UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS


# LOGICA PARACONSISTENTE: UNA INTRODUCCION

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:


SONIA FAVELA VARA


MEXICO, D. F. 1985.

INDICE

PAGINA

# 1 PROLOGO.

1 PROLOGO.

El objetivo de este trabajo es el de explicar lo que es la lógica paraconsistente de una manera introductoria.

Para ubicarla dentro de la Lógica diremos primero que hay dos ramas de ésta: las clásicas y las no-clásicas.

Una lógica clásica es el cálculo de predicados de primer orden, o alguna extensión de éste tal como el cálculo de predicados de orden superior.

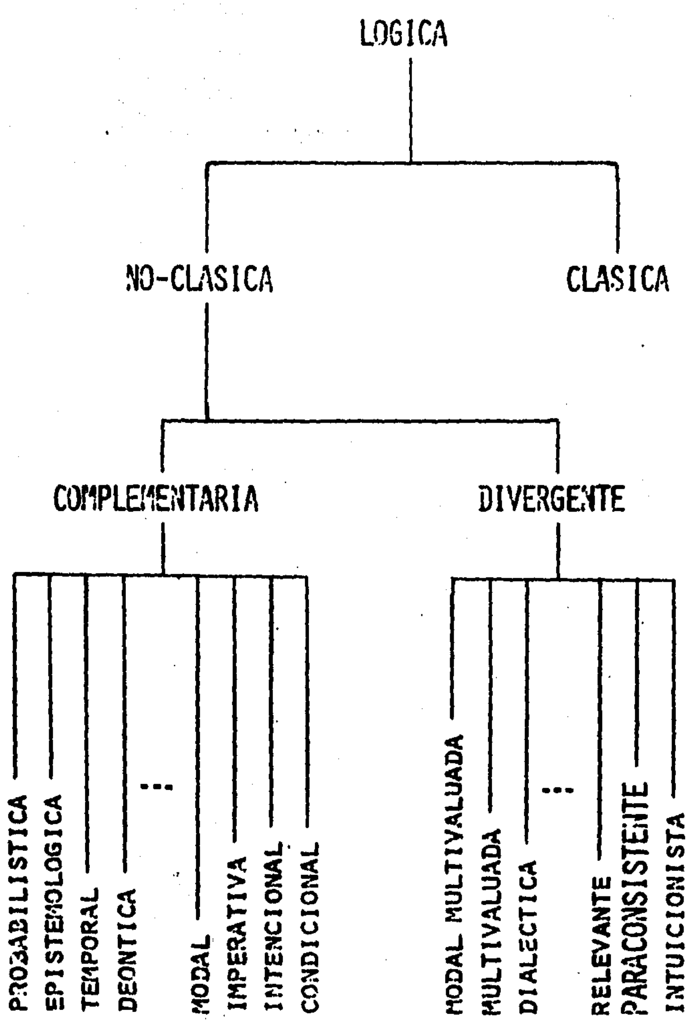
Una lógica no-clásica difiere de la clásica en que puede ser basada en lenguajes más ricos en modos de expresión, o en principios básicos totalmente distintos, o puede tener una diferente semántica.

Hay dos categorías principales de lógicas no-clásicas, las lógicas que son presentadas como complementarias a las lógicas clásicas y aquéllas que son alternativas a éstas; podríamos llamar a estas categorías como las lógicas complementarias y las lógicas divergentes.

Las lógicas divergentes son lógicas que son o pueden ser puestas como alternativas a las lógicas clásicas con el objeto de suprimirlas y ocupar su lugar en alguno o en todos los dominios del conocimiento, dentro de éstas se encuentra la lógica paraconsistente. (Ver figura sig.)

Antes de entrar en materia, daremos un poco de historia acerca de sus antecedentes, basándonos en un artículo escrito por Ayda I. Arruda, acerca de aspectos del desarrollo histórico de la Lógica Paraconsistente.

FIGURA


LOGICA
NO-CLASICA
CLASICA
COMPLEMENTARIA
DIVERGENTE
PROBABILISTICA
EPISTEMOLOGICA
TEMPORAL
DEONTICA
...
MODAL
IMPERATIVA
INTENCIONAL
CONDICIONAL
MODAL MULTIVALUADA
MULTIVALUADA
DIALECTICA
...
RELEVANTE
PARACONSISTENTE
INTUICIONISTA

# 2 ANTECEDENTES

## 2 ANTECEDENTES.

Podemos decir que una clase especial de Lógica empieza propiamente a existir solamente después de la construcción de al menos un cálculo de predicados de primer orden. De acuerdo a este punto de vista, podemos decir que la Lógica Paraconsistente es un campo de la Lógica creada por el logicista brasileño N.C.A. da Costa, en 1963.

Pero las ideas básicas de una nueva ciencia, o un campo de ésta, aparecen en muy diferentes lugares y durante un largo tiempo antes de que la ciencia sea realmente creada. La Lógica Paraconsistente no es una excepción, antes del trabajo de da Costa en 1963, encontramos las ideas principales de la Lógica Paraconsistente en los trabajos de Łukasiewicz, Vasil'év y especialmente de Jaśkowski.

El manejo de las contradicciones dialécticas influenció en la construcción de la Lógica Paraconsistente. Sin embargo, esta influencia no fue en el sentido de formalizar aspectos del discurso dialéctico, sino en el sentido de construir lógicas que pueden ser usadas como base para teorías inconsistentes pero no triviales en general. Consecuentemente, no consideramos aquí los estudios filosóficos en dialéctica durante el período de creación de la Lógica Paraconsistente. Otra fuente de inspiración para la creación de la Lógica Paraconsistente fueron las geometrías no euclidianas; esto aparece muy claro en el trabajo de Łukasiewicz y Vasil'év.

JAN ŁUKASIEWICZ (1878-1956).

Estrictamente hablando, Łukasiewicz no es un precursor de la Lógica Paraconsistente, es más bien un precursor de las lógicas no clásicas en general. Sus estudios de silogismos aristotélicos lo guiaron a darse cuenta de que la ley de contradicción, $\neg(A\&\neg A)$, pudiera no ser válida en general. Entonces él conjeturó que muchas leyes de lógica clásica juegan un papel similar al postulado de las paralelas en geometría y, consecuentemente, que una lógica sin una de estas leyes también merece, al menos en principio, ser estudiada.

Aunque Łukasiewicz no trató de construir ningún sistema de lógica paraconsistente, sus ideas influenciaron a su estudiante Jaśkowski en la construcción de la lógica discursiva, la cual es una clase de lógica paraconsistente.

NIKOLAJ A. VASIL'ÉV (1880-1940).

El primer precursor de la lógica paraconsistente es el logicista ruso N.A. Vasil'év, y sus motivaciones hacia una lógica no aristotélica son muy similares a aquéllas de Łukasiewicz, aunque seguramente trabajaron independientemente y no influyeron uno en otro.

En 1910, Vasil'év publicó su primer ensayo. Empezando con una nueva clasificación de juicios en juicios acer ca de hechos (en donde expresa un hecho ocurriendo en un instante fijo de tiempo), y juicios acerca de conceptos - (en donde expresa leyes no temporales), él concluye que - la lógica de juicios acerca de conceptos es una clase de lógica no aristotélica. Porque, de acuerdo con él, hay - solamente tres tipos diferentes de juicios acerca de conceptos: 'cada S es P', 'ningún S es P' y 'solamente algunos (no todos) S son P, y el resto no son P'. Cualesquiera dos de estos juicios no pueden ser simultáneamente -- ciertos, pero pueden ser ambos falsos. Entonces, para - los juicios acerca de conceptos Vasil'év establece una - clase de 'ley del cuarto excluído': 'Para cada concepto S y predicado P, sólo uno de estos juicios debe ser cierto, y un cuarto juicio no puede ser formulado'.

En 1912 y 1913, Vasil'év extendió su visión en su lógica no aristotélica de conceptos a una clase de lógica - que fue llamada lógica imaginaria. De acuerdo con él, cada sistema lógico está compuesto de dos partes: la metalógica, conteniendo las leyes del pensamiento la cual no -- puede ser eliminada porque un sistema sin ninguna de estas leyes no puede propiamente ser llamado lógica, y las bases ontológicas de lógica, conteniendo las leyes dependiendo de las propiedades de los objetos que consideramos. La metalógica es la misma para todos los sistemas posibles, pero no las bases ontológicas de la lógica. De -- acuerdo con Vasil'év, la metalógica es la 'primera lógica', anterior a cada lógica; además, para él, la metalógica es la lógica de sólo una clase de juicios: juicios -- afirmativos; una lógica de 'dimensión uno', en su terminología. Para él, empezando desde la metalógica podemos -- construir la lógica aristotélica sumando juicios de una - nueva clase, los juicios negativos. Así, la lógica aristotélica es una lógica de 'dimensión dos', pues tiene juicios de dos clases diferentes. Desde la lógica aristotélica podemos construir la lógica imaginaria de 'dimensión tres', sumando juicios de una tercera clase, i.e., 'juicios indiferentes': 'S es P y no P'. El nombre lógica imaginaria viene del hecho de que Vasil'év no cree que las contradicciones existan en nuestro mundo real, solamente en un mundo posible creado por nuestra mente. Así, Vasil'év hipotetiza mundos imaginarios de cualquier 'dimensión lógica' finita $n$, i.e., una lógica con juicios de $n$ clases diferentes. Teóricamente, de acuerdo con él, desde una lógica de dimensión $n$, $n \geq 1$, es posible construir una lógica de dimensión $n+1$ adhiriendo juicios de una clase $(n+1)$-aria. Aquí, como en todos los ensayos de Vasil'év, la principal fuente de inspiración es la geometría no euclidiana, y él hizo más con la lógica aristotélica que lo que Lobachewski hizo con la geometría euclidiana. El no tuvo un éxito completo, pero presentó un buen resumen de sus concepciones.

En la lógica imaginaria de Vasil'év de dimensión tres, la ley ontológica de contradicción -Un objeto no puede tener un predicado que lo contradice- no es válida, mas una ley metalógica de no autocontradicción -Uno y el mismo juicio no pueden ser simultáneamente verdadero y falso- es válida.

Aunque A. Church incluye ensayos de Vasil'év en su bibliografía de lógica simbólica, permanecen casi desconocidos hasta 1962. Cuando se redescubrieron, fueron primeramente interpretados como lógicas multivaluadas. Por estos hechos, sus ideas no influenciaron, como pudieron hacerlo, al desarrollo de la Lógica Paraconsistente.

STANISLAW JAŚKOWSKI (1906-1965).

Jaśkowski fue el primer logicista en construir un -- sistema formal de lógica proposicional paraconsistente, - inspirado por los trabajos de Łukasiewicz sobre el principio de contradicción de Aristóteles.

El ensayo de Jaśkowski en lógica discusiva (algunas veces referida como discursiva) apareció originalmente en Polonia en 1948, y en una traducción al inglés, en 1969. Las principales motivaciones de Jaśkowski para construir la lógica discusiva son las siguientes: 1) El problema de sistematización de teorías que contengan contradicciones como ocurre en la dialéctica; 2) El estudio de teorías -- donde hay contradicciones causadas por vaguedades; 3) El estudio directo de algunas teorías empíricas cuyos postulados o suposiciones básicas son contradictorias.

Jaśkowski hizo una clara distinción entre sistemas - contradictorios (aquéllos que incluyen dos tesis tales -- que una es contradicción de la otra), y sistemas sobre--- completos (aquéllos en donde todas las fórmulas son tesis). Así pues, la lógica clásica no es adecuada para el estu-- dio de los sistemas contradictorios pero no sobre-completos por la ley $p\rightarrow(\neg p\rightarrow q)$, la cual él llama ley de implicación de sobre-completez. Así, el problema de la lógica - para sistemas contradictorios es formulado por él de la - siguiente manera: '...la tarea es encontrar un sistema de cálculo de enunciados el cual: 1) cuando aplicamos sistemas contradictorios deben no siempre ocasionar su sobre-- completez; 2) debe ser suficientemente rico para hacer po sible practicar inferencias; 3) debe tener una justificación intuitiva. Obviamente, estas condiciones no determinan unívocamente una solución, ya que pueden ser justificadas en varios grados, la satisfacción de la condición 3 es algo difícil de apreciar objetivamente'.

El menciona algunos sistemas ya conocidos en los cuales la ley de sobre-completez no es válida en general. Más, de acuerdo con él, ninguno de estos sistemas proveen una buena solución al problema de la lógica de sistemas contradictorios.

Así, Jaśkowski propone su propia solución, su lógica discusiva. El término 'lógica discusiva' viene de lo siguiente. Consideremos que las tesis propuestas por varios participantes en una discusión contienen términos cuyo significado es impreciso. Si tales tesis son combinadas en un sistema deductivo, entonces sus consecuencias no reflejan una opinión uniforme. Consecuentemente, las tesis de tal sistema (el cual expresa las opiniones probables de los participantes en la discusión) deben ser intuitivamente interpretadas como si fueran precedidas por el símbolo de posibilidad, $\Diamond$.

