

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCRIPCION MATEMATICA DEL FLUJO DE TRAFICO EN UNA  
CARRETERA, Y DE LAS CONSECUENCIAS PROVOCADAS POR CAMBIOS  
EN LAS CARACTERISTICAS FISICAS DEL TERRENO.

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
MATEMATICO

PRESENTA  
MA. LETICIA VILLAFUERTE RAMIREZ.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

## INTRODUCCION

pág. 4

## CAPITULO I

## VARIABLES FUNDAMENTALES DE TRAFICO, OBTENCION DEL MODELO MATEMATICO DE LOS PROBLEMAS DE TRAFICO.

1. VARIABLES FUNDAMENTALES DE TRAFICO	9
A. Velocidad y Campo de Velocidades	9
B. Flujo de Tráfico y Densidad de Tráfico	11
C. Relación entre Velocidad, Densidad y Flujo	13
2. MODELO PARA EL FLUJO DE TRAFICO	14
A. Conservación del Número de Carros	14
B. Relación Velocidad-Densidad	16
C. Flujo de Tráfico	18
3. SOLUCION DEL MODELO	19
A. Tráfico Casi-Uniforme	19
B. Tráfico No-Uniforme y Método de las Características	24
4. INTRODUCCION DE SHOCK'S EN EL DIAGRAMA ESPACIO-TIEMPO	29
A. Tráfico Discontinuo	29

## CAPITULO II

## ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE TRAFICO EN UN CASO ESPECIAL.

1. DENSIDAD INICIAL CONSTANTE	38
A. Análisis del Tráfico para Cierta Disposición del Camino	38
B. Análisis del Comportamiento del Tráfico para Otra Configuración del Camino	50
2. DISTINTA DENSIDAD A LO LARGO DEL CAMINO	58
3. UN CASO MAS REAL	68

## CAPITULO III

## EXTENCION Y APLICACION.

1. UN EJEMPLO Y UN CASO ESPECIAL	80
----------------------------------	----

## BIBLIOGRAFIA.

97

## INTRODUCCION

Es bien sabido por todos que la vida moderna implica una serie de problemas y preocupaciones para el hombre que habita en las grandes urbes; los problemas de tráfico forman parte de su vida cotidiana y representan solamente una pequeña parte de las dificultades a las que tiene que enfrentarse hoy en día.

El problema del transporte terrestre ha sido, desde tiempo inmemorial, motivo de gran preocupación; en el momento de la aparición del automóvil se pensó que todo estaba resuelto.

Sin embargo, a pesar de que este invento brindó a la humanidad grandes beneficios , nos damos cuenta de que el problema continúa y no podemos negar el hecho de que ha alcanzado nuevas dimensiones,ramificandose, además, en una infinidad de variados y nuevos problemas como son la contaminación ambiental, el aumento en el número de accidentes, la congestión de tránsito, etc.,siendo este último verdaderamente crítico en la actualidad.

Indiscutiblemente, la explosión demográfica y la necesidad de los individuos de transportarse, han contribuido a agudizarlo.

Con el fin de resolver dichas dificultades y de formular normas o reglas que las eviten, algunos de los problemas de tránsito han podido sujetarse a un análisis científico tratando de comprender profundamente cada uno de ellos . De entre dichos problemas podemos citar los siguientes:

- a. Cómo desarrollar un sistema de luces computarizado.
- b. Dónde instalar señales y luces de alto para el tránsito.
- c. Cuánto tiempo debe durar el ciclo de luces.

- d. Cuando convertir una avenida de doble circulación en una de un sólo sentido.
- e. Dónde construir pasos a desnivel, entradas y salidas, etc.

Como resultado del análisis de dichos problemas, se esperaría contar con un servicio de transporte urbano eficiente, un mínimo de contaminación ambiental y de accidentes automovilísticos, así como con una red de avenidas que hiciera el tránsito más fluido. Sin embargo, tratar de formular y resolver toda la gama de problemas de tráfico en unas cuantas páginas, resultaría sumamente ambicioso. En vez de ello, estudiaremos algunos casos interesantes que recientemente han recibido una formulación matemática; debido al constante encuentro con las congestiones de autos en nuestra vida diaria, es de nuestro especial interés, saber cómo se comporta un cierto grupo de vehículos a lo largo de un camino donde la circulación se efectúa en un solo sentido y sobre un carril exclusivamente.

