Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS RESULTADOS EN LA TEORIA DE RAMSEY

T E S I S

Que para obtener el Título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

JORGE ALCALDE MARTIN DEL CAMPO

México, D. F. 1985

CONCEPTOS PRELIMINARES.

Una gráfica G es una pareja de conjuntos (V,E) donde V es un conjunto de puntos (llamados vértices) y E un conjunto de parejas no-ordenadas de estos vértices. Todo par a={u,v} de parejas en E es llamado una arista de G; decimos además que u y v son adyacentes (denotado a veces u ady v o v ady u)

Una subgráfica de G es una gráfica que tiene todos sus vértices y aristas en G. Un camino es una secuencia alternada de vértices y aristas $v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n$ que empieza y termina en un vértice (toda arista debe incidir en el vértice que precede a ella y al que la sigue).

El camino que une a v con v_n, lo podemos denotar $v, v_1, \ldots, v_n$ (las aristas son evidentes) y es llamado un v, v_n -camino Es cerrado si $v = v_n$ y abierto si no.

Un paseo es un camino en el cual todas las aristas son distintas .

Una trayectoria es un camino en el cual todos los vértices (y necesariamente las aristas) son distintos.

Una gráfica es conexa si todo par de vertices esta unido por una trayectoria.

Para un conjunto de vertices S de G, la subgráfica inducida <S> es la subgráfica maximal de G cuyos vértices estan en S (De aquí que dos puntos sean adyacentes en G sii son adyacentes en S).

La gráfica G-S es la gráfica de todos los vértices de G que no están en S y todas las aristas formadas en G-S. (De aquí que G-S es la subgráfica maximal que no contiene al conjunto S).

Un subconjunto S de V es llamado un conjunto independiente de G si ningunos dos vértices de S son adyacentes en G.

El complemento $\bar{G}$ de una gráfica G tiene tambien a V como conjunto de vértices pero dos vértices son adyacentes en $\bar{G}$ si y solo si no son adyacentes en G.

Una gráfica autocomplementaria es una gráfica que es isomorfa a su complemento.

La gráfica completa K_p tiene todos sus p vértices adyacentes.

DEFINICIONES ESPECIALES.

Un conjunto de elementos G es llamado un grupo si en G esta definida una operacion binaria llamada producto , denotada por $\cdot$ tal que

1) Si $a,b \in G$ entonces $a \cdot b \in G$ (cerradura)
2) Si $a,b,c \in G$ entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociatividad)
3) Existe en G en elemento e tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$ (identidad)
4) Para toda $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (inverso)

Un grupo G es llamado abeliano si para todos $a,b \in G$ $a \cdot b = b \cdot a$

Un subconjunto H no vacío de G es un subgrupo de G si bajo el producto de G, H es un grupo.

Sea G grupo, H subgrupo de G para a,b G decimos que a es congruente con b módulo H ($a \equiv b \mod H$) si $ab^{-1} \in H$

Si H es subgrupo de G, $a \in G$ entonces $Ha = \{ ha \mid h \in H \}$ Ha es llamado la clase lateral derecha de H en G.

Si $a \in G$, $Ha = \{ x \in G \mid a \equiv x \mod H \}$

Si H es subgrupo de G, el índice de H en G es el número de distintas clases laterales derechas de H en G.

Cuando la operación del grupo es obvia escribiremos ab en vez de $a \cdot b$.

NOTACION_

La notación aue se usará en este trabajo es básicamente la de cualauier libro de gráficas, sin embargo cierta notación especial es útil para el desarollo de la teoría de Ramsey

$\lfloor x \rfloor$ = Mayor entero menor o idual a x

$\mathbb{N}$ = { 1,2,3,... } = Enteros positivos

$\mathbb{Z}_p$ = Enteros módulo p

$|X|$ = Cardinalidad de X

$[n] = \{ 1,2,3,...,n \}$

$[X]^k = \{ Y : Y \subseteq X, |Y| = k \}$

Si $X = [n]$ quitamos los sedundos parentesis (i.e. $[[n]] = [n]$)

K_n Denota la gráfica completa con n puntos

Una r-coloración de una gráfica G es una función $h : G \longrightarrow [r]$ tal que para toda $e = \{x,y\}$ arista de G , $h(x) \neq h(y)$.El mínimo r tal que una r-coloración de G existe es llamado el número cromático de G denotado $X(G)$.

Es conveniente pensar a las 2-coloraciones como funciones de $h : G \longrightarrow \{ 1,-1\}$

INTRODUCCION

La teoría de Ramsey es una rama del análisis combinatorio que se ha desarollado mucho en los ultimos 10 años , a pesar de que sus resultados son fáciles de exponer (cuando han sido descubiertos) son muy difíciles de probar, la mayoría de estos problemas permanece aún sin resolver y los problemas crecen mas rápido que las soluciones a los ya existentes.

Frank Plumpton Ramsey (1902-1930) demostró el teorema que da nombre a esta teoría pero Ramsey trabajaba en problemas de lógica matemática, y aunque reconoció que su teorema tenía un interes independiente, básicamente estuvo preocupado en sus aplicaciones a la lógica.

Ramsey requería de su teorema para sus investigaciones en lógica y usó su teorema para encontrar una solución a ciertos problemas de decisión. Hay dos ironías en esta situación ahora sabemos que el teorema de Ramsey no es necesario para demostrar los problemas de decisión, y, segundo, Ramsey trataba de resolver un problema de decisión general que Gödel demostró inalcanzable, al año siguiente de la muerte de F. Ramsey.

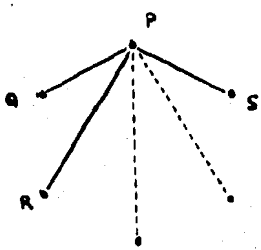
La introducción mas sencilla que podemos dar a la teoría de Ramsey es la siguiente :

Problema:

Consideremos la grafica K_6 ; si coloreamos arbitrariamente las aristas con dos colores, entonces obtenemos un triángulo monocromático.

Demostración:

Sea P cualquiera de los 6 vértices, 5 de las aristas terminan en P, 3 de las cuales son del mismo color, digamos que PQ,PR y PS son azules; si alguna de las aristas QR QS SQ es de color azul, digamos QS formaremos un triángulo azul PQS, de otra manera el triángulo QRS sera del otro color. Así en cualquier caso formamos un triángulo monocromático ∎



CAPITULO 1

Definición:

El número de Ramsey $R(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ es el mínimo entero p tal que no importa como coloreemos las aristas de K_p con m colores, existe una i tal que hay una subgráfica completa de tamaño k_i de de color i.