Para describir su lógica discusiva, Jaśkowski da las siguientes definiciones:

DEF. 1.- Implicación discusiva:

$$p \to_d q =_{df} \Diamond p \to q \quad \text{(el símbolo } \Diamond \text{ sólo afecta a p)}$$

DEF. 2.- Equivalencia discusiva:

$$p \leftrightarrow_d q =_{df} (\Diamond p \to q) \,\&\, (\Diamond q \to p)$$

NEWTON C.A. DA COSTA

En 1958, da Costa empezó a trabajar sobre sus ideas acerca de la importancia del estudio de teorías contradictorias. De acuerdo con él, las teorías contradictorias no pueden ser excluidas a priori, porque la elección de los postulados de una teoría es libre y hay de hecho teorías cuyas suposiciones iniciales implican contradicciones determinantes. Para él, las teorías consistentes e inconsistentes tienen el mismo status lógico. La única particularidad de las teorías inconsistentes es que deben ser basadas en sistemas lógicos diferentes al clásico, porque de otra manera deberán ser triviales (lo que Jaśkowski llamó sobre-completo).

Estas ideas fueron completamente trabajadas en 1963 cuando publicó un trabajo conteniendo su jerarquía de lógicas de primer orden para el estudio de teorías inconsistentes y las aplicó para la construcción de conjuntos de teorías inconsistentes pero aparentemente no-triviales.

En los siguientes capítulos trataremos la lógica y semántica paraconsistente tal como él las expone en unas notas de lógicas no-clásicas en 1983.

# 3 LOGICA PARACONSISTENTE

# 3 LOGICA PARACONSISTENTE.

## 1.- PRELIMINARES.

Un sistema formal S es inconsistente si hay una fórmula A del lenguaje de S tal que A y su negación, ¬A, son ambas teoremas de este sistema. En el caso opuesto, S es consistente. S es trivial si todas las fórmulas de su lenguaje son teoremas. Si hay al menos una fórmula indemostrable en S, S es no-trivial.

Si la lógica fundamental de S es la clásica, entonces S es trivial si, y solo si, S es inconsistente[1]. Por consiguiente, empleando tales lógicas, los sistemas inconsistentes no presentan ningún interés lógico-matemático. Usualmente, tratamos de cambiar las teorías inconsistentes para transformarlas en consistentes. Es claro que bajo esta transformación algunas propiedades características de una teoría inconsistente dada deben ser preservadas; por ejemplo, el sistema formal común de la teoría de conjuntos preserva ciertas características de una teoría intuitiva de conjuntos que puede ser inconsistente.

Sin embargo, hay ciertos casos en los cuales podríamos pensar en estudiar directamente una teoría inconsistente. Por ejemplo, una teoría de conjuntos conteniendo la clase de Russell (la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas) como un conjunto existente. -

---

[1]*Si la lógica fundamental de S es la clásica, será teorema de S cualquier fórmula de la forma $A \to (\neg A \to B)$ y será una regla de S el 'modus ponens'; así si S es inconsistente, habrá una fórmula A del lenguaje de S tal que ambas A y ¬A son teoremas de S. De lo anterior se desprende que cualquier fórmula B será teorema de S.*
*Ahora bien, si S es trivial, entonces claramente S es inconsistente.*

Pero, si intentamos hacer esto, debemos construir nuevos tipos de lógicas. De hecho, sin usar las nuevas lógicas, los sistemas inconsistentes perderían su importancia lógico-matemática.

Parece conveniente insistir en el siguiente punto: dado un sistema inconsistente S, nuestro fin no es eliminar las posibles paradojas o inconsistencias de S, sino derivar tantas paradojas como sea conveniente, para analizarlas y estudiarlas. Sin embargo, esto no significa que queramos que cada fórmula del lenguaje de S y su negación sean teoremas. Intuitivamente hablando, en una teoría inconsistente S, presentando un interés real, hay 'buenos' teoremas, cuyas negaciones no son demostrables, y 'malos' teoremas, cuyas negaciones son también teoremas. Por lo anterior es claro que la negación en el sistema inconsistente S, no se comporta igual que la negación clásica.

En la lógica paraconsistente estudiamos los sistemas lógicos que pueden funcionar como lógicas fundamentales de teorías inconsistentes pero no-triviales. A continuación consideraremos algunos aspectos de la paraconsistencia.

## 2.- LOS CALCULOS $C_n$, $C_n^*$ y $C_n^=$.

Presentamos en esta sección ciertos cálculos proposicionales $C_n$, $1 \leq n \leq w$. Después, procederemos con la construcción del cálculo de predicados de primer orden correspondiente, sin la igualdad, $C_n^*$, $1 \leq n \leq w$, y con la igualdad, $C_n^=$, $1 \leq n \leq w$. $C_0$, $C_0^*$ y $C_0^=$ denotarán respectivamente al cálculo proposicional clásico, el cálculo de predicados de primer orden clásico sin igualdad y el cálculo de predicados clásico con la igualdad. Estos nuevos cálculos pueden ser usados como fundamentos para teorías inconsistentes no-triviales, como veremos más adelante. La metalógica usada será la lógica clásica de primer orden, los símbolos lógicos serán las variables proposicionales, $\to$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, (, ), $=$. Las nociones de fórmula, prueba (formal), etc., son definidas como es usual.

### 2.1 EL CALCULO $C_n$, $1 \leq n \leq w$.

Como $C_n$, $1 \leq n \leq w$, intentan servir como bases para teorías inconsistentes no-triviales, parece natural que satisfagan las siguientes condiciones:

I) En este cálculo el principio de no-contradicción, $\neg(A \& \neg A)$, no debe ser un esquema válido.

II) De dos fórmulas contradictorias, A y $\neg$A, no será posible en general deducir una fórmula arbitraria B.

III) Debe ser simple extender $C_n$, $1 \leq n \leq w$, al correspondiente cálculo de predicados de primer orden (con o sin igualdad).

IV) $C_n$, $1 \leq n \leq w$, deben contener la mayoría de los esquemas y reglas de $C_0$, que no interfieran con las primeras condiciones. (Evidentemente, las últimas dos condiciones son vagas).

### 2.1.1 EL CALCULO $\mathcal{C}_1$.

Empezaremos con introducir el cálculo $\mathcal{C}_1$, que tiene los siguientes postulados, donde $A^\circ$ es una abreviación para $\neg(A \& \neg A)$:

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

(3) $$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

(4) $A \& B \to A$

(5) $A \& B \to B$

(6) $A \to (B \to A \& B)$

(7) $A \to A \vee B$

(8) $B \to A \vee B$

(9) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

(10) $A \vee \neg A$

(11) $\neg\neg A \to A$

(12) $B^\circ \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

(13) $A^\circ \& B^\circ \to (A \& B)^\circ$

(14) $A^\circ \& B^\circ \to (A \vee B)^\circ$

(15) $A^\circ \& B^\circ \to (A \to B)^\circ$

Tenemos:

TEOREMA 1.- En $C_J$ las siguientes reglas de deducción del cálculo proposicional son verdaderas; con A, B y C -- fórmulas y $\Gamma$ cualquier conjunto de fórmulas.

| | (Introducción) | (Eliminación) |
|---|---|---|
| (Implicación) | Si $\Gamma, A \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ (Metateorema de la deducción) | $A, A \rightarrow B \vdash B$ (Modus Ponens) |
| (Conjunción) | $A, B \vdash A \& B$ | $A \& B \vdash A$<br>$A \& B \vdash B$ |
| (Disyunción) | $A \vdash A \vee B$<br>$B \vdash A \vee B$ | Si $\Gamma, A \vdash C$ y $\Gamma, B \vdash C$ entonces $\Gamma, A \vee B \vdash C$ (Prueba por casos) |
| (Negación) | | $\neg\neg A \vdash A$ (Regla de la doble negación) |

Obsérvese que la regla de introducción de la nega--ción o reducción al absurdo (Si $\Gamma, A \vdash B$ y $\Gamma, A \vdash \neg B$ en--tonces $\Gamma \vdash \neg A$) no es válida; en $C_J$ puede ser dicha como - sigue:

Si $\Gamma, A \vdash B^{\circ}$; $\Gamma, A \vdash B$ y $\Gamma, A \vdash \neg B$ entonces $\Gamma \vdash \neg A$.

TEOREMA 2.- Entre otros, los siguientes esquemas no son válidos en $C_J$:

| | | |
|---|---|---|
| $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ | $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ |
| $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ | $A \& \neg A \rightarrow B$ | $A \& \neg A \rightarrow \neg B$ |
| $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ | $A \rightarrow \neg\neg A$ | $(A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow B$ |
| $(A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow \neg B$ | $\neg(A \& \neg A)$ | $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ |
| $(A \vee B) \& \neg A \rightarrow B$ | $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | $A \leftrightarrow \neg\neg A$ |

Donde $A \leftrightarrow B$ representa $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$

Dem.- Es suficiente con emplear las siguientes matrices:

| A&B:A \ B | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

| A∨B:A \ B | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 3 |

| A→B:A \ B | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |

| ¬A:A | ¬A |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |

donde 1 y 2 son los valores de verdad designados.

Con ellas, todos los axiomas de $C_1$ toman valores designados, Modus Ponens preserva valores designados y los esquemas no válidos toman algún valor 3.

TEOREMA 3.- En $C_1$ todos los esquemas y reglas de deducción del cálculo proposicional clásico positivo son verdaderos, y si adjuntamos a $C_1$ el principio de contradicción, obtenemos $C_0$. En $C_1$ tenemos también:

$B^\circ,\ A\to B \vdash \neg B\to\neg A$ $\qquad$ $B^\circ,\ A\to\neg B \vdash B\to\neg A$

$B^\circ,\ \neg A\to B \vdash \neg B\to A$ $\qquad$ $B^\circ,\ \neg A\to\neg B \vdash B\to A$

$\vdash (A\to\neg A)\to\neg A$ $\qquad$ $\vdash (\neg A\to A)\to A$

$\vdash A^\circ\to(\neg A)^\circ$ $\qquad$ $A^\circ \vdash A\leftrightarrow\neg\neg A$

Dem.- Demostraremos $\vdash A^\circ\to(\neg A)^\circ$ para lo cual basta con demostrar $A^\circ \vdash (\neg A)^\circ$ por el teorema 1.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg(A\&\neg A)=A^\circ$ | Hipótesis |
| 2. | $\neg A\&\neg\neg A\to\neg\neg A$ | Postulado 5 |
| 3. | $\neg\neg A\to A$ | Postulado 11 |
| 4. | $\neg A\&\neg\neg A\to A$ | Trans. 2, 3 |
| 5. | $\neg A\&\neg\neg A\to\neg A$ | Postulado 4 |
| 6. | $A^\circ\to((\neg A\&\neg\neg A\to A)\to((\neg A\&\neg\neg A\to\neg A)\to\neg(\neg A\&\neg\neg A)))$ | Postulado 12 |
| 7. | $(\neg A\&\neg\neg A\to A)\to((\neg A\&\neg\neg A\to\neg A)\to\neg(\neg A\&\neg\neg A))$ | M.P. 1, 6 |
| 8. | $(\neg A\&\neg\neg A\to\neg A)\to\neg(\neg A\&\neg\neg A)$ | M.P. 4, 7 |
| 9. | $\neg(\neg A\&\neg\neg A)=(\neg A)^\circ$ | M.P. 5, 8 |

TEOREMA 4.- Si las fórmulas atómicas de $\Gamma$, A son $A_1, A_2, \ldots, A_m$ entonces $\Gamma \vdash A$ en $C_0$ si y solo si $\Gamma, A_1^\circ, A_2^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash A$ en $C_1$.

Dem.-

$\Rightarrow$) Supongamos $\Gamma \vdash A$ en $C_0$ entonces existen $B_1, \ldots, B_n$ con $B_n = A$ fórmulas tales que $B_i$ es elemento de $\Gamma$ o axioma de $C_0$ o consecuencia de anteriores por Modus Ponens para $1 \leq i \leq n$.

P.D. $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_i$ en $C_1$ para $1 \leq i \leq n$ por inducción sobre $i$.

$$B_i \text{ es } \begin{cases} \text{elemento de } \Gamma \\ \text{axioma de } C_0 \\ \text{consecuencia de anteriores por M.P.} \end{cases}$$

A) Si $B_i$ es elemento de $\Gamma$; $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_i$ en $C_1$.

B) Si $B_i$ es axioma de $C_0$:

i) Si $B_i$ es una instancia del postulado $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$, sin pérdida de generalidad, todas las fórmulas atómicas de B son fórmulas atómicas de $\Gamma$ o A entonces por los postulados (13), (14) y (15) y el teorema 3 tenemos que $A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B^\circ$ en $C_1$ y además $B^\circ \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ es postulado de $C_1$ por lo tanto $A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) = B_i$ en $C_1$ entonces $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_i$ en $C_1$.

ii) Si $B_i$ no es una instancia del postulado $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ entonces $B_i$ es axioma de $C_1$ por lo tanto $\vdash B_i$ en $C_1$ entonces $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_i$ en $C_1$.