La originalidad de este trabajo reside en que se investiga cuáles son las consecuencias, en la circulación de vehículos, producidas por un cambio en las características físicas del terreno por el cual circulan.

El modelo que nosotros formularemos para tratar los problemas que nos ocupan será continuo y determinista; a grandes rasgos, la investigación la llevaremos a cabo de la siguiente manera.

El primer capítulo contendrá la herramienta con la que trabajaremos mas adelante , ilustrando ésta con algunos ejemplos sencillos. Primeramente discutiremos las variables que intervienen en el fenómeno del tráfico: la velocidad, la densidad y el flujo. Luego se intentará predecir esas cantidades para un tiempo  $t$  si la suponemos conocida inicialmente para un tiempo  $t_0$  .

La intención primordial de este capítulo es la de hacer este trabajo auto-contenido. Sin embargo, algunas partes no se expondrán con gran detalle (para una presentación más completa ver la referencia 4 ) .

Además de lo antes descrito, en el capítulo I veremos que el considerar la ley de conservación de los carros y las relaciones entre velocidad y densidad nos conducen a una formulación de los problemas de tránsito en términos de una ecuación diferencial parcial no-lineal. Después, en forma breve se discutirán las propiedades del flujo de tráfico uniforme , el cual permite la introducción del concepto de onda de densidad de tráfico y, en esa misma parte , desarrollaremos el método de las características para los problemas de tráfico no-uniforme.

Por último, discutiremos algunos casos particulares en los que se presentan shock's de tráfico (discontinuidades en la densidad) y una vez familiarizados con el modelo matemático, en los capítulos subsecuentes lo aplicaremos al estudio del tipo de problemas que motivan este trabajo.

Para el capítulo II hemos reservado el análisis del comportamiento del tránsito en un caso especial, se considera la sección de una carretera que presenta una subida y una bajada.

En dicha sección se considera primero cierta densidad constante y luego distintas densidades a lo largo del camino.

Una vez concluido el análisis para esos casos, se considera uno más real y especial en el que se tiene una granizada sobre la carretera durante tiempo indefinido y luego se tiene solamente durante un tiempo  $t_0$ .

A continuación, en el capítulo III se sugiere una extensión para el estudio de problemas de tránsito más complejos que los que se han discutido hasta el momento y por medio de un ejemplo se muestra la aplicabilidad de la teoría de tráfico; esto con el fin de que las ideas que aparecen a lo largo de este trabajo no queden sin ilustrarse.

## CAPITULO I

VARIABLES FUNDAMENTALES DE TRAFICO, OBTENCION DEL  
MODELO MATEMATICO DE LOS PROBLEMAS DE TRAFICO.

## 1. VARIABLES FUNDAMENTALES DE TRAFICO.

### A. Velocidad y Campo de Velocidades.

Imaginemos un auto moviéndose a lo largo de un camino.

Si designamos la posición del carro, para un tiempo  $t$  cualquiera, por  $X_0(t)$  (esta posición puede referirse, por ejemplo, al centro del auto), sabemos que su velocidad esta dada por  $dx_0(t)/dt$  y su aceleración por  $d^2x_0(t)/dt^2$ .

Si en un camino tenemos varios autos, cada uno lo designamos por  $X_i(t)$ , como se muestra en la figura 1.; sin embargo, para describir su velocidad en la carretera podemos dar dos enfoques. Uno, es medir la velocidad  $U_i(t)$  para cada auto,  $U_i = dx_i(t)/dt$ ; con  $N$  autos hay  $N$  diferentes velocidades, cada una dependiendo del tiempo.

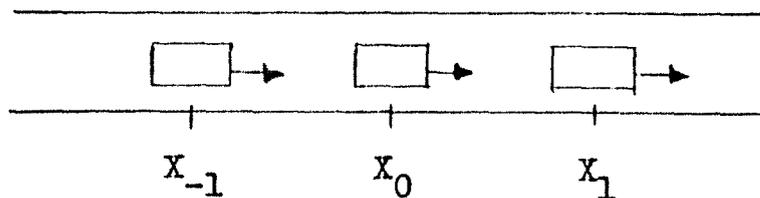


Figura 1. Carretera con la posición de los autos denotada por  $X_i$ .

