UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ESPACIOS SEMI - ESTRATIFICABLES

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

ANA LUISA CAMILA ESCAMILLA Y BRUGMANN

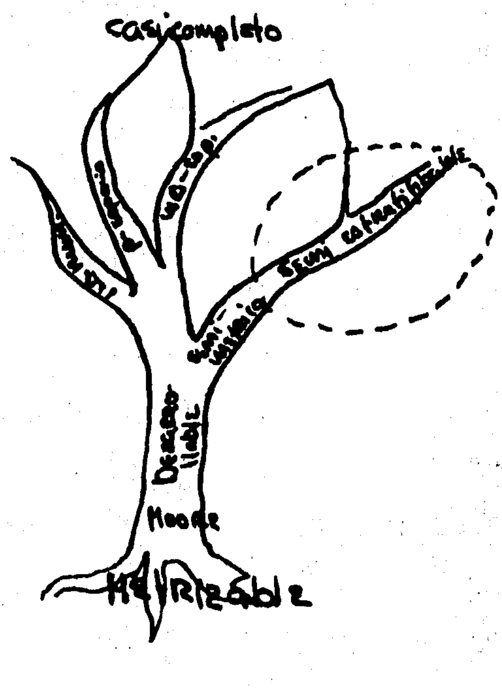
México, D. F. 1985

Indice

Introducción

Este cuento empezó con una pregunta muy inocente ¿qué espacios topologicos son metrizables? Y como el cuento de las habichuelas, el árbol empezó a crecer y crecer.

Si quería lograr escribir algo más o menos redondeado y plausiblemente corto tenía que abandonar muchos ramales.



Lo que encontré es que hay dos teoremas centrales en la teoría de metrización 1º el Teorema de Urysohn: Todo espacio regular, 2º numerable es metrizable. 2. el Teorema de Bing: Todo espacio paracompacto de Moore es metrizable. (Anexo una demostración en el Apéndice). De modo que gran parte de las demostraciones a metrización se reducen a ¿cómo llegar a estas condiciones?

Aquí se estudiará, principalmente, una clase de espacios llamados semi-estratificables. Esta clase de espacios se encuentra entre la clase de espacios semi-métricos y la clase de espacios en los cuales los conjuntos cerrados son G_δ. Esta clase de espacios es invariante con respecto a tomar productos numerables, mapeos cerrados y uniones de cerrados. En un espacio semi-estratificable compacto y numerablemente compacto son propiedades equivalentes. Un espacio semi-estratificable es F_σ-proyectable (subparacompacto). (Cap. II)

El concepto de espacio semi-estratificable como una generalización de espacios semi-métricos se debe a E.A. Michael. Parece ser que todas las propiedades de espacios semi-métricos que no dependen de primero numerabilidad también se cumplen en espacios semi-estratificables.

Un espacio T_1 es semi-métrico si y solo si es semi-estratificable y primer numerable. (Teorema (I.2))

El Teorema (I.1) es una caracterización de los espacios semi-estratificables usando sucesiones de cubiertas abiertas y se debe a G. Creede [11].

En el capítulo III daremos algunas condiciones necesarias y suficientes para que un espacio semi-estratificable sea un espacio de Moore.

I. Preliminares:

<u>Definición (I.1)</u>: Un espacio topológico X es un espacio <u>semi-estratificable</u> si a cada conjunto abierto $U \subset X$ se le puede asociar una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de X tal que:

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$

(b) $U_n \subset V_n$ siempre que $U \subset V$, donde $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión asociada a V

La correspondencia $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una <u>semi-estratificación</u> del espacio X siempre que satisfaga las condiciones (a) y (b) de la Definición (I.1).

<u>Definición (I.2)</u>: Un espacio topoló-

gico X es un espacio <u>estratificable</u> si X es T_1 y a cada abierto $U \subset X$ se le puede asociar una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos de X tal que:

(a) $\overline{U_n} \subset U$

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$

(c) $U_n \subset V_n$ siempre que $U \subset V$.

Por conveniencia decimos que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una <u>estratificación</u> de U siempre que satisfaga (a), (b) y (c) de la Definición (I.2)

Si comparamos las dos definiciónes anteriores podemos ver que si la correspondencia $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una estratificación para X, entonces $U \to \{U_n'\}_{n=1}^{\infty}$ donde $U_n' = \overline{U_n}$, es una semi-estratificación para X.

Ejemplo 1 :

$\mathbb{N}$ con la topología cofinita es un espacio semi-estratificable:
U abierto, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ cerrados con $U_n = \{1,2,\dots,n\} \cap U$,
y $U_n \subseteq V_n$ si $U \subset V$.
Pero no es estratificable:
si $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ abiertos t.q. $\overline{U_n} \subseteq U$, entonces $\exists n$ t.q. $U_n \neq \emptyset$, pero abierto $\rightarrow$ complemento finito
$\therefore \overline{U_n} = \mathbb{N}$.

Teorema : (I.1): Una condición suficiente y necesaria para que un espacio topológico X sea semi-estratificable es que exista una función $g: \mathbb{N} \times X \to \tau$ (τ la topología de X) tal que:
(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x) = \overline{\{x\}}$, $\forall x \in X$
(ii) si $y \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $y \in g(n,x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ converge a y.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $U \to \{U_n\}$ una semi-estratificación para X

para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$g(n,x) = X - (X - \overline{\{x\}})_n$$

Cada $(X - \overline{\{x\}})_n$ $n \in \mathbb{N}$ es cerrado

$$\therefore X - (X - \overline{\{x\}})_n \in \tau$$

i.e. $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$

P.D. (i)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [X - (X - \overline{\{x\}})_n]$$

$$= X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - \overline{\{x\}})_n$$

$$= X - (X - \overline{\{x\}})$$

$$= \overline{\{x\}}.$$

Si $U \to \{U_n\}$ es una semi-estratificación, $U \to \{\mathcal{U}_n\}$ también, donde $\mathcal{U}_n = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.

En un espacio semi-estratificable podemos suponer, cuando convenga, que $\forall$ U abierto,

$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_n \subseteq U_{n+1} \subseteq \cdots$

P.D. (ii)

sean $y \in \mathbb{X}$ y $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{X}$ tales que

$$y \in g(n, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y que la semi-estratificación es como arriba.

Entonces:

si $x_n \not\to y$

$\exists$ U abierto tal que $y \in U$ y una infinidad de terminos de la sucesión $\{x_n\}$ no están en U.

Sea m tal que $y \in U_m$,

entonces,

$\forall\, n \geq m$ tal que $x_n \notin U$,

$$U \subseteq \mathbb{X} - \overline{\{x_n\}}$$

$$\therefore y \in U_m \subseteq U_n \subseteq (\mathbb{X} - \overline{\{x_n\}})_n$$

Pero $y \in g(n, x_n) = \mathbb{X} - (\mathbb{X} - \overline{\{x_n\}})_n$ lo cual es una contradicción.

$\therefore y \in \mathbb{X}$, $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ tal que

$y \in g(n, x_n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{x_n\} \longrightarrow y$.

$\Leftarrow$) Sea $g : \mathbb{N} \times \overline{X} \to \tau$ una función que satisface (i) y (ii) del enunciado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada conjunto abierto U sea

$$U_n = \overline{X} - \bigcup \{ g(n,x) : x \in \overline{X} - U \}$$

P.D. U_n es cerrado.

$g(n,x) \in \tau, \Rightarrow \bigcup g(n,x) \in \tau$

$\therefore \quad \overline{X} - \bigcup \{ g(n,x) : x \in \overline{X} - U \}$ es cerrado.

P.D. $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\overline{X} - \bigcup \{ g(n,x) : x \in \overline{X} - U \} \right] \\
&= \overline{X} - \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup \{ g(n,x) : x \in \overline{X} - U \} \} \\
&= \overline{X} - \bigcup \{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ g(n,x) : x \in \overline{X} - U \} \} \\
&= \overline{X} - \bigcup \{ \overline{\{x\}} : x \in \overline{X} - U \} \\
&= \overline{X} - \overline{\overline{X} - U} \quad \text{pero } \overline{X} - U \text{ es cerrado} \\
&= \overline{X} - \overline{X} - U \\
&= U
\end{aligned}$$

P.D. U, V dos abiertos tales que $U \subset V$, entonces $U_n \subset V_n$.

$$U_n = X - \bigcup\{g(n,x) : x \in X - U\}$$
$$V_n = X - \bigcup\{g(n,x) : x \in X - V\}$$
$$U \subset V \Rightarrow X - U \supset X - V$$
$$\Rightarrow \bigcup\{g(n,x) : x \in X - V\} \subset \bigcup\{g(n,x) : x \in X - U\}$$
$$\Rightarrow U_n \subset V_n$$

$\therefore$ $U \to \{U_n\}$ es una semi-estratificación para X //

<u>Definición (I.3)</u>: Un espacio topológico X es <u>semi-métrico</u> si existe una función distancia d definida en X tal que:

(1) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) x es punto límite de un conjunto $H \Leftrightarrow \inf\{d(x,y) : y \in H\} = 0$.

Con el siguiente teorema tenemos una relación entre espacios semi-estratificables y espacios semi-métricos.

TEOREMA (I.2): Un espacio T_1 es semi-métrico si y sólo si es un espacio primer numerable y semi-estratificable.

Demostración:

X semi-métrico $\Rightarrow$ X T_1, 1er numerable y semi-estratificable.

i) (X,d) semi-métrico $\Rightarrow$ si x y $y \in X$
$x \neq y \Rightarrow d(x,y) \neq 0$
$\Rightarrow y \notin \overline{\{x\}}$
$\therefore (X,d)$ es T_1.

ii) sea $p \in X$
y sea $A_n = \{x \in X : d(p,x) \geq \frac{1}{n}\}$
para cada $n \in \mathbb{N}$.
$p \notin \overline{A_n}$
$\Rightarrow \exists\ U_n$ abierto t.q. $p \in U_n$
y $U_n \cap \overline{A_n} = \emptyset$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\ U_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(p) = X - A_n$

tal que U_n es abierto y $p \in U_n$.

Sea $p \in U$ abierto

$\overline{X} - U$ es cerrado

$\inf \{d(p,x) : x \in \overline{X} - U\} = r > 0$

$\therefore \ \exists \ m \in \mathbb{N} \ \ni \ r > \frac{1}{m}$

y $B_{\frac{1}{m}}(p) \subseteq U$

tenemos además

$U_n \subseteq B_{\frac{1}{m}}(p)$

$\therefore$ $\{U_n\}$ es una base local numerable

$\therefore$ $(\overline{X}, d)$ es 1er numerable.

iii) $\forall p \in \overline{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists U_{n,p}$ abierto tal que $p \in U_{n,p} \subseteq B_{\frac{1}{n}}(p)$

$\forall$ A cerrado

sea $A_n = \bigcup_{p \in A} U_{n,p}$

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in U_{n,p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y alguna $p \in A$

$\Rightarrow d(x,p) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad d(x,A) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\therefore$ a todo A cerrado le podemos asociar una colección $\{A_n\}$ de abiertos tales que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Además si B es un cerrado contenido en A, la colección asociada a B satisface

$$B_n = \bigcup_{p\in B} U_{n,p} \subset \bigcup_{p\in A} U_{n,p} = A_n$$

$$y \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \quad , \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Entonces esto es una semi-estratificación para X

$\therefore (X,d)$ es semi-estratificable.

$\Leftarrow)$

X es T_1, 1er numerable y semi-estratificable $\Rightarrow$ X es semi-métrico.

Supongamos que $\exists\ g: \mathbb{N}\times X \to \tau$.

(a) para cada $x \in X$, $\{g(n,x) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base local no-creciente de x (1er numerable)

(b) $x \neq y \Rightarrow y \notin \overline{\{x\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x)$. ($T_1$)

(c) $y \in X$, $\{x_n\} \subset X$ .t. $y \in g(n,x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\} \to y$ (semi-estratificable).

P.D. $\exists\ d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ .t.

(1) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$

(2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(3) x es punto límite de un conjunto M $\iff \inf\{d(x,y) : y \in M\} = 0$

Sea $m : X \times X \to \mathbb{N}$ .t.

$m(x,y) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid y \notin g(p,x)\}$

$m \geq 1 \quad \forall (x,y) \in X \times X,\ x \neq y$

Ahora sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ .t.

$\forall x \in X \quad d(x,x) = 0$

y $d(x,y) = \min\left\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\right\}$

P.D (1)

$x \neq y \rightarrow$ por (a) y (b) $\exists\ p, q \in \mathbb{N}$ .t.

$m(x,y) = p \quad y \quad m(y,x) = \phi$

$\therefore \quad d(x,y) > 0$

P.D. (2)

$(\Leftarrow)$ por definición de d.

$(\Rightarrow)$ $d(x,y) = 0$

$\Rightarrow \min\left\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\right\} = 0$

$\Rightarrow x \in g(n,y)$ y $y \in g(n,x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

por (b) $\Rightarrow$ $x = y$.

P.D. (3)

Sea $M \subset \mathfrak{X}$

$(\Leftarrow)$ $\inf\{d(x,y) : y \in M\} = 0$

$\Rightarrow \inf\left\{\min\left\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\right\} : y \in M\right\} = 0$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$ $\exists y_n \in M$ t.q.

$x \in g(n, y_n)$

por (c) $\Rightarrow$ $y_n \to x$

$\therefore$ x es punto límite de M.

$(\Rightarrow)$ sea x un punto límite de M.

$\Rightarrow \exists \{y_n\}$ sucesión en M t.q.

$y_n \longrightarrow x$

por (a) $\Rightarrow$ $\forall$ U abierto t.q. $x \in U$

$\exists$ $p \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ t.q.

$y_n \in g(p, x) \subset U$ $\forall n > k$.

i.e. $\forall n$ $\exists p$ t.q. $y_n \in g(p, x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{m(x, y_n)} \xrightarrow[\text{cuando } n \to \infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \inf \{ d(x,y) : y \in M \} = 0 \quad .$$

II Propiedades de los espacios semi-estratificables.

Teorema (II.1) : El producto numerable de espacios semi-estratificables es semi-estratificable.

Demostración:

Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea X_i un espacio semi-estratificable con topología τ_i. Sean $g_i : \mathbb{N} \times X_i \to \tau_i$ funciones que satisfacen las condiciones del Teorema (I.1).

Sea $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ con la topología del producto τ,

y sean π_i las proyecciones de X en X_i.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$,

para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$h_i(n,x) = \begin{cases} g_i(n, \pi_i(x)) = g_i(n, x_i) & \text{si } n \geq i \\ X_i & \text{si } n < i \end{cases}$$

Ahora sea $g : \mathbb{N} \times \mathbb{X} \to Z$ como sigue:

$$g(n,x) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(n,x)$$

$$g(1,x) = g_1(1,x_1) \times \prod_{i=2}^{\infty} \mathbb{X}_i$$
$$g(2,x) = g_1(2,x_1) \times g_2(2,x_2) \times \prod_{i=3}^{\infty} \mathbb{X}_i$$
$$\vdots$$
$$g(n,x) = \prod_{i \le n} g_i(n,x_i) \times \prod_{i > n} \mathbb{X}_i$$

Hay que probar que g satisface las condiciones del Teorema (I.1)

<u>P.D.</u> (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x) = \overline{\{x\}}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h_i(n,x)$$
$$= \prod_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} h_i(n,x)$$
$$= \prod_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} g_i(n,\pi_i(x))$$
$$= \prod_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} g_i(n,x_i)$$

Como $\mathbb{X}_i$ es semi-estratificable $\forall i$
$$= \prod_{i=1}^{\infty} \overline{\{x_i\}}$$
$$= \overline{\{x\}}$$

P.D. (ii) Si $y \in \mathbb{X}$ y $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{X}$ t.q. $y \in g(n, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, $\{x_n\}$ converge a y.

Sea $y \in \mathbb{X}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$
y sea $\{x^n\} = \{(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots), (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots), \ldots, (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n, \ldots), \ldots\}$
una sucesión en $\mathbb{X}$ tal que
$y \in g(n, x^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

P.D. $\{x^n\} \longrightarrow y$.

$y \in g(n, x^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y \in \prod_{i=1}^{n} g_i(n, x_i^n) \times \prod_{i>n} \mathbb{X}_i$

$\Rightarrow \pi_i(y) = y_i \in g_i(n, x_i^n)$ para $i \leq n$.

i.e. $\pi_i(y) \in h_i(n, x^n)$

$y_i \in g_i(n, \pi_i(x^n)) = g_i(n, x_i^n)$ para $i \leq n$;

entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$

$y_i \in g_i(n, \pi_i(x^n)) = g_i(n, x_i^n)$ $\forall n \geq i$

y $\{x_i^n\}$ es una sucesión en $\mathbb{X}_i$ semi-estratificable

$\Rightarrow \{x_i^n\} \longrightarrow y_i$ (A)

Sea U un abierto de X .t. $y \in U$.

U es de la forma

$$\mathcal{U}_{\alpha_1} \times \mathcal{U}_{\alpha_2} \times \cdots \times \mathcal{U}_{\alpha_r} \times \prod_{\substack{i \neq \alpha_j \\ j=1,\dots,r}} X_i$$

donde $\mathcal{U}_{\alpha_j}$ es un abierto de X_{α_j},

y $\quad \pi_{\alpha_j}(y) = y_{\alpha_j} \in \mathcal{U}_{\alpha_j}$

$\quad \pi_{i}(y) = y_i \in X_i \quad (i \neq \alpha_j)$.

por (A) para cada α_j con $j=1,\dots,r$

$\exists\ k_{\alpha_j} \in \mathbb{N}$ .t. $x^n_{\alpha_j} = \pi_{\alpha_j}(x^n) \in \mathcal{U}_{\alpha_j}$

$\forall\ n > k_{\alpha_j}$

entonces, si $m = \max\{k_{\alpha_j} : j=1,\dots,r\}$

como $x^n_{\alpha_j} \in \mathcal{U}_{\alpha_j} \quad \forall\ n > m$

$\forall\ \mathcal{U}_{\alpha_j}, j=1,\dots,r$

$\Rightarrow \quad x^n \in U \quad \forall\ n > m$

$\therefore \{x^n\} \longrightarrow y.$ //

<u>Teorema (II.2)</u>: Un espacio semi-estratificable es hereditariamente semi-estratificable.

