaciones

5. Racionales — 6 Hrs.

5.1 Notación

5.2 Representación gráfica.

5.3 Relaciones de orden

5.4 Operaciones

6. Irracionales — 2 Hrs.

6.1 Notación

6.2 Representación gráfica de e

7. Reales — 7 Hrs.

7.1 Notación

7.2 Construcción de R

7.3 Propiedades generales

a) Para la suma

b) Para el producto

c) De orden

d) De densidad

Total 46 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, El Sistema de los-Enteros. trad. por Federico Velasco., México, D.F.Trillas.,1977 Temas de Matemáticas, 9.

2. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.,El Sistema de los-números Racionales.,Trad. por Federico Velasco.,México,D.F. -- Trillas, 1978, (10 Temas de Matemáticas).

3. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.,El Sistema de los-números Reales.,Trad. por Federico Velasco.,México,D.F., Tri--llas, 1978, (11 Temas de Matemáticas).

4. THE OPEN UNIVERSITY., Sistemas Numéricos.,Trad. por Antonio Li-nares.,México,D.F., Mc Graw-Hill.,1975,Unidad 34,Curso Básico - de Matemáticas.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. ODGERS LOPEZ, Alejandro., Los Números Enteros.,México, D.F., -- A.N.U.I.E.S., 1975, Temas Básicos.

2. TOMAS, Francisco.,Los Números Racionales., México,D.F., A.N.U.-I.E.S., 1972.

3. PERELMAN, V.I., Matemáticas Recreativas, México,D.F., Ediciones de Cultura Popular, 1977, (7 Divulgación Científica).

4. CHAVEZ, Fernando., Matemática Activa y Recreativa., México,D.F. Trillas., 1974.

5. NORTHOP, Eugene P., Paradojas Matemáticas., Trad. por Ricardo-Ortiz., México, D.F., U.T.E.H.A., 1981, (Ciencias Matemáticas)

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS.

Para esta parte se recomienda introducir cada concepto a través de problemas concretos, auxiliandose en figuras o modelos geométricos, que le permita al estudiante ir creando inductivamente, sus propias conclusiones. Es decir, con base en el estudio, en la observación y en el análisis de las características comunes de tres o más ejemplos concretos que involucren el concepto a estudiar, obteniendose conclusiones parciales, mismas que se irán generalizando y formalizando posteriormente en el transcurso del tema.

Se recomienda que los números negativos se vean de tres maneras: como cantidades simétricas de otras llamadas positivas, como segmentos dirigidos con sentido contrario al c onvencional y por último como un operador que invierte el sentido de la cantidad que precede.

En el estudio de los Naturales se recomienda priorizar fundamentalmente los siguientes aspectos: 1) Las representaciones gráficas, las relaciones mayor, menor e igual que. 2) El manejo de los algoritmos de las operaciones (suma,resta, multiplicación,potenciación radicación y división).

En el estudio de los Racionales se enfatizarán: 1) Las representaciones gráficas en la recta, 2) Los criterios de comparación que permitan establecer las relaciones mayor, menor e igual que, 3) Los algoritmos de las operaciones, priorizando el uso de las fracciones equivalentes en la suma y la resta.

En el estudio de los Irracionales se hará énfasis en su equivalente decimal como una representación infinita de cifras no periódicas, remarcando esto último como una diferencia importante entre los mismos y los Racionales, también se realizarán observaciones - acerca de la imposibilidad de poder establecer con precisión una - representación gráfica de los mismos.

Finalmente para el estudio de las propiedades que satisfacen -- los distintos conjuntos de números bajo la suma y el producto, así como las de orden y densidad se recomienda trabajarlos a través de ejemplos particulares verificando de manera global que conjuntos - de números (N, Z, Q, Q' o R) las cumplen y cuales no. De igual manera- se recomienda hacer énfasis en la diferenciación entre la relación de pertenencia y la relación de inclusión.

RECOMENDACIONES TECNICAS

Para esta parte se recomienda que las representaciones gráficas de los números se realicen de dos maneras, como puntos de una recta orientada y como segmentos dirigidos. Esto permitirá elaborar interpretaciones geométricas de las operaciones suma, resta, multiplicación y algunas divisiones. Por otro lado esto mismo nos será- de gran utilidad en el manejo de los números negativos, ya sea como cantidades simétricas o como segmentos orientados en sentido -- contrario al convencional e incluso nos permitirá considerar el -- signo menos como un operador que invierte el sentido de la cantidad que precede, tratando de esta manera las operaciones con negativos de manera más intuitiva. Todo esto a su vez permitirá elabo rar interpretaciones geométricas de las famosas "reglas de los signos", acotando detalladamente su dominio de aplicación, haciendo especial énfasis en que corresponden al producto no a la suma como suelen aplicarlas nuestros estudiantes.

En la representación gráfica de los números Racionales se recomienda se realicen de dos maneras, directamente dividiendo cada unidad de la recta entre el número de partes iguales que indique el denominador y a través de su equivalente decimal.

En los criterios para establecer las relaciones de orden entre Racionales se recomienda hacerlo de tres maneras 1) A través de su representación gráfica, 2) a través de su equivalente decimal (teniendo cuidado en haber manejado con anterioridad el concepto de equivalente decimal a través de ejemplos concretos que hayan dado lugar a equivalentes enteros, decimales con finito e infinito número de cifras periódicas), 3) por el método de las fracciones equivalentes (mismas que se estudiarán inicialmente de manera intuitiva y posteriormente se formalizará tanto el concepto como el algoritmo de su obtención.

"El libro de la Naturaleza está escrito con signos matemáticos"

Galileo

PARTE III. RELACIONES

En cualquier ciencia tenemos que a partir de la observación continua de los fenómenos que constituyen su objeto de estudio se busca relacionarlos unos con otros, encontrar su esencia, su relación causa-efecto. Es el establecimiento de estas relaciones una de las etapas más importantes del quehacer científico. Son estas relaciones perfeccionadas y generalizadas las que posteriormente se convertirán en leyes mismas que a su vez se irán haciendo más generales, permitiéndonos obtener una mejor explicación, más objetiva y racional del universo que vivimos.

Observar para concatenar, concatenar para explicar, predecir y transformarse convierten de esta manera en el motor de la investigación científica.

El concepto de relación como todos los demás conceptos, surge de la práctica concreta. Es a partir de la búsqueda de la relación causa-efecto, presente en todos los fenómenos de la naturaleza de donde surge el concepto de Relación Matemática y es en ésta ciencia, donde se convierte en un modelo abstracto, suceptible de estudio y fundamento básico de teorías avanzadas de la misma que posteriormente se aplicarán en los campos más variados de la actividad humana.

PROPOSITOS GENERALES

Consolidar y redefinir los conceptos de relación y función, así como sus respectivos conceptos asociados de dominio, codominio, regla de correspondencia, imagen, rango y gráfica.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno sea capáz de construir e interpretar representaciones gráficas de relaciones.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Manejar el concepto de pareja ordenada.
2. Identificar los elementos de una relación (dominio, codominio y regla de correspondencia).
3. Diferenciar entre imagen, rango y codominio de una relación.
4. Utilizar el plano cartesiano en la representación gráfica de funciones.
5. Encontrar las parejas ordenadas de una relación.
6. Construir la gráfica de una relación.
7. Discriminar las condiciones que debe cumplir una relación para ser función.
8. Identificar geométricamente con base a su gráfica cuando una relación es una función.
9. Elaborar el producto cartesiano de dos conjuntos.
10. Diferenciar entre relaciones de N a N, Z a Z y de R a R.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Relaciones 7 Hrs.

1.1 Conceptos fundamentales (pareja ordenada, dominio, codominio y regla de correspondencia).

1.2 Definición de relación

a) Imagen

b) Rango

1.3 Diagrama de una relación

1.4 Gráfica de una relación

a) Plano cartesiano

1.5 Producto cartesiano

1.6 Función

2. Relaciones Numéricas 7 Hrs.

2.1 Introducción

2.2 Formalización del plano cartesiano

2.3 Relaciones de N a N

2.4 Relaciones de Z a Z

2.5 Relaciones de R a R

2.6 Funciones Reales

Total ----------- 14 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. THE OPEN UNIVERSITY., Relaciones., Trad.por Antonio Linares, México,D.F.,Mc Graw-Hill, 1974, Curso básico de Matemáticas - Unidad 19.

2. THE OPEN UNIVERSITY.,Funciones,trad.por Antonio Linares, México, D.F., Mc Graw-Hill, 1975,Curso básico de Matemáticas Unidad 1.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. MARTINEZ SANCHEZ, *Jorge.*, *Conjuntos.*, *México*, D.F., A.N.U.I.E.S.,-
2. RANGEL, Luz *María*, *Funciones y Relaciones Parte I.*, *México*, D.F. A.N.U.I.E.S. 1975 (*Tomas Pásicos*)
3. RANGEL, Luz *María.*, *Funciones y Relaciones Parte 2.*, *México*, D.F. A.N.U.I.E.S.., 1975 (*Temas Básicos*).

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

"...*la mayor parte de las funciones con las que uno se tropieza en las matemáticas escolares pueden ser definidas por medio de fórmulas:* $Y = X^2$, $Y = K$, $Y = |X|$ *o bien fórmulas más complicadas como:*

$$Y = 7x^4 + \frac{\text{Sen }(x)}{1 + x}$$

Este hecho sugiere la idea de que las matemáticas no son más - que fórmulas; de que la finalidad de la vida de un matemático es - el producir fórmulas cada vez más complicadas y utilizarlas para - realizar cálculos cada vez más difíciles. Las cosas no son así. Es más, la manipulación ciega de formulas, sin entender lo que se está haciendo, puede llevar a cometer toda una serie de errores de bulto..."

Ian *Stewart*, *Conceptos de Matemática Moderna*, *Alianza Editorial*, *págs.* 84-85.

El párrafo anterior, en el cual estamos totalmente de acuerdo,- *nos sugiere la metodología a emplear en la realización de esta parte.* Recomendamos *que esta se inicie con una introducción gradual* -

de cada uno de los conceptos, haciendo uso de ellos de una manera-intuitiva, para lo cual creemos necesario, en un primer nivel, el manejo de relaciones no numéricas. Es decir, relaciones en las cuales tanto el dominio, el codominio como la regla de correspondencia no sean conjuntos de números o expresiones numéricas respectivamente. De esta manera introducir los conceptos que se mencionan-en esta parte del programa y unicamente cuando hayan sido asimilados pasar a relaciones numéricas.

RECOMENDACIONES TECNICAS.

Al introducir los conceptos fundamentales de esta parte, mediante relaciones no numéricas se recomienda, constuir relaciones entre conjuntos de personas, sugerimos formarlos de estudiantes y estableciendo la relación con condiciones como "ser amigo de" u - otros similares.

Al pasar a ver relaciones numéricas se sugiere introducirlas a - partir de un ejemplo que nos genere una relación de N a N por ejemplo la relación Producción-Ingreso al interior de una fábrica, haciendo ver que matemáticamente la relación es entre dos conjuntos-iguales (en éste caso N) cada uno de ellos representa cosas distintas (uno producción y otro ingreso.

PARTE IV. FUNCION LINEAL

El concepto de Función

"Los distintos objetos y fenómenos que observamos en la naturaleza estan orgánicamente relacionados unos con otros; son interdependientes. El género humano conoce desde hace tiempo las relaciones más sencillas de esta clase, y este conocimiento se haya expresado en las leyes físicas. Estas leyes indican que las distintas magnitudes que caracterizan un fenómeno dado estan íntimamente relacionadas que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Por ejemplo: la longitud de los lados de un rectángulo determina completamente su área; el volúmen de una cantidad conocida de gas a una temperatura dada viene determinado por su temperatura. Fueron correspondencias de esta clase las que sirvieron de origen al concepto de función..."

La matemática su contenido, metodos y significado, -- TOMO I A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev. Alianza Editorial pág. 100.

Dentro de este concepto de función tenemos que la Función Lineal por su sencillez juega un papel relevante, abundantes son los ejemplos naturales y sociales a partir de los cuales podemos iniciar su estudio y mostrar al alumno ejemplos concretos de aplicación en distintos fenómenos de observancia cotidiana. Desde el punto de vista matemático, la Función Lineal, por la sencillez de su regla de correspondencia y de su representación gráfica en el plano no nos permite dar continuidad en el estudio y manejo del plano -

cartesiano iniciado en la parte III.

PROPOSITOS GENERALES.

Con esta parte se pretende iniciar el estudio sistemático de lo que se conoce como los dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica a saber:

1. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, - construir su gráfica correspondiente.

2. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Además de lo anterior se pretende consolidar y desarrollar los- conocimientos algebráicos en la solución de ecuaciones lineales -- con una incógnita y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, dándoles una interpretación geométrica mediante la búsqueda de los puntos de intersección de la gráfica de la función lineal que determina la ecuación, con los ejes coordenados en el primer caso, y en el segundo caso, en la búsqueda del punto de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones que conforman el sistema.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno sea capáz de interpretar geométricamente ecuaciones lineales con una incógnita y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, por medio de la búsqueda de las intersecciones de la gráfica con los ejes o de las gráficas según sea el caso.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Identificar una función lineal por medio de su representación gráfica así como por la ecuación de su regla de correspondencia.
2. Encontrar la ecuación (regla de correspondencia) de cualquier función lineal a partir de su representación gráfica.
3. Encontrar la representación gráfica de una función lineal por inspección y por tabulación.
4. Encontrar la pendiente de una función lineal a partir de su representación gráfica o su regla de correspondencia.
5. Interpretar el concepto de pendiente como razón de cambio y como recorrido por unidad.
6. Identificar la relación existente entre la pendiente y la inclinación de la recta que representa una función lineal.
7. Encontrar gráfica y algebraicamente utilizando las propiedades de la igualdad, los puntos donde la recta corta los ejes coordenados.
8. Relacionar el concepto raíz de una ecuación de primer grado con el punto de intersección de una recta con el eje de las abscisas.
9. Interpretar ecuaciones lineales con 2 incognitas, como reglas de correspondencia de funciones lineales.
10. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas gráficamente, relacionando el punto de intersección de dos rectas y sus coordenadas como los valores que dan solución al sistema.

11. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por lo menos por dos de los cuatro métodos algebraicos de solución.
12. Comprender que cuando un sistema de dos ecuaciones lineales -- con dos incógnitas no tiene solución, el par de rectas asociadas no tiene ningún punto común y que por lo tanto representan rectas paralelas.
13. Comprender que cuando un sistema de dos ecuaciones lineales -- con dos incógnitas, tiene más de una solución, el número de soluciones es infinita y las ecuaciones representan una misma -- recta.

CONTENIDO PROGRAMATICO.

1.	Concepto geométrico de función lineal	1 Hr.
2.	Obtención de la ecuación de las rectas como regla de correspondencia de funciones lineales.	6 Hrs.

2.1 Recta paralela al eje "X" (función constante)

2.2 Rectas que pasan por el origen

a) por el 1er y 3er cuadrante ($0<m<1, m>1$)

b) por el 2o. y 4o. cuadrante ($m\leq -1$, $-1<m<0$)

2.3 Forma general de la regla de correspondencia de las funciones lineales cuya gráfica son rectas que pasan por el origen ($Y = mX$)

2.4 Pendiente (interpretación geométrica)

a) Como cociente   b) Como recorrido por unidad

3. Rectas que cortan el eje "Y" en cualquier punto 2 Hrs.

   3.1 Interpretación geométrica de la forma general $Y=mX+b$.

      a) Cuando $b > 0$

      b) Cuando $b < 0$

4. Raíz de una función lineal 3 Hrs.

   4.1 Definición geométrica

   4.2 Métodos para encontrar la raíz de una función lineal.

      a) Gráfico

      b) Algebraico

5. Ecuación de primer grado y una incógnita 2 Hrs.

   5.1 Igualdad

   5.2 Propiedades de la igualdad

   5.3 Resolución de una ecuación de 1er. grado y una incógnita.

      a) La forma $mX+b=0$

6. La recta como ecuación de 1er. grado con dos incógnitas. 3 Hrs.

   6.1 Par de rectas como sistema de ecuaciones

   6.2 Rectas paralelas

   6.3 Rectas no paralelas

   6.4 Punto de intersección de rectas como solución de un sistema de ecuaciones lineales.

7. Ecuaciones de 1er. grado con dos incógnitas 7 Hrs.

7.1 Ecuaciones equivalentes

7.2 Métodos de solución algebraica

a) Igualación

b) Sustitución

c) Reducción

d) Determinantes

e) Imposibilidad de solución

Total 24 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. CARDENAS TRIGOS, Humberto., El Plano Euclidiano., México, D.F., A.N.U.I.E.S. 1971, Temas Básicos.

2. RANGEL, Luz María. Funciones y Relaciones Parte 2., México, D.F A.N.U.I.E.S., 1975, Temas Básicos.

3. DOLCIANI; BERMAN Y WOOTON., Algebra Moderna y Trigonemetría. -- Trad. por Humberto Gutiérrez.,México, D.F., Ed.Publicaciones -- Cultural, 1979, Libro 2.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. RAMIREZ, Ana Irene.,Sistema de Ecuaciones., México,D.F., A.N.U.I.E.S., 1976, Temas Básicos.

2. LOVAGLIA, Florence M. et all.,Algebra., Trad.por José Guevara,-México,D.F., Harla., 1978.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS.

Para desarrollar esta parte se recomienda, inicialmente definir la función lineal como aquella cuya representación gráfica es una-línea recta. Partiendo de las diferentes posiciones que pueda adoptar dicha recta empezar a encontrar las reglas de correspondencia-principiando con las rectas paralelas al eje "X" o función constante, Y=a. Durante el proceso de obtención de dicha ecuación se utilizará el método inductivo, partiendo de las coordenadas de varios puntos situados sobre la recta, se encontrará, la relación existente entre abscisas y ordenadas y se generalizará para un punto cualquiera. Posteriormente se encontrará la representación geométrica-de cualquier función lineal de esta forma a través de tabulación - e inspección.

Siguiendo el método inductivo se encontrarán las ecuaciones que representen las reglas de correspondencia de rectas que pasan por-el origen, dividiendolas en dos casos; a) Las que cortan los cua--drantes I y III, y b) Las que cortan los cuadrantes II y IV; llegando finalmente a la conclusión, de que todas estas rectas tienen --por ecuación Y=mX donde m=cte. y se le da el nombre de pendiente identificando este valor "m" con la posición que adopta la recta,-para el primer caso m>0 y para el segundo caso m<0 respectivamente.

Además se analizará que pasa con la inclinación de la recta - -cuando "m" crece positiva y negativamente y cuando se aproxima a -cero.

Reiteramos: durante todo este análisis partiremos del estudio de casos particulares, hasta llegar a los casos generales y no al revez.

El estudio de la pendiente de la recta se llevará a cabo de dos maneras, por un lado se relacionará dicho concepto con el de recorrido por unidad y por otro lado como razón de cambio, es decir, por un lado se hará ver cómo al variar la abscisa en una unidad, la ordenada varía "m" unidades, por otro lado también se verá cómo para un cambio cualquiera en la abscisa se tiene un cambio proporcional en la ordenada y que dicha proporción viene dada por "m". Una vez habiendo realizado este análisis el alumno estará capacitado para encontrar la representación gráfica de una función lineal con regla de correspondencia $Y = mX$ por inspección.

Se recomienda abordar el estudio de la función lineal más general $(Y = mX + b)$ a partir de graficar funciones lineales con igual pendiente pero distintos valores de la ordenada al origen, comparando las gráficas obtenidas (mismas que se realizarán en un mismo sistema coordenado) y llegando a la conclusión de que el estudio de esta función es más general que los anteriores y donde el elemento nuevo <u>b</u> viene a afectar las gráficas de las funciones de la forma $Y = mX$, levantandolas o bajandolas <u>b</u> unidades sobre el eje "Y" dependiendo si $b>0$ o $b<0$ respectivamente. Posteriormente se encontrarán los puntos de corte o intersección de la recta con los ejes coordenados tanto gráfica como algebraicamente. En el método algebraico mediante la resolución de la ecuación resultante utilizando las propiedades de la igualdad. Relacionando así el concepto de raíz de una ecuación de primer grado con una incógnita con el punto de intersección de la recta con el eje de las abscisas o eje "X".

Al llegar a esta parte del curso se estará manejando ya ecuaciones de 1er., grado con una y dos incógnitas, por lo cual se pasará a definirlas formalmente.

Finalmente se trabajará con problemas que involucren modelos matemáticos que den lugar a sistemas de dos ecuaciones de 1er. grado con dos incógnitas. Se resolverán dichos modelos por los cinco métodos conocidos. Principiando con el método gráfico que nos permitirá relacionar la solución del sistema con el punto de intersección de las rectas que determina. Posteriormente se estudiarán los métodos algebraicos.

En todos los casos se tratará de estudiar modelos de problemas reales suceptibles de aplicación práctica, esto último dependerá en gran medida de la iniciativa personal del docente y la motivación que haya logrado imprimirle al grupo. Resulta evidente que esto es de suma importancia para el aprovechamiento óptimo de todo lo hasta aquí estudiado.

Por último se analizarán problemas que den lugar a modelos que no permitan una única solución, haciendo notar aquí:

a) cuando no tiene solución, las gráficas de las funciones del sistema, corresponden a 2 rectas paralelas y el tratamiento algebraico del mismo, nos lleva a contradicciones evidentes.

b) Cuando tiene una infinidad de soluciones, observandose que las gráficas de las funciones, corresponden a una misma recta, en tal caso, el tratamiento algebraico del sistema, nos conduce a tautologías.

PARTE V. FUNCION CUADRATICA.

PROPOSITOS GENERALES.

En esta parte se persigue continuar con el enfoque iniciado en la parte anterior abordando los problemas fundamentales de la Geometría Analítica. Su contenido corresponde al estudio de la parábola en los cursos tradicionales de Geometría Analítica con un nuevo enfoque, que hace de lado algunas definiciones como foco y directriz ya que el estudiante no cuenta aún con los elementos necesarios para comprender y manipular adecuadamente estas definiciones porque no se ha definido todavía distancia en el plano y sobre todo por considerar que uno de los vicios tradicionales en la enseñanza de las matemáticas, consiste precisamente en dar al estudiante un gran número de definiciones y conceptos sin darle tiempo de madurar y consolidar cada uno de ellos, de tal suerte que posteriormente no es capáz de diferenciar cuales juegan un papel relevante y cuales no. Como dice un viejo proverbio chino: "Los árboles les impiden contemplar el bosque".

En el desarrollo de esta parte se pretende introducir algunos conceptos geométricos tales como máximo, mínimo y simetría de una gráfica, así como desarrollar y consolidar los conocimientos algebráicos adquiridos en ciclos anteriores para la solución de ecuaciones de 2o. grado con una incógnita, dandole a esto último una interpretación geométrica, relacionando dichas ecuaciones con la ecuación de la regla de correspondencia de una función cuadrática.

Finalmente se verán algunos casos de ecuaciones cuadráticas que involucren números complejos, sin profundizar en su estudio.

OBJETIVO GENERAL.

Que el estudiante sea capáz de relacionar las intersecciones -- con el eje de las "X", de la gráfica de una función cuadrática, -- con la solución de una ecuación de 2o. grado con una incógnita.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Identificar una función cuadrática mediante su representación gráfica o mediante su regla de correspondencia.
2. Graficar una función cuadrática a partir de su regla de correspondencia.
3. Identificar el vértice de la gráfica de una función cuadrática como punto máximo o mínimo de la misma.
4. Determinar el dominio y rango de cualquier función cuadrática.
5. Relacionar el concepto de raíz real de una ecuación cuadrática con los puntos de intersección de la gráfica de una función cuadrática.
6. Localizar gráficamente el valor aproximado de las raíces reales de una función cuadrática.
7. Encontrar las raíces de una ecuación cuadrática con una incógnita por el método de factorización.
8. Encontrar las raíces de una ecuación cuadrática con una incógnita aplicando la fórmula general.

9. Relacionar el concepto de raíz compleja de una ecuación de 2o., grado con la no existencia de puntos de corte con el eje real de la gráfica de una función cuadrática.
10. Elaborar modelos matemáticos de problemas que se representen y resuelvan por medio de ecuaciones de 2o. grado con una incógnita.
11. Interpretar modelos matemáticos que involucren funciones cuadráticas.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Introducción 2 Hrs.
   - 1.1 Obtención de la regla de correspondencia de la función elemental ($Y = X^2$)
   - 1.2 Simetría de una función cuadrática.
   - 1.3 El vértice de la función cuadrática como punto máximo o mínimo de una función cuadrática.
   - 1.4 Dominio y rango de una función cuadrática.
2. La subfamilia $Y = aX^2$ 2 Hrs.
   - 2.1 Cuando $a > 0 \begin{cases} a > 1 \\ a < 1 \end{cases}$
   - 2.2 Cuando $a < 0 \begin{cases} a < -1 \\ a > -1 \end{cases}$
3. La subfamilia $Y = aX^2 + b$ 2 Hrs.
   - 3.1 Cuando $b < 0$
   - 3.2 Cuando $b > 0$
   - 3.3 Punto de intersección de la gráfica de la función con el eje "X".

4. Raíces de una ecuación cuadrática de la forma 2 Hrs.
   $aX^2 + b = 0$
   4.1 Método gráfico
   4.2 Método algebráico
   4.3 Imposibilidad de raíz real (raíces complejas)
5. La subfamilia $Y = a(X - c)^2$ 2 Hrs.
6. Raíces de una ecuación cuadrática de la forma 4 Hrs.
   $AX^2 + BX + C = 0$
   6.1 Método gráfico
   6.2 Métodos algebraicos
      a) Factorización
      b) Fórmula General
7. La familia $Y = a(X - c)^2 + b$ 2 Hrs.
8. La subfamilia $y = ax^2 + bx$ 3 Hrs.
   8.1 Intersección de la gráfica de la función con el eje "X"
   8.2 Localización del eje de simetría.
   8.3 Localización del mínimo o máximo.
9. Raíces de la ecuación cuadrática 1 Hr.
   de la forma $ax^2 + bx = 0$

Total 20 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. DOLCIANI, BERMAN Y WOOTON., Algebra Moderna y Trigonometría, - Trad. por Humberto Gutiérrez., México, D.F., Ed. Publicaciones Cultural, 1978, Libro 2.

2. MAESTRIA DE MATEMATICAS EDUCATIVAS U.A.G., Gráficas., Curso propendeútico de la maestría., Chilpancingo., GRO., 1979., Unidad 2.

3. SISTEMA DE ECUACIONES (ECUACIONES) Santiago López de Medrano -- ANUIES.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. LEHMANN, Charles H., Geometría Analítica, Trad. por Rafael García Díaz., México, D.F., Ed. Limusa., 1982.

2. BARNETT RICH, Ph.D., Algebra Elemental Moderna., Trad. por Eduardo A. Caro, México, D.F., Ed. McGraw-Hill., 1980, Serie Schaum.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

Se recomienda que el estudio de toda esta parte sea de una forma intuitiva. Es decir, a partir de observaciones y comparaciones que permitan elaborar conclusiones acerca de las características de cada una de las subfamilias a estudiar. Una vez realizado esto se formalizarán las conclusiones.

En esta parte se recomienda iniciar con el análisis de la función cuadrática elemental $Y = X^2$, haciéndose observaciones acerca de la simetría axial de su gráfica, determinando la ecuación del eje de simetría el rango y las coordenadas del vértice asociándolo con el concepto de mínimo de la función.

Para continuar el estudio de la función cuadrática se recomienda analizar la subfamilia $Y = aX^2$, para observar cómo el valor de $\underline{a}$ determina la orientación de la parábola y la abertura de la misma*

Se observará como el eje de simetría no varía y el vértice a pesar de no variar se convierte en máximo o mínimo dependiendo de la orientación de la parábola, y finalmente como esta orientación determina el rango.

A continuación se analizará la subfamilia $Y = aX^2 + b$, para observar como el parámetro b traslada sobre el eje "y" la gráfica de la parábola $Y = aX^2$. A continuación se definirán los puntos de intersección de la gráfica con el eje "X" como raíces reales de la función, relacionandolas con la solución de la ecuación cuadrática $aX^2 + b = 0$.

Durante el análisis de esta subfamilia se introducirán los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita de la forma $aX^2 + b = 0$, introduciendo algunos ejemplos -- que den lugar a raices complejas y relacionando estas últimas con la falta de puntos de corte con el eje "X" de la función cuadrática asociada, ($Y=aX^2 + b$).

El siguiente paso en el estudio de las funciones cuadráticas será el estudio de la subfamilia $Y = a(X-c)^2$. Aquí se analizará cómo el parámetro c , traslada sobre el mismo eje "X" el vértice y el eje de simetría de la parábola $Y=aX^2$, c unidades a la derecha

---

(*) Abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si a es positiva o negativa respectivamente y es más cerrada o menos cerrada que la gráfica de $Y = X^2$ dependiendo de si el valor absoluto de a es mayor o menor que 1.

o a la izquierda dependiendo de si c es positivo o negativo respectivamente. Habrá que hacer aquí la observación de que a pesar de - esta traslación el rango no varía. Por otro lado el análisis de esta subfamilia nos permitirá trabajar con binomios al cuadrado. Al- desarrollar el producto $a(X-c)^2$ se observará que da origen a un polinomio de la forma $AX^2 + BX + C$, lo que nos permitirá introducir - los métodos algebráicos, factorización y fórmula general, para la- localización de las raíces de ecuaciones cuadráticas, dandosele -- una interpretación geométrica a los casos en que las raíces reales de la ecuación son repetidas.

Finalmente se analizará el caso más general de las funciones -- cuadráticas, cuando su regla de correspondencia es de la formula - $Y=a(X-c)^2 + b$, para analizar de manera global cómo los parámetros- a, b y c afectan la gráfica de la parábola $Y=X^2$, graficando por inspección a través de localizar: el vértice, eje de simetría, dominio, rango y orientación de la parábola. El desarrollo de las operaciones indicadas por la regla de correspondencia nos permitirá - trabajar con ecuaciones de la forma general $AX^2 + BX + C = 0$.

Finalmente, después de haber analizado la forma general, pasamos al estudio de la subfamilia $y+ax^2 + bx$, que nos da criterios - para determinar el eje de simetría y el máximo o mínimo de una -- función cuadrática cualquiera.

El estudio de esta subfamilia puede abordarse antes de la sub-- familia $y=a(x+c)^2$, sin embargo, el desarrollo propuesto de los temas obedece a que en ellos se pone énfasis en la localización de -- raíces y en los métodos algebraicos de su determinación, dejandode lado la determinación del máximo o mínimo, que se retoma en esta última parte.

Paralelamente a este análisis se recomienda que en cada caso se utilice el método de tabulación.

RECOMENDACIONES TECNICAS.

Para el desarrollo de esta parte se recomienda que el docente elija problemas concretos, por ejemplo de movimiento acelerado, de cuyo modelo matemático se obtenga una función cuadrática, y en la cual al ir variando las condiciones del problema nos genere los distintos casos de la misma que se estudiarán en esta parte. A partir de estos ejemplos concretos se relacionarán cada uno de los conceptos asociados a la función cuadrática (vértice, rango, dominio, etc.) con los elementos particulares del problema.

PARTE VI. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

"La trigonometría conocida a menudo como la ciencia de la medición indirecta, fué inventada por los antiguos greigos en un esfuerzo por hacer posibles los cálculos de longitudes y distancias que eran imposibles de medir directamente.- El uso del razonamiento trigonométrico más antiguo que se conoce fué hecho por Tales, quién vivió alrededor del año -- 600 A.C., Tales calculó la altura de -- las piramides de Egipto usando una vara de longitud conocida, midiendo su sombra y utilizando triángulos semejantes.

Desde los días de la antigua Grecia, la trigonometría ha sido usada extensivamente en topografía, navegación, astronomía y donde quiera que había que medir distancias inaccesibles".

CRUSE/LEHMAN.,CALCULO I, PAG. 217.

EDIT. Fondo Educativo Interamericano.

PROPOSITOS GENERALES.

En esta parte se pretende desarrollar y consolidar los conocimientos adquiridos en ciclos anteriores, acerca de la medición y clasificación de angulos, semejanza de triángulos y las relaciones entre los ángulos agudos y los lados de un triángulo rectángulo. Así como sistematizar y generalizar estas relaciones trasladando su estudio al plano cartesiano.

OBJETIVO GENERAL.

Que el alumno sea capaz de resolver problemas que involucren el uso de las funciones trigonométricas; así como interpretan y construir las gráficas de dichas funciones.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capaz de:

1. Analizar en que consiste básicamente un proceso de medición, y diferenciar entre medición directa e indirecta.
2. Analizar la importancia del uso de una unidad adecuada para el proceso de medición.
3. Definir el concepto del ángulo.
4. Aplicar los sistemas sexagesimal y circular en la medición de ángulos.
5. Identificar las nomenclaturas más usadas para representar ángu-

los, así como la diferencia entre ángulos positivos y negativos.

6. Identificar cuándo dos ángulos son complementarios y suplementarios, opuestos por el vértice y correspondientes.
7. Aplicar el teorema "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°".
8. Resolver gráficamente problemas de medición indirecta.
9. Identificar figuras semejantes y establecer las razones de proporción correspondientes.
10. Relacionar los conceptos: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante como funciones que se derivan del uso continuo de triángulos rectángulos semejantes, en la solución de problemas de medición indirecta.
11. Construir triángulos rectángulos para determinar el valor aproximado de las funciones trigonométricas de un ángulo menor de 90°.
12. Construir círculos trigonométricos para determinar el valor aproximado de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
13. Interpretar gráficas de funciones senoidales, cosenoidales.
14. Encontrar las relaciones de equivalencia entre las funciones trigonométricas de ángulos mayores de 90° y las de menores de 90°.
15. Determinar las relaciones de equivalencia entre las funciones trigonométricas de ángulos complementarios.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. La Medición 2 Hrs.

1.1 ¿Qué medimos?

1.2 ¿Cómo y con que medimos?

1.3 Medición directa y medición indirecta.

1.4 Unidades fundamentales de medida

1.5 Medición de longitudes

2. Angulos 6 Hrs.

2.1 Definición y nomenclatura de un ángulo

2.2 Medida de un ángulo

a) Sistema sexagesimal de medida (el grado)

b) Sistema circular de medida (el radián)

2.3 Clasificaci´on de ángulo (agudos, obtusos, rectos, llanos)

2.4 Relaciones entre dos ángulos (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice y correspon--dientes).

2.5 Suma de ángulos interiores de un triángulo

3. Medición indirecta. Resolución gráfica de problemas. 4 Hrs.

3.1 Escalas, razones y proporciones

3.2 Figuras semejantes

3.3 Problemas que involucran triángulos rectángulos

a) Definición de triángulo rectángulo

b) Elementos de un triángulo rectángulo

c) Resolución de un triángulo rectángulo (metodo gráfico)

4. Relaciones entre la razón de dos lados y un ángu lo agudo de un triángulo rectángulo. 2 Hrs.
   4.1 Funciones trigonométricas (seno, coseno, etc)
   4.2 Funciones trigonométricas de ángulos complementarios.
5. Resolución de triángulos rectángulos analíticamente 4 Hrs.
   5.1 Uso de las tablas trigonométricas
   5.2 Teorema de Pitágoras
      a) Demostración geométrica
6. El círculo trigonométrico 4 Hrs.
   6.1 Angulos en el plano con centro en el origen
   6.2 Círculo de radio unitario con centro en el origen.
   6.3 Intersección del lado final del ángulo y en el círculo unitario.
   6.4 Funciones trigonométricas
   6.5 Gráfica de las funciones trigonométricas
   6.6 Rango de las funciones trigonométricas
7. Relaciones para el calculo indirecto de las funciones trigonométricas de ángulos mayores de 90°. 2 Hrs.
   7.1 Para ángulos del 2° cuadrante
   7.2 Para ángulos del 3er cuadrante
   7.3 Para ángulos del 4° cuadrante

Total 24 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. DOLCIANI BERMAN Y WOONTON. Álgebra Moderna y Trigonometría. Vol. II. Ed. Publicaciones Cultural S.A. 1979, México, D.F.
2. RAMIREZ, Ana Irene., Trigonometría, México, D. F. A.N.U.I.E.S. -- 1976, Temas Básicos.
3. BALDOR, Aurelio., Geometría y Trigonometría., Ed. Cultural Mexicana, S.A. 1971, México, D.F.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. MAESTRIA DE MATEMATICA EDUCATIVA U.A.G., Algebra. Unidad o
2. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, La Medida, Trad. - por Federico Velasco., México, D.F., Trillas, 1978, Temas de Matemáticas.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

Para iniciar el estudio de las funciones trigonométricas, es -- necesario reflexionar acerca de la práctica cotidiana al medir, - así como la dificultad para medir ciertas distancias de manera directa. Este tipo de dificultades fueron las que dieron origen al desarrollo de lo que hoy conocemos como Funciones Trigonométricas.

Se recomienda que antes de formalizar las demostraciones de los teoremas de esta parte, se hagan éstas empíricamente. En el estudio de las funciones trigonométricas, se sugiere que se llegue a - su definición como el resultado natural de la aplicación repetitiva de un mismo modelo en la medición indirecta, en éste caso triángulos semejantes de modelos a escala.

RECOMENDACIONES TECNICAS.

Se recomienda iniciar con una discusión abierta acerca del proceso de medición, ¿que medimos? , ¿como y con que medimos?, cuestiones cuya respuesta será posible establecer una definición del proceso de medición y de la importancia de la unidad de medida en dicho proceso. Se verán ejemplos concretos de medición de longitudes y se cuestionará acerca de la forma en que se realizan mediciones en astronomía, navegación u otros donde no es posible realizar el proceso de medición directamente. Para esta parte se recomienda clasificar el proceso de medición en directo e indirecto.

Se sugiere introducir el tema de ángulos, definiendo ángulo y su nomenclatura.

Para el estudio de los sistemas de medida ángulos, sexagesimal y circular se especificarán claramente las unidades utilizadas y las relaciones entre uno y otro sistema, priorizando más la interpretación de dichas relaciones de equivalencia entre las dos unidades, que su manipulación algorítmica.

Tanto en la clasificación de ángulos como en las relaciones entre ellos, se estudiarán únicamente los marcados en el programa: agudos, rectos, obtusos, llanos, complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice y correspondientes; por ser los más básicos y necesarios para el desarrollo del curso y como hemos mencionado con anterioridad, por considerar que el introducir clasificaciones, términos y conceptos en exceso, va en detrimento del aprendizaje.

En cuanto a la suma de ángulos internos de un triángulo, se iniciará con una demostración intuitiva realizando figuras de diversos triángulos y midiendo el valor de sus ángulos internos con el auxilio de escuadras y transportador. Posteriormente se hará una demostración formal con el auxilio de los conceptos estudiados con anterioridad.

En la introducción de figuras semejantes se recomienda inicialmente resolver problemas que involucren la elaboración de triángulos, haciendo uso de lo que conocemos como modelo a escala y trasladando los resultados del modelo a la situación concreta de la cual provengan. Se recuerda que en este semestre se inicia el estudio de F'ísica I y que por estas fechas se estará trabajando con vectores por lo que sería conveniente intercalar algunos problemas de resultante de fuerzas o velocidades entre otros, pero principalmente de medición indirecta de distancias. De la misma manera se introducirán problemas que involucren la elaboración de triángulos rectángulos (medición indirecta de alturas, por ejemplo) una vez que el estudiante ya haya manejado y resuelto las proporciones que se establecen entre el problema real y el modelo a escala estará capacitado para comprender de manera formal el concepto de semejanza de triángulos, así como de las razones de proporcionalidad que se establecen. Es importante que el estudiante dibuje los triángulos, mida sus lados y sus ángulos, establezca relaciones entre ángulos internos y razones de dos lados, compare situaciones en las cuales los ángulos internos no varíen pero sí las magnitudes de --

sus lados, para finalmente formalizar las relaciones obtenidas y asignarles el nombre convencional que todos conocemos (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente).

Una vez definidas formalmente las funciones trigonométricas, se pasará al estudio de la resolución analítica de triángulos rectángulos introduciendo el Teorema de Pitágoras, a partir de una demostración por construcción geométrica para finalmente manejar el algoritmo.

Por último se generalizará el concepto de función trigonométrica, introduciendo para tal fin el círculo con centro en el origen de coordenadas y de radio unitario; es importante que el estudiante elabore el círculo trigonométrico a una escala adecuada y del mismo obtenga tablas de valores de las funciones estudiadas que le permitan elaborar gráficas de las mismas para ángulos de cero a trescientos sesenta grados, determinando de ésta maner el rango de cada una de las funciones trigonométricas, a partir del cual se elaborarán las gráficas, se determinará el rango y se establecerán las relaciones de equivalencia, entre las funciones trigonométricas de ángulos entre 0°-90° y ángulos mayores de 90°.

PARTE VII. FUNCIONES ASINTOTICAS.

El crecimiento de poblaciones o de un ser vivo en particular -- (planta, animal o el hombre mismo) se puede medir, y son las funciones asintóticas las indicadas para interpretar el crecimiento de dichas poblaciones. Por ejemplo: si "y" es tal que la tasa de crecimiento por cada unidad de "x" es constante, entonces "y" es una función exponencial de "x". También las funciones 1/x y logaritmo son utilizadas para representar el comportamiento biométrico de los seres vivos: talla-peso, talla-edad, peso-edad etc.

Los conceptos de logaritmo y exponencial, son usados hoy en día, conjuntamente y no en pocas veces los logaritmos como consecuencia de los exponentes, siendo que surgen antes que ellos. El concepto de logaritmo, herramienta muy útil en cálculos aritméticos, fué concebido en el s. XVII por el matemático John Nepper con la idea de convertir a la multiplicación y a la división en simples operaciones de suma y resta. Sin embargo la función logaritmo en la que Nepper trabajó, haciendo tablas extensas, no es exactamente, la misma función logaritmo estudiada hoy en día, y de hecho la mas familiar para nosotros no es la de Nepper sino la desarrollada por el matemático inglés Henry Briggs.