Si el número de autos que estamos considerando es "grande", resultaría muy difícil llevar a cabo esas mediciones, entonces resulta más conveniente asociar a cada punto en el espacio (en cada tiempo) una velocidad única  $U(x,t)$  llamada

campo de velocidades. Esta puede ser la velocidad medida al tiempo  $t$  por un observador fijo en la posición  $X$ .

En términos matemáticos, el campo de velocidades  $U(X,t)$  en la posición del carro  $X_i(t)$  debe tener la velocidad  $U_i(t)$ ,

$$U(X_i(t),t) = U_i(t). \quad (1)$$

La existencia de un campo de velocidades  $U(X,t)$  implica que en cada  $X$  y  $t$  existe una velocidad. Entonces, este modelo no permite que los autos se rebasen unos a otros (puesto que en el punto de paso habría simultáneamente dos velocidades distintas).

A esta segunda forma de describir el tráfico se le denomina CONTINUA .

Existen varios problemas conceptuales con este tipo de modelos y con los cuales no nos meteremos. El lector interesado puede ver una discusión de estos en la referencia 5 .

El ejemplo más simple de un campo de velocidades ocurre si cada auto se mueve a lo largo del camino a una velocidad constante  $V_0$ ,  $U(X,t) = V_0$  como se indica en la figura 2.

Claramente, el campo de velocidades que usamos para esta situación es la misma constante  $V_0$ .

Dependiendo de la aplicación particular de tráfico, podemos estar interesados en cualquiera de estas: las velocidades individuales de los autos ó el campo de velocidades. Aquí, usaremos la segunda.

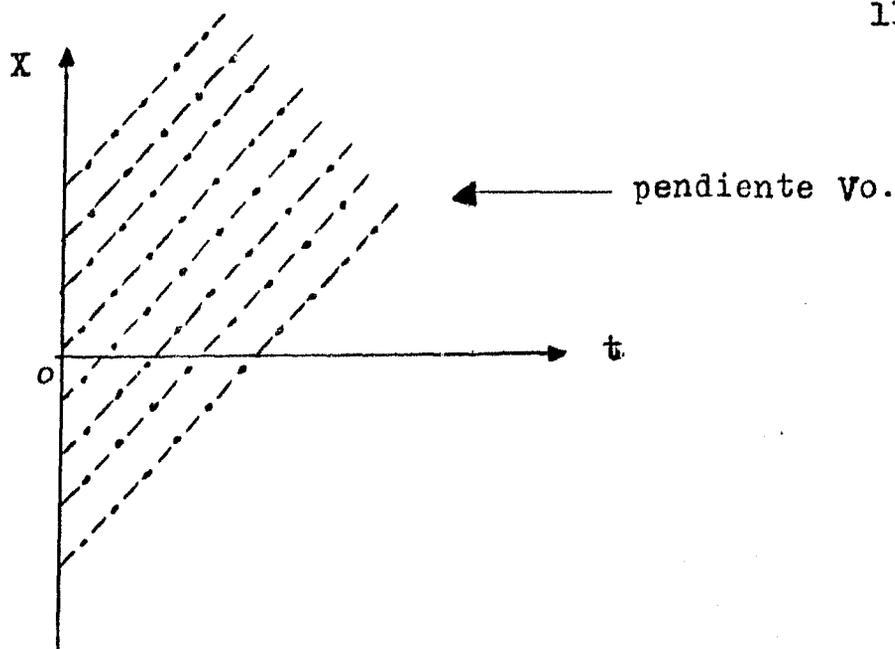


Figura 2. Campo de velocidad constante.

### B. Flujo de Tráfico y Densidad de Tráfico.

¿Qué variables de tráfico puede medir fácilmente un observador, además de las velocidades?

Un observador fijo en una cierta posición a lo largo de una carretera, puede medir el número de carros que pasan por ahí en un cierto tiempo (intervalo de tiempo).

El observador entonces, puede calcular, por ejemplo, el número de carros que por unidad de tiempo pasan ante él.