Simplemente tomando la restricción natural de la semi-estratificación para el espacio total al subespacio.

En el caso de subespacios cerrados, toda semi-estratificación en el subespacio $\overline{Y}$ es restricción de alguna semi-estratificación del espacio total X. Diremos que la semi-estratificación en X extiende a la de $\overline{Y}$. //

<u>Teorema (II.3)</u>: Si $\overline{Y}$ es un subespacio cerrado de un espacio semi-estratificable X y $U \to \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una semi-estratificación en $\overline{Y}$, entonces hay una semi-estratificación $V \to \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ para X que extiende a la de $\overline{Y}$ i.e.

$$(V \cap \overline{Y})_n = V_n \cap \overline{Y}.$$

<u>Demostración</u>:

(Voy a poner notaciones distintas para las semi-estratificaciones de $\overline{Y}$ y de X).

Sea $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una semi-estratificación para $\overline{Y}$ cerrado contenido en X semi-estratificable y sea $W \mapsto [W_n]_{n=1}^{\infty}$ una semi-estratificación para X.

Sea V un abierto en X

$V \cap \overline{Y}$ es un abierto en $\overline{Y}$,

$V - \overline{Y}$ es un abierto en X.

Ahora sea

$$V_n = \{V \cap \overline{Y}\}_n \cup [V - \overline{Y}]_n$$

P.D. $V \mapsto \langle V_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ satisface (a) y (b) de la Definición (I, 1) y

$$V_n \cap \overline{Y} = \{V \cap \overline{Y}\}_n$$

(a) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{V \cap \overline{Y}\}_n \cup [V - \overline{Y}]_n \right)$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V \cap \overline{Y}\}_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [V - \overline{Y}]_n$$
$$= (V \cap \overline{Y}) \cup (V - \overline{Y})$$
$$= V$$

(b) Sea A un abierto en X tal que $V \subset A$ y sea $\langle A_n \rangle$ la sucesión asociada a A, i.e. $A_n = \{A\cap\overline{\Psi}\}_n \cup [A-\overline{\Psi}]_n$.

$$V\subset A \Rightarrow (V\cap\overline{\Psi}) \subset (A\cap\overline{\Psi})$$
$$\text{y} \quad (V-\overline{\Psi}) \subset (A-\overline{\Psi})$$

como $\{\ \}$, $[\ ]$ son semi-estratificaciones para $\overline{\Psi}$ y X respectivamente, entonces,

$$\{V\cap\overline{\Psi}\}_n \subset \{A\cap\overline{\Psi}\}_n$$
$$\text{y} \quad [V-\overline{\Psi}]_n \subset [A-\overline{\Psi}]_n$$

$$\therefore \quad V_n = \{V\cap\overline{\Psi}\}_n \cup [V-\overline{\Psi}]_n \subset$$
$$\subset \{A\cap\overline{\Psi}\}_n \cup [A-\overline{\Psi}]_n = A_n$$

i.e. $\quad V_n \subset A_n$.

$$V_n \cap \overline{\Psi} = (\{V\cap\overline{\Psi}\}_n \cup [V-\overline{\Psi}]_n)\cap\overline{\Psi}$$
$$= (\{V\cap\overline{\Psi}\}_n \cap\overline{\Psi}) \cup \underbrace{([V-\overline{\Psi}]_n \cap \overline{\Psi})}_{\emptyset}$$
$$= \{V\cap\overline{\Psi}\}_n .$$

//

Aplicando el teorema anterior con respecto al subespacio común obtenemos el siguiente teorema.

<u>Teorema (II.4)</u>: Si $X = A\cup B$, A cerrado en X y A y B son semi-es-

tratificables, entonces, $\mathbb{X}$ es semi-estratificable.

<u>Demostración</u>:

Sea $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una semi-estratificación para A.

Sea $V \mapsto [V_n]_{n=1}^{\infty}$ una semi-estratificación para B.

Sea W un abierto de $\mathbb{X}$

$W \cap A$ es un abierto de A

$W - A$ es un abierto en B.

sea $W_n = \{W \cap A\}_n \cup [W-A]_n$

<u>P.D.</u> $W \mapsto (W_n)_{n=1}^{\infty}$ es una semi-estratificación para $\mathbb{X}$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\{W \cap A\}_n \cup [W-A]_n\right) =$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{W \cap A\}_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [W-A]_n$$
$$= (W \cap A) \cup (W - A) = W$$

$\overline{Y}$ abierto en $\mathbb{X}$ $\cdot/\cdot$ $W \subset \overline{Y}$

$W \cap A \subset \overline{Y} \cap A \Rightarrow \{W \cap A\}_n \subset \{\overline{Y} \cap A\}_n$

$W - A \subset \overline{Y} - A \Rightarrow [W-A]_n \subset [\overline{Y} - A]_n$

$\Rightarrow W_n \subset \overline{Y}_n$. //

Corolario (II.4.1): Si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ donde A^n es cerrado en A^{n+1}, $n=1,2,\dots$ y A^n es semi-estratificable $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, X es semi-estratificable.

Demostración:

Para cada $i \in \mathbb{N}$ se denotará por $V \mapsto (V_n)_i$ una semi-estratificación para A^i.

Supongamos además que $\forall i \in \mathbb{N}$

$$V_1)_i \subseteq V_2)_i \subseteq \cdots \subseteq V_n)_i \subseteq V_{n+1})_i \subseteq \cdots \qquad (*)$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, A^n es cerrado en A^{n+1}, las extensiones de A^n a A^{n+1} serán como sigue:

en A^1 $\quad V \mapsto [V_n]_1 = V \mapsto (V_n)_1$

en A^2 $\quad V \mapsto [V_n]_2 \; ; \; V_n = (V \cap A^1)_n)_1 \cup (V - A^1)_n)_2 .$

$$V \mapsto [V_n]_3 \; ; \; V_n = (V \cap A^1)_n)_1 \cup (V \cap (A^2 - A^1))_n)_2$$
$$\cup (V - A^2)_n)_3$$

semi-estratificacion restringida a A^3

$\vdots$

Suponiendo que ya se han construido las extensiones desde A^1 hasta la de A^{k-1}, la extensión de éste a A^k será construida así:

Para cada $i = 1, \dots, k-1$ sea

$B^i = A^i - A^{i-1}$ que es abierto en A^i.

Si V es un abierto en A^k, entonces, $V - A^{k-1}$ es un abierto en A^k;

y $V \cap B^i$ es un abierto en A^i, $i<k$.

Entonces, $V \mapsto [V_n]_k$ está dado por:

$$V_n = \bigcup_{i=1}^{k-1} \left((V \cap B^i)_n)_i \;\cup\; (V - A^{k-1})_n)_k \right)$$

Probaremos que es una semi-estratificación para A^k.

$$V_n = \bigcup_{i=1}^{k} (V \cap B^i)_n)_i$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{k} (V \cap B^i)_n)_i \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (V \cap B^i)_n)_i \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} (V \cap B^i) = V$$

Si D es un abierto en A^k y $V \subset D$, entonces, $V \cap B^i \subset D \cap B^i$

$$\Rightarrow (V \cap B^i)_n)_i \subset (D \cap B^i)_n)_i$$

$$\therefore V_n \subset D_n$$

$\therefore V \mapsto [V_n]_k$ es semi-estratificación.

Ahora, si U es un abierto en X

sea $U_n = (U \cap A^n)_{n)_n}$ --- con la semi-estratificación de A^n, extendida.

P.D. $U \mapsto \{U_n\}$ es semi-estratificación para X.

Sea $B^i = A^i - A^{i-1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$,

entonces, $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} (U \cap B^i)_{n)_i}$ --- semi-estratificación restringida a A^i.

pero por (*)

$$U_n = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (U \cap B^i)_{j)_i} \right)$$

(a) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (U \cap B^i)_{j)_i} \right) \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U \cap B^i)_{j)_i} \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (U \cap B^i)$$

$$= U$$

(b) Sea D un abierto en X . $\ni$. $U \subset D$

$\Rightarrow$ $U \cap B^i \subset D \cap B^i$

$(U \cap B^i)_{n)_i} \subset (D \cap B^i)_{n)_i}$

$\Rightarrow \quad U_n \subset D_n$

$\therefore \quad \mathcal{U} \mapsto \{U_n\}$ es una semi-estratificación para X. //

<u>Definición (II.1)</u>: Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es <u>discreta</u> si cada elemento $x \in X$ tiene una vecindad que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{U}$.

<u>Definición (II.2)</u>: Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es <u>σ-discreta</u> si $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, donde cada $\mathcal{U}_n$ es una colección discreta de subconjuntos de X.

<u>Definición (II.3)</u>: Un espacio topológico es <u>F_σ-proyectable</u> si toda cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado σ-discreto.

<u>Nota:</u> Para otros autores F_σ-proyectable ≡ subparacompacto. [6][16]

<u>Teorema (II.5)</u>: Un espacio topológico semi-métrico X es F_σ-proyectable.

<u>Demostración</u>:

Sea α un buen orden de una cubierta abierta $\mathcal{H}$ de X. Para cada $H \in \mathcal{H}$, $i \in \mathbb{N}$ sea

$x(H,i) = \{ p \in X$ tal que:
1° ningún elemento de $\mathcal{H}$ que contiene a p precede a H en α
y 2° $B_{\frac{1}{i}}(p) \subset H \}$

Ahora sea $X_i = \{ x(H,i) : H \in \mathcal{H} \}$ esta es una colección discreta de subconjuntos de X y además $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ cubre a X,

$\therefore$ X es F_σ-proyectable. //

Teorema (II.6): Un espacio semi-estratificable X es F_σ-proyectable.

Demostración:

Sea $U \longrightarrow \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una semi-estratificación para X.

sea $\mathcal{O} = \{O_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de X y sea I bien ordenado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

sea $H(1,n) = (O_1)_n$ (s-e)

y para cada $\alpha > 1$ sea

$$H(\alpha,n) = (O_\alpha)_n - \bigcup\{O_\beta : \beta \in I, \beta < \alpha\}$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{H}_n = \{H(\alpha,n) : \alpha \in I\}$$

esta es una colección discreta de subconjuntos cerrados de X y además $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ cubre a X

$\therefore$ X es F_σ-proyectable. //

Definición (II.4): Un espacio topológico es $\aleph_1$-compacto si todo subconjunto no-numerable tiene un punto límite.

Teorema (II.7): En un espacio X, T_1, semi-estratificable son equivalentes:

(1) X es Lindelöf

(2) X es hereditariamente separable

(3) X es $\aleph_1$-compacto

Demostración:

(1) ⇒ (2)

1.1 Lindelöf es una propiedad debilmente hereditaria; cerrados de Lindelöf son Lindelöf.

Demostración:

Sea A un cerrado de X Lindelöf y sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de A.

Para cada $\alpha \in I$, encontrar un

conjunto abierto V_α en $\bar{X}$, tal que

$$V_\alpha \cap A = U_\alpha$$

entonces

$\{\bar{X}-A\} \cup \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ forma una cubierta abierta para $\bar{X}$ Lindelöf

$\therefore$ $\exists$ una subcubierta numerable

$\{\bar{X}-A, V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots\}$

entonces, los correspondientes

$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots$ cubren a A

i.e. $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots\}$ es una subcubierta numerable

$\therefore$ A es Lindelöf.

<u>1.2</u> como Corolario de 1.1:

F_σ de Lindelöf es Lindelöf.

<u>Demostración</u>:

Sea A un F_σ

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n cerrado $\forall n$

Sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de A.

$\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ es cubierta abierta de F_n $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, como F_n es cerrado, es Lindelöf y

entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$
sea $\{U_{\alpha,n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ la subcubierta numerable de F_n.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{U_{\alpha,n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ cubre a A y es numerable

$\therefore$ A es Lindelöf.

y entonces:

1.3 Si X es semi-estratificable y Lindelöf, entonces, todos los abiertos son Lindelöf.

En los espacios semi-estratificables todo abierto es un F_σ.

1.4 Un espacio es hereditariamente Lindelöf $\Leftrightarrow$ todo subespacio abierto es Lindelöf.

Demostración:

($\Leftarrow$) Sea X de Lindelöf $\ni$ todo subespacio abierto de X es Lindelöf.

Sea $A \subseteq X$ y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de A.

$\forall \alpha \quad \exists\ V_\alpha$ abierto de X .).

$$V_\alpha \cap A = U_\alpha$$

$\{V_\alpha\}$ es una cubierta abierta del abierto $V = \bigcup V_\alpha$ y tiene una subcubierta numerable $\{V_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\alpha_n} = V \supset A$$

$$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_{\alpha_n} \cap A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} = A \quad .$$

Entonces, si X es semi-estratificable y Lindelöf, X es hereditariamente Lindelöf. De aqui que en la demostración (1) ⇒ (2) sea suficiente demostrar que X es separable.

<u>1.5</u>

Sea $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$ la función dada en el teorema (I.1).

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{G}_n = \{ g(n,x) : x \in X \}$ es una cubierta abierta de X y como X es Lindelöf, existe $\mathcal{G}_n' \subset \mathcal{G}_n$

subcubierta numerable, es decir, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto numerable $D_n \subset \underline{X}$, tal que $\mathcal{G}_n' = \{ g(n,x) : x \in D_n \}$ es una cubierta abierta de $\underline{X}$.

El conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es un subconjunto numerable de $\underline{X}$. Demostraremos que también es denso en $\underline{X}$.

sea $p \in \underline{X}$

para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un elemento de D_n, llamemosle x_n, tal que $p \in g(n, x_n)$, entonces, por la propiedad (ii) del teorema (I.1) $\{x_n\} \subset D$ converge a p.

$\therefore$ $p \in \overline{D}$

$\Rightarrow$ D es denso en $\underline{X}$

$\therefore$ $\underline{X}$ es separable.

(2) $\rightarrow$ (3)

Sea $\underline{X}$ hereditariamente separable y sea A un subconjunto no-numerable de $\underline{X}$. A contiene un denso numerable D. Todo punto de $A-D$ es punto de acumulación de A, $\underline{X}$ es $\aleph_1$- compacto.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sea $\underline{X}$ un espacio $\aleph_1$-compacto, semi-estratificable y T_1.
Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de $\underline{X}$ y supongamos que $\mathcal{G}$ no tiene una subcubierta numerable. Por el Teorema (II.6) $\mathcal{G}$ tiene un refinamiento $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, donde cada $\mathcal{H}_n$ es discreto, $\mathcal{H}$ cerrado.

Como $\mathcal{G}$ no tiene una subcubierta numerable, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{H}_n$ es no-numerable. Sea B un subconjunto de $\underline{X}$ que consiste de exactamente un punto de cada elemento no vacio de $\mathcal{H}_n$. B es un conjunto no-numerable que no tiene punto límite. ∎

$\therefore$ Toda cubierta $\mathcal{G}$ de $\bar{X}$ tiene subcubierta numerable y $\bar{X}$ es Lindelöf. //

El Teorema (II.7) no se puede hacer mas fuerte cambiando hereditariamente separable por separable.

R.L. Moore dio un ejemplo de un espacio separable y semi-estratificable que no es Lindelöf.

<u>Ejemplo</u> (2):

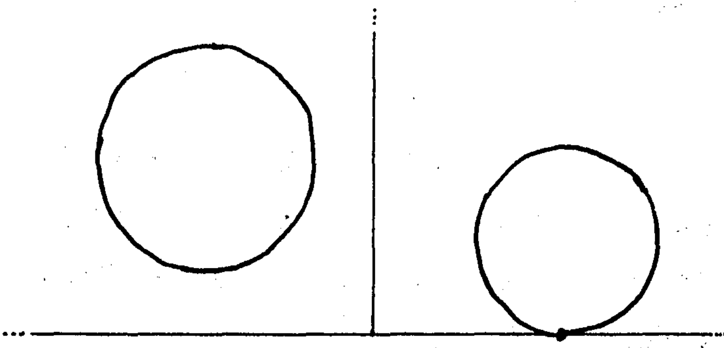
Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

Los elementos de la base de la topología τ de S están dados de la siguiente manera:

(1) si un círculo está totalmente arriba del eje - x , su interior es un básico.

(2) si un círculo es tangente (por arriba) al eje - x , su interior

unión el punto de tangencia es un básico.



$g : \mathbb{N} \times S \longrightarrow \tau$ definida por
$g(n,p) = B_{\frac{1}{2n}}(p)$ si $p=(x,y)$ con $y>0$
y si $p=(x,0)$; $g(n,p) = B_{\frac{1}{2n}}(x, \frac{1}{2n}) \cup p$
satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema (I,), entonces S es semi-estratificable.

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{G}_n = \{ g(n,p) : p \in S \}$ es una cubierta abierta de S que no tiene una subcubierta numerable, porque ningún $g(n,p)$ contiene dos puntos de S en el eje-x. El eje-x es un subconjunto discreto, no-numerable, por ello,

no separable.

$\therefore$ S no es Lindelöf.

Sin embargo S es separable porque contiene a un denso numerable $D = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \mid p, q \in \mathbb{Q} \text{ y } q \geq 0\}$.

Todo espacio compacto es numerablemente-compacto. En los espacios de Lindelöf, numerablemente-compacto implica compacto. Todo espacio numerablemente-compacto es $\aleph_1$-compacto. Entonces el Teorema (II.7) tiene el siguiente:

<u>Corolario (II.7.1)</u>: En un espacio semi-estratificable y T_1, compacto es equivalente a numerablemente-compacto.

TEOREMA (II.8): La imagen de un espacio $\mathbb{X}$ semi-estratificable bajo una función continua cerrada es semi-estratificable.

Demostración:

Sea f una función continua y cerrada de $\mathbb{X}$ semi-estratificable sobre $\mathbb{Y}$, espacio topológico. Sea $U \to \{U_n\}$ una semi-estratificación para $\mathbb{X}$.