Es a través de los logaritmos que se construyen las llamadas escalas logarítmicas que son prácticas para representar cantidades muy grandes, como las edades paleontológicas, dimensiones micro o macroscópicas o frecuencias de ondas electro-magnéticas.

PROPOSITOS GENERALES

En esta parte se pretende iniciar el estudio de los conceptos - de asíntota, curva asintótica y funciones discontínuas, así como - consolidar los conocimientos acerca de las propiedades de las po - tencias y logaritmos.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno sea capáz de identificar si una función es asintó tica a partir de su gráfica, así como interpretar y construir las- representaciones geométricas de funciones asintóticas con base en su regla de correspondencia.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Definir el concepto de curva asintótica geométricamente.
2. Identificar las funciones hipérbola, exponencial y logarítmica como funciones asintóticas.
3. Encontrar las asíntotas de las gráficas de funciones de la forma $f(x) = \frac{a}{(x-c)}$
4. Interpretar el concepto de proporcionalidad inversa como una -- función con regla de correspondencia de la forma $f(x) = \frac{a}{(x - c)}$
5. Definir el concepto de hipérbola
6. Determinar el dominio y rango de las funciones asintóticas.
7. Graficar cualquier función asintótica, por tabulación y en algu nos casos por inspección.

8. Definir el concepto de función exponencial.
9. Identificar la función exponencial $f(x) = 10^x$ como un caso particular de función exponencial.
10. Interpretar el concepto de logaritmo base <u>b</u> (b = natural), de un número cualquiera.
11. Encontrar el logaritmo base 10 de un número cualquiera utilizando las tablas logarítmicas.
12. Explicar porqué no es posible encontrar el logaritmo de un número negativo.
13. Identificar la función $f(x) = \log_{10} x$ como una de las funciones logarítmicas mas comunes.
14. Identificar las funciones $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log_{10}{}^x$ como funciones inversas.
15. Identificar a partir de la gráfica de una función si es asintótica o no.
16. Elaborar modelos matemáticos que involucren funciones asintóticas.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Asíntota, concepto geométrico — 1 Hr.
   1.1 Asíntota al eje "Y"
   1.2 Asíntota al eje "X"
   1.3 Asíntota a cualquier recta
2. La función $f(x) = 1/x$ — 2 Hrs.
   2.1 Representación geométrica
   2.2 Determinación del dominio y rango

2.3 Simetría y asíntotas

3. La subfamilia $f(x) = \frac{a}{x}$, como variación inversa 3 Hrs.

3.1 Para $a > 0$ y $a < 0$

a) Determinación del dominio y rango

b) Simetría y asíntotas

4. La subfamilia $f(x) = \frac{a}{(x - c)}$ 2 Hrs.

4.1 Representación geométrica

4.2 Determinación de dominio y rango

4.3 Simetría y asíntotas

5. La función exponencial $f(x) = a^{x}$ 4 Hrs.

5.1 Definición y notación

5.2 Porque $a \geq 0$

5.3 Interpretación geométrica

a) Cuando $a > 1$

b) Cuando $a < 1$

c) Cuando $a = 1$

5.4 Determinación del dominio y rango

5.5 Determinación de asíntotas

5.6 La función $f(x) = 10^{x}$

6. Logaritmo de un número 3 Hrs.

6.1 Logaritmo base b (b=natural) de un número

6.2 Imposibilidad de logaritmos de números negativos

6.3 Logaritmos base 10

7. La función logarítmica $f(x) = \log_{10} x$ 2 Hrs.

7.1 Definición y notación

7.2 Representación geométrica

7.3 Determinación del dominio y el rango

7.4 Determinación de asíntotas

8. La función logarítmica $f(x) = \log_{10} x$ y la función exponencial $f(x) = a^x$ como funciones inversas. 1 Hr Total 5 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. MARKUSHEVICH, A. I. Areas y Logaritmos.,Trad. por K. Medkov.,-Moscú, U.R.S.S.,Edit. Mir, 1975.

2. LEHMANN, CHARLES H.,Geometría Analítica., Trad.por Rafael García Díaz., México D.F., Limusa.,1982.

3. DOLCIANI BERMAN Y WOOTON, Algebra Moderna y Trigonometría.,libro 2.,Trad. por Humberto Gutiérrez Ponce de León.,México,D.F. Publicaciones Cultural, S. A., 1979,Libro 2 (Estructura y Método).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. SPIVAK, Michael.,CALCULUS, Cálculo Infinetesimal., Trad. por --Bartolomé Frontera Marqués.,Barcelona, España.,Edit.Reverté,S.A 1980.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

En esta parte se recomienda iniciar con una definición geométrica de curva asintótica y recta asíntota, para llegar a una definición formal. Una vez hecho esto, se iniciará el análisis de las --funciones asintóticas a partir del estudio de la función elemental $f(x) = \frac{1}{x}$. Se sugiere analizar su comportamiento para valo--

res del dominio cercanos al cero, determinando su dominio, su rango y sus asíntotas, observando la simetría de la gráfica.

Posteriormente se analizará la subfamilia de funciones con regla de correspondencia de la forma $f(x) = \frac{a}{x}$, para observar como el valor de a afecta la localización de su gráfica* así también se observará la invariabilidad del dominio, rango y de las rectas-asíntotas.

El siguiente paso en el estudio de las funciones asíntoticas será el estudio de la subfamilia $f(x) = \frac{a}{(x-c)}$. Aquí se analizará -- gráficamente como el parámetro c traslada sobre el eje "x" la asíntota vertical, c unidades a la derecha o a la izquierda dependiendo de si c es positiva o negativa respectivamente. Se observará -- que a pesar de esta traslación, el rango no varía y se determinará el dominio y asíntotas de la función.

A continuación, se iniciará el estudio de la función exponencial a partir del análisis de la función $f(x) = 2^x$, luego se analizaran otras funciones exponenciales similares para concluir con el caso más general $f(x) = a^x$, en donde se definirá formalmente este tipo de funciones y se observará porque a no puede ser negativa -- cuando estamos trabajando el dominio de los reales, ya que en este caso tendremos valores complejos para cuando el exponente es fraccionario y da origen a raices enésimas pares. En todo los casos se

---

(*) Se encuentra en el 1° y 3er cuadrante cuando a es positiva y en los cuadrantes 2° y 4° cuando a es negativa.

realizarán análisis de las características que presentan este tipo de funciones para cuando "x" crece negativamente determinando su - dominio, su rango y su eje asintótico tomando en cuenta cuando - - $a>1$, $a<1$, $a = 1$.

Para finalizar con el estudio de las funciones exponenciales se hará enfásis en el análisis de la función $f(x) = 10^x$, esto nos servirá para introducir la función logaritmica.

El último tema de esta parte corresponde a la función logarítmica. Se recomienda iniciar su estudio con la obtención de logaritmos base b (b= natural) de numeros cuya mantisa valga cero, para - observar que el logaritmo es un exponente, al que hay que elevar - la base para obtener el número dado.

Finalmente se trabajará con funciones logaritmicas determinandose su dominio, su rango y su eje asintótico para terminar con el - estudio de la función $f(x) = \log_{10} x$, comparandola con la función exponencial $g(x) = 10^x$, observando que estas dos funciones son inversas.

RECOMENDACIONES TECNICAS

Para esta parte se recomienda que el estudio de cada tema se -- acompañe de ejemplos particulares concretos que provengan de problemas reales, de los cuales se obtengan datos y representaciones gráficas que correspondan a funciones asintóticas, por ejemplo algún análisis de crecimiento poblacional en condiciones ideales, - problemas de movimiento que involucren proporcionalidad inversa -

entre dos magnitudes, etc., realizando las observaciones pertinentes a fin de que el estudiante pueda elaborar sus propias conclu - siones acerca de cada una de las funciones estudiadas. Una vez que se haya realizado esto se pasará a formalizar dichas conclusiones.

El análisis de las funciones asintóticas se iniciará a partir - de la función elemental $f(x) = 1/x$, misma que como se dijo con anterioridad deberá proceder de algún problema concreto que de ori-- gen a la regla de correspondencia, y a la gráfica de la misma.

Se recomienda que el análisis de la función exponencial $f(x) = 2^x$ se introduzca a partir de la anecdota de cómo el inventor del - ajedrez pidió su recompensa por haberlo inventado, aunque en este caso tenemos unicamente exponentes enteros positivos.

En el estudio de los logaritmos se recomienda realizar ejerci-- cios de obtención de logaritmos base 10 de cualquier número real - positivo con el auxilio de tablas de logaritmos, resaltandose las causas que determinan la imposibilidad de obtener el logaritmo de un número negativo.

PARTE VIII. RELACIONES QUE NO SON FUNCIONES

(Circunferencia y Elipse)

El conocimiento y estudio de la circunferencia y la elipse está vinculada con una de las ciencias de mayor antiguedad, la astronomía, cultivada por todas las grandes civilizaciones americanas y del viejo mundo, que tuvo su origen en la observación cotidiana de los astros. Vieja tradición que se ha ido perdiendo con el transcurso del tiempo y el desarrollo de las grandes ciudades pero conservada aún por los habitantes de las poblaciones más apartadas.

Es en el cielo donde en forma natural se nos presenta el círculo y su orilla la circunferencia. Cada 28 días, la Luna viene dando ese maravilloso espectáculo, desde antes de la existencia de nuestros antepasados.

A la observación de los astros, se sucedieron interrogantes tales como ¿por qué se mueven?, ¿que trayectoria describen?, ¿ en torno a quién giran?, etc.

Responder satisfactoriamente estas preguntas le llevó al hombre miles de años, durante los cuáles se sugirieron las más diversas respuestas, que con el paso del tiempo, se desecharon algunas y otras se fueron perfeccionando hasta convertirse en las teorías que actualmente manejamos.

Largo ha sido pues, el camino recorrido por la humanidad, para poder llegar a la descripción matemática de la Circunferencia y Elipse tal y como la manejamos, con el uso del plano Cartesiano.

Desde luego, para la aplicación y utilización de estas formas, circulares y elípticas, no se tuvo que esperar a que el hombre pudiera describirlas matemáticamente. Desde los primeros asentamientos humanos se han utilizado dichas formas, en la alfarería para la confección de utencilios como ollas, platos, etc.

Si observamos con detenimiento las distintas formas de los objetos que nos rodean, poderemos darnos cuenta de la gran cantidad de cosas que entrañan formas circulares, las llantas de los coches, las tapas de los frascos, las orillas de las tazas, los platos, los vasos, las monedas, etc.

En la actualidad muchas son las aplicaciones de las propiedades de estas figuras en los distintos campos de la ciencia, por ejemplo en la medicina, tenemos que existe un método para eliminar los cálculos renales (piedrecitas que se forman en el riñón) en el cual sumergen el paciente en una tina elíptica con agua de modo tal que el riñón afectado quede situado en uno de los focos de la Elipse y se emiten ondas a ultrafrecuencia desde el otro foco, con lo que se logra destruir el cálculo, evitando así una intervención quirúrgica. para destruir dichos cálculos.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno sea capáz de determinar la ecuación que tiene por gráfica una Circunferencia o una Elipse y de manera inversa encontrar la gráfica de circunferencias y elipses a partir de su regla de correspondencia.

OBJETIVOS PARTICUALRES.

Al finalizar esta parte el estudiante será capáz de:

1. Formular las propiedades de distancia a partir de su noción in-

tuitiva e ilustraciones geométricas en el plano.

2. Determinar la distancia entre dos puntos de una recta, mediante el uso del concepto de valor absoluto y verificar sus propiedades.
3. Definir distancia entre dos puntos en el plano y verificar las propiedades de distancia.
4. Determinar la ecuación de la regla de correspondencia de la circunferencia a partir de su definición geométrica.
5. Determinar el dominio y rango de la circunferencia y verificar que no satisface las condiciones de función.
6. Identificar a partir de una ecuación dada si corresponde o no a una circunferencia.
7. Determinar a partir de la ecuación general de la circunferencia su centro y radio.
8. Definir la elipse a partir de su construcción geométrica.
9. Encontrar la ecuación de la regla de correspondencia de relaciones que tienen por gráfica una elipse, con centro en cualquier punto y ejes paralelos a los ejes coordenados.
10. Determinar el dominio y rango de la elipse y constatar que no satisfacen las condiciones de función.
11. Identificar a partir de una ecuación dada si corresponde o no a una relación cuya gráfica es una elipse.
12. Encontrar a partir de la ecuación general de la elipse el valor de: centro, semiejes, ejes, vértices y focos.

13. Encontrar la gráfica de relaciones que corresponden a circunfe rencias y elipses por tabulación.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Distancia

   1.1 Concepto intuitivo y definición — 4 Hr.

   1.2 Distancia en la recta

      a) Distancia de un punto al origen

      b) Distancia entre dos puntos cualquiera

   1.3 Distancia en el plano

      a) Distancia de un punto al origen

      b) Distancia entre dos puntos cualquiera

2. Circunferencia

   2.1 Definición geométrica e identificación — 8 Hr.

   2.2 Ecuación de la regla de correspondencia de relaciones que tienen por gráfica una circunferencia y determinación de su dominio y rango.

      a) Con centro en el origen

      b) Con centro en el eje "x"

      c) Con centro en el eje "y"

      d) Con centro en cualquier punto del plano

   2.3 Gráfica de ecuaciones que representan una circunferencia — 4 Hrs.

      a) Característica que debe cumplir una ecuación cuadrática con dos incógnitas para repre tar una circunferencia.

b) Localización de centro y radio

c) Gráfica por inspección y por tabulación

3. Elipse

3.1 Definición geométrica e identificación 4 Hrs

3.2 Ecuación de la regla de correspondencia de relaciones que tienen por gráfica una elipse y determinación de su dominio y rango.

a) Centro en el origen y ejes coincidentes con los ejes coordenados.

b) Centro en cualquier punto del plano y ejes paralelos a los ejes coordenados.

3.3 Gráfica de ecuaciones que representan una elipse.

a) Características que debe cumplir una ecuación cuadrática con dos incógnitas para representar una elipse.

b) Localización del centro, focos, vértices y ejes.

c) Gráfica por inspección y por tabulación

d) Determinación del dominio y rango ----------

Total 20 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. THOMAS, George B., Cálculo Infinitésimal y Geometría Analítica - La Habana, Cuba., Instituto del Libro, 1968.

2. LEHMANN, Charles., Geometría Analítica., Trad. por Rafael García

Díaz, México,D.F., Limusa, 1982.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. FULLER, Gordon.,Geometría Analítica., Trad. por Luis Ordoñez., México, D.F.,C.E.C.S.A.,1979.
2. STEEN,BALLOU.,Geometría Analítica., Trad. por Enrique Daltabuit, México,D.F., Publicaciones Cultural, S.A.,1974.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

Se recomienda reflexionar acerca de que una de las dificultades que se presentan tanto en Matemáticas, como en cualquier otra ciencia, es establecer con toda claridad los conceptos más elementales, así como las propiedades que satisfacen, lo que muchas veces por obviedad pasamos por alto, sin comprender que en la mayoría de los casos esas obviedades constituyen los pilares sobre los que descansan teorias, que de golpe se nos presentan como algo inaccesible a nuestro conocimiento y dominio.

Después de esta reflexión se recomienda introducir intuitivamente el concepto de distancia, establecer sus propiedades y finalmente formalizar su definición matemática en la recta y en el plano.

En lo referente al estudio de la circunferencia, se sugiere que antes de establecer formalmente la ecuación matemática que la determina, se reflexione acerca de su construcción geométrica, para llegar a la definición geométrica y continuar con su ubicación en el plano cartesiano, hasta llegar a formalizar el concepto analíticamente.

Habrá que insistir en que el concepto de distancia, tan fami- - liar y elemental, juega un papel determinante en la definición analítica de la circunferencia, y cómo a partir de la formulación matemática de distancia se obtiene la de la circunferencia. Se sugiere deducir primero la ecuación de la circunferencia con centro en cualquier punto del plano, para posteriormente analizar, como ca-- sos particulares las ecuaciones de las circunferencias con centro- en el origen o en los ejes coordenados, determinando el dominio y el rango de estas relaciones a partir de sus gráficas.

Posteriormente se recomienda pasar al análisis algebraico de la ecuación general de la circunferencia, para identificar las características que debe cumplir una ecuación cuadrática con dos incógnitas cuando representa una circunferencia. A continuación se de-- terminará el centro y el radio de la circunferencia, a partir de - su ecuación y por medio de factorización se graficarán las circunferencias respectivas y se determinará su dominio y su rango con - base en sus gráficas. Finalmente se recomienda no dejar de lado el método de tabulación en la construcción geométrica de las circunferencias a partir de sus ecuaciones, se hará énfasis en que la de-- terminación del dominio juega un papel importante en la obtención- de valores reales para el rango.

Para iniciar el estudio de la Elipse, se recomienda deducir sus características intrínsecas, mediante el análisis detallado de su construcción y obviamente construyendo elipses, a continuación se deducirá la regla de correspondencia de la relación que tiene como gráfica una elipse con centro en el origen y ejes coincidentes con los ejes coordenados, para lo cual se empezará por establecer la - relación que existe entre los focos y los semiejes (esto es: - -- $b^2 = a^2 - c^2$), una vez determinada la ecuación, se identificará -- graficamente el dominio y rango de la relación, haciendo esto mismo con los restantes casos de la elipse marcados en el programa.

Posteriormente se recomienda pasar al análisis algebráico de la ecuación general de la elipse, para identificar las característi-- cas que debe cumplir una ecuación cuadrática con dos incógnitas -- cuando representa una elipse. A continuación se determinarán los - elementos de la elipse, a partir de su ecuación por medio de factorización, se graficarán las elipses respectivas y se determinará - su dominio y su rango con base en sus gráficas.

Finalmente se recomienda no dejar de lado el método de tabula-- ción en la construcción geométrica de las elipses a partir de sus- ecuaciones. Se hará énfasis en como la determinación del dominio - juega un papel importante en la obtención de valores reales para - el rango.

La elipse nos permite ejemplificar una vez más la importancia - del concepto de distancia, sin el cual resulta imposible describirla analíticamente.

RECOMENDACIONES TECNICAS

Para el concepto de distancia tanto en la recta como en el plano se recomienda corroborar el cumplimiento de las propiedades establecidas con anterioridad, auxiliandose de ilustraciones geomé-- tricas. También se sugiere el planteamiento de problemas para que el estudiante manipule adecuadamente los algoritmos al mismo tiempo -- que lo introduzca al estudio de la circunferencia.

En cuanto a la circunferencia se pueden plantear las siguientes interrogantes: ¿Como dibujamos una circunferencia? ¿que elementos- de la misma es necesario conocer para hacerlo?

PARTE IX. DESIGUALDADES, INTERVALOS Y VECINDADES.

En la parte II de este programa global, estudiamos los distintos conjuntos de números que constituyen los números reales. En cada uno de estos conjuntos hablamos de la relación de orden que existe entre ellos y dimos un criterio geométrico para determinar cuando un número es mayor que otro. También vimos al discutir el problema de la determinación de raíces de una función, las propiedades de la igualdad.

Todo lo anterior nos servirá para el estudio de esta parte en donde centraremos nuestra atención en las propiedades de las relaciones de orden que guardan los números reales y de los conceptos de intervalo y vecindad.

PROPOSITOS GENERALES

En esta parte se pretende introducir los conceptos de intervalo y vecindad mediante el estudio de las propiedades de la desigualdad en los números reales y de la interpretación geométrica de las soluciones de una desigualdad.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar esta parte, el alumno será capáz de encontrar el conjunto solución de una desigualdad, mediante la aplicación de las propiedades de orden de números reales y su interpretación geométrica. Así como construir familias de vecindades con centro en cualquier real, interpretarlas geométricamente y describirlas como subconjuntos de reales.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Enunciar las propiedades de las desigualdades.
2. Determinar el conjunto solución de una desigualdad.
3. Interpretar geométricamente el conjunto solución de una desi--gualdad.
4. Definir intervalo.
5. Clasificar intervalos.
6. Interpretar geométricamente cualquier intervalo.
7. Definir la función módulo (valor absoluto)
8. Enunciar las propiedades del valor absoluto.
9. Relacionar el valor absoluto de la diferencia de dos reales, con la distancia que hay entre ellos.
10. Definir vecindad de un real.
11. Interpretar geométricamente la vecindad de un real.
12. Definir la vecindad reducida de un real.
13. Interpretar geométricamente la vecindad reducida de un real.

CONTENIDOS PROGRAMATICOS.

1. Orden en los reales — 2 Hrs.
   1.1 Desigualdades, conjunto solución
   1.2 Propiedades de las desigualdades
2. Intervalos — 2 Hrs
   2.1 Concepto intuitivo e interpretación geométrica
   2.2 Definición, notación y clasificación

3. Valor absoluto 6 Hrs.

   3.1 Definición e interpretación geométrica

   3.2 Propiedades fundamentales del valor absoluto

   3.3 Función módulo

4. Vecindades 6 Hrs.

   4.1 Vecindad

      a) Definición, interpretación geométrica y notación.

   4.2 Vecindad Reducida

      a) Definición, interpretación geométrica y notación.

   4.3 Familias de vecindades.

Total 16 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

1. DIAZ BARRIGA, Alejandro., DESIGUALDADES., Temas Básicos Area Matemáticas. A.N.U.I.E.S. México 1975.

2. THE OPEN UNIVERSITY, Desigualdades., Trad. por Alfonso Morales México, D.F., Mc Graw-Hill, 1971.

3. LOPEZ MATEOS, Manuel., Funciones Reales., Temas Básicos. Area Matemáticas., A.N.U.I.E.S., México 1973.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. SWANN Y JOHNSON., Prof. E. Mc.Squared Primer Libro de Cálculo .- Trad. Andrés Sestier., Edit C.E.C.S.A., México, D.F., 1981.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS.

Se sugiere iniciar esta parte, a partir de la interpretación -- geométrica de los reales haciendo hincapié, en que a cada punto de la recta le corresponde un número real. El tratamiento e interpretación de los números en toda la parte, se realizará dándole representación puntual, es decir, se tratará a los números reales como- puntos en la recta, garantizando así introducir las propiedades de orden en los reales intuitivamente a través de esa representación- geométrica, para llegar así a su formalización algebráica.

Al pasar al estudio de solución de desigualdades y la determinación de su conjunto solución, resulta conveniente constatar mediante la representación geométrica de dicho conjunto, la correspondencia con la solución de la desigualdad.

La representación geométrica del conjunto solución de una desigualdad, deja ver la necesidad de introducir el concepto de intervalo y su clasificación en abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados.

El valor absoluto o función módulo nos permite relacionarlo con el concepto central de la parte anterior, distancia. Es conveniente constatar que satisface las propiedades de distancia, volviendo a hacer énfasis en que dicho concepto juega un papel determinante- en el estudio de las matemáticas. A partir de distancia podemos hablar de cercanía y de aproximación.

Se recomienda a partir de esta reflexión, retomar la formalización de distancia en la recta, combinarla con la desigualdad y en contrar el conjunto solución, lo que dará lugar a un caso particular de intervalos abiertos llamados vecindades.

Al interpretar geométricamente una vecindad de un punto y hacer variar su radio, nos da lugar a hablar de familias de vecindades,- finalmente para concluir con esta parte se introduce el concepto - de vecindad reducida.

"La necesidad e importancia al mismo tiempo del estudio de las series no puede quedar oculta a quien haya experimentado cómo en problemas muy difíciles, de cuya solución se desconfía, tales series representan, en cierto modo, un ancla de salvación a recurrir en último extremo, cuando todos los restantes recursos del espíritu humano han perecido en el naufragio ".

Jacobo Bernoulli

PARTE X. SUCESIONES Y SERIES

PROPOSITOS GENERALES

Con esta parte se pretende reafirmar el uso del método inductivo e introducir los conceptos de sucesión y de serie.

Como un caso particular de sucesiones, se estudiarán series finitas e infinitas entre otras. Por último se pretende también profundizar el conocimiento sobre la problemática que se deriva del concepto de infinito.

OBJETIVO GENERAL.

Que el alumno sea capáz de aplicar el método inductivo en la determinación del término general de una sucesión, así como interpretar una sucesión en la recta y determinar si es acotada o no.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Definir una Sucesión como una función de $N \longrightarrow R$, a partir de su concepción intuitiva y de su representación gráfica.
2. Representar sucesiones en la recta real.
3. Representar sucesiones recursivas en la recta real.

4. Determinar el término general de una sucesión, a partir de algunos de sus términos.
5. Determinar cuando una sucesión es acotada.
6. Encontrar el término general de una sucesión, de sumas parciales.
7. Determinar cuando una serie es aritmética y cuando geométrica.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Sucesiones — 9 Hrs.
   - 1.1 Concepto geométrico
   - 1.2 Definición y notación de sucesión
   - 1.3 Gráfica de sucesiones
   - 1.4 Representación de una sucesión en la recta real
   - 1.5 Sucesiones recursivas
   - 1.6 Sucesiones monótonas
   - 1.7 Sucesiones acotadas
   - 1.8 Sucesiones de sumas parciales
2. Término general de una sucesión de sumas parciales — 3 Hrs.
   - 2.1 Sumas parciales
     - a) Pares
     - b) Impares
3. Series — 3 Hrs.
   - 3.1 Definición y notación
   - 3.2 Series aritméticas y series geométricas.
   - 3.3 Algunas series especiales (sumas de cuadrados y cubos)

Total 15 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

1. SEYMOUR Y SHEDO., Diferencias Finitas. Una técnica para resol-ver problemas., Trad. por Carlos Soto Franco y Javier Angeles - Angeles., Ed. CECSA., 1981 México D.F.

2. THE OPEN UNIVERSITY., Sucesiones y límites I y II., Unidades 7 y 14 Curso Básico de Matemáticas., Trad. por Antonio Dinares., Ed Mc. Graw-Hill., México D.F. 1975.

3. BUCHANAN, O. Dexton., Limits. A Transition to Calculus., Boston-U.S.A., Ed. Adviser 1974.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. NATANSON, I.P., La Suma de Cantidades Infinitamente Pequeñas. Trad. por José Pérez Castellanos., Ed. Limusa S.A., México D.F.- 1980.

2. MAESTRIA DE MATEMATICAS EDUCATIVAS U.A.G., Método de Exhaución Unidad IV del curso propedéutico de la maestría.

3. NORTHROP, Eugene P., Paradojas Matemáticas., Trad. por Ricardo-Ortiz Vazquez., Ed. UTHEA., México, D.F. 1981.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS.

Se recomienda iniciar ésta parte con la introducción del con--cepto de sucesión, a través de la reflexión del concepto de infi-nito, en éste sentido, se sugiere también que para todo el trata-miento de conceptos, éstos se verifiquen intuitiva y geométrica--mente para posteriormente formalizarlos. Finalmente, a partir de-la definición de sucesiones de sumas parciales introducir el con cepto de serie haciendo hincapié en las series aritméticas y geométricas que serán de utilidad para la parte de integración.

RECOMENDACIONES TECNICAS

Se recomienda iniciar esta parte, mediante el planteamiento de un problema (alguna de las paradojas de Zenón por ejemplo) que además de introducir los conceptos fundamentales de la parte, de lugar a la discusión de la problemática que se deriva del concepto de infinito.

Para la determinación del término general de una sucesión, se recomienda introducir los números pitagóricos (triángulares, rectángulares, cuadrados, etc.), así como retomar ejemplos de la primera parte del programa global (Modelos y Lenguajes Simbólicos) en los que haciendo variar el número de elementos que intervienen en esos problemas el número de pasos utilizados en su resolución nos conduce a sucesiones.

PARTE XI. LIMITE Y CONTINUIDAD

"Canek habló a Guy:
--Mira el cielo; cuenta las estrellas
-No se pueden contar.
Canek volvió a decir:
--Mira la tierra; cuenta los granos de arena.
-No se pueden contar.
Canek dijo entonces:
--Aunque no se conozca, existe el número de las estrellas y el número de los granos de arena. Pero lo que existe y no se puede contar y se siente aquí dentro, exige una palabra para decirlo.
Esta palabra, en este caso sería inmensidad. Es como una palabra húmeda de misterio con ella no se necesita contar ni las estrellas ni los granos de arena. Hemos cambiado el conocimiento por la emoción: que es también una manera de penetrar en la verdad de las cosas."

Canek
Emilio Abreu Gómez

El concepto de límite es dentro del cálculo el más importante y sin lugar a dudas, el más difícil de explicar. La comprensión de este concepto vino a resolver viejos problemas referentes al movimiento planteados ingeniosamente por Zenón de Elea en su paradoja de Aquiles y la Tortuga, con la cual niega la existencia del mismo.

Esta parte da continuidad y conexión a los temas de sucesiones y vecindades con los cuales se ha familiarizado al estudiante en el manejo del concepto de infinito, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño.

PROPOSITOS GENERALES

En esta parte se pretende profundizar los conceptos de funciones y sucesiones a fin de introducir el estudio de los conceptos de límite y continuidad lo que sentará las bases para abordar, posteriormente, los temas de derivada e integral con mayor sencillez.

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno sea capáz de formalizar los conceptos de límite y continuidad a través de su manejo intuitivo y geométrico.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Describir el concepto de límite a través de su noción intuitiva y de ilustraciones geométricas.
2. Interpretar geométricamente el concepto de límite analizando su formulación matemática.
3. Describir el concepto de límite en sus diferentes variantes.
4. Formular el concepto de límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor finito o infinito.
5. Resolver problemas de límites cuando la variable independiente tiende a un valor finito o infinito.
6. Describir el concepto de límite lateral a través del concepto de límite y de su análisis gráfico.
7. Interpretar geométricamente la continuidad de una función.
8. Formalizar el concepto de función contínua.
9. Determinar en una gráfica la continuidad de una función en un-

punto .

10. Determinar la continuidad de una función en un intervalo a partir de la continuidad en un punto.

11. Identificar el concepto de discontinuidad de una función a partir del análisis de la continuidad de la misma.

12. Describir tipos de discontinuidades.

13. Llevar a cabo operaciones con funciones continuas.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Límite de una sucesión — 4 Hrs.
   1.1 Definición e interpretación geométrica
   1.2 Convergencia de una sucesión
   1.3 Sucesiones Divergentes.
2. Límite de una función cuando $x \to \infty$ — 4 Hrs.
   2.1 Cuando el límite es una constante
      a) Interpretación geométrica
      b) Formalización
   2.2 Cuando el límite es infinito
      a) Interpretación geométrica
      b) Formalización
3. Límite de una función cuando $x \to a$ — 5 Hrs.
   3.1 Cuando el límite es infinito
      a) Interpretación geométrica
      b) Formalización
   3.2 Cuando el límite es una constante (un número real)

a) Interpretación geométrica

b) Formalización

4. Teoremas sobre límites 4 Hrs.

4.1 Teorema de Unicidad

4.2 Límite de la suma de funciones

4.3 Límite del producto de funciones

4.4 Límite del cociente de funciones

5. Límites Laterales 1 Hrs.

a) Interpretación geométrica

b) Formalización

6. Continuidad de una Función 4 Hrs.

6.1 Continuidad en un punto

a) Interpretación geométrica

b) Formalización

6.2 Continuidad en un Intervalo

a) Interpretación geométrica

b) Formalización

6.3 Discontinuidad en un punto

a) Interpretación geométrica

b) Formalización

7. Teoremas de Continuidad 2 Hrs.

7.1 Continuidad en la suma de funciones

7.2 Continuidad en el producto de funciones

7.3 Continuidad en el cociente de funciones.

8. Propiedades de las funciones continuas 2 Hrs.

8.1 Teorema del Valor Intermedio. Interpretación geométrica.

8.2 Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\exists\ c \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(c)\ \forall\ x \in [a,b]$

a) Interpretación geométrica ----------

26 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. SPIVAK, Michael., CALCULUS, Cálculo Infinitesimal., Trad. por - Bartolomé Frontera Marqués., Barcelona, España., Edit. Reverté, -- S.A. 1980.
2. THE OPEN UNIVERSITY., Sucesiones y límites I y II., Unidades 7 y 14 Curso Básico de Matemáticas., Trad. por Antonio Linares., -- - Edit. Mc.Graw-Hill., México, D.F. 1975.
3. BUCHANAN, O. Lexton., Limits A. Transition to Calculus., Boston, U.S.A., Edit. Adviser, 1974.
4. LOPEZ MATEOS, Manuel., Límite., México, D.F., Edit. A.N.U.I.E.S. 1973.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. MASANI, PATEL Y PATIL., Cálculo Diferencial e Integral., Trad. -- por Dr. Luis A. Santaló Sors., México, D.F., Edit. Publicaciones Cultural S.A. 1967.
2. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago., Notas sobre Cálculo. Miscelanea. Mat. Facultad de Ciencias UNAM., México, D.F. 1977.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

Se recomienda iniciar el estudio de esta parte reflexionando sobre el origen del concepto de límite, para así introducirse al estudio de límites de sucesiones, ya que su gráfica se puede representar en la recta real, lo que nos permite un manejo intuitivo para llegar a la formalización del concepto de límite de una sucesión.

Siguiendo el mismo procedimiento, se sugiere que se formalice el concepto de límite de funciones de R→R, es decir, primero mediante el manejo intuitivo, para posteriormente llegar a la definición rigurosa, esto es, formalizarlo.

En cuanto a los teoremas sobre límites, es importante subrayar, que por complicado que se nos presente el cálculo del límite de una función, siempre es suceptible de descomposición en otros mas sencillos utilizando las operaciones elementales. De igual manera si es una función complicada siempre será posible descomponerla en funciones mas sencillas, a partir de las cuales podemos analizarla. Una vez mas hay que recalcar que el conocimiento de lo mas elemental y sencillo es la llave de la comprensión de lo más complejo y difícil que se nos presente.

Una vez teniendo claro el límite de una función, se introducirá el concepto de límites laterales, finitos e infinitos, para introducir posteriormente el concepto de continuidad y discontinuidad de una función, tanto en un punto como en un intervalo. Es a partir del análisis geométrico de la continuidad de una función y --

del límite como se formalizará el concepto de la continuidad. Cabe enfatizar, el importante papel del límite para la definición de --continuidad.

RECOMENDACIONES TECNICAS.

Se recomienda durante toda esta parte el planteamiento de pro--blemas, tanto en la introducción de los temas como en la ejemplificación de aplicaciones de los mismos, que den lugar al uso de las funciones mas usuales y que han sido estudiadas con anterioridad -(lineales, cuadráticas, logarítmicas, trigonométricas, etc.).

Entre estos problemas sugerimos iniciar con aquellos referentes al movimiento, como las paradojas de Zenón; o bién, problemas de -construcción de tangentes formulados por Fermant, todo esto con la finalidad de que el alumno, adquiera una visión general de los problemas que dieron origen al concepto de límite.

> "Yo era todavía un poco novicio en estas cuestiones pero, sin embargo, pronto encontré un método general mediante series arbitrarias, llegando por último a mi cálculo diferencial"
>
> Leibniz

PARTE XII. DERIVADA

El concepto de de derivada tiene su origen en los esfuerzos dirigidos a resolver dos problemas: la determinación de la velocidad de un movimiento no uniforme y en dibujar tangentes a curvas. Aunque estos dos problemas fueron tratados desde los griegos, y probablemente desde antes, no fue sino hasta el siglo XVII que los avances en la solución de éstos problemas dieron lugar al concepto de derivada. Sistematizando estos conocimientos Leibniz y Newton.

La derivada, en un principio vino a resolver problemas físicos, sin embargo con el desarrollo de las ciencias naturales y sociales la derivada se nos presenta como una valiosa herramienta en la solución de problemas de origen biológico, químico y económico.

Todo este caudal de riqueza en la aplicación de la derivada junto con la parte de integral representan la culminación del programa global de matemáticas.En ellas se integran y sintetizan la comprensión y aplicación de los conceptos manejados en todas las partes anteriores.

PROPOSITOS GENERALES

En esta parte se pretende profundizar más en el conocimiento del comportamiento de las funciones con base en los conceptos de li mite, continuidad y discontinuidad estudiados en la parte anterior, lo cual nos permitirá determinar cuando una función es creciente o decreciente y bajo que condiciones alcanza un máximo o un mínimo.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Identificar la derivada como una razón de cambio.
2. Identificar la derivada, como la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en un punto.
3. Explicar el método de Fermat para encontrar tangentes a curvas.
4. Aplicar el concepto de límite para la obtención de la derivada de una función en un punto es decir por el método de los 4 pasos.
5. Explicar el concepto de derivada lateral
6. Explicar la relación que existe entre el concepto de derivada y el de continuidad de una función.
7. Definir e interpretar geométricamente la función derivada.
8. Encontrar el dominio de definición de la función derivada.
9. Enunciar los teoremas de derivación.
10. Encontrar la derivada de una función mediante la aplicación de los teoremas de derivación.
11. Interpretar geométricamente los conceptos de máximos y mínimos relativos y absolutos de una función.
12. Formalizar los conceptos de máximo y mínimo relativos y absolutos de una función.

13. Establecer las condiciones del Teorema de Rolle e interpretar-geométricamente dicho teorema.
14. Establecer las condiciones del teorema del valor medio e interpretarlo geométricamente.
15. Interpretar geométricamente y formalizar el concepto de función creciente y decreciente.
16. Establecer si una función es creciente o decreciente en la vecindad de un punto mediante la aplicación del concepto de derivada.
17. Localizar el máximo y el mínimo de una función monótona en un-intervalo cerrado.
18. Determinar si una función cumple las condiciones para la aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada, en - la determinación de máximos y mínimos.
19. Localizar máximos o mínimos relativos y absolutos de una función en un intervalo cerrado, mediante la aplicación del criterio de la primera derivada.
20. Localizar máximos o mínimos relativos de una función en un intervalo cerrado mediante la aplicación del criterio de la segunda derivada.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Concepto de derivada 4 Hrs.
   1.1 Interpretación física de la derivada (como razón de cambio)

1.2 Interpretación geométrica

1.3 Método de Fermat para encontrar tangentes

1.4 La derivada como un límite (método de los cuatro pasos)

2. Relación entre la derivada y la continuidad de una función en un punto. 4 Hrs.

2.1 Derivadas laterales

2.2 Teorema: "Si f es derivable en a, entonces f es continua en a"

2.3 La derivada como una función (función derivada)

2.4 Dominio de definición de la función derivada

3. Derivación 12 Hrs.

3.1 Derivada de una constante

3.2 Derivada de una función lineal

3.3 Derivada de una suma de funciones

3.4 Derivada de una constante por una función

3.5 Derivada de un producto de funciones

3.6 Derivada de un cociente de funciones

3.7 Derivada de $f(x) = x^n$

3.8 Derivada de funciones trigonométricas

3.9 Derivada de funciones logaritmicas y exponenciales

3.10 Regla de la cadena

4. Aplicaciones de la derivada 10 Hrs.

4.1 Formalización de conceptos tratados intuitivamente en partes anteriores.

a) Máximos y mínimos absolutos y relativos de una función.

b) Funciones monótonas: Crecientes, decrecientes, no crecientes y no decrecientes.

4.2 La derivada y los máximos y mínimos de una función.

a) Puntos singulares (máximo, mínimo, punto de inflexión).

b) Teorema de Rolle

c) Teorema del valor medio

d) Puntos singulares

e) Función creciente y decreciente

si $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

si $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

4.3 Localización de máximos y mínimos

a) Criterio de la primera derivada

b) Criterio de la segunda derivada

Total 30 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

1. SPIVAK, Michael., CALCULUS, Cálculo Infinitesimal. Vol I., Trad. por Bartolomé Frontera Marquez., Barcelona, España., Edit. Reverté S.A. 1980.

2. THE OPEN UNIVERSITY., Diferenciación I y II., Unidades 12 y 15 -- Trad. por Antonio Linares., Edit. Mc. Graw-Hill, México, D.F. 1975.

3. GRANVILLE, William Anthony., Cálculo Diferencial e Integral., -- Edit.UTHEA., México, D.F., 1952.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

1. HAASER, LA SALLE, SULLIVAN., Análisis Matemático. Curso de Introducción Vol I. Trad. por Federico Velasco Coba., México, D.F. -- 1977 Edit. Trillas.

2. MASANI, PATEL Y PATTL., Cálculo Diferencial e Integral., Trad., por Dr. Luis A. Santaló Sors., México D.F., Edit. Publicaciones Cultural S.A. 1967.

3. THOMAS G.B. Cálculo Infintesimal y Geometría Analítica., Trad.- por Julio Porcel y Luis Bravo., La Habana., Edit. Revolución, -- 1968.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS.

Para iniciar el estudio de la derivada se recomienda dar una -- introducción histórica acerca de los problemas fundamentales que - motivaron su surgimiento, haciendo hincapié que el problema geométrico de trazar la tangente a una curva puede entenderse como la - interpretación geométrica del problema físico, de la determinción - de la velocidad de un movimiento no uniforme. Una cabal comprensión de éstos problemas resulta de vital importancia para un buen desarrollo de esta parte, por lo que se sugiere que antes de exponer el método de Fermat para encontrar tangentes se enfrente al - estudiante en la búsqueda del problema mencionado.

Posteriormente se recomienda abordar la interpretación alge- -

braica del método de Fermat para encontrar tangentes, lo que nos conduce a la formalización matemática de la derivada, es decir, la derivada como un límite. El desarrollo algebráico para encontrar la derivada de una función en un punto, se le conoce con el nombre del método de los cuatro pasos.