Esta cantidad es llamada el flujo de tráfico y se denotará por la letra  $F$ ; la función  $F$  depende del tiempo y de la posición, por lo tanto es más apropiado escribir  $F=F(X,t)$ .

Sin embargo, para abreviar escribiremos solamente  $F$ .

Existe, además, otra variable de tráfico medida en tiempos fijos (en vez de posiciones fijas como ocurre para el flujo de tráfico). Podemos contar el número de autos (en un tiempo fijo) entre dos posiciones del camino. Si calculamos el número de autos por unidad de longitud, a esta cantidad le llamaremos densidad de tráfico y la denotaremos con la letra  $\rho$ .

A lo largo de este trabajo, todos los vehículos son tratados de igual forma; la palabra "carro" es usada indistintamente para referirse a cualquier vehículo.

Imaginemos una situación en la cual los carros están igualmente espaciados. Por conveniencia se supone ahora (como a través de la discusión del flujo de tráfico) que todos los vehículos tienen la misma longitud,  $L$ . Si la distancia entre los carros es  $d$  (la distancia  $d+L$  es llamada el espacio), entonces la densidad será:

$$\rho = \frac{1}{L+d} \quad (2)$$

o sea, hay un carro por cada longitud de carretera  $L+d$ .

Supondremos que existen intervalos de medida conveniente (en espacio y tiempo) tales que la densidad de tráfico y el flujo de tráfico sean funciones continuas de la posición y el tiempo sin que se pierdan las variaciones locales como un resultado de considerar los intervalos con medidas extremadamente grandes.

### C. Relación entre Velocidad, Densidad y Flujo.

Entre las tres variables fundamentales de tráfico  $F$ ,  $\rho$ ,  $U$  existe la relación:

$$\text{flujo} = (\text{densidad de tráfico}) (\text{velocidad})$$

o en forma matemática:

$$F(X,t) = \rho(X,t) U(X,t) \quad (3)$$

la cual es conocida como la Ley Fundamental; a continuación mostraremos como surge.

Una manera sencilla de hacerlo es, considerar el número de carros que pasan en  $X=X_0$  en un tiempo muy pequeño  $\Delta t$ , esto es, entre  $t_0$  y  $t_0 + \Delta t$ . En ese pequeño tiempo los autos no se han movido gran cosa de su posición inicial y de aquí que  $U(X,t)$  y  $\rho(X,t)$  pueden aproximarse por constantes en  $X=X_0$  y  $t=t_0$ . En el pequeño tiempo  $\Delta t$ , los carros que ocupan un tramo de longitud aproximada  $U(X,t)\Delta t$ , pasarán al observador (ver figura 3).

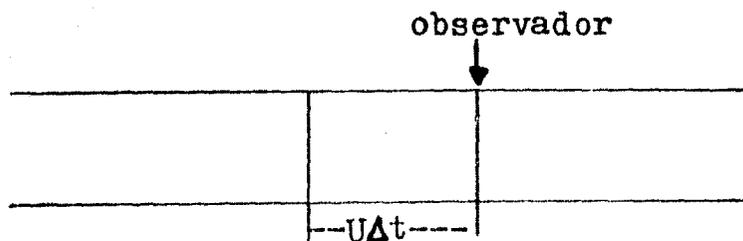


Figura 3. Distancia aproximada que recorre un auto en un tiempo  $\Delta t$ .

El número de carros pasando es, entonces aproximadamente  $U(x,t) \Delta t \rho(x,t)$  (debido a la definición de  $\rho$ ).

Como el flujo de tráfico es el número de coches por unidad de tiempo, observamos que, dividiendo el producto anterior entre  $\Delta t$  obtenemos el flujo  $F$ . Entonces las tres variables densidad, velocidad y flujo, están relacionadas por la ecuación (3).

## 2. MODELO PARA EL FLUJO DE TRAFICO.

### A. Conservación del Número de Carros.

En esta sección formularemos el modelo determinista para el flujo de tráfico.

Nuestras suposiciones aquí son, que la densidad y el campo de velocidades son conocidos inicialmente para una carretera de longitud infinita. ¿Podemos predecir velocidades y densidades para tiempos futuros?