Para cada V abierto en $\mathbb{Y}$

$U = f^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{X}$

Sea $V_n = f(U_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$

V_n es cerrado en $\mathbb{Y}$

P.D. $V \longrightarrow \{V_n\}$ es una semi-estratificación para $\mathbb{Y}$

$$(i) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(U_n)$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} f((f^{-1}(V))_n)$$
$$= f \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1}(V))_n$$
$$= f(f^{-1}(V))$$
$$= V$$

(ii) $W \subset V \subset \mathbb{Y} \Rightarrow f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V)$

i.e. si $\mathcal{W} = f^{-1}(W)$, $\mathcal{V} = f^{-1}(V)$

$\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \overline{X}$ s-e.

$\Rightarrow \mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$

$\Rightarrow f(\mathcal{W}_n) \subset f(\mathcal{V}_n)$

$W_n \subset V_n$. //

Este teorema junto con el teorema (I.2) implican que la imagen cerrada de un espacio semi-métrico es semi-estratificable.

Sin embargo, el subespacio de $\beta\mathbb{N}$ (Compactificación de Stone-Cèch de $\mathbb{N}$) que consiste de $\mathbb{N}$ unión un punto de $\beta\mathbb{N}-\mathbb{N}$, es un espacio semi-estratificable que no puede ser la imagen cerrada de un espacio semi-métrico.

Es una pregunta abierta si los espacios que son imagen cerrada de los espacios semi-métricos son precisamente los espacios semi-estratificables Frèchet - Urysohn. [ ]

III. Espacios de Moore

Sea X un conjunto, sea $\mathcal{G}$ una colección de subconjuntos de X y sea p un elemento de X.

Definición (III.1): La estrella de p con respecto a $\mathcal{G}$, denotada por $st(p,\mathcal{G})$, es la unión de todos los elementos de $\mathcal{G}$ que contienen a p.

Definición (III.2): El orden de p con respecto a $\mathcal{G}$, denotado por $ord(p,\mathcal{G})$, es el número de elementos de $\mathcal{G}$ que contienen a p.

La unión de todos los elementos de $\mathcal{G}$ se denota por $\mathcal{G}^*$.

Definición (III.3): Si $\mathcal{G}$ cubre a X, se dice que $\mathcal{G}$ es una cubierta que separa si dados cualesquiera dos puntos distintos p y q en X, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $p \in G$ y $q \notin G$.

<u>Definición (III.4)</u>: Se dice que un espacio topológico X <u>es desarrollable</u> si existe una sucesión $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de X tales que, para cada $p \in X$ $\{st(p, \mathcal{G}_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ es una base local en p.

<u>Definición (III.5)</u>: Se dice que (X, τ), espacio topológico <u>es desarrollable</u> si existe una sucesión $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de X tales que para todo $p \in X$ y C subconjunto cerrado de X tal que $p \notin C$, existe un número natural n tal que $st(p, \mathcal{G}_n) \cap C = \emptyset$

A la sucesión de cubiertas abiertas con la propiedad anterior se le llama un <u>desarrollo para $\mathfrak{X}$</u>.

<u>Definición (III.6)</u>: $(\mathfrak{X}, \tau)$ es un espacio <u>desarrollable</u> si existe una función $g: \mathbb{N} \times \mathfrak{X} \to \tau$ tal que

i) $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in g(n,x)$ y

ii) $x \in g(n, x_n)$ y $y_n \in g(n, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ x es punto de acumulación de la sucesión $\langle y_n \rangle$, y lo denotaremos por $x \in \langle y_n \rangle'$.

<u>Teorema (III.1)</u>: Para cada cubierta abierta H de un espacio desarrollable existe una sucesión $F_1, F_2, \ldots$, donde F_i es una colección discreta de conjuntos cerrados que es refinamiento de F_{i+1} y de H y $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ cubre al espacio

Demostración:

Supongamos que W es un buen-orden de H y $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ un desarrollo del espacio tal que $\mathcal{G}_{i+1}$ refina a $\mathcal{G}_i$

para cada $h \in H$ sea

$$x(h,i) = \{ p \in \overline{X} : \nexists\, k \in H \text{ .t. } p \in k \text{ y } k < h \text{ en } W \text{ y .t. } p \in G_t \in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_t \subset h \}$$

sea $f_i = \{ x(h,i) : h \in H \}$

f_i es una colección discreta ya que ningún elemento de $\mathcal{G}_i$ intersecta a dos elementos de f_i:

$x(h,i) \neq x(j,i) \quad h < j$ en W

sup. $G_t \cap x(h,i) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, p \in G_t \in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_t \subset h$

$G_t \cap x(j,i) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, q \in G_t \in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_t \subset j$

pero $p \in G_t \subset h < j \Rightarrow p \notin x(j,i)$.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ cubre a $\overline{X}$:

si p es un punto y $h(p)$ es el primer elemento de H en W que contiene a p, entonces para algún entero i $[h(p), i]$ contiene a p $\therefore$ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ cubre al espacio.

$\mathcal{G}_i$ refina a $\mathcal{G}_{i+1}$:

$\forall\ i<j \quad st(p,\mathcal{G}_i) \supseteq st(p,\mathcal{G}_j)$

$\therefore\ \forall\ h\in H \quad \forall\ i<j$

$x(h,i) \subseteq x(h,j)$.

Si $\mathcal{f}$ es una familia discreta, entonces $\{\overline{A} \mid A\in \mathcal{f}\}$ es discreta.

P.D. $\overline{x(h,i)} \subseteq h$:

$y\in \overline{x(h,i)} \Rightarrow st(y,\mathcal{G}_i)\cap x(h,i)\neq\emptyset$.

si $p\in st(y,\mathcal{G}_i)\cap x(h,i)$, entonces,

$\exists\ G\in\mathcal{G}_i \ \cdot\!\!\!/\cdot\ y\in G$ y

$p\in G\cap x(h,i)$

$\therefore\ G\subseteq h \quad \therefore\ y\in h$.

$\therefore$ si $F_i = \{\overline{x(h,i)} : h\in H\}$,

F_i refina a H.

$\therefore$ la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface que F_i es una colección discreta de conjuntos cerrados que es refinamiento de F_{i+1} y de H y $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ cubre al espacio. //

<u>Definición (III.7)</u>: Un <u>casi-desarrollo</u> para un espacio topológico X es una sucesión $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ de colecciones abiertas de X tales que, dado cualquier punto p en X y cualquier vecindad R de p, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $st(p, \mathcal{G}_n) \neq \emptyset$ y $st(p, \mathcal{G}_n) \subseteq R$.

Todo desarrollo es un casi-desarrollo.

<u>Teorema (III.2)</u>: (X, τ) es desarrollable si X es casi-desarrollable y todo subconjunto cerrado es un G_δ.

<u>Demostración</u>:

Recordemos que $C \subset X$, C cerrado es un G_δ si $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n abierto, y $A \subset X$, A abierto es un F_σ si

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, C_n cerrado.

Si todo subconjunto cerrado es un G_δ, entonces todo subconjunto abierto es un F_σ.

Sea $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots\}$ un casi-desarrollo para X y los subconjuntos cerrados son G_δ-subconjuntos.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ $\mathcal{G}_i^*$ es un subconjunto abierto de X, por lo tanto $\mathcal{G}_i^*$ es un F_σ, entonces $\mathcal{G}_i^* = \bigcup \{F(i,j) : j=1,2,\dots\}$ con $F(i,j)$ un cerrado en X $\forall j \in \mathbb{N}$.

Para cada pareja $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sea $\mathcal{H}(i,j) = \mathcal{G}_i \cup \{X - F(i,j)\}$

entonces $\{\mathcal{H}(i,j)\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ es el desarrollo buscado. //

Ejemplo 3:

Un espacio casi-desarrollable que no es desarrollable:

Sea X los puntos de la recta real y una base para la topología de X consiste de conjuntos de la forma:

(i) $\{x\}$, si x es un número irracional

(ii) el intervalo abierto (p,q), si p y q son números racionales.

Sea $R_1, R_2, \ldots$ una enumeración de los elementos básicos del tipo (ii).
Sea $\mathcal{G}_1 = \{\{x\} : x \text{ es irracional}\}$ y para cada $i \geq 1$, sea $\mathcal{G}_{i+1} = \{R_i\}$.

$\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un casi-desarrollo para X.

El conjunto de todos los números racionales es un cerrado en X que no es un subconjunto G_δ. Probaremos esto usando el teorema de Baire que dice: la intersección numerable de abiertos densos en localmente compactos es un denso.

$\mathbb{R}$ es localmente compacto.
Si $\mathbb{Q}$ fuera un G_δ, entonces, $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ donde cada G_i también es denso.
Podríamos agrandar la familia $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con conjuntos de la forma $\mathbb{R}-\{q\}$, $q\in\mathbb{Q}$ obteniendo una familia numerable de densos abiertos en $\mathbb{R}$ cuya intersección es vacía.

$\therefore$ $\mathbb{Q}$ no es un subconjunto G_δ y
$\therefore$ $\mathbb{X}$ no es desarrollable.

Definición (III.8): $(\mathbb{X}, \tau)$ es 1er numerable si existe una función
$g: \mathbb{N} \times \mathbb{X} \to \tau$ tal que:
i) $x \in g(n,x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{X}$
ii) $x_n \in g(n,x)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \langle x_n \rangle'$.

Teorema (III.3): Todo espacio desarrollable es 1er numerable.

La demostración es inmediata a partir de las Definiciones (III.6) y (III.8) //

Un resultado conocido en la teoría de metrización es que todo espacio regular y 2º numerable es metrizable. (Teorema de Urysohn).

Teorema (III.4): Todo espacio desarrollable, Lindelöf es 2° numerable.

Demostración:

Sea $\{\mathcal{G}_n\}$ el desarrollo de X. Como X es Lindelöf, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{G}'_n$ la subcubierta numerable de $\mathcal{G}_n$.

Para cada $p \in X$ escojamos

$G_{n,p} \in \mathcal{G}'_n$ tal que $p \in G_{n,p}$

como $G_{n,p} \subseteq st(p, \mathcal{G}_n)$

$\{G_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$ es base local numerable en p.

para n fijo, $\{G_{n,p}\}_{p\in X} \subseteq \mathcal{G}'_n$ es numerable

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{G_{n,p}\}_{p\in X}$ es numerable

$\bigcup_{p\in X} \{G_{n,p}\}_{n=1}^{\infty}$ es base

$\therefore$ es base numerable $\Rightarrow$ X es 2° numerable. /

Definición (III.9): Un espacio topológico se llama de <u>Moore</u> si es regular y desarrollable.

<u>Corolario (III.4.1)</u>: Todo espacio de Moore y Lindelöf es metrizable.

El siguiente teorema se debe a F.B. Jones [19]

<u>Teorema (III.5)</u>: Para que un espacio de Moore sea Lindelöf es condición suficiente y necesaria que el espacio sea $\aleph_1$-compacto.

<u>Demostración:</u>

$\Leftarrow$) Sean $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y α un buen orden en X.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $H_n\subset\mathcal{U}$ construido de la siguiente manera:
sea p_1 el primer elemento de α.

$\exists\ U_1 \in \mathcal{U}$.). $st(p_1, \mathcal{G}_n) \subset U_1$;

p_2 el primer elemento de α .). $p_2 \notin U_1$

y $\exists\ U_2 \in \mathcal{U}$.). $st(p_2, \mathcal{G}_n) \subset U_2$

y en general $\forall\ \bar{z}$ ordinal .). $\forall\ z < \bar{z}$, p_z y U_z han sido escogidos, entonces, sea $p_{\bar{z}}$ el primer elemento de α .). $p_{\bar{z}} \notin \bigcup_{z<\bar{z}} U_z$ y $\exists\ U_{\bar{z}} \in \mathcal{U}$.). $st(p_{\bar{z}}, \mathcal{G}_n) \subset U_{\bar{z}}$.

Por construcción $\langle p_z \rangle' = \phi$ ya que todo $G \in \mathcal{G}_n$ no contiene mas de uno de ellos. Como X es $\aleph_1$-compacto, entonces, $H_n = \{U_1, U_2, \ldots\}$ es una subcolección numerable de $\mathcal{U}$.

$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ es una subcolección numerable de $\mathcal{U}$.

P.D H cubre a X:

Supongamos que existe un punto $x \in X$ que no está contenido en ningún elemento de H.

Sea $U \in \mathcal{U}$.). $x \in U$; como $\{\mathcal{G}_n\}$ es un desarrollo para X (por la Definición (III.4)) $\exists\ n \in \mathbb{N}$.). $st(x, \mathcal{G}_n) \subset U$. Entonces, para algún ordinal $\bar{z}$, x es aquel $p_{\bar{z}}$ usado en la selección de H_n, lo cual es una contradicción.

$\therefore$ H es una subcubierta numerable de X y $\therefore$ X es Lindelöf.

$\Rightarrow$) Esta demostración no se dará con detalle puesto que en ella se usa un resultado que no ha sido probado aun sino será expuesto más adelante; como Corolario al siguiente Teorema. En él se afirma que todo espacio desarrollable es semi-estratificable. (Corolario (III.6.1)). Además supondremos siempre que X regular es T_1.

Entonces, X de Moore y Lindelöf $\Rightarrow$ X es semi-estratificable, T_1 y Lindelöf.

El Teorema (II.7) nos garantiza, entonces, que X es $\aleph_1$-compacto. //

Corolario (III.5.1): Si X es un espacio $\aleph_1$-compacto y de Moore, entonces X es metrizable.

Teorema (III.6): Todo espacio desarrollable es semi-métrico.

Demostración:

Sea X un espacio desarrollable y sea $g: \mathbb{N} \times X \to \tau$ la función que satisface las condiciones de la definición (III.6) y tal que

$$g(n+1, x) \subseteq g(n, x).$$

Definamos $d: X \times X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } \nexists\, n \text{ t.q. } x \in g(n,y) \text{ y } y \in g(n,x) \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = \max\{m \in \mathbb{N} : x \in g(m,y) \\ & \qquad \text{y } y \in g(m,x)\} \end{cases}$$

Probaremos que d satisface las propiedades de la definición (I.3)

1) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

3) x es punto límite de $A \iff$

$\inf \{ d(x,y)$ con $y \in A \} = 0$

1) y 2) son inmediatos, probaremos

3) : si $x \in \bar{A}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$

$g(n,x) \cap A \neq \emptyset$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \ \exists \ a_m \in A$.}. $d(x,a_m) \leq \frac{1}{n}$

sea $d(x,a_m) = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow a_m \in g(m,x) \subseteq g(n,x)$

$\therefore \inf \{ d(x,a_m) \} = 0$

si $\inf \{ d(x,y) : y \in A \} = 0$, entonces

$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists \ y_m \in A$.}. $x \in g(m,y_m)$

y. $y_m \in g(m,x)$. $\Rightarrow g(m,x) \cap A \neq \emptyset$

$\therefore x \in \bar{A}$, x es punto límite de A.

Entonces d es semi-métrica y

$\therefore$ $\mathfrak{X}$ es semi-métrico. //

Tomando en cuenta el Teorema (I.2) tenemos:

Corolario (III.6.1): Todo espacio desarrollable es semi-estratificable.

A la inversa no se cumple.

Ejemplo (4):

Sea X el eje-x del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, sea d la distancia usual en $\mathbb{R}^2$ y, si $p \neq q$ sea $\alpha(p,q)$ el ángulo no-obtuso (en radianes) formado por X y la recta que pasa por p y q. Definimos una distancia D en $\mathbb{R}^2$ como sigue: $D(p,p) = 0$ y si $p \neq q$, sea $D(p,q) = d(p,q) + \alpha(p,q)$. Una base para la topología en $\mathbb{R}^2$ es:

$\{ U_\varepsilon(p) : p \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0 \}$ donde

$U_\varepsilon(p) = \{ q : D(p,q) < \varepsilon \}$

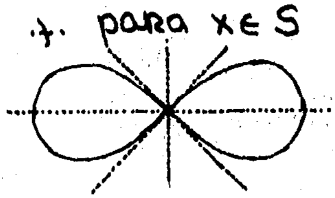
Sea S, $\mathbb{R}^2$ con esta topología.

$S = (\mathbb{R}^2, \sigma)$

<u>S es semi-estratificable.</u>

sea $g : \mathbb{N} \times S \to \sigma$ $\ni$. para $x \in S$

$g(n,x) = U_{\frac{1}{n}}(x)$



(ii) $x \in g(n,x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in S$

(iii) $x \in g(n,x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in U_{\frac{1}{n}}(x_n) \Rightarrow D(x,x_n) < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \Rightarrow x_n \in g(n,x)$.

$x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in (x_n)'$

$\therefore$ S es semi-estratificable y 1er.-numerable.

<u>S no es 2°-numerable</u> porque cualquier base contiene un número no-numerable de elementos

<u>S no es desarrollable</u>. Tomemos nadamás $\mathbb{R} = X = \mathbb{R} \times \{0\} \subset S$

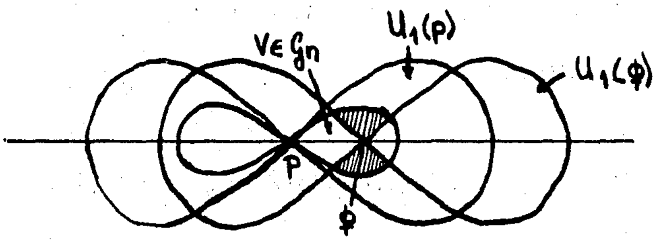
Para cada $p \in X$ consideremos $U_1(p) \in \tau$.

Si $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fuera un desarrollo para S, para $n \in \mathbb{N}$ fija si $st(p,\mathcal{G}_n) \not\subset U_1(p)$ quiere decir que $st(p,\mathcal{G}_n)$ es una unión de 'mariposas', es decir que existe una vecindad de p en $\mathbb{R}$ —con la topología usual— tal que $st(q,\mathcal{G}_n) \not\subset U_1(p)$ para toda q en la vecindad.