C) Si $B_i$ es consecuencia de anteriores por Modus Ponens, existen $i_1, i_2 < i$ tales que $B_{i_2} = B_{i_1} \to B_i$ pero por hipótesis de inducción tenemos que $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_{i_1}$ en $C_1$ y $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_{i_1} \to B_i$ en $C_1$, por lo tanto $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_i$ en $C_1$ por Modus Ponens.

Entonces para toda $i$ tal que $1 \leq i \leq n$ $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_i$ en $C_1$, en particular $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash B_n$ en $C_1$ es decir, $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash A$ en $C_1$ que es lo queríamos demostrar.

<=) Supongamos $\Gamma, A_1^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash A$ en $C_1$ entonces existen $B_1, \ldots, B_n = A$ fórmulas tales que $B_i$ es elemento de $\Gamma$, o $A_j^\circ$ para alguna $j$ tal que $1 \leq j \leq m$, o axioma de $C_1$, o consecuencia de anteriores por Modus Ponens, para $1 \leq i \leq n$.

P.D. $\Gamma \vdash B_i$ en $C_0$ para $1 \leq i \leq n$, por inducción sobre $i$.

$B_i$ es
- elemento de $\Gamma$
- $A_j^\circ$ para alguna $j$ tal que $1 \leq j \leq m$
- axioma de $C_1$
- consecuencia de anteriores por M.P.

A) Si $B_i$ es elemento de $\Gamma$, $\Gamma \vdash B_i$ en $C_0$.

B) Si $B_i = A_j^\circ$ para alguna $j$ tal que $1 \leq j \leq m$, $B_i = \neg(A_j \& \neg A_j)$ entonces $\vdash B_i$ en $C_0$ por lo tanto $\Gamma \vdash B_i$ en $C_0$.

C) Si $B_i$ es axioma de $C_1$, $B_i$ es axioma o teorema de $C_0$, por lo tanto $\Gamma \vdash B_i$ en $C_0$.

D) Si $B_i$ es consecuencia de anteriores por Modus Ponens, existen $i_1, i_2 < i$ tales que $B_{i_2} = B_{i_1} \to B_i$ pero por hipótesis de inducción tenemos que $\Gamma \vdash B_{i_1}$ en $C_0$ y $\Gamma \vdash B_{i_1} \to B_i$ en $C_0$ por lo tanto $\Gamma \vdash B_i$ en $C_0$ por Modus Ponens.

Entonces para toda $i$ tal que $1 \leq i \leq n$, $\Gamma \vdash B_i$ en $C_0$, en particular $\Gamma \vdash B_n$ en $C_0$ es decir $\Gamma \vdash A$ en $C_0$ que es lo que queríamos demostrar.

DEFINICION 1.- $\neg^* A \underset{def}{=} \neg A \& A^\circ$

$\neg^* A$ es llamada la negación fuerte de A

TEOREMA 5.- En $C_1$ $\neg^*$ tiene todas las propiedades de la negación clásica. Por ejemplo tenemos:

| | | |
|---|---|---|
| $\vdash A \vee \neg^* A$ | $\vdash \neg^*(A \& \neg^* A)$ | $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg^* B) \to \neg^* A)$ |
| $\vdash A \leftrightarrow \neg^* \neg^* A$ | $\vdash \neg^* A \to (A \to B)$ | $\vdash (A \leftrightarrow \neg^* A) \to B$ |

Dem.- Demostraremos $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg^* B) \to \neg^* A)$. Por el teorema 1, basta con demostrar $A \to B, A \to \neg^* B \vdash \neg^* A$, como $\neg^* A = \neg A \& A^\circ$ demostraremos $A \to B, A \to \neg^* B \vdash \neg A$ y

$A \to B, A \to \neg^* B \vdash A^\circ$.

Tenemos que $A \to \neg^* B = A \to (\neg B \& B^\circ)$ y $\neg B \& B^\circ \to \neg B$, $\neg B \& B^\circ \to B^\circ$ entonces $A \to \neg^* B \vdash A \to \neg B$ y $A \to \neg^* B \vdash A \to B^\circ$ por transitividad de la implicación; por lo tanto basta con demostrar que $\Gamma \vdash \neg A$ y $\Gamma \vdash A^\circ$ con $\Gamma = \{A \to B, A \to \neg B, A \to B^\circ\}$.

A) $A, \Gamma \vdash B$; $A, \Gamma \vdash \neg B$: $A, \Gamma \vdash B^\circ$ entonces $A, \Gamma \vdash \neg A$ por teorema 1, $\neg A, \Gamma \vdash \neg A$, por lo tanto $A \vee \neg A, \Gamma \vdash \neg A$ por teorema 1, pero $A \vee \neg A$ es axioma por lo tanto $\Gamma \vdash \neg A$.

B) $A^\circ, \Gamma \vdash A^\circ$ por definición de deducción, $\neg A^\circ; \Gamma \vdash A^\circ$:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg A^\circ = \neg\neg(A \& \neg A)$ | Hipótesis |
| 2) | $\neg\neg(A \& \neg A) \to A \& \neg A$ | Postulado 11 |
| 3) | $A \& \neg A$ | M.P. 1, 2 |
| 4) | $A \& \neg A \to A$ | Postulado 4 |
| 5) | $A$ | M.P. 3, 4 |
| 6) | $A \to B$ | Hipótesis |
| 7) | $A \to \neg B$ | Hipótesis |
| 8) | $A \to B^\circ$ | Hipótesis |
| 9) | $B$ | M.P. 5, 6 |
| 10) | $\neg B$ | M.P. 5, 7 |
| 11) | $B^\circ$ | M.P. 5, 8 |
| 12) | $B \& \neg B$ | Teorema 1 y 9, 10 |
| 13) | $(B \& \neg B) \to (A \& \neg A \to B \& \neg B)$ | Postulado 1 |
| 14) | $A \& \neg A \to B \& \neg B$ | M.P. 12, 13 |

15) $\neg(B\&\neg B)\to\neg(A\&\neg A)=B^\circ\to A^\circ$ Teorema 3 y 11, 14, Pos. 13

16) $A^\circ$ M.P. 11, 15

Por lo tanto $\Gamma, \neg A^\circ \vdash A^\circ$ y $\Gamma, A^\circ \vdash A^\circ$ entonces por teorema 1, $\Gamma, A^\circ\vee\neg A^\circ \vdash A^\circ$ pero $A^\circ\vee\neg A^\circ$ es axioma de $C_1$ por lo tanto $\Gamma \vdash A^\circ$.

Entonces tenemos $\vdash (A\to B)\to((A\to\neg^*B)\to\neg^*A)$ que es lo queríamos demostrar.

TEOREMA 6.- $C_1$ es consistente.

Dem.- Supongamos que $C_1$ es inconsistente, entonces existe una fórmula A tal que $\vdash A$ y $\vdash\neg A$ en $C_1$, sean $A_1^\circ,\ldots, A_m^\circ$ las fórmulas atómicas de A entonces $A_1^\circ,\ldots, A_m^\circ \vdash A$ y $A_1^\circ,\ldots, A_m^\circ \vdash\neg A$ en $C_1$, así por el teorema 4, $\vdash A$ y $\vdash\neg A$ en $C_0$ entonces $C_0$ sería inconsistente ¥, por lo tanto $C_1$ es consistente.

DEFINICION 2.- Un sistema no-trivial S es finitamente trivializable si hay una fórmula F (no un esquema) tal que, anexando F a S como nuevo axioma, el sistema resultante es trivial.

TEOREMA 7.- $C_1$ es finitamente trivializable.

Dem.- Sea A fórmula en el lenguaje de $C_1$ tal que $\vdash A$ y $F=\neg^*A$, por el teorema 5 tenemos $\vdash\neg^*A\to(A\to B)$ para cualquier fórmula B del lenguaje de $C_1$ entonces, aplicando Modus Ponens, se demuestra que el sistema $C_1\cup\{F\}$ es trivial.

### 2.1.2 EL CALCULO $C_n$, $n>1$.

$C_1$ no es el único cálculo proposicional que satisface las condiciones I-IV. Dejando a un lado otras posibilidades, describiremos una jerarquía de cálculos $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$, ..., $C_\omega$, teniendo propiedades similares a aquellas de $C_1$. Para introducir $C_n$ $1<n<\omega$, es conveniente abreviar $A^{\circ\circ\cdots\circ}$, donde el símbolo $^\circ$ aparece $m$ veces, $m\geq 1$, por $A^m$, y $A^1 \& A^2 \& \ldots \& A^m$ por $A^{(m)}$. Los postulados de $C_n$, $1\leq n<\omega$, son los de $C_1$, exceptuando los postulados (12)-(15), que son reemplazados por los siguientes:

(12') $B^{(n)} \to ((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$
(13') $A^{(n)} \& B^{(n)} \to (A\& B)^{(n)}$
(14') $A^{(n)} \& B^{(n)} \to (A\vee B)^{(n)}$
(15') $A^{(n)} \& B^{(n)} \to (A\to B)^{(n)}$

Los postulados de $C_\omega$ son (1)-(11) de $C_1$.

Obsérvese que $A^\circ = A^1 = A^{(1)}$ y $A^1 \neq A^2 \neq A^{(2)}$.

DEFINICION 3.- $\neg^{(n)}A =_{def} \neg A \& A^{(n)}$, $n\geq 1$.
En particular, $\neg^{*}A$ y $\neg^{(1)}A$ son abreviaciones de $\neg A \& A^\circ$.

TEOREMA 8.- En $C_n$, $1\leq n<\omega$, $\neg^{(n)}$ tiene todas las propiedades de la negación clásica.

TEOREMA 9.- Cada cálculo perteneciente a la jerarquía $C_n$, $0\leq n<\omega$, es finitamente trivializable. $C_\omega$ no es finitamente trivializable.

TEOREMA 10.- Cada cálculo de la jerarquía $C_0$, $C_1$,..., $C_\omega$ es estrictamente más fuerte que aquél que le sigue.

<u>Dem</u>.- Demostraremos que cada postulado de $C_{n+1}$ es postulado o teorema de $C_n$. entonces todo teorema de $C_{n+1}$ es teorema de $C_n$ por lo tanto $C_{n+1} \subseteq C_n$.

Por el teorema 2 tenemos que $C_1 \subsetneq C_0$, análogamente $C_{n+1} \subsetneq C_n$.

Como los postulados 1-11 de $C_{n+1}$ son postulados de $C_n$, es suficiente demostrar que los postulados 12' y 13' de $C_{n+1}$ son teoremas de $C_n$, para los postulados 14' y 15' la demostración es análoga a la del postulado 13'.

(12') P.D. $\vdash B^{(n+1)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ en $C_n$ para $n \geq 0$.

Para $n=0$, $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ en $C_0$ entonces $\vdash B^{(1)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ en $C_0$.

Para $n>0$

1) $B^{(n)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ Postulado 12'
2) $B^{(n+1)} = B^{(n)} \& B^{n+1} \to B^{(n)}$ Postulado 4
3) $B^{(n+1)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ Transitividad $\to$

Por lo tanto $\vdash B^{(n+1)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ en $C_n$.

(13') P.D. $\vdash A^{(n+1)} \& B^{(n+1)} \to (A \& B)^{(n+1)}$ en $C_n$ para $n \geq 0$.

Para $n=0$, $\vdash \neg((A \& B) \& \neg(A \& B)) = (A \& B)^{(1)}$ en $C_0$ entonces $\vdash A^{(1)} \& B^{(1)} \to (A \& B)^{(1)}$ en $C_0$.

Para $n>0$

i) Demostraremos $A^{(n)} \vdash A^{(n+1)}$ en $C_n$.
Como $A^{(n+1)} = A^{(n)} \& A^{n+1}$ por definición, basta con demostrar $A^{(n)} \vdash A^{n+1}$.

Primero demostraremos por inducción sobre $k$ el lema $A^k \& \neg A^k \vdash A \& \neg A$ en $C_n$, para $k>0$.

Para $k=1$

$A^1 \& \neg A^1 \vdash \neg A^1 = \neg\neg(A \& \neg A)$

pero $\neg\neg(A \& \neg A) \to A \& \neg A$ por postulado 11

por lo tanto $A^1 \& \neg A^1 \vdash A \& \neg A$

Para $k+1$

Supongamos para $k$,

$A^{k+1}\&\neg A^{k+1}=(A^k)'\&\neg(A^k)' \vdash A^k\&\neg A^k$

por base inductiva, y $A^k\&\neg A^k \vdash A\&\neg A$ por hipótesis de inducción, por lo tanto $A^{k+1}\&\neg A^{k+1} \vdash A\&\neg A$.

Entonces, como caso particular tenemos $A^n\&\neg A^n \vdash A\&\neg A$ en $C_n$, por lo tanto $\vdash (A^n\&\neg A^n)\to A\&\neg A$ en $C_n$.