El teorema de Ramsey garantiza la existencia de estos números en este capítulo daremos una demostración al teorema así como algunas cotas y aplicaciones de estos números.

Estaremos básicamente interesados en el caso especial cuando m es igual a dos, en ese caso podemos dar la siguiente definición alternativa:

Definición:

El número de Ramsey $R(m,n)$ es el mínimo entero positivo p tal que toda gráfica de orden p contiene una gráfica simple K_m o su complemento tiene una gráfica K_n.

Esta definición es equivalente a la anterior(en el caso $m=2$) ya que podemos dar la coloración como sigue: Sea G de orden p,coloreamos G de un color solamente y el complemento de G sería otro color de la completa de orden p.

Otra definición que nos sera útil es la siguiente.

Definición:

El número de Ramsey $R(m,n)$ es el mínimo entero positivo p tal que toda gráfica de orden p contiene una gráfica completa con m vértices o un conjunto independiente de n vértices.

Esta definición es claramente equivalente si tomamos en cuenta que si tenemos un conjunto independiente S en G este conjunto forma una subgráfica completa en el complemento.

1.1 TEOREMA DE RAMSEY

Teorema de Ramsey (versión general):
Dados los enteros $s, k1, k2, \ldots, kJ$ existe un mínimo entero $r = R_s(k1, \ldots, kJ)$ con la siguiente propiedad:
Si $|W| \geq r$ y $C = (C1, C2, \ldots, CJ)$ es una J-coloración de $[W]^s$ entonces para una i, con $1 \leq i \leq J$ existe $A \subseteq W$ con $|A| = ki$ tal que $[A]^s \subseteq Ci$.

La demostración del teorema en sus muchas presentaciones puede encontrarse en bastantes libros (por ejemplo el de H.J. Ruser para la demostración anterior)

Básicamente estaremos interesados en el caso especial $s=J=2$

Teorema de Ramsey (versión corta):
Dados los enteros positivos m,n existe un mínimo entero $r = R(m,n)$ con la siguiente propiedad:
Si $|W| = r$ y $C = (c1, c2)$ es una 2-coloración de $|W|^2$ entonces sucede una de las siguientes afirmaciones:

(a) Existe $T \subseteq W$; $|T| = m$; tal que $[T]^2 \subseteq c1$
(b) Existe $U \subseteq W$; $|U| = n$; tal que $[U]^2 \subseteq c2$

Antes de demostrar el teorema, es conveniente observar

(1) Del hecho que $\overline{(\overline{B})} = B$ obtenemos $R(m,n) = R(n,m)$

(2) $R(1,n) = R(n,1) = 1$

(3) $R(2,n) = R(n,2) = n$ (ya que si coloreamos con dos colores a la gráfica Kn de no existir K2 de color 1 entonces Kn es de color 2).

Demostración :
Sean $m,n > 2$ y asumimos por inducción que $R(m,n-1)$ y $R(m-1,n)$ existen.
Sea $r = R(m-1,n) + R(m,n-1)$ y sea $|W| = r$ y $C = (c1,c2)$ una coloración de $[W]^2$ si fijamos $v \in W$ y hacemos
$A = \{ w \in W : \{v,w\} \in c1 \}$
$B = \{ w \in W : \{v,w\} \in c2 \}$
como $|A| + |B| = r-1$ sucede que $|A| \geq R(m-1,n)$ o $|B| \geq R(m,n-1)$
Supongamos que $|A| \geq R(m-1,n)$ por la hipótesis de inducción sucede que

(a') Existe $T1 \subsetneq A$, $|T1| = m-1$, $[T1]^2 \subsetneq c1$
pero entonces $T = T1 \cup \{v\}$ implica que $|T| = m$
y $[T] \subsetneq c1$; por lo tanto (a) se cumple.

o (b') Existe $U \subsetneq A$, $|U| = n$, $[U]^2 \subsetneq c2$
pero entonces $U \subsetneq W$ y por tanto (b) se cumple
Análogamente sucede si $|B| \geq R(m,n-1)$.
Lo que completa la prueba ∎

1.2 COTAS A LOS NUMEROS DE RAMSEY

De la demostración del teorema de Ramsey obtenemos :

$$R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Examinando detalladamente (1) podemos obtener una pequeña mejora . Sea $k = R(m-1,n) + R(m,n-1)$, si $[k]^2$ la coloreamos con dos colores (azul y rojo) tal que no contenga una subgráfica K_m roja ni una K_n azul, entonces todo punto v esta conectado con los k-1 puntos restantes por precisamente $R(m-1,n)$ líneas rojas y $R(m,n-1)$ líneas azules. Por lo tanto el número total de líneas rojas es exactamente $k(R(m-1,n))/2$, que debe ser un entero. Esto es imposible si $R(m-1,n)$ y $R(m,n-1)$ son pares, lo que hace en este caso a la desigualdad (1) estricta.

A partir de la ecuación (1) obtenemos el siguiente teorema

Teorema 1.

$$R(m,n) < \binom{m+n-2}{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Demostración :

Por inducción sobre m + n.

Usando el hecho de que $R(1,m) = 1$ y de que $R(2,m) = m$ el teorema se cumple para $m + n \leq 5$

Sean k,l enteros positivos y asumimos que el teorema es válido para todos los enteros positivos m,n tal que $5 \leq m + n < k + l$, entonces de (1) y la hipótesis de inducción

$$R(k,l) \leq R(k,l-1) + R(k-1,l)$$

$$\leq \binom{k+l-3}{k-1} + \binom{k+l-3}{k-2}$$

$$= \binom{k+l-2}{k-1}$$

Por lo tanto el teorema es válido para todos los valores de m y n ■

La determinación de un número de Ramsey es en general un problema no resuelto en la mayoría de los casos. Para encontrar un número de Ramsey tenemos en general, dos problemas, que son encontrar cotas superiores e inferiores.