A continuación y con la finalidad de que no se pierda el objeto de la aplicación de la derivada, se inicia el análisis del comportamiento de una función. Se propone que dicho análisis se fundamente en la gráfica de la función que nos permita ver la relación que existe entre los conceptos de derivada y continuidad, ambos referentes al comportamiento de las funciones.

Este análisis debe concluir con la definición de la función derivada haciendo hincapié en que no necesariamente el dominio de esta función coincida con el de la función que le dió origen.

A continuación se sugiere determinar los distintos algoritmos de derivación, y las propiedades que satisface la derivada.

Resulta importante señalar, que por complicada que se nos presente la regla de correspondencia de una función, frecuentemente es posible mediante su análisis descomponerla en funciones elementales, para las cuales ya se conocen los algoritmos de derivación y a partir de éstos determinar la derivada de éste tipo de funciones.

Se recomienda que para formalizar los conceptos intuitivos, máximos, mínimos y funciones monótonas, se parta de su interpretación geométrica y se haga hincapié en la importancia de poder localizar el máximo y el mínimo de una función, el determinar en que intervalo del dominio una función es creciente o decreciente así como la relación de este hecho con los máximos o mínimos de una función.

Por último, el Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio dejan ver el papel que juega la derivada en la determinación de la localización de máximos y mínimos. Una de las aplicaciones mas importantes de la derivada es que nos proporciona un criterio en la localización de máximos y mínimos de una función derivable, y estos puntos se relacionan con la optimización.

"Si yo he logrado ver más ha sido porque estaba sobre --- los hombros de un gigante".

Newton a Hooke

PARTE XIII. LA INTEGRAL

El cálculo diferencial y el cálculo integral se desarrollan de manera diferente a lo largo de líneas paralelas. Cada uno parte de conceptos geométricos fundamentales: la noción de "pendiente" en - un caso y la de "area" en el otro; pero ambos progresan rápidamente hacia ideas y aplicaciones que están mas alla de los confines - de la geometría pura.

Efectivamente, el cálculo integral, resolvió un un viejo problema: el de medición de áreas.

La historia del problema, se pierde en la noche de los tiempos- los babilónicos llegaron a pensar -erróneamente- que las áreas de- las figuras planas dependían de los perímetros. Sin embargo los métodos correctos para encontrar casos particulares de areas de figuras tales como los triangulos y rectángulos eran conocidos antes - del año 2200 a.n.e. El paso siguiente, encontrar áreas de figuras- planas de contornos curvos como por ejemplo contornos parabólicos- causó serios problemas a egipcios y griegos, en especial éstos últimos lograron importantes avances en la solución del problema. Pero no fué hasta el siglo V a.n.e. que Eudoxio, matemático griego,- desarrolló como un método sistemático para calcular, entre otras- cosas, las áreas de los círculos y los volúmenes de las pirámidesegipcias, el "Método de Agotamiento o de Exhuación".

Este método, mejorado y complementado por los aportes de decenas de matemáticos durante siglos, dió lugar a que en el s. XVII - Isaac Newton y Gottfried Leibniz, trabajando independientemente, - descubrieran un método mucho mas poderoso que simplifica mucho los cálculos, y que en consecuencia aumenta el número de funciones que pueden ser integradas. La base del método es un teorema conocido - como el Teorema Fundamental del Cálculo. Este teorema establece -- una relación entre dos materias que hemos considerado separadamente: la integración y la derivación. La razón por la cual éste teorema permaneció desconocido durante 1900 años se debe a que se requería de algunos conceptos que aún en tiempos de Newton, eran difíciles y poco familiares, como lo es el concepto de límite. Concepto que hoy conocemos y utilizamos al definir la derivada.

PROPOSITO GENERAL

Con ésta parte se pretende: consolidar los conocimientos adquiridos en ciclos anteriores sobre áreas y medición de áreas de polígonos regulares, así como desarrollar el concepto de integral a -- partir de las propiedades generales del área y del concepto de límite.

Una vez definida la integral, se deducirán las fórmulas para integrar funciones sencillas y así avanzar en la manipulación de integrales, para finalmente introducir el Teorema Fundamental del -- Cálculo como la síntesis tanto de la derivada como de la integral.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar la parte el alumno será capáz de definir como un - límite la integral e interpretarla geométricamente, así como, establecer la relación que existe entre la derivada y la integral me-- diante la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo en la obtención de la integral de una función.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar ésta parte el alumno será capáz de:

1. Interpretar geométricamente las propiedades generales del área
2. Deducir los algoritmos para la obtención de áreas de polígonos- regulares mediante la aplicación de las propiedades generales - del área.
3. Interpretar geométricamente el método de exhaución en la obtención de áreas.
4. Definir e interpretar suma superior e inferior de una función
5. Enunciar el concepto de integral definida e interpretarlo geométricamente.
6. Determinar la integral definida de funciones lineales y cuadráticas.
7. Establecer e interpretar geométricamente las propiedades de la integral.
8. Definir la integral de una función como función.
9. Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo.
10. Integrar funciones elementales.

11. Integrar funciones por sustitución.

12. Integrar funciones por partes.

13. Obtener el área de la región comprendida entre las gráficas de dos funciones.

14. Obtener volúmenes de sólidos de revolución.

CONTENIDO PROGRAMATICO

1. Areas y Medición de Areas 11 Hrs

   1.1 Introducción

   1.2 Propiedades de Area

   1.3 Areas de Polígonos sencillos

      a) Area del rectángulo

      b) Area del triángulo

      c) Area del paralelogramo

      d) Area del trapecio

      e) Area de un polígono en general

   1.4 Funciones y Areas

   1.5 Area debajo de la gráfica de una función lineal

   1.6 Area debajo de la gráfica de una parábola

      a) Suma de áreas de rectángulos menores como una serie

      b) Suma de áreas de rectángulos mayores como una serie

      c) Límite de las sumas menores y mayores.

   1.7 Area debajo de una función cualquiera

   1.8 Integral definida como el límite de una serie (definición formal)

2. Integral Definida 9 Hrs

2.1 La integral definida de la función constante

2.2 La integral definida de la función lineal

2.3 Integral definida de una función cuadrática

2.4 Propiedades de la integral

a) Suma

b) Producto de una constante por una función

c) Sea $a<c<b$. Si f es integrable sobre $[a,b]$ entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$

$$y \int_a^b f \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b f \, dx$$

2.5 Si f es integrable sobre $[a,b]$ y F está definida sobre $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f \, dx$$

entonces F es contínua en a,b

3. El teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.) 7 Hrs

3.1 Primera parte del T.F.C.

3.2 Segunda parte del T.F.C.

3.3 Función primitiva

3.4 Algoritmos de integración de funciones elementales.

4. Métodos de integración 9 Hrs.

4.1 Integración por sustitución

4.2 Integración por partes.

5. Aplicaciones de la integral 3 Hrs.

Total 39 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

1. SPIVAK, Michael., Calculus Cálculo Infinitesimal Vol I., Trad. - por Bartolomé Frontera Marqués, Barcelona España., Edit. Reverté S.A. 1980.

2. MASANI, PATEL Y PATIL., Cálculo Diferencial e Integral., Trad.- por Luis A. Santaló., Edit. Publicaciones Cultural S.A. México, D.F. 1967.

3. IMAZ, Carlos., Introducción al Cálculo., Serie Sociedad Matemática Mexicana., Edit. Trillas, México, D.F. 1976.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. CRUSE-LEHMAN., Lecciones de Cálculo-2 Introducción a la Integral., Trad. por Hugo Arizmendi Peimbert., Edit. Fondo Educativo-Interamericano., México, D.F., 1982.

2. COURANT, JOHN., Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Trad. por Goldberg, Jiménez y Florio. Edit. Limusa., México, D.F 1971.

3. GRANVILLE, William., Cálculo Diferencial e Integral., Edit. - -- UTHEA., México, D.F. 1952.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

Se sugiere iniciar ésta parte estableciendo las propiedades generales de las areas, para posteriormente calcular áreas de polígonos regulares, lo que nos permitirá plantear la dificultad que -

entraña el encontrar el área de una superficie determinada por una línea curva. La solución de problemas de ese tipo nos introduce en el estudio del método de exhaución para la determinación de áreas.

Este método, nos permite abordar los conceptos de sumas inferiores y superiores para que por medio del límite se formalice el concepto de integral definida. Dicha definición se aplicará para determinar la integral, primero de una función constante, después de una función lineal cualquiera y finalmente de una cuadrática simple.

Para concluir el tema de integral definida, se recomienda manejar e ilustrar geométricamente las propiedades básicas de integral, lo que da lugar a definir la integral como una función. Es importante hacer hincapié que nuestro estudio de integral lo reduciremos principalmente a funciones continuas, recomendandose sólo mostrar ejemplos de funciones discontinuas que son integrables.

Una vez que hemos definido la integral como función (integral definida) se recomienda analizar las integrales de funciones lineales y cuadráticas vistas con anterioridad, y derivarlas para que se vea la relación que existe entre la derivada y la integral, y pasar posteriormente a enunciar las dos partes del Teorema Fundamental del Cálculo, que nos permite introducir el concepto de función primitiva, resaltando que, la primitiva de una función es cualquiera de una determinada familia de funciones, las cuales se diferencían entre sí por una constante, esto nos permitirá concluir con los algoritmos de integración de funciones elementales.-

Al determinar los métodos de integración se recomienda hacerlo a partir de una analogía con los algoritmos de derivación.

NOTAS DE CLASE

PRESENTACION

Los autores de estos apuntes, en nuestra experiencia cotidiana- como profesores de matemáticas en las Preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero, hemos observado con gran preocupación lo deficiente de su enseñanza en este nivel. En la mayoría de los casos lejos de reafirmar o consolidar los conocimientos adquiridos - por el estudiante durante la Primaria y Secundaria, y así introducirlos gradualmente en la consecución de nuevos conceptos, solo se ha logrado reforzar en el mismo su rechazo hacia las matemáticas.

En distintos foros, al abordar el análisis de este problema se ha hecho patente la complejidad del mismo, donde se entremezclan - distintos factores -políticos, sociales, ideológicos, etc.- de los cuales no es posible establecer una discusión aquí, ya que además- no son exclusivos de la enseñanza de las matemáticas, sino en general de toda la ciencia.

Sin embargo, ennumeraremos algunas de las formas como se manifiestan dichos factores:

1. El uso excesivo del método axiomático en detrimento de otros métodos.

2. Uso excesivo del álgebra, lo cual ha dado lugar a una algebrización de los conceptos, convirtiendo de esta manera, el estudio del álgebra en el objetivo a alcanzar.

3. Existencia de una desvinculación casi total de las matemáticas con otras disciplinas de estudio y principalmente del entorno- social en que se produce.

4. Falta de una secuencialidad lógica entre una materia y otra dentro de la misma área e incluso entre los temas de una misma materia.

5. Los programas de las materias son excesivamente extensos, lo que imposibilita detenerse a estudiar con más calma algún tema que resulte de mayor dificultad para el estudiante.

6. Falta de claridad en los objetivos a cumplir no solo de los temas sino incluso de todo el curso.

Lo anteriormente expuesto trae como consecuencia que en la mayoría de los profesores su actividad docente se limite a lo siguiente: Definir los conceptos que va a enseñar y apoyarse con una serie de ejercicios de supuesta aplicación a la realidad, estos últimos con la finalidad de justificar la validez de dichos conceptos. Esta forma de llevar a cabo la actividad docente tiene como consecuencia que el alumno no alcance a comprender el concepto sino simplemente lo mecanice, lograndose con ello -en el mejor de los casos- que el alumno manipule conceptos sin entender lo que esta haciendo.

Consideramos que durante el proceso de enseñanza de las matemáticas se debe partir de problemas concretos con los cuales el maestro y los alumnos en un proceso de abstracción vayan construyendo el concepto a estudiar, una vez habiendo efectuado este proceso de abstracción darse a la tarea de buscar y resolver problemas prácticos que involucren dicho concepto, resaltando en el alumno -

la generalidad que se obtiene en la formulación de conceptos abs--tractos, como los que se utilizan en matemáticas.

Para lograr esto, nos proponemos realizar nuestro trabajo bajo-las siguientes premisas:

1. Durante la enseñanza de las matemáticas, la intuición debe - ir por delante y después ser respaldada por la formalización.

2. La teoría de conjuntos, la geometría, el álgebra, el cálculo etc., son partes integrantes de la matemática, estrechamente relacionadas, las cuales no pueden presentarse de manera aislada ni -- constituir por si solas el objeto de la enseñanza de las matemáticas.

3. Las matemáticas están estrechamente ligadas a las otras ciencias y son un producto de la sociedad y como tal se estanca o se - desarrolla de acuerdo a la formación social existente.

4. En la enseñanza de las matemáticas a nivel Preparatoria, las materias, temas, subtemas, etc., deberían irse abordando de manera que se vaya avanzando de lo fácil a lo difícil de lo concreto a lo abstracto, siguiendo una secuencialidad lógica de aprendizaje.

5. Es necesario recalcar los conceptos fundamentales de cada tema, subtemas,etc., mismos que conformarán el piso de conocimientos fundamentales que servirán como base de sustentación, que permitirá acceder a mayores niveles de profundización y especialización.

Tomando como base las premisas anteriormente citadas es como organizado los materiales, mismos que corresponden a los contenidos que se desarrollarán durante el presente trabajo.

Satisfaciendo los siguientes:

OBJETIVOS GENERALES DEL AREA DE MATEMATICAS.

1. Fomentar y desarrollar el interés por el trabajo matemático en los estudiantes.

2. Desarrollar la capacidad de aplicación interdiciplinaria de las matemáticas con las demás ciencias a la realidad social en que se desenvuelve con el fin de transformarla.

3. Fomentar hábitos por el estudio, razonamiento e investigación que permitan al estudiante la producción de nuevos conocimientos.

4. Familiarizar al estudiante con la simbología de las matemáticas, tratando la materia con mayor rigor científico.

5. Adquirir una formación matemática básica, entendida esta como el conocimiento de los fundamentos de las matemáticas que le permitan el acceso a mayores niveles de profundización, especialización y aplicación.

6. Contribuir al desarrollo de las operaciones mentales como la observación, comparación, abstracción, generalización, concreción y definición mediante el análisis científico.

PARTE I. MODELOS Y LENGUAJES SIMBOLICOS.

OBJETIVO GENERAL.

Que el alumno construya un modelo simbólico y su lenguaje, identificando el origen de las matemáticas en la busqueda constante de la solución de problemas concretos de la realidad, así mismo que comprenda como a través de la Historia han ido evolucionando las matemáticas.

OBJETIVOS PARTICULARES

Al finalizar esta parte el alumno será capáz de:

1. Analizar el proceso de producción de conocimientos desarrollado por el hombre a través de la Historia.

2. Establecer la relación realidad-abstracción.

3. Identificar los lenguajes simbólicos como medio de expresión humana.

4. Identificar los modelos simbólicos como representación esquemática de problemas concretos.

5. Entender los lenguajes simbólicos como parte esencial del desarrollo del hombre.

6. Describir la interrelación modelos-lenguajes simbólicos a través de los sistemas de numeración primitivo, Egipcio, Babilónico, Maya y Decimal, mismos que se pueden ver como un ejemplo histórico concreto de la producción humana en el campo de las ideas.

7. Describir el desarrollo esquemático de las diversas formas que ha producido el hombre para representar el concepto de número como ejemplo de la evolución del conocimiento.

8. Analizar los orígenes y el manejo del sistema de numeración decimal.

9. Identificar los símbolos y principios de cada sistema de numeración estudiado.

10. Comparar las características fundamentales de los diferentes sistemas de numeración.

11. Construir un modelo simbólico y su lenguaje.

CONTENIDOS PROGRAMATICOS

1. Modelos Simbólicos 6 Hrs.

1.1 La importancia de las Matemáticas

1.2 La abstracción

1.3 Cómo plantear un problema

1.4 Cómo resolver un problema.

a) Método directo

b) Método de simulación

c) Método de solución mental

1.5 Características de un modelo

a) Realidad-abstracción

b) Generalidad

c) Dificultad teórica

d) Dificultad económica

2. Lenguajes Simbólicos 5 Hrs.

2.1 Introducción

2.2 Características principales

a) Arbitrariedad-convención

b) Formalización-operatividad

2.3 Creación y utilización de los lenguajes simbólicos.

3. Sistemas de Numeración 8 Hrs.

3.1 Introducción

3.2 Algunos sistemas de numeración (bosquejo histórico, símbolos, principios y limitaciones).

a) Primitivo

b) Egipcio

c) Babilónico

d) Romano

e) Maya

f) Decimal o indo-arábigo

Total 19 Hrs.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago., Modelos Matemáticos, México, D.F., - Edit. A.N.U.I.E.S., 1973.

2. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago., Lenguajes Simbólicos, México, D.F., Edit. A.N.U.I.E.S., 1973.

3. WILLERDING, Margaret F., Conceptos Matemáticos, Trad por Andrés Sestier, México, D.F., C.E.C.S.A., 1976.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

1. POLYA G., Cómo Plantear y Resolver Problemas, Trad Por Julián-- Zugazagoitia, México D.F., Trillas, 1979.

2. FOMIN, S.V., _Sistemas de Numeración_, Trad. por Carlos Vega, Moscú, URSS, Mir, 1975.

3. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, _Sistemas de Numeración para los Números Enteros_, Trad., por Federico Galván, México, D.F., Trillas, 1981.

4. ASIMOV, Issac., _El Reino de los Números_, Trad. por Jesús del Castillo, México, D.F., Diana S.A., 1979.

ACTIVIDAD DOCENTE N° 1

INTRODUCCION AL CURSO DE MATEMATICAS I

OBJETIVOS:

Al término de la clase el alumno debe:

1. Conocer los objetivos generales de la Parte I.
2. Conocer la dificultad básica en el aprendizaje de las matemáticas.
3. Conocer la importancia de las matemáticas en la Ciencia.

Con ésta clase damos inicio formal a nuestro curso que corresponde a la materia de Matemáticas I, iniciaremos como lo marca el programa presentado en páginas anteriores, con la parte denominada Modelos y Lenguajes Simbólicos, misma que tiene los siguientes

OBJETIVOS

a) Conocer el proceso de producción de conocimientos desarrollados por el Hombre a través de su historia.

b) Clarificar la relación Realidad-Abstracción.

c) Reconocer los símbolos como medios de expresión humana.

d) Identificar los modelos simbólicos como representación esquemática de problemas concretos.

e) Entender los lenguajes simbólicos como parte esencial del desarrollo del Hombre.

f) Describir la inter-relación Modelos-Lenguajes Simbólicos, a-través de los sistemas de numeración, mismos que se pueden ver como un ejemplo histórico concreto de la producción humana en el campo de las ideas.

g) Conocer el desarrollo esquemático de las diversas formas que ha producido el hombre para representar los números como ejemplo de la evolución del conocimiento.

h) Saber el manejo del sistema de numeración decimal.

EL PROCESO DE ADQUISICION DE CONOCIMIENTOS Y EL PROBLEMA DE LAS MATEMATICAS COMO DISCIPLINA DE ESTUDIO.

Además de los diversos factores mencionados con anterioridad, como causas de que exista un serio rechazo por parte de la mayoría de los estudiantes hacia las matemáticas como disciplina de estudio, existe uno que por ser más sútil, es mucho más eficáz. Este consiste en el carácter abstracto con que se presenta.

Aunque la abstracción no es una cualidad exclusiva del conocimiento matemático, sino del conocimiento en general, es en las matemáticas donde se le ha dado mayor énfasis, dando como resultado que se presente al estudiante como algo ajeno a la realidad y por ello sea más difícil su comprensión.

¿Pero a que nos estamos refiriendo con la palabra abstracción?

El término abstracción, al cual nos estamos refiriendo es el fenómeno que se presenta en todo proceso de adquisición de conocimientos y el cual trataremos de describir brevemente.

El ser humano en su práctica diaria en la sociedad, va conociendo y comprendiendo gradualmente las cosas y los fenómenos que lo rodean; las propiedades y leyes de la naturaleza, las relaciones - entre si mismo y la naturaleza, las relaciones de los hombres en-- tre sí, etc.

En un principio no observa más que la apariencia de las cosas,- los diversos fenómenos de manera aislada y las conexiones superficiales de las mismas.

A medida que dichos fenómenos se le presentan una y otra vez, - es cuando en el cerebro se produce un cambio repentino y surgen -- los conceptos como esencia de las cosas, de su interrelación con - otras y de sus conexiones internas. Estos conceptos servirán a su vez para que, mediante el juicio y razonamiento lógico llegar a -- conclusiones lógicas.

Finalmente podemos decir que los conceptos son representaciones abstractas de las cosas, es decir no son tangibles (no se pueden - tocar) o físicamente reales, sino un reflejo de esta realidad que- se produce en nuestro cerebro.

De esta manera cuando mencionamos: "El tamaño de algunas células es de algunas cuantas micras", la palabra célula que es el concepto fundamental del cual se habla en el párrafo, es una representación abstracta, idealizada, de una realidad física bien definida que surge en nuestra menta para darle mayor comprensión a lo que - se habla.

Obviamente esto ocurrirá siempre y cuando anteriormente hayamos asimilado dicho concepto.

¿Y que tiene que ver todo esto con la dificultad en el estudio de las matemáticas?

Pues que en matemáticas, en lugar de trabajar con conceptos tales como: células, flores, metales, plantas personas, etc., todos y cada uno de los cuales representan realidades bien concretas y físicamente tangibles, trabajamos con símbolos y letras, los cuales a su vez nos representan números, operaciones, relaciones entre los mismos y diversos conceptos afines todos y cada uno de los cuales no tienen corporiedad física, ésto es: son a su vez abstractos e intangibles, no existen fuera de nuestros cerebros, y aun allí dentro existen al nivel conceptual y no al nivel fisiológico. ¿acaso alguien ha visto un cinco caminando por la calle?

Es por ello que algunas personas prefieren estudiar otras disciplinas tales como la biología, psicología, medicina, economía, etc., y optan por automarginarse del estudio de las matemáticas hasta en sus conceptos más elementales, cargando con las consecuencias que ello acarrea.

Sin embargo, a pesar de su adelanto y abstracción, las matemáticas no han roto sus vínculos con la realidad, ya que es precisamente la aplicación práctica de las nuevas teorías la que impulsa el desarrollo de unas y relega al olvido muchas otras.

IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS

Las matemáticas al igual que el resto de la ciencia, es el producto acumulado por la humanidad desde sus inicios, hasta la actua lidad.

Lo que hoy se enseña en la escuela, es ésto conocimiento acumulado, que en los ultimos años ha tenido un magno desarrollo, que ha imposibilitado al hombre, como individuo aislado, dominarlo en su totalidad, esto es, no existe hoy en día, un hombre capáz de dominar todos los campos del conocimiento, puede y de hecho los hay, tener una visión general y dominar una parte mínima del conocimiento. De ahí que en la actualidad las distintas carreras que se imparten en las Universidades, son el inicio de una especialización en alguna rama de la ciencia.

Pero ésto es un fenómeno relativamente reciente, hace unos cuantos siglos, nuestros filósofos y hombres de ciencia, eran capaces de dominar conocimientos de biología, física, matemáticas, derecho, política, astronomía, etc.

Decimos ésto porque desde la antiguedad, la ciencia es una sola, compuesta desde luego por distintas partes intimamente relacionadas, de ahí que en la actualidad es imposible estudiar un fenómeno sin que involucre el concurso de varias disciplinas.

Dentro de todo este desarrollo, las matemáticas ocupan un lugar de vital importancia al grado de que para muchos las matemáticas son el lenguaje de toda la ciencia.

Para darnos una idea del inmenso campo de aplicación de las matemáticas, veamos algunos ejemplos:

a) En biología, cuando se estudia la reproducción y el crecimiento de alguna especie, al biólogo le interesa llegar a encon -

trar una relación matemática que le permita predecir el crecimiento de la población con respecto al tiempo, dicha relación en condiciones optimas de alimentación y espacio, esta dada por la ecuación;

$P = Po\,e^{kt}$ donde: Po es la población inicial

e es una constante independiente del problema.

k es una constante que depende de las condiciones del problema.

t el tiempo durante el cual se realizara el estudio.

P la población final.

Esto sólo por mencionar un ejemplo en esta área obviamente existen muchos más.

b) En Economía interesa determinar la relación que existe entre el ingreso y la producción de una fábrica, se puede escribir de manera simplificada como:

$I = PX$ donde: I es el ingreso
P el precio de la mercancia
X la producción.

c) Distintos problemas de optimización se resuelven mediante la aplicación del cálculo diferencial e integral tales como la optimización en la construcción de envases donde es importante determinar las dimensiones que deben tener para que con un mínimo de material empleado en su construcción se pueda almacenar un mayor volumen.

Cabe aclarar, que no todas las aplicaciones de la matemática y en general de la ciencia son en beneficio de la humanidad, por ejemplo, gracias al cálculo es posible determinar los ángulos de tiro necesario para que se pueda lograr un alcance máximo en los proyectiles, o bien determinar a que altura ha de estallar una bomba para que afecte una mayor área (optimizar en la guerra quiere decir matar más por menos dinero). Queda claro que la ciencia es un poderoso instrumento, cuya utilidad o perjuicio depende de quien lo utilice.

¿Como podemos introducirnos al estudio de las matemáticas en particular y de la ciencia en general, de manera gradual?

Recordemos que el objetivo de la ciencia es la explicación objetiva y racional de los fenómenos del Universo así como su predicción.

Este objetivo se va logrando en la medida que se van resolviendo los problemas que se presentan, problemas planteados por la naturaleza o la sociedad, mismos que es necesario resolver para permitir el desarrollo del hombre.

De ahí que iniciaremos nuestro estudio con la resolución de problemas sencillos, poniendo especial atención en el método que utilizaremos para resolverlos.

Al finalizar veremos que lo importante no consiste en resolver un gran número de problemas sino el dotarnos de un método para poder resolver problemas que se nos presenten.

ACTIVIDAD DOCENTE Nº 2

METODOS DE SOLUCION DE PROBLEMAS

OBJETIVOS:

Al término de esta clase el alumno debe:

1. Conocer un método para resolver un problema sencillo.
2. Saber que existen multiples formas de resolver un problema,
3. Conocer en que consisten los métodos directo, de simulación y Resolución mental, utilizados en la resolución de problemas.
4. Saber diferenciar el método que se esta utilizando.

Antes de continuar y de empezar a hablar de métodos y modelos, queremos dejar claro que existen distintas clasificaciones de estos, algunas de ellas muy especializadas. Nosotros optaremos por dar una clasificación lo más general posible.

En esta clase introduciremos, cómo se puede construir un modelo a partir de un problema. La relación entre la situación real y el modelo y cómo a partir del modelo es posible resolver el problema real que representa.

Para clarificar lo anterior resolveremos un problema sencillo, el cual enunciaremos a continuación:

"A orillas del río Balsas, un viajero llevaba un lobo, una oveja y una paca de alfalga. El viajero quiere cruzar el río con todas sus pertenencias, pero lo único que tiene para poder cruzar es una barca donde solo cabe él y una de sus pertenencias de tal manera que tiene que llevarlas a la otra orilla una por una. Pero si-deja el lobo con la oveja este se la comería y si deja a la oveja con la alfalfa esta se la comería".

¿Como puede el viajero llevar sus pertenencias a la otra orilla sin que le pase nada?

Antes de resolver el problema, veamos cuáles son las condiciones dadas y ennumeremoslas:

1. En la barca solo cabe el viajero con una sola de sus pertenencias (lobo, oveja, alfalfa).

2. El lobo no se puede quedar solo con la oveja.

3. La oveja no se puede quedar sola con la alfalfa.

Una vez que tenemos bien enmarcadas las condiciones del problema, pasemos a intentar diseñar una posible solución.

Intentala antes de seguir adelante.

Ahora tratemos de enunciar cuales serían los pasos a seguir para una solución satisfactoria al problema según las condiciones dadas, dicha solución podría ser:

1. El viajero cruza el río con la oveja.
2. El viajero regresa sólo.
3. El viajero cruza el río con el lobo.
4. El viajero regresa con la oveja.
5. El viajero cruza el río con la alfalfa.
6. El viajero regresa sólo.
7. El viajero cruza el río con la oveja.

Ahora procedamos a verificar si ésta posible solución cumple -- las condiciones dadas, esto es: hay que verificar que en ningún momento se pueda comer el lobo a la oveja ni la oveja la alfalfa y - que al final esten todos del otro lado del río.

Una vez realizado lo anterior podemos ahora sí,estar seguros de que la solución propuesta es adecuada.

Hasta ahora sin decirlo hemos seguido un método para resolver - el problema, sin embargo es importante que conozcamos otros más y- sepamos diferenciarlos.

El problema anterior lo pudemos resolver de manera sencilla en forma mental, para lo cual lo único que tuvimos que hacer fue imaginar las condiciones del problema y a través de representaciones- mentales encontramos la solución, a este método lo llamaremos de - RESOLUCION MENTAL.

Sin embargo no todos los problemas se pueden resolver tan fácilmente, existen problemas mucho más complicados por lo cual necesitamos de otros métodos para resolverlos antes de pasar a estudiarlos y con el fin de dejar más claro el razonamiento que hemos seguido, resolvemos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuantas veces tuvo que cruzar el viajero el río?
2. Si la oveja no se comiera la alfalfa¿cuantas veces cruzaría- el río?
3. ¿Hay otras soluciones al problema?
4. ¿Existen una solución más corta?

5. Si ponemos alfalfa donde diga lobo y lobo donde diga alfalfa en nuestra solución. ¿Se obtiene una solución?
6. Si intercambiamos alfalfa y oveja ¿Es una solución?
7. ¿Unicamente mentalmente podíamos resolver el problema?
8. ¿De que otra manera, diferente a la mental podemos resolver el problema?

Estas ultimas preguntas nos inducen a pensar que el método utilizado con anterioridad para resolver nuestro problema, no es único ya que también podiamos habernos trasladado al lugar de los hechos y en el mismo encontrar la solución al problema. Esto es en el caso del viajero, tendríamos que ir al lugar del río Balsas -- donde se encuentra, conocer el viajero, las condiciones reales -- del problema, darle instrucciones de como pasar el río, cuidando de que no haya ningun error y una vez que se encontrase en la - - otra orilla sano y salvo con todas sus pertenencias regresarnos, este método de resolver el problema sería de <u>RESOLUCION DIRECTA</u> ya que resolveriamos el problema directamente en el lugar donde - se produce con sus propios elementos en juego.

Obviamente que este método presentaría dificultades y que inclusive les parecería absurdo a muchos ya que como en el caso del viajero es poco práctico, más no siempre es así. Existe otro método que es muy utilizado en la resolución de problemas y al cual - le daremos el nombre de: <u>METODO DE SIMULACION</u>.

Este método como su nombre lo indica, consiste en simular el - problema. Esto es construir un modelo que nos presente el problema y encontrarle solución, misma que sería válida para el problema-real por ejemplo; en nuestro caso del viajero un primer modelo po--dría ser conseguir una persona que haga las veces del viajero, un -lobo, una oveja y una paca de alfalfa, trasladarnos a un río cercano y aplicar la posible solución. Una vez habiendo verificado la --misma podemos estar seguros de que nuestra solución es correcta.

¿Pero acaso esta es la única manera de hacer un modelo del problema?

Obviamente que no, ya que las posibilidades de hacer un modelo --son innumerables, por ejemplo, podríamos representar al viajero con-un muñeco, el lobo, la oveja y la alfalfa con diversos objetos, cada uno de ellos diferentes entre si con el fin de no equivocarnos y el río por una franja o linea de color.

En este caso la verificación de la solución consistiría en mover-a uno y otro lado de la franja los diversos objetos, observando el -estricto cumplimiento de las condiciones del problema.

¿Son las unicas formas de elaborar un modelo del problema?

¿Unicamente podremos construir modelos con objetos?

¿De que otra manera podemos crear un modelo?

ACTIVIDAD DOCENTE N° 3
MODELOS SIMBOLICOS.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el estudiante podrá:

1. Conocer que es un modelo simbólico.
2. Saber construir un modelo simbólico de un problema.
3. Saber que dificultades hay en las diferentes formas de representar un problema.

Preguntas de control.

¿En que consiste el método de resolución mental utilizando en la resolución del problema?

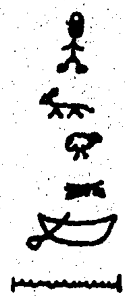
¿En que consiste el método de resolución directa?

¿En que consiste el método de simulación?

En la clase anterior al resolver un problema observamos que existían distintas formas o métodos de hacerlo, a dichos métodos de resolución les dimos los nombres de mental, directo y simulación, este último consistía básicamente en representar o simular la situación real del problema, en el caso del viajero estas representaciones iban desde trasladarse al río más cercano conseguir elementos similares a los que intervienen en el problema real (barca, oveja, alfalfa, lobo, viajero) y simular de esta forma el problema, hasta representar estos elementos con distintos objetos, con la finalidad de hacer fácil la solución de nuestro problema. Una prolongación de este método y mucho más sencilla consiste en utilizar símbolos escritos en un papel, esta forma es la más usual, de hecho es la que con mayor frecuencia utilizamos en el salón de clases, por su importancia y de acuerdo al hecho de que en este modelo se utilizan símbolos se le ha dado el nombre de <u>MODELOS SIMBOLICOS</u>.

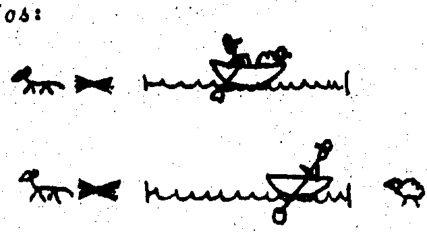
Entonces los modelos simbólicos son un método de resolución de problemas, mediante el cual a través de dibujos y diagramas (símbolos) se representan los elementos reales del problema, cuidando de utilizar símbolos diferentes para cada elemento distinto.

Así por ejemplo en nuestro problema del viajero podríamos representar los elementos del problema de la siguiente manera:



representa al viajero
representa al lobo.
representa la oveja.
representa la paca de alfalfa.
representa la barca.
representa el río.

Para representar las cruces del río haríamos por tanto los siguientes dibujos:



De ésta manera podríamos representar cada uno de los pasos a seguir en la resolución del problema, más sin embargo esto entraña -el problema de que, algunos de nosotros no sabemos dibujar bien y-esto sería muy complicado. Así que busquemos símbolos más senci- -llos de dibujar, pero antes meditemos:

¿Es necesario que los símbolos a utilizar conserven un "parecido físico" con los elementos reales? aceptemos que la respuesta --sea no y veamos qúe sucedería. Ahora tendríamos que buscar símbo--los que si bien no "parezcan" a los elementos originales, se nos -haga más sencillo el procedimiento, en función de ésto usemos en--tonces las iniciales de cada palabra para representarla esto es: -usemos las letras V, L, O, A, B, para designar al Viajero, el Lobo, la Oveja, la Alfalfa y la Barca respectivamente y usemos dos líneas verticales separadas por un espacio más o menos adecuado para-representar al río, una flecha indicará la dirección en que se ---efectua un cruce.

De esta forma la solución al problema quedaría como:

El viajero, con el lobo, la oveja, la alfalfa y la barca en una orilla del río.	VLOA|B	
1. El viajero cruza el río con la oveja	LA|BVO→	|
	LA|	B|VO
2. El viajero regresa sólo	LA|←	VB|O
	LAV|B	|O

3. El viajero cruza el río con	A|BVL ⟶ |O
el lobo.	A| B|VLO
4. El viajero regresa con la	A| ⟵VOB|L
oveja.	AOV|B |L
5. El viajero cruza el río con la alfalfa	O|BVA⟶ |L O| B|VAL
6. El viajero regresa solo	O| ⟵VB|AL OV|B |AL
7. El viajero cruza el río con	|BVO⟶ |AL
la oveja	| B|VOAL

De ésta forma el viajero y sus pertenencias quedan en la otra - orilla del río.

Si observamos detenidamente nuestro modelo simbólico podremos -- observar que podemos hacer varias simplificaciones, por ejemplo, po drlamos eliminar los renglones finales de cada paso, podríamos re-- presentar también, el río con una sola linea vertical y por lo tanto eliminar el símbolo de la barca, quedandonos entonces el modelo- de la siguiente manera:

El viajero con el lobo, la oveja, y la alfalfa en una orilla del río.	VLOA|
1. El viajero cruza el río con la oveja	LA|VO
2. El viajero regresa solo	VLA|O
3. El viajero cruza el río con el lobo.	A|VLO
4. El viajero regresa con la oveja	VOA|L

5. El viajero cruza el río con la alfalfa O|VAL

6. El viajero regresa solo VO|AL

7. El viajero cruza el río con la oveja |VOAL

De donde podemos observar:

1. La forma de representar la solución del problema es mucho mas - clara y sencilla.

2. La manera de encontrar la solución, implica un trabajo menos ar duo ya que es mas fácil manejar símbolos que muñecos, personas, animales, cosas, etc.

Preguntas de comprobación:

¿ En que consiste un modelo simbólico?

¿ Son los modelos simbólicos un método para simular un problema- y así poder resolverlo?

¿ Se pueden obtener diversos modelos simbólicos de un mismo pro- blema?

¿Es posible simplificarlos? ¿por qué ?

ACTIVIDAD DOCENTE N° 4

CARACTERISTICAS DE METODOS Y MODELOS SIMBOLICOS

OBJETIVOS:

Al término de la clase el estudiante debe:

1. Conocer cuales son las características más importantes de cada-método de solución.
2. Conocer la importancia de resolver un modelo y no el problema-directo.
3. Saber cual es la diferencia entre una simulación y un modelo --simbólico.
4. Saber que ventajas y desventajas hay al diseñar un modelo simbó lico sobre la resolución directa de un problema.

Preguntas de Control:

¿Que es un modelo simbólico?

Que diferencias existen entre un modelo simbólico y uno de simulación?

En la clase de hoy, analizaremos los métodos de solución que uti lizamos en las clases pasadas para resolver el problema del viaje--ro, veremos en que se parecen así como sus ventajas y desventajas. -Haremos hincapié en los distintos modelos que utilizamos en el méto do simbólico, con la finalidad de reafirmar la comprensión del concepto de abstracción.

Antes meditemos la siguiente pregunta:

¿Que tienen en común todos los métodos empleados?

Lo que tienen de común, es que en todos los métodos de solución requerimos un modelo. En el método mental, nuestro modelo fueron imágenes de nuestro cerebro. En el método directo nuestro modelo es la realidad misma (sin lugar a dudas para nuestro problema del viajero, este es el mejor modelo). En el de simulación nuestro modelo consistió en representar la situación misma del problema por medio de personas ó cosas, suponiendo que cada una de ellas guardaba las mismas relaciones que las existentes en el problema y finalmente en el método simbólico, representamos la realidad por medio de símbolos escritos en un papel.

Cabe resaltar que en los últimos dos métodos, utilizamos distintos modelos, fijaremos nuestra atención en los modelos simbólicos que construimos.

El primero para representar la situación del problema y sus personajes lo hicimos por medio de dibujos, los que saben dibujar bien, habrán construido un modelo muy apegado a la realidad y por ello de fácil comprensión para todos, ésto es, si la hoja donde hicimos nuestro modelo lo hubieramos concluido y cualquier compañero -aunque no supiera el problema- viera nuestra hoja, nos podría decir, cuales son los personajes del problema y que es lo que se hace en cada paso. Ese modelo -por estar más apegado a la realidad- tiene la ventaja que es de fácil comprensión. Pero tiene la desventaja que es muy laborioso y para alguno de nosotros que no sabemos dibujar resulta casi imposible de construir.

En el segundo modelo simbólico, utilizamos letras para represen tar a nuestros personajes, letras relacionadas con ellos, esto es, una V para representar al viajero, una L para el lobo, O para la oveja, A para la alfalfa, B para la barca y una linea vertical para el río. En este caso si la solución escrita en nuestra hoja, la viera alguien que estuviera ajeno al problema, no le vería ningún sentido, no sabría que es lo que hemos hecho. Pero si quien - ve nuestra hoja es un compañero de clase, sabrá de inmediato que - la V representa al viajero, etc., y podrá opinar si esta bien re-suelto nuestro problema.

Este modelo, tiene la ventaja de que se puede elaborar rápidamente, no se requiere que sepamos dibujar. Su ventaja consiste, en que para entenderlo debemos tener conocimiento del problema, además de que requiere un mayor esfuerzo mental.

Esto se debe a que nuestro modelo, no se parece a la realidad.

En el último modelo que utilizamos (cuando suprimimos: una linea vertical, la B de barca y algunos renglones) requerimos, además conocer el problema, es decir estar familiarizados con los símbolos que utilizamos para representar a los personajes y el problema mismo obviamente. Este modelo tiene la ventaja de que lo podemos hacer rapidamente y la desventaja que tenemos es que es más -- difícil su comprensión por lo que necesitamos saber algunos datos del problema (o si no queremos que alguien sepa nuestra solución propuesta, esto es una ventaja).

De donde podemos concluir:

1. Los modelos simbólicos que utilizamos, cada vez eran menos reales y más abstractos.
2. En su elaboración efectuamos un proceso de abstracción.
3. Obsérvese que en los modelos que hemos construido, una vez que elegimos un objeto o símbolo para representar un elemento del problema, esto permanece sin cambiar a lo largo de todo el proceso, ésta es una característica que todo modelo debe tener.

De los métodos de solución que hemos visto, existe una gran diferencia entre el método directo y los demás, veamos con cuidado.