P.D. $A^{(n)} \vdash A^{n+1}$

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $A^{(n)}$ | Hipótesis |
| 2) | $(A^n\&\neg A^n)\to A\&\neg A$ | Lema |
| 3) | $A\&\neg A\to A$ | Postulado 4 |
| 4) | $A\&\neg A\to\neg A$ | Postulado 5 |
| 5) | $(A^n\&\neg A^n)\to A$ | Trans. $\to$ 2, 3 |
| 6) | $(A^n\&\neg A^n)\to\neg A$ | Trans. $\to$ 2, 4 |
| 7) | $A^{(n)}\to((A^n\&\neg A^n\to A)\to((A^n\&\neg A^n\to\neg A)\to\neg(A^n\&\neg A^n)))$ | Postulado 12' |
| 8) | $(A^n\&\neg A^n\to A)\to((A^n\&\neg A^n\to\neg A)\to\neg(A^n\&\neg A^n))$ | M.P. 1, 7 |
| 9) | $(A^n\&\neg A^n\to\neg A)\to\neg(A^n\&\neg A^n)$ | M.P. 5, 8 |
| 10) | $\neg(A^n\&\neg A^n)=A^{n+1}$ | M.P. 6, 9 |

ii) P.D. $\vdash A^{(n+1)}\&B^{(n+1)}\to(A\&B)^{(n+1)}$

$A^{(n+1)}\&B^{(n+1)}=A^{(n)}\&A^{n+1}\&B^{(n)}\&B^{n+1} \vdash A^{(n)}\&B^{(n)}$ como $A^{(n)}\&B^{(n)}\to(A\&B)^{(n)}$ por postulado 13', tenemos que $A^{(n+1)}\&B^{(n+1)} \vdash (A\&B)^{(n)}$ pero por el teorema (i) anterior $(A\&B)^{(n)} \vdash (A\&B)^{(n+1)}$ entonces por transitividad $A^{(n+1)}\&B^{(n+1)} \vdash (A\&B)^{(n+1)}$ por lo tanto $\vdash A^{(n+1)}\&B^{(n+1)}\to(A\&B)^{(n+1)}$ que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA 11 (ARRUDA).- Los cálculos $C_n$, $1\leq n\leq w$, no son decidibles por matrices finitas.

TEOREMA 12 (FIDEL).- Los cálculos $C_n$, $1\leq n\leq w$, son decidibles.

TEOREMA 13.- Los esquemas del teorema 2 no son válidos en $C_n$, $1\leq n\leq w$.

TEOREMA 14.- En $C_n$, $1\leq n<w$ se tiene:

| | |
|---|---|
| $B^{(n)}, A\rightarrow B \vdash \neg B\rightarrow\neg A$ | $B^{(n)}, A\rightarrow\neg B \vdash B\rightarrow\neg A$ |
| $B^{(n)}, \neg A\rightarrow B \vdash \neg B\rightarrow A$ | $B^{(n)}, \neg A\rightarrow\neg B \vdash B\rightarrow A$ |
| $\vdash (A\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg A$ | $\vdash (\neg A\rightarrow A)\rightarrow A$ |
| $A^{(n)} \vdash (\neg A)^{(n)}$ | $\vdash A^{(n)(n)}$ |

TEOREMA 15.- $C_n$, $0\leq n\leq w$ son consistentes.

Dem.- Consecuencia de que $C_n\subseteq C_0$ (teorema 10) y de que $C_0$ es consistente.

TEOREMA 16.- En $C_w$, la ley de Peirce $((A\rightarrow B)\rightarrow A \vdash A)$ no es verdadera.

En general, los resultados válidos en $C_1$ pueden ser adaptados para aplicarlos en $C_n$, $2\leq n<w$.

## 2.2 EL CALCULO DE PREDICADOS $C_n^*$, $1 \leq n \leq \omega$.

$C_1^*$, $C_2^*$, ..., $C_\omega^*$ son los cálculos de predicados de primer orden correspondientes a $C_1$, $C_2$, ..., $C_\omega$.

### 2.2.1 EL CALCULO $C_1^*$.

Primero estudiaremos $C_1^*$. La lista de sus postulados son los de $C_1$ más los siguientes; con A fórmula, x variable, C fórmula que no contiene libre a x y t un término libre para x en A(x).

(I) $\dfrac{C \to A(x)}{C \to \forall x A(x)}$ (II) $\forall x A(x) \to A(t)$

(III) $A(t) \to \exists x A(x)$ (IV) $\dfrac{A(x) \to C}{\exists x A(x) \to C}$

(V) $\forall x (A(x))^\circ \to (\forall x A(x))^\circ$ (VI) $\forall x (A(x))^\circ \to (\exists x A(x))^\circ$

(VII) Si A y B son fórmulas congruentes (i.e. $\vdash A \leftrightarrow B$), o una es obtenida de la otra quitando cuantificadores nulos, entonces $A \leftrightarrow B$ es un axioma.

**TEOREMA 17.-** Todas las reglas del teorema 1 son válidas en $C_1^*$, además de las siguientes, donde A y C son fórmulas, C no contiene libre a x, t es un término libre para x en A(x) y $\Gamma$ es cualquier conjunto de fórmulas.

| | (Introducción) | (Eliminación) |
|---|---|---|
| (Generalización) | $A(x) \vdash \forall x A(x)$ | $\forall x A(x) \vdash A(t)$ |
| (Existencia) | $A(t) \vdash \exists x A(x)$ | Si $\Gamma, A(x) \vdash C$ entonces $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$ |

Los esquemas válidos para la lógica de predicados positiva clásica son también válidos en $C_1^*$. Si aumentamos - a este cálculo el esquema $\neg(A\&\neg A)$ como un nuevo postulado, obtenemos $C_0^*$.

TEOREMA 18.- Si las fórmulas atómicas de $\Gamma$, $A$ son $A_1$, $A_2,\ldots, A_m$, entonces $\Gamma\vdash A$ en $C_0^*$ si y solo si -- $\Gamma, A_1^\circ, A_2^\circ,\ldots, A_m^\circ \vdash A$ en $C_1^*$.

Dem.- Análoga a la del teorema 4, solamente nos faltaría probar que si tenemos una fórmula B en el lenguaje de $C_1^*$ entonces $B^\circ\vdash(\forall xB)^\circ$ en $C_1^*$ y $B^\circ\vdash(\exists xB)^\circ$ en $C_1^*$ pero esto se deduce del teorema 17 y los postulados (V) y (VI).

TEOREMA 19.- $C_1^*$ es indecidible.

Dem.- Consecuencia de los teoremas 17 y 18 y de la indecibilidad de $C_0^*$.

TEOREMA 20.- $C_1^*$ es consistente.

Dem.- Análoga a la del teorema 6.

TEOREMA 21.- En $C_1^*$ los siguientes esquemas no son válidos:

$\neg\exists x\neg A(x)\leftrightarrow\forall xA(x)$ $\qquad$ $\neg\forall x\neg A(x)\leftrightarrow\exists xA(x)$

$\neg\exists xA(x)\leftrightarrow\forall x\neg A(x)$ $\qquad$ $\exists x\neg A(x)\leftrightarrow\neg\forall xA(x)$

Dem.- Para tener una idea de la demostración podemos dar informalmente un modelo de dos elementos donde cada -- equivalencia sea falsa:

$\neg\exists x\neg A(x)\leftrightarrow\forall xA(x)$ y $\exists x\neg A(x)\leftrightarrow\neg\forall xA(x)$

| | A(x) | ¬A(x) |
|---|---|---|
| 1 | V | F |
| 2 | V | V |

$\neg\forall x\neg A(x)\leftrightarrow\exists xA(x)$ y $\neg\exists xA(x)\leftrightarrow\forall x\neg A(x)$

| | $A(x)$ | $\neg A(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | F | V |
| 2 | V | V |

2.2.2 EL CALCULO DE PREDICADOS $C_n^*$, $n>1$.

Los postulados de $C_n^*$ son aquellos de $C_n$, $2\leq n<\omega$, más los siguientes:

(I) - (IV) y (VII) de $C_1^*$ y

$(V_n)$ $\forall x(A(x))^{(n)}\to(\forall xA(x))^{(n)}$

$(VI_n)$ $\forall x(A(x))^{(n)}\to(\exists xA(x))^{(n)}$

Los postulados de $C_\omega^*$ son (1)-(11) y (I)-(IV).

TEOREMA 22.- Si las fórmulas atómicas de $\Gamma$, $A$ son $A_1$, $A_2,\dots,A_m$, entonces $\Gamma\vdash A$ en $C_0^*$ si y solo si $\Gamma, A_1^{(n)}, A_2^{(n)},\dots, A_m^{(n)}\vdash A$ en $C_n^*$, $1\leq n<\omega$.

TEOREMA 23.- Los cálculos $C_n^*$, $0\leq n\leq\omega$ son indecidibles.

TEOREMA 24.- $\vdash A$ en $C_n^*$ si y solo si $\vdash A$ en $C_n$, $1\leq n\leq\omega$, donde A es cualquier fórmula del lenguaje de $C_n$.

TEOREMA 25.- Cada cálculo de la jerarquía $C_0^*$, $C_1^*,\dots$, $C_\omega^*$ es estrictamente más fuerte que la que le sigue.

Dem.- Análoga a la del teorema 10.

COROLARIO.- $C_n^*$, $0\leq n\leq\omega$, son consistentes.

TEOREMA 26.- $C_n^*$, $0\leq n<\omega$ son finitamente trivializa---

bles, pero $C_\omega^*$ no.

TEOREMA 27.- En $C_n^*$, $1\leq n\leq\omega$, $\neg^{(n)}$ tiene todas las propiedades de la negación clásica.

## 2.3 LOS CALCULOS $C_n^=$, $1\leq n\leq\omega$.

$C_1^=$, $C_2^=$, ..., $C_\omega^=$ son los cálculos de predicados con la igualdad correspondientes respectivamente a $C_1^*$, $C_2^*$, ..., $C_\omega^*$. $C_n^=$ es obtenido de $C_n^*$, $1\leq n\leq\omega$, como $C_0^=$ es construido de $C_0^*$. En particular, adjuntamos los nuevos postulados:

(I') $x=x$, (II') $x=y\to(A(x)\to A(y))$

donde x, y son variables, y libre para x en A(x).

### 2.3.1 EL CALCULO $C_1^=$.

Una lista de los resultados más importantes relativos a $C_1^=$ son los siguientes:

TEOREMA 28.- Tenemos en $C_1^=$; con x, y, z variables, A, F fórmulas y x, y libres para z en A(z).

$\vdash x=x$ $\vdash x=y\to y=x$ $\vdash x=y\,\&\,y=z\to x=z$

$\vdash x=y\to(A(x)\leftrightarrow A(y))$ $\vdash\forall y\exists x(x=y)$

$(A(z))^\circ\vdash A(x)\,\&\,\neg A(y)\to x\neq y$

$\vdash\forall y(F(y)\leftrightarrow\exists x(x=y\,\&\,F(x))$

$\vdash\exists x(F(x)\,\&\,\forall y(F(y)\to x=y))\leftrightarrow\exists x\forall y(x=y\leftrightarrow F(y))$

TEOREMA 29.- Si las componentes atómicas de las fór--

mulas de $\Gamma$ y A son $A_1, A_2, \ldots, A_m$ entonces $\Gamma \vdash A$ en $C_0^=$ si y solo si $\Gamma, A_1^\circ, A_2^\circ, \ldots, A_m^\circ \vdash A$ en $C_1^=$.

TEOREMA 30.- $C_1^=$ es indecidible, y adjuntando a éste la ley de la no-contradicción, obtenemos $C_0^=$.

TEOREMA 31.- Si el símbolo de la igualdad no aparece en la fórmula A, entonces $\vdash A$ en $C_1^=$ si y solo si $\vdash A$ en $C_1^*$.

El teorema anterior es importante, porque muestra que los esquemas que no son válidos en $C_1^*$ tampoco son válidos en $C_1^=$. Por ejemplo, los esquemas $\neg A \to (A \to B)$, $\neg(A \& \neg A)$, $(A(x) \leftrightarrow \neg A(x)) \to B$ y $\neg(A(x) \& \neg A(x))$ no son válidos en $C_1^=$.

## 2.3.2 LOS CALCULOS $C_n^=$, $n>1$.

Podemos probar para $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$ los siguientes resultados.

TEOREMA 32.- Los esquemas y fórmulas del teorema 28 son verdaderos en $C_n^=$, $1<n<\omega$, reemplazando el símbolo $^\circ$ por $^{(n)}$. Los esquemas y fórmulas en donde $^\circ$ no aparece son también verdaderos en $C_\omega^=$.

TEOREMA 33.- Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son las fórmulas atómicas de $\Gamma$, A entonces $\Gamma \vdash A$ en $C_0^=$ si y solo si $\Gamma, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_m^{(n)} \vdash A$ en $C_n^=$, $1 \leq n < \omega$.

TEOREMA 34.- $C_n^=$, $0 \leq n < \omega$, son indecidibles y consistentes.

TEOREMA 35.- Cada cálculo de la jerarquía $C_0^=$, $C_1^=$,..., $C_\omega^=$ es estrictamente más fuerte que aquellas que le siguen. Los cálculos $C_n^=$, $0 \leq n < \omega$ son finitamente trivializables. $C_\omega^=$ no es finitamente trivializable.

TEOREMA 36.- En $C_n^=$, $1 \leq n < \omega$ , $\neg^{(n)}$ tiene todas las propiedades de la negación clásica.