El problema en la introducción de este trabajo, lo hubiéramos podido plantear para gráficas con más de seis vértices, lo que en términos de la teoría de Ramsey nos da que $R(3,3) \geq 6$

Ahora, de la desigualdad (1) obtenemos:

$R(3,3) \leq R(3,2) + R(2,3) = 3 + 3 = 6.$

Y por lo tanto hemos encontrado que $R(3,3) = 6.$

En la tabla 1 estan todos los números de Ramsey conocidos o sus cotas superiores e inferiores, en la tabla 2 estan las cotas superiores mas conocidas.

De la desigualdad (2) obtenemos

$$R(3,n) < \binom{n+1}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

El siguiente teorema mejora un poco la cota anterior

Teorema 2.

Si $n \geq 3$

$$R(3,n) \leq \frac{n^2+3}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

Demostración :

Por inducción sobre n.

Para $n = 3$, $R(3,n) = 6 = \dfrac{n^2+3}{2}$

Asumimos ahora que $R(3,n-1) \leq \dfrac{(n-1)^2+3}{2}$

para $n \geq 4$. Por (1) obtenemos

$$R(3,n) \leq n + R(3,n-1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

(Mas aún, la desigualdad es estricta cuando los dos son pares)

Combinando (5) y la hipótesis de inducción

$$R(3,n) \leq n + \frac{(n-1)^2+3}{2} = \frac{n^2+4}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

Para completar la prueba demostraremos que la desigualdad (6) es estricta.

Si n es impar entonces $R(3,n) < \dfrac{(n^2+4)}{2}$

ya que $(n^2 + 4)$ es impar. Por lo tanto asumimos que n es par. Si $R(3,n-1) < ((n-1)^2 + 3)/2$ entonces claramente la desigualdad (6) es estricta. Si por otro lado

$$R(3,n-1) = ((n-1)^2 + 3)/2 = n^2/2 + n-2$$

entonces $R(3,n)$ es par ya que n es par. Por lo tanto la desigualdad es estricta ∎

La cota que obtuvimos en (4) no es muy buena si n es grande. Recientemente Ajtai, Komlós, Szemerédi probaron que cualquier gráfica sin triángulos con n vértices de grado t contiene un conjunto independiente de tamaño $c((n\log t)/t)$.

Supongamos que tenemos una gráfica G con n vértices que no contenga triángulos ni conjuntos independientes de tamaño m. Todo vértice tiene que tener grado a lo mas m ya que los vecinos de un punto forman en este caso un conjunto independiente, por lo tanto tenemos que $n \leq cm^2/\log m$, que nos da

$$R(3,m) \leq cm^2/\log m \qquad \ldots\ldots \quad (7)$$

Jerrold R. Griggs mejora la prueba dada por Ajtai, Komlós y Szemerédi y encuentra que $c \approx 2.4$ es un valor bueno para (7).

De la desigualdad (2) obtenemos que $R(4,n) \leq \binom{n+2}{3}$

El siguiente teorema (Nara-Tachibana) mejora un poco la cota para $R(4,n)$.

Teorema 3.
Sea m un entero positivo tal que

$$R(m,n) \leq \binom{m+n-3}{m-1}, \quad n \geq n0+1 \quad \ldots\ldots\ldots \ (*)$$

se cumple para alguna n0. Mas aún supongase que existe una constante no negativa c que satisface:

$$R(m+1,n) \leq \binom{m+n-2}{m} - c \qquad \ldots\ldots\ldots (**)$$

para n = n0, entonces la desigualdad (**) se cumple para toda $n \geq n0$.

Demostración:

Supongamos que (**) es cierta para $n0,\ldots,n-1$ entonces tendremos

$$R(m+1,n) \leq R(m,n) + R(m+1,n-1)$$

$$\leq \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m} - c$$

$$= \binom{m+n-2}{m} - c$$

lo cual completa la prueba.

Sabemos por la tabla 2 que $R(4,12) \leq 285 = \binom{3+12-2}{3} - 1$

Por lo tanto todas las condiciones se cumplen para $c=1$ ya que si $m = 3$ y $n0 = 12$ la condición (*) del teorema se convierte en $R(3,n) \leq \binom{n}{2}$, $n \geq 13$ Por lo que obtenemos

$$R(4,n) \leq \binom{n+1}{3} - 1 \qquad n \geq 12 \qquad \ldots(8)$$

Hay dos maneras de obtener cotas inferiores asintóticas para los números de Ramsey,el método constructivo y el método probabilístico el segundo, que prueba la existencia de ciertas gráficas, sin construirlas explícitamente (y sin decir como hacerlo) generalmente da mejores cotas.

Paul Erdös , uno de los mejores exponentes del método probabilístico probó el siguiente teorema .

Teorema 4.

$$R(n,n) \geq 2^{n/2}$$

Demostración:

Como $R(1,1) = 1$ y $R(2,2) = 2$ podemos asumir que $n \geq 3$.

Denotemos por Gk al conjunto de gráficas simples con conjunto de vértices {v1,v2,...,vk} y por G_k^n el conjunto de esas gráficas que contiene una subgráfica completa maximal de n vértices. Claramente

$$|G_k| = 2^{\binom{k}{2}} \qquad \ldots\ldots (9)$$

ya que cada subconjunto de las $\binom{k}{2}$ posibles vi vj aristas determina una gráfica en Gk.

Similarmente el número de gráficas en Gk que tiene un conjunto particular de n vértices como subgráfica completa es $2^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}}$. Como hay $\binom{k}{n}$ distintos subconjuntos con n elementos de {v1,v2,...,vk} tenemos que

$$|G_k^n| \leqslant \binom{k}{n} 2^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} \qquad \ldots\ldots(10)$$

por (9) y (10) obtenemos

$$\frac{|G_k^n|}{|G_k|} \leqslant \binom{k}{n} 2^{-\binom{n}{2}} < \frac{k^n 2^{-\binom{n}{2}}}{n!} \qquad \ldots\ldots(11)$$

Supongamos que $k < 2^{n/2}$ por (11) se sigue que

$$\frac{|G_k^n|}{|G_k|} < \frac{2^{n^2/2} 2^{-\binom{n}{2}}}{n!} = \frac{2^{n/2}}{n!} < 1/2$$

Por lo tanto, menos de la mitad de las gráficas en Gk contiene una subgráfica completa con n vértices. También porque Gk = { H : $\bar{H}$ ∈ Gk} menos de la mitad de las gráficas en Gk contiene un conjunto independiente de n vértices. Por lo tanto alguna gráfica en Gk contiene una subgráfica completa con n vértices o un conjunto independiente con n vértices.