En primer lugar, en el método directo nosotros no construimos el modelo, el modelo en éste caso es la misma realidad y aquí, además de los elementos que hemos considerado intervienen muchos más, como por ejemplo, la anchura del río, si las aguas son tranquilas o hay rápidos, si es de día ó de noche, etc., factores que sin lugar a dudas intervienen en la solución del problema y algunos pueden cambiar de un momento a otro y alterar radicalmente el problema. En los demás métodos, nosotros hemos construido el modelo y de la realidad solo tomamos los elementos, que a nuestro juicio son los más importantes olvidando los demás factores, y olvidando también que la realidad es cambiante. Recalcamos:

La construcción de un modelo, implica un proceso de abstracción consistente en tomar la realidad los elementos que consideramos importantes y desechar los demás.

Otra consideración importante es que si en nuestro modelo nos equivocamos en la búsqueda de la solución, lo único que se habrá --

perdido es un pedazo de papel, mientras que un error en el método- directo en nuestro problema del viajero implicará la pérdida de la oveja o la alfalfa. En los modelos un error, lo podemos corregir - sin mucha dificultad mientras que en la realidad difícilmente pode mos hacerlo ya que la experiencia nos ha enseñado que toda acción- conlleva un riesgo.

Se preguntará ahora el estudiante, ¿de que nos sirve resolver - un problema en un modelo, si como vimos en el caso del viajero, -- nos olvidamos de factores que pueden imposibilitar su aplicación - (a lo mejor cae tormenta) ¿ a lo que podríamos contestar la solu-- ción encontrada con nuestro modelo nos sirve de guía, para inten - tar solucionar felizmente un problema.

Hasta aquí, hemos visto una consecuencia de la abstracción que hicimos en la construcción del modelo, veamos ahora otro aspecto.- En nuestro modelo proponemos una solución al problema de cualquier viajero que se encuentre en esas condiciones y no solo en el río - Balsas, si no en cualquier otro río.

Esto es, proponemos la solución no de uno, sino de muchos pro-- blemas. Esto es la solución en modelos es mas general.

Podemos afirmar, entre más abstracto es un modelo, más generales son sus resultados, es decir se aplican a un mayor número de ca- - sos, pero también hay que recordar para elaborar e interpretar un modelo, entre más abstracto más difícil.

TAREA

Resuelve los siguientes problemas:

1. "Los esposos celosos"

Tres hermosas desposadas con sus celosos maridos se encuentran a la orilla de un río y deciden cruzarlo. El pequeño bote que deben tomar para efectuar el cruce, sólo tiene cabida para 2 personas. Para evitar cualquier situación comprometedora deben disponerse las travesías de tal manera que no se deje a ninguna mujer con un hombre, a menos que su esposo este presente.

Construye un modelo simbólico a través del cual indiques como deben cruzar el río y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuantas veces se cruza el río?

b) Si sólo fueran dos parejas, ¿cuantas veces cruzarían el río?

c) Si fueran cuatro parejas, ¿podrían atravezar el río?

2. "Caníbales y Misioneros"

A orillas de un río se encuentran tres caníbales y tres misioneros. Para cruzar el río tienen una balsa en la cual sólo caben dos personas. Los tres misioneros saben remar, pero solo uno de los caníbales puede hacerlo. Si en algún momento hay de un lado del río más caníbales que misioneros, los caníbales se comerían a los misioneros.

Construye un modelo a través del cual indiques como podría cruzar todos el río sin que haya bajas entre los misioneros.

Constesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuantas veces se cruza el río?

b) Si sólo fueran dos caníbales y dos misioneros ¿como resol--

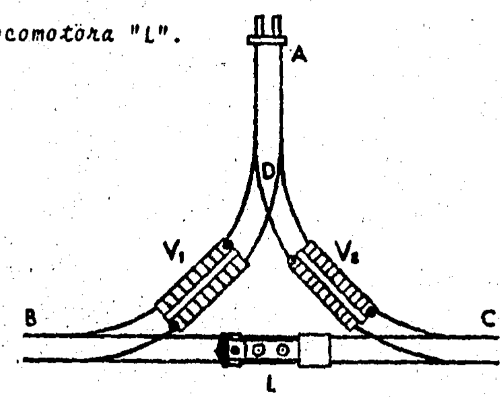
verías el problema?, ¿cuantas veces cruzarían el río?.

c) ¿Existe algún parecido entre el modelo utilizado en el problema de los esposos celosos y el empleado en el problema?

3. Juan tiene 3 hermanitos; Pepito, Luisito y Jaimito; Juan tiene una moto en la cual debe llevarlos de la escuela a su casa, pero sólo puede llevar a uno a la vez. Sabiendo como es Pepito, Juan no quiere dejarlo solo con ninguno de sus otros hermanitos porque es capáz de pegarles si él no esta presente para cuidarlos. ¿Cómo puede llevar Juan a sus hermanitos a casa sin que se peleen?

¿Existe algún parecido entre el modelo utilizado en la resolución de este problema y el modelo empleado en el problema del viajero?

4. La siguiente figura representa una locomotora "L" y dos vagones V_1 y V_2. La parte común de los rieles de los desvios DA sobre los cuales están V_1 y V_2 es suficientemente larga como para contener a uno o a otro, pero no a ambos simultáneamente ni a la locomotora "L".



De este modo, un vehículo en DA puede ser desviado a cualquiera de los dos desvíos. La tarea del ingeniero consiste en invertir -- las posiciones de V_1 y V_2. ¿Cómo puede hacerlo?. La locomotora debe quedar al final de la maniobra en su posición original.

ACTIVIDAD DOCENTE N° 5

DISENO DE MODELOS SIMBOLICOS

OBJETIVOS:

Al final de la clase el estudiante debe:

1. Resolver problemas por medio de modelos simbólicos.
2. Diseñar otros modelos para resolver un problema.
3. Plantear problemas similares a los que se han visto.

Preguntas de Control:

¿Cuales son las características de un modelo simbólico?

¿En particular que significa el paso de lo concreto a lo abstracto?.

Como hemos visto en las clases anteriores, construyendo un modelo simbólico podemos con menos tiempo y mayor generalidad resolver un problema; también podemos observar que los problemas que hemos visto y que están dados en un lenguaje común, los podemos convertir en símbolos que podemos manipular para de ésta manera resolver el problema original. Incluso podemos decir que hemos analizado su estructura matemática fundamental, entendiendo por "estructura matemática" algo que no son necesariamente fórmulas o números sino la relación interna esencial entre los componentes del problema; ya que en matemáticas no estudiaremos los objetos en si, sino las relaciones entre ésos objetos, por lo que no importa cambiar unos objetos por otros, con tal de que no cambien las relaciones.

Veamos ahora un problema en el cual desarrollaremos un modelo -

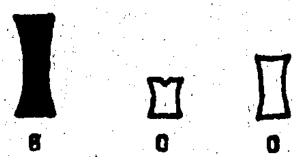
simbólico.

Problema 1

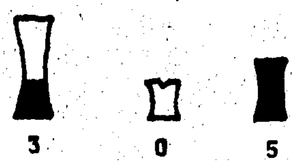
Dos amigos que tienen un jarro de vino de 8 litros desean repartírselo en partes iguales. Disponen también de dos jarras vacías,- una con capacidad para 5 lts. y la otra de 3 lts. ¿Cómo podrán dividirse el vino en partes iguales si las jarras no tienen graduación?

Hagamos el siguiente procedimiento:

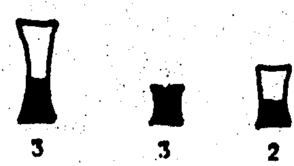
Primero tenemos la jarra de 8 lts. llena y las otras dos vacías.



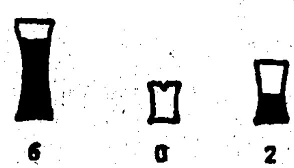
1. Llenamos entonces la jarra de 5 lts. quedandonos 3 lts. en jarra de 8 ltrs.



2. De la jarra de 5 lts llenamos la de 3 lts y tenemos 3 lts en la de 8, 2 lts en la de 5 y 3 lts en la de 3.



3. La jarra de 3 lts. la vaciamos a la de 8 lts. quedandonos entonces 6 lts



en la jarra de 8, 2 lts en la de 5 y vacia la de 3 lts.

4. Ahora vaciamos el vino de la jarra de 5 lts a la de 3 lts quedando entonces 2 lts en la jara de 3 lts. 6 en la de 8 y vacia la de 5 lts.

6 2 0

5. Vaciamos de la jarra de 8 lts en la de 5 lts hasta llenarla quedando 1 lts. en la jarra de 8,2lts en la de 3 y llena la de 5 lts.

1 2 5

6. Ahora llenamos la jarra de 3 lts con vino de la jarra de 5 lts quedando 4 lts en la jarra de 5, 1 lt en la jarra de 8 lts y llena la jarra de 3 lts.

1 3 4

7. Finalmente vaciamos la jarra de 3 lts en la de 8 lts quedando 4 lts en la jarra de 8 lts. 4 en la de 5 y vacia la de 3 lts.

4 0 4

Como podemos ver los dibujos nos ayudaron mucho para tener una idea del procedimiento que estabamos siguiendo. Sin embargo podemos simplificar mas nuestro modelo de la siguiente manera: Dibujamos una sola vez cada jarra o inclusive no la dibujamos pero le asignamos un número, ¿Cual? el numero que indica su capacidad en litros, así tenemos 8, 3 y 5 y formamos tres columnas. Después, cada uno de los 7 pasos lo podemos sustituir por renglones donde coloquemos la cantidad de vino de cada jarra después de cada cambio. Esta cantidad debe ir debajo de la columna de la jarra correspondiente, así tenemos al inicio que en la jarra de 8 lts que está llena tenemos el número 8 y en las otras dos que están vacías el cero. Así tenemos:

	8	3	5
inicio	8	0	0
1	3	0	5
2	3	3	2
3	6	0	2
4	6	2	0
5	1	2	5
6	1	3	4
7	4	0	4

Como se puede observar es más rápido y sencillo aunque cada vez mas separado de la realidad, pues para alguien que no conozca el problema ésta tabla no representa nada. Esto significa que nuestra solución es mas abstracta y general.

He aquí que en aras de rapidez y generalidad hemos abstraido -- mas nuestro modelo, por lo que hemos sacrificado claridad para observar el procedimiento, sin embargo entendiendo éste, se puede - trasladar a palabras o dibujos.

Otro problema no menos interesante es el siguiente:

Problema 2

Los Caníbales y los Misioneros

A orillas de un río se encuentran tres caníbales y tres misioneros. Para cruzar el río tienen una barca en la cual sólo caben dos personas. Si en algún momento hay de algún lado del río más canivales que misioneros, los caníbales se comerían a los misioneros ¿Cómo podrían cruzar todos el río sin que haya bajas entre los misioneros?

Hacemos entonces el siguiente procedimiento:

Tenemos 3 canbales y 3 misioneros en una orilla y representamos a los - caníbales por una C y a los misioneros con una M y al río con una raya vertical.	CCCMMM|

1. Se cruzan el río dos caníbales	CMMM|CC
2. Regresa un caníbal	CCMMM|C
3. Se van los dos caníbales	MMM|CCC
4. Regresa un caníbal	CMMM|CC
5. Se van dos misioneros	CM|MMCC
6. Regresan un caníbal y un misionero	CCMM|MC
7. Se van dos misioneros	CC|MMMC
8. Regresa un caníbal	CCC|MMM
9. Se van dos caníbales	C|CCMMM
10. Regresa un caníbal	CC|CMMM
11. Se van los dos caníbales	|CCCMMM

De ésta manera atraviesan todos y no hay ninguna baja.

Preguntas de Comprobación

¿Que ventajas tiene un modelo a base de dibujos?

¿Que proceso se está efectuando al expresar un problema en una forma mas general y abstracta?

¿Que ventajas y desventajas tiene un modelo muy simplificado?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 6

IMPORTANCIA DE LOS MODELOS SIMBOLICOS. RESUMEN.

SEMINARIO

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase, el alumno:

Reafirmará sus conocimientos sobre las características y elaboración de modelos simbólicos.

El objetivo de ésta clase es que se genere la discusión en el salón, basándose para ello en preguntas a responder por el grupo, tratando de evitar la dispersión, y conducir la descusión a la profundización de los puntos centrales del tema.

Las preguntas deben plantearse por el mismo grupo, aquí sugerimos algunas:

1. ¿Que diferencia existe entre el método de simulación y el simbólico?

En ésta pregunta, hay que resaltar que en el método simbólico queda expresado cada uno de los pasos (en el papel), y aunque no hallamos visto cuando lo hicieron, podemos enterarnos de la solución. Mientras que en el de simulación, si no vemos toda la representación no sabremos nada acerca de ella.

2. ¿Cual método de solución es el más fácil, el simulado o el simbólico?

En ésta pregunta hay que hacer hincapié en la dificultad de expresar simbólicamente la solución de un problema. Muchas veces sabemos solucionar un problema, pero tenemos dificultades en expre--

sar la solución y la dificultad aumenta al intentar escribirla.

3. ¿Que semejanza hay entre el problema del viajero y el problema número tres de la tarea?

Esta pregunta permite hablar acerca de la abstracción y la generalidad al resolver un modelo simbólico (ya que tienen la misma solución).

4. ¿Se pueden obtener distintos modelos de un mismo problema?

Hay que resaltar que toda representación que hagamos de un problema real, es un modelo, aunque algunos estén mal, eso se debe a que en el proceso de abstracción hemos olvidado tomar elementos importantes del problema. También la diferencia que existe de un modelo a otro (ambos de un mismo problema), es que uno es mas abstracto que otro, es decir, está mas alejado de la realidad, por ejemplo, en el último modelo del viajero, no aparece la barca; es mas abstracto que el anterior!

5. ¿Que relación existe entre un modelo y la realidad?

NOTA: Se recomienda que para ésta actividad se lea el folleto de modelos Simbólicos citado en la bibliografía.

CONCLUSIONES

Un modelo es una representación de un problema o situación de la realidad. Esta representación la hacemos mediante diversos objetos o símbolos a través de un proceso de abstracción, que consiste, en tomar de la realidad, los elementos más importantes que intervienen en el problema y desechar todos aquellos que consideramos que no juegan un papel determinante en el mismo, estableciendo con precisión cuales son las distintas relaciones que guardan entre sí dichos elementos.

Una vez establecidas estas relaciones, podemos manipular los elementos del modelo en la búsqueda de una posible solución, o bién, demostrar que no tiene.

Habiendo resuelto el problema en el modelo podemos trasladar esta solución al problema real y verificarla. Este proceso recibe el nombre de aplicación.

Resumiendo: los modelos son construidos a partir de la realidad mediante un proceso de abstracción. Una vez resuelto el problema en el modelo, mediante un proceso de aplicación se traslada la solución a la realidad.

Finalmente no hay que perder de vista que existen diferencias substanciales entre resolver un problema en un modelo y resolverlo en la realidad. Esto es, no debemos ser tan mecánicos en la aplicación a la realidad de una solución obtenida a través de un modelo, ya que no podemos olvidar que en la realidad la situación es cam--

biante y por consiguiente elementos que en un principio desechamos al elaborar el modelo pudieron haberse convertido en determinantes, modificando con ello, las condiciones reales del problema, lo cual imposibilita la aplicación de la solución encontrada.

Como podemos darnos cuenta en las escuelas se trabaja en la mayoría de los casos con modelos ya sea de tipo simbólico como los manejados en el salón de clases o de tipo de simulación como ocurre en los laboratorios.

Preguntas de comprobación:

1. ¿Cómo podemos determinar cuando aplicar un tipo de métodos de resolución y cuando utilizar otro?
2. ¿Cuál método es más importante para tí? ¿Por qué?
3. ¿En que consiste el proceso de abstracción?
4. ¿En que consiste el proceso de aplicación?
5. ¿En que consiste la generalidad de un concepto?.

ACTIVIDAD DOCENTE N° 7

TIPOS DE LENGUAJE Y EL LENGUAJE SIMBOLICO.

OBJETIVOS:

Al terminar la clase el estudiante debe:

1. Definir e interpretar que es el lenguaje.
2. Conocer algunos de los diferentes lenguajes que hay.
3. Describir que es un lenguaje simbólico y su importancia.
4. Ejemplificar diferentes lenguajes simbólicos que se usan comunmente.

Hasta ahora hemos visto como producir representaciones de problemas y situaciones reales a través de un modelo. El cual de acuerdo con los elementos utilizados en la representación los podremos clasificar en directo, mental, de simulación y simbólico.

También pudimos observar como a través del modelo podemos encontrar una solución y aplicarla al problema real.

Durante toda esta etapa descrita con anterioridad nos hemos ocupado del planteamiento y solución del problema. Pero, ¿acaso durante toda nuestra vida tenemos que plantear y resolver problemas,sin importar que en el pasado, se hallan resuelto algunos de ellos? y, si resolvemos problemas que no se hallan resuelto todavía ¿no nos importaría transmitir nuestras soluciones a otros?

Si esto fuera así no habría acumulación de conocimientos ya que cada quien se llevaría sus experiencias a la tumba y al no existir la acumulación de conocimientos, la humanidad entera no evoluciona ría. Esto significa que muy probablemente nos encontraríamos aún - en la época de las cavernas.

¿Qué es lo que ha hecho posible entonces la acumulación de conocimientos?

Sin lugar a dudas, el lenguaje. Es a través de él como ha sido- posible que el pensamiento cobre realidad y pueda transmitirse.

¿Y qué es el lenguaje?

El lenguaje es el medio a través del cual el hombre puede expresar y transmitir sus pensamientos por lo cual, puede ser de muy variadas formas dependiendo de los medios empleados para ello. Así- tenemos entre otros.

<u>LENGUAJE MIMICO</u>: Si la expresión y transmisión del pensamiento- se realiza por medio de gastos, ademanes y actitudes.

<u>LENGUAJE ORAL</u>: Si la expresión y transmisión se realiza por medios de sonidos articulados.

Este es el dominante en nuestra vida diaria.

<u>LENGUAJE SIMBOLICO O ESCRITO</u>: Si se realiza por medio de símbolos escritos o grabados.

Hemos considerado unicamente estos, por considerar que son los- más comunes en su uso y los hemos colocado en ese orden por considerar que de esta forma es como se ha ido desarrollando.

En sus orígenes el hombre se comunica fundamentalmente por me-- dio de la que hoy hemos denominado la mímica, lo que no descarta - la utilización de algún sonido, tales como gritos gruñidos, etc.,- en la actualidad podemos observar un lenguaje parecido aunque - -

obviamente más elaborado, el que utilizan los sordomudos los cuales a través de ciertos movimientos corporales pueden comunicarse entre sí.

Posteriormente con la utilización de sonidos especiales (fonemas) y articulados, se desarrolló el lenguaje oral cuyo enriquecimiento ha sido constante desde entonces.

Finalmente con la utilización de figuras o símbolosya sea hechas sobre arena, arcilla, piedras, etc., apareció el lenguaje escrito o simbólico. Ejemplo de ellos son los dibujos encontrados en algunas cuevas, los papiros, los códices, etc. Este paso fué tan importante para la humanidad, que algunos historiadores dividen la historia en prehistoria (antes de la escritura) e historia (después de la escritura).

A diferencia del mímico y el oral, el lenguaje simbólico se caracteriza por tener mayor permanencia en el tiempo, esto es, los dos primeros sólo sirven para transmitir los pensamientos de manera directa y momentánea mientras el último -por ejemplo papiros-puede de comunicar pensamientos expresados hace miles de años.

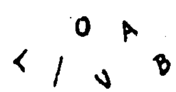
En la vida diaria, el que más utilizamos posiblemente sea el oral, aunque nos auxiliamos mucho con el mímico (muchas veces una sola expresión, dice más que muchas palabras). Dentro del salón de clases, el maestro recurre a los tres tipos con el auxilio del pizarrón, lo mismo sucede con el alumno con el auxilio del cuaderno y lápiz.

En el salón de clases es frecuente que al estudiante se le difi culte expresar sus ideas oralmente. Dicha dificultad aumenta cuando existe la necesidad de escribirlas.

Durante el planteamiento y resolución de problemas en clase, muchas veces nos vemos en la necesidad de inventar lenguajes simbólicos, que nos permitan simplificar su escritura. Durante la primera unidad, cuando resolvemos el problema del viajero, lo que hicimos fué desarrollar un LENGUAJE SIMBOLICO, en este caso los símbolos empleados fueron: V,L,O,A,B, y las reglas (que por cierto no fue necesario enumerar) fueron, entre otras:

1. Cada símbolo representa un solo elemento durante todo el problema.
2. De acuerdo al lugar que ocupen los símbolos con respecto al símbolo "|"(a la izquierda o a la derecha) representa que los elementos originales han cruzado o no el río.
3. La secuencia de las cruces es vertical y de arriba hacia abajo.
4. Cada posición se escribe horizontalmente.

A nadie se le hubiera ocurrido escribir algunas posiciones de la siguiente forma:



En las diferentes ramas de la ciencia, los científicos economizan el espacio y el tiempo requeridos para la escritura de sus ideas e investigaciones, utilizando simbolos especiales, ya que de otra forma perderían mucho tiempo en elaborar grandes listas de --

palabras ordinarias, con la consecuente pérdida de claridad.

Así por ejemplo en matemáticas la introducción del símbolo exponente nos permite expresar productos tales como:

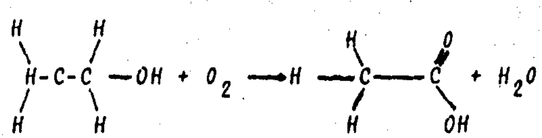
BXBXBXBXBXBXBXBXB = CXCXCXCXCXC

En forma más breve y clara

$$B^9 = C^6$$

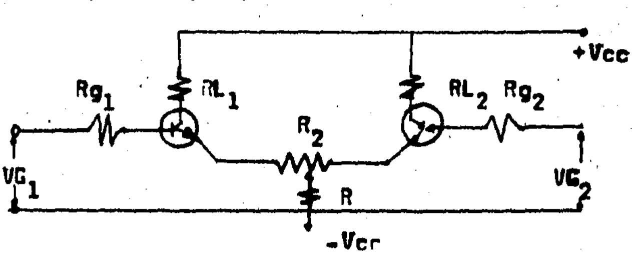
Indudablemente que esto es bajo el caso supuesto de que sepamos que es un exponente es decir que conocemos el lenguaje simbólico - utilizado, ya que de otra manera, sucedería como el caso del viajero: si no conocemos el problema no sabemos que significado tienen los símbolos.

Una ventaja semejante se ha logrado en la química con el uso - de un lenguaje simbólico especial que permite expresar formulas como las siguientes:



Para quienes tienen nociones de química orgánica está es claramente una oxidación.

También en la ingeniería electrónica se utiliza un lenguaje simbólico especial que permite escribir casos como:

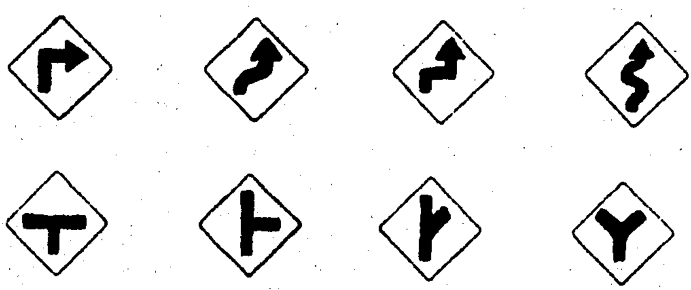


Pero no solo la ciencia desarrolla sus propios lenguajes -- simbólicos, también en otras areas el uso de los lenguajes simbóli cos es frecuente por ejemplo en el arte tenemos que la música tiene su propio lenguaje simbólico con símbolos tales como:

En los juegos, el ajedrez cuenta con un lenguaje simbólico pro-- pio a continuación damos un ejemplo de su utilización.

	BLANCAS	NEGRAS
1-	P4D	C3AR
2-	P4AD	P3R
3-	C3AR	P4D
4-	C3A	A2R
5-	A5C	P3TR
6-	AxC	AxA
7-	D3C	P3A
8-	P3R	C2D
9-	T1D	0-0
10-	A3D	P3CD
11-	PxP	PAxP

Otro ejemplo de lenguaje simbólico es utilizado en las señales - de tránsito:



Como último ejemplo podemos citar el alfabeto utilizado por nosotros en la vida diaria, a continuación mostraremos una tabla en la cual se observa la evolución que ha sufrido los símbolos utilizados, más adelante haremos un análisis acerca de la evolución de los lenguajes simbólicos.

FENICIOS				
NOMBRE	SIGNIFICADO	CARÁCTER	GRIEGO	ROMANO
Aleph	buey	𐤀	A	A
Beth	casa	𐤁	B	B
Gimel	camello	𐤂	Γ	C
Daleth	puerta	𐤃	Δ	D
He	ventana	𐤄	E	E
Vau	gancho	𐤅	Ϝ	F
Cheth	barda	𐤇	H	H
Yod	mano	𐤉	Ι	I
Kaph	palma	𐤊	K	K
Lamed	látigo	𐤋	Λ	L
Mem	agua	𐤌	M	M
Nun	pescado	𐤍	N	N
Ayin	ojo	O	O	O
Pe	boca	𐤐	Π	P
Qoph	cabeza	𐤒	Ϙ	Q
Resh	cabeza	𐤓	P	R
Shin	dientes	W	Σ	S
Tau	signo	X	X	X
Samekh	poste	𐤎	Y	Y
Zayin	arma	𐤆	Z	Z

Todos estos son lenguajes simbólicos para poder entenderlos debemos conocer sus símbolos, saber que representan y cuales son sus reglas para manipularlos.

Por último cabe recalcar que el uso del lenguaje simbólico especializados ha simplificar mucho el problema de la transmisión de - conocimientos.

En la ciencia, se ha resuelto una serie de dificultades tales - como la redundancia, ambigüedades pérdida de tiempo, etc. Las cuales se presentan frecuentemente al usar un lenguaje común como el español u otros similares.

Preguntas de comprobación

1. ¿Que es el lenguaje?
2. ¿En que consiste un lenguaje simbólico?
3. ¿Tienen alguna regla los lenguajes simbólicos?

ACTIVIDAD DOCENTE N° 8

CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DE LOS LENGUAJES SIMBOLICOS

OBJETIVOS:

Al término de esta clase el estudiante debe:

1. Estar familiarizado con las características fundamentales de -- los lenguajes simbólicos.
2. Describir que significa la arbitrariedad de los símbolos.
3. Explicar cuando los símbolos son convencionales y cuando son no-convencionales.
4. Resolver algún problema que involucre símbolos no convencionales

La clase anterior, hablamos un poco, sobre la importancia del -- lenguaje en el desarrollo de la humanidad. Vimos también brevemente como se han venido desarrollando hasta desembocar en los lenguajes-simbólicos, que en la actualidad se utilizan en diversas ramas de - la ciencia y en algunas otras areas de actividad humana.

La utilización de estos lenguajes simbólicos ha permitido la eliminación de imprecisiones, ambigüedades y redundancias en las que - se incurre al emplear un lenguaje como el Español. Esto facilita el manejo y comprensión de los conocimientos que se desean transmitir.

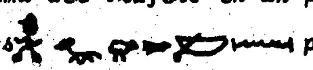
En la clase de hoy veremos las:

CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DE LOS LENGUAJES SIMBOLICOS

Todo lenguaje simbólico esta constituido por un conjunto de símbolos y reglas para manipularlos.

Pero, ¿que tipo de símbolos hay que utilizar en la creación y ma nejo de un lenguaje simbólico? ¿cómo podemos determinarlos?. Trata remos de dar respuesta a estas preguntas, analizando la forma en - que construimos el lenguaje simbólico utilizado en la resolución - del problema del viajero.

Si recordamos, en dicho problema, en uno de los lenguajes, emplea dos utilizamos los símbolos, V,L,O,A,B,. Pero al seleccionarlos lo hicimos de manera arbitraria , es decir, escogimos esos símbo-- los por diversas razones que nos parecieron válidas en ese momento, pero bien pudimos haber tomado otros símbolos, por ejemplo: A,B,C,D E,F, o bien pudimos utilizar ☾, ★, $\neq$, $\mathcal{S}$, Δ, $\emptyset$, lo que nos daría un -- modelo diferente al utilizado pero la solución sería la misma.

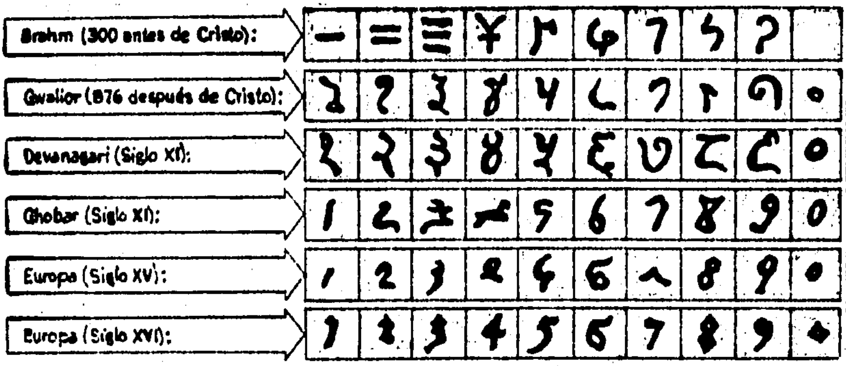
Esto quiere decir que en la creación de un lenguaje simbólico,- los símbolos a emplear pueden ser cualesquiera que se nos ocurra - utilizar dependiendo de los criterios que deseemos emplear en su - selección. En el problema del viajero en un principio habíamos se- leccionando los símbolos  para representar cada- elemento y con ellos pudimos haber hecho nuestro modelo. Sin embar go, siguiendo los criterios de que con este lenguaje simbólico ten dríamos problemas de espacio y bastante dificultad para dibujar- - los, optamos por ir cambiando los símbolos hasta considerar que sa tisfacían las características deseadas por nosotros.

Si los símbolos utilizados en los lenguajes simbólicos son arbi trarios, entonces ¿cómo es posible que todos los entiendan?. Aun-- que esta pregunta aparentemente es de difícil solución, no lo es -

tanto, ya que otra característica de los lenguajes simbólicos es que son convencionales. Esto es, una vez que se han creado (en ocasiones desde su creación), con el uso generalizado de los mismos en el área para el cual fueron creados, su utilización frecuente da lugar a un continuo perfeccionamiento y expansión, haciéndose de uso común. Esto es aceptandose de manera implícita hasta que de manera formal y explícita se constituye en un lenguaje propio de un organismo, sociedad, grupo o colectividad de individuos.

Como ejemplo de lo anterior tenemos el sistema de numeración que hoy utilizamos (decimal) el cual también es un lenguaje simbólico, a través del cual podemos expresar y transmitir la idea de número.

Este lenguaje simbólico está compuesto por un conjunto de símbolos y ciertas reglas para manipularlos por medio de los cuales podemos representar cualquier número que se nos ocurra. Sin embargo este lenguaje simbólico no ha sido como hoy lo conocemos ni ha tenido siempre la misma aceptación, han debido pasar varios siglos para desarrollarse, enriquecerse y aceptarse formalmente en casi todo el mundo. Más adelante en la unidad dedicada a los sitemas de numeración haremos una exposición más profunda de esto, por el momento, unicamente mostraremos las transformaciones más importantes que han sufrido los diferentes símbolos a través del tiempo, desde sus inicios hasta nuestros días.



Otro ejemplo de la convencionalidad de los lenguajes simbólicos lo tenemos con el lenguaje utilizado por nosotros en la solución del problema del viajero donde todos aceptamos convencionalmente la utilización de los símbolos V, L, O, A, B.

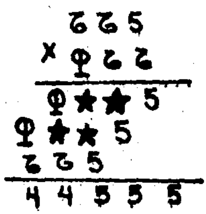
En algunas ocasiones, deseamos utilizar un lenguaje simbólico que pocos entiendan, esto es lo que se ha dado en llamar lenguaje en clave. Gracias a las características descritas con anterioridad (arbitrariedad-abstracción) es que podemos lograr esto, cambiando los símbolos de acuerdo a una regla bien definida y que unicamente conozcamos nosotros.

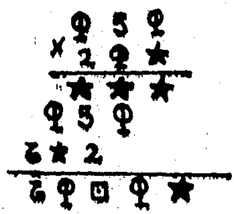
Estos lenguajes simbólicos claves, algunos son sencillos como los utilizados en las tiendas por los comerciantes, donde en las etiquetas colocan el costo de la mercancía. Pero en lugar de utilizar los símbolos convencionales (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) utilizan letras. También existen lenguajes más complicados como los utilizados por las agencias de espionaje o el ejército.

En la actualidad el arte de cifrar y decifrar mensajes está muy desarrollado.

Ejercicios:

Las operaciones siguientes estan hechas en clave para qué no se entiendan. Decifralas:





En resumen, el conjunto de símbolos de un lenguaje simbólico - inicialmente es arbitrario, Cuando los mismos se han generalizado y aceptado por una colectividad se les conoce como convencionales.

Cuando los símbolos son cambiados con la finalidad de que el lenguaje no se entienda por cualquiera (mensajes en clave), los símbolos reciben el nombre de <u>no convencionales</u>.

Preguntas de comprobación:

¿En que consiste la arbitrariedad de los símbolos de un lenguaje simbólico?

¿En que consiste la convencionalidad de los símbolos de un lenguaje simbólico?

ACTIVIDAD DOCENTE N° 9

FORMALIZACION Y REGLAS DEL LENGUAJE SIMBOLICO

OBJETIVOS:

Al término de la clase el estudiante debe:

1. Conocer las reglas de un lenguaje simbólico.
2. Describir la formalización del lenguaje.
3. Formalizar el lenguaje simbólico a través de un ejemplo.
4. Describir que es la operatividad de un lenguaje.

Preguntas de Control:

¿Cuales son las características fundamentales de los lenguajes-simbólicos?

¿Que es la arbitrariedad de un lenguaje?

¿Que es la convencionalidad de un lenguaje?

La clase pasada, empezamos a ver las características fundamentales de los lenguajes simbólicos, vimos a que todo lenguaje simbólico está constituido por un conjunto de símbolos y reglas para manipularlos.

Hicimos hincapié en que los símbolos en su origen, son arbitrarios, y reciben el nombre de convencionales cuando por su uso, se han generalizado y aceptado por una colectividad. En caso de que no ocurra ésto, los símbolos reciben el nombre de no convencionales.

Un ejemplo de símbolos convencionales, son los utilizados en el lenguaje simbólico del Español, éstos son: el abecedario y los sig nos de puntuación: comas, acentos etc. Ejemplos de símbolos no convencionales son los utilizados en los ejercicios que realizamos en la clase anterior.

Depende de la finalidad que tengamos, el tipo de símbolos que - utilicemos (convencionales o no), si queremos que todos entiendan-lo que estamos escribiendo utilizamos símbolos convencionales, si-por el contrario no queremos que cualquiera se entere utilizamos - símbolos no convencionales.

En los lenguajes que la humanidad ha desarrollado en forma natural tales como los idiomas, existen reglas precisas para construir palabras y como unirlas para poder expresar nuestros pensamientos. Todas las reglas de escritura del español, las hemos venido aprendiendo desde la primaria, y muchos siguen estudiando durante toda-su vida el idioma, y como se habrán dado cuenta es difícil su utilización.

Los lenguajes simbólicos que vamos a estudiar son los que se -- han desarrollado por las matemáticas; en éstos lenguajes las reglas para manipular los símbolos son precisas, al grado de que una vez establecidas las reglas, se pueden manipular los símbolos en-forma mecánica, sin tener que pensar siquiera en lo que representa cada uno de nuestros símbolos. Esta mecanización puede ser tan perfecta que una máquina puede realizar todo el procedimiento -y las-máquinas no piensan- sin que intervenga la mente humana.

Las reglas de estos lenguajes simbólicos, las podemos dividir - en dos: las primeras son reglas para formar expresiones y las se--

gundas son reglas de transformación de éstas expresiones.

Por ejemplo, en el problema de los caníbales y los misioneros, las reglas para formar expresiones podrían ser de la siguiente manera:

Símbolos: C, M, I

Expresiones: una expresión bien formada es una sucesión de símbolos tal que:

i) Todos los símbolos aparecen en ella

ii) Los símbolos C y M aparecen tres veces en ella.

iii) Si los símbolos C y M están del mismo lado del símbolo "I" entonces M debe aparecer el mismo número de veces que C o mas veces.

Reglas de Transformación.

1. Consisten en pasar una o dos letras de un lado a otro del símbolo I, de tal forma que se obtenga una expresión bien formada.
2. Después de toda transposición se pueden reordenar los símbolos.

Una vez que hemos establecido éstas reglas, podemos darnos cuenta de que las expresiones MMMCCCCI; MMCCIMC, MCIMMCC, son expresiones bien formadas, mientras que MCCIMMC, MCMCIC, MMCIMCC, son expresiones mal formadas ya que la primera y la tercera no cumplen la regla iii) de expresiones y la segunda no satisface la ii).

Este proceso de especificar con toda claridad cuales son los símbolos y reglas de formulación y transformación de expresiones, recibe el nombre de <u>FORMALIZACION DEL LENGUAJE</u>.

Una vez formalizado el lenguaje, podemos trabajar con los modelos simbólicos sin hacer ninguna referencia al problema real que le dió origen.

Los problemas en modelos de este tipo se nos presentan bajo la forma de pasar de una expresión bien formada a otra, utilizando las reglas de transformación.

De ésta forma el problema de los caníbales y misioneros en nuestro modelo, consiste en empezar de MMMCCCI y utilizando las reglas de transformación
llegar a la expresión IMMMCCC. Como ejercicio lo realizaremos a continuación:

Inicio: CCCMMMI
CMMMICC
CCMMMIC
MMMICCC
CMMMICC
CMIMMCC
MMCCIMC
CCIMMMC
CCCIMMM
CIMMMCC
CCIMMMC
IMMMCCC

Para comprobar que está bien el modelo, basta verificar que en todo momento se hallan respetado las reglas.

Finalmente, podrás observar que en ésta caso no tuvimos que hacer referencia al problema real para poder resolverlo, ésto es, pudimos hacerlo de manera mecánica.

En algunas ocasiones podemos resolver un mismo problema utilizando distintos lenguajes simbólicos, como es el caso del viajero, el problema de las jarras, etc.

Al utilizar diferentes lenguajes simbólicos para resolver un mismo problema nos damos cuenta que unos son más faciles de manipular que otros, es decir, unos tienen reglas de formación y transformación mas sencillas que otras, por lo que es mas fácil operarlos, esta mayor o menor facilidad de formar y transformar expresiones con ellos es lo que se ha dado en llamar la OPERATIVIDAD DEL LENGUAJE.

Un ejemplo sencillo que nos puede mostrar la operatividad de un lenguaje lo encontramos en la representación de números: ¿Cuál sistema de numeración crees que es mas operativo, el decimal o el romano? ¿por qué?, ¿Has realizado alguna multiplicación con números romanos? ¡Intenta una sencilla!

Preguntas de Comprobación:

1. ¿Cuales son las reglas de un lenguaje simbólico?
2. ¿Que es la formalización del lenguaje simbólico y cual es su importancia?
3. Da otro ejemplo de operatividad de un lenguaje.

ACTIVIDAD DOCENTE N° 10

CARACTERISTICAS E IMPORTANCIA DE UN LENGUAJE SIMBOLICO

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el estudiante debe:

1. Describir que es un lenguaje simbólico, sus características y su importancia.
2. Explicar que es el proceso de formalización de un lenguaje.
3. Explicar en que consiste la operatividad de un lenguaje.

Preguntas de Control:

Explica cuales son las reglas de un lenguaje simbólico.

¿Que es la formalización de un lenguaje?

¿Que es la operatividad de un lenguaje?

CREACION Y UTILIDAD DE LOS LENGUAJES SIMBOLICOS

En nuestro estudio de los lenguajes simbólicos hemos visto que-- éstos se construyen a partir de un modelo y éste a su vez de la --- realidad.

Así, de un problema que se presenta en la realidad al intentar-resolverse, puede dar origen a distintos modelos simbólicos y a la elaboración de distintos lenguajes -tal vez muy parecidos-. Cada - uno de éstos lenguajes tendrá validez si al enfrentarnos al problema que le dió origen, lo resuelve, y cuando ésto se logra, con mucha frecuencia nos damos cuenta que el lenguaje utilizado nos sirve para enfrentar otros problemas similares.

Sucede con frecuencia que al utilizar un lenguaje para crear -- nuevos modelos, resulta conveniente modificarlos, con lo que se --

consigue mejorar el lenguaje. Por otro lado, si de un mismo problema se crean distintos lenguajes simbólicos, predominará aquel que sea más cómodo de utilizar y que nos permita resolver un mayor número de problemas. En algunas ocasiones resulta conveniente tomar distintas propiedades de diferentes lenguajes y dar lugar a uno nuevo que supere a todos los anteriores.

Este proceso de enriquecimiento de los lenguajes simbólicos nos quedará mas claro en la próxima unidad cuando veamos el desarrollo del lenguaje simbólico de los números (sistemas de numeración).

En la clase de hoy vamos a resolver un problema recreativo, dicho problema lo resolveremos utilizando dos de los métodos vistos con anterioridad: El método directo y el de modelo simbólico, durante éste último, iremos creando un lenguaje simbólico que nos permita expresar cada uno de los pasos a efectuar en la resolución del mismo. El problema es el siguiente:

Seis cerillos se ponen en fila en la forma siguiente:

Con un espacio vacío del tamaño de un cerillo. Los cerillos sólo pueden avanzar en la dirección que señalan sus cabezas. Pueden avanzar directamente un paso si tienen enfrente el espacio vacío o pueden saltar a un cerillo que venga en dirección contraria (pero no mas de uno).

El problema consiste en pasar los cerillos de la izquierda a la derecha, y los de la derecha a la izquierda. Es decir, llegar a la siguiente posición.

La siguiente tabla es un modelo simbólico que resuelve el problema, identifica los símbolos y verifica que realmente es una solución.