Concluimos que $C_0^=$(respectivamente $C_0^*$, $C_0$) está contenido (bajo una traslación conveniente) en $C_n^=$(respectivamente $C_n^*$, $C_n$), $1 \leq n < \omega$. $C_n^=$ es también una extensión conservativa de $C_n^*$, $0 \leq n \leq \omega$. El teorema de reemplazo no es verdadero para $C_n$, $C_n^*$ y $C_n^=$, $0 < n \leq \omega$. En particular, no tenemos en estos sistemas: $A \leftrightarrow B \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$ en general.

## 3.- EL SISTEMA $NF_1$.

El cálculo construido puede ser usado para examinar las bien conocidas paradojas. Vamos a analizar informalmente la paradoja del mentiroso. En un lenguaje intuitivo $L_n$ basado en $C_n$, $0 \leq n \leq \omega$, uno puede aceptar que es posible hablar acerca de enunciados como en un lenguaje ordinario. (Los lenguajes $L_n$, $0 \leq n \leq \omega$, son presupuestos como suficientemente fuertes desde el punto de vista del poder de expresión). Tomando $n=1$ para fijar nuestras ideas, una simple formulación de la paradoja del mentiroso es como sigue:

$\alpha$) Este enunciado implica su negación.

Razonando como en el caso clásico ($n=0$), uno deduce que:

$$\vdash \alpha \& \neg \alpha$$

Sin embargo, como $A \& \neg A \to B$, $\neg A \to (A \to B)$, etc., no son esquemas válidos de $C_1$, $\alpha$ no causa directamente ninguna dificultad en $L_1$. Pero hay una forma más fuerte de la paradoja del mentiroso la cual no puede ser superada con el ardid de usar un lenguaje cuyo cálculo proposicional subyacente es $C_1$, es decir:

$\beta$) Este enunciado implica su negación fuerte.

Con un argumento formal análogo al clásico, es posible probar que:

$$\vdash \beta \& \neg^* \beta$$

En este caso, como $\vdash A \& \neg^* A \to B$ en $C_1$, tenemos una antinomia real en $L_1$: $\beta$ hace nuestro lenguaje trivial. En pocas palabras, para cada $L_n$, $0 \leq n < \omega$, hay una formulación de la paradoja del mentiroso que causa su trivialidad. No pasa lo mismo con respecto a $L_\omega$. Así, en lenguajes de la categoría $L_n$, $0 \leq n < \omega$, deben ser impuestas algunas limitaciones de autoreferencia. Sin embargo, esto no significa que debamos eliminar todas las formas de enunciados auto-referentes. Los enunciados tales como $\alpha$ no necesitan ser eliminados de $L_1$ como sin sentido, aunque sean auto-contradictorios. No haremos ningún otro comentario con respecto a las paradojas no-matemáticas en esta sección. Ahora estudiaremos un sistema $NF_1$ de teoría de Conjuntos que es inconsistente pero aparentemente no-trivial.

### 3.1 DESCRIPCION DE $NF_1$.

La lógica subyacente de $NF_1$ es $C_1^=$ y el único símbolo no-lógico es el símbolo relacional binario $\varepsilon$. Por lo tanto, los símbolos primitivos de $NF_1$ son las variables individuales, $\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, (, ), $=$, $\varepsilon$. Las nociones de fórmula, prueba (formal), etc., son definidas como es usual.

DEFINICION 4.- Si F(x) y G(y) son fórmulas tales que t no ocurre libre en F(x) y z no ocurre libre en G(y), entonces:

$$x \varepsilon \hat{y}G(y) \underset{def}{=} \exists z(\forall y(y \varepsilon z \leftrightarrow G(y)) \& x \varepsilon z)$$
$$\hat{y}G(y) \varepsilon x \underset{def}{=} \exists z(\forall y(y \varepsilon z \leftrightarrow G(y)) \& z \varepsilon x)$$
$$\hat{x}F(x) \varepsilon \hat{y}G(y) \underset{def}{=} \exists t \exists z(\forall x(x \varepsilon t \leftrightarrow F(x)) \& \forall y(y \varepsilon z \leftrightarrow G(y)) \& t \varepsilon z)$$
$$x = \hat{y}G(y) \underset{def}{=} \exists z(\forall y(y \varepsilon z \leftrightarrow G(y)) \& x = z)$$
$$\hat{y}G(y) = x \underset{def}{=} \exists z(\forall y(y \varepsilon z \leftrightarrow G(y)) \& z = x)$$
$$\hat{x}F(x) = \hat{y}G(y) \underset{def}{=} \exists t \exists z(\forall x(x \varepsilon t \leftrightarrow F(x)) \& \forall y(y \varepsilon z \leftrightarrow G(y)) \& t = z)$$

$\exists\hat{x}F(x) \underset{def}{=} \exists t\forall x(x\varepsilon t\leftrightarrow F(x))$

$\exists!xF(x) \underset{def}{=} \exists x(F(x)\&\forall y(F(y)\rightarrow x=y))$

NOTA: La idea intuitiva de $\hat{y}G(y)$ es $\{y: G(y)\}$.

DEFINICION 5.- $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ es la n-upla ordenada compuesta por $a_1$, $a_2,\ldots$, $a_n$, $n\geq 1$, cuando $n=1$, escribimos $\langle a_1\rangle = a_1$.

DEFINICION 6.- Una fórmula es estratificada si es posible poner numerales para las variables de tal manera que "$\varepsilon$" ocurre solamente en contextos de la forma "$n\varepsilon n+1$".

POSTULADOS ESPECIFICOS DE $NF_1$:

($P_1$) $\forall x(x\varepsilon y\leftrightarrow x\varepsilon z)\rightarrow y=z$

($P_2$) $\exists y\forall x(x\varepsilon y\leftrightarrow F(x))$, donde x, y son variables, y es distinta a x, y no ocurre libre en F(x), y esta fórmula es estratificada.

($P_3$) $\exists y\forall x_1\ldots\forall x_n(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\varepsilon y\leftrightarrow\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin x_i)$, $1\leq i\leq n$.

Para los siguientes postulados, $\hat{x}F(x)$ y $\hat{y}G(y)$ son libres para t en A(t).

($P_4$) $\hat{x}F(x)=\hat{y}G(y)\rightarrow(A(\hat{x}F(x))\leftrightarrow A(\hat{y}G(y)))$

($P_5$) $\exists\hat{x}F(x)\&A(\hat{x}F(x))\rightarrow\exists tA(t)$

($P_6$) $\exists\hat{x}F(x)\&\forall tA(t)\rightarrow A(\hat{x}F(x))$

TEOREMA 37.- En $NF_1$ tenemos (bajo las restricciones usuales):

$\vdash\exists\hat{x}F(x)\leftrightarrow\exists!y\forall x(x\varepsilon y\leftrightarrow F(x))$

$\vdash\exists\hat{x}F(x)\leftrightarrow\hat{x}F(x)=\hat{x}F(x)$

$\vdash\exists\hat{x}F(x)\rightarrow(\hat{x}F(x)=\hat{y}F(y))$

$\vdash\hat{x}F(x)=\hat{y}G(y)\rightarrow\exists\hat{x}F(x)\&\exists\hat{y}G(y)$

$\vdash\forall x(F(x)\leftrightarrow G(x))\&\exists\hat{x}F(x)\rightarrow\exists\hat{x}G(x)$

$\vdash \hat{x}F(x)=\hat{y}G(y)\rightarrow\hat{y}G(y)=\hat{x}F(x)$

$\vdash \hat{x}F(x)=\hat{y}G(y)\,\&\,\hat{y}G(y)=\hat{z}H(z)\rightarrow\hat{x}F(x)=\hat{z}H(z)$

$\vdash \exists\hat{x}F(x)\leftrightarrow\forall x(x\varepsilon\hat{x}F(x)\leftrightarrow F(x))$

$\vdash \exists\Lambda$

$\vdash \exists V$

$\vdash \exists\hat{x}F(x)\rightarrow\forall y(y=\hat{x}F(x)\leftrightarrow\forall x(x\varepsilon y\leftrightarrow F(x)))$

$\vdash \forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))\rightarrow\hat{x}P(x)=\hat{x}Q(x)$

$\vdash \forall y\forall x(x\varepsilon\hat{x}(x\varepsilon y)\leftrightarrow x\varepsilon y)$

$\vdash \forall y(y=\hat{x}(x\varepsilon y))$

$\vdash \forall y\forall z\exists\hat{x}(x\varepsilon y\vee x\varepsilon z)$

$\vdash \forall y\forall z\exists\hat{x}(x\varepsilon y\,\&\,x\varepsilon z)$

$\vdash \forall y\exists\hat{x}(x\not\varepsilon y)$

$\vdash \forall x\forall y(x\varepsilon\bar{y}\leftrightarrow x\not\varepsilon y)$

$\vdash x\cup x=x$

$\vdash x\cup y=y\cup x$

$\vdash (x\cup y)\cup z=x\cup(y\cup z)$

$\vdash x\cup(x\cap y)=x$

$\vdash (x\cap y)\cap z=x\cap(y\cap z)$

$\vdash x\cap x=x$

$\vdash x\cap y=y\cap x$

$\vdash x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)$

$\vdash x\cup(y\cap z)=(x\cup y)\cap(x\cup z)$

$\vdash x\cap(x\cup y)=x$

$\vdash x\cap\Lambda=\Lambda$

$\vdash \Lambda=\bar{V}$

$\vdash x\cup V=V$

$\vdash x\cup\Lambda=x$

$\vdash \bar{\Lambda}\subseteq V$

$\vdash x\cup\bar{x}=V$

$\vdash \forall x\exists USC(x)$

$\vdash \forall x\exists SC(x)$

NOTA: $\Lambda \underset{def}{=} \hat{x}(x\neq x\,\&\,(x=x)^{\circ})$

$V \underset{def}{=} \hat{x}(x=x)$

$$\begin{array}{ll}
\bar{y} & =_{def} \hat{x}(x \notin y) \\
x \cup y & =_{def} \hat{z}(z \varepsilon x \vee z \varepsilon y) \\
x \cap y & =_{def} \hat{z}(z \varepsilon x \& z \varepsilon y) \\
USC(x) & =_{def} \hat{z}(z = \hat{y}(y = x_1) \& x_1 \varepsilon x) = \{\{x_1\} : x_1 \varepsilon x\} \\
SC(x) & =_{def} \hat{y}(y \subset x)
\end{array}$$

TEOREMA 38.- $NF_1$ es inconsistente (pero aparentemente no trivial).

Dem.- En $NF_1$ podemos derivar la paradoja de Russell. Esto es, $\vdash \exists \hat{x}(x \notin x)$ y, consecuentemente, $\vdash \hat{x}(x \notin x) \varepsilon \hat{x}(x \notin x) \& \hat{x}(x \notin x) \notin \hat{x}(x \notin x)$. (Es más, en $NF_1$ podemos derivar la paradoja de Russell para relaciones, como es obvio).

NOTAS.- 1) La clase $R = \hat{x}(x \notin x)$ tiene varias propiedades interesantes. Por ejemplo: $\vdash R \notin R$, $\vdash R \varepsilon R$, $\vdash R \varepsilon R \& R \notin R$, $\vdash R \cup \bar{R} = V$, $\vdash R \varepsilon R \cap \bar{R}$, $\vdash \exists USC(R)$ y $\vdash \exists SC(R)$. 2) La restricción impuesta en el postulado $(P_2)$, el esquema de separación, es aparentemente necesaria, porque la existencia de clases tales como $\hat{x}(\neg^*(x \varepsilon x))$ y $\hat{x}(x \varepsilon x \to B)$, donde B es una fórmula arbitraria, podría hacer a $NF_1$ trivial.

## 3.2 $NF_1$ y el sistema de Quine $NF$.

DEFINICION 7.- La $\neg^*$-transformada de una fórmula F es la fórmula $F^*$ obtenida de F reemplazando en ésta cada ocurrencia de $\neg$ por una ocurrencia de $\neg^*$. Si $\Gamma$ es una sucesión de fórmulas, entonces $\Gamma^*$ es la sucesión correspondiente de las $\neg^*$-transformadas de las fórmulas de $\Gamma$.

TEOREMA 39.- Si $\Gamma \vdash F$ en $NF$ (Sistema de Quine), entonces $\Gamma^* \vdash F^*$ en $NF_1$.

Dem.- Consecuencia del teorema 36 y de (la forma de) los postulados de $NF$ y $NF_1$.

COROLARIO.- Si $\vdash F$ en $NF$ entonces $\vdash F^*$ en $NF_1$.

El corolario anterior nos muestra que $NF$ está contenido en $NF_1$. Es más, este último sistema es estrictamente más fuerte que el de Quine. (Suponiendo que $NF$ es consistente).

TEOREMA 40.- La no-trivialidad de $NF_1$ implica la consistencia de $NF$.