Ya que esto se cumple para toda $k < 2^{n/2}$ obtenemos que

$$R(n,n) \geqslant 2^{n/2}$$

■

El método constructivo para encontrar cotas inferiores a R(m,n) nos lleva a encontrar una gráfica que no contenga una subgráfica Km ni un conjunto independiente de n vértices.

En las figuras 1,2,3, encontramos gráficas que demuestran que $R(3,4) > 8$, $R(4,4) > 17$ y $R(3,5) > 13$. Ya que por ejemplo en la figura 1 es fácil comprobar que no hay una gráfica completa de tres vértices ni un conjunto independiente de cuatro vértices, lo que nos da la cota inferior obtenida, análogamente podemos comprobar las otras dos cotas.

Estas gráficas fueron obtenidas por Greenwood y Gleason. La gráfica de la figura 3 la obtuvieron de la siguiente manera:

Etiquetan los vértices de $\mathbb{Z}_{17}$ y ponen una arista entre ellos si y solo si $|i - j|$ es un cuadrado en $\mathbb{Z}_{17}$ (i.e. $i-j \in D = \{1,2,4,8,9,13,15,16\}$).

Para obtener la gráfica de la figura 2 utilizan los vértices de $\mathbb{Z}_{13}$ y unen dos vértices si su diferencia es un residuo cúbico de 13.

Si notamos que R(3,3) y R(2,4) son pares por (1) obtenemos

$$R(3,4) < R(3,3) + R(2,4) = 10$$

por lo tanto, como la figura 1 nos demuestra que $R(3,4) > 8$ hemos encontrado que $R(3,4) = 9$.

Análogamente podremos encontrar utilizando las figuras 2 y 3 que $R(3,5) = 14$ y $R(4,4) = 18$.

Como se puede ver, el método constructivo es bastante complicado y empeora cuando m y n crecen, de hecho no hay mas demostraciones en este camino que nos lleven a algún resultado importante.

Tabla 1

Números de Ramsey conocidos

m/n	3	4	5	6	7
3	6				
4	9	18			
5	14	25-28	42-55		
6	18	34-36	57-94	102-169	
7	23				126-586
8	28-29				
9	36				
10	39-44				
11	46-54				
12	49-53				

Tabla 2

m/n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	6	9	14	18	23	29	36	44	54	63	73	284
4		18	28	36	59	88	124	168	222	285		

figura 1. $R(3,4) > 8$

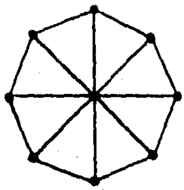


figura 2. $R(3,5) > 13$

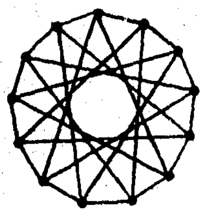
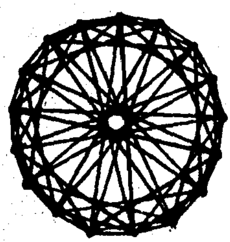


figura 3. $R(4,4) > 17$



1.3 APLICACIONES

Hay bastantes aplicaciones de la teoría de Ramsey, veremos algunas de ellas, que nos muestran la importancia y belleza de esta teoría .

(1) **Definición :**
Escribimos $n \longrightarrow (l)$ si, dada una 2-coloración de $[n]^2$, existe un conjunto $T \subseteq [n]$, $|T| = l$ tal que $[T]^2$ es monocromática.

Nota: Esta definición es equivalente a la de los números de Ramsey .

Esta definición la podemos generalizar de la siguiente manera :

Definición :
Escribimos $n \longrightarrow (l_1, l_2, \ldots, l_r)$ si para toda r-coloración de $[n]^2$, existe i, con $1 \leq i \leq r$ y un conjunto $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$ tal que $[T]^2$ es de color i.

En el caso de tener $l_1 = l_2 = \ldots = l_r$ escribiremos $n \longrightarrow (l)_r$, esto es toda r-coloración de $[n]$ produce una monocromática $[l]^2$.

Teorema (Schur).
Si $\mathbb{N}$ es coloreado con un número finito de colores entonces existen x, y, z con el mismo color tal que

$$x + y = z$$

Demostración :
Sean r los colores usados y sea n tal que $n+1 \longrightarrow (3)_r$

Una r-coloración X de $[n]$ induce una coloración X de K_{n+1} en un conjunto de vértices $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ por $X'(i,j) = X(|i-j|)$

Por la forma en que escogimos n debe de existir un triángulo monocromático en K_n esto es $i > j > k$ tal que

$$X'(i,j) = X'(j,k) = X'(i,k)$$

haciendo $x = i-j$, $y = j-k$, $z = i-k$ tenemos que

$$X(x) = X(y) = X(z) \quad y \quad x + y = z \qquad \blacksquare$$

El trabajo original de Schur estaba basado y motivado por el último teorema de Fermat , y de hecho demostró el siguiente teorema aunque nunca volvió a tocarlo.

Teorema (Schur).
Para toda m , si p es primo y suficientemente grande la ecuación

$$x^m + y^m = z^m$$

tiene una solución no cero en los enteros módulo p.

Demostración:
Sea p primo y suficientemente grande tal que si $\{ 1,2,\ldots,p-1 \}$ es m-coloreado entonces existen a,b,c del mismo color con $a + b = c$ (aquí usamos el primer teorema).
Sea $H = \{ x^m : x \in \mathbb{Z}_p \}$, H es un subgrupo de $\mathbb{Z}_p$ de índice $n = m.c.d.(m,p-1)$ y $n \leq m$. Las clases laterales de $\mathbb{Z}_p$ definen una n-coloración X de $\mathbb{Z}_p$ con la propiedad de que

$$X(a) = X(b) \quad \text{sii} \quad ab^{-1} \in H$$

Entonces existen a,b,c $\{ 1,\ldots,p-1\}$ con

$$X(a) = X(b) = X(c) \quad y \quad a + b = c$$

En $\mathbb{Z}_p$

$$1 + a^{-1} b = a^{-1} c$$

y 1, $a^{-1} b$, $a^{-1} c$ son todos potencias no cero en $\mathbb{Z}_p$

■

(2) **Definición:**

El número de independencia de G, denotado $\alpha(G)$, es el máximo orden de todos los conjuntos independientes de G.