Primeramente derivaremos una ecuación que nos represente la "ley de conservación de los autos". Esto es, que exprese por qué la densidad está cambiando.

Sobre algún intervalo del camino, entre  $X=a$  y  $X=b$ , el número de carros  $N$  puede expresarse como la integral de la densidad de tráfico:

$$N(t) = \int_a^b \rho(x,t) dx \quad . \quad (4)$$

Si no hay entradas ni salidas sobre este camino, entonces  $N$  puede cambiar únicamente debido a los carros que abandonan la región por  $X=b$  y a los que entran a la región por  $X=a$ .

Entonces, la razón de cambio del número de carros  $dN/dt$  es igual al número de estos, por unidad de tiempo cruzando en  $X=a$  menos el número de carros por unidad de tiempo cruzando en  $X=b$  (moviéndose hacia la derecha), o bien

$$dN/dt = F(a,t) - F(b,t) \quad (5)$$

puesto que el número de carros por unidad de tiempo es el flujo  $F(X,t)$ . Así, combinando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(X,t) dX = F(a,t) - F(b,t) \quad (6)$$

Esta ecuación expresa el hecho de que los cambios en el número de carros son debidos solamente al flujo cruzando las fronteras.

Ningún carro es creado ni destruido; el número de carros se conserva. Esto no significa que el número de carros entre  $X=a$  y  $X=b$  sea constante ( si eso fuera cierto entonces  $d/dt \int_a^b \rho(X,t) dX = 0$  o  $F(a,t) = F(b,t)$  ).

La ecuación (6) es llamada la ley de conservación de los autos en forma integral, o más precisamente, una ley de conservación integral.

Si dicha ecuación la dividimos entre  $b-a$  y tomamos el límite cuando  $b$  tiende a  $X=a$ , obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(X,t) + \frac{\partial}{\partial X} F(X,t) = 0$$

o simplemente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Esta ecuación diferencial parcial expresa una relación entre la densidad de tráfico y el flujo de tráfico, derivada de la suposición de que el número de carros se conserva. Esta ecuación es llamada la ecuación de Conservación de los Carros, la cual debido a que  $F = \rho U$  puede escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U)}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

#### B. Relación Velocidad-Densidad.

Según el punto A, las variables de tráfico densidad y velocidad de los carros, están relacionadas por solamente una ecuación, la conservación de los carros (ecuación 8). Sin embargo, necesitamos tener otra ecuación que las relacione de alguna manera especial para tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sencillo de resolver.

La siguiente observación nos conducirá a ello.

Cuando somos conductores de un auto, o bien, viajamos en uno, notamos que si el tráfico es suficientemente ligero podemos viajar a una velocidad bastante considerable, digamos "rápida", pero si el tráfico aumenta, los vehículos se desplazarán a una velocidad menor pues el congestionamiento de autos les impide alcanzar velocidades altas. En base a este tipo de observaciones podemos hacer una suposición que simplifique la relación velocidad-densidad, tal es:

"En cualquier punto a lo largo del camino la velocidad de un carro sólo depende de la densidad de tráfico

$$U = U(\rho) \quad (10)$$

De la ecuación (10) tenemos que, si la densidad de tráfico es muy pequeña, incluso  $\rho=0$ , la velocidad con que pueden viajar los autos será entonces la máxima,  $U_m$ ,

$$U(0) = U_m \quad (11)$$

Así, puesto que al aumentar la densidad de tráfico, la velocidad disminuye debido a la aglomeración que se forma paulatinamente, podemos afirmar que  $U$  es una función decreciente de  $\rho$ . Si en un momento dado, el número de autos continúa creciendo hasta que llega a una densidad que permanece a través de cierto tiempo, decimos que esta densidad máxima  $\rho_m$ , corresponde a lo que llamaremos tráfico tope-con-tope ó tope-a-tope, y se tiene que

$$U(\rho_m) = 0 \quad (12)$$

Consecuentemente, el tipo de curva que se muestra en la figura 4,  $U=U(\rho)$ , relacionando las dos variables de tráfico (velocidad y densidad) es razonable.

Esto no debe sugerir que la dependencia velocidad-densidad es la misma para todas las condiciones del camino.