Dem.- Supongamos que $NF$ es inconsistente, entonces existe una fórmula A del lenguaje de $NF$ tal que $\vdash A$ y $\vdash \neg A$ en $NF$, entonces por el corolario del teorema 39 tenemos que $\vdash A^*$ y $\vdash \neg^* A^*$ en $NF_1$ pero como $\vdash (A^* \& \neg^* A^*) \rightarrow B$ para cualquier fórmula B del lenguaje de $NF_1$ entonces $NF_1$ es trivial. Por lo tanto, si $NF_1$ no es trivial, $NF$ es consistente.

Resumiendo, $NF_1$ es un sistema inconsistente y muy fuerte. Aparentemente, no es trivial, pero no podemos probar su no-trivialidad más o menos en el mismo sentido en el cual uno es incapaz de probar la consistencia de los sistemas deductivos fuertes tradicionales. Este hecho es una consecuencia de la generalización de los teoremas de Gödel, que cubren el caso de ciertos sistemas formales inconsistentes.

NOTAS: 1) $NF_1$ puede ser reforzado en varias formas, como una consecuencia, otras paradojas son derivables en éste. De una manera análoga a ésta en la cual hemos construido $\mathbb{NF}_1$, es posible construir una infinidad de teorías de conjuntos inconsistentes $\mathbb{NF}_1$, $\mathbb{NF}_2, \ldots$, $\mathbb{NF}_\omega$, cuyas pro-piedades son similares a aquéllas de $\mathbb{NF}_1$, usando respectivamente como lógica fundamental $C_1^=$, $C_2^=, \ldots$, $C_\omega^=$. 2) Nuestro punto de partida para construir $\mathbb{NF}_1$ fue $\mathbb{NF}$. Pudimos también emplear en lugar de $\mathbb{NF}$ cualquiera de las teorías de conjuntos existentes, tales como los sistemas de Zermelo-Fraenkel, de Von Neumann-Bernays-Gödel y de Kelley-Morse.

## 4.- ULTIMAS CONSIDERACIONES.

La lógica paraconsistente nos parece importante por las siguientes razones:

1) En varios sistemas inconsistentes (y aparentemente no-triviales), tales como $NF_1$, podemos desarrollar, por varios recursos, ciertos conjuntos 'paradójicos' cuya existencia puede ser probada en ellos, pero que no existen en las teorías clásicas. Este hecho no causa dificultades y desde un punto de vista preciso tales conjuntos 'paradójicos' existen más o menos como los conjuntos usuales de la teoría de conjuntos existen. (Estos nuevos conjuntos pueden pensarse que existen de una manera similar en la cual, por ejemplo, existen los puntos al infinito en la geometría plana Euclideana). Todas estas preguntas concernientes al significado de las fórmulas que infringen el principio de contradicción y a la naturaleza de esta ley, originan problemas filosóficos interesantes e importantes. Evidentemente, la lógica paraconsistente puede contribuir para clasificarlos.

2) Las relaciones entre el esquema de separación y varios tipos de lógicas, más débiles que el clásico, fueron estudiadas. Bajo condiciones precisas apropiadas, se probó que el esquema de separación es incompatible con cada una de una serie de lógicas elementales débiles. Esto solamente fue posible descubrirlo por un estudio directo de las teorías de conjuntos inconsistentes y tópicos relacionados.

3) Muchos problemas de carácter matemático han sido originados por la construcción de sistemas lógicos que son aptos para funcionar como fundamentos para teorías paraconsistentes. Mencionamos aquí solamente las preguntas referidas a la algebrización de ciertos cálculos proposicionales, tales como $C_n$, $1 \leq n \leq \omega$.

4) Algunas partes de lógica paraconsistente se relacionan con las lógicas modal e intuicionista. Estas conexiones, un poco sorprendentes a primera vista, son también el punto de partida de importantes problemas, merecedores de serias investigaciones.

5) El análisis semántico de ciertos cálculos nuevos, en el campo de la lógica paraconsistente, parece ser muy prometedor, y numerosos resultados ya han sido obtenidos. En particular, se han definido algunos tipos nuevos de modelos y se han generalizado algunos resultados clásicos de teoría de modelos.

6) La lógica dialéctica está íntimamente conectada con la teoría de paraconsistencia. Hay varias concepciones conflictivas de dialécticas, y para la mayoría de los expertos esto no es formal, ni en principio formalizable. Sin embargo, empleando técnicas usadas en lógica paraconsistente, es aparentemente posible formalizar algunas de las lógicas dialécticas propuestas. Es conveniente notar que las formalizaciones acerca de las que hablamos son análogas en naturaleza a las formalizaciones presentadas por varias partes de matemáticas intuicionistas: no intentamos fundar la lógica dialéctica en un formalismo dado, solo tratar de hacer explícitas ciertas 'regularidades' del 'movimiento dialéctico'. Así, podemos lanzar una nueva luz en la lógica dialéctica.

# 4 SEMANTICA PARACONSISTENTE

# 4 SEMANTICA PARACONSISTENTE.

## 1.- INTRODUCCION.

En esta sección presentaremos una semántica bivaluada para el cálculo $C_1$, que constituye una generalización de la semántica común del cálculo proposicional clásico.

A continuación, los símbolos => y <=> serán empleados como abreviaturas para la implicación y la equivalencia metalingüísticas.

## 2.- UNA SEMANTICA BIVALUADA PARA $C_1$.

Sea $T$ el conjunto de fórmulas del lenguaje de $C_1$. $\Gamma$ y $\Delta$ indicarán subconjuntos cualesquiera de $T$. $\overline{\Gamma}$ será una abreviatura del conjunto $\{A \in T: \Gamma \vdash A\}$.

DEFINICION 1.- $\Gamma$ es trivial si $\overline{\Gamma}=T$; de otro modo, $\Gamma$ es no-trivial. $\Gamma$ es inconsistente si hay al menos una fórmula A tal que $A, \neg A \in \Gamma$; de otro modo, $\Gamma$ es consistente.

DEFINICION 2.- $\Gamma$ es un conjunto maximal no-trivial si no es trivial y, para todo A, si $A \notin \Gamma$, entonces $\Gamma \cup \{A\}$ es trivial.

LEMA 1.- $\Gamma \cup \{A\}$ es trivial si y solo si $\Gamma \vdash \neg^* A$.

Dem.- =>) Supongamos $\Gamma \cup \{A\}$ trivial, por lo tanto $\overline{\Gamma \cup \{A\}} = T$ entonces $\neg^* A \in \overline{\Gamma \cup \{A\}}$ es decir $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg^* A$. Por teorema de deducción

$\Gamma \vdash A\to\neg^*A$, pero como $\vdash (A\to\neg^*A)\to\neg^*A$ en $C_1$, - tenemos que $\Gamma \vdash \neg^*A$.

<=) Supongamos $\Gamma \vdash \neg^*A$, por lo tanto -- $\Gamma\cup\{A\} \vdash \neg^*A$, entonces $\overline{\Gamma\cup\{A\}} = \mathcal{T}$ ya que -- $\vdash \neg^*A\to(A\to B)$ para cualquier B.

TEOREMA 1.- Si $\Gamma$ es un conjunto maximal no-trivial, - entonces:

1. $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A\in\Gamma$
2. $A\in\Gamma$ ó $\neg^*A\in\Gamma$
3. $A\in\Gamma \Rightarrow \neg^*A\notin\Gamma$
4. $\vdash A \Rightarrow A\in\Gamma$
5. $A,\ A^\circ\in\Gamma \Rightarrow \neg A\notin\Gamma$
   $\neg A,\ A^\circ\in\Gamma \Rightarrow A\notin\Gamma$
6. $A,\ A\to B\in\Gamma \Rightarrow B\in\Gamma$
7. $A^\circ\in\Gamma \Rightarrow A\notin\Gamma$ ó $\neg A\notin\Gamma$
8. $A^\circ\in\Gamma \Rightarrow (\neg A)^\circ\in\Gamma$

<u>Dem</u>.-

(1) =>) Supongamos $A\notin\Gamma \Rightarrow \Gamma\cup\{A\}$ es trivial $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg^*A$ por el lema 1; pero $\Gamma$ no es trivial por lo -- tanto $\Gamma \nvdash A$. Entonces $\Gamma \vdash A \Rightarrow A\in\Gamma$.

<=) $A\in\Gamma \Rightarrow \Gamma\vdash A$ por definición de deducción.

(2) Supongamos $\neg^*A\notin\Gamma \Rightarrow \Gamma \nvdash \neg^*A$ por (1)
$\Rightarrow \Gamma\cup\{A\}$ no es trivial por lema 1
$\Rightarrow A\in\Gamma$ porque $\Gamma$ es maximal no-trivial
por lo tanto $\neg^*A\in\Gamma$ ó $A\in\Gamma$.

(3) Supongamos $\neg^*A\in\Gamma \Rightarrow \Gamma\vdash\neg^*A$
$\Rightarrow \Gamma\cup\{A\}$ es trivial por lema 1
$\Rightarrow A\notin\Gamma$ porque $\Gamma$ es no-trivial
por lo tanto $A\in\Gamma \Rightarrow \neg^*A\notin\Gamma$.

(4) $\vdash A \Rightarrow \Gamma\vdash A \Rightarrow A\in\Gamma$ por (1).

(5) (a) $A,\ A^\circ\in\Gamma \Rightarrow \neg^*A\notin\Gamma$ por (3) $\Rightarrow \neg A\,\&\,A^\circ\notin\Gamma$
$\Rightarrow \neg A\notin\Gamma$ ó $A^\circ\notin\Gamma$ por (1), como $A^\circ\in\Gamma$ entonces $\neg A\notin\Gamma$.

(b) $\neg A,\ A^\circ\in\Gamma \Rightarrow \neg^*A\in\Gamma$ pues $\neg A,\ A^\circ \vdash \neg^*A$ y por (1)

si $\Gamma \vdash \neg^* A$ entonces $\neg^* A \varepsilon \Gamma$
$\Rightarrow A \not\varepsilon \Gamma$ por (3).

(6) $A, A \to B \varepsilon \Gamma \Rightarrow B \varepsilon \Gamma$ pues $A, A \to B \vdash B$ y por (1) si - $\Gamma \vdash B$ entonces $B \varepsilon \Gamma$.

(7) Se deduce de (4) y (5) tomando $\vdash A \vee \neg A$.

(8) $A^\circ \varepsilon \Gamma \Rightarrow (\neg A)^\circ \varepsilon \Gamma$ pues $A^\circ \vdash (\neg A)^\circ$ y por (1) si - $\Gamma \vdash (\neg A)^\circ$ entonces $(\neg A)^\circ \varepsilon \Gamma$.

DEFINICION 3.- Una valuación de $C_1$ es una función -- $v: T \to \{0,1\}$ tal que:

1. $v(A)=0 \Rightarrow v(\neg A)=1$
2. $v(\neg\neg A)=1 \Rightarrow v(A)=1$
3. $v(B^\circ)=v(A\to B)=v(A\to\neg B)=1 \Rightarrow v(A)=0$
4. $v(A\to B)=1 \Leftrightarrow v(A)=0$ ó $v(B)=1$
5. $v(A\& B)=1 \Leftrightarrow v(A)=v(B)=1$
6. $v(A\vee B)=1 \Leftrightarrow v(A)=1$ ó $v(B)=1$
7. $v(A^\circ)=v(B^\circ)=1 \Rightarrow v((A\to B)^\circ)=v((A\& B)^\circ)=v((A\vee B)^\circ)=1$

TEOREMA 2.- Si $v$ es una valuación de $C_1$, entonces $v$ - tiene las siguientes propiedades:

$v(A)=1 \Leftrightarrow v(\neg^* A)=0$
$v(A)=0 \Leftrightarrow v(A)=0$ y $v(\neg A)=1$
$v(A)=1 \Leftrightarrow v(A)=1$ ó $v(\neg A)=0$

<u>Dem</u>.- Solamente demostraremos $v(A)=1 \Leftrightarrow v(\neg^* A)=0$

$\Leftarrow$) $v(\neg^* A)=0 \Rightarrow v(\neg A \& A^\circ)=0 \Rightarrow v(\neg A)=0$ ó $v(A^\circ)=0$ (5)

$v(\neg A)=0 \Rightarrow v(\neg\neg A)=1$ (1)
$\Rightarrow v(A)=1$ (2)

$v(A^\circ)=0 \Rightarrow v(\neg(A\&\neg A))=0 \Rightarrow v(\neg\neg(A\&\neg A))=1$ (1)
$\Rightarrow v(A\&\neg A)=1$ (2)
$\Rightarrow v(A)=v(\neg A)=1$ (5)

$\Rightarrow$) $v(\neg^* A)=1 \Rightarrow v(\neg A\& A^\circ)=1 \Rightarrow v(\neg A)=v(A^\circ)=1$ (5)
$\Rightarrow v(A^\circ)=v(A\to A)=v(A\to\neg A)=1$ (4)

$\Rightarrow v(A)=0$ (3)

entonces $v(A)=1 \Rightarrow v(\neg^* A)=0$

NOTAS: 1) La primera propiedad del teorema 2 implica las condiciones 1 y 3 de la definición de valuación. 2) El valor de una valuación v para una fórmula arbitraria no -- está determinada, en general, por los valores de v para - las variables proposicionales.