Definición:

El producto normal de dos gráficas G y H denotado $G \cdot H$ es la gráfica cuyos vértices son $V(G)\times V(H)$ y dos vértices xy, $x'y'$ son adyacentes si y solo si :

$$x = x' ; \ (y,y') \in A(H) ;$$

o

$$(x,x') \in A(G) , \ y = y' ;$$

o

$$(x,x') \in A(G) , \ (y,y') \in A(H) ;$$

Teorema (Hedrlin).

Sea $G \cdot H$ el producto normal de dos gráficas entonces

$$\alpha(G \cdot H) \leq R2 [\alpha(G)+1, \alpha(H)+1] - 1.$$

Demostracion :

Sean $A = V(G)$, $B = V(H)$
$X = A(G)$, $Y = A(H)$.
y sea $k = R2 [\alpha(G)+1, \alpha(H)+1]$.

Supongamos que $\alpha(G \cdot H) \geq k$. Entonces existe en $G \cdot H$ un conjunto independiente $S \subseteq A \times B$ con $|S| = k$. Sean ab, $a'b' \in S$.

Si a distinto de a' y $(a,a') \notin X$ unimos ab con $a'b'$ con una arista roja, de otra manera b distinto de b' y $(b,b') \notin Y$, entonces unimos ab con $a'b'$ con una arista azul.

(Estamos pintando todo S ya que esta coloración niega la definición de producto normal y S es un conjunto independiente de $A \times B$)

Como $|S| = k$, debe de existir en la gráfica roja una subgráfica K_c con $c = \alpha(G)+1$; o debe de existir en la gráfica azul una subgráfica K_d con $d = \alpha(H)+1$.

En el primer caso el conjunto
$\{ a : a \in A, ab \in K_c \}$
es un conjunto independiente de G con $\alpha(G) + 1$ elementos, que es una contradicción, en el segundo caso obtenemos una contradicción similar con la gráfica H. Por lo tanto obtenemos que $\alpha(G \cdot H) < k$. ∎

(3) Problema (Erdös ,Szekeres)

En el plano sea S un conjunto finito de puntos con $|S| \geqslant R4(p,5)$, tal que no haya tres puntos colineales ,entonces existen p puntos de S que son los vértices de un polígono convexo.

Este problema es interesante ya que utiliza la generalización de los números de Ramsey, pero para demostrar este problema deberíamos de introducir el concepto de hipergráfica y como solo lo utilizamos en esta aplicación daremos como referencia al libro de Berge ,asi como para las demostraciones a las proposiciones (1) y (2) daremos como referencia al artículo de Erdös y Szekeres.

Proposición 1

Dados 5 puntos en el plano tal que no haya tres colineales, entonces cuatro de ellos forman un cuadrilátero convexo.

Proposición 2

Dados p puntos en el plano tal que no haya tres colineales y cada cuatro de ellos formen un cuadrilátero convexo,entonces los p puntos son los vértices de un polígono convexo.

Demostración:

Sea S tal que $|S| \geqslant R4(p,5)$,pintaremos $[S]^4$ de la siguiente manera.Pintamos de color azul a las cuartetas de puntos de S que forman un cuadrilátero convexo y de color rojo a los que forman un cuadrilátero no convexo,ahora por el teorema de Ramsey (general) existen p puntos de color azul o 5 puntos de color rojo.

No podemos tener 5 puntos de color rojo ya que por la proposición 1 cuatro de ellos formarían un cuadrilátero convexo,por lo que tenemos p puntos de color azul,o sea p puntos tales que cada 4 forman un cuadrilátero convexo y por la proposición 2 éstos forman un polígono convexo de p puntos. ∎

CAPITULO 2

Definición :

Un clan en una gráfica G , es una subgráfica completa maximal de G

El número de clanes de G , $w(G)$ es el máximo de orden de todos los clanes de G

Otra definición alternativa para los números de Ramsey $R(n_1,n_2,\ldots,n_l)$ la podemos obtener como el mínimo entero positivo p tal que para toda factorización de $K_p = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l$ $w(G_i) \geq n_i$, para al menos una i, $1 \leq i \leq l$.

La anterior observación nos lleva a sugerir la siguiente definición de una manera mas general.

Definición :

Sea f un parámetro para las gráficas y sean $n_1,n_2,\ldots,n_l, l \geq 1$ enteros positivos.
El f-número de Ramsey $f_r(n_1,n_2,\ldots,n_l)$ es el mínimo entero positivo p tal que toda factorización de $K_p = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l$, $f(G_i) \geq n_i$ para al menos una i $1 \leq i \leq l$.

En general estos números de Ramsey no han sido muy estudiados, nosotros veremos el caso especial de los f-números de Ramsey cuando f es k-conexidad.

2.1 NUMEROS DE CONEXIDAD DE RAMSEY

Definición :
Un conjunto de corte V de una gráfica G , es un subconjunto de los vertices de G tal que G − V es disconexa o trivial , un k-conjunto de corte es un conjunto de corte con k elementos.

El número de conexidad k(G) de G es el mínimo número k tal que G tiene un k-conjunto de corte.

G se llama k-conexa si $k(G) \geq k$.

Definición :
El número de conexidad de Ramsey , denotado $r_c(k)$ es el mínimo entero n tal que toda c-coloración de las aristas de la gráfica Kn origina una subgráfica monocromática k-conexa.

A lo largo del capítulo usaremos la siguiente observacion :

Observacion :
Sea $k \geq 2$ y sea G una gráfica sin una subgrafica k-conexa. Si $|V(G)| \geq k+1$,entonces existe un conjunto separador S (no necesariamente mínimo con esta propiedad) $S \subset V(G)$ con $|S| = k-1$ que parte a los vértices de V(G)−S en dos conjuntos A,B tales que no haya AB-aristas en G.Sin perdida de generalidad asumimos $a = |A| \leq |B| = b$

Antes de dar el principal teorema de esta sección trataremos de acotar el número de aristas para una gráfica G sin una subgráfica k-conexa,para lo cual necesitamos de una afirmación y un lema

Afirmación : Sea G sin una subgráfica k-conexa y

$|V(G)| = n \geq k$, entonces

$$|E(G)| \leq \binom{n}{2} - \frac{(n-k+1)^2 - 1}{3} \qquad .....(1)$$

Demostración :

Por inducción sobre n. La desigualdad es inmediata si $k \leq n \leq k+1$

Para $m \geq k+2$ suponemos que (1) se cumple para toda n, $k \leq n \leq m-1$. Demostraremos que se cumple para m.