Ahora sea

$$A_n = \{ p \in \mathbb{X} : st(p, \mathcal{G}_n) \subseteq U_1(p) \}$$

A_n es un cerrado en $\mathbb{R}$ - con la topología usual - que no contiene intervalos



$$st(\varphi, \mathcal{G}_n) \supseteq V \not\subseteq U_1(\varphi)$$
$$\Rightarrow \varphi \notin A_n$$

Entonces $\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Es decir que $\{st(p, \mathcal{G}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es una base local en p y por lo tanto S no es desarrollable. //

La clase de los espacios semi-estratificables y la clase de los espacios casi-desarrollables se intersectan en la clase de los espacios desarrollables.

Teorema (III.7): Si X es semi-estratificable y tiene un casi-desarrollo, entonces, X es desarrollable.

Demostración:

Como en un espacio semi-estratificable todo subconjunto cerrado es un G_δ, por el Teorema (III.1), X es desarrollable. //

El siguiente teorema se debe a Robert W. Heath [15] y da una condición suficiente para que un espacio sea un espacio de Moore.

Teorema (III.8): Un espacio (X, τ) regular (T_1) es un espacio de Moore si existe una función $g: \mathbb{N} \times X \longrightarrow \tau$ con las siguientes propiedades:

(A) para cada $x \in X$, $\{g(n,x)\}_{n=1}^{\infty}$

es una base local decreciente en x.

(B) si $y \in \mathbb{X}$ y $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{X}$ con $y \in g(n, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, $\{x_n\}$ converge a y.

(C) si $y \in \mathbb{X}$, $U \subset \mathbb{X}$ un abierto que contiene a y y $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{X}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $y \in g(n, x_n)$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{[g(n+k, x_{n+k})]} \subset g(n, x_n),$$

entonces, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m, x_m) \subset U$.

Nótese que la condición (A) dice que $\mathbb{X}$ es 1er numerable y la condición (B) dice que $\mathbb{X}$ es semi-estratificable. Entonces, el teorema dice:

Si $\mathbb{X}$ es regular 1er numerable, semi-estratificable y satisface la condición (C), entonces, $\mathbb{X}$ es un espacio de Moore.

Demostración:

Nos conviene tener las condiciones A, B, C traducidas a condiciones correspondientes sobre alguna base del espacio.

Definición: Supongamos que $(\mathfrak{X}, \tau)$ es un espacio T_1 y que G es una base de $\mathfrak{X}$. La base G satisface la condición A (B ó C) significa que existe una función $g : \mathbb{N} \times \mathfrak{X} \to \tau$, tal que
$$G = \{ g(n,x) : x \in \mathfrak{X},\ n = 1,2,\ldots \}$$
y g satisface la condición A, (B ó C).

Sea $(\mathfrak{X}, \tau)$ regular (T_1) con base $G = \{ g(m,p) : p \in \mathfrak{X},\ m \in \mathbb{N} \}$ que satisface las condiciones (A)(B) y (C). Queremos probar que $\mathfrak{X}$ tiene una base $H = \{ h(n,p) : p \in \mathfrak{X},\ n \in \mathbb{N} \}$ que satisface las condiciones de la Definición (III. 6).

Sea $\alpha = \{p_1, p_2, \dots\}$ un buen orden en $\mathbb{X}$ y definamos:

$h : \mathbb{N} \times \mathbb{X} \longrightarrow G$

$r : \alpha \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

y $n_z : \mathbb{N}_z \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \alpha$ como sigue:

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall p_z \in \mathbb{X}$ con $z \in \alpha$

$$\underline{h(i, p_z) = g(r(z,i), p_z)}$$

donde $r(z,i)$ estará definida como sigue:

$\forall z \in \alpha \qquad r(z,1) = 1$

$\therefore\ h(1, p_z) = g(r(z,1), p_z) = g(1, p_z)$

y para cada $p_z \in \mathbb{X}$, $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$ tenemos dos casos:

<u>(Caso 1)</u>:

Si $\nexists\ \varphi \in (\mathbb{X} - p_z)$ ni $j < i$.$\ni$.

i) $p_z \in h(j, \varphi)$

ii) $h(j, \varphi) \cap [\mathbb{X} - g(r(z, i-1)+1, p_z)] \neq \emptyset$

i.e. si $\forall\ \varphi \neq p_z$, $\forall j < i$

$p_z \in h(j, \varphi) \Rightarrow h(j, \varphi) \subseteq g(r(z, i-1)+1, p_z)$

entonces, definimos:

$$\underline{r(z,i) = r(z, i-1) + 1}$$

(Caso 2):

de otra manera, para cada tal $j<i$ sea $p_{n_z(j)}$ el primer elemento φ de α $(\varphi \neq p_z)$ tal que:

i) $p_z \in h(j,\varphi)$ y

ii) $h(j,\varphi) \cap [X - g(r(z,i-1)+1, p_z)] \neq \emptyset$.

i.e. $h(j,\varphi) \not\subseteq g(r(z,i-1)+1, p_z)$.

entonces, definimos:

$$\underline{r(z,i)=m} = \min\{n \in \mathbb{N},\ n > r(z,i-1)\ /\ \overline{g(n,p_z)} \subset \bigcap_{\substack{j<i \\ j \text{ no en caso } 1}} h(j, p_{n_z(j)})\}$$

Entonces $h: \mathbb{N} \times X \to G$ queda definida: $h(1,p_z) = g(1,p_z)$, para $i>1$

para el Caso 1 : $h(i,p_z) = g(r(z,i-1)+1, p_z)$

para el Caso 2 : $h(i,p_z) = g(m,p_z)$.

Veamos unos ejemplos:

$i=2$. $p_z \in X$.

① si $\forall \varphi \neq p_z$, $p_z \in g(1,\varphi) \to g(1,\varphi) \subseteq g(2,p_z)$

entonces, $r(z,2) = r(z,1)+1 = 2$

y entonces $h(2,p_z) = g(2,p_z)$.

② Si $\exists\, \varphi \neq p_z$ t.q. $p_z \in g(1,\varphi)$ y
$g(1,\varphi) \not\subseteq g(2,p_z)$
entonces, sea $p_{n_z(1)}$ el primer elemento φ de α t.q. sucede lo de arriba,
$r(z,2) = m = \min \{n > 1$ t.q. $\overline{g(n,p_z)} \subset g(1, p_{n_z(1)})\}$
y entonces, $h(2,p_z) = g(m,p_z)$.

$i = 3$

① si $\forall\, \varphi \neq p_z$ $j = 1,2$, $p_z \in h(j,\varphi)$
$\Rightarrow h(j,\varphi) \subseteq g(r(z,2)+1, p_z)$;
entonces, $r(z,3) = r(z,2)+1$

i.e.

$$p_z \in h(j,\varphi) = \begin{cases} g(1,\varphi) \\ y \begin{cases} g(2,\varphi) \\ \text{ó} \\ g(n,\varphi) \end{cases} \end{cases} \subseteq \left.\begin{matrix} g(3,p_z) \\ \text{ó} \\ g(m+1,p_z) \end{matrix}\right\} r(z,2) = \begin{matrix} 2 \\ \text{ó } m \end{matrix}$$

(t.q. $\overline{g(n,\varphi)} \subset g(1,t) \ni \varphi$)

$$\text{ent. } h(3,p_z) = \begin{cases} g(3,p_z) \\ \text{ó} \\ g(m+1,p_z) & \text{si } h(2,p_z) = g(m,p_z) \end{cases}$$

② si $\exists\, \varphi \neq p_z$ $j = 1$ ó 2 t.q. $p_z \in h(j,\varphi)$
y $h(j,\varphi) \not\subseteq g(r(z,2)+1, p_z)$
entonces para $j = 1$ ó 2, sea
$p_{n_z(1)}$ el prim. elem. φ en α t.q. sucede lo de arriba
$p_{n_z(2)}$ – – – – – – –

entonces sea:

$$r(z,3)=l=\min\{n>r(z,2)\ .\!\!\!/.\ \overline{g(l,p_z)}\subset \bigcap_{\substack{j<3\\ j \text{ no en } ①}} h(j,p_{n_z(j)})\}.$$

i.e.

$$p_z\in h(j,\varphi)=\left\{\begin{array}{l} g(1,\varphi)\\ \text{ó}\begin{cases} g(2,\varphi)\\ \text{ó}\\ g(n,\varphi)\end{cases}\end{array}\right.\ \not\subset\ \left.\begin{array}{c} g(3,p_z)\\ \text{ó}\\ g(m+1,p_z)\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{depende}\\ r(z,2)=\\ 2 \text{ ó } m.\end{array}$$

$$h(3,p_z)=g(l,p_z)\ .\!\!\!/.\ \overline{g(l,p_z)}\subset\begin{cases} g(1,\varphi_1)\\ \text{ó } g(1,\varphi_1)\cap g(2,\varphi_2)\\ \text{ó } g(2,\varphi_2)\\ \text{ó } g(1,\varphi_1)\cap g(n,\varphi_2)\\ \text{ó } g(n,\varphi_2)\end{cases}$$

$$l>\begin{cases}2\\ m\end{cases}$$

en general

$$h(i,p_z)=\begin{cases} g(i,p_z)\\ \text{ó } g(m+1,p_z) \text{ con } h(i-1,p_z)=g(m,p_z)\\ \text{ó } g(l,p_z)\ \left(\begin{array}{l} i<m\\ i \text{ ó } m<l\end{array}\right)\end{cases}$$

La base $H=\{h(i,x) : i\in\mathbb{N},\ x\in\overline{X}\}$ satisface las condiciones (A).(B) y (C) ya que:

a) H es una subcolección de G

y b) si $x \in g \in G$, entonces, existe $h \in H$ .t. $x \in h \subset g$.

P.D La base H satisface:

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$, $x \in h(n,x)$

ii) $x \in h(n,x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \langle y_n \rangle'$.
$y_n \in h(n,x_n)$

Supongamos que no es así. Entonces, existen un punto $x \in X$ y un abierto $R \subset X$, $x \in R$, tales que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\varphi \in X$, .t. $x \in h(m,\varphi) \not\subset R$.

Sea $\{y_m\}$ la sucesión que para cada $m \in \mathbb{N}$, y_m es el primer elemento φ de α .t. sucede lo de arriba, i.e. $x \in h(m,y_m) \not\subset R$.
Por la condición (B), $x \in \langle y_m \rangle'$. (I)

Probaremos ahora que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ .t. $\overline{h(m,y_m)} \subset h(i,y_i)$

Si $i \in \mathbb{N}$, entonces, $\exists\, N_1 > i$ .t. $\forall m > N_1$

$y_m \neq y_i$ y $y_m \in h(i, y_i)$
por (I) y $x \in h(i, y_i)$.

además $\exists\, N_2 \ni \forall\, m > N_2$
$h(i, y_i) \not\subset g(r(y_m, m-1)+1, y_m)$
si no, por la condición (B), todo punto de $h(i, y_i)$ sería punto límite de $\{y_m\}$, y $h(i, y_i)$ tiene al menos dos puntos, a saber, x y un punto no en R.

$\therefore\ \exists\, m \in \mathbb{N} \ni y_m \neq y_i$ y
$y_m \in h(i, y_i) \not\subset g(r(y_m, m-1)+1, y_m)$.

Es más, afirmamos que no existe $\varphi \in X \ni \varphi$ precede a y_i en α y:
a) $h(m, y_m) \subset h(i, \varphi)$
b) $y_m \in h(i, \varphi)$ y $h(i, \varphi) \not\subset g(r(y_m, m-1)+1, y_m)$,
ya que:
a) por definición de y_m, $h(m, y_m) \not\subset R$
$\Rightarrow h(i, \varphi) \not\subset R$ y por definición de y_i.
b) $i < m$, por definición de $h(m, y_m)$,
$h(m, y_m) = g(s, y_m)$, donde
$s = \min\{ n > r(y_m, m-1) \ni \overline{g(s, y_m)} \subset \bigcap_{\substack{j<m \\ j \text{ no en } (1)}} h(j, \rho_{n_2}(j)) \}$

$\Rightarrow \quad h(m, y_m) \subset h(i, \varphi)$

$\Rightarrow \quad a)$.

$\therefore \quad \overline{h(m, y_m)} \subset h(i, y_i), \quad y_i \neq y_m$

entonces por la condición (c)

$\exists \; N \in \mathbb{N} \;\; \ni \;\; h(N, y_N) \subset R$ ¡!

$\therefore$ $\mathbb{X}$ es desarrollable. //

<u>Definición (III.10):</u> Un espacio topológico $\mathbb{X}$ es un <u>$w\Delta$-espacio</u> si tiene una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}$ de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ tal que $\forall \; p \in \mathbb{X}$ si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{X}$ tal que $x_n \in st(p, \mathcal{G}_n)$ $\forall \; n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación, es decir $\langle x_n \rangle' \neq \phi$.

<u>Definición (III.11):</u> $(\mathbb{X}, \tau)$ es un <u>$w\Delta$-</u>

espacio si existe una función $g: \mathbb{N} \times \mathbb{X} \to z$ tal que:

i) $x \in g(n,x)$ $\forall x \in \mathbb{X}, \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $x \in g(n,x_n)$ y $y_n \in g(n,x_n)$ $\forall n$
$\Rightarrow \langle y_n \rangle' \neq \emptyset$

Definición (III.12): $(\mathbb{X}, z)$ es un wΔ-espacio si tiene una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}$ de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ tal que si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos y existe $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que $A_n \subset st(x_0, \mathcal{G}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Teorema (III.9): Todo espacio numerablemente compacto es un wΔ-espacio.

Demostración:

Cierto, ya que en los espacios numerablemente compactos toda sucesión tiene punto de acumulación. //

Teorema (III.10): Todo espacio desarrollable es un $w\Delta$-espacio.

Demostración:

De las Definiciones (III.6) y (III.11). //

El teorema anterior no es reversible. Daremos un ejemplo de un $w\Delta$-espacio que no es desarrollable. Basta exhibir un compacto que no sea 1er numerable.

Ejemplo (5):

Sea $X = [0, \Omega]$ el conjunto de todos los números ordinales menores o iguales al primer ordinal no numerable Ω, con la topología inducida por el orden.

Una base para la topología son conjuntos de la forma:

$$(\alpha,\beta) = \{x \in [0,\Omega] : \alpha < x < \beta\}$$
$$[0,\alpha) = \{x \in [0,\Omega] : x < \alpha\}$$
y $$(\beta,\Omega] = \{x \in [0,\Omega] : x > \beta\}$$
con $\alpha, \beta \in [0,\Omega]$.

<u>$[0,\Omega]$ es compacto:</u>

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0,\Omega]$. Existe α_1, mínimo elemento de $[0,\Omega]$, tal que, $(\alpha_1,\Omega]$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$, sea este U_1, es decir,

$$(\alpha_1,\Omega] \subset U_1 \in \mathcal{U}.$$

- si $\alpha_1 \neq 0$, sea α_2 = mínimo elemento de $[0,\Omega]$, tal que
$$(\alpha_2,\alpha_1] \subset U_2 \in \mathcal{U}$$

Continuando así, para algún $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = 0$, si no tendríamos una sucesión $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ que no tiene elemento mínimo, lo cual contradice el buen orden de $[0,\Omega]$. Entonces, existe $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$

subcubierta finita de $[0,\Omega]$ excepto tal vez al 0. Entonces $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ donde $0 \in U_{n+1} \in \mathcal{U}$ cubre a $[0,\Omega]$.

<u>$[0,\Omega]$ es Hausdorff:</u>

Si $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in [0,\Omega]$ entonces $\alpha < \beta$ ó $\alpha > \beta$.

supongamos $\alpha < \beta$

sean $U = [0, \alpha+1)$

$V = (\alpha, \Omega]$

$\alpha \in U$, $\beta \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

<u>$[0,\Omega]$ no es 1er numerable:</u>

U es vecindad de $\Omega \iff$ $\exists\, \alpha \in [0,\Omega]$ t.q. $(\alpha, \Omega] \subseteq U$. Entonces, sean $\{U_n\}$ una sucesión de vecindades de Ω y $\{\alpha_n\}$ una sucesión de ordinales, tales que, $\alpha_n \in U_n$. Demostraremos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \Omega]$ es no numerable, probando que su complemento es numerable:

$[0,\Omega] - \bigcap_{n} (\alpha_n, \Omega] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \alpha_n]$ que es numerable.

Ω no tiene una base local numerable.

Teorema (III.11): Todo espacio regular, semi-estratificable, $w\Delta$-espacio es un espacio de Moore.

Demostración:

Sean $f: \mathbb{N}\times \overline{X} \to \tau$ la función $w\Delta$, y $g: \mathbb{N}\times\overline{X} \to \tau$ la función semi-estratificable. Sea $h: \mathbb{N}\times\overline{X}\to\tau$ como sigue: para cada $x\in\overline{X}$

$h(1,x)$ t.q. $x\in h(1,x)$ y $\overline{h(1,x)}\subset f(1,x)\cap g(1,x)$

y $h(n+1,x)$ t.q. $x\in h(n+1,x)$ y

$\overline{h(n+1,x)}\subset f(n+1,x)\cap g(n+1,x)\cap h(n,x)$

i) $x\in h(n,x)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\overline{X}$

ii) $x\in h(n,x_n)$, $y_n\in h(n,x_n)$

$\Rightarrow$ $x\in f(n,x_n)\cap g(n,x_n)\cap h(n-1,x_n)$

$y_n\in f(n,x_n)\cap g(n,x_n)\cap h(n-1,x_n)$

$x\in f(n,x_n)$, $y_n\in f(n,x_n) \Rightarrow \langle y_n\rangle'\neq\emptyset$

$x\in g(n,x_n)$ $\forall n \Rightarrow \{x_n\}\to x$

sea $y\in\langle y_n\rangle'$ y sea $\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}$ t. $\{y_{n_k}\}\to y$

$y_{n_k}\in h(n_k,x_{n_k})\subset\overline{h(n_k,x_{n_k})}\subset f(n_k,x_{n_k})\cap g(n_k,x_{n_k})$

$\therefore$ $y\in f(n_k,x_{n_k})\cap g(n_k,x_{n_k})$

$\Rightarrow$ $\{x_{n_k}\}\to y$, pero $\{x_n\}\to x$

$\therefore$ $\{x_{n_k}\}\to x=y$ $\therefore$ $x\in\langle y_n\rangle'$. //

Definición (III.13): Se dice que un espacio X tiene un G_δ-diagonal si su diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ es un subconjunto G_δ de $X \times X$.