1230ABC

1203ABC

12A30BC

12A3B0C

12A0B3C

10A2B3C

01A2B3C

A102B3C

A1B203C

A1B2C30

A1B2C03

A1B0C23

A0B1C23

AB01C23

ABC1023

ABC0123

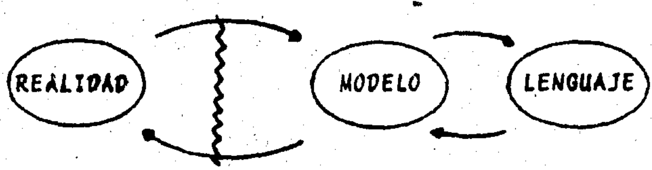
RESUMEN DE LA UNIDAD

Un lenguaje simbólico es un conjunto de símbolos y reglas para-manipularlos, dichas reglas son de dos tipos:

a) Reglas para formar expresiones

b) Reglas para transformar expresiones

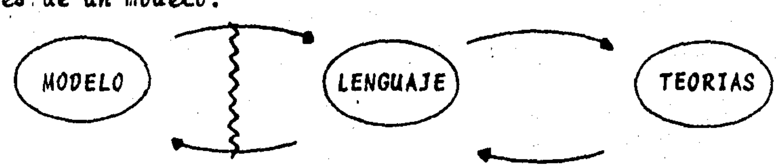
El proceso de creación de un lenguaje simbólico es complejo, -- sin embargo podemos considerar que surgen de la utilización de un-modelo simbólico, esto es, se crean a partir de la construcción de-un modelo, los que a su vez se crean a partir de la realidad. Es--quemáticamente podemos representar esto como:



Durante el proceso de formalización de un lenguaje simbólico, -éste pasa por varias etapas características

1. Arbitrariedad
2. Convencionalidad
3. Formalización

En la última etapa -la formalización- se produce una separación entre el modelo y la realidad, debido a que en esta etapa el grado-de abstracción, es bastante elevado. Esto lo podemos representar -a través de un modelo.



El enriquecimiento de los lenguajes simbólicos es constante y se manifiesta de diversas formas ya sea cambiando los símbolos, introduciendo nuevos, utilizando los mismos pero con diferentes significado, haciendo más explícitas las reglas de manipulación, etc.

La operatividad de un lenguaje simbólico depende de la mayor o menor facilidad que presenta en la manipulación de sus símbolos al formar o transformar expresiones del mismo.

TAREA No. 2

Lenguajes Cifrados.

1. Dentro de los lenguajes simbólicos tenemos los lenguajes cifrados cuya variedad es extensa, y se han venido utilizando por muchos siglos, uno de ellos es el llamado alfabeto "decálado" o cesariano ya que fue usado por Julio Cesar, consiste en que cada letra se reemplaza por la que está tantos lugares antes o después dentro de la serie alfabética, como se haya convenido por ejemplo la A -- por la E (cuatro lugares), la B por la F (cuat ro lugares), C por G, Etc. así el alfabeto quedaría:

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z A B C D

Con éste alfabeto tenemos que:

a) YQÑZIVWMHEH EYXSQSPE HI KYIVVIVS

b) PEXIPEXMGEW

son dos frases escritas con éste procedimiento ¿que significado -- tiene a) y b)?

Utilizando esta clave escribe las siguientes expresiones:

a) Los hombres se han convertido en herramientas de sus herramientas.

b) La verdad no puede explicarse nunca de modo que se comprenda y no se crea.

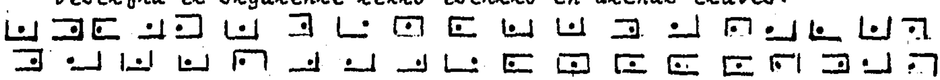
2. Los mensajes de los "boy scouts"

Como hemos dicho antes las letras las podemos reemplazar por -- símbolos o dibujos, para transmitir lenguajes secretos. Uno que re sulta sencillo es el empleado por algunos grupos de boy scouts en el que cada letra se forma con un punto y los rayos que lo limitan:

abc	def	ghi
jkl	mnñ	opq
rst	uvw	xyz

Observese que cada letra tiene una sola posición por lo tanto -- cada una de ellas tiene un solo símbolo asignado.

Descifra el siguiente texto escrito en dichas claves:



escriba en el lenguaje de los "boyscouts" lo siguiente:

"La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesa- - rias"

3. Formalice el lenguaje simbólico utilizado en el problema de via jero.
4. Formalice el lenguaje simbólico utilizado en el problema 3 de - la tarea 1 (Juan y sus hermanos)
5. Compara los ejercicios 3 y 4 y escribe en que se parecen y que- tienen de distinto.

ACTIVIDAD DOCENTE N° 11

CREACION DE UN LENGUAJE SIMBOLICO

Objetivos:

Al finalizar la clase el alumno debe:

1. Crear y utilizar lenguajes simbólicos sencillos.
2. Diferenciar entre la utilización de símbolos convencionales y - no convencionales en los lenguajes simbólicos.
3. Formalizar lenguajes simbólicos sencillos.

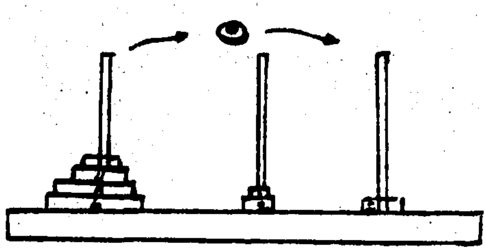
Como hemos visto en clases anteriores, el uso de los lenguajes-simbólicos es muy común, a diario hacemos uso de ellos, algunas veces incluso, sin darnos cuenta, basta con realizar algún escrito - para transmitir alguna idea o pensamiento para empezar a hacer uso de ellos; o simplemente salir a la calle y observar a nuestro alrededor para corroborar lo anterior (anuncios, señales de tránsito,- etc). Todo ésto involucra ya el uso de lenguajes simbólicos, sin - embargo los que nosotros estudiaremos por el momento, son los lenguajes utilizados en Matemáticas, por lo que la clase de hoy estará dirigida al estudio de los mismos.

Siguiendo nuestra linea de estudio empezaremos resolviendo un-- problema a través de un modelo simbólico, hemos visto ya como es a partir de estos, cuando se crean, utilizan y formalizan los lenguajes simbólicos. El problema a utilizar es un rompecabezas muy antiguo, como es sabido, desde la época de los egipcios, los rompecabezas han servido no solo de entretenimiento, sino de desarrollo para las matemáticas recreativas, además se guían bajo los mismos --

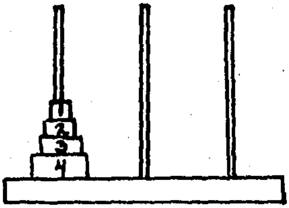
principios que las investigaciones mas serias. El problema es el siguiente:

"La Torre de Hanoi"

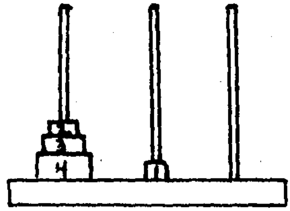
Este juego consiste en una tabla con tres clavijas. En una de ellas se coloca un número determinado de discos de varios tamaños, dispuestos de tal manera que el disco mayor quede abajo y los demás se superpongan de acuerdo a sus diámetros decrecientes hasta llegar al disco mas pequeño que quedará en la parte superior. Como se indica en la siguiente figura:



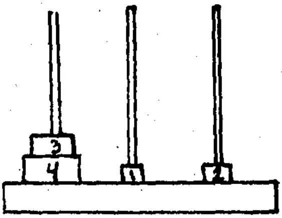
El problema consiste en traspasar todo el conjunto de discos a una de las otras dos clavijas, moviendo solamente un disco por vez y evitar que ninguno de ellos llegue a colocarse sobre otro de menor diámetro. Resolvamos el problema para 4 discos, para ello utilizamos un modelo simbólico como el siguiente:



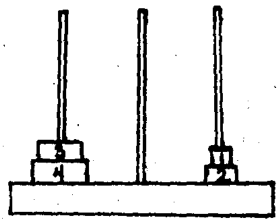
inicio



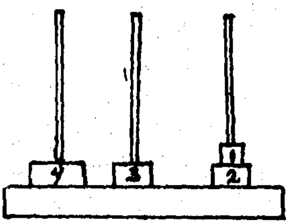
1



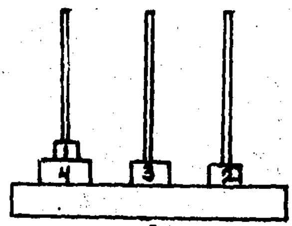
2



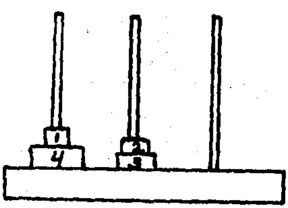
3



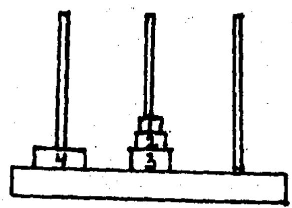
4



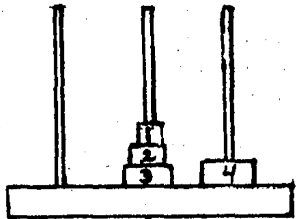
5



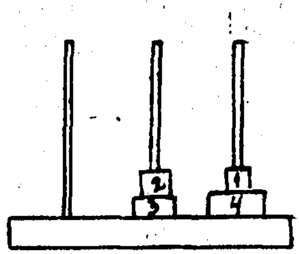
6



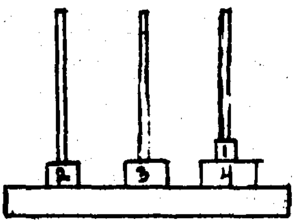
7



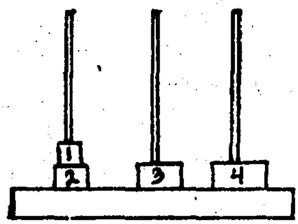
8



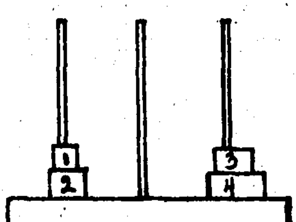
9



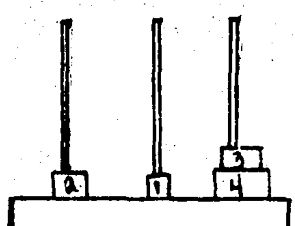
10



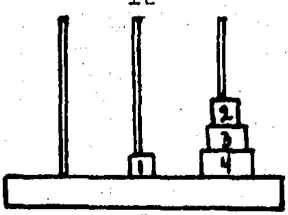
11



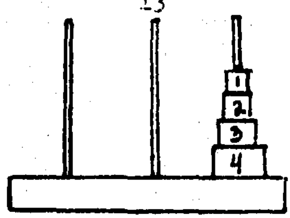
12



13



14



15

¿Cual fue el número mínimo de pesos que tuvimos que realizar?

Ahora hagamos una abstracción mas profunda e indiquemos el procedimiento anterior, a través del siguiente modelo simbólico:

Construirmos una tabla, con tres columnas, A,B y C que represen tan a cada clavija; cada paso lo vamos a representar con números - que asignan la posición de los discos del 1 al 4 como en el modelo anterior:

	A	B	C
inicio	4,3,2,1		
1	4,3,2	1	
2	4,3	1	2
3	4,3		2,1
4	4	3	2,1
5	4,1	3	2
6	4,1	3,2	
7	4	3,2,1	
8		3,2,1	4
9		3,2	4,1
10	2	3	4,1
11	2,1	3	4
12	2,1		4,3
13	2	1	4,3
14		1	4,3,2
15			4,3,2,1

Esta tabla la podemos simplificar aún mas de la siguiente manera:

4,3,2,1		
4,3,2	1	
4,3	1	2
4,3		2,1
4	3	2,1
4,1	3	2
4,1	3,2	
4	3,2,1	
	3,2,1	4
	3,2	4,1
2	3	4,1
2,1	3	4
2,1		4,3
2	1	4,3
	1	4,3,2
		4,3,2,1

Como podemos observar, al realizar éste último modelo hemos - - creado simultáneamente un lenguaje simbólico el cual podemos enunciar de la siguiente manera:

Símbolos: 1,2,3,4,|

Expresiones: Una expresión bien formada es una sucesión de símbolos tal que:

1. Todos los símbolos aparecen en ella
2. El símbolo | se repite 4 veces
3. Los símbolos 4,3,2,1 aparecen entre dos símbolos | |
4. El orden de los símbolos 4,3,2,1 que aparezcan entre dos símbolos | consecutivos es de mayor a menor.

REGLAS DE TRANSFORMACION

Consiste en pasar de un espacio a cualquiera de los otros dos - determinados por los símbolos llal numero menor, quedando éste a la derecha de los que se encuentran en ese espacio, de tal forma que- se obtenga una expresión bien formada.

Ejercicio: Resuelve éste mismo problema para el caso de 5 discos - y contesta las siguientes preguntas:

¿Cual es el número mínimo de pesos a realizar?

¿Para el caso de 3 discos, cual sería el número mínimo de pesos? ¿Y para dos discos?

La tabla siguiente muestra el número mínimo de pasos a realizar- para cada determinado número de discos:

TABLA PARA TRASPASOS

DISCOS	No DE TRASPASOS
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
6	$63 = 2^6 - 1$
7	$127 = 2^7 - 1$
.	.
.	.

ACTIVIDAD DOCENTE No. 12

EVALUACION DE MODELOS Y LENGUAJES SIMBOLICOS.

Criterios:

La evaluación constará de las siguientes partes:

1. Entrega puntual de tareas 25 %
2. Entrega bien contestada del cuestionario-guía de examen 25%
3. Examen, el cual constará de diez preguntas del cuestionario anterior 50%

Lo anterior será valido siempre y cuando la calificación obtenida en el examen sea aprobatoria.

El cuestionario-guía de examen es el siguiente:

1. ¿Que es un concepto?
2. ¿Cual es la dificultad básica de las matemáticas?
3. ¿Por que es importante el estudio de las matemáticas?
4. ¿En que consiste el método de resolución mental?
5. ¿En que consiste el método directo?
6. ¿En que consiste el método de simulación?
7. ¿Que es un modelo?
8. ¿Que es un modelo simbólico?
9. ¿Se pueden tener distintos modelos simbólicos de un mismo problema?
10. ¿Es posible simplificar un modelo simbólico?
    ¿Por qué?
11. ¿Que tienen en común los distintos métodos de solución de un problema?

12. ¿Para que nos sirve resolver un problema en un modelo?

13. ¿En que consiste la generalidad de un modelo?

14. ¿En que consiste el proceso de abstracción?

15. ¿En que consiste el proceso de aplicación?

16. ¿Que es un lenguaje?

17. ¿Que es un lenguaje simbólico?

18. La utilización de lenguajes simbólicos ¿Es exclusiva de las matemáticas?

19. ¿De que consta un lenguaje simbólico?

20. ¿En que consiste la arbitrariedad y la convencionalidad de los símbolos en un lenguaje simbólico?

21. ¿Que es la formalización de un lenguaje simbólico y cual es su importancia?

22. ¿En que consiste la operatividad de un lenguaje simbólico?

23. ¿Como se produce el proceso de creación de un lenguaje simbólico.

24. ¿Como se manifiesta el enriquecimiento de los lenguajes simbólicos?

25. Elabora un modelo y lenguaje simbólico de algún problema sencillo que te encuentres. El problema puede ser de cualquier tipo.

ACTIVIDAD DOCENTE N° 13

ORIGENES DE LOS SISTEMAS DE NUMERACION . EL SISTEMA DE NUMERACION PRIMITIVO.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Se formará la convicción de que la historia de las matemáticas no está desligada de la historia del hombre.
2. Conocerá cuales son los orígenes de los sistemas de numeración.
3. Tendrá una visión histórica del concepto de número.
4. Sabrá que es un sistema de numeración.
5. Sabrá cuales son los principios y limitaciones del sistema de numeración primitivo.

INTRODUCCION

Hasta ahora en nuestras clases no hemos mencionado para nada un concepto de vital importancia para las matemáticas, éste concepto es el número. En esta clase daremos algunas nociones sobre el mismo.

Se ha demostrado experimentalmente que la noción de número no es exclusivo de la raza humana. Varios científicos han realizado experimentos con diversos animales (pájaros, caballos, perros, etc.) en los cuales es posible constatar que también en ellos existe la noción de número, aunque obviamente no tan desarrollada como en el hombre.

Por ejemplo si se le enseña a un jilguero a escoger entre dos --

montones desiguales de granos, se constata luego que a la larga -- llega a distinguir:

Tres y uno, tres y dos, cuatro y dos, seis y tres, pero siempre confudirá:

Siete y cinco, cinco y cuatro , ocho y seis.

Naturalmente nadie imagina que concientemente los cuente , pe-- ro, al parecer, puede apreciar las diferencias entre los números- por las diferencias que en los aspectos ofrecen diversas cantida-- des.

En este sentido el hombre prehistórico no estaba tan diferencia do de los pájaros como lo está en la actualidad. Sin embargo, de - éste núcleo fué de donde surgió nuestra concepción del número.

¿Que fue lo que le permitió al hombre prehistórico evolucionar- a diferencia de otros animales?

Sin lugar a dudas, el lenguaje. Es a través del lenguaje como - el pensamiento del hombre cobra realidad.

En recientes investigaciones se ha descubierto una impresionante similitud entre acciones humanas y animales, en lo que respecta a la sensación, orientación, mecanismo locomotor, conducta instintiva, normas reflejadas, conducta social, modos de enseñanza, etc. Sólo el lenguaje parece ser una técnica peculiar del hombre; por - lo tanto podemos inferir una vez mas que todas las diferencias entre la conducta del hombre y de los animales son consecuencia del- lenguaje. Sólo el ser humano ha dado nombres a las cosas, a las -

ideas, a los animales, plantas etc. Sólo él es capaz de poder expresar sus pensamientos concientemente.

Posiblemente cuando fué necesario algo más que una mirada hacia la caverna, para tener la seguridad de que todos los niños se encontraban en ella o una mirada a su percha de hachas, para convencerse de que los cuatro repuestos de las mismas estaban en su lugar.

En algún momento el hombre encontró necesario comunicarse usando números. Tuvo que ir a casa de un vecino y decirle: "Oye viejo, ¿no descolgaste una de mis hachas de piedra la última vez que extuviste en mi caverna?". Entonces, si el vecino le decía: "santo cielo, ¿que te hace pensar eso?", le convenía estar capacitado para responder: Mira amigo, yo tenía cuatro repuestos antes de que me visitaras y sólo encontré tres después de que te retiraste".

Para abreviar es útil, tener nombres para los diferentes números.

Indudablemente al principio solamente unos cuantos nombres fueron inventados; los suficientes para entenderse. Algunas tribus primitivas aun en la actualidad, no tienen nombres para los números mayores que el dos y el tres. Esto no quiere decir, naturalmente, que desconozcan los números mayores; sólo significa que no tienen nombres distintos para ellos.

<u>De ésta forma, es como surgen las matemáticas, de la necesidad del hombre primitivo de contar, de numerar o considerar las cosas</u>

como unidades homogéneas. Con seguridad tuvo que pasar bastante -- tiempo para que el hombre evolucionara y terminara por adueñarse - de una técnica que en adelante formará parte de su equipo mental:- el apareamiento, esto es, hacer corresponder unos objetos con otros los que desea contar (flechas, hachas, pieles, etc) con los que -- utiliza para contar (piedras, ramas, pequeñas hojas etc). Esta técnica elemental, simple y antigua que hemos denominado apareamiento, constituye uno de los pilares fundamentales de las matemáticas, -- que actualmente conocemos como "correspondencia biunivoca".

La noción de número -la cual sólo hemos tocado ligeramente- es- una de las mas antiguas y fundamentales de la ciencia matemática. Su aparición después de las primeras manifestaciones del pensamiento conciente, sus extensiones sucesivas y sus extraordinarias generalizaciones están intimamente ligadas a toda la historia intelectual de la humanidad, y es necesario no perder de vista que el número en su significado intuitivo, es una propiedad física que la - experiencia nos lleva a atribuirles a los conjuntos de objetos.

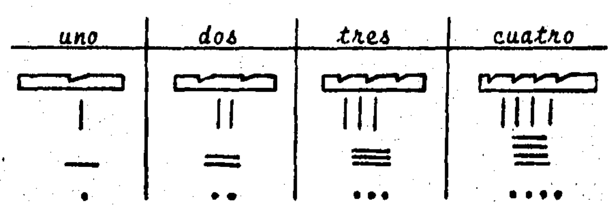
LOS SISTEMAS DE NUMERACION.

Con el paso del tiempo, el hombre primitivo se desarrolla y por ende, también su manera de contar. Llega a un grado de evolución - en que se le presenta el problema de como dejar constancia de algunas cosas que se le presentan, y la manera en que resolvió éste -- problema fue desarrollando la escritura. De ésta forma es como empieza a utilizar símbolos gráficos para dejar constancia y transmi tir sus ideas; de ésta misma forma empieza a utilizar símbolos para representar números. Esto es, empezó a hacer uso de un LENGUAJE SIMBOLICO PARA REPRESENTAR NUMEROS. Probablemente representó al número "uno" por medio de una marca en un madero, una raya en la pared de la cueva donde vivía, etc., y para representar otros números simplemente repitió el símbolo que utilizaba para el "uno", de esta manera, cada número se representaba por un conjunto de marcas sencillas e iguales.

Posiblemente de ésta forma se empezó a hacer uso de lo que hoy denominamos un SISTEMA DE NUMERACION. Por lo tanto, UN SISTEMA DE NUMERACION ES UN LENGUAJE SIMBOLICO QUE NOS SIRVE PARA REPRESENTAR NUMEROS, de ahí que podamos definirlo como: UN CONJUNTO DE SIMBOLOS Y REGLAS PAR A FORMAR Y TRANSFORMAR EXPRESIONES QUE NOS SIRVE PARA REPRESENTAR NUMEROS.

I. SISTEMA DE NUMERACION PRIMITIVO.

Esta forma de representar números, que posiblemente utilizó el hombre primitivo es lo que hoy llamamos sistema de numeración primitivo, y podríamos decir que pudo haber sido de cualquiera de estas formas u otros obviamente:



Estos son quizás los primeros intentos que el hombre realizó para dejar constancia de la idea de número por medio de símbolos gráficos.

Lo que es fundamental de éste sistema de numeración es que cada número se representa por un conjunto de marcas sencillas e iguales, y de que el número expresado es la suma de los números simbolizados por cada una de las marcas.

Por lo tanto podemos concluir que:

El sistema de numeración primitivo consta de:

Símbolos: Utiliza un solo símbolo que representa la unidad. Por ejemplo "|"

Principios: Utiliza el principio aditivo, ya que para representar cualquier número diferente de la unidad, se repite el mismo símbolo tantas veces como sea necesario, de tal manera que el número representado es una suma de valores parciales. Por ejemplo:

$$|||||\ = |+|+|+|+|$$

En los remotos días en que los hombres obtenían su alimento unicamente de la caza y de la recolección de frutas y bayas, este sistema de numeración satisfacía las necesidades de registro del hombre primitivo, ya que las mismas eran escasas. Sin embargo con el paso del tiempo y una vez que el hombre primitivo comienza a hacerse sedentario al convertirse en pastor y agricultor sus necesidades de registro aumentan y se hace necesario enumerar "grandes" cantidades (ya sean rebaños o provisiones etc) por lo cual el sis-

-tema de numeración empleado ya es insuficiente para satisfacerlos. Esta insuficiencia quedará demostrada por la siguiente suposición: imaginemos que tenían que enumerar cantidades como ésta;

||||||||||||||||||||||

Como podemos observar su interpretación es además tediosa y confusa; ¿Que pasaría si ahora tuviesemos que representar un número como el cien o todavía mayor?

De lo anterior podemos concluir que el sistema de numeración -- primitivo presentaba serias LIMITACIONES las cuales podemos enumerar de la siguiente manera:

1. Pérdida de espacio y tiempo en la representación de cantidades- relativamente "grandes"
2. Enormes dificultades de interpretación de representaciones de - "grandes" cantidades.

PREGUNTAS DE COMPROBACION

1. ¿La noción de número es exclusiva de la raza humana?
2. ¿De que manera el lenguaje influyó en la evolución del hombre?
3. ¿Cual fue el hecho que dió origen a las matemáticas?
4. ¿En que consiste el apareamiento entre objetos?
5. ¿Son los sistemas de numeración lenguajes simbólicos? ¿por que?.
6. ¿Que es un sistema de numeración?
7. ¿Cuales son los principios sobre los que se basa el sistema de- numeración primitivo?
8. ¿Cuales son las limitaciones principales del mismo?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 14

EL SISTEMA DE NUMERACION EGIPCIO

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Conocerá las condiciones histórico-sociales que permitieron superar el sistema de numeración primitivo.
2. Sabrá cuales son los símbolos y principios sobre los que se basa el sistema de numeración primitivo.
3. Podrá establecer comparaciones entre el sistema de numeración primitivo y el egipcio.
4. Podrá expresar cantidades utilizando el sistema de numeración egipcio.

Preguntas de control;

1. ¿Que es un sistema de numeración?
2. ¿En que consiste el sistema de numeración primitivo?

El sistema de numeración primitivo, a pesar de todas sus limitaciones (mismas que enlistamos la clase pasada) para las necesidades del hombre primitivo resultaba suficiente.

Después con el desarrollo de la agricultura y la ganadería, se sentaron las bases materiales para el avance de la humanidad, las pequeñas comunidades se fueron transformando en conglomerados cada vez más grandes, y empiezan a paresentarse fenómenos sociales inimaginables para el hombre primtivo como la dominación de un pueblo por otro, y dentro de un mismo conglomerado empiezan a surgir di--

versos estamentos sociales, permitiendo así que grupos dentro de -- una misma comunidad se dediquen a la guerra (castas militares), -- otros a los cultos religiosos -casta sacerdotal-, otros a la dirección administrativa y otros al trábajo productivo como la ganadería y agricultura. En general, las castas sacerdotal y de guerreros eran los encargados de dirigir esas sociedades, pero de ellos, la sacerdotal fue la que se encargó de preservar y desarrollar el conocimiento de su sociedad.

De ésta forma, el conocimiento en general, se convirtió en un arma de dominación de los sacerdotes, quienes impedían que este conocimiento se difundiera en la población dandole un carácter místico-religioso del cual, las matemáticas no pudieron salvarse, y de los números surgió la numerología, la mística que se da a los números ha ejercido en el espíritu humano desde tiempo inmemorial, el obstáculo principal para la edificación de una teoría de los números, dicho de otra manera del desarrollo mas rápido de la aritmética.

Indiscutiblemente éstos periodos de transición de la sociedad, no fueron de la noche a la mañana, sino mediante un largo proceso. Así es como tenemos que el hombre al enfrentarse a la necesidad de contar cantidades cada vez mas grandes se vió obligado a desarrollar su viejo y caduco sistema de numeración. Con seguridad empezó por agrupar de 5 en 5 ó de 10 en 10 su antiguo símbolo: I

Los rastros que diversos pueblos han dejado, parecen confirmar este hecho, que con seguridad se debió a que los dedos de las manos constituyeron (y a la fecha lo siguen siendo) un recurso auxiliar para contar.

De este modo, la magnitud de los agrupamientos fue lo que determinó las distintas bases de los sistemas de numeración, que siguieron al primitivo dentro de los cuales és importante mencionar el:

SISTEMA DE NUMERACION EGIPCIO.

Entre los pueblos mas antiguos que desarrollaron un sistema de numeración, tenemos a los egipcios. La cultura egipcia que se desarrolla en el valle del río Nilo, florece hacia los milenios II y IV a.n.e.

Con la aparición y desarrollo de la sociedad esclavista, sociedad dividida en clases sociales, nace la civilización y la gran cultura. En los países del antiguo oriente -entre ellos Egipto-nacieron y se desarrollaron los gérmenes de un conocimiento científico de la naturaleza; vemos así, que los mas antiguos estudios de geometría, fueron hechos por los antiguos caldeos, egipcios y babilónios. Teniendo en Egipto, como uno de sus orígenes la medición de las tierras, ya que el Nilo al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de éstas (geometría viene de las raíces geos=tierra, metron=medida). Otra prueba de este gran avance es el papiro Rhind, que trata sobre una gran cantidad de problemas de cálculo y tablas para resolverlos; si bien todos estos conoci--

mientos no eran del dominio del pueblo egipcio, sino de sus sacer dotes, debido a su sistema social se han logrado conocer hasta nuestros días; y podemos afirmar sin lugar a dudas que tivieron mucho avance, muestra de ello son las famosísimas pirámides.

En cuanto a su sistema de numeración, los egipcios superaron algunos de los inconvenientes del sistema de numeración primitivo de marcas iguales, introducieron los agrupamientos de diez, esto es, utilizando un solo jeroglífico o figura por cada diez marcas iguales, así tenemos que:

Por cada 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 utilizaban 𓎆 el cual representaba por tanto el diez.

Por cada 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 utilizaban 𓍢 el cual representaba el cien y así sucesivamente. La siguiente tabla muestra los símbolos utilizados por los egipcios y su equivalente en nuestro sistema decimal.

símbolo egipcio	objeto que representa	nombre actual	símbolo decimal
𓏺	bastón	uno	1
𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 = 𓎆	hueso de talón	diez	10
𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 = 𓍢	cuerda enrollada	cien	100
𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 = 𓆼	flor de loto	mil	1000
𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼 = 𓂭	dedo apuntando	diez mil	10 000
𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭 = 𓆐	pez	cien mil	100000
𓆐𓆐𓆐𓆐𓆐𓆐 = 𓁨	hombre sorprendido	1 millón	1000000

Concluyendo, el sistema de numeración egipcio consta de los símbolos y las siguientes características:

1. Utiliza el principio aditivo: El número representado por un conjunto particular de símbolos se encontraba sumando los valores de cada uno de los símbolos representados por ejemplo:

   ∩∩||| = 10 + 10 + 1 + 1 = 23
   9∩|| = 100 + 10 + 1 + 1 = 112

2. Los símbolos básicos se pueden repetir hasta nueve veces por ejemplo:

   ∩∩||||||||| = 10+10+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 29

   9∩∩∩∩∩∩∩∩∩ = 100 +10+10+ ...+10 = 190

3. Es un sistema de numeración decimal (de base 10) es decir, existe un número base para decidir, en cada agrupamiento, la creación de un nuevo símbolo. Este número es el 10.

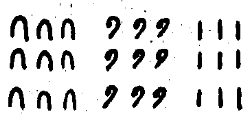
4. El orden en que se escriben los símbolos no importa, se pueden escribir de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. Era costumbre que los símbolos de valor mayor precedieran a los símbolos de menor valor por ejemplo:

   ∩∩9|| = 122
   y ||∩9∩ = 122
   9∩∩|| = 122

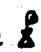
Vemos entonces que el sistema de numeración egipcio no era un sistema de posición como es el caso de nuestro sistema decimal.

LIMITACIONES

El sistema de numeración egipcio aunque superó muchos de los inconvenientes del sistema de numeración primitivo, no los eliminó todos ni del todo. Esto es, aunque ya era posible representar cantidades sin mucha dificultad esto no era homogéneo ya que existían cantidades no muy grandes pero su dificultad para representarlas no era menor, así por ejemplo para representar el "novecientos noventa y nueve" tenían que utilizar:



lo cual es bastante complicado de escribir.

mientras que para representar el "mil" utilizaban únicamente 

De ahí que a pesar de ser avance presentaba bastantes limitaciones que a la postre serían rebasadas por otros sistemas de numeración.

Preguntas de Comprobación.

1. ¿Que condiciones histórico-sociales permitieron el desarrollo de los sistemas de numeración primitivos?
2. ¿Bajo que formación social se desarrolló la cultura egipcia?
3. ¿Cuales son los símbolos utilizados en el sistema de numeración egipcio?
4. ¿Cuales son las características y limitaciones del sistema de numeración egipcio?
5. ¿Por que decimos que antiguamente las matemáticas tenían un caracter místico religioso?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 15.

EL SISTEMA DE NUMERACION BABILONICO.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Conocerá las condiciones histórico-sociales que predominaban en la civilización babilónica.
2. Sabrá que el desarrollo de la humanidad no es siempre contínuo, ni lineal y ascendente.
3. Conocerá los símbolos y principios sobre los que se sustenta el sistema de numeración babilónico.
4. Será capaz de manipular dicho sistema y podrá representar cantidades utilizandolo.

Introducción.

Como es lógico suponer y de acuerdo a nuestra experiencia, el hombre desde sus orígenes ha venido evolucionando, pero contrariamente a lo que muchos suponen, dicha evolución no es ni ha sido de manera unilinial y predestinada. Es decir, no ha existido ni existirá en el desarrollo humano una línea única de desarrollo sino varias. Por otro lado dicho desarrollo no ha sido siempre homogéneo y exento de contradicciones sino que han existido epocas de avance, de estancamiento y aún retroceso.

De esta forma tenemos que, mucho antes del florecimiento de la cultura egipcia, existió otra gran cultura, sustentada sobre la base de las relaciones económicas que hoy denominamos esclavista. Dicha cultura es la cultura babilónica.

La cultura babilónica se desarrolló entre los márgenes de los - ríos Tigris y Eufrates, aproximadamente a fines del milenio IV y - principios del III a. de c. En esta sociedad su economía estaba -- sustentada primordialmente por una producción de tipo esclavista.- Este hecho le permitió tener una economía fuerte comparandola con- los estadios anteriores del hombre, lo que a su vez le permitió tener grandes avances en el campo del saber. En lo que corresponde a las matemáticas, sabían entre otras cosas sumar, restar, multiplicar y dividir e incluso extraer raíces cuadradas.

Por razones de tipo didáctico y pedagógico dejaremos el estudio de estos avances para otras materias, por lo pronto centraremos -- nuestro estudio en el análisis del sistema de numeración empleado- por ellos.

SISTEMA DE NUMERACION BABILONICO.

Como su escritura se hacía sobre pequeñas tablas de arcilla, -- con la ayuda de un estilete que producía caracteres en forma de cuña, llamados caracteres cuneiformes; los símbolos de su sistema de numeración eran cuñas, así tenemos que el "uno" era representado - por una cuña sencilla: ▼ la cual podía repetirse hasta un total de nueve veces para representar todos los números del uno al nueve. Para representar el diez en lugar de repetir diez veces el símbolo - utilizado para el "uno", o de inventar otro símbolo utilizaban el- mismo símbolo pero rotado 90° en la dirección contraria a aquella- en que giran las manecillas del reloj. Como se muestra en la tabla siguiente, donde se encuentran además otros símbolos que representan otras tantas cantidades y su equivalencia en nuestro sistema actual.

SISTEMA BABILONICO	NOMBRE ACTUAL	SISTEMA DECIMAL
	uno	1
	diez	10
	cien	100
	mil	1000
	diez mil	10 000

Como podemos observar el "cien" era un signo compuesto mientras que el "mil" era el resultado de un producto (diez cientos) lo mismo para el diez mil (diez miles). Para poder representar otras cantidades lo único que hacían era repetir los símbolos básicos tantas veces como fuese necesario. Por ejemplo:

 = 10+6 =16

20(100) +30+6 = 2000+30+6 = 2036

(10)(1000) + 30 + 6 = 10 000 + 36+ 10 036

Estos dos últimos ejemplos nos pueden servir para hacer algunas observaciones:

1. El orden en que van colocados los símbolos si interesaba ya que no es lo mismo (10 veces mil) que (dos veces mil).
2. No existían símbolos independientes para cantidades mayores que el "mil".

De lo anterior podemos concluir que el sistema de numeración babilónico presentaba las siguientes características principales:

1. Utiliza un sólo símbolo (▼) que representa la unidad.
2. El diez es la misma cuña pero rotada (90°) como se indica ◄
3. El cien era un símbolo compuesto por dos cuñas ▼►
4. De lo anterior podemos decir que utilizaban como base del sistema el diez.
5. Hacía uso de los siguientes principios:

   a) Aditivo: El número representado es una suma de cantidades parciales. Por ejemplo:

   ◄▼▼▼ = 10 + 3 = 13

   ◄◄▼▼▼▼ = 10+10+1+1+1+1+ = 20 + 4 = 24

   b) Multiplicativo: El número representado es el resultado del producto de dos símbolos base. Por ejemplo:

   ◄◄▼► = (10)(10)(100) = 10 000

   ◄▼► = (10 (100) = 1000

   c) Posicional: La posición de los símbolos sí importaba en la determinación del número representado por ejemplo:

   ◄▼► =(10)(100) = 1000

   ▼►◄= 100 + 10 = 110

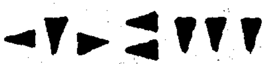
   ◄◄▼► =(10+10) (100) = (20)(100) = 2000

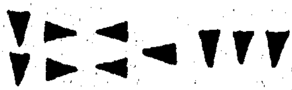
   ◄▼►◄=(10)(100)+10= 1000 + 10 = 1010

Realiza los siguientes ejercicios:

Encuentra qué número se está representando por cada uno de los siguientes conjuntos de símbolos:

a) 

b) 

c) 

Encuentra cual sería la representación de los números siguientes en babilónico.

a) "trescientos veinticuatro"

b) "mil doscientos catorce"

c) "cincuenta y tres"

Además del sistema de numeración anteriormente descrito, los babilónios utilizaban un sistema que por sus características podemos denominar sexagesimal (de base sesenta).

En este sistema, los símbolos utilizados son los mismos que el anterior e incluso para la escritura de números menores que sesenta, se utilizaba el sistema anteriormente descrito, pero el sesenta se escribía como el número uno es decir  = 60, y con los números mayores de 60 empezamos a contar nuevamente, por ejemplo:

 = 60+10+2 = 72

$$44 \times 60^2 \quad + \quad 26 \times 60 \quad + \quad 40 \quad = 160\,000$$

$$44 \times 3600 \quad + \quad 1560 \quad + \quad 40$$

$$158\,400 \quad + \quad 1600 \quad = 160\,000$$

Como podremos ver mas adelante, éste sistema de numeración, es un sistema de posición semejante al nuestro, y solo necesitaba un símbolo para el cero y así convertirse en un sistema de numeración posicional completo. El cero frecuentemente era representado por un hueco y otras veces por el símbolo Σ

El sistema babilónico tenía múltiples desventajas de las cuales cabe destacar: la falta de distinción entre los símbolos correspondientes a uno y a sesenta, no tenía un símbolo específico para el cero, requería para operar, de tablas de adición y multiplicación que iban desde 1 + 1 hasta 59+59 y desde 1 x 1 hasta 59 x 59 respectivamente.

Este sistema de numeración se ha conservado en cierta medida hasta nuestros días (por ejemplo la subdivisión de la hora en 60 minutos y del minuto en sesenta segundos, así como el sistema análogo de medición de angulos).

Preguntas de Comprobación.

1. ¿Existe dentro del desarrollo de la humanidad una línea única?
2. ¿No existen dentro de la historia del hombre etapas de retroceso?

3. ¿Cuántos símbolos utiliza el sistema de nuemración babilónico?
4. ¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración babilónico y en que consisten cada uno de ellos?
5. ¿Has oído hablar alguna vez de un sistema de numeración sexagesimal? ¿En que consiste?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 16

EL SISTEMA DE NUMERACION ROMANO.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno será capáz de:

1. Conocer las condiciones sociales en que se desarrolló el sistema de numeración romano.
2. Saber cuales son las ventajas del sistema de numeración romano sobre el egipcio.
3. Saber cuales son los símbolos y principios del sistema de numeración romano.
4. Manipular correctamente dicho sistema.

Preguntas de Control.

¿La humanidad ha seguido una línea única de desarrollo?

¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración babilónico? dar ejemplos:

¿Cuales son las desventajas principales del sistema de numeración babilónico?

En las clases pasadas, vimos los sistemas de numeración desarrollados por las culturas de oriente (Egipto y Babilonia), dijimos también que en estos pueblos, fueron los sacerdotes los que concentraron los conocimientos alcanzados hasta ese tiempo, dotandoles de un carácter mítico-religioso y sobre todo evitando que ese conocimiento se divulgara.

Entre el año 400 a.n.e., y el 476 a.n.e., en occidente florecie ron las dos últimas civilizaciones esclavistas: la griega en los - Balcanes y la romana en la península itálica.

La gran diferencia entre éstas culturas y las orientales radicó en su forma de gobierno y su religión, mientras que en oriente -- eran profundamentalmente místicos, en occidente los dioses eran paganos y pendencieros, la misticidad de oriente se reflejaba en sus leyes, en su Estado teocrático-monárquico; en cambio en occidente-se instaura la República Monárquica en algunos casos y democrática en otros, ésta estructura permitió que el conocimiento llegara más allá de los templos y se extendiera, haciendose accesible a todos.

El pueblo griego fue un pueblo amante de la cultura y con su estructura (república democrática) permitió un gran auge cultural, - gracias a ello muchos de los conocimientos de las antiguas civilizaciones han llegado hasta nuestros días, gracias a lo que han recibido el nombre de: la cuna de la cultura occidental. Mientras -- que en oriente solo se conservó lo grabado en las paredes de sus - templos, palacios y tumbas de sus gobernantes, y en algunos casos-papiros y tablillas grabadas.

El imperio romano, mas que por su conocimiento se destacó como-un pueblo ansioso de poder, en su atronante paso conquistador, convirtió en cenizas la mayor parte de los conocimientos recogidos -- por los griegos en la Biblioteca de Alejandría. Su única aportación valiosa fueron sus leyes, que aún se estudian en las escuelas de derecho.

Si bien es cierto que los romanos, no se avocaron a desarrollar los conocimientos y se conformaron con tomar de los griegos lo necesario para su desarrollo, lograron simplificar un poco los sistemas de numeración.