DEFINICION 4.- Una valuación v es singular si hay al menos una fórmula A tal que $v(A)=v(\neg A)=1$. De otro modo, - v es normal. Una fórmula A es válida si, para cada valuación $v(A)=1$. Una valuación v es un modelo de un conjunto de fórmulas $\Gamma$ si $v(A)=1$ para cualquier elemento A de $\Gamma$. - Si, para cada modelo v de $\Gamma$ tenemos $v(A)=1$, decimos que A es una consecuencia semántica de $\Gamma$, y escribimos $\Gamma \models A$; en particular, $\models A$ es una abreviatura de $\phi \models A$, y esto significa lo mismo que A sea válida.

TEOREMA 3.- $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

Dem.- Si $\Gamma \vdash A$ entonces existen $A_1,\ldots, A_n$ fórmulas - tales que $A_n=A$ y $A_i$ es axioma de $C_1$ ó elemento de $\Gamma$ ó consecuencia de anteriores por Modus Ponens, para $1\leq i\leq n$. Demostraremos por inducción sobre $i$ que $\Gamma \models A_i$ para $1\leq i\leq n$.

$$A_i \text{ es } \begin{cases} \text{axioma de } C_1 \\ \text{elemento de } \Gamma \\ \text{consecuencia de anteriores por M.P.} \end{cases}$$

(A) Si $A_i$ es axioma de $C_1$ se deduce de la definición 3 que $v(A_i)=1$ para cualquier valuación, entonces $\Gamma \models A_i$.

(B) Si $A_i$ está en $\Gamma$, para toda valuación modelo de $\Gamma$ $v(A_i)=1$, entonces $\Gamma \models A_i$.

(C) Si $A_i$ es consecuencia de anteriores por Modus Ponens, existen $i_1, i_2 < i$ tales que $A_{i_2} = A_{i_1} \to A_i$ y $\Gamma \models A_{i_1}$, $\Gamma \models A_{i_2}$ por hipótesis de inducción, entonces para cualquier valuación v modelo de $\Gamma$, $v(A_{i_1}) = v(A_{i_1} \to A_i) = 1$ entonces por la definición 3 inciso 4, tenemos que $v(A_i) = 1$, por lo tanto $\Gamma \models A_i$.

En particular, $\Gamma \models A_n = A$ que es lo que queríamos demostrar.

COROLARIO.- $\vdash A \Rightarrow \models A$.

LEMA 2.- Cada conjunto no-trivial de fórmulas está contenido en un conjunto maximal no-trivial.

Dem.- Sea $\Gamma$ un conjunto de fórmulas no-trivial.

Definimos $\Delta$ como sigue; donde las fórmulas del lenguaje de $C_1$ son $\{A_\alpha : \alpha < \delta\}$.

$$\Gamma_0 = \Gamma$$
$$\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha \cup \begin{cases} \neg^* A_\alpha & \text{si } \Gamma_\alpha \nvdash A_\alpha \\ A_\alpha & \text{si } \Gamma_\alpha \vdash A_\alpha \end{cases} \qquad \alpha+1 < \delta$$
$$\Gamma_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \Gamma_\beta \quad \text{si } \gamma \text{ es ordinal límite, } \gamma < \delta$$
$$\Delta = \bigcup_{\alpha < \delta} \Gamma_\alpha$$

Por definición $\Gamma \subset \Delta$, demostraremos que $\Delta$ es un conjunto maximal no-trivial y con eso finalizaremos la demostración.

A) $\Delta$ es no-trivial.

Lo demostraremos por inducción.

i) $\Gamma_0$ es no-trivial por hipótesis.

ii) Si $\Gamma_\alpha$ es no-trivial.
- Si $\Gamma_\alpha \nvdash A_\alpha$, entonces $\Gamma_\alpha \nvdash \neg^*\neg^* A_\alpha$ por lo tanto $\Gamma_\alpha \cup \{\neg^* A_\alpha\}$ es no-trivial por lema 1.
- Si $\Gamma_\alpha \vdash A_\alpha$, entonces como $\overline{\Gamma_\alpha} = \overline{\Gamma_\alpha \cup \{A_\alpha\}}$, $\Gamma_\alpha \cup \{A_\alpha\}$ es no-trivial.

Por lo tanto $\Gamma_{\alpha+1}$ es no-trivial.

iii) Supongamos que $\Gamma_\beta$ es no-trivial para $\beta<\gamma$ con $\gamma$ ordinal límite. Si $\bigcup_{\beta<\gamma}\Gamma_\beta$ es trivial, $\Gamma_\gamma \vdash A$ y $\Gamma_\gamma \vdash \neg^* A$ para A una fórmula, entonces $\Gamma_\beta \vdash A$ y $\Gamma_\beta \vdash \neg^* A$ para alguna $\beta$, $\beta<\gamma$ y. Por lo tanto $\Gamma_\gamma$ es no-trivial.

Entonces $\Delta = \bigcup_{\alpha<\delta}\Gamma_\alpha$ es no-trivial porque $\Gamma_\alpha$ con $\alpha<\delta$ es no-trivial.

B) $\Delta$ es maximal.

Sea A tal que $A \notin \Delta$, $A = A_\alpha$ para alguna $\alpha$ entonces $A_\alpha \notin \Gamma_{\alpha+1} \Rightarrow \neg^* A_\alpha \in \Gamma_{\alpha+1} \subset \Delta$.
Por lo tanto $\Delta \cup \{A_\alpha\} \vdash A_\alpha$ y $\Delta \cup \{A_\alpha\} \vdash \neg^* A_\alpha$, i.e. $\Delta \cup \{A_\alpha\}$ es trivial. □

COROLARIO.- Hay conjuntos de fórmulas inconsistentes maximales no-triviales.

Dem.- Tenemos que $\{p, \neg p\}$, donde p es una variable proposicional, es un conjunto inconsistente pero no-trivial, ya que $p, \neg p \nvDash \neg^* p$ entonces por el teorema 3 $p, \neg p \nVdash \neg^* p$. Por lo tanto, por el lema anterior, $\{p, \neg p\}$ está contenido en un conjunto maximal no-trivial, el cual es inconsistente.

LEMA 3.- Cada conjunto maximal no-trivial $\Gamma$, tiene un modelo.

Dem.- Definimos una función $v_\Gamma : F \to \{0,1\}$ como sigue: para cada fórmula A, si $A \in \Gamma$, el conjunto maximal no-trivial, entonces $v_\Gamma(A)=1$; de otro modo, $v_\Gamma(A)=0$. Entonces probamos que $v_\Gamma$ satisface todas las condiciones de la definición de valuación.

COROLARIO 1.- Cualquier conjunto de fórmulas no-trivial tiene un modelo.

COROLARIO 2.- Hay valuaciones singulares ( y, por supuesto, también normales, i.e. valuaciones no-singulares).

Dem.- $\{p, \neg p\}$ es inconsistente pero no-trivial. Por lo tanto, este conjunto está contenido en un conjunto maximal no-trivial $\Gamma$, que tiene un modelo $v_\Gamma$; pero $v_\Gamma$ es, obviamente, singular.

TEOREMA 4.- $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Dem.- Supongamos $\Gamma \nvdash A \Rightarrow \Gamma \nvdash \neg^*\neg^* A \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg^* A\}$ es no-trivial (Lema 1) $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg^* A\}$ tiene un modelo (Corolario 1) $\Rightarrow \Gamma \not\models A$.

Por lo tanto $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

COROLARIO 1.- $\models A \Rightarrow \vdash A$.

COROLARIO 2.- $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$ (Teorema de adecuación)

TEOREMA 5.- Hay conjuntos de fórmulas inconsistentes (pero no-triviales) que tienen modelos.

DEFINICION 5.- Sea $\Delta$ el conjunto $\{A^\circ \in T: \vdash A\}$. $\Gamma$ es fuertemente no-trivial si $\Gamma \cup \Delta$ es no-trivial. Sea ahora $\Delta$ el conjunto $\{A^\circ \in T$: A no es una variable proposicional$\}$, $\Gamma$ es estrictamente no-trivial si $\Gamma \cup \Delta$ es no-trivial.

TEOREMA 6.- (1) $\Gamma$ es estrictamente no-trivial si y solo si $\Gamma$ es no-trivial y no existe una fórmula B compuesta tal que $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \vdash \neg B$.

(2) $\Gamma$ es fuertemente no-trivial si y solo si $\Gamma$ es no-trivial y no existe una fórmula A tal que $\Gamma \vdash \neg A$ y $\vdash A$.

(3) $\Gamma$ consistente $\overset{\not<}{=>}$ $\Gamma$ estrictamente no-trivial.
$\Gamma$ estrictamente no-trivial $\overset{\not<}{=>}$ $\Gamma$ fuertemente no-trivial.
$\Gamma$ fuertemente no-trivial $\overset{\not<}{=>}$ $\Gamma$ no-trivial.

TEOREMA 7.- Hay conjuntos de fórmulas fuertemente no-triviales y conjuntos estrictamente no-triviales.

Dem.- Probaremos solamente la primera parte del teorema, i.e., que hay conjuntos de fórmulas fuertemente no-triviales. En efecto, si $\Delta$ es el conjunto $\{A^\circ \epsilon T\colon \vdash A\}$, entonces $\Delta$ es consistente. Pero esto implica que $\Delta$ es también no-trivial. Por lo tanto, $\Delta$ está contenido en un conjunto maximal no-trivial $\Delta'$. Sea $\Delta''$ el conjunto $\Delta'-\Delta$. $\Delta''$ es evidentemente un conjunto fuertemente no-trivial. La segunda parte se demuestra de una forma análoga.

## 3.- LA DECIDIBILIDAD DE $C_1$.

Por medio de la semántica para $C_1$ anterior, podemos derivar un método de decisión para este cálculo. Esto será el objetivo de esta sección.

DEFINICION 6.- (Definición de Quasi-matriz).

Para cada fórmula del lenguaje de $C_1$, podemos construir tablas llamadas quasi-matrices, de acuerdo a las instrucciones siguientes.

Para construir una quasi-matriz para una fórmula A, el procedimiento es:

1.- Hacer una lista de todas las variables proposicionales que ocurren en A, y colocarlas en una línea.

2.- Debajo de la lista de variables proposicionales, poner en líneas sucesivas todas las posibles combinaciones de 0's y 1's que pueden ser atribuídos a estas variables.

3.- Hacer una lista de todas las negaciones de las variables proposicionales y calcular estos valores, en cada línea, como sigue: si una variable tuvo valor 0, la negación tiene valor 1; si una variable tuvo valor 1, dividir la línea en que esto ocurrió, escribiendo en la primera parte el valor 0 para la negación, y, en la segunda parte el valor 1 para la negación. Cada vez que hay una división, los valores son los mismos para las dos líneas en la parte de la izquierda de esta división.

4.- Hacer una lista y calcular, para cada línea, el valor de cada subfórmula de A, cuyas subfórmulas propias y sus negaciones han sido listadas y calculadas como sigue:

(i) Cuando no haya negaciones, se procede como en una tabla de verdad para el cálculo proposicional clásico.

(ii) Si cualquiera de las fórmulas bajo consideración es una negación de la forma $\neg A'$, escribir el valor 1 debajo de ésta, en las líneas donde $A'$ tiene valor 0. En las líneas donde $A'$ tiene valor 1 proceder como sigue:

(1o.) Si $A'$ es de la forma $\neg B$, checar si el valor de B es igual al valor de $\neg B$. Si este es el caso, dividir la línea, escribiendo el valor 0 en la primera parte y, en la segunda, el valor 1. Si el valor de B es diferente del valor de $\neg B$, simplemente escribir el valor 0.

(2o.) Si $A'$ es de la forma $B \$ C$, donde $\$$ es $\rightarrow$, $\vee$ ó $\&$, hay 2 casos a considerar:

(a) $A'$ es de la forma $D \& \neg D$, o de la forma $\neg D \& D$. En este caso, escribir el valor 0 para la fórmula $\neg A'$.

(b) $A'$ no es de la forma $D \& \neg D$ ó $\neg D \& D$. En este caso, checar si el valor de B es igual al valor de $\neg B$, o si el valor de C es igual al valor de $\neg C$. Si esto -

es verdadero, dividir la línea, escribiendo el valor 0 en la primera parte y, en la segunda, el valor 1. Si por el contrario, el valor de B es diferente al valor de $\neg B$, y el valor de C es diferente al valor de $\neg C$, simplemente escribir el valor 0.