Definición (III.14): Un espacio X tiene un G_δ-diagonal si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X tales que, dados cualesquiera dos puntos distintos p y q en X, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $q \notin st(p, \mathcal{G}_n)$.

Definición (III.15): Un espacio X tiene un $\overline{G_\delta}$-diagonal si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tales que:

(a) si $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ ⊹ $y \notin st(x, \mathcal{G}_n)$;

(b) para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ ⊹ $\overline{st(x, \mathcal{G}_m)} \subset st(x, \mathcal{G}_n)$

Definición (III.16): Un espacio X tiene un G_δ^*-diagonal si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de X tales que, dados cualesquiera dos puntos distintos x y y en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin \overline{st(x, \mathcal{G}_n)}$.

Definición (III.17): Un casi G_δ-diagonal para un espacio topológico X es una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de colecciones de abiertas en X tal que, dados dos puntos distintos p y q en X, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $st(p, \mathcal{G}_n) \neq \phi$ y $q \notin st(p, \mathcal{G}_n)$.

Claramente todo espacio X con un G_δ-diagonal tiene un casi G_δ-diagona; todo espacio que tiene un $\overline{G_\delta}$-diagonal tiene un G_δ-diagonal y un G_δ^*-diagonal.

Teorema (III.12): Todo espacio de Moore tiene un $\overline{G_\delta}$-diagonal.

Demostración:

Sea X un espacio regular con un desarrollo $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Esta sucesión de cubiertas abiertas de X satisface las condiciones (a) y (b) de la Definición (III.15). //

Dennis K. Burke construyó en [8] un ejemplo de un espacio localmente compacto, Hausdorff con un G_δ-diagonal que no es desarrollable.

Teorema (III.13): Todo espacio X, $w\Delta$-espacio con un G_δ^*-diagonal es un espacio desarrollable.

Demostración:

Sea X un espacio, sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión-$w\Delta$ y sea $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión G_δ^*-diagonal para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{G}_n = \{G : G = (\bigcap_{i=1}^{n} H_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} K_i) : H_i \in \mathcal{H}_i,\ K_i \in \mathcal{K}_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

$\mathcal{G}_{n+1}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{G}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión-$\omega\Delta$ y una sucesión G_δ^*-diagonal para X.

Supongamos que $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es un desarrollo para X, entonces existen un punto $x \in X$, una vecindad W de x y una sucesión $\{x_n\}$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in st(x, \mathcal{G}_n)$ y $x_n \notin W$. Como la sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión-$\omega\Delta$, entonces $\langle x_n \rangle' \neq \emptyset$. Sea $p \in \langle x_n \rangle'$. Como $p \notin W$, entonces $p \neq x$. Ya que $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión-G_δ^*-diagonal para X, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y V una vecindad de p tales que $V \cap st(x, \mathcal{G}_k) = \emptyset$. Ahora para $n \geq k$, $x_n \in st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq st(x, \mathcal{G}_k)$, así que $x_n \notin V$. Esto contradice el hecho de que p es punto de acumulación de $\{x_n\}$. Entonces $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un desarrollo para X. //

Teorema (III.14): Si X es un espacio semi-métrico y Hausdorff, entonces X tiene un G_δ-diagonal.

Demostración:

Sea X un espacio con semi-métrica d y Hausdorff. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{G}_n = \{ B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X \}$ donde $B_{\frac{1}{n}}(x) = \{ y \in X : d(x,y) < \frac{1}{n} \}$. Como X es Hausdorff, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X que satisface la Definición (III.14) y por tanto X tiene un G_δ-diagonal. //

Teorema (III.15): Todo espacio regular, casi-desarrollable tiene un casi-G_δ-diagonal.

Demostración:

Sea X un espacio regular y

sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un casi-desarrollo para X. Sean $p, q \in X$, $p \neq q$. Como X es regular y por tanto T_1, entonces existe U una vecindad de p tal que $q \notin U$ y como $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un casi-desarrollo, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $st(p, \mathcal{G}_n) \subseteq U$ y por lo tanto $q \notin st(p, \mathcal{G}_n)$. $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión casi-G_δ-diagonal para X. //

<u>Definición (III.18)</u>: Un espacio X es <u>Θ-refinable</u> si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de refinamientos abiertos de $\mathcal{U}$ tales que para cada $p \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ord(p, \mathcal{G}_n)$ es finito

<u>Teorema (III.16)</u>: Todo espacio F_σ-proyectable es Θ-refinable.

Demostración:

Sea $\mathbb{X}$ un espacio F_σ-proyectable y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\mathbb{X}$. Sea $\mathcal{P}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ un refinamiento cerrado de $\mathcal{U}$ donde cada $\mathcal{P}_n$ es discreto. Para cada $P\in\mathcal{P}$ sea $U(P)$ un elemento de $\mathcal{U}$ que escogemos de modo tal que $P\subset U(P)$. Para cada $x\in\mathbb{X}$ sea $U(x)$ un elemento de $\mathcal{U}$ que escogemos de modo que $x\in U(x)$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$ si $x\in\mathbb{X}$ y

$x\in \mathbb{X}-\bigcup\{P: P\in\mathcal{P}_n\}$, definimos

$$U_n(x)=U(x)-\bigcup\{P: P\in\mathcal{P}_n\}$$

y si $x\in\bigcup\{P: P\in\mathcal{P}_n\}$, digamos

$x\in P\in\mathcal{P}_n$, definimos

$$U_n(x)=U(P)-\bigcup\{P'\in\mathcal{P}_n : x\notin P'\}$$

Entonces $\mathcal{U}_n=\{U_n(x): x\in\mathbb{X}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Es claro que si $x\in P\in\mathcal{P}_n$, entonces $U_n(x)$ es el único elemento de $\mathcal{U}_n$ que contiene a x. Como toda $x\in\mathbb{X}$ está en algún elemento de $\mathcal{P}$, $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de refinamientos abiertos de $\mathcal{U}$ tales que para cada $x \in \underline{X}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{ord}(x, \mathcal{U}_n) = 1$ y por lo tanto $\underline{X}$ es un espacio Θ-refinable. //

Corolario (III.16.1): Todo espacio semi-estratificable es Θ-refinable.

Corolario (III.16.2): Todo espacio de Moore es Θ-refinable.

Teorema (III.17): Todo espacio regular, Θ-refinable con un G_δ-diagonal tiene un $\overline{G_\delta}$-diagonal.

Demostración:

Sea $\underline{X}$ un espacio regular, Θ-refinable con un G_δ-diagonal. Entonces, existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de $\underline{X}$ tal que para cada $x \in \underline{X}$, $\bigcap\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$. (por tener un G_δ-diagonal)

Por la regularidad de $\mathbb{X}$, existe una cubierta abierta $\mathcal{W}_1$ de $\mathbb{X}$, tal que $\overline{\mathcal{W}_1} = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_1\}$ refina a $\mathcal{G}_1$.

Como $\mathbb{X}$ es θ-refinable, existe una sucesión $\{\mathcal{H}_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ de refinamientos abiertos de $\mathcal{W}_1$ tal que, para cada $x \in \mathbb{X}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{ord}(x, \mathcal{H}_m^1)$ es finito.

Ahora sea $m > 1$ y supongamos que para $1 \leq i \leq m-1$ ya hemos definido las cubiertas $\mathcal{W}_i$ y $\{\mathcal{H}_n^i\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, por la regularidad de $\mathbb{X}$, existe una cubierta abierta $\mathcal{W}_m$ de $\mathbb{X}$ tal que $\overline{\mathcal{W}_m}$ refina a

$$\mathcal{G}_m \cap (\cap \{\mathcal{H}_k^n \mid 1 \leq n \leq m-1 \text{ y } 1 \leq k \leq n\}^{m-1}$$

Como $\mathbb{X}$ es θ-refinable, existe una sucesión $\{\mathcal{H}_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ de refinamientos abiertos de $\mathcal{W}_m$ tales que, para toda $x \in \mathbb{X}$ existe $R \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{ord}(x, \mathcal{H}_R^m)$ es finito.

Finalmente definimos:

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_n^m \mid m = 1, 2, \ldots \text{ y } n \leq m\}.$$

Claramente $\mathcal{A}$ es una familia numerable de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$.

$$\left.\begin{array}{cccc} \mathcal{H}^1_1 & \mathcal{H}^2_1 & \mathcal{H}^3_1 & \mathcal{H}^4_1 \ \cdots \\ & \mathcal{H}^2_2 & \mathcal{H}^3_2 & \mathcal{H}^4_2 \ \cdots \\ & & \mathcal{H}^3_3 & \mathcal{H}^4_3 \ \cdots \\ & & & \mathcal{H}^4_4 \ \cdots \\ & & & \vdots \end{array}\right\} \mathcal{A}$$

Probaremos que $\mathcal{A}$ es un $\overline{G_\delta}$-diagonal.

Hay un modo natural de ordenar a los elementos de $\mathcal{A}$ de modo que formen una sucesión ;

$(\mathcal{H}^1_1, \mathcal{H}^2_1, \mathcal{H}^2_2, \mathcal{H}^3_1\ \mathcal{H}^3_2, \mathcal{H}^3_3, \ldots)$.

Para cada $x \in X$,

$$\bigcap \{st(x, \mathcal{H}^m_n) \mid \mathcal{H}^m_n \in \mathcal{A}\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{st(x, \mathcal{W}_n)\}$$

$$\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{St(x, \mathcal{G}_n)\} = \{x\}$$

Esto se sigue de que $\mathcal{H}^m_n$ refina a $\mathcal{W}_m$ y $\overline{\mathcal{W}_m}$ refina a $\mathcal{G}_m$. Entonces se cumple la condición (a) de la definición (III.15) Para verificar la parte (b), sea $x \in X$ y $\mathcal{H}^n_m \in \mathcal{A}$. Por la definición de $\mathcal{A}$, $m \leq n$ y $\overline{\mathcal{W}_{n+1}}$ refina a $\mathcal{H}^n_m$. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $ord(x, \mathcal{H}^{n+1}_k)$ es finito. Entonces

$$\begin{aligned}\overline{(st(x,\mathcal{H}_k^{n+1}))} &= \overline{(\cup\{H \mid H\in\mathcal{H}_k^{n+1} \text{ y } x\in H\})}\\ &= \cup\{\overline{H} \mid H\in\mathcal{H}_k^{n+1} \text{ y } x\in H\}\\ &\subset st(x,\overline{\mathcal{W}}_{n+1}) \subset st(x,\mathcal{H}_m^n).\end{aligned}$$

Si $k\le n+1$, entonces $\mathcal{H}_k^{n+1}\in\mathcal{A}$ y la demostración esta terminada.
Si $k>n+1$, entonces $\mathcal{H}_1^{k+1}\in\mathcal{A}$ y $\mathcal{H}_1^{k+1}$ refina a $\mathcal{W}_{k+1}$ refina a $\mathcal{H}_k^{n+1}$.
Por lo tanto

$$\overline{(st(x,\mathcal{H}_1^{k+1}))} \subset \overline{(st(x,\mathcal{H}_k^{n+1})} \subset st(x,\mathcal{H}_m^n).//$$

Corolario (III.17.1): En los espacios regular, $w\Delta$-espacios son equivalentes:

(a) Espacio de Moore
(b) Espacio semi-estratificable
(c) Espacio θ-refinable con un G_δ-diagonal
(d) Espacio con un G_δ^*-diagonal.

<u>Definición (III.19)</u>: Un espacio topológico (X, τ) es <u>casi-completo</u> si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de X, tales que, para toda $p \in X$, si $p \in G_n \in \mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{N}$ y si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos tal que $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, $\langle x_n \rangle' \neq \emptyset$.

La sucesión $\{\mathcal{G}_n\}$ se llama una <u>sucesión casi-completa</u> de X.

<u>Definición (III.20)</u>: Un espacio T_1, X es <u>casi-completo</u> si existe una sucesión de cubiertas abiertas de X, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que: si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no-vacíos de X y si existe un elemento $x_0 \in X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un $B_n \in \mathcal{G}_n$ con $A_n \cup \{x_0\} \subset B_n$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Teorema (III.18): Todo $w\Delta$-espacio es un espacio casi-completo.

Demostración:

Sea X un $w\Delta$-espacio, $\Rightarrow$ $\exists \{\mathcal{G}_n\}$ sucesión de cubiertas abiertas de X $\ni$. $\forall p \in X$, si $x_n \in st(p, \mathcal{G}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\langle x_n \rangle' \neq \phi$.

La misma sucesión de cubiertas es casi-completa ya que si
$$\left.\begin{array}{l} p \in G_n \in \mathcal{G}_n \\ x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \in st(p, \mathcal{G}_n)$$
y entonces $\langle x_n \rangle' \neq \phi$. //

Teorema (III.19): Un espacio regular y T_1 es un espacio de Moore si es casi-completo y semi-estratificable.

Demostración:

Primero probaré que las propiedades casi-completo (D-III.19) y semi-estratificable (T. I. 1) se cumplen también para subsucesiones.

1. Sea $\{\mathcal{G}_n\}$ una sucesión casi-completa de X.

Definamos:

$\mathcal{G}'_n = \{G_1 \cap \ldots \cap G_n \mid G_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}_n\}$

Afirmo que $\{\mathcal{G}'_n\}$ es también una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que para toda subsucesión $\{\mathcal{G}'_{n_j}\} \subset \{\mathcal{G}'_n\}$, si $x \in G'_{n_j}$, $G'_{n_j} \in \mathcal{G}'_{n_j}$ y $\{x_{n_j}\}$ es una sucesión tal que $x_{n_j} \in \bigcap_{i=1}^{j} G'_{n_i}$, entonces $\langle x_{n_j} \rangle' \neq \emptyset$.

Demostración:

Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ definida como:

$x_1 = \cdots = x_{n_1-1} = x_{n_1}$ y en general

$x_{n_j+1} = \cdots = x_{n_{j+1}-1} = x_{n_{j+1}}$

Sabemos que

$\exists\ G_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, G_{n_1} \in \mathcal{G}_{n_1}$ .t.

$G'_{n_1} = G_1 \cap \cdots \cap G_{n_1}$

$\exists\ U_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, U_{n_1} \in \mathcal{G}_{n_1}, G_{n_1+1} \in \mathcal{G}_{n_1+1}, \ldots$

$\cdots G_{n_2} \in \mathcal{G}_{n_2} \cdot \ni \cdot$

$G'_{n_2} = U_1 \cap \cdots \cap U_{n_1} \cap G_{n_1+1} \cap \cdots \cap G_{n_2}$

en general

$\exists \; U_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, U_{n_j} \in \mathcal{G}_{n_j}, G_{n_j+1} \in \mathcal{G}_{n_j+1}, \ldots$

$G_{n_{j+1}} \in \mathcal{G}_{n_{j+1}} \quad \ni \cdot$

$G'_{n_{j+1}} = U_1 \cap \cdots \cap U_{n_j} \cap G_{n_j+1} \cap \cdots \cap G_{n_{j+1}}$.

Ahora, para $n \leq n_1$

$x_n = x_{n_1} \in G'_{n_1} = G_1 \cap \cdots \cap G_n \cap G_{n+1} \cap \cdots \cap G_{n_1}$

$\therefore \; x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

en general para $n_j < n \leq n_{j+1}$

$x_n = x_{n_{j+1}} \in \bigcap_{i=1}^{j+1} G'_{n_i}$

es decir:

$x_n \in G'_{n_1} = G_1 \cap \ldots \cap G_{n_1}$

$x_n \in G'_{n_2} \subseteq G_{n_1+1} \cap \ldots \cap G_{n_2}$

y para $2 < i \leq j$

$x_n \in G'_{n_i} \subseteq G_{n_{i-1}+1} \cap \cdots \cap G_{n_i}$ y

$x_n \in G'_{n_{j+1}} \subseteq G_{n_j+1} \cap \cdots \cap G_n \underbrace{\cap \cdots \cap G_{n_{j+1}}}_{\text{no necesito}}$

entonces

$x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

$\therefore \langle x_n \rangle' \neq \emptyset \qquad \therefore \langle x_{n_j} \rangle' \neq \emptyset$.

2. Sea $g : \mathbb{N} \times \mathbb{X} \to z$ una función semi-estratificable.

Sea $g'(n,x) = \bigcap_{i=1}^{n} g(i,x)$

si $p \in g'(n_j, x_{n_j})$, defino

$x_1 = \cdots = x_{n_1 - 1} = x_{n_1}$

y para $n_j < n < n_{j+1}$, $x_n = x_{n_{j+1}}$

si $1 \leq n \leq n_1$

$p \in g'(n_1, x_{n_1}) = \bigcap_{i=1}^{n_1} g(i, x_{n_1}) \subset g(n, x_{n_1}) = g(n, x_n)$

en general

si $n_j < n \leq n_{j+1}$

$p \in g'(n_{j+1}, x_{n_{j+1}}) = \bigcap_{i=1}^{n_{j+1}} g(i, x_{n_{j+1}}) \subseteq g(n, x_{n_{j+1}})$

$= g(n, x_n)$

$\therefore p \in g(n, x_n) \ \forall n \Rightarrow \{x_n\} \to p$

$\therefore \{x_{n_j}\} \to p$.

Para demostrar que $\mathbb{X}$ es un espacio de Moore voy a construir una función $h: \mathbb{N}\times \mathfrak{X} \to z$ que satisfaga las condiciones del teorema III.8.

Sean $\{\mathcal{G}_n\}$ una sucesión casi-completa y $g: \mathbb{N}\times\mathfrak{X} \to z$ una función semi-estratificable como arriba.