Los romanos al igual que los egipcios inicialmente hacían uso únicamente del principio aditivo para representar números aunque con algunas modificaciones ya que los símbolos utilizados por ellos no representaban únicamente múltiplos de diez, sino que también utilizaban otros símbolos básicos. Dichos símbolos con sus respectivas equivalencias se muestran en la siguiente tabla:

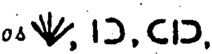
SIMBOLO ROMANO	NUMERO REPRESENTADO	SIMBOLO DECIMAL ACTUAL
I	uno	1
Ψ	cinco	5
X	diez	10
L	cincuenta	50
C	cien	100
IↃ	quinientos	500
CIↃ	mil	1000

Como puede observarse el sistema de numeración romano presentaba un avance en la representación de números ya que a diferencia del egipcio, en éste sistema no había necesidad de repetir un símbolo mas de cuatro veces, de ésta forma en lugar de escribir ||||| utilizaban otro símbolo Ψ, y en lugar de utilizar XXXXX utilizaban L, en lugar de CCCCC utilizaban IↃ

En un principio las representaciones de números como el "cuatro" "nueve", "cuarenta", etc., se escribían:

cuatro = IIII   cuarenta = XXXX   cinco = 

novecientos = DCCCC Noventa = LXXXX nueve = IIİI

Posteriormente los símbolos fueron modificandose de tal manera - que los símbolos , pasaron a ser V, D y M respectivamente; el principio aditivo mencionado con anterioridad lo podemos enunciar como:

<u>Principio Aditivo o de Adición.</u>

Cuando los símbolos básicos de un número aparecen en el orden natural M, D, C, L, X, V, I (el orden en valor decreciente), el número representado es la suma de los números indicados por los símbolos básicos individuales exceptuando aquellos que comprenden cuatros y nueves. Estos símbolos básicos se pueden repetir, los ejemplo :

$$XV = X + V = 10 + 5$$
$$XXIII = 20 + 3 = 23$$

Con el paso del tiempo los romanos empezaron a incorporar a su - sistema de numración nuevas reglas así en lugar de escribir IIII empezaron a escribir IV, XL en lugar de XXXX, CD en lugar de CCCC etc Esto es, empezaron a hacer uso de otro principio: El principio de - Sustracción, el cual podemos enunciar como sigue:

<u>Principio de Sustracción:</u>

Unicamente los siguientes pares de símbolos se pueden escribir - en orden diferente al natural I antes de V ó de X; X antes de L ó -

de C; y C antes de D o de M. Cuando uno de esos pares forma parte de un número, se resta el número de la izquierda del número de la derecha y el resultado se suma al valor que representa el resto del número. Este principio opera entonces específicamente en relación con los cuatros y nueves de cada orgen. Así:

IV = 5-1 = 4

XL = L-X = 50 - 10 = 40

CD = D-C = 500 - 100 = 400

IX = 10 - 1 = 9

XV = 100 - 1 = 90

CM = 1000 - 100 = 900

XIX = X + (X - I) = 10 +(10 - 1) = 10 + 9 = 19

Los romanos con mas frecuencia escribían cuatro como IIII y como IV. De manera semejante para indicar nueve se usaba VIIII y con menos frecuencia IX. Aun en nuestros tiempos encontramos carátulas de reloj con símbolos IIII y VIIII y no IV ó IX.

En el sistema romano, el acoplamiento de I con V podía significar cuatro o seis, dependiendo del principio que se utilizaru; el de sustracción o el de adición. Así vemos cierta escencia de la notación de posición en el sistema romano.

Para la representación de cantidades mayores que el mil hacían uso del:

<u>Principio de Multiplicación</u>

Este principio consiste básicamente en lo siguiente: Cuando se pone una barra sobre dos o mas símbolos que agrupa la barra se con sideran multiplicados por 1000 y luego se suma el valor que indica el resto del número, por ejemplo:

$$\overline{XX}CLII = M(X + X) + C + L + I + I$$
$$= 1000\ (10 + 10) + 100 + 50 + 2$$
$$\overline{XX}CLII = 20152$$
$$\overline{X}IV = 1000\ (10) + 4 = 10\ 000 + 4 = 10\ 004$$
$$\overline{XII} = 12\ 000$$

Finalmente podemos decir que el sistema de numeración romano hacia uso de un:

Principio de Economía

Este principio consiste en que para representar un número se debe usar el mínimo posible de símbolos básicos por ejemplo:

para representar diez, se usa X y no VV

para representar cincuenta se usa L y No XXXXX

Además de usar símbolos básicos distintos, el sistema romano difiere del egipcio en dos cosas importantes:

1. Los números romanos siempre se leen de izquierda a derecha, -- mientras que los egipcios se pueden leer en cualquier orden.
2. En los números romanos se usan algunas veces los mismos símbolos básicos para representar diferentes números, por ejemplo C y X se - pueden usar para escribir CX = 110 y XC = 90

Como podemos observar el sistema de numeración romano, presenta- todavía dificultades en la representación de números y mas aún, el operar con éstos símbolos se hace muy difícil, por lo cual a pesar de poseer bastantes ventajas en comparación con los otros sistemas de utilización es impractica actualmente.

EJERCICIOS.

1. Utilice el sistema de numeración romano para representar las -- siguientes cantidades.

a) 733 b) 79 c) 444 d) 949 e) 566 f) 8948

2. Las siguientes cantidades se encuentran expresadas utilizando - el sistema de numeración romano, representadas utilizando nuestro sistema de numeración decimal.

a) CCXXII b) $\overline{X}$CXLV c) DCCXCLX d) CDXLIX

e) MCMLXXXIII f) XCIX

Preguntas de comprobación.

1. ¿Los símbolos utilizados actualmente en el sistema de numeración romano han sido siempre los mismos?

2. ¿En que consiste el principio aditivo de los sistemas de numeración?

3. ¿En que consiste el principio sustractivo del sistema de numeración romano?

4. ¿En que consiste el principio multiplicativo del sistema de numeración romano?

5. ¿Cuales son las ventajas del sistema de numeración romano sobre el egipcio?

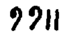
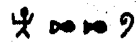
TAREA No. 3

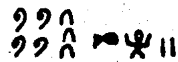
1. Escribe las siguientes cantidades en Egipcio:

   a) 42 b) 364 c) 509

   d) 1318 e) 27879 f) 69

2. Traduce del Egipcio a nuestro sistema actual:

   a)  b)  c) 

   d)  e)  f) 

3. Escribe las siguientes cantidades en Babilónico:

   a) 53 b) 115 c) 340

   d) 1045 e) 13623 f) 3600

4. Traduce del Babilónico a nuestro sistema actual:

   a)  b)  c) 

   d)  e)  f) 

5. Escribe las siguientes cantidades en Romano:

   a) 85 b) 153 c) 1573

   e) 1066 e) 1983 f) 988

6. Traduce del Romano al decimal actual.

   a) MIV b) CCLXIX c) MCMXIX

   d) MDCCLXXVI e) $\overline{M}$DCC f) CXXLIV

7. ¿En qué consiste el principio aditivo de los sistemas de numeración?

8. ¿En qué consiste el principio sustractivo del sistema de numeración Romano?

9. ¿En qué consiste el principio multiplicativo del sistema de numeración Romano?

ACTIVIDAD DOCENTE Nº 17 .

SISTEMAS DE NUMERACION PRIMITIVO, EGIPCIO, ROMANO Y BABILONICO

EJERCICIOS.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Reafirmará su conocimiento acerca del significado de cada uno de los principios sobre los que se sustentan cada uno de los sistemas de numeración.
2. Será capáz de dar ejemplos claros de representaciones de cantidades en los diversos sistemas de numeración de tal manera que ilustren la utilización de los respectivos principios sobre los que se sustentan.

Preguntas de control:

1. ¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración primitivo?
2. ¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración Egipcio?
3. ¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración babilónico?
4. ¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración Romano?

INDICACIONES GENERALES:

Es importante que leas con cuidado cada uno de los siguientes puntos y escribir posteriormente las respuestas adecuadas en los espacios dejados para tal fin. Es importante que intentes resolver los, las respuestas pueden ser muchas todo es cuestión de buscarlas apropiadas. Cualquier duda que surja, hay que aclararla para ello cuentas con tus apuntes, tus compañeros y el maestro. Sin embargo una vez aclarada tu duda continua intentando resolver las demás tú solo. Recuerda que del esfuerzo que dediques al estudio dependerá siempre tu propio aprovechamiento.

1. Escribe tres cantidades utilizando el Sistema de Numeración Romano donde únicamente se utilice el principio aditivo. Demuestre desarrollando su equivalente decimal que únicamente se utiliza dicho principio.

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

2. Escriba tres cantidades utilizando el sistema de numeración Romano donde únicamente se haga uso del principio sustractivo y demuestrelo.

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

3. Escriba tres cantidades en Romano donde se utilicen los principios aditivo y sustractivo.

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

4. Escribe tres cantidades en Romano donde sea necesario hacer uso de los tres principios (aditivo, sustrativo, multiplicativo). - Demuestre su uso desarrollando su equivalente decimal.

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

5. Escribe tres cantidades en Babilónico donde únicamente se utilice el principio aditivo.

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

6. Escribe tres cantidades en Babilónico donde se utilicen los - - principios aditivo y multiplicativo.

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

7. Escribe la siguiente cantidad 123 de tres formas diferentes pero utilizando el mismo sistema decimal: ______________________________

8. ¿Cual de los sistemas de numeración estudiados con anterioridad utiliza el principio aditivo? ______________________________

9. ¿Los sistemas de Numeración Romano y Babilónico utilizan el - - principio multiplicativo sin embargo no de la misma forma. ¿En- que se diferencia su uso? ______________________________

____

10. Completa la siguiente tabla y después contesta las preguntas - que se encuentran a continuación de la misma.

Símbolo Decimal	Símbolo Egipcio	Símbolo Romano	Símbolo Babilónico
127			
			
		MCMLXXIII	
			

a) ¿Al variar los sistemas de numeración utilizados estamos variando los números? ¿Qué estamos variando? ________________

____

b) ¿Unicamente variando el sistema de numeración utilizado es - como podemos representar un mismo número de diferentes maneras? ¿ De que otra manera podemos hacerlo? ¿ Cómo se te ocurre?.

____

____

____

____

ACTIVIDAD DOCENTE No. 18°

EL SISTEMA DE NUMERACION MAYA.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Conocerá que los pueblos de nuestro continente siguieron una -- vía de desarrollo distinto a la seguida en occidente y en especial Europa.
2. Conocerá los símbolos y principios utilizados por los Mayas en los sistemas de numeración.
3. Podrá representar cantidades con dicho sistema.

Preguntas de Control.

¿En que consiste el principio multiplicativo del sistema de numeración romano?.

¿En que consiste el principio aditivo del sistema de numeración-romano?

¿En que consiste el principio sustractivo del sistema de numeración romano?

Hasta hoy, hemos reducido nuestro estudio de los diversos sistemas de numeración, a los desarrollados en oriente y occidente.

Con toda seguridad, en los pueblos americanos precolombinos, cada una de las diversas culturas desarrollaron sus propios sistemas de numeración, desgraciadamente falta realizar un estudio mas sistemático para poder establecer con precisión las relaciones que puedan encontrarse entre ellos.

La conquista para nuestros pueblos no solo consistió en el sojuzgamiento, sobre todo en un rompimiento de su cultura y de su propia vía de desarrollo, distinta a la tomada por los pueblos del viejo continente.

Mucho antes de la conquista nuestros pueblos habían superado ya la comunidad primitiva y se encontraban en un estadio superior; en ella existían relaciones de dominación de un pueblo sobre otro, sin embargo no se presentaba la esclavitud como se conoció en occidente, en la sociedad maya, la esclavitud se presenta como una pena por delitos de robo, adulterio u homicidio y en ningún caso era hereditaria.

Cuando un pueblo era sojuzgado, asumía la obligación de pagar un tributo. Es sobre esta base material como se desarrolló la cultura maya lo que le permitió obtener un nivel de conocimientos avanzados como lo demuestran los restos encontrados en el sureste de México. Sin embargo debido a que el lenguaje utilizado por ellos no ha sido descifrado del todo y más aún por falta de otros testimonios, no se ha podido determinar las causas de su desaparición repentina.

El conocimiento en América, al igual que en oriente estaba reservado exclusivamente para los sacerdotes, de ahí que el conocimiento acumulado por éstos estuviera impregnado por un misticismo religioso; nuestros pueblos fueron célebres en el mundo entero por su precisión alcanzada en las mediciones astronómicas. Sin embargo este misticismo combinado con su apasionamiento a la astronomía -como veremos mas adelante- se manifestaron en su sistema de numeración en forma negativa ya que de otra forma habría sido tan avanzado como el sistema decimal actual, pues a diferencia de las grandes culturas orientales y occidentales, el pueblo Maya, fue capaz de asignar un símbolo a lo que hoy conocemos como cero.

La explicación exácta del porque la cultura Maya no siguió desarrolandose y que incluso de manera repentina desapareciera, no ha sido encontrada, debido entre otras cosas, a que la escritura utilizada por ellos no ha sido descifrada del todo y por la falta de otros testimonios que permitan en un momento dado proveer datos suficientes para ello.

En la cultura Maya la religión y el calendario estaban intimamente ligados de tal forma que cada uno de los períodos calendaricos tenían una deidad que la protegía.

Los Mayas concedian un valor mágico a ciertos numeros como el 4 y el 13 (4 eran las estaciones del año, 13 eran las divisiones del cielo y 13 dioses las regian).

Tomando como base sus conocimientos matemáticos desarrollaron sistemas de calendario cada vez más complejos. El primer calendario fué el Lunar, formado por 13 meses de 20 días cada uno, que hacían un total de 260 días. En épocas tardías se convirtió en un calendario adivinatorio llamado Tzolkin.

La vida cotidiana estaba regida por un calendario solar compuesto por 18 vinales o meses de 20 días que hacen un total de 360 días, más 5 días sin nombre daban un total de 365 días o año solar.

Como dijimos con anterioridad para el cómputo del tiempo los periodos van de 20 en 20, aunque en la tercera posición haya una modificación para acercarse al máximo al año solar.

Por lo tanto su cómputo era:

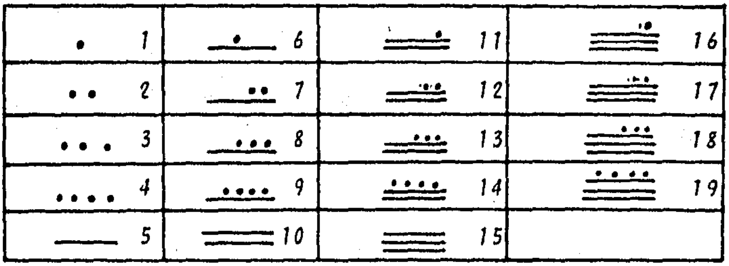
1 kin	= 1 día
20 bines	= 1 dival (20 días)
18 vinales	= 1 tun (360 días)
20 tunes	= 1 katun (7200 días)
20 katunes	= 1 baktun (144000 días)
20 baktunes	= 1 pictun (3880000 días)

A partir de su calendario, los Mayas elaboraron un sistema de numeración vigesimal (de base 20) que se basa en la división que damos arriba.

Los símbolos utilizados por los mayas en su sistema de numeración son los siguientes:

Símbolo Maya	Significado	Número representado	Símbolo Decimal.
•	punto	uno	1
——	barra	cinco	5
	ojo	cero	0

Para la representación de los primeros 19 números los mayas hacían uso exclusivamente del principio aditivo utilizando los símbolos anteriormete descritos como se muestra a continuación:



Además del principio aditivo el sistema de numeración Maya hacía uso de otro principio, el de posición. Es decir, en este sistema los símbolos se colocan verticalmente, haciendo que la posición más baja denote kines (unidades), la siguiente vinales (veintenas), la siguiente tunes, después katunes y así sucesivamente. De esta forma la posición que ocupaba un símbolo o grupo de símbolos no podía ser arbitraria ya que la posición influía en el valor representado. Así tenemos que para representar el veinte colocaban el símbolo del cero en la posición más baja y el símbolo del uno en la posición siguiente  lo cual significaba que se tenía una veintena y cero unidades.

Para representar números mayores que el veinte hacían uso de ambos principios tanto el aiditivo como el posicional. De ahí que podamos decir que el Sistema de Numeración Maya era un Sistema aditivo-posicional.

A continuación tenemos dos números representados en maya con su respectivo equivalente en nuestro sistema décimal actual, en donde se muestra la utilización de los dos principios:

Símbolo maya.		Símbolo Decimal
• • • —••	3 vinales = 3 x 20 = 60 + 7 kines = 7 x 1 = 7	67
• • • ══• ══	3 tunes = 3 x 360 1080 + 11 vinales = 11 x 20 = 200 + 10 kines = 10 x 1 = 10	1310

Si alguna de las posiciones carecía de unidades se colocaba en-ella un símbolo especial el (cero).A continuación tenemos algunos números representados en Maya con su respectivo equivalente decimal actual en donde se ilustra la utilización del cero.

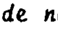
Símbolo Maya		Símbolo Decimal
	1 vinal = 1 x 20 = 20 + 0 kines = 0 x 1 = 1	20
	5 tunes = 5 x 360 = 1800 + 0 vinales = 0 x 20 = 0 + 19 kines = 19 x 1 = 19	1819
	2 Katunes = 2 x 7200 = 14400 + 0 tunes = 0 x 360 = 0 + 6 vinales = 6 x 20 = 120 + 16 kines = 16 x 1 = 16	14536

A continuación vamos a enlistar las principales características del Sistema de Numeración Maya:

1. Utiliza tres símbolos básicos, el punto (.) para representar el uno, una barra (——) para representar el cinco y un un ojo () para representar el cero.

2. Hace uso del principio aditivo. Es decir el valor del número representado por un conjunto de símbolos se obtiene sumándolos valores parciales que representan cada símbolo o grupo de símbolos.
3. La forma de escribir los símbolos es vertical, y cada posición representa distintas unidades empezando de abajo, con las más simples, hacia arriba.
4. Utiliza el principio posicional, esto es si los símbolos tienen una posición, representan unidades de un orden determinado (kines, vinales, tunes, etc) y si dicha posición cambia, también cambia la magnitud de las unidades representadas. A continuación damos un ejemplo de ello:

—— 5 vinales = 5 x 20 = 100	•— 6 vinales = 6 x 20 = 120
•— 6 kines = 6 x 1 = 6	—— 5 kines = 5 x 1 = 5
106	125

5. Debido a que utilizan un número base para determinar cuando hay que cambiar de orden en las unidades y que dicho número es el veinte es que se dice que este sistema es vigésimal.
6. Para indicar la ausencia de unidades de una determinada posición utiliza el símbolo () cero.

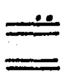
Obviamente este sistema de numeración presentaba bastante desventajas dentro de las cuales cabe mencionar:

1. Como hemos dicho con anterioridad el valor de las unidades de una posición es veinte y veces el valor de las unidades de la posición inferior sin embargo en la tercera posición esto no ocurre ya que en lugar de representar veinte unida--

des de la posición inferior representa 18 por lo cual se pierde el orden llevado. Así tenemos que no resulta vigésimal para todas las posiciones.

2. Al igual que la mayoría de los sistemas de numeración anti-- guos en este sistema era difícil tanto representar como in - terpretar representaciones de grandes cantidades.

EJERCICIOS:

1. Traduce al Maya:
   a) 525
   b) 78
   c) 1983
2. Traduce al decimal:
   a) 
   b) 
   c) 

PREGUNTAS DE COMPROBACION:

1. ¿Podemos considerar a la sociedad Maya como una sociedad es-- clavista? ¿porqué ?
2. ¿Cuales son los símbolos utilizados en el sistema de numera-- -ción Maya?
3. ¿Cuales son los principios sobre los que sustenta el sistema- de numeración Maya?
4. Los Mayas fueron introductores de un símbolo especial para --

un número no menos especial, ¿Cuál es el símbolo y el número al que nos estamos refiriendo?

5. ¿Por que razón los Mayas, a las unidades de la tercera posición (tunes) le dieron el valor de 18 unidades de la segunda posición (1 tun = 18 vinales) en lugar de veinte, si el --- te er a el número que tomaban como base para decidir el cambio de unidades?
6. ¿En que se parece el sistema de numeración Maya con el Babilónico?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 19°

EL ABACO Y EL SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Conocerá los origenes del sistema de numeración decimal.
2. Podrá definir claramente la relación entre el ábaco y el sistema de numeración decimal.
3. Conocerá la forma de representar números en el ábaco.

Preguntas de Control:

1. ¿Cuáles son los principios sobre los que se basa el sistema de numeración Maya?
2. ¿Porqué decimos que el sistema de numeración Maya es vigésimal?
3. ¿Cuales son las principales desventajas de sistema de numeración Maya?.

INTRODUCCION

El sistema de numeración que actualmente utilizamos y que conocemos con el nombre de decimal, recibe también el nombre de indo-arábigo o simplemente arábigo Esto último se debe a que los símbolos que actualmente utilizamos (y el sistema en sí) tienen sus raíces en la India pero fueron los árabes quienes lo introdujeron a Europa durante la conquista de los moros a España (del siglo VIII al siglo XV). Se considera que ésta introducción se realizó a través de un libro escrito en el año 830 por el astrónomo Mohamed Ibn Musa, mejor conocido por Al-Khowarismi titulado Al-jabr Wal muqabala. Esta-obra fué de gran aceptación entre los estudiosos de la época, ya que presentaba un novedoso sistema de numeración (el decimal), junto con los rudimentos de lo que hoy conocemos por Algebra, palabra que tiene su origen en el título de la citada obra.

Si bien es cierto que el sistema de numeración tuvo aceptación entre los estudiosos, no ocurrió lo mismo en el ámbito popular y comercial donde había grandes dificultades para su aceptación, inclusive a finales del siglo XIII los banqueros de Florencia prohibieron el uso del mismo pues afirmaban que no era prudente usarlos, ya que se podían alterar facilmente los símbolos, de tal manera que un cero (0) podía convertirse fácilmente en un seis (6) o bien en un nueve (9). Por lo que, las cifras romanas merecían más confianza.

Es debido a todo esto que aún en el siglo XVII se utilizaba el sistema de numeración romano, esto quiere decir que tuvieron que pasar aproximadamente mil años para que la humanidad adoptara un sistema de numeración que le ahorra tiempo y esfuerzo en su manipulación. Una anécdota refiere que en 1790 el Banco de Londres, registraba sus cuentas mediante muescas hechas en palos, estos se trabajaban transversalmente y se cortaban a lo largo de su eje; una de las partes se daba al depositante y la otra se guardaba en el banco. En ese año se tomó la determinación de adoptar formas modernas de contabilidad, resolviendo quemar los palos muescados, Desafortunadamente, no se pudo controlar el fuego¡y se quemó el Banco!

Estos son algunos hechos que muestran las dificultades que se salvaron en la aceptación del sistema de numeración decimal o indo arábigo. Sin embargo los origenes del mismo debemos buscarlos en las limitaciones que presentaban los sistemas de numeración que lo antecedieron (por ejemplo los vistos en clases anteriores) y las formas prácticas en que superaban estas deficiencias. Además hay que considerar que los sistemas de numeración posteriores al sistema de numeración primitivo, se desarrollaron en sociedades que alcanzaron un avance económico relativamente grande, lo que forzomente conlleva la necesidad de operar con diversas cantidades. Es decir existía la necesidad de sumar, restar, etc.

Como hemos resaltado en todos los sistemas de numeración vistos, una de las limitaciones comunes a todos ellos, es que, no se prestan para desarrollar procedimientos mecánicos (algoritmos) para realizar sumas, restas, etc. ¿Cómo superaron esta limitación los pueblos antiguos?. Los más antiguos empezaron a resolver este problema elaborando tablas. Así los babilónicos nos dejaron gran cantidad de ellas, las cuales eran de barro cocido lo que permitió vencer el paso del tiempo, y actualmente se tienen algunas de ellas en diferentes partes del mundo.

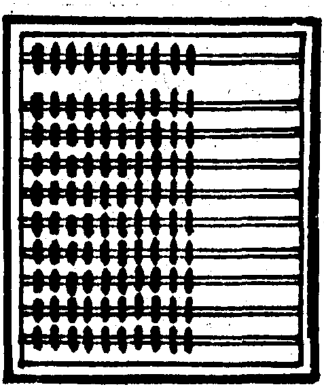
Con la utilización de tablas los antiguos resolvían un buen número de problemas particulares, pero no resolvían el problema de fondo es decir no podía resolver cualquier suma resta, multiplicación o división que se les presentaba. Esto es no existía reglas generales para realizar operaciones sino que cada problema era resuelto de una forma muy particular. Posiblemente el siguiente paso en la resolución de estos problemas fué la invención de un intrumento denominado...

EL ABACO

La invención del ábaco fué posiblemente lo que permitió superar las limitaciones más graves de los sistemas de numeración anteriores al decimal, mismas que han sido mencionadas con anterioridad.

Este instrumento (el ábaco) tuvo un gran desarrollo en la antigüedad y aunque no todos han sido iguales y siempre han existido ligeras variaciones entre sí todos han utilizado los mismos principios.

Analizaremos aquí el más elemental de ellos, el que consta de un marco con diez barrotes y en cada uno de los cuales hay diez cuentas. En la siguiente figura mostramos como pudo haber sido, en la parte derecha se encuentra el valor asignado a cada una de las cuentas del barrote respectivo.



1000 000000 (unidades de millar de millón)
100 000 000 (centenas de millón)
10 000 000 (decenas de millón)
1 000 000 (unidades de millón)
100 000 (centenas de millar)
10 000 (decenas de millar)
1 000 (unidades de millar)
100 (centenas)
10 (decenas)
1 (unidades)

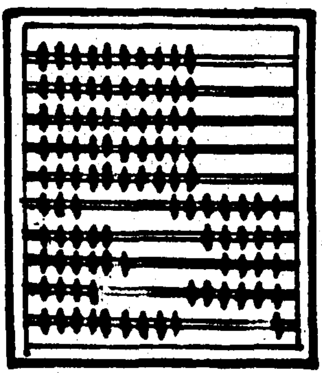
De la figura anterior podemos observar que 10 cuentas de un barrote cualquiera equivalen a una sola cuenta del barrote inmediato superior. Es decir 10 unidades de un orden cualquiera equivalen a 1 unidad de orden inmediato superior.

Con el uso de tantos símbolos en la representación de números (una letra para cada cuenta de cada barrote) se tenían serios problemas de interpretación ya que era necesario memorizar el valor asignado a cada letra. Además el uso de letras por números, dió origen a muchos problemas de tipo religioso ya que a cada palabra le correspondía un número y viceversa, y como eran tan místicos y supersticiosos resultaba que existían representaciones de números que evocaban alguna superstición o sacrilegio para la población. Por ejemplo el número quince se representaba con dos letras con las cuales empezaba el nombre de dios (en hebreo por supuesto), por lo que para evitar "semejante sacrilegio" se le tuvo que asignar otros símbolos a la representación de dicho número.

Donde los hindúes superaron el sistema de numeración griego y hebreo, fué en el uso de los mismos nueve símbolos, para las primeras nueve cuentas de cada barrote o alambre del ábaco. Estos nueve símbolos obviamente han sufrido diversas modificaciones con el tiempo y actualmente se nos presentan como: 1,2,3,4,5,6,7,8 y 9.

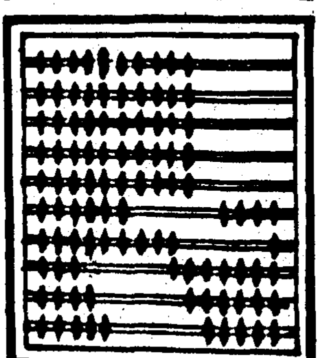
¿Cómo lograron los hindúes utilizar los mismos nueve símbolos para las primeras nueve cuentas de todos los barrotes?. Para resolver este problema lo que hicieron los hindúes fué hacer coincidir la --

representación de un número en el ábaco con su representación simbólica, haciendo corresponder a cada barrote una posición en la serie de símbolos esto es: el primer símbolo de derecha a izquierda de la representación simbólica correspondía a las cuentas del primer barrote (unidades), la segunda posición correspondía el segundo barrote y así sucesivamente, las siguientes figuras nos muestran la representación de un número utilizando un ábaco y su correspondiente representación simbólica. Obsérvese como los mismos símbolos son utilizados para representar cantidades diferentes, es decir, como cada símbolo adquiere un valor diferente de acuerdo con la posición que ocupa:



7 decenas de millar = 7x10000 = 70000
\+
5 unidades de millar = 5x1000 = 5000
\+
4 centenas = 4x100 = 400
\+
6 decenas = 6x10 = 60
\+
1 unidad = 1x1 = 1

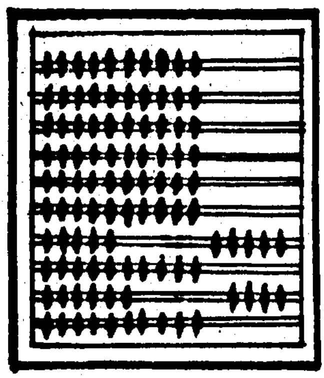
75461



4 decenas de millar = 4x10000 = 40000
\+
1 unidad de millar = 1x1000 = 1000
\+
7 centenas = 7x100 = 700
\+
6 decenas = 6x10 = 60
\+
5 unidades = 5x1 = 5

41765

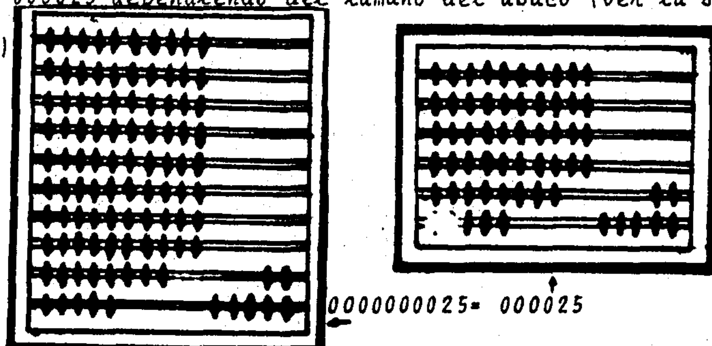
Es poco probable que los ingeniosos griegos no hubiesen pensado en utilizar este método, ya que resulta aparentemente lógico hacer lo que los hindúes realizaron. Lo que muy probablemente debe haberlos detenido era el dilema que se presentaba cuando algún barrote-quedaba intacto, es decir, cuando las cuentas de algún barrote no eran movidas. Por ejemplo: ¿cómo representar simbólicamente el ábaco de la siguiente figura?



La gran inovación hindú fué la invención de un símbolo especial-para indicar que un barrote del ábaco permanecía intacto a este símbolo lo llamaron: "sunya", que significa vacío con lo cual daban a entender que el espacio derecho del barrote estaba vacío, es decir-no había ninguna cuenta ahí. Esta palabra traducida al arabe fué -- "cifer", misma que ha llegado hasta nosotros como "cifra", o en forma más corrompida aomo "cero". El símbolo que utilizaron es el mismo que hoy en día utilizamos, un círculo "0".

Gracias a esta aportación pudieron escribir números tales como-cuatrocientos treinta (430), el cuatro mil treinta (4030), el cuarenta y tres (43) sin que se presentara confusión alguna.

Por otro lado cabe señalar que cualquier cantidad podría representarse simbólicamente con tantos ceros a la izquierda como barrotes del ábaco hayan quedado sin utilizarse en la representación -- del mismo. Por ejemplo el 25 podría escribirse como 0000000025 ó - como 000025 dependiendo del tamaño del ábaco (ver la siguiente figura)



0000000025= 000025

Obviamente esto nunca se hace ya que siempre suponemos que los-- barrotes situados arriba del barrote al que le corresponde el último símbolo (de derecha a izquierda) de la escritura de un número, - permanecen intactos. De ahí viene el dicho tan conocido de que: "el cero a la izquierda no vale".

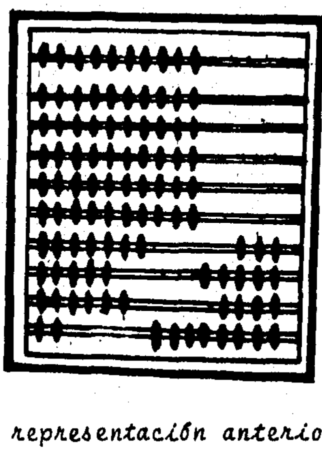
Fué el cero el que hizo tan practicos nuestros llamados "números arábigos" y revolucionaronel uso de los sistemas de numeración.

Realmente es extraño que el descubrimiento de "nada" haya sido - tan mundialmente importante y todavía cualquiera puede descomponerse en 10 cuentas del barrote inmediato inferior .O sea:

1 unidad de millar de millón	=	10 centenas de millón
1 centena de millón	=	10 decenas de millón
1 decena de millón	=	10 unidades de millón

1 unidad de millón	= 10 centenas de millar
1 decena de millar	= 10 unidades de millar
1 centena de millar	= 10 decenas de millar
1 unidad de millar	= 10 centenas
1 centena	= 10 decenas·
1 decena	= 10 unidades

Para representar un número en el ábaco lo único que hacían era recorrer hacia la derecha de cada barrote tantas cuentas como fuese necesario teniendo mucho cuidado al seleccionar el barrote adecuado. El valor del número representado se obtenía sumando los valores individuales de cada cuenta que intervenía en la representación. La siguiente figura muestra un ábaco en el cual se encuentra representado el número "tres mil quinientos cuarenta y ocho" :



3 unidades de millar	=3x1000	=3000 +
5 centenas	=5x100	= 500
4 decenas	=4x10	=+ 40
8 unidades	=8x1	=+ 8
		3548

De la representación anterior, podemos observar que el uso del ábaco tiene las siguientes características:

1. Cada cuenta de un mismo barrote tiene un mismo valor.
2. El valor de cada cuenta depende de la posición que ocupa el ba-

rrote en que se encuentra.

3. El valor del número representado se obtiene al sumar los valo-res individuales de cada cuenta que interviene en su representa-ción.

El uso del ábaco, como mencionamos con anterioridad era muy ex-tendio en la antiguedad, lo utilizaban griegos, hebreos, sirios, -etc., y con él realizaban las operaciones básicas de la aritmética (la forma en que realizaban esto no la vamos a estudiar debido a -que se sale de los objetivos del curso).

Como podemos observar con el uso del ábaco era sencillo repre-sentar cantidades y manipularlas, sin embargo el problema que se -presentaba tanto a griegos como hebreos, sirios, etc., fué: repre-sentarlos mediante símbolos escritos. Los griegos y los hebreos -- usaron nueve símbolos diferentes para cada uno de los números del-uno al nueve (esto es, un símbolo para cada una de las primeras -- nueve cuentas del primer barrote), tanto unos como otros utilizaron las primeras 9 letras de sus respectivos alfabetos. Pero también -ambos pueblos continuaron con las siguientes 9 letras para repre-sentar los números 10,20,30,...90 el 100 obviamente lo representa-ban con la letra siguiente pero ya correspondía a la primera cuen-ta del tercer barrote. Este procedimiento lo continuaron para las-demás cuentas por lo cual resultaban insuficientes las letras de -sus respectivós alfabetos viendose en la necesidad de agregar le -- tras de otros alfabetos, más extraño que tantos matemáticos nota--

bles nunca hayan visto ese "nada" (bueno los mayas también lo vieron).

Es tal la importancia del cero que, en la actualidad, una palabra para el manejo de números es "cifrando", y cuando desarrollamos un problema (aunque no comprenda números) estamos descifrando.

El hecho de que cualquier escrito secreto, generalmente llamado "criptograma", pueda ser llamado también "mensaje cifrado" o "cifra" nos recuerda el respeto que la gente tenía por los números especialmente por aquéllos qué no entendían su forma de trabajo.

Preguntas de comprobación:

1. ¿ Cuales son las características que presenta el uso del ábaco en la representación de números?
2. ¿Qué símbolos utilizaron los griegos y los hebreos en la representación simbólica de números que a su vez eran representados en el ábaco?
3. ¿Cuál fué la inovación hindú en el uso de símbolos para la representación de números?
4. ¿Qué sistemas de numeración anteriores al décimal tienen un símbolo para el cero?.
5. ¿Que relación existe entre el ábaco y el sistema de numeración décimal?
6. ¿Es correcto escribir: 00000053 = 53?, ¿ Porqué?.

ACTIVIDAD DOCENTE No. 20°

CARACTERISTICAS DEL SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el alumno:

1. Sabrá cuales son los símbolos y principios sobre los que se basa el sistema de numeración décimal o indo-arábigo.
2. Diferenciará entre el valor relativo y el valor absoluto de una cifra.
3. Será capaz de representar cualquier cantidad en notación desarrollada.

Preguntas de Control:

1. ¿Cuál fué la aportación principal de los indúes en los sistemas de numeración? .
2. ¿Cuales son las características principales que presenta el uso del ábaco en la representación de cantidades?.
3. ¿Es lógico pensar que el uso del ábaco es lo que originó nuestro sistema de numeración?. ¿Porqué?.

SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL O INDO ARABIGO

Como vimos en la clase pasada, en la antiguedad eran muy extendido el uso del ábaco, tanto en la representación de cantidades, - como en la realización de operaciones, posiblemente fue el uso generalizado del mismo lo que dió origen a nuestro sistema de numeración decimal, podemos suponer esto de la similitud mostrada entre el ábaco y nuestro sistema.

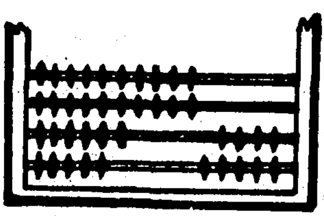
Los símbolos que actualmente utilizamos en nuestro sistema de numeración son (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) y como dijimos con anterioridad tienen su origen en los empleados por los hindúes. En la página 56 mostramos una tabla en la cual se observan algunas de las formas que han adoptado en distintas épocas. Esa es una muestra de como se ha venido enriqueciendo a través del tiempo al simplificar su escritura.

Sin embargo aunque la forma de los símbolos a variado, no ha sucedido lo mismo con sus reglas o principios para manipularlos, es decir, estos no han variado con el transcurso del tiempo.

A continuación puntualizaremos las características esenciales de nuestro sistema decimal.

1. Para representar cualquier número, únicamente se emplean los símbolos (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) .
2. Cada uno de los símbolos, adquiere un valor diferente de acuerdo a la posición que ocupa (esta característica recibe el nombre de principio posicional).

Este valor de acuerdo a su posición se determina igual que en ábaco, por ejemplo: la expresión 45 que representamos en el ábaco en la siguiente forma



4 cuentas --2o. cuerda

5 cuentas --1er. cuerda.

De donde el 5 representa cinco unidades y el 4, cuatro decenas. Mientras que 54 nos indica 4 unidades (4 cuentas en la primer - cuerda) y 5 decenas (5 en la segunda cuerda).

Este principio que acabamos de describir origina que cada símbolo adquiera dos valores que reciben el nombre de:

a) Valor absoluto de una cifra. Es el valor que representa cada símbolo de manera aislada y que corresponden exclusivamente a las-primeras nueve unidades y al cero por ejemplo: 6 = seis unidades, 4 = cuatro unidades, 0 = cero unidades, etc. En términos del ábaco,- indica el número de cuentas que se mueven en una cuerda (sin considerar la cuerda que se trate).

b) Valor relativo de una cifra, es el valor que adquiere un símbolo de acuerdo a la posición ocupada en la expresión, por ejemplo: en la expresión 63 el símbolo 6 representa el valor "sesenta", 6 decenas, 6 cuentas en la segunda cuerda de un ábaco, sin embargo su-valor absoluto es de 6 unidades. En esa misma expresión el símbolo-3 tiene como valor absoluto y relativo el de 3 unidades, de donde - el valor relativo de una cifra está determinado por la posición que ocupa dentro de la expresión, también podemos observar que el valor relativo de una cifra aparece unicamente al representar cantidades-mayores de nueve (9).

3. La tercer regla en la expresión de cantidades en este sistema de numeración recibe el nombre de PRINCIPIO ADITIVO, que consiste en - sumar los valores relativos de cada uno de los símbolos por lo que-se compone una expresión por ejemplo:

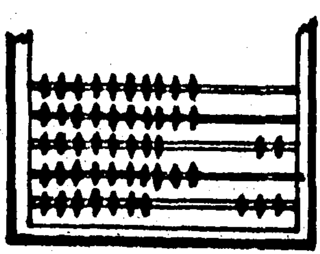
231 = 2 centenas + 3 decenas + 1 unidad .

4. El orden básico para la asignación de los valores relativos a cada símbolo de una expresión numérica, es de izquierda a derecha, iniciando con unidades, decenas, centenas, repitiendose este ciclo con unidades, decenas, centenas del orden inmediato superior en este caso de millar. La siguiente tabla nos indica los valores relativos de los símbolos en las primeras 18 posiciones:

PERIODOS:	BILLONES						MILLONES						UNIDADES					
CLASES:	Millares de BILLON			Unidades de BILLON			Millares de MILLON			Unidades de MILLON			Millares			Unidades simples		
ORDENES:	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3ro.	2º	1º
	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES

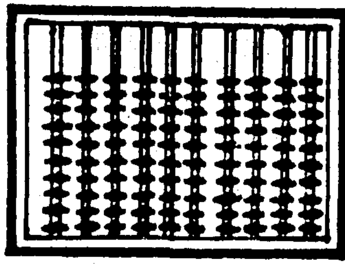
5. Otra característica importante es que las expresiones numéricas, se escriban como una sucesión de símbolos horizontales y no verticales como en el sistema maya y como podría inferirse del tipo de ábaco que hemos estudiado por ejemplo:

el 203 en el ábaco estudiado es:



2 centenas
0 decenas
3 unidades

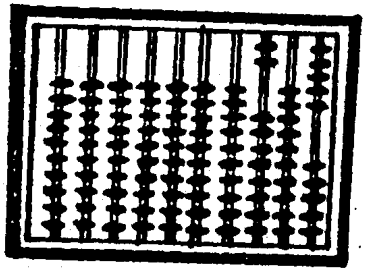
Esto es, la expresión numérica debería expresarse en forma vertical, hay que recordar que el valor de las cuentas, de cada una de las cuerdas del ábaco, empezando de abajo hacia arriba coincide -- con la tabla de valores expresada con anterioridad. La única explicación que podemos dar, es que el ábajo se utilizará como se muestra en la siguiente figura:



De esta forma, como puede apreciarse el valor de las cuentas -- de cada una de las cuerdas indicadas en la figura anterior, coincide con los valores relativos de la tabla de la página anterior.