Haciendo uso de la observación sabemos que podemos encontrar conjuntos S,A,B, tal que $|S|=k-1$ y no existan AB aristas

```
 ---------------
|      |   |     |
| A    | S |  B  |
|      |   |     |
 ---------------
```

$|S|=k-1$

$|A| = a \leq b = |B|$

$G = \langle S \cup B \cup A \rangle$

Por hipótesis de inducción la gráfica $\langle S \cup B \rangle$ tiene al menos $(b^2-1)/3$ aristas menos que la gráfica K_{k-1+b} ya que

$$|E(\langle S \cup B \rangle)| \leq \binom{k-1+b}{2} - ((k-1+b-k+1)^2-1)/3$$

Por lo que obtendremos:

$$|E(G)| \leq \binom{m}{2} - ab - \left(\frac{b^2-1}{3}\right)$$

donde $m= a+ b+ k-1$, y de aquí obtenemos que (1) se sigue para $n=m$.

∎

Lema :

Para $k \geq 2$ toda gráfica G sin una subgráfica k-conexa con $n = |V(G)| \geq 2(k-1)$ satisface

$$|E(G)| < 5/3\ (n-k+1)\ (k-1) \quad \ldots . \ (2)$$

Demostracion :

Por inducción sobre n. A partir de la afirmación haciendo algunas operaciones de (1) obtenemos :

$$|E(G)| < 5/3\ (n-k+1)\ (k-1)$$
$$\text{si } 2(k-1) \leq n \leq 3(k-1).$$

Si $m \geq 3(k-1)+1$ asumimos que (2) se cumple para $2(k-1) \leq n \leq m-1$.

Otra vez por la observación podemos encontrar conjuntos S, A, B con las mismas propiedades.

Tenemos ahora que si $a = |A| \geq k-1$ y $m = a+b+k-1$ entonces:

$$|E(G)| \leq |\langle E(A \cup S)\rangle| + |E(\langle B \cup S\rangle)|$$

$$< 5/3\ (k-1)a + 5/3\ (k-1)b$$

$$= 5/3\ (k-1)(m-k+1)$$

ahora si $a = |A| < (k-1)$ entonces $b \geq k$ y

$$|E(G)| \leq \frac{a(a-1)}{2} + a(k-1) + |E(\langle B \cup S\rangle)|$$

$$< 3/2\ (k-1)a + 5/3\ (k-1)b$$

$$< 5/3\ (k-1)(m-k+1)$$

y por lo tanto (2) se cumple para todo $n \geq 2(k-1)$ ∎

Teorema 1 .

Para $k \geq 2$, $c \geq 2$

$$2c(k-1)+1 \leq r_c(k) < 10/3\, c(k-1)+1 \quad \ldots\ldots(3)$$

Demostración :

Sea n tal que existe una c-coloración de Kn que no tiene una subgráfica k-conexa monocromática entonces por el lema anterior hay estrictamente menos de 5/3 (n-k+1)(k-1) aristas coloreadas con cada color i para $1 \leq i \leq c$ por lo tanto.

$$\binom{n}{2} < 5/3\, c\,(n-k+1)(k-1)$$

que implica

$$n(n-1)/2 < 5/3\, c\,(n-k+1)(k-1)$$

que implica

$$n < 10/3\, c\, \frac{(k-1)(n-k+1)}{n-1} \leq 10/3\, c\,(k-1)$$

Así hemos probado que si $n > 10/3\, c\,(k-1)$ entonces para toda c-coloración obtenemos una k-conexa monocromática, por lo tanto obtenemos la cota superior.

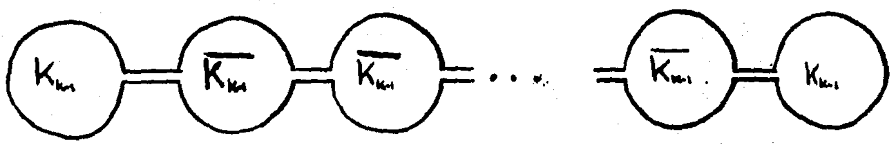
La cota inferior de (3) la probaremos dando una c-coloración de $K_{2c(k-1)}$ que no contenga una subgráfica k-conexa .

Partimos los vertices de $K_{2c(k-1)}$ en 2c partes A1, A2,....,A2c cada parte con k-1 vertices.Contraímos los vértices de cada conjunto Ai a un nuevo vértice llamado Ai, para $1 \leqslant i \leqslant 2c$, obteniendo la gráfica completa K_{2c}.

Es un hecho conocido en teoría de gráficas que K_{2c} se puede factorizar en c trayectorias generadoras.

Coloreemos las aristas de $K_{2c(k-1)}$ como sigue sea Ti = (A_{i_1} , ... , $A_{i_{2c}}$) una de las trayectorias generadoras, coloreamos todas las aristas $A_{i_j} A_{i_{j+1}}$ de $K_{2c(k-1)}$ de color i y también las aristas con ambos extremos en A_{i_1} con ambos extremos en $A_{i_{2c}}$ de color i .

Obtenemos entonces una c-coloración en la cual toda subgráfica monocromática maximal es isomorfa a la gráfica P denotada por:



(donde las barras indican que todas las aristas entre las gráficas estan en P)

Toda subgráfica de P que contenga al menos $J \geqslant k+1$ vértices corresponde a uno de los siguientes casos:

i) Los vértices caen en solo 2 de las 2c(k-1) componentes de P. En este caso a lo mas k-1 vertices de al menos uno de los conjuntos es un separador para la subgráfica.

ii) Los vertices caen en 3 o mas de las 2c(k-1) componentes de P .En este caso a lo mas k-1 vertices de un miembro interior de estas componentes es un separador.