Para cada $x\in\mathfrak{X}$, $n\in\mathbb{N}$
sea $G(n,x)\in\mathcal{G}_n$.∤. $x\in G(n,x)$.

Para cada $x\in\mathfrak{X}$
$x\in G(1,x)\cap g(1,x)$, entonces, como $\mathfrak{X}$ es regular, existe $h(1,x)\in z$.∤. $x\in h(1,x)$ y $\overline{h(1,x)}\subset G(1,x)\cap g(1,x)$.

Supongamos que ya hicimos esto por inducción hasta n, veamos que para $n+1$:

$x\in G(n+1,x)\cap g(n+1,x)\cap h(n,x)$
$\Rightarrow \exists$ $h(n+1,x)\in z$.∤. $x\in h(n+1,x)$ y
$\overline{h(n+1,x)}\subset G(n+1,x)\cap g(n+1,x)\cap h(n,x)$.

Hay que probar que $h: \mathbb{N}\times\mathfrak{X}\to z$ satisface:

A) para cada $x\in\mathfrak{X}$, $\{h(n,x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local decreciente.

B) $y\in\mathfrak{X}$, $\{x_n\}\subset\mathfrak{X}$ con $y\in h(n,x_n)$ $\forall n$

$\Rightarrow x_n \to y$

c) $y \in \overline{X}$, $U \in \mathcal{Z}$.$\dagger$. $y \in U$ y $\{x_n\} \subset \overline{X}$.$\dagger$. para cada n $y \in h(n, x_n)$ y $\exists\, K(n)$.$\dagger$. $\overline{h(n+k, x_{n+k})} \subset h(n, x_n)$

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$.$\dagger$. $h(m, x_m) \subset U$.

Demostración:

B) Es consecuencia de $h(n, x_n) \subset g(n, x_n)$

A) $\overline{h(n+1, x)} \subset h(n, x) \Rightarrow \{h(n, x)\}$ es decreciente. Para probar que es base hay que demostrar c) y luego con $x_n = x$ ya.

C) Voy a suponer que no se cumple. Es decir, sean $y \in U \in \mathcal{Z}$ y $\{x_n\} \subset \overline{X}$.$\dagger$. para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in h(n, x_n)$ y $\exists\, k(n)$.$\dagger$. $\overline{h(n+k, x_{n+k})} \subset h(n, x_n)$ y $\nexists\, m \in \mathbb{N}$.$\dagger$. $h(m, x_m) \subset U$.

Considero una sucesión $\{y_m\} \subset \overline{X}$.$\dagger$. $y_m \in h(m, x_n) - U$ y una subsucesión $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ de la siguiente manera:

$n_1 = 1$

$n_2 = n_1 + k(n_1)$ y en general
$n_{j+1} = n_j + k(n_j)$

Tenemos $\overline{h(n_{j+1}, x_{n_{j+1}})} \subset h(n_j, x_{n_j})$

Nos fijamos en aquella subsucesión $\{y_{n_j}\} \subset \{y_m\}$ para los mismos índices que la $\{x_{n_j}\}$.

i.e. $y_{n_j} \in h(n_j, x_{n_j}) - \bar{U}$, $y_{n_j} \in h(n_j, x_{n_j})$

pero $\overline{h(n_j, x_{n_j})} \subset h(n_{j-1}, x_{n_{j-1}})$

$$\Rightarrow y_{n_j} \in \bigcap_{i=1}^{j} h(n_i, x_{n_i}) \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{j} h(n_i, x_{n_i})} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{i=1}^{j} \overline{h(n_i, x_{n_i})} \subset$$

$$\subset \bigcap_{i=1}^{j} \left[G(n_i, x_{n_i}) \cap g(n_i, x_{n_i}) \cap h(n_i - 1, x_{n_i}) \right]$$

$$\therefore y_{n_j} \in \bigcap_{i=1}^{j} G(n_i, x_{n_i})$$

como $y \in h(n, x_n) \subset \overline{h(n, x_n)} \subset$
$\subset G(n, x_n) \cap g(n, x_n) \cap h(n-1, x_n)$

en particular $y \in G(n, x_n) \in \mathcal{G}_n$.

$G(n, x_n)$ es un abierto de la cubierta $\mathcal{G}_n$ que contiene a y y le puedo llamar $G_n(y)$, entonces:

$$y_{n_j} \in \bigcap_{i=1}^{j} G_i(y) \overset{c.c.}{\Longrightarrow} \{y_{n_j}\}' \neq \emptyset$$

$\{y_{n_j}\}$ tiene un punto de acumulación $z \notin U$

$z \in h(n_j, x_{n_j}) \quad \forall n_j$

$\Rightarrow \; z \in g(n_j, x_{n_j}) \quad \forall n_j$

como g es una función semi-estratificable

$x_{n_j} \longrightarrow z \notin U$

pero por B) $\; x_n \rightarrow y \in U$

y $\{x_{n_j}\}$ es subsucesión de $\{x_n\}$

$\Rightarrow x_{n_j} \rightarrow y \in U$ lo cual es una contradicción.

$\therefore$ se cumple C) y X es de Moore. //

<u>Corolario (III.19.1)</u>: En un espacio regular (T_1) son equivalentes las siguientes tres propiedades:

(1) Moore

(2) semi-estratificable y $w\Delta$-espacio

(3) semi-estratificable y casi-completo.

Definición (III.21): Un espacio completamente regular $\mathbb{X}$ se llama un p-espacio si en la compactificación de Stone-Cech $\beta(\mathbb{X})$ hay una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n) \subset \mathbb{X} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{X}.$$

La sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama un emplumado para $\mathbb{X}$ en $\beta(\mathbb{X})$.

Definición (III.22): Un espacio $\mathbb{X}$ se llama p-espacio estricto si tiene un emplumado con la propiedad adicional: para cada $x \in \mathbb{X}$ y $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, n' \in \mathbb{N}$.). $\overline{st}(x, \mathcal{G}_{n'}) \subset st(x, \mathcal{G}_n)$. En este caso $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama un emplumado estricto.

Los siguientes dos teoremas dan una caracterización de los p-espacios y p-espacios estrictos respectivamente;

es decir, los p-espacios y los p-espacios estrictos se definen sin el uso de la compactificación $\beta(\underline{X})$. Se ha visto que en algunos casos es más util esta caracterización que la definición original.

Las demostraciones se dan en el apéndice.

<u>Teorema (III.20)</u>: Un espacio completamente regular $\underline{X}$ es un p-espacio si y solo si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de $\underline{X}$ que satisface:
Si $x \in \underline{X}$ y $G_n \in \mathcal{G}_n$.∤. $x \in G_n$, entonces:

(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ es compacto.

(b) Si U es un conjunto abierto que contiene a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$, entonces, existe $k \in \mathbb{N}$.∤. $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} \subset U$.

TEOREMA (III.21): Un espacio completamente regular $\mathbb{X}$ es un p-espacio estricto si y sólo si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ que satisface:

(a) $P_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n)$ es un conjunto compacto, para cada $x \in \mathbb{X}$.

(b) La familia $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades para P_x.

Se puede pedir que $\mathcal{G}_n$ refine a $\mathcal{G}_{n-1}$ construyendo la nueva sucesión de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{G}_n' = \{G \cap H \mid G \in \mathcal{G}_n, H \in \mathcal{G}_{n-1}'\}$ inductivamente, o, explícitamente

$$\mathcal{G}_n' = \{G_1 \cap \dots \cap G_n \mid G_i \in \mathcal{G}_i, \ i = 1, \dots, n\}$$

$$P_x' = \bigcap st(x, \mathcal{G}_n') \subseteq \bigcap st(x, \mathcal{G}_n) = P_x$$

Teorema (III.22): Todo p-espacio es un espacio casi-completo.

Demostración:

Sea X un p-espacio y sea $\{\mathcal{G}_n\}$ un emplumado (D.III.21) para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{G}_n$ una cubierta abierta de X t.q. si $G \in \mathcal{G}_n$, entonces $\overline{(G)}_{\beta(X)}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{G}_n$.

Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados en X y sea $x \in X$ un punto t.q. $\exists\ G_n \in \mathcal{G}_n$ t.q. $A_n \cup \{x\} \subset G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{(A_n)}_{\beta(X)}$ es compacto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(A_n)}_{\beta(X)} \neq \emptyset$$

pero $\overline{(A_n)}_{\beta(X)} \subset st(x, \mathcal{G}_n)$

$$y \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(A_n)}_{\beta(X)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n) \subset X$$

$$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{(A_n)}_{\beta(X)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

$\therefore X$ es casi-completo //

<u>Teorema (III.23)</u>: Todo p-espacio estricto es un $w\Delta$-espacio.

<u>Demostración</u>:

Sea X completamente regular y $\{\mathcal{G}_n\}$ un emplumado estricto para X.

(a) $P_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n)$ es compacto para cada $x \in X$.

(b) $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}$ es una base de vecindades para P_x.

Supongamos además que $\forall n$ $\mathcal{G}_{n+1}$ refina a $\mathcal{G}_n$.

Hay que ver que esta sucesión $\{\mathcal{G}_n\}$ sirve para $w\Delta$-espacio.

Sea $x \in X$ y $\{x_n\} \subset X$ t.q.
$x_n \in st(x, \mathcal{G}_n)$
como $st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n-1}) \Longrightarrow$

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subseteq \underset{\substack{\cup\\ x_n}}{st(x, \mathcal{G}_n)} \supseteq \underset{\substack{\cup\\ x_{n+1}}}{st(x, \mathcal{G}_{n+1})}$$

como $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}$ son base local decreciente para P_x compacto
$\Rightarrow \langle x_n \rangle' \neq \emptyset$. //

Teorema (III.24): Un espacio completamente regular y $w\Delta$-espacio es un p-espacio si todo subconjunto cerrado y numerablemente compacto es compacto.

Demostración:

Sea X completamente regular y $w\Delta$-espacio. Sea $\{\mathcal{U}_n\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que $\{st(x, \mathcal{U}_n)\}$ forma una sucesión-x, es decir, $x_n \in st(x, \mathcal{U}_n)\ \forall n \Rightarrow \langle x_n\rangle' \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{G}_n$ una cubierta abierta de X tal que $\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}_n\}$ refina a $\mathcal{U}_n$.

Sea $x \in X$ y $G_n \in \mathcal{G}_n$ ∴ $x \in G_n$

$\{\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} : k \in \mathbb{N}\}$ forma una sucesión-x ya que $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} \subset st(x, \mathcal{U}_n)$.

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ ∴ $x_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$

$\Rightarrow \langle x_k\rangle' \neq \emptyset$ ∴

∴ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ es numerablemente compacto

$\Rightarrow$ (por hip) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ es compacto

Sea $A \in \tau$ t.q. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \subset A$ y supongamos que $\nexists$ $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} \subset A$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{G_i} - A$,

$x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{G_i} \Rightarrow \langle x_n \rangle' \neq \emptyset$

sea $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ t.q. $x_{n_j} \to y \notin A$

$x_{n_j} \in \bigcap_{i=1}^{n_j} \overline{G_i}$, $y \in \bigcap_{i=1}^{n_j} \overline{G_i}$ $\forall n_j$ $\Rightarrow$

$y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{G_i} \subset A$, contradicción. //

<u>Teorema (III.25)</u>: En los espacios θ-refinables, todo subconjunto cerrado numerablemente compacto es compacto.

<u>Demostración:</u>

1º A cerrado contenido en X θ-refinable $\Rightarrow$ A θ-refinable.

<u>Dem:</u>

Sea $\mathcal{U}'$ una cubierta abierta de A en A. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A en X

$\mathcal{U} = \{ U \text{ abierto en } X : U \cap A \in \mathcal{U}' \}$

$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cup \{X - A\}$ es cubierta abierta de X $\therefore$ $\exists$ $\{\mathcal{G}_n\}$ sucesión de cubiertas abiertas de X, refinamientos de $\mathcal{U}_1$ t.q. $\forall p \in X$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. ord$(p, \mathcal{G}_n)$ es finito.

Restringiendo la sucesión $\{\mathcal{G}_n\}$ a A tenemos que A es θ-refinable

2º X θ-refinable, numerablemente compacto $\Rightarrow$ X compacto.

Teorema (III.26): En los espacios completamente regulares y θ-refinables, son equivalentes:

(1) p-espacio

(2) p-espacio estricto

(3) $w\Delta$-espacio.

Demostración:

(2) $\Rightarrow$ (3) Teorema (III.23)

(3) $\Rightarrow$ (1) Teoremas (III.25) y (III.24)

P.D. (1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un emplumado para X en $\beta(X)$. Construiremos un emplumado estricto para X.

Como X es θ-refinable, podemos encontrar una sucesión $\{\mathcal{G}_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas de X, abiertas en $\beta(X)$ t.q.

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\{\overline{G}_{\beta(X)} : G \in \mathcal{G}_{1,n}\}$ refina a $\mathcal{G}_1$

ii) para cada $x \in X$, existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_{1,m})$ es finito.

Sigamos por inducción y supongamos que $\{\mathcal{G}_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ está definida para $k \in \mathbb{N}$, entonces podemos encontrar una sucesión $\{\mathcal{G}_{k+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas de X, abiertas en $\beta(X)$ tal que:

(iii) para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\{\overline{G}_{\beta(X)} : G \in \mathcal{G}_{k+1,n}\}$ refina a $\mathcal{G}_{k+1}$ y refina a $\mathcal{G}_{r,s}$ donde $r,s \in \mathbb{N}$ y $r+s = k+1$

(iv) para cada $x \in X$, existe $m \in \mathbb{N}$.†. $\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_{k+1,n})$ es finito.

P.D. $\{\mathcal{G}_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ es un emplumado para X.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$

$st(x, \mathcal{G}_{n,1}) \subset st(x, \mathcal{G}_n)$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_{n,1}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n) \subset X.$$

P.D. $\{\mathcal{G}_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ es un emplumado estricto para X.

Sea $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$

sea $m \in \mathbb{N}$.†. $\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_{n+1,m})$ es finito (prop iv)

$$\Rightarrow \overline{st(x, \mathcal{G}_{n+1,m})} = \overline{\bigcup\{G \in \mathcal{G}_{n+1,m} : x \in G\}}$$

$$= \bigcup\{\overline{G} : x \in G \in \mathcal{G}_{n+1,m}\}$$

(por iii) $$\subset st(x, \mathcal{G}_{n,1})$$

Como $\mathcal{G}_{n+m+1,1}$ refina a $\mathcal{G}_{n+1,m}$ entonces :

$$\overline{st(x,\mathcal{G}_{n+m+1,1})} \subset \overline{st(x,\mathcal{G}_{n+1,m})} \subset st(x,\mathcal{G}_{n,1})$$

i.e. dada $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $k = n+m+1$ $\ni$.

$$\overline{st(x,\mathcal{G}_{k,1})} \subset st(x,\mathcal{G}_{n,1})$$

$\therefore \{\mathcal{G}_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ es un emplumado estricto para X. //

<u>Teorema (III.27)</u> : Un espacio completamente regular (T_1) es de Moore $\Longleftrightarrow$ es semi-estratificable y p-espacio.

<u>Demostración:</u>

($\Leftarrow$) Inmediato por los Teoremas (III.22) y (III.19)

($\Rightarrow$)

Sea X completamente regular y de Moore. Por corolario (III.6.1) X es semi-estratificable.

Sea $\{\mathcal{G}_n\}$ un desarrollo para X.
Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea

$$\gamma_n = \{\beta(X) - \overline{(X-G)}_{\beta(X)} : G\in\mathcal{G}_n\}$$

como $G \subset \beta(X) - \overline{(X-G)}_{\beta(X)}$, entonces γ_n cubre a X.

Si $x\in X$ y $y\in\beta(X)-X$, sean U y V subconjuntos ajenos abiertos de $\beta(X)$ tales que $x\in U$ y $y\in V$, entonces, $\exists\ k\in\mathbb{N}$ .t.q. $st(x,\mathcal{G}_k)\subset U\cap X$, entonces $y\notin st(x,\mathcal{G}_k)$

$$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x,\gamma_n)\subset X$$

y X es un p-espacio. //

Teorema (III.28): X localmente compacto y Hausdorff $\Rightarrow$ X p-espacio

Demostración:

Si X es localmente compacto y Hausdorff, es abierto en su compactificación $\beta(X)$, entonces.

$\{\gamma_n\}=\{X\}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ es un emplumado para X.

//

<u>Corolario (III.27.1)</u>: Todo espacio localmente compacto y Hausdorff y semi-estratificable es un espacio de Moore.

2° Indice

Bibliografía

1. H.R. Bennett, A note on the metrizability of M-spaces, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 6-9.
2. ——————, On quasi-developable spaces, General Topology and Its Applications, 1 (1971), 252-262.
3. R.H. Bing, Metrization of topological spaces, Canad. J. Math., 3 (1951), 175-186
4. C.J.R. Borges, On stratifiable spaces, Pacific J. Math., 17 (1966) 1-16.
5. ——————, On metrizability of topological spaces, Canad. J. Math., 20 (1968), 795-804
6. D.K. Burke, On subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 23 (1969), 655-663.
7. ——————, On p-spaces and wΔ-spaces, Pacific J. Math., 35 (1970), 285-296.
8. ——————, A nondevelopable locally

compact Hausdorff space with a G_δ-diagonal, General Topology and Its Applications, 2 (1972), 287-291.

9. D.K. Burke and R.A. Stoltenberg, A note on p-spaces and Moore spaces, Pacific J. Math., 30 (1969) 601-608

10. J.G. Ceder, Some generalizations of metric spaces, Pacific J. Math., 11 (1961) 105-125.

11. G. Creede, Concerning semi-stratifiable spaces, Pacific J. Math., 32 (1970) 161-164.

12. V.V. Filippov, On feathered paracompacta, Soviet Math. Dokl., 9 (1968), 161-164

13. E.E. Grace and R.W. Heath, Separability and metrizability in pointwise paracompact Moore spaces, Duke Math. J., 31 (1964) 603-610.