6. Finalmente y por su importancia, cabe resáltar que en este sistema de numeración se utiliza un símbolo especial (el cero) para indicar la ausencia de unidades de un orden determinado, - por ejemplo:

El 205 indica la ausencia de decenas. Expresado en nuestro ábaco sería:



El 3052 indica la ausencia de centenas. Expresado en forma de--sarrollada sería:

3052 = 3 unidades de millar + 0 centenas + 5 decenas + 2 unidades.

= 3 x 1000 + 0 x 100 + 5 x 10 + 2 x 1

= 3000 + 0 + 50 + 2

= 3052

Teniendo claro lo dicho con anterioridad acerca de nuestro sis tema de numeración podemos comprender que una expresión como 435- representa el número: "cuadtroscientos treinta y cinco" debido a- que:

435 = 4 centenas + 3 decenas + 5 unidades

Este última forma de expresar una cantidad se le denomina con- el nombre de NOTACION DESARROLLADA.

A continuación presentamos 3 ejemplos de expresiones numéricas con su equivalencia en notación desarrollada.

a) 357 = 3 centenas + 5 decenas + 7 unidades

= 3 x 100 + 5 x 10 + 7 x 1

= 357

b) 567 = 5 centenas + 6 decenas + 7 unidades

5 x 100 + 6 x 10 + 7 x 1

= 500 + 60 + 7

+ 567

c) 3421 = 3 unidades de millar + 4 centenas + 2 decenas + 1 unidad

= 3 x 1000 + 4 x 100 + 2 x 10 + 1

= 3000 + 400 + 20 + 1

= 3421

Finalmente, cabe resaltar que en el sistema de numeración decimal, 10 unidades de un orden cualquiera forma una unidad de orden superior, y viceversa 1 unidad de un orden cualquiera se puede descomponer en 10 unidades de orden inferior. Es decir, el número diez, es el número base que se utiliza para decidir cuando se pasa de un orden al inmediato superior, a ello obedece el nombre de decimal.

Preguntas de comprobación:

1. ¿Sobre que principios se basa el uso del ábaco en la representación de números?
2. ¿Que símbolos utilizaron los griegos y los hebreos en la simbolización de cantidades representadas en el ábaco?
3. ¿Cuál fue la inovación indú en el uso de símbolos para las cantidades representadas en el ábaco?
4. ¿Es correcto escribir 000053 = 00000053? ¿Porqué?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 21

EVALUACION DE SISTEMAS DE NUMERACION

Criterios:

La evaluación constará de las siguientes partes:

1. Entrega puntual de tareas 25%
2. Entrega bien contestada del cuestionario-guía de examen 25%
3. Examen, que constará de diez preguntas del cuestionario anterior 50%

Lo anterior será válido siempre y cuando la calificación obtenida en el examen sea aprobatoria.

Cuestionario-guía de examen:

1. ¿Son los sistemas de numeración, lenguajes simbólicos? ¿por que?
2. ¿En que consiste el principio aditivo de un sistema de numeración?
3. ¿En que consiste el principio posicional de un sistema de numeración?
4. ¿En que consiste el principio sustractivo de un sistema de numeración?
5. ¿En que consiste el principio multiplicativo de un sistema de numeración?
6. ¿Sobre que principios se basa el sistema de numeración primitivos? (de un ejemplo)

   Sobre que principios se basan los siguientes sistemas de numeración? da un ejemplo de cada uno de ellos.

7. Egipcio
8. Babilónico.
9. Romano
10. Maya
11. Decimal
12. ¿A que se llama valor absoluto de una cifra?
13. ¿A que se llama valor relativo de una cifra?
14. Defina el concepto de notación desarrollada
15. ¿Por que llamamos a nuestro sistema de numeración decimal?
16. ¿Cómo podríamos llamar al sistema de numeración maya, de acuerdo al valor base utilizado en los agrupamientos?
17. ¿Por que decimos que el sistema de numeración egipcio es decimal?
18. ¿Por qué llamamos a nuestro sistema de numeración indo-arábigo?
19. El uso de un símbolo especial para el cero, ¿es exclusivamente de invención hindú?
20. ¿Por que decimos que en la antigüedad se le daba al estudio de los números un sentido místico?
21. El uso del ábaco en la antigüedad tuvo su origen debido principalmente a:
22. Los sistemas de numeración son lenguajes simbólicos y como tales se han enriquecido y formalizado con el tiempo...¿Como se manifestó esto en nuestro sistema de numeración?
23. ¿Que hecho característico introdujeron los mayas a su sistema de numeración produciendo que el mismo fuera en gran medida --

inoperante? ¿por que realizaron esto?

24. Un sistema de numeración es mas o menos operativo debido a los símbolos o los principios sobre los que se sustenta. ¿Cual es tu opinión? Justifica tu respuesta.

25. De los sistemas de numeración estudiados en clase te parece -- mas operativo? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD DOCENTE No. 1
RELACIONES.

Objetivos:

El estudiante al finalizar la clase debe:

1. Conocer el concepto de relación.
2. Identificar la regla de correspondencia de una relación.
3. Construir el diagrama de una relación.

Introducción.

Los distintos objetos y fenómenos que observamos en la naturaleza y la sociedad, están intimamente relacionados unos con otros. El ser humano conoce desde hace tiempo, relaciones sencillas que guardan entre sí, elementos de los distintos fenómenos, por ejemplo: En la caída libre de los cuerpos existe una relación entre velocidad del cuerpo y el tiempo que lleva cayendo, en la medición del área de un rectángulo existe una relación entre la medida de sus lados y la medida de su área, en el ingreso de una fábrica éste se encuentra relacionado con su producción, así la ganancia en una fábrica es una relación entre el ingreso y el egreso.

Todas estas relaciones y muchas más, se pueden expresar en el lenguaje científico y universal de las matemáticas.

Antes de ver la definición matemática de relación entre dos conjuntos reflexionemos sobre el concepto de relación. Cuando hablamos de relación damos por hecho la existencia de dos conjuntos cuyos elementos vamos a relacionar (estos conjuntos pueden ser iguales o diferentes) por ejemplo:

Sea el grupo 1° "C" y formemos los conjutos:

A = {Rosa, Judith, Rogelia, Rebeca, Edith}

B = {Martha, Rufina, Miriam, Norma, Silvia}

Si queremos relacionar a los elementos de A con los elementos - de B ¿Cómo los relacionamos?

Existen distintas formas de hacerlo, solo basta establecer alguna condición que deban cumplir los elementos que vayamos a relacionar, dicha condición recibe el nombre de <u>regla de correspondencia</u>. Demos entonces la siguiente regla de correspondencia:

"Tener mejor promedio en matemáticas"

Para saber que estudiante está relacionado con quien, hay que - investigar cuales son sus promedios, de donde obtenemos las siguientes listas:

Promedios del conjunto A

Rosa 5

Judit 8

Rogelia 5

Rebeca 10

Edit 7

Promedios del conjunto B

Martha 7

Rufijan 10

Miriam 5

Norma 8

Silvia 6

Ahora tomemos un elemento del primer conjunto, por ejemplo Judith y busquemos con que elementos del segundo conjunto podemos relacionarla. Como la regla de correspondencia es "Tener mayor promedio en matemáticas" estará relacionada con Martha, Miriam y Silvia. Esto lo podemos ilustrar mediante el siguiente diagrama.

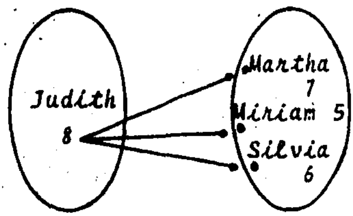


Fig. 1. Diagrama que representa con que elementos del 2° conjunto se encuentra relacionada Judith.

¿Judith está relacionada con Rufina?

No, ya que Judith no tiene mejor promedio que Rufina.

¿Con que otros elementos está relacionada Judith?

Tomemos otro elemento del primer conjunto, por ejemplo: Rosa, y busquemos con cuales elementos del segundo conjunto está relacionada. Es fácil verificar que Rosa no cumple con la regla de correspondencia de "tener mayor promedio que" algún elemento de B, por lo tanto podemos afirmar que Rosa no está relacionada.

Siguiendo este procedimiento con cada uno de los elementos de A obtenemos la relación, que podemos representar mediante el siguiente modelo, al que llamamos <u>diagrama de la relación</u>:

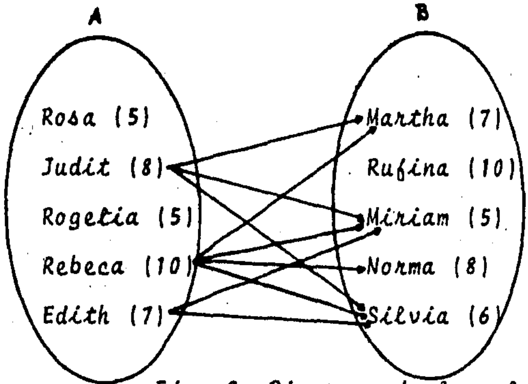


Fig. 2. Diagrama de la relación de A a B.

De éste ejemplo podemos llegar a la siguiente conclusión:

Una relación esta formada por dos conjuntos y una regla de correspondencia:

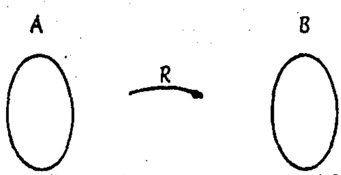


Fig. 3. Representación esquemática de una relación.

Generalmente si cualquiera de esos elementos cambia, la relación cambia, incluso si cambiamos el orden de los conjuntos.

Para apreciar esto mejor, veamos como sería nuestra relación si cambiamos el orden de los conjuntos. Ahora nuestro primer conjunto será B y el segundo conjunto será A, nuestra regla de correspondencia seguirá siendo "tener mayor promedio en matemáticas".

Siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo anterior, el cual consiste en ir tomando de uno en uno los elementos del primer conjunto e ir verificando con cuales elementos del segundo conjunto se encuentran respectivamente relacionados, obtendremos el si-- guiente diagrama:

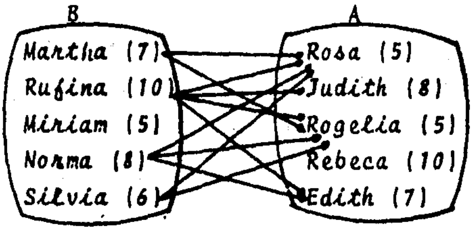


Fig.4 Diagrama de la relación de - B a A.

Si comparamos los diagramas de las figuras 2 y 4 podemos observar a simple vista que las dos relaciones son distintas. Es decir,- la relación de A a B (R: A⟶B) es diferente de B a A (R:B⟶A).

Ejercicio 1:

Sean los conjuntos D y C definidos de la siguiente manera:

D = {buho, ballena, pingüino, rana, delfín, avestruz, iguana, - boa, carpa}

y C = {mamíferos, reptiles, aves, peces, batracios}

Construyamos la relación R: D⟶C con la siguiente regla de co- - rrespondencia: "pertenecer a la clase de" por ejemplo: la aves- - truz pertenece a la clase de las aves, por lo que podemos afirmar- que la avestruz está relacionada con las aves.

1. Completa correctamente las siguientes oraciones:

   a) El buho está relacionado con ______________________

   b) La ballena está relacionada con ______________________

   c) ______________________ está relacionado con los peces.

2. Ahora utilizando formalmente "pertenecer a la clase de" completa las siguientes oraciones:

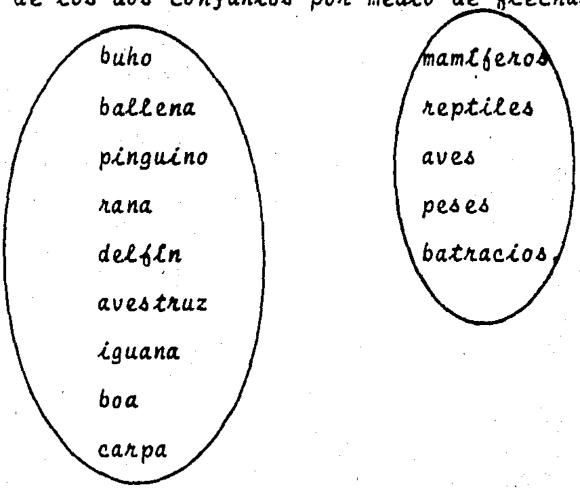
   a) ____________ "pertenece a la clase de" aves

   b) ____________ "pertenece a la clase de" mamíferos

   c) rana "pertenece a la clase de" ____________

Ejercicio 2.

Completa el siguiente diagrama de la relación, uniendo los elementos de los dos conjuntos por medio de flechas.



ACTIVIDAD DOCENTE No. 2
RELACIONES

Objetivos:

El estudiante al finalizar la clase debe:

1. Identificar el dominio, codominio y regla de correspondencia de una relación
2. Definir pareja ordenada.

Preguntas de control.

1. ¿Que se requiere para establecer una relación?
2. ¿Que es la regla de correspondencia?
3. En los ejemplos de la clase anterior ¿las relaciones R: A→B y R: B→A son iguales?

En la clase anterior, empezamos a introducir el concepto de relación, vimos un ejemplo que nos permitió ver que las relaciones tienen un cierto sentido o dirección, esto es, que relacionamos los elementos del primer conjunto con los del segundo conjunto, si cambiamos el orden de los conjuntos y dejamos la misma regla de correspondencia muchas veces la relación que obtenemos no es igual, esto depende de los conjuntos que se relacionen y la regla de correspondencia que utilicemos, más adelante tendremos oportunidad de ver ejemplos en que las relaciones sean iguales y otros donde ni siquiera tenga sentido invertir el orden de los conjuntos.

Por el momento, lo que nos debe quedar claro es que es importante diferenciar los conjuntos que intervienen en una relación, para ello les daremos un nombre a cada uno de ellos:

DEFINICION 1.

Dominio. Llamamos así al primer conjunto de una relación.

por ejemplo: si tenemos dos conjuntos P y Q y la relación R: -- $P \longrightarrow Q$; P es el dominio.

si la relación es $R : Q \longrightarrow P$; Q es el dominio

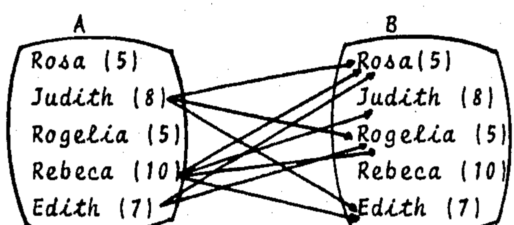
DEFINICION 2.

Codominio. Llamamos así al segundo conjunto de una relación.

Por ejemplo: Si tenemos dos conjuntos L y S y la relación $R : L \longrightarrow S$; S es el codominio.

si la relación es $R: S \longrightarrow L$; L es el codominio.

En la clase anterior, utilizamos para representar una relación - un modelo simbólico, al que llamamos diagrama de la relación como - el que se muestra a continuación.



Este tipo de modelos, nos ayuda a tener una idea mas clara acerca de la relación, identificamos facilmente el dominio y el codominio, vemos que elementos están relacionados, sin embargo cuando los conjuntos que relacionamos tienen muchos elementos los diagramas -- resultan poco prácticos, si en el ejemplo en vez de tomar los con--

juntos con pocos elementos, hubieramos elegido al 1° A como dominio y al 1° B como codominio, cada conjunto tendría entre 60 y 70 elementos y nuestro diagrama sería una verdadera telaraña con lo que podríamos fácilmente confundir y equivocarnos.

En busca de una mayor precisión, se utilizan las parejas ordenadas que definimos de la siguiente manera:

DEFINICION 3.

Pareja Ordenada. Es un par de elementos (x,y), tales que, el primer elemento de la pareja (x) pertenece al primer conjunto (dominio) y el segundo elemento de la pareja (y) pertenece al segundo conjunto (codominio).

Así, de acuerdo al diagrama anterior tenemos que (Rosa, Martha), (Judith, Miriam), (Rogelia, Rufina) y (Edith, Silvia) son parejas ordenadas porque cumplen con la definición 3; es decir el primer elemento de esas parejas: Rosa, Judith, Rogelia y Edith, pertenecen al dominio y el segundo elemento de esas parejas: Martha, Miriam, Rufina y Silvia pertenecen al codominio.

Como se ve, podemos formar muchas parejas ordenadas, pero no todas pertenecen a la relación por ejemplo (Rosa, Martha) es pareja ordenada pero no pertenece a la relación ya que no satisface nuestra regla de correspondencia, es decir Rosa NO tiene mejor promedio que Martha y por lo tanto no están relacionadas. En cambio la pareja (Judith, Miriam) si pertenece a la relación, ya que Judith tiene mejor promedio que Miriam y por lo tanto están relacionadas.

Ahora bien las parejas (Martha, Rosa), (Rufina, Judith) y (Norma, Edith) no son parejas ordenadas ya que el primer elemento de cada pareja Martha, Rufina y Norma no son elementos del dominio y por lo tanto no cumplen la definición 3. Desde luego esas parejas no pertenecen a nuestra relación por no ser parejas ordenadas.

Una vez hechas éstas aclaraciones, estamos en condiciones de formalizar el concepto de relación.

DEFINICION 4.

Una relación entre dos conjuntos $R: D \rightarrow C$ es un conjunto de parejas ordenadas (x,y), tales que (x,y) satisfacen la regla de correspondencia.

Esta definición en términos de conjuntos la podemos escribir como:

$$R: D \rightarrow C = \left\{ (x,y) \quad / \; x \rightarrow y \; ; \; X \in D, \; Y \in C \right\}$$

Esta taquigrafía matemática se lee:

La relación de D a C ($R: \rightarrow C$) es igual (=) al conjunto ($\{ \}$) de parejas ordenadas (x,y); $X \in D, X \in C$) tales que (/) el primer elemento de la pareja está relacionado con el segundo elemento de la pareja ($x \rightarrow y$).

EJERCICIO 3.

La siguiente lista corresponde a estudiantes del 2°E de la Escuela de Enfermería No.2 de la U.A.G., en 1985 donde se indica la estatura de cada una de ellas:

NOMBRE	ESTATURA (en Mt.)
Ana...............	1.50
Claudia............	1.45
Reyna.............	1.53
Silvia.............	1.48
Gloria.............	1.60
Teresa.............	1.55
Dolores............	1.43
Elisa..............	1.50
Hilda..............	1.46
María..............	1.44
Dalia..............	1.65

Consideremos los siguientes conjuntos:

M= {Ana, Claudia, Reyna, Silvia, Gloria}

P= {Teresa, Dolores, Elisa, Hilda, María, Dalia}

Y la relación: R:M→P con la siguiente regla de correspondencia: "ser más alta que"

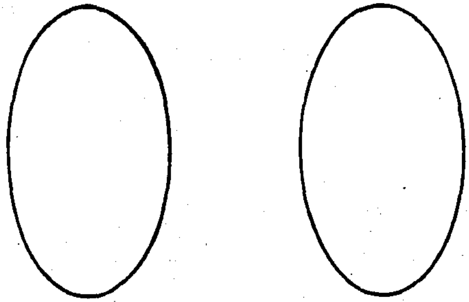
Contesta lo que se te pide:

1. ¿Cual es el dominio? ______________________

2. ¿Cual es el codominio? ______________________

3. Diga la regla de correspondencia: ______________________

4. Construye el diagrama de la relación:



5. De las siguientes parejas indica con una V si la pareja es ordenada y con una F si la pareja no es ordenada.

(Ana,Claudia)......( )	(Claudia, Hilda)............( )
(Ana,Dalia)........( )	(Silvia,Ana)................( )
(Hilda,Claudia)....( )	(Gloria, Marla).............( )
(Reyna, Elisa).....( )	(Dalia, Silvia)............( )
(Silvia,Marla).....( )	(Reyna, Teresa) ....( )

6. ¿Cuántas parejas ordenadas puede formar con esos conjuntos?

7. Escribe todas las parejas ordenadas que pertenescan a la relación.

ACTIVIDAD DOCENTE No. 3

GRAFICA DE UNA RELACION.

OBJETIVOS.

Al finalizar la clase el estudiante debe:

1. Graficar una relación.

Preguntas de Control.

1. ¿Que es una pareja ordenada?
2. ¿Que es el dominio?
3. ¿Que es el codominio?
4. ¿Que es una relación?

El objetivo de la clase de hoy, es introducir un nuevo modelo para representar una relación que llamaremos GRAFICA DE UNA RELACION. Este tipo de modelo es el que más se utiliza porque como veremos más adelante, nos permitirá representar relaciones construidas a partir de conjuntos con un gran número de elementos.

Para ilustrarlo mejor tomemos un ejemplo:

En el siguiente conjunto de alumnas anotamos a continuación de cada uno de sus nombres, su promedio en matemáticas.

Sean

D={Rosa(5), Judith(8), Rogelia (5), Rebeca(10), Edith(7), Martha (7), Rufina (10), Miriam(5), Norma(8), Silvia(6).}

R: $D \rightarrow C$ $C = D$

Y la regla de correspondencia

"Tener mayor promedio en matemáticas"

Obtenemos entonces las parejas:

(Judith,Rosa), (Judith,Rogelia), (Judith,Edith), (Judith,Martha), (Judith,Miriam), (Judith,Silvia), (Rebeca,Rosa), (Rebeca,Judith), (Rebeca,Rogelia), (Rebeca,Edith), (Rebeca,Martha), (Rebeca,Miriam) (Rebeca,Norma), (Rebeca,Silvia), (Edith,Rosa), (Edith,Rogelia), (Martha,Rosa), (Martha,Rogelia), (Edith,Miriam), (Edith,Silvia), (Martha,Miriam), (Martha,Silvia), (Rufina,Rosa), (Rufina,Judith), etc.

Veamos el diagrama de la relación:

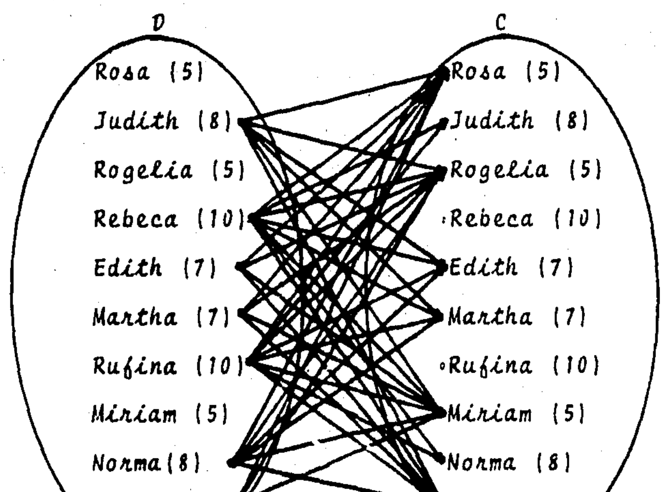


Fig. 5 Diagrama de R: D→C

Como podemos observar, esta representación no es del todo conveniente, ya que con tantas flechas se pierde precisión, debido a ésto fue necesario buscar otro tipo de representación, encontrándose su solución por medio de la utilización de rectas, para representar al dominio y codominio, de la siguiente manera:

Vamos a asociar a los elementos del dominio D con puntos de una recta horizontal, y a los elementos del codominio C con puntos de una recta vertical, como se indica en las siguientes figuras:

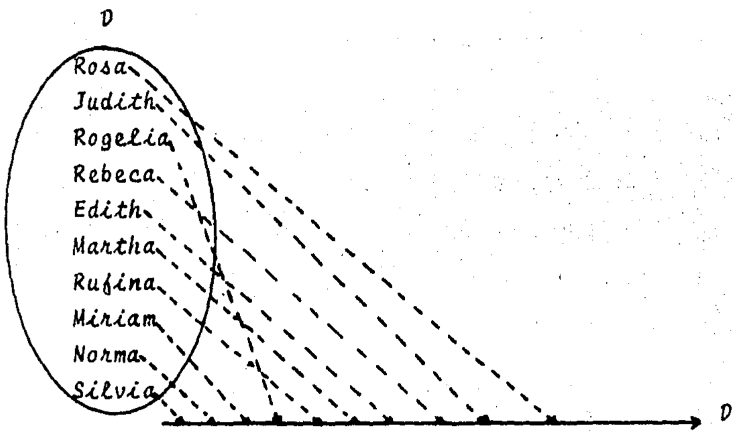


Fig. 6.. Diagrama del dominio D.

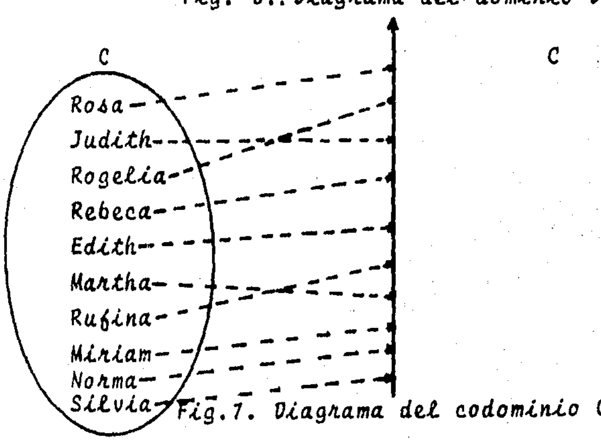


Fig.7. Diagrama del codominio C.

Esta representación tiene la ventaja que aunque los conjuntos - tengan infinito número de elementos siempre podremos asociar uno y solo un punto en la recta a cada uno de ellos.

Ahora, procedamos a colocar las rectas de la siguiente manera:

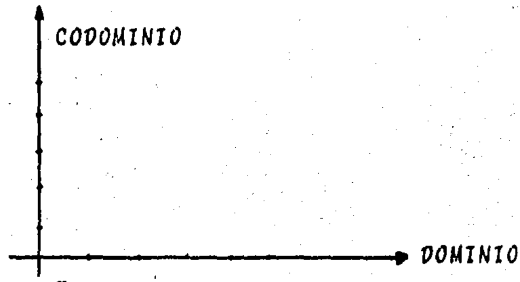


Fig. 8

Para localizar las parejas ordenadas que forman nuestra rela- - ción, lo hacemos trazando perpendiculares a partir del punto aso-- ciado a cada elemento de la pareja; el punto donde se intersectan- éstas rectas, representa a la pareja ordenada.

Por ejemplo, la pareja (Silvia, Miriam), nos dice que:

1. Silvia pertenece al dominio
2. Miriam pertenece al codominio y

De acuerdo a ésto su representación gráfica nos queda.

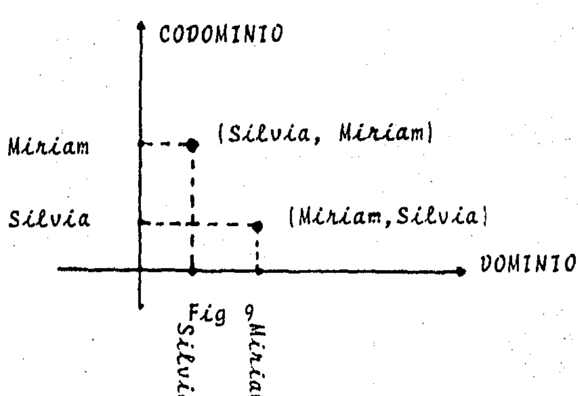
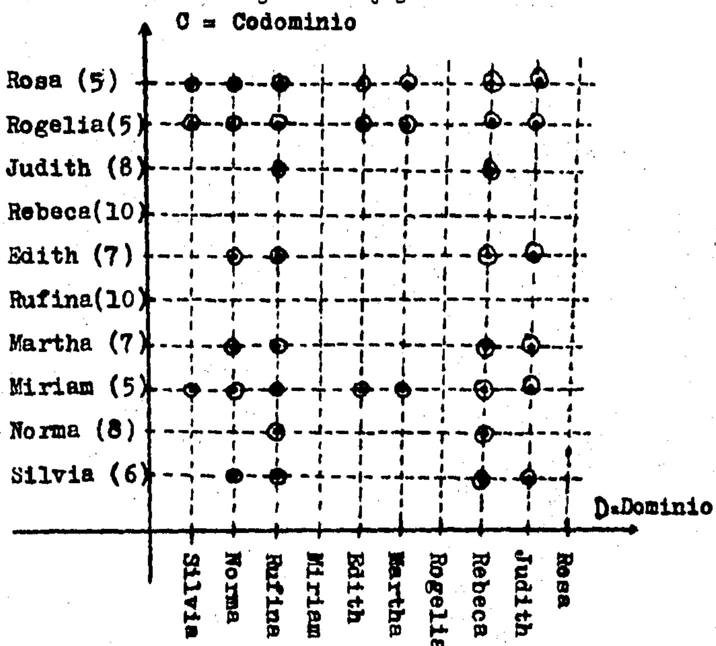


Fig 9

Observese que la pareja (Miriam,Silvia) aunque es pareja ordenada, esto es: Miriam es elemento del dominio y Sivial del codominio, no pertenece a la relación, ya que no cumple con la regla de correspondencia, porque Miriam no tiene mejor promedio que Silvia. - Mientras que la pareja ordenada (Silvia,Miriam) si pertenece a la relación.

Siguiendo éste procedimiento la gráfica de la relación nos quearía como seilustra en la siguiente figura:



Preguntas de comprobación:

1. ¿En que casos es conveniente utilizar un diagrama para representar una relación?
2. ¿En que casos es conveniente representar una relación mediante-- una gráfica?

3. En la construcción de una gráfica utilizamos dos rectas perpendiculares entre sí, una horizontal y otra vertical ¿Cual de - - ellas utilizamos para representar los elementos del dominio y - cual para los elementos del codominio?
4. En el ejemplo de la relación vista en clase ¿Existen parejas ordenadas que no pertenescan a la relación?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 4

PRODUCTO CARTESIANO

Objetivos:

Al terminar la clase el estudiante debe ser capáz de:

1. Definir el producto cartesiano, como un caso particular de relación.
2. Saber la gráfica del producto cartesiano.
3. Entender la relación como un subconjunto del producto Cartesiano

Preguntas de control.

¿Que es el dominio de una relación?

¿Que es el codominio de una relación?

¿Cuando es util la representación de una relación en diagramas?

En el ejemplo de relación que vimos en la clase anterior ¿Existen parejas ordenadas que no pertenecen a la relación?

La última de las preguntas de contro, nos sugiere una nueva pregunta ¿habrá una relación formada por todas las parejas ordenadas? la respuesta es si; la regla de correspondencia es simplemente - - "ser pareja ordenada". Esta relación recibe el nombre de PRODUCTO-CARTESIANO y se denota:

$$A \times B = \{ (x,y) \mid X \in A,\ y \in B \}$$

y se lee: "el producto cartesiano de dos conjuntostos A y B, es - - igual al conjunto de parejas ordenadas(x, y) tales que, el primer -- elemento de la pareja (x), pertenece al primer conjunto (A), y el - segundo elemento (y) pertenece al segundo conjunto (B).

Una primera conclusión, a la que podemos llegar es que el producto cartesiano es la relación mas amplia que podemos establecer entre dos conjuntos.

Ejercicio

De la siguiente lista de compañeros, donde señalamos sus respectivas edades.

Mario	20	años
Héctor	19	"
Alfredo	17	"
Lourdes	16	"
Sergio	17	"
Luis	18	"

Formemos los siguientes conjuntos:

A = { Mario, Héctor, Alfredo }

B = { Alfredo, Lourdes, Sergio, Luis, Héctor }

Empecemos por encontrar las parejas ordenadas de ;

A X B = { (Mario, Alfredo), (Mario, Lourdes),
(Mario, Sergio), (Mario, Luis), (Mario, Héctor)
(Héctor, Alfredo), (Héctor, Lourdes), (Héctor, Sergio)
(Héctor, Luis), (Héctor, Héctor)

(Alfredo, Alfredo), (Alfredo, Lourdes), (Alfredo, Sergio)
(Alfredo, Luis,) (Alfredo, Héctor) }

Ahora encuentra las parejas de B X A

B X A :

¿Quién tiene mas parejas A X B o B X A ?

Grafiquemos A X B y B X A

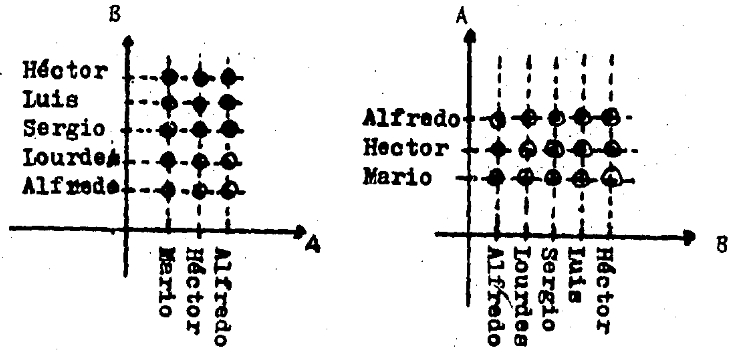


Fig. 11 Gráfica de AXB y BXA.

Otra observación que podemos hacer de la gráfica del producto - cartesiano es que siempre nos determina un rectángulo.

Pasemos ahora a encontrar las parejas de la siguiente relación:

$R\colon A \rightarrow B = \{ (x,y) \mid y$ *tiene menos edad que* $x;\ x \in A,\ y \in B \}$

$R\colon A \rightarrow B = \{$ *(Mario, Alfredo), (Mario, Lourdes), (Mario, Sergio) (Mario, Luis), (Mario, Héctor), (Héctor, Alfredo), (Hector, Lourdes), (Héctor, Sergio), (Héctor, Luis) (Alfredo, Lourdes).* $\}$

Obsérvese, que las gráficas de AxB y BxA no son iguales.

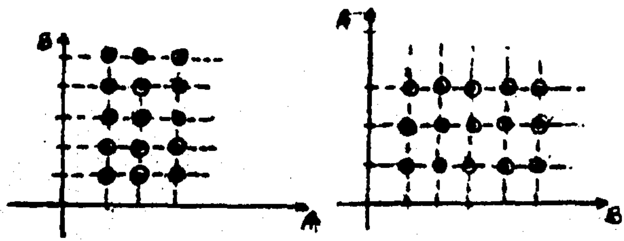
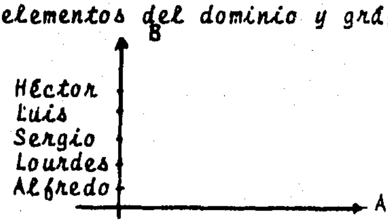


Fig. 12 Gráficas
de AxB y BxA.

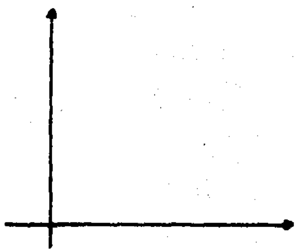
Coloca los elementos del dominio y gráfica la relación;

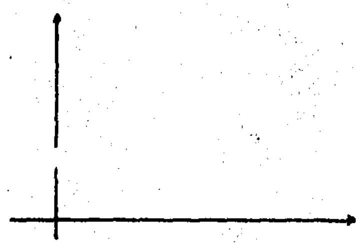


¿Las parejas de R: A⟶B son parejas de A xB?

Por simple comparación, podemos afirmar que sí. Este hecho se manifiesta también, si comparamos las gráficas de la relación R y la del producto cartesiano.

Gráfica ambas en los siguientes espacios:





Antes de continuar, cabe volver a resaltar que cada punto de la gráfica de una relación, corresponde a una y solo una pareja ordenada de la relación, así podemos comprobar fácilmente que R: A⟶B es un conjunto formado por 10 parejas ordenadas y su gráfica tiene 10 puntos, mientras que AXB es un conjunto integrado por 15 parejas ordenadas y su gráfica tiene 15 puntos.

EJERCICIO 4.

Del ejercicio 3

a) Gráfica la relación R: M⟶P

b) Gráfica el producto cartesiano MXP

c) Gráfica el producto cartesiano P X M.

Preguntas de Comprobación.

1. ¿R: A→B es un subconjunto de AXB? ¿Por qué?
2. Si una relación está constituida por un conjunto de 18 parejas ordenadas ¿Cuantos puntos, tendrá la gráfica de la relación?
3. ¿Qué figura nos determina la gráfica de un producto cartesiano AXB?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 5

RANGO DE UNA RELACION.

Objetivos:

Al finalizar la clase el alumno será capáz de:

1. Identificar la imágen de un elemento en una relación.
2. Encontrar el rango de una relación.

Preguntas de control.

1. ¿Que es el producto cartesiano?
2. ¿Es lo mismo A X B que B X A? ¿ Por que?

En esta clase vamos a introducir nuevos conceptos que nos permitirán uniformar nuestro lenguaje cuando hablemos acerca de una relación.

Tomemos por ejemplo el diagrama del ejercicio 3.

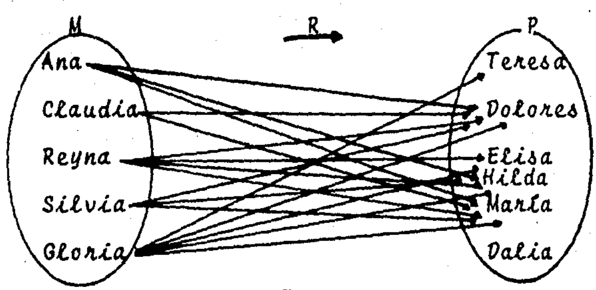


Fig. 13.

Para preguntar ¿con que elementos está relacionada Ana?, lo decimos en el lenguaje matemático preguntando ¿cual es la imagen de Ana bajo la relación? o simplemente ¿Cual es la imagen de Ana? Las tres preguntas anteriores dicen lo mismo y por lo tanto tienen una misma respuesta en este caso: {Dolores, Hilda y Marla.}

Así la imagen de Claudia es $\{$Dolores, María$\}$ y la imagen de Reyna es $\{$Dolores, Elisa, Hilda, María$\}$

Escribe a continuación:

La imagen de Silvia es:

La imagen de Gloria es:

Pasemos ahora a formalizar el concepto.

DEFINICION 5.

En una relación R: $D \rightarrow C$ el subconjunto del codominio formado por los elementos que están relacionados con un elemento (x) determinado del dominio, recibe el nombre de IMAGEN DE X.

Debe quedar claro, que el concepto de imagen está asociado a cada elemento del dominio, así podemos decir que cada elemento del dominio tiene una imagen.

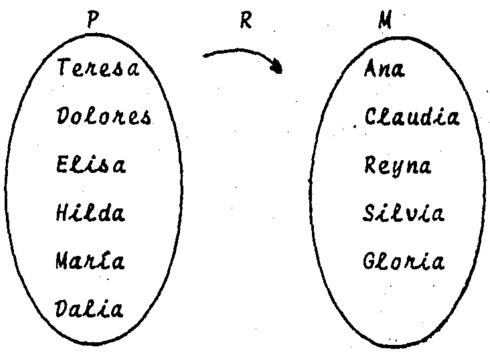
Ahora, la imagen de cualquier elemento del dominio es <u>un sub conjunto del codominio</u>. Este subconjunto puede estar formado por varios elementos, como en nuestro ejemplo, por un sólo elemento o incluso no tener elementos, esto sucede cuando el elemento del dominio no está relacionado, en tal caso decimos que la imagen es el vacío.

Para ilustrar esto volvamos al ejercicio 3 y consideremos la relación R: P $\rightarrow$ M donde:

P = $\{$Teresa (1.55), Dolores (1.43), Elisa (1.50), Hilda(1.46), María (1.44), Dalia (1.65)$\}$

M = $\{$Ana (1.50), Claudia (1.45), Reyna (1.53), Silvia (1.48). Gloria (1.60) $\}$

Y la regla de correspondencia: "ser mas alta que" construye el- diagrama de la relación:



Encuentra:

La imagen de Teresa:

La imagen de Dolores:

La imagen de Elisa:

La imagen de Hilda:

La imagen de María:

La imagen de Dalia:

Como puede apreciarse en éste ejemplo, la imagen de un elemento- puede ser el conjunto vacío: como la imagen de Dolores y María, - - constar de un sólo elemento: como la imagen de Hilda, o incluso ser todo el codominio: como la imagen de Dalia.

Asociado al concepto de imagen está el de Rango que formalizamos a continuación:

DEFINICION 6.

El RANGO de una relación, es un subconjunto del codominio formado por la unión de todas las imagenes.

EJERCICIO 5.

De las relaciones vistas en clase, encuentra el rango de la relación R: M→P y el rango de R: P →M

Preguntas de comprobación.

1. ¿Que es la imagen de un elemento?
2. ¿Que es el rango de una relación?
3. El rango ¿está en el dominio o en el codominio?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 6
FUNCION.

OBJETIVO:

Al terminar la clase el alumno será capáz de determinar si una relación es función o no.

Preguntas de control.

1. ¿Cual es el dominio de una relación?
2. ¿Que es el rango de una relación?
3. ¿Que esta regla de correspondencia?