Por lo tanto P no contiene una subgráfica k-conexa, de aqui que esta c-coloracion de $K_{2c(k-1)}$ no nos da una subgrafica monocromatica k-conexa. ■

Es posible hacer algunas mejoras a la cota superior del teorema haciendo mas fuertes algunos argumentos en la prueba del teorema , pero en general no son muy significativos estos cambios;David W. Matula con algunas consideraciones dió la siguiente conjetura: $r_c(k) = 2c\ (k-1)+1$ para $k \geq 2, c \geq 2$.

Sin embargo algunos resultados de W. Mader demuestran que la parte derecha de la desigualdad en (3) no puede en general reducir el factor 10/3 menos de 3 y da como ejemplo a la gráfica $G_{m,k} = (m-1)K_{k-1} + \overline{K_{k-1}}$ con $n = m(k-1)$ vértices y si $m \geq 2$ los vértices de $\overline{K_{k-1}}$ son un conjunto separador, por lo que no tiene una subgráfica k-conexa, el número de aristas de $G_{m,k}$ es

$$|E(G_{m,k})| = (m-1)(k-1)^2 + (m-1)k-1$$

$$= 3/2\ (n-k+1)(k-1) - 1/2\ (n-k+1).$$

y Mader conjeturó que es el máximo número posible para toda gráfica con $n \geq 2(k-1)$ vértices sin una subgráfica k-conexa.

Para el caso $c = 2$ un argumento adicional nos mejora la parte derecha de la desigualdad (3) el número de conexidad de Ramsey $r_2(k)$ lo podemos ver como el mínimo entero p tal que toda gráfica de orden p o su complemento tiene una subgráfica k-conexa.

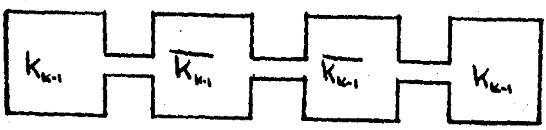
Teorema 2.

Para $k \geq 2$

$$4(k-1)+1 \leq r_2(k) < (3+\sqrt{11/3})\ (k-1)+1 \quad \ldots.(4)$$

Demostración :

La construcción de la gráfica P del teorema 1 nos da la gráfica



que es autocomplementaria (i.e. $G \cong \overline{G}$) y no contiene una subgráfica k-conexa por lo cual tenemos que $r_2(k) \geq 4(k-1)+1$

Sea G una gráfica con al menos $3(k-1)+1$ vértices tal que ni G ni su complemento contengan una subgráfica k-conexa. Haciendo uso de la observación del principio podemos encontrar con Juntos S, A, B con las propiedades requeridas y notamos además que en este caso $a = |A| \leq k-1$ ya que de otra manera G contendría a la gráfica completa bipartita $K_{a,a}$ que es k-conexa.

Si quitamos los vértices de A a G quitamos a lo mas $\binom{a}{2} + a(k-1) \leq a(3/2\,k-2)$ aristas, podemos ahora repetir este proceso (ahora con la gráfica $G - A$ y usando la observación para esta gráfica) hasta obtener una gráfica G' con

$$2(k-1) < |V(G')| \leq 3(k-1),$$

$$\text{sean } \theta = |V(G')|/(k-1)$$
$$\delta = |V(G)|/(k-1)$$

Notamos que a lo mas $(\delta - \theta)(k-1)(3/2k-2)$ aristas fueron quitadas, entonces

$$|E(G)| \leq (\delta - \theta)(k-1)(3/2k-2) + |E(G')| \quad .(5)$$

por la afirmación (1) tenemos

$$|E(G')| \leq \binom{\theta(k-1)}{2} - \frac{(\theta-1)^2(k-1)^2-1}{3}$$

$$= 1/6\,(k-1)^2(\theta^2 + 4\theta - 2) - \frac{\theta(k-1)}{2} + 1/3 \quad ..(6)$$

ahora por (5) y (6) obtenemos que

$$|E(G)| \leq 1/6(k-1)^2(9\delta + \theta^2 - 5\theta - 2) - \frac{\delta(k-1)}{2} + 1/3$$

y como $\theta^2 - 5\theta - 2 \leq -8$ para toda $\theta \in [2,3]$ tenemos que

$$|E(G)| \leq 1/6\,(k-1)^2(9\delta - 8) - \frac{\delta(k-1)}{2} + 1/3 \quad ....(7)$$

sin perdida de generalidad $|E(G)| \geq |E(\overline{G})|$ por lo tanto

$$|E(G)| \geq 1/2\binom{\delta(k-1)}{2} = [\delta^2(k-1)^2 - \delta(k-1)]/4 \quad ..(8)$$

tenemos por (7) y (8) que

$\ell^2(k-1)^2 \leqslant 2/3\ (k-1)^2\ (9\ell-8)-\ell(K-1)\ +\ 4/3$

y de aqui obtenemos que

$\ell^2-6\ell+16/3 < 0$ que implica $\ell < 3+\sqrt{11/3}$

como $\ell = |V(G)|/(K-1)$ obtenemos la ecuacion

$r_2(k) < (3+\sqrt{11/3})(k-1) + 1$ ∎

Con argumentos aún mas tediosos David W. Matula prueba el siguiente

Lema . Para $2 \leqslant k \leqslant 5$ $\qquad r_2(k) = 4(k-1) + 1$

los mismos argumentos le sirven para mejorar la cota superior en (4) cerca de 4.7 (k-1) + 1 , pero se necesita todavia mas para establecer la conjetura de que la cota inferior es el valor correcto.

Es interesante ver el caso en el cual la conexidad varía sobre las diferentes subgráficas monocromáticas. Específicamente se sigue de la prueba del Teorema 1 que para $k1 \geqslant k2 \geqslant \ldots \geqslant kc \geqslant 2$, cualquier c-coloración de la gráfica completa con al menos $10/3 \sum_{i=1}^{c} (ki-1)$ vértices tiene que tener una subgráfica monocromática de color i con conexidad ki para alguna i.

Para el caso c = 2 sea r'(k,m) el mínimo entero tal que toda r'(k,m) gráfica G contiene una subgráfica k-conexa o $\overline{G}$ contiene una subgráfica m-conexa.

Para $k \geqslant m \geqslant 2$, supóngase que G es una gráfica con $n \geqslant k+1$ vértices sin una subgráfica k-conexa y sin que $\overline{G}$ tenga una subgráfica m-conexa

Entonces existe un conjunto separador $S \subsetneq V(G)$ con $|S| = k-1$ que parte los vertices de $V(G)-S$ en dos conjuntos A,B con $|A| \leqslant |B|$ sin que haya AB aristas, pero entonces $|A| \leqslant m-1$ pues de lo contrario G contendrá a $K_{m,m}$.