14. R.W. Heath, Screenability, pointwise paracompactness, and metrization of Moore spaces, Canad J. Math., 16 (1964), 763-770.

15. ———, Arc-wise connectedness in semi-metric spaces, Pacific J. Math

12 (1962) 1301-1319.

16. R.E Hodel, Moore spaces and wΔ-spaces, Pacific J. Math., 38 (1971) 641-652.
17. ———, Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences have cluster points, Duke Math. J., 39 (1972) 253-263.
18. ———, Metrizability of topological spaces, Pacific J. Math, 55 (1974) 441-459.
19. F.B. Jones, Concerning normal and completely normal spaces., Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937), 671-677.
20. ———, Metrization. Amer. Math. Monthly., 73 (1966), 571-576.
21. D.E. Kullman, Proc. Amer. Math. Soc., 27 (1971), 154-160. Developable sp. and p-sp.
22. D.J. Lutzer, Semimetrizable and stratifiable spaces, General Topology and Its Applications, 1 (1971) 43-48.
23. E. Michael, A note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc, 4 (1953) 831-838.
24. L.F. McAuley, A relation between perfect separability, completeness,

and normality in semi-metric spaces. Pacific J. Math. 6 (1956), 315-326.

25. ———, A note on complete collection wise normality and paracompactness, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958) 795-799.

26. J. Nagata, A note on Filippov's theorem. Proc. Japan Acad., 45 (1969), 30-33.

27. A.H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 977-982.

28. D.R. Traylor, Concerning metrizability of pointwise paracompact Moore spaces, Canad. J. Math. 16 (1964) 407-411.

29. H.H. Wicke and J.M. Worrell Jr., Characterizations of developable spaces, Canad. J. Math., 17 (1965) 820-830.

Apéndice

(A.1) Def (III.4) ≡ Def (III.5) ≡ Def (III.6)

(A.2) Def (III.10) ≡ Def (III.11) ≡ Def (III.12)

(A.3) Def (III.13) ≡ Def (III.14)

(A.4) Def (III.19) ≡ Def (III.20)

(A.5) Demostración del Teo (III.20)

(A.6) Demostración de Teo (III.21)

(A.7) Demostración del Teorema de Bing.

(A.1) <u>Las definiciones (III.4), (III.5) y (III.6) son equivalentes.</u>

Sea $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ una sucesión de cubiertas abiertas de X .). $\mathcal{G}_n$ es refinamiento de $\mathcal{G}_{n+1}$ y $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x, para cada $x \in X$.

$\Rightarrow$ para $x \in X$ y $C \subset X$ C cerrado .). $x \notin C$, $X - C$ es abierto y contiene a x. Como $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para x $\exists$ $m \in \mathbb{N}$.).

$st(x, \mathcal{G}_m) \subset X - C$

$\therefore$ $st(x, \mathcal{G}_m) \cap C = \emptyset$

Sea $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ una sucesión de cubiertas abiertas de X .). $\forall x \in X$, $C \subset X$ C cerrado .). $x \notin C$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$.). $st(x, \mathcal{G}_n) \cap C \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ para $x \in X$ y $D \subset X$, D abierto .). $x \in D$, $X - D$ es cerrado y no contiene a x, entonces $\exists$ $n \in \mathbb{N}$.). $st(x, \mathcal{G}_n) \cap X - D = \emptyset$

$\Rightarrow$ $st(x, \mathcal{G}_n) \subset D$

$\therefore$ $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x.

$(\mathfrak{X}, \tau)$ y $\exists$ $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $\mathfrak{X}$ t.q. $\forall p \in \mathfrak{X}$ $\{st(p, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para p $\Longleftrightarrow$ $\exists$ una función $g : \mathbb{N} \times \mathfrak{X} \to \tau$ t.q. $x \in g(n,x)$ $\forall x \in \mathfrak{X}$, $n \in \mathbb{N}$ y
$x \in g(n, x_n)$, $y_n \in g(n, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $x \in \langle y_n \rangle'$.

$\Rightarrow$) sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de cubiertas abiertas de $\mathfrak{X}$ y definamos $g : \mathbb{N} \times \mathfrak{X} \to \tau$ como sigue: $g(1, x)$ es algún elemento de $\mathcal{G}_1$ que contiene a x y para $n > 1$ $g(n,x)$ es algún elemento de $\mathcal{G}_n$ tal que $g(n, x) \subset g(n-1, x)$.

$x \in g(n,x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathfrak{X}$

$x \in g(n, x_n)$ $\Rightarrow$ $\{x_n\} \longrightarrow x$

$y_n \in g(n, x_n)$ $\Rightarrow$ $\langle y_n \rangle' = \langle x_n \rangle'$

$\therefore$ $x \in \langle y_n \rangle'$.

$\Leftarrow$) sea $g : \mathbb{N} \times \mathfrak{X} \to \tau$ la función y sea para cada $i \in \mathbb{N}$

$\mathcal{G}_i = \{g(j, x) : x \in \mathfrak{X},\ j \geq i\}$

P.D $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para x, para cada $x \in X$.

Sea $x \in X$ y $R \in \mathcal{Z}$ .t. $x \in R$.

P.D $\exists\ n \in \mathbb{N}$ .t. $st(x, \mathcal{G}_n) \subset R$.

$st(x, \mathcal{G}_n) = \bigcup \{g(j, p) : p \in X,\ j \geq n$ y $x \in g(j, p)\}$

supongamos que no existe $n \in \mathbb{N}$ .t. $st(x, \mathcal{G}_n) \subset R$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\ y_j \in st(x, \mathcal{G}_n)$ .t. $y_j \notin R$

$\Rightarrow \exists\ y_j$ y x_j con $j \geq n$ .t.

$x \in g(j, x_j)$, $y_j \in g(j, x_j)$ y $y_j \notin R$

pero por la propiedad de g

$x \in \langle y_j \rangle'$ $\lightning$

$\therefore \forall x \in X$, $R \in \mathcal{Z}$ .t. $x \in R$ $\exists n \in \mathbb{N}$ .t. $st(x, \mathcal{G}_n) \subset R$

$\Rightarrow \{st(x, \mathcal{G}_n)\}$ es base local para x.

$\therefore \{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un desarrollo para X.

(A.2) Las definiciones (III.10), (III.11) y (III.12) son equivalentes.

X, τ es un $w\Delta$-espacio si:

(a) $\exists$ una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas de X t.q. $\forall\, p \in X$, si $\{x_n\}$ es una sucesión en X t.q. $x_n \in st(p, \mathcal{G}_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\langle x_n \rangle' \neq \emptyset$.

(b) $\exists$ una función $g: \mathbb{N} \times X \to \tau$ t.q.
i) $x \in g(n, x)$ $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$
ii) $x \in g(n, x_n)$, $y_n \in g(n, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\Rightarrow$ $\langle y_n \rangle' \neq \emptyset$.

(c) $\exists$ $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de cubiertas abiertas de X t.q. si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos y $\exists$ $x_0 \in X$ t.q. $A_n \subset st(x_0, \mathcal{G}_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$\mathcal{G}_n = \{ g(n,x) \mid x \in X \}$.

$\mathcal{G}_n$ es cubierta abierta de X.

para cada $p \in X$

$st(p, \mathcal{G}_n) = \bigcup g(n,x) : p \in g(n,x)$.

Entonces:

si $\{x_n\}$ es tal que $x_n \in st(p, \mathcal{G}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, y_n \in X$ t.q.

$p \in g(n, y_n)$ y

$x_n \in g(n, y_n)$

$\Rightarrow \langle x_n \rangle' \neq \emptyset$.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X que satisface (a).

Sea $\{A_n\}$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos y supongamos que $\exists\, x_0 \in X$ t.q. para cada $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subset st(x_0, \mathcal{G}_n)$.

Sea $\{x_n\}$ t.q. para cada $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A_n$, $\Rightarrow x_n \in st(x_0, \mathcal{G}_n)$

$\Rightarrow \langle x_n \rangle' \neq \emptyset$

como $A_n = \overline{A_n}$ y $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ que satisface (c) y además $\mathcal{G}_{n+1}$ refina a $\mathcal{G}_n$.

Sea $g: \mathbb{N} \times \mathbb{X} \to \tau$ como sigue:

$g(1, x)$ es algún elemento de $\mathcal{G}_1$ que contiene a x. Para $n > 1$

$g(n, x)$ es algún elemento de $\mathcal{G}_n$ que contiene a x y t.q.

$g(n, x) \subset g(n-1, x)$. $x \in g(n, x)$ $\forall x$

si $x \in g(n, x_n)$ y $y_n \in g(n, x_n)$

$\Rightarrow$ $x_n, y_n \in st(x, \mathcal{G}_n)$

y como $st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n-1})$

sea, para cada $n \in \mathbb{N}$

$A_n = \{y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}, \dots\}$.

$A_n \subset st(x, \mathcal{G}_n)$ $\forall n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$

$\Rightarrow \langle y_n \rangle' \neq \emptyset$. //

(A.3) Las Definiciones (III.13) y (III.14) son equivalentes:

La diagonal Δ es un G_δ en $X \times X$ si y sólo si $\exists$ una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X .t. $y, x \in X$ $x \neq y \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ .t. q $y \notin st(x, \mathcal{G}_m)$.

Sea Δ la diagonal en $X \times X$ y supongamos que $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada A_n es un abierto en $X \times X$.
Para cada n, sea $\mathcal{G}_n \{G : G$ es abierto en X y $G \times G \subset A_n\}$. Entonces si $x \neq y$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ .t. $(x,y) \notin A_m$ y por tanto $y \notin st(x, \mathcal{G}_m)$.

Ahora supongamos que tenemos la sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cubiertas abiertas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \bigcup \{G \times G : G \in \mathcal{G}_n\}$. Entonces $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, es decir Δ es un G_δ en $X \times X$. //

(A.9) <u>Las definiciones (III.19) y (III.20) son equivalentes.</u>

$(\mathbb{X}, \tau)$ es casi-completo si:

(1) $\exists \{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ t.q. para cada $p \in \mathbb{X}$, si $p \in G_n \in \mathcal{G}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y si $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ t.q. $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, entonces $\{x_n\}' \neq \emptyset$.

(2) $\exists \{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ t.q. si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos y $\exists$ $x_0 \in \mathbb{X}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $B_n \in \mathcal{G}_n$ t. $A_n \cup \{x_0\} \subset B_n$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

(1) $\Rightarrow$ (2) sea $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ cerrados y $\exists$ $x_0 \in \mathbb{X}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $B_n \in \mathcal{G}_n$ t.q. $A_n \cup \{x_0\} \subseteq B_n$

<u>P.D.</u> $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

$$A_n \cup \{x_0\} \subseteq B_n \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in B_n \in \mathcal{G}_n \\ A_n \subseteq B_n \end{cases}$$

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_n \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_j$$

sea $x_i \in A_i \subset \bigcap_{j=1}^{i} B_j$

$\Rightarrow \langle x_n \rangle' \neq \emptyset$

x_i está en un cerrado $\Rightarrow \langle x_n \rangle' \in A_n$
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\therefore \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1) supongamos que $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\overline{X}$ t.q. $\forall p \in \overline{X}$ si $G_n \in \mathcal{G}_n$ t.q. $p \in G_n \in \mathcal{G}_n$ y $\{x_n\} \subset \overline{X}$ t.q. $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ y $\langle x_n \rangle' = \emptyset$.

sea $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, \ldots\} = \overline{A_n}$
pueden o no ser distintos
$A_n \cup \{p\} \subseteq G_n$
como $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \Rightarrow \langle x_n \rangle' \neq \emptyset$ //

(A.5)

Demostración del Teorema (III.20)

($\Rightarrow$)

Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un emplumado para X en $\beta(X)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{G}_n$ una cubierta de X, abierta en X y tal que $\{\overline{G}_{\beta(X)} : G \in \mathcal{G}_n\}$ refina a $\mathcal{F}_n$.

Para una $x \in X$ dada, sea $G_n \in \mathcal{G}_n$ arbitrario t.q. $x \in G_n$

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}_{\beta(X)}$ es compacto

y $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}_{\beta(X)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{F}_n) \subset X$

$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}_{\beta(X)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \cap \overline{G_n}_{\beta(X)} \right) =$

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$

$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ es un conjunto compacto.

Ahora sea A un abierto de X t.q. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \subset A$ y sea A' un abierto en $\beta(X)$ t.q. $A' \cap X = A$

si $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} \not\subset A'$ para ninguna $k \in \mathbb{N}$,

entonces $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n}_{\beta(X)} - A' \neq \emptyset \ \forall k \in \mathbb{N}$

y entonces $\{ \bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n}_{\beta(X)} - A' : k \in \mathbb{N} \}$

es una sucesión decreciente de compactos y por tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}_{\beta(X)} - A' \neq \emptyset$$

lo cual no puede suceder ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}_{\beta(X)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \subset A = A' \cap X$

$\therefore \ \exists \ k \in \mathbb{N} \ \text{t.q.} \ \bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n}_{\beta(X)} \subset A'$

y de este modo $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} \subset A$.

($\Leftarrow$)

Sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una suceción de cubiertas abiertas de X que satisface las condiciones (a) y (b) del teorema.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{G}'_n = \{ G' \subset \beta(X) : G' \text{ es abierto en } \beta(X) \ \text{y} \ G' \cap X \in \mathcal{G}_n \}$$

P.D $\{\mathscr{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un emplumado para $\mathbb{X}$ en $\beta(\mathbb{X})$.

Sean $x \in \mathbb{X}$ y $y \in (\beta(\mathbb{X}) - \mathbb{X})$

$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathscr{G}_n) \Rightarrow \exists\, G_n' \in \mathscr{G}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x, y \in G_n'$

$\Rightarrow x \in G_n = G_n' \cap \mathbb{X} \in \mathscr{g}_n$

y $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ es un conjunto compacto que no contiene a y.

Sea A un abierto en $\beta(\mathbb{X})$ t.q. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n} \subset A \subset \overline{A}_{\beta(\mathbb{X})} \subset (\beta(\mathbb{X}) - \{y\})$.

Entonces, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.q. $\bigcap_{n=1}^{k} \overline{G_n} \subset A$

por tanto $\bigcap_{n=1}^{k} G_n' - \overline{A}_{\beta(\mathbb{X})} = \phi$

ya que es un abierto contenido en $\beta(\mathbb{X}) - \mathbb{X}$.

$\Rightarrow y \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n'$ ↯

$\therefore \quad y \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n)$ y y fue escogido arbitrariamente en $\beta(X) - X$.

$\therefore \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n) \subset X$ para toda $x \in X$.

(A.6) Demostración del Teorema (III.21)

$(\Rightarrow)$

Si X es un p-espacio estricto. entonces hay un emplumado estricto $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ para X en $\beta(X)$ donde podemos suponer que $\mathcal{G}_{n+1}$ refina a $\mathcal{G}_n$.

Sea $P_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{st(x,\mathcal{G}_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x,\mathcal{G}_n)$

y sea $g_n = \{G' \cap X \mid G' \in \mathcal{G}_n\}$

P_x es un subconjunto compacto de X y $P_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, g_n)$

Para mostrar que $\{st(x, g_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades para P_x, sea U cualquier conjunto abierto en X que contenga a P_x, y sea U' un conjunto abierto en $\beta(X)$ donde $U = U' \cap X$.

Ahora, si el conjunto $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{st(x,\mathcal{G}_k)} - U'$, que es cerrado en $\beta(X)$, no es vacío para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\bigcap_{K=1}^{\infty} \overline{st(x, \mathcal{F}_K)} - U' \neq \emptyset$$

Esto es imposible.

Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ t.

$$\bigcap_{K=1}^{n} \overline{st(x, \mathcal{F}_K)} \subseteq U'$$

Como $st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq (st(x, \mathcal{F}_n) \cap \mathbb{X})$

$$\subseteq \left(\left[\bigcap_{K=1}^{n} st(x, \mathcal{F}_K) \right] \cap \mathbb{X} \right)$$

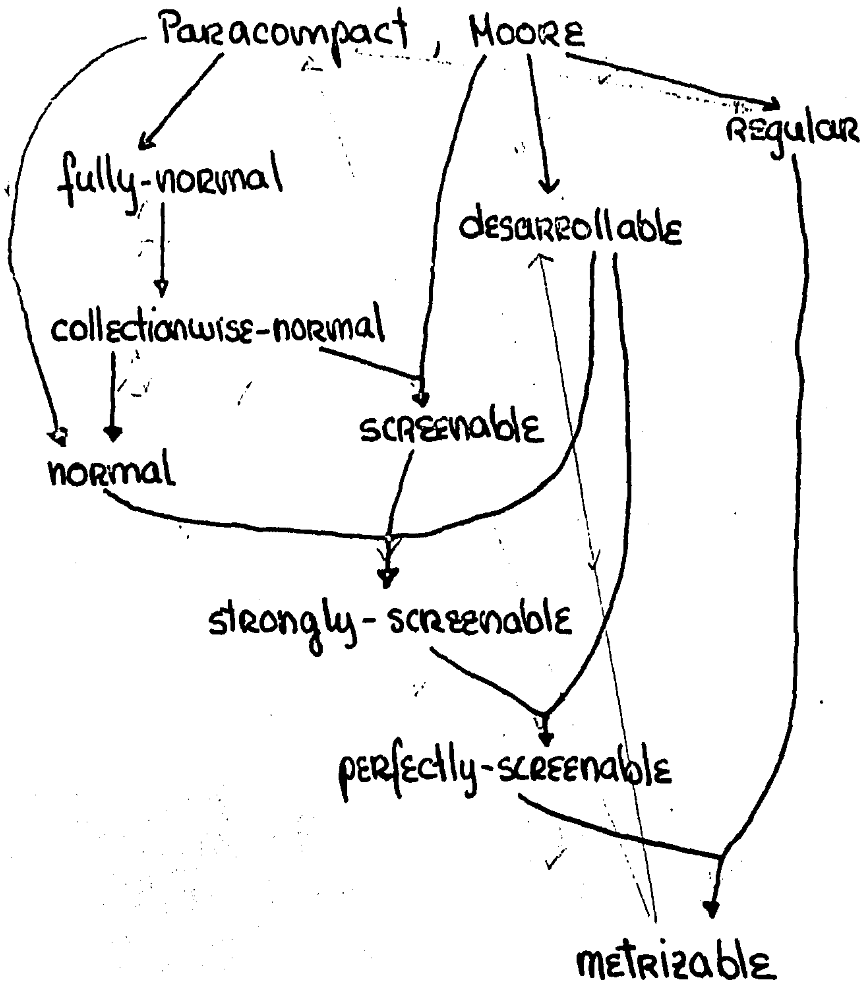
entonces:

$$P_x \subseteq st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq U.$$

($\Leftarrow$)

Supongamos que $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\mathbb{X}$ que satisface las condiciones (a) y (b) del teorema.