En ésta clase, vamos a estudiar un tipo especial de relación al que daremos el nombre de función, empecemos por hacer el siguiente ejercicio.

Sean

$P = \{\text{Todos los países del mundo}\}$

$C = \{\text{Todas las ciudades del mundo}\}$

Y tomemos por regla de correspondencia "tiene por capital a"

Encontrar

$R: P \to C = \{(x,y) \mid x \text{ tiene por capital a } y \text{ ; } X \in P,\ y \in c\}$

En un diagrama nuestra relación quedaría como la figura siguiente:

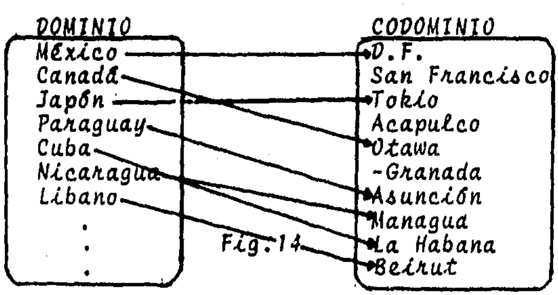


Fig. 14

1. Escribe cinco parejas de la relación.
2. Encuentra la imagen de los siguientes elementos:

   Imagen de México =

   Imagen de Cuba =

   Imagen de Nicaragua =

   Imagen de Japón =
3. ¿De cuántos elementos está formada cada imagen del ejercicio anterior?
4. ¿Habrá algún elemento que tenga por imagen dos o mas elementos? ¿por qué?
5. ¿Habrá algún elemento del dominio que tenga por imagen el conjunto vacío? ¿por qué?

La relación anteior es una función, formalicemos el concepto.

DEFINICION 7.

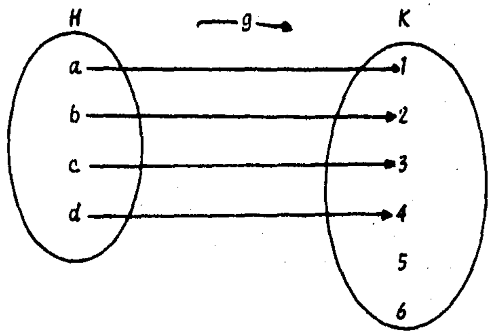
Decimos que una relación es FUNCION si satisface las siguientes condiciones:

1. Todos los elementos del dominio están relacionados.
2. Cada elemento del dominio está relacionado con uno y solo un elemento del codominio.

EJERCICIO 6.

De acuerdo con cada diagrama contesta lo que se pide:

6.1 Sea G: H⟶K



En la relación g indica:

a) ¿Cual es el dominio?

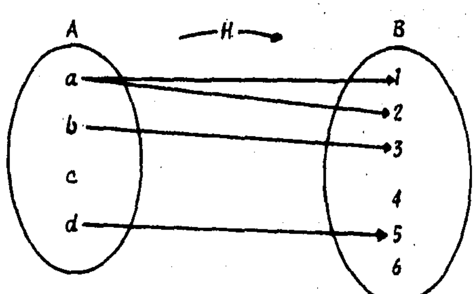
b) ¿Cual es el codominio?

c) La imágen de b es:

d) ¿Es función? ¿por que?

e) El rango de g es:

6.2 Sea H: A⟶B



a) ¿Cual es el dominio de H?

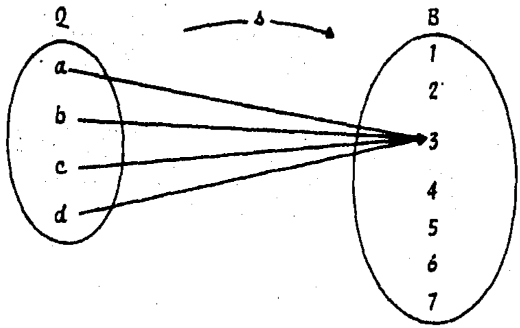
b) ¿Cual es el codominio?

c) La imágen de a es:

d) El rango de h es:

e) ¿Es función? ¿por qué?

6.3 Sea $s: Q \rightarrow B$



a) ¿Cuál es el dominio?

b) ¿Cuál es el codominio?

c) La imágen de a es:

La imágen de b es:

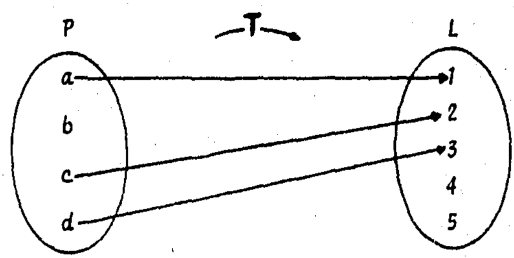
La imágen de c es:

La imágen de d es:

d) El rango de s es:

e) ¿Es función? ¿por que?

6.4 Sea $T: P \rightarrow L$



a) ¿Cuál es el dominio?

b) ¿Cuál es el codominio?

c) La imagen de a es:

d) El rango de T es:

e) ¿Es función? ¿por qué?

Preguntas de comprobación.

¿Cuándo una relación es función?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 7

RELACION PRODUCCION-INGRESO

Objetivos:

Al finalizar la clase el estudiante debe:

1. Familiarizarse con el manejo de relaciones numéricas.
2. Conocer el plano cartesiano
3. Reafirmar los conceptos de relación, función,dominio,codominio, y rango de una relación.

Preguntas de Control:

¿Qué es el dominio de una función?

¿Qué es el rango de una función?

¿Qué es una función?

¿Qué es el producto cartesiano?

Hasta ahora, hemos visto algunas relaciones que se establecen - entre dos conjuntos de personas en base a ello definimos el concepto matemático de relación entre dos conjuntos.

Sin embargo, muchos se preguntarán ¿a donde están los números,- Intencionalmente lo hemos hecho, para remarcar que las matemáticas son mucho más que simples números.

A continuación veremos un ejemplo, de una relación que nos llevará a la utilización de números.

Ejemplo: Relación Producción-Ingreso

El Ingreso de una fábrica, está determinado por su producción,- por ejemplo una fábrica de caramelos, que vende su producción al -

distribuidor a un preciode \$2.00 por caramelo. Es claro que entre-mas caramelos produsca, mayor será el ingreso que obtenga la fábrica. Nuestro problema radica ahora en como expresar matemáticamente esta relación. Observese que la producción de caramelos, la expresamos en números, esto es, 5 caramelos, 20 caramelos etc.

Lo mismo sucede con el ingreso, ya que éste lo contabilizamos - en 10 pesos, 50 pesos etc. (esto es en números). De donde podemos- representar esta relación con el siguiente diagrama.

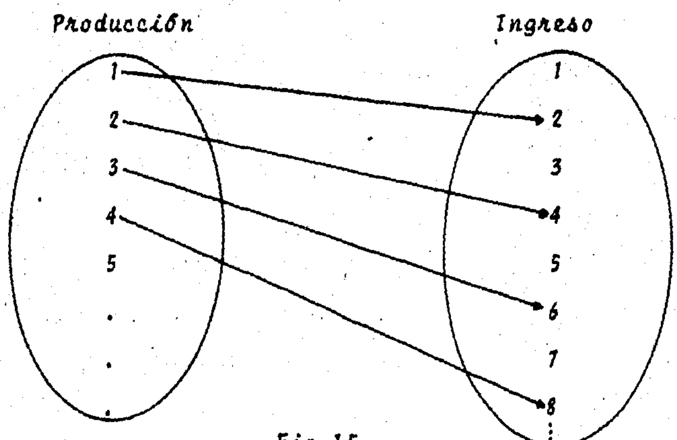


Fig 15

Lo primero que nos debe quedar claro en ésta representación que hemos hecho de la relación es que aunque el dominio y el codominio son conjuntos de números, en éste caso de números naturales (enteros positivos) y desde el punto de vista matemático son iguales, - ya que tienen los mismos elementos, no representan lo mismo, por - ejemplo, un 6 en el dominio, representa 6 caramelos, y en el codominio representa 6 pesos que obviamente son cosas distintas.

Ya representamos la relación mediante un diagrama y no hemos explicitado la condición de relación.

Esto es, qué hicimos para saber, que al 3 del dominio, lo asociabamos al 6 del codominio, y el 10 al 20. Simplemente multiplicamos el 3 y el 10 por 2, para saber con qué números los teniamos que relacionar, la condición de ésta relación la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{Ingreso}} = \boxed{\text{precio por unidad}} \quad \text{por} \quad \boxed{\text{Número de unidades producidas.}}$$

La producción la estamos representando en el primer conjunto (dominio) y el ingreso en el segundo conjunto (codominio). Si a los elementos del dominio los representamos con la letra x y a los del codominio con la letra y, la condición de relación, nos quedará expresada algebráicamente:

$$y = 2x$$

Finalmente, recordando que nuestro dominio y codominio con el conjunto de números naturales, por tanto podemos expresar nuestra relación como:

$$R: \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \{ (x,y) \mid y = 2x \ ; \ x,y \in \mathbb{N} \}$$

Se lee: "La relación del conjunto de números naturales con los números naturales, es igual al conjunto de parejas ordenadas (x,y) tales que y es igual a 2 por x; donde x,y son números naturales".

Para encontrar las parejas ordenadas se puede hacer, mediante -

el siguiente procedimiento.

x	y=2x	(x,y)
1	y=2(1) = 2	(1,2)
2	y=2(2) = 4	(2,4)
3	y=2(3) = 6	(3,6)
4	y=2(4) = 8	(4,8)

A este procedimiento se le conoce como TABULACION y consiste - en ir tomando los elementos del DOMINIO uno a uno y a través de la regla de correspondencia irle asignando el elemento del CODOMINIO- que le corresponde.

Una vez habiendo encontrado algunas parejas ordenadas de la relación, vamos a representarlas gráficamente por medio de puntos, - siguiendo el mismo procedimiento usado con anterioridad pero ahora asociando los elementos del DOMINIO con puntos de una recta numérica horizontal que llamaremos eje x o eje de las abscisas, y los - elementos del CODOMINIO con puntos de una recta numérica vertical- que llamaremos <u>eje y o eje de las ordenadas</u>. El punto de intersección de ambos ejes es el punto cero u origen.

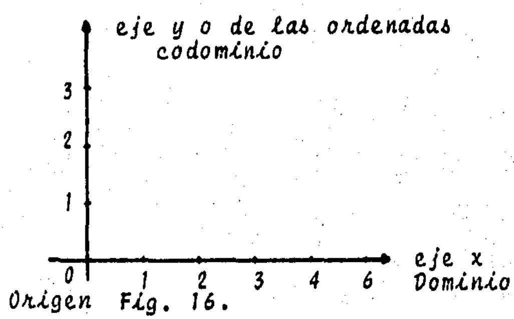


Fig. 16.

Cada pareja ordenada (x,y) tendrá asociado uno y solo un punto del plano, el cual localizaremos de la siguiente manera: Desde el punto que representa al elemento "x" del dominio, trazamos una recta paralela al eje y y desde el punto que representa al elemento "y" del codominio, trazamos una recta paralela al eje x, el punto de intersección de éstas rectas será la representación gráfica de nuestra pareja ordenada (x,y)

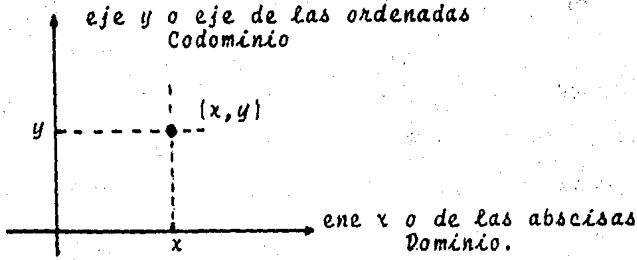


fig. 17

El sistema formado de ésta manera, para representar todas las parejas ordenadas de nuestra relación, recibe el nombre de SISTEMAS DE EJES COORDENADOS RECTANGULARES O CARTESIANO o simplemente PLANO CARTESIANO (se llama Cartesiano, en reconocimiento al matemático francés René Descartes (1637), quien fue el que introdujo ésta representación).

Así, en nuestro ejemplo podemos graficar de la siguiente manera:

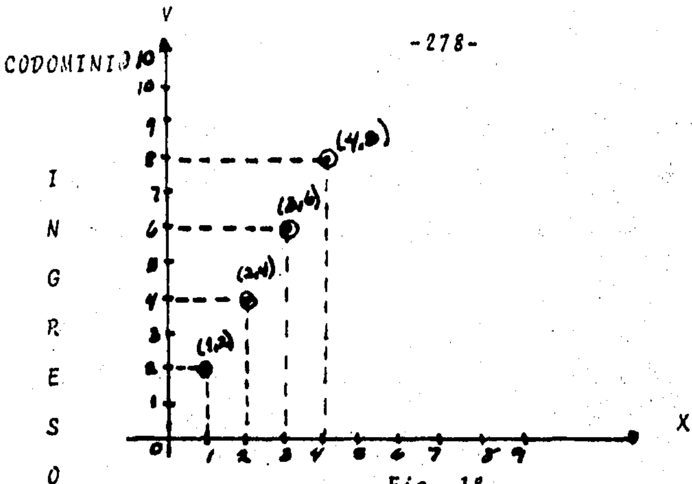


Fig. 18
PRODUCCION (No de Caramelos).

No hay que olvidar que cada punto de nuestra gráfica tiene un -- significado para nosotros, así por ejemplo el punto (a,6) representa, que para una producción de 3 caramelos tenemos un ingreso de 6 pesos.

En ésta relación: producción-ingreso que hemos manejado, podemos observar que: Para todos y cada uno de los niveles de producción tenemos uno y sólo un ingreso correspondiente o sea:

1. Que todos los elementos del dominio (producción) están relacionados con un elemento del codominio (ingreso)

2. A cada elemento del dominio, le corresponde uno y solo un elemento del codominio, por lo tanto ésta relación también es ***función****.*

Preguntas de Comprobación.

Del ejemplo visto en clase contesta brevemente:

1. Escribe la imágen de los siguientes elementos:

a) $I_7 =$ b) $I_{18} =$ c) I_{25}

2. ¿Cuál es el rango?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 8
RELACIONES NUMERICAS.

Objetivos:

Al final de ésta clase el estudiante debe:

1. Enlistar parejas de una relación dada y graficarlas.
2. Identificar el dominio, codominio y rango de una relación.
3. Determinar cuando una relación es función.

Preguntas de control.

1. ¿Que es una función?
2. ¿Que es el rango de una función?

En las próximas clases veremos distintas relaciones entre conjuntos de números, en cada una de ellas haremos hincapié en los conceptos aprendidos y en el análisis de sus gráficas.

Queremos remarcar que en la naturaleza y en la sociedad, existen relaciones entre distintos conjuntos de objetos, susceptibles de representarse por medio de números, mas adelante veremos algunos ejemplos que se presentan en los distintos campos de la ciencia (naturales y sociales), de ahí, la importancia de estudiar en forma general, relaciones entre conjuntos de números.

Los símbolos que utilzaremos en este tipo de relaciones son:

$a = b$	a "igual que" b
$a < b$	a "menor que" b
$a > b$	a "mayor que" b
$a \leq b$	a "menor o igual que" b
$a \geq b$	a "mayor o igual que" b

Empecemos por relacionar conjuntos finitos:

Sean:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

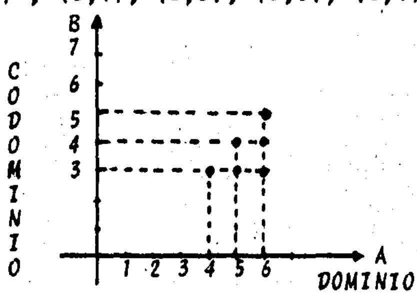
$$B = \{3,4,5,6,7,\}$$

$$y \quad R : A \rightarrow B = \{ (x,y) \mid y < x \ ; x \in A, \ y \in B \}$$

El dominio de ésta relación es el conjunto A, el codominio el conjunto B y la regla de correspondencia $y<x$*: y menor que x ; esto es que el segundo elemento sea menor que el primer elemento de la pareja ordenada.*

Las parejas ordenadas de ésta relación son:

$(4,3)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, *y su gráfica es:*



El rango de la relación es $\{3,4,5\}$ *y las imagenes de los siguientes números* $\{1,2,3,4,5,6\}$ *es:*

$$I_1 = \emptyset \qquad I_4 = \{3\}$$

$$I_2 = \emptyset \qquad I_5 = \{3,4\}$$

$$I_3 = \emptyset \qquad I_6 = \{3,4,5\}$$

EJERCICIO 7.

De las siguientes relaciones:

7.1 $\quad R: P \rightarrow Q = \{ (x,y) \mid y > x \ , \ x \in P, \ y \in Q \}$

$$P = \{2,4,6,8,10,12\}$$

$$Q = \{1,2,3,4,5,6\}$$

7.2 $S: T \rightarrow H = \{(x,y) \ / \ \ y=x \ \ ; x \in T, \ y \in H\}$

donde

$$T = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$H = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Contesta las siguientes preguntas para cada caso:

a) ¿Cual es la regla de correspondencia?

b) Escribe las parejas de la relación.

c) Grafica la relación

d) Indica la imágen de 3 elementos del dominio

e) Escribe el rango de la relación.

f) ¿Es función?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 9

RELACIONES CON CONJUNTOS INFINITOS.

OBJETIVOS:

Al finalizar la clase el estudiante debe:

1. Decir cuál es el dominio, el codominio y la gráfica de una relación de conjuntos infinitos.
2. Diferenciar y explicar que es una relación y que es una función.

En la clase anterior vimos ejemplos de relaciones entre conjuntos finitos, ahora tomemos conjuntos infinitos de números. Por ejemplo:

Sea $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$

y sea la relación

$R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} = \{ (x,y) / y < x ; x,y \in \mathbb{N} \}$

Esta relación recibe el nombre de "menor que"

1. ¿Cuál es el dominio?
2. ¿Cuál es el codominio?
3. ¿Cuál es la regla de correspondencia?

Generalmente, cuando nuestros conjuntos son infinitos, el número de parejas ordenadas, de la relación es también infinito, motivo por el cual es imposible escribir todas las parejas de la relación.

Para encontrar su gráfica, requerimos conocer algunas parejas de la relación, empezamos con:

¿El 1 del dominio, con quien lo podemos asociar?

La regla de correspondencia $y<x$ nos dice que con todos los ele--

mentos del codominio que sean menores que el, es decir $y<1$, sólo - que no hay naturales menores que 1, por lo que el 1 tiene como imagen el conjunto vacío.

Seguimos con el 2, menores que él, solo el 1 por lo que obtenemos la pareja (2,1) las siguientes parejas son:

(3,1), (3,2)

(4,1), (4,2), (4,3)

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4)

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)

(7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6)

.

.

.

De donde su gráfica es:

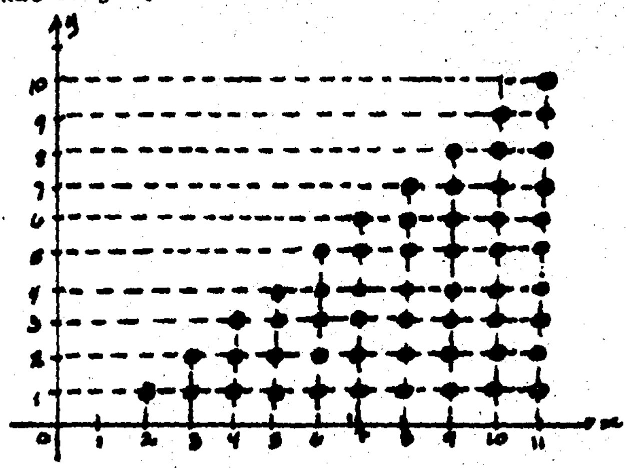


Fig 19

Escribe a continuación las imagenes de los siguientes números:

I_2 =

I_3 =

I_9 =

Di si la relación anterior es función

Ejercicio No.

En las siguientes relaciones:

a) $R : Z \rightarrow Z = \{ (x,y) / y = x \quad x,y \in Z \}$

b) $R : Z \rightarrow Z = \{ (x,y) / y = -x \quad x,y \in Z \}$

1. ¿Cuál es el dominio?

a)

b)

2. ¿Cuál es el codominio?

a)

b)

3. ¿Cuál es la regla de correspondencia?

a)

b)

4. Enlista diez parejas de cada relación

a)

b)

5. Gráfica cada relación. Di para cada caso si es función.

ACTIVIDAD DOCENTE No. 10

RELACIONES DE REALES A REALES

Objetivos:

Al finalizar la clase el alumno debe:

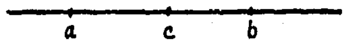
1. Conocer la propiedad de densidad de los números reales
2. Graficar funciones sencillas de reales a reales
3. Reafirmar sus conocimientos sobre función, dominio y codominio de una función.

Preguntas de Control:

1. ¿Que condiciones debe satisfacer una relación para que sea función.
2. ¿El rango está en el dominio o el codominio?

Relaciones de Reales a Reales

En las clases anteriores, estuvimos manejando relaciones que toman como dominio al conjunto de los números naturales (N) o al conjunto de los números enteros (Z). Ahora vamos a ver relaciones que tienen como dominio y codominio a los números reales (R), aunque en ambos casos los conjuntos utilizados tienen un número infinito de elementos, en el caso de las relaciones con números reales se nos presenta un problema adicional al querer representar gráficamente la relación, ésto debido a que el conjunto de los números reales al contrario de los N y Z, cumplen con la propiedad de densidad, esto es entre dos reales cualesquiera a y b que cumplan $a<b$, existirá al menos un elemento c tal que $a<c<b$, como se ve:



Esto significa que entre dos puntos cualesquiera de la recta -- real, existirá al menos otro punto entre ellos por muy cercanos -- que se encuentren.

De ahí la imposibilidad de poder, por un lado, escribir todas - las parejas ordenadas de la relación y por otro lado, el ir grafi cando punto por punto cada una de dichas parejas ordenadas.

Pasemos a ver un ejemplo y en su desarrollo iremos haciendo al gunas aclaraciones

sea $R : R \rightarrow R = \left\{ (x,y) \;/\; y = x \;;\; x,y \in R \right\}$

Esta relación que ya vimos anteriormente de N a N vimos que -- resultó ser función, y su representación gráfica consistió en pun tos aislados en el plano.

Intentaremos ahora graficarlos para los reales, como se nos pi de. Empezaremos por recordar la gráfica cuando era de Z en Z:

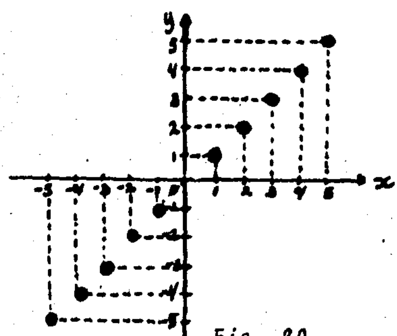


Fig. 20

Ahora, nos fijaremos en las parejas ordenadas generadas por la relación a partir de algunos números que se encuentran entre el 0-y el 1 y los graficamos en un plano cartesiano. Por ejemplo:

(1/2,1/2), (1/4, 1/4), (1/3, 1/3), (1/8, 1/8)

Hacemos una "amplificación" del plano:

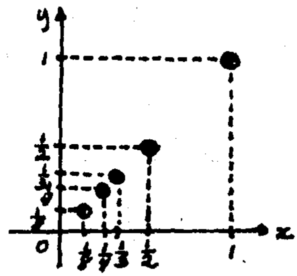


fig. 21.

Esto mismo podemos hacer, tomando números entre 0 y 1/8 y ver -- las parejas:

(1/16, 1/16), (1/32, 1/32), (1/64, 1/64), (1/28, 1/28)

Hacemos entonces otra "amplificación"

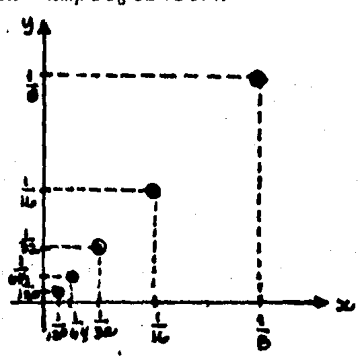


Fig. 22

Este proceso lo podríamos continuar indefinidamente, aunque para poderlo graficar tendríamos que hacer constantes amplificaciones del plano cartesiano.

Los últimos puntos que hemos graficado están tan cerca entre sí, que si los viéramos en nuestro plano original, no veríamos los "huecos" que están en la última de las gráficas, veamos la gráfica con todos estos puntos:

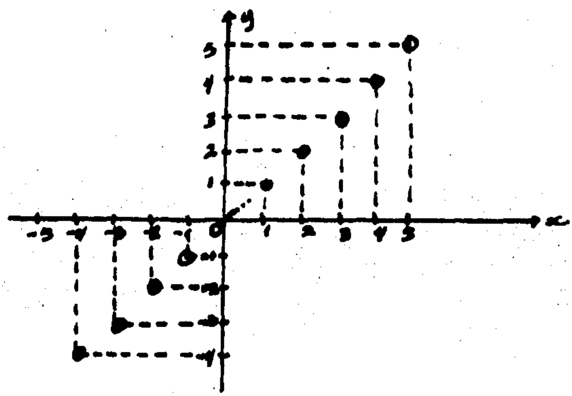


fig. 23

Obsérvense los puntos cercanos al origen, que son los que habíamos graficado en forma amplificada.

Realizando éste procedimiento para todos los elementos del dominio (representados por todos los puntos del eje x) tendremos sus respectivas imágenes en el codominio, y estarán estos a su vez representados por todos los puntos del eje y; por lo cual la representación gráfica de todas éstas parejas ordenadas, serán puntos de una recta que quedaría de la siguiente manera:

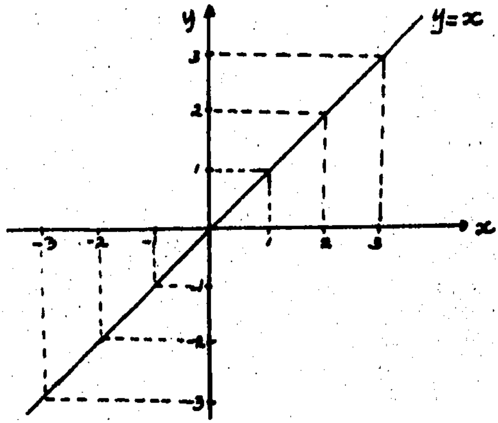


Fig. 24

Preguntas de comprobación:

1. ¿En que cuadrante queda la gráfica de una relación de N⟶N?
2. ¿En que cuadrantes queda la gráfica de una relación de Z⟶Z?
3. ¿Cuantos números naturales hay entre el 1 y el 2?
4. ¿Cuantos números reales hay entre el 1 y el 2?
5. ¿Como es la gráfica de una relación de N⟶N?
6. ¿Como es la gráfica de una relación de R⟶R?

ACTIVIDAD DOCENTE No. 11

RELACIONES Y FUNCIONES. EJERCICIOS

Objetivos:

Al finalizar la clase el alumno debe ser capáz de:

1. Dado un conjunto de parejas ordenadas determinar si es función o no.
2. Dado un conjunto de parejas determinar el dominio, codominio y la regla de correspondencia.
3. Graficar funciones sencillas
4. Dada una gráfica determinar el dominio, codominio y regla de correspondencia.

Preguntas de Control:

¿Que es una función?

¿Que es el rango de una función?

¿Es lo mismo el rango y el codominio?

¿Como es la gráfica de una relación de $R \rightarrow R$?

Ejercicios

1. ¿Cuales de los siguientes conjuntos de parejas ordenadas son funciones? Para aquellos que sean funciones diga cual es el dominio y cual el codominio e ilustre en un diagrama.

   a) $\{(2,1),\ (-1,5),\ (0,0),\ (6,2)\}$

   b) $\{(-3,1),\ (-3,0),\ (4,2),\ (7,5)\}$

   c) $\{(-5,2),\ (1,2),\ (3,2),\ (5,2),(7,2)\}$

2. Proporcione el dominio y una fórmula sencilla para la regla de correspondencia de la función:

$$f=\{(0,1),\ (1,3),\ (2,5),\ (3,7),(4,9),(5,11)\}$$

3. Exhíbase el conjunto de pares ordenados que constituye a la función f, que tiene como dominio $\{-1/2,\ 0,\ 2/3,\ 5/2,\ 1\}$ y como regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 2$

4. Graficar la función $f(x) = 2x$ si:

a) $F: N \rightarrow N$

b) $F: Z \rightarrow Z$

c) $F: R \rightarrow R$

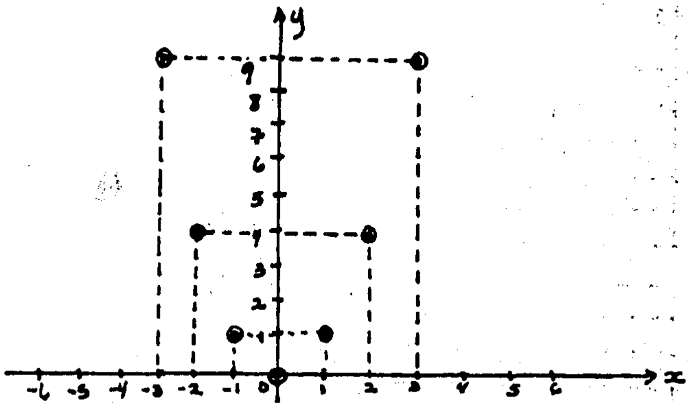
5. De las siguientes gráficas determina:

a) ¿Cuál es el dominio?

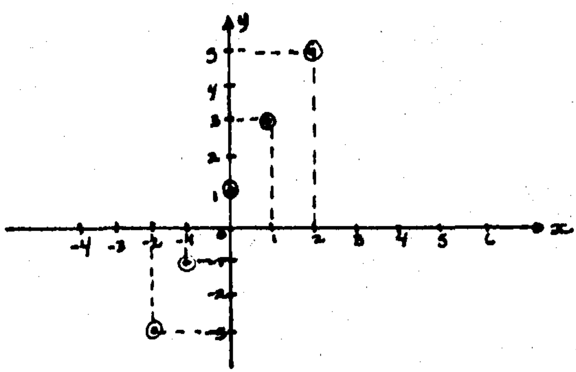
b) ¿Cuál es el rango?

c) Si es función o no

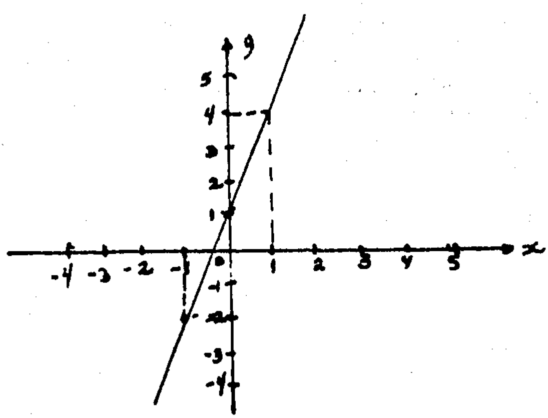
d) Diga cual es la regla de correspondencia i)


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x

ii)


y
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
-1
-2
-3

iii)


y
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4

iv)

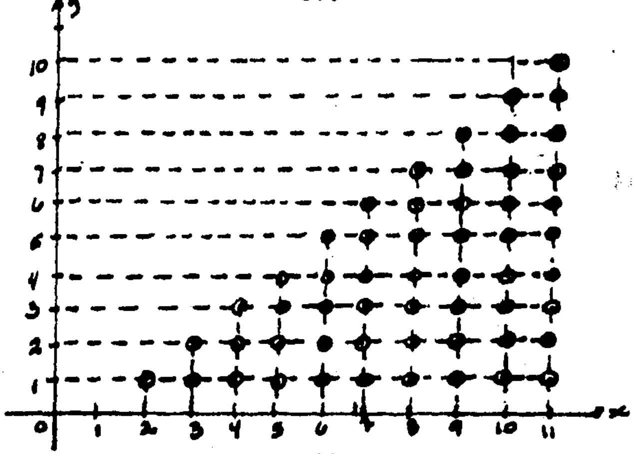
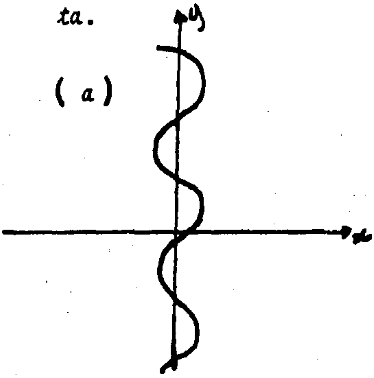


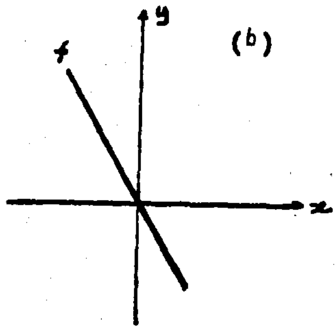
fig. 28

De las siguientes gráficas de relaciones de R→R indica cuales son funciones y cuales no, en cualquier caso justifica tu respuesta.

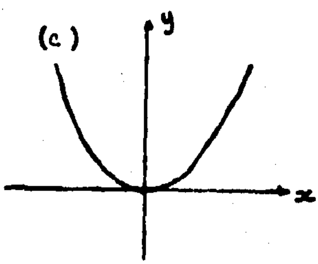
(a)



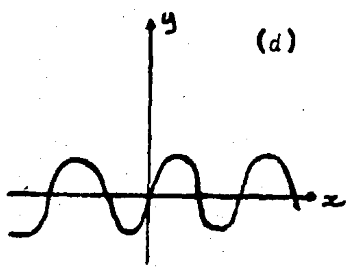
(b)



(c)



(d)



ACTIVIDAD DOCENTE No. 12
FUNCIONES

Objetivos:

Al finalizar la clase el alumno debe:

1. Conocer la generalidad de las funciones numéricas.
2. Mediante ejemplos concretos, explicar la generalidad de una función numérica.

Preguntas de Control.

¿Como es la gráfica de una relación que es función, Da un ejemplo.

¿Como es la gráfica de una relación que no es función? Da un ejemplo.

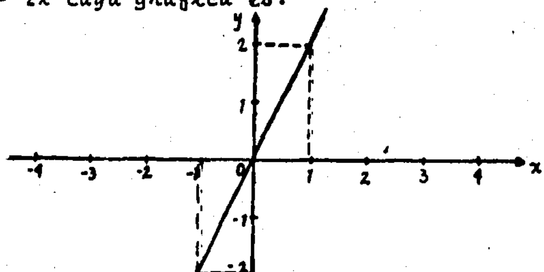
Introducción.

Por su importancia, en las siguientes clases, centraremos nuestra atención exclusivamente en aquellas relaciones que sean funciones y que tengan por dominio y codominio al conjunto de los números reales o bien subconjuntos de reales.

Tradicionalmente se empieza por dar una clasificación de funciones, y como existen diferentes formas de clasificarlas, encontramos distintas clasificaciones dependiendo de los criterios que el autor del texto tenga al respecto.

En estas notas, no empezaremos por hacer una clasificación mediante un listado, estudiaremos solo las funciones mas sencillas y conforme las vayamos abordando diremos como se les conoce.

Cuando iniciamos nuestro estudio de las relaciones numéricas, - las introducimos a partir de la relación producción-ingreso, donde la producción la representamos por otro conjunto de números, dicha relación resultó ser una función que tenía por regla de correspondencia $y = 2x$ cuya gráfica es:



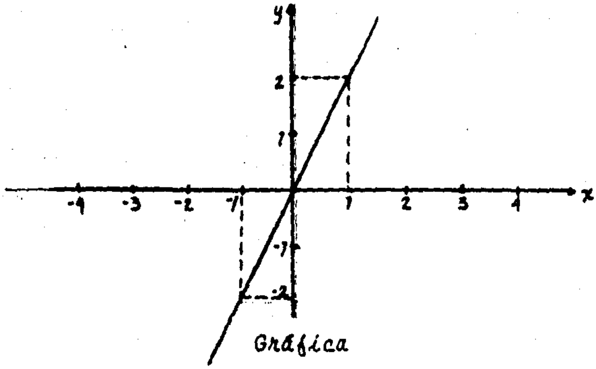
Un ejemplo físico muy usual es el de determinar la distancia -- que recorre un móvil que se mueve a una velocidad de 2 mt/seg, esto es, establecemos una relación entre el tiempo y la distancia - (tiempo-dominio, distancia-codominio), donde el tiempo y la distancia están representados por conjuntos de números, en el caso del - móvil, la regla de correspondencia resulta ser;

$$d = 2t \quad \text{donde } t \in D \text{ y } \quad d \in C$$

Si a la distancia d la representamos por y (de acuerdo a nuestro convenio, los elementos del codominio los representamos con la letra y) y el tiempo t por la x, la regla de correspondencia nos -- queda;

$$y = 2x \; .$$

cuya gráfica es:



Gráfica

Estos dos ejemplos, producción-ingreso y tiempo-distancia, de naturaleza totalmente distinta tienen una misma representación matemática, ésto es, una misma regla de correspondencia, por lo tanto una misma gráfica.

La pareja (2,4) en el primer ejemplo nos dice que a una producción de dos caramelos corresponde un ingreso de 4 pesos y en el segundo ejemplo, que a un tiempo de 2 segundos le corresponde una distancia de 4 mts.

Sin embargo, viendo la gráfica de la relación podemos apreciar, que mientras mayor sea el valor de x, mayor es el de y.

Una primer conclusión de éste hecho, es que distintas relaciones que se presentan, en los distintos campos del conocimiento, tienen una misma representación matemática. Dicho de otra forma una relación numérica tiene un carácter general, por lo tanto mas abstracta y desde luego de variada aplicación. En esta parte, al estudiar los distintos tipos de funciones, lo haremos de acuerdo a su comportamiento meramente matemático, el que se verá reflejado claramente, en el comportamiento de las gráficas. Para pasar posteriormente a ver aplicaciones en las distintas áreas del conocimiento.

Preguntas de Comprobación.

1. La relación Producción-Ingreso y la relación Tiempo-distancia, ¿son las mismas?
2. ¿Que tienen en común la relación Producción-Ingreso y la relación Tiempo-Distancia?

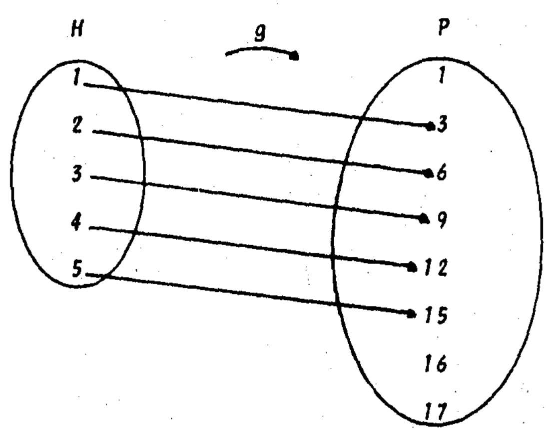
TAREA-EXAMEN

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Que se requiere para hacer una relación?
2. ¿Que es el dominio de una relación?
3. ¿Que es el codominio de una relación?
4. ¿Que es la regla de correspondencia?
5. ¿Que es el rango?
6. ¿El rango es un subconjunto del dominio o codominio?
7. ¿Que es la imagen de un elemento?
8. ¿Que es una pareja ordenada?
9. ¿Que es una relación?
10. ¿Cuándo decimos que una relación es función?

II. De los siguientes diagramas contesta lo que se indica.

1. SEa $g: H \rightarrow P$



a) El dominio de g es:

b) El rango de g es:

c) Escribe las imágenes que a continuación se piden.

$I_1 =$

$I_3 =$

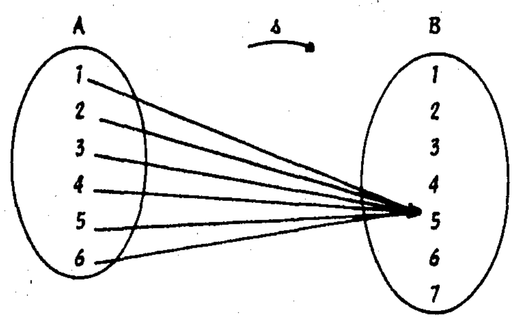
$I_4 =$

$I_5 =$

d) ¿Es función? ¿por qué?

e) ¿Cuál es la regla de correspondencia?

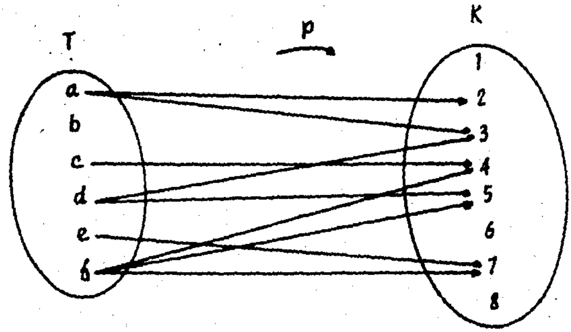
2. Sea $s: A \rightarrow B$



a) ¿Es función? ¿por qué ?

b) ¿Cuál es la regla de correspondencia?

3. Sea $P : T \to K$



a) $P = \{ \qquad\qquad \}$

$K = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

3. Escribe las imágenes que a continuación se piden:

$I_a =$

$I_b =$

$I_c =$

$I_f =$

4. El rango de P es:

5. ¿Es función? ¿por qué?

III. Encuentra la gráfica de las siguientes relaciones.

1. $S : N \to N = \{ (x,y) \mid y < 2x,\ x,y \in N \}$
2. $K : Z \to Z = \{ (x,y) \mid y = 3x,\ x,y \in Z \}$
3. $f : R \to R = \{ (x,y) \mid y = 2x-1,\ x,y \in R \}$