Si quitamos los vertices de A a G quitamos a lo mas $|A|$ $(k-2+m/2)$ aristas, podemos seguir este proceso de quitar vértices y aristas hasta que el número de vértices que quede sea menor o igual que k. Esto nos asegura que G no puede tener mas de $(n-k)(k-2+m/2) + \binom{k}{2}$ aristas y de aquí podemos encontrar una cota superior de $r'(k,m)$ mejor que la anterior.

Trataremos exclusivamente el caso $r'(k,2)$ y daremos una completa solución.

Teorema 3

Para $k \geqslant 2$

$$r'(k,2)=k+1+\left\lfloor\sqrt{2k}+1/2\right\rfloor$$

Demostración.

Sea G una gráfica con n vertices tal que no contiene una subgráfica k-conexa y tal que $\overline{G}$ no contenga una subgráfica 2-conexa (i.e. $\overline{G}$ no contiene ciclos).

Como se vió antes del teorema tenemos entonces que

$$|E(G)| \leqslant (n-k)(k-1) + \binom{k}{2}$$

Como $|E(\overline{G})| \leqslant n-1$

$$|E(G)| + |E(\overline{G})| = \binom{n}{2} \leqslant (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} + n-1$$

Que implica que

$$[n-(k+1/2)]^2 < 2k$$

Por lo que tenemos que $n < k+1/2+\sqrt{2k}$

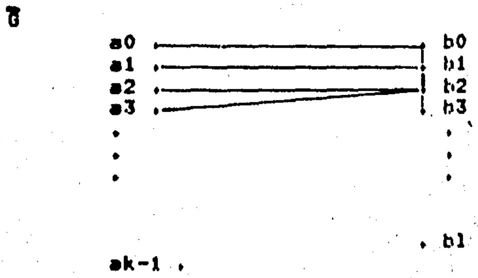
Y de aquí que $r'(k,2) \leqslant k+1+\left\lfloor\sqrt{2k}+1/2\right\rfloor$

Para demostrar la otra desigualdad construiremos una gráfica $G = (V,E)$ con $|V| = k + \lfloor \sqrt{2k} + 1/2 \rfloor$ vértices y tal que G no contenga una subgráfica k-conexa ni G contenga una subgráfica 2-conexa.

Sea $k \geq 2$ y sea $V = A \cup B$ donde $A = \{ a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \}$ y $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_l\}$ donde $l = \lfloor \sqrt{2k} + 1/2 \rfloor$.

Para las aristas de $\bar{G}$ sea b_0 ady a_0 y hagamos b_J adyacente a b_{J-1} y a a_i para $J(J-1)/2 + 1 \leq i \leq J(J+1)/2$ para $i \leq J \leq l$

El hecho de que $i \leq l(l+1)/2$ implica que $i \leq k-1$, por lo tanto $\bar{G}$ no puede tener ciclos por lo tanto no es 2-conexa y no puede tener una subgráfica 2-conexa



como

$$J(J-1)/2 + 1 \leq i \leq J(J+1)/2$$

y

$$J(J+1)/2 - J(J-1)/2 + 1 = J-1$$

tenemos que b_J es adyacente en $\bar{G}$ a $J+1$ vertices

Sea H una subgráfica de G, si H contiene solamente vértices de A entonces H no es k-conexa, de otra manera sea bJ en B tal que J es el máximo índice de los vértices de H que está en B. Por la construcción que hicimos bJ solo puede ser adyacente a lo más a k-1 vértices de H, por lo tanto H no es k-conexa.

■

Sea H una subgráfica de G, si H contiene solamente vértices de A entonces H no es k-conexa, de otra manera sea b_J en B tal que J es el máximo índice de los vértices de H que está en B. Por la construcción que hicimos b_J solo puede ser adyacente a lo más a $k-1$ vértices de H, por lo tanto H no es k-conexa.

∎

BIBLIOGRAFIA

AJtai,M.; Kolmós,J. ; Szemerédi,E. ; A note on Ramsey numbers
Journal of Combinatorial Theory ser A 29 (1980)

Berge, Claude; Graphs and Hypergraphs, North Holland
Publishing Company, ltd. London (1973)

Bondy,J.A.; Murty, U.S.R.; Graph Theory with applications
Macmillan Press ltd. London (1977)

Chung, F.R.K.; Grinstead ,C.M.; A survey of bounds for classical
Ramsey numbers. Journal of Graph Theory 7 (1983) 25-37

Erdös,Paul; Spencer J; Probabilistic Methods in Combinatorics.
Asociated Press, New York (1974)

Erdös,Paul; Szekeres, G.; A Combinatorial Problem in Geometry
Compositio Math , 2 ,(1935) 463-470

Graham,R ; Rothschild,B ; Spencer J.; Ramsey Theory. John Wiley
New York (1980)

Graever,J.E.; Yackel,J.; Some graph theoretic result associated with
Ramsey theorem. Journal of Combinatorial Theory 4 (1968)
125-175

Grinstead,C.; Roberts,S. ; On the Ramsey numbers R(3,8) and R(3,9).
Journal of Combinatorial Theory ser B-33 (1982) 27-51

Griggs, Jerrold W; An upper buond on the Ramsey numbers R(3,k)
Journal of Combinatorial Theory ser A 35 (1983) 145-153

Mader, W ; Connectivity and edge connectivity in finite graphs.In Surveys in Combinatorics. B. Bollobas, Cambribge U. Press London (1979)

Matula, David ; Ramsey Theory for Graph Connectivity.Journal of Graph Theory 7 (1983) 95-103

Nara, Chie; Shin, I. Tachibana; A note on upper bounds for some Ramsey numbers. Discrete Mathematics 45 (1983) 323-326

Ramsey Frank P.; On a problem of formal logic. Proceedings London Math Society 30 (1930) 264-286.

Ryser, H.J.; Combinatorial Mathematics. Carus Monograph N.14; John Wiley and sons. New York (1963)

Spencer, Joel H.; Ramsey's Theorem - a new lower bound. Journal of Combinatorial Theory ser A 18 (1975) 108-115