Sea $\mathcal{F}_n$ la colección de todos los conjuntos G', abiertos en $\beta(\mathbb{X})$ y tales que $G' \cap \mathbb{X} \in \mathcal{G}_n$. Probaremos que $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un emplumado estricto para $\mathbb{X}$ en $\beta(\mathbb{X})$. //


Paracompact , Moore
Regular
fully-normal
desarrollable
collectionwise-normal
screenable
normal
strongly-screenable
perfectly-screenable
metrizable

$\boxed{\bar{X} \text{ paracompacto}}$ si $\bar{X}$ regular y $\forall$ cubierta abierta $\mathcal{H}$ de $\bar{X}$, $\mathcal{H}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{G}$.

$\Rightarrow$ $\bar{X}$ es $\boxed{\text{fully-normal}}$ $\forall$ cubierta abierta H de $\bar{X}$, $\exists$ una cubierta abierta H' de $\bar{X}$ t.q. $\forall x \in \bar{X}$ $st(x, H') \subset H_i \in H$.
ie $\{st(x, H'), x \in \bar{X}\}$ refina a H.

Dem:

Para cada $x \in \bar{X}$ elijamos $G_x \in \mathcal{G}$ t.q. $x \in G_x$ y $H_x \in \mathcal{H}$ t.q. $G_x \subset H_x$

Como $\bar{X}$ es regular, para $x \in G_x$ ab
$\exists\, U_x \in \tau$ t.q. $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset G_x \subset H_x$

Sea $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in \bar{X}\}$, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $\bar{X}$

[$\{A_\alpha, \alpha \in I\}$, $\{B_\beta, \beta \in J\}$ cubiertas de $\bar{X}$.
$\{B_\beta, \beta \in J\}$ es REFINAMIENTO PRECISO DE $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ si
i) $I = J$
ii) $B_\alpha \subset A_\alpha \quad \forall \alpha \in I$]

Teorema:
[$\bar{X}, \tau$, $\mathcal{V} = \{V_\alpha, \alpha \in I\}$ cubierta de $\bar{X}$. Si $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento (abierto)(cerrado) $\mathcal{W} = \{W_\beta, \beta \in J\}$ localmente finito $\Longrightarrow$ $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento (abierto)(cerrado) $\mathcal{T} = \{T_\alpha, \alpha \in I\}$ localmente finito.
preciso

$\mathcal{W} < \mathcal{V}$ i.e. $\exists\, \varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ t.q. $W \subset \varphi(W)$ $\forall\, W \in \mathcal{W}$.

i.e. $\exists\, \psi : J \in I$ t.q. $W_\beta \subset V_{\psi(\beta)}$ $\forall\, \beta \in J$

sea $\alpha \in I$, definamos

$$T_\alpha = \bigcup \{ W_\beta \mid \psi(\beta) = \alpha \}$$ T_α puede ser $\emptyset$

como $W_\beta \subset V_\alpha$ si $\psi(\beta) = \alpha$

$\Rightarrow$ $T_\alpha \subset V_\alpha$ para cada $\alpha \in I$

Sea $\mathcal{T} = \{ T_\alpha \mid \alpha \in I \}$

$\mathcal{T}$ es cubierta de X ya que

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} W_\beta = X$$

P.D. $\mathcal{T}$ localmente finita.

sea $x \in X$, $\mathcal{W}$ localmente finita

$\Rightarrow$ $\exists\, A \in \tau$ t.q. $o(A, \mathcal{W}, J)$ es finito (1)

y $A \cap T_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow A \cap W_\beta \neq \emptyset$ con $\beta \in \psi^{-1}(\alpha)$

$\Rightarrow o(A, \mathcal{T}, I)$ es finito

$\mathcal{W}$ ab. como $T_\alpha = \bigcup \{ W_\beta \mid \psi(\beta) = \alpha \}$ T_α ab.

$\mathcal{W}$ cerr. $T_\alpha = \bigcup \{ W_\beta \mid \psi(\beta) = \alpha \} = \bigcup \{ \overline{W_\beta} \mid \psi(\beta) = \alpha \} \underset{\text{loc. fin.}}{=}$

$\overline{\bigcup \{ W_\beta \mid \psi(\beta) = \alpha \}} = \overline{T_\alpha}$, T_α cerr.

$\therefore$ $\mathcal{U}$ cubierta abierta de X paracompacto
$\therefore$ $\exists$ $\mathcal{R} = \{R_x \mid x \in X\}$ refinamiento preciso abierto y localmente finito de $\mathcal{U}$
i.e. $R_x \subset \overline{R_x} \subset U_x \subset \overline{U_x} \subset G_x \subset H_x$

Para cada $A \in 2^X$ definimos:

$$C(A) = \left[\bigcap \{G_x \mid x \in A\}\right] \cap \left[\bigcap \{X - \overline{R_x} \mid x \in X - A\}\right]$$

<u>P.D.</u> $C(A)$ es abierto

$\mathcal{G}$ es localmente finita
$\Longrightarrow$ card $\{G_x \mid x \in A\}$ es finita
ó $\bigcap \{G_x \mid x \in A\} \neq \emptyset$

Entonces, en ambos casos, $\bigcap \{G_x \mid x \in A\}$ es abierto en X. (2)

$\mathcal{R}$ es localmente finito $\Longrightarrow$

$$\bigcap \{X - \overline{R_x} \mid x \in X - A\} =$$

$$X - \left[\bigcup \{\overline{R_x} \mid x \in X - A\}\right] =$$

$$X - \overline{\left[\bigcup \{R_x \mid x \in X - A\}\right]}$$

que es un abierto en X (3)

$\therefore$ de (2) y (3) $C(A)$ es abierto.

ahora sea
$$\mathcal{C} = \{ C \mid C = C(A) \text{ para alguna } A \in 2^{\mathbb{X}} \}$$

P.D. i) $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de $\mathbb{X}$

ii) $\{ st(x, \mathcal{C}) \mid x \in \mathbb{X} \}$ refina a $\mathcal{H}$

i.e. $\forall x \; \exists H_x \in \mathcal{H}$ t.q. $st(x, \mathcal{C}) \subset H_x$

i) sea $p \in \mathbb{X}$

y sea $A = \{ x \mid p \in \overline{R_x} \}$

$C(A)$ es abierto.

Además

si $x \in A \Rightarrow p \in \overline{R_x} \subset G_x \Rightarrow p \in C(A) \in \mathcal{C}$

si $x \notin A \Rightarrow p \notin \overline{R_x} \Rightarrow p \in C(A) \in \mathcal{C}$

$\therefore \mathcal{C}$ cubierta

ii) sea $p \in \mathbb{X}$ P.D $st(p, \mathcal{C}) \subset H_{x_0}$ p.a. $x_0 \in \mathbb{X}$

$\mathcal{R}$ cubierta $\therefore \exists x_0$ t.q. $p \in R_{x_0}$

sea $A \in 2^{\mathbb{X}}$ t.q. $p \in C(A)$

P.D $C(A) \subset H_{x_0}$

$x_0 \in A$ ya que

$x_0 \in \mathbb{X} - A \Rightarrow p \in C(A) \subset \mathbb{X} - \overline{R_{x_0}}$ $\cancel{\#}$

$\therefore x_0 \in A$ y $C(A) \subset G_{x_0} \subset H_{x_0}$

$\therefore \mathbb{X}$ es fully-normal.

$\boxed{\overline{X} \text{ fully-normal} \Rightarrow \overline{X} \text{ collectionwise normal.}}$

a) Def: collectionwise - normal.

Sea $\mathcal{W}$ una colección discreta de cerrados y sea $\mathcal{H}$ una cubierta abierta de $\overline{X}$ t.q. ningún elemento de $\mathcal{H}$ intersecta a dos elementos de $\mathcal{W}$.

$\overline{X}$ fully-normal $\Rightarrow \exists\ \mathcal{G}$ cubierta abierta de $\overline{X}$ t.q. $\{st(x,\mathcal{G}) \mid x \in \overline{X}\}$ refina a $\mathcal{H}$.

Para cada $W \in \mathcal{W}$ sea

$$D_W = \cup \{G \in \mathcal{G} \mid G \cap W \neq \phi\}$$

D_W es abierto $\supset W$

Si $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ y $W_1 \neq W_2$

$\Rightarrow D_{W_1} \cap D_{W_2} \neq \phi$

sup. $\exists\ p \in D_{W_1} \cap D_{W_2} \Rightarrow \exists\ H_\alpha \in \mathcal{H}$ t.q. $p \in H_\alpha$ y H_α intersecta a W_1 y a W_2 $\not\!\!\!\lightning$

Entonces $\{D_W \mid W \in \mathcal{W}\}$ es una colección de abiertos ajenos t.q. cubren a $\mathcal{W} = \cup\{W_i\}$ y t.q. ningún D_W intersecta a dos elementos de $\mathcal{W}$

$\therefore\ \overline{X}$ es collectionwise - normal.

$\boxed{\bar{X} \text{ collectionwise-normal} \Rightarrow \bar{X} \text{ normal}}$

Dados A, B cerrados ajenos
esta es una colección discreta
$\therefore$ $\exists$ una colección de abiertos ajenos
t.q. cubre a $A \cup B$ y ningún elemento que intersecta a A intersecta a B y viseversa
i.e. $\exists$ U y B abiertos t.q. $U \cap B = \emptyset$
y $A \subseteq U$ $B \subset V$

$\therefore$ $\bar{X}$ es normal.

X collectionwise-normal, Moore $\Rightarrow$ X screenable.

Dem:

a) Def: Un espacio X es screenable si $\forall$ cubierta abierta H de X $\exists$ una sucesión $H_1, H_2, \ldots$, donde H_i es una colección de abiertos ajenos, tal que $\bigcup_i H_i$ es una cubierta de X y refinamiento de H.

b) Daremos una caracterización de espacios desarrollables:

Teorema: Para cada cubierta abierta H de un espacio desarrollable existe una sucesión $F_1, F_2, \ldots$, donde F_i es una colección discreta de conjuntos cerrados que es refinamiento de F_{i+1} y de H y $\bigcup F_i$ cubre al espacio.

Dem: Supongamos que W es un buen-orden[illegible] de H y $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ un desarrollo del espacio t.q. $\mathcal{G}_{i+1}$ refina a $\mathcal{G}_i$

para cada $h \in H$ sea

$$x(h, i) = \bigcup \{ p \in X \mid \nexists k \in H \text{ t.q. } p \in k \text{ y } k < h \text{ [illegible]} \text{ y t.q. } p \in G_t \in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_t \subset h \}$$

si $F_i = \{x(h,i),\ h \in H\}$

F_i es una colección discreta ya que ningún elemento de $\mathcal{G}_i$ intersecta a dos elementos de F_i

$x(h,i) \neq x(j,i)$ $\quad h < j$ en W

$p \in x(h,i) \Rightarrow \nexists\ k \in H$ t.q. $p \in k < h$ en W

$p \in G_t \in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_t \subset h$

sup. $G_t \cap x(h,i) \neq \emptyset \neq G_j \cap x(j,i)$

si $p \in G_t \in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_t \subset h$ y $\Rightarrow G_t \subset j$ $\Big\}\ h < j \Rightarrow p \notin x(h,i)$

Si p es un punto y $h(p)$ es el primer elemento de H en W que contiene a p, entonces, para algún entero i

$[h(p), i] \ni p$

$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ cubre al espacio.

Ahora si ya vamos a la demostración.

X collectionwise-normal, Moore (desarrollable, regular) $\Rightarrow X$ satisface a)

de b) tenemos $\forall\ H$ cub. de $X\ \exists$
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots,\ \mathcal{F}_i$ = colección discreta de cerrados
+ $\bigcup_i \mathcal{F}_i$ cubre a X y refina a H.

Como $\mathbb{X}$ es colectivamente-normal para cada $\mathcal{F}_i$ $\exists$ $\mathcal{Y}_i$ colección de abiertos ajenos $\ni$ $\mathcal{Y}_i$ cubre a $\bigcup\{F_j \mid F_j \in \mathcal{F}_i\}$ y tal que ningún elemento de $\mathcal{Y}_i$ intersecta a dos elementos de $\mathcal{F}_i$

Cada elemento de $\mathcal{Y}_i$ es un subconjunto de algún elemento de H.

$\mathcal{Y}_i = \{Y_j\}$, $Y_j \subset h_\alpha$ para algún α, $\{h_\alpha\} = H$.

$\therefore$ $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots$ es una sucesión $\ni$.

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_i$ es una cubierta de $\mathbb{X}$, refinamiento de H y cada $\mathcal{Y}_i$ es una colección de abiertos ajenos.

ie. $\mathbb{X}$ es screenable.

$\overline{X}$ screenable, normal, desarrollable
$\Rightarrow$ $\overline{X}$ strongly - screenable.

Dem:

a) def: se dice que $\overline{X}$ es strongly - screenable si $\overline{X}$ es screenable y $\forall_{i\in N}$ H_i es discreta.

Sea $H = \{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ colección de abiertos ajenos
sea $W = \overline{X} - \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$

y sea $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ un desarrollo para $\overline{X}$

Denotemos por $S_i = \{p\in \overline{X} \mid \nexists\ G_\beta \in \mathcal{G}_i$ t.q. $p\in G_\beta$ y $G_\beta \cap W \neq \emptyset\}$
$= \{p\in\overline{X} \mid p\in G_\beta\in \mathcal{G}_i \Rightarrow G_\beta\cap W = \emptyset\ \forall_{\beta\in B}\}$

S_i es cerrado, W es cerrado, $S_i \cap W = \emptyset$
$\overline{X}$ normal (Dem)
$\Rightarrow \exists$ D abierto t. $S_i \subset D$ y $\overline{D}\cap W = \emptyset$

Si $\mathcal{H}_i = \{h\in z \mid h = D\cap A_\alpha,\ \alpha\in A\}$
$\mathcal{H}_i$ es una colección discreta de abiertos.

$\therefore$ Como $\forall$ colección H de abiertos ajenos $\exists$ una colección $\bigcup_{i\in N}\mathcal{H}_i$ que cubre a H y tal que $\mathcal{H}_i$ es una colección discreta de abiertos que refina a H

| $\underline{X}$ strongly-screenable, desarrollable → $\underline{X}$ perfectly screenable. |

Dem:

a) Def: $\underline{X}$ es perfectly-screenable si $\underline{X}$ tiene una sucesión $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ donde $\mathcal{H}_i$ es una colección discreta de abiertos tales que
$\forall$ D abierto y $\forall p \in D$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\exists H \in \mathcal{H}_n$ t.q. $p \in H \subset D$.

Sea $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ un desarrollo para $\underline{X}$.
como $\underline{X}$ es strongly-screenable
para cada $\mathcal{G}_i$ $i \in \mathbb{N}$ $\exists$ $\mathcal{H}_{i1}, \mathcal{H}_{i2}, \dots$ donde $\mathcal{H}_{ij}$ es una colección discreta de abiertos t.q. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{ij}$ cubre a $\underline{X}$ y refina a $\mathcal{G}_i$

∴ $\{\mathcal{H}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots\}$ es una colección numerable tal que

$\forall$ D ab. y $\forall p \in D$ $\exists i, j \in \mathbb{N}$ t.q.

$\exists H \in \mathcal{H}_{ij}$ t.q. $p \in H \subset D$

$\{st(p, \mathcal{G}_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ base local.

$\mathbb{X}$ perfectly-screenable, regular $\Longrightarrow$
$\mathbb{X}$ metrizable.

Dem: Como $\mathbb{X}$ es perfectly-screenable $\Rightarrow \exists$ una sucesión $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$, donde $\mathcal{H}_i$ es una colección discreta de abiertos tal que $\forall$ D abierto y $\forall p \in D$ $\exists$ $n(p,D)$ t.q. algún elemento de $\mathcal{H}_n$ esta contenido en D y contiene a p.

$\mathcal{H}_j = \{H_\beta\}_{\beta \in B}$, $\mathcal{H}_i = \{H_\gamma\}_{\gamma \in G}$

sea $K_{ij} = \bigcup \{ H_\beta \in \mathcal{H}_j \mid \overline{H_\beta} \subset H_\gamma \in \mathcal{H}_i$ para alg. $\gamma \in G \}$

K_{ij} ab. t.q. $\overline{K_{ij}} \subset \bigcup H_\gamma$

Como $\mathbb{X}$ es normal.

$\Rightarrow \exists \; f_{ij} : \mathbb{X} \longrightarrow [0,1]$ t.q.

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & x \in K_{ij} \\ 0 & x \in \mathbb{X} - \bigcup_{\gamma \in G} H_\gamma \end{cases}$$

$\overline{K_{ij}} \cap \overline{\bigcup H_\gamma} = \emptyset$

para $x, y \in \mathbb{X}$ definimos

$$D(x,y) = \sum\sum \frac{|f_{ij}(x) + R_{ij}(x,y) f_{ij}(y)|}{2^{i+j}}$$

donde

$$R_{ij}(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } y \in H_\gamma \in \mathcal{H}_i \text{ y } x \in H_\gamma \\ 1 & \text{si } y \notin H_\gamma \text{ cuando } x \in H_\gamma \end{cases}$$

$D(x,y)$ es una métrica para $\mathbb{X}$.
$\mathbb{X}$ es metrizable.