LEMA 4.- $v\colon T \to \{0,1\}$ es una valuación si y solo si:

1.- $v(\neg A)=0 \Rightarrow v(A)=1$

2.- $v(\neg\neg A)=1 \Rightarrow v(A)=1$

3.- $v(B^\circ)=v(A\to B)=v(A\to\neg B)=1 \Rightarrow v(A)=0$

4.- $v(A\to B)=1 \Leftrightarrow v(A)=0$ ó $v(B)=1$

5.- $v(A\&B)=1 \Leftrightarrow v(A)=v(B)=1$

6.- $v(A\vee B)=1 \Leftrightarrow v(A)=1$ ó $v(B)=1$

7.- $v((A\to B)^\circ)=0 \Rightarrow v(A^\circ)=0$ ó $v(B^\circ)=0$

7'.- $v((A\&B)^\circ)=0 \Rightarrow v(A^\circ)=0$ ó $v(B^\circ)=0$

7''.- $v((A\vee B)^\circ)=0 \Rightarrow v(A^\circ)=0$ ó $v(B^\circ)=0$

LEMA 5.- $v(A^\circ)=0 \Leftrightarrow v(A)=v(\neg A)=1$

Dem.- $\Rightarrow$) $v(A^\circ)=0 \Rightarrow v(A\&\neg A)=1 \Rightarrow v(A)=v(\neg A)=1$

$\Leftarrow$) Supongamos que $v(A)=v(\neg A)=1$, si $v(A^\circ)=1$ entonces $v(A)=v(\neg A)=v(A^\circ)=1$, esto es, $v(A)=v(\neg^* A)=1$, y v no sería una valuación. Por lo tanto, $v(A^\circ)=0$. Por consiguiente, $v(A)=v(\neg A)=1 \Rightarrow v(A^\circ)=0$.

LEMA 6.- $v\colon T \to \{0,1\}$ es una valuación si, y solo si, las condiciones 1-6 del lema 4 se cumplen y:

7i.- $v((A\to B)^\circ)=0 \Rightarrow v(A)=v(\neg A)=1$ ó $v(B)=v(\neg B)=1$

7ii.- $v((A\&B)^\circ)=0 \Rightarrow v(A)=v(\neg A)=1$ ó $v(B)=v(\neg B)=1$

7iii.- $v((A\vee B)^\circ)=0 \Rightarrow v(A)=v(\neg A)=1$ ó $v(B)=v(\neg B)=1$

DEFINICION 7.- Sean v una valuación y F una fórmula. Entonces, $v_F$ es la restricción de v al conjunto de subfórmulas de F y negaciones de subfórmulas propias de F.

LEMA 7.- Para cada valuación v y cada fórmula F, - $v(F)=v_F(F)$.

DEFINICION 8.- Sean v una valuación y $\Gamma$ un conjunto - de fórmulas; $v_\Gamma$ es la restricción de v a las fórmulas de $\Gamma$.

DEFINICION 9.- Decimos que una línea de quasi-matriz corresponde a $v_\Gamma$, si $v_\Gamma(A)$ es el valor correspondiente a - A en esta línea, para cada $A\epsilon\Gamma$, donde $\Gamma$ es el conjunto de fórmulas de la tabla.

LEMA 8.- Dada una quasi-matriz M, para cada valuación v hay una línea de M que corresponde a $v_\Gamma$, donde $\Gamma$ es el - conjunto de fórmulas de M.

<u>Dem</u>.- Por inducción sobre $n$, el número de columnas de M.

Para $n=1$

Si M tiene una columna entonces $\Gamma=\{p\}$ con p va-- riable proposicional, entonces para cualquier valuación, - $v(p)=0$ ó $v(p)=1$, i.e. dada una valuación hay una línea de M que corresponde a $v_\Gamma$.

Para $n+1$

Sea $\Gamma$ de $n+1$ elementos, sea A' la proposición correspondiente a la última columna de M, o sea la $n+1$-ésima.

a) Si A' es de la forma A#B donde # es $\rightarrow$, $\vee$ ó &, la valuación en A y B determina la valuación en A#B igual que en el cálculo proposicional clásico, debido a los incisos 4, 5 y 6 de la definición de valuación o del lema 4.

b) Si A' es de la forma $\neg A$ y $v(A)=0$ entonces - $v(A')=1$ debido al inciso 1 de la definición de valuación. Si $v(A)=1$:

i) Si A es de la forma $\neg B$ y $v(B)=v(\neg B)$ entonces $v(A')=0$ ó $v(A')=1$; si $v(B)\neq v(\neg B)$, como $v(\neg B)=1$ entonces $v(B)=0$ por lo tanto $v(A')=0$ debido a la contrapositiva del inciso 2 de la definición de valuación.

ii) Si A es de la forma $B\$C$, donde $\$$ es $\rightarrow$, $\vee$ ó $\&$:

+ Si A es de la forma $D\&\neg D$ ó de la forma $\neg D\&D$, $v(A')=0$ ya que si $v(D\&\neg D)=1$ ó $v(\neg D\&D)=1$ entonces $v(D)=v(\neg D)=1$, si además $v(\neg(D\&\neg D))=v(\neg(\neg D\&D))=v(D^{\circ})=1$ tendríamos $v(D)=v(\neg^{*}D)=1$ lo cual no puede ser por teorema 2.

+ Si A no es de la forma $D\&\neg D$ ó $\neg D\&D$:

- Si $v(B)=v(\neg B)$ ó $v(C)=v(\neg C)$ entonces $v(A')=0$ ó $v(A')=1$.

- Si $v(B)\neq v(\neg B)$ y $v(C)\neq v(\neg C)$ entonces $v(B^{\circ})=v(C^{\circ})=1$ por lema 5, $\Rightarrow v((B\$C)^{\circ})=1$ por inciso 7 de la definición de valuación, $\Rightarrow v(B\$C)\neq v(\neg(B\$C))$ por lema 5, por lo tanto $v(B\$C)=1 \Rightarrow v(A')=v(\neg(B\$C))=0$.

Entonces como cada valuación tiene una línea de M que corresponde a $v_{\Gamma-\{A'\}}$ por hipótesis de inducción, cada valuación tiene una línea de M que corresponde a $v_{\Gamma}$ debido a lo anterior y a la manera en que se construyó M. □

DEFINICION 10.- Sea M una quasi-matriz para una fórmula A y sea $\Gamma$ el conjunto de subfórmulas y negaciones de subfórmulas propias de A. Sea $k$ una línea de esta quasi-matriz y $k(F)$ el valor atribuído a F en $k$. Entonces $\Delta(\Gamma,k)$ es el conjunto de fórmulas tal que, para cada fórmula F:

I. Si $F\in\Gamma$, entonces $F\in\Delta(\Gamma,k)$ si y solo si $k(F)=0$

II. Si $F\notin\Gamma$, entonces $F\in\Delta(\Gamma,k)$ si y solo si:

a) F es atómica; ó

b) $F=\neg F_1$ y $F_1\notin\Delta(\Gamma,k)$; ó

c) $F=F_1\&F_2$ y $F_1\in\Delta(\Gamma,k)$ ó $F_2\in\Delta(\Gamma,k)$; ó
d) $F=F_1\vee F_2$ y $F_1\in\Delta(\Gamma,k)$ y $F_2\in\Delta(\Gamma,k)$; ó
e) $F=F_1\to F_2$ y $F_1\notin\Delta(\Gamma,k)$ y $F_2\in\Delta(\Gamma,k)$.

Algunas propiedades de los conjuntos $\Delta(\Gamma,k)$:

1) $\neg A\in\Delta(\Gamma,k) \Rightarrow A\notin\Delta(\Gamma,k)$
2) $A\in\Delta(\Gamma,k) \Rightarrow \neg\neg A\in\Delta(\Gamma,k)$
3) $\neg^{*}A\in\Delta(\Gamma,k) \Leftrightarrow A\notin\Delta(\Gamma,k)$
4) $A\to B\notin\Delta(\Gamma,k) \Leftrightarrow A\in\Delta(\Gamma,k)$ ó $B\notin\Delta(\Gamma,k)$
5) $A\in\Delta(\Gamma,k)$ ó $B\in\Delta(\Gamma,k) \Leftrightarrow A\&B\in\Delta(\Gamma,k)$
6) $A\notin\Delta(\Gamma,k)$ ó $B\notin\Delta(\Gamma,k) \Leftrightarrow A\vee B\notin\Delta(\Gamma,k)$
7) $(A\$B)^{\circ}\in\Delta(\Gamma,k) \Rightarrow A\notin\Delta(\Gamma,k)$ y $\neg A\notin\Delta(\Gamma,k)$ ó
$B\notin\Delta(\Gamma,k)$ y $\neg B\notin\Delta(\Gamma,k)$
(donde \$ es $\&$, $\vee$ ó $\to$).

**LEMA 9 (ANDREA LOPARIC).**- Para cada línea $k$ de una quasi-matriz M, hay una valuación v, tal que $v_\Gamma$ corresponde a $k$, donde $\Gamma$ es el conjunto de fórmulas de M.

**Dem.**- Sea v la función de $T$ en $\{0,1\}$ tal que, para cada $A\in T$, $v(A)=0$ si y solo si $A\in\Delta(\Gamma,k)$. Entonces, por las propiedades 1-7 de los conjuntos $\Delta(\Gamma,k)$, v es una valuación. Como $v_\Gamma$ y $k$ 'coinciden', hay una valuación v, tal que $v_\Gamma$ corresponde a $k$.

**TEOREMA 8 (M. FIDEL).**- $\mathcal{C}_1$ es decidible.

**Dem.**- Consecuencia de los lemas 7, 8 y 9 y del teorema de adecuación; la fórmula A es un teorema de $\mathcal{C}_1$ si, y solo si, en cualquier quasi-matriz de A, la última columna contiene solo unos; en efecto, en este caso tenemos para cualquier valuación v: $v(A)=v_\Gamma(A)=1$, donde $\Gamma$ es el conjunto de todas las subfórmulas de A y negaciones de las atómicas que aparecen en A.

Veamos dos ejemplos:

1. $\neg(A\vee B)\to\neg A\&\neg B$ no es válido en $C_1$:

| A | B | ¬A | ¬B | A∨B | ¬(A∨B) | ¬A&¬B | ¬(A∨B)→¬A&¬B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

2. $\neg(A\&B)\to\neg A\vee\neg B$ es válido en $C_1$:

| A | B | ¬A | ¬B | A&B | ¬(A&B) | ¬A∨¬B | ¬(A&B)→¬A∨¬B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**La extensión de la semántica de $C_1$ al cálculo $C_n$, $1<n\leq\omega$, no es difícil, y fue hecha por Andrea Loparic y E.H. Alves. Precisamente como en el caso de $C_1$, las semánticas para $C_n$, $1<n\leq\omega$, pueden ser usadas para decidir estos**

cálculos.

Con ayuda de métodos similares a los estudiados en esta sección, podemos demostrar la siguiente proposición:

TEOREMA 9.- Si $\mathbb{NF}$ es consistente, entonces $\mathbb{NF}_1$ es no-trivial.

La importancia de este teorema es obvia. Esto hace evidente que la teoría de conjuntos paraconsistente $\mathbb{NF}_1$ es tan segura como $\mathbb{NF}$, dado que $\mathbb{NF}$ está contenida en $\mathbb{NF}_1$.

# BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA.

ARRUDA, Ayda I. Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic. Brazil, Universidade Estadual de Campinas (Department of Mathematics). 43 P.

COSTA, N.C.A. Da. Notes on Non-Classical Logics. Venezuela, 1983. 55 P.

KLEENE, Stephen Cole. Introduction to Metamathematics. Netherlands, D. Van Nostrand Company, Inc., 1967 (1a. imp. 1952). 550 P.

KLEENE, Stephen Cole. Mathematical Logic. U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1967. 398 P.

QUINE, W.V. 'New foundations for mathematical logic'. U.S.A., American Mathematical Monthly, 44 (1937). 70-80.

ROSSER, J. Barkley. Logic for Mathematicians. U.S.A., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. 530 P.

ANEXO 1

## LISTA DE POSTULADOS

### CALCULO PROPOSICIONAL CLASICO ($C_0$)

(1) $A\to(B\to A)$

(2) $(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$

(3) $\dfrac{A \quad A\to B}{B}$

(4) $A\&B\to A$

(5) $A\&B\to B$

(6) $A\to(B\to A\&B)$

(7) $A\to A\vee B$

(8) $B\to A\vee B$

(9) $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$

(10) $(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$

(11) $\neg\neg A\to A$

### CALCULO DE PREDICADOS CLASICO ($C_0^*$) -adicional-

El término t debe ser libre para la variable x en la fórmula A(x).

(I) $\dfrac{C\to A(x)}{C\to\forall xA(x)}$ (II) $\forall xA(x)\to A(t)$

(III) $A(t)\to\exists xA(x)$ (IV) $\dfrac{A(x)\to C}{\exists xA(x)\to C}$

### CALCULO DE PREDICADOS CON IGUALDAD ($C_0^=$) -adicional-

(I') $x=x$ (II') $x=y\to(A(x)\to A(y))$

Donde x, y son variables, y libre para x en A(x).

ANEXO 2

POSTULADOS ESPECIFICOS DEL SISTEMA DE QUINE (NF)

$(P_1)$ $\forall x(x\varepsilon y\leftrightarrow x\varepsilon z)\rightarrow y=z$

$(P_2)$ $\exists y\forall x(x\varepsilon y\leftrightarrow F(x))$, donde x, y son variables, y es distinta a x, y no ocurre libre en F(x), y esta fórmula es estratificada.

La lógica subyacente del Sistema de Quine es el Cálculo de Predicados Clásico con Igualdad ($C_0^=$).