Sin embargo, nosotros investigaremos un tramo del camino que tenga propiedades aproximadamente constantes.

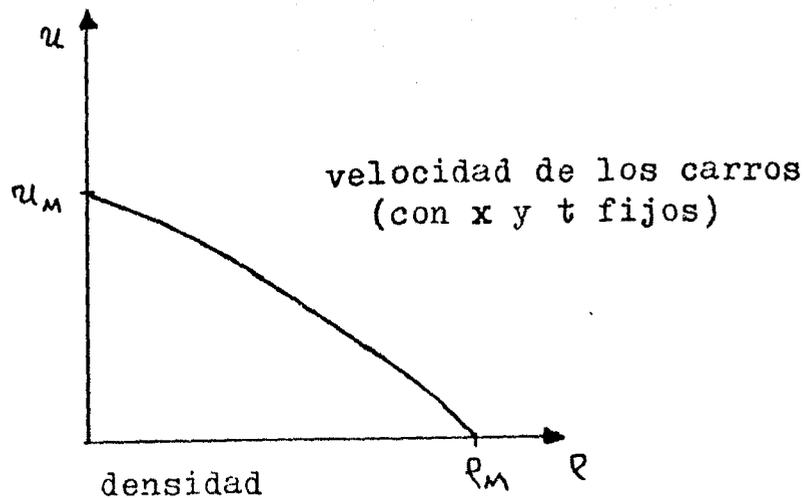


Figura 4. La velocidad de los carros disminuye cuando la densidad aumenta.

En las secciones siguientes investigaremos las aplicaciones del modelo matemático para flujo de tráfico.

### C. Flujo de Tráfico.

Conciderere un camino homogéneo, tal que la velocidad de los carros depende solamente de la densidad de tráfico (ver figura 4). Puesto que el flujo satisface la relación

$$F = \rho U(\rho),$$

observamos que si no hay coches en el camino, esto es,  $\rho = 0$ , el flujo es cero; lo mismo pasa cuando el tráfico está prácticamente parado (esto sucede cuando  $U=0$  y  $\rho = \rho_m$ ).

Para otros valores de densidad, el flujo debe ser distinto de cero, en particular, positivo. Entonces la dependencia flujo-densidad será como se ilustra en la figura 5.

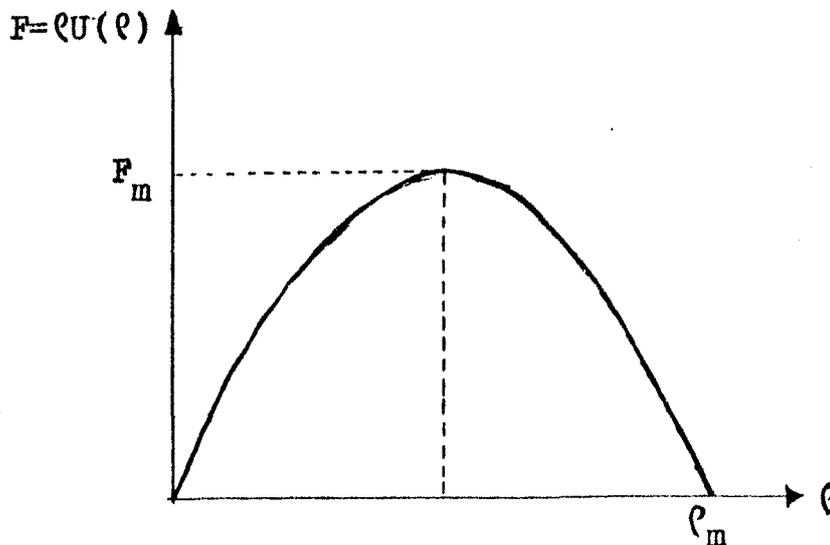


Figura 5. Diagrama Fundamental de Flujo de Tráfico  
( curva flujo-densidad).

Esta relación es algunas veces llamada el Diagrama Fundamental de Tráfico y al referirnos a ella usaremos la abreviatura D.F.T.

La figura 5 muestra que el flujo máximo se alcanza para alguna densidad, tal máximo es algunas veces referido como "capacidad del camino".

### 3. SOLUCION DEL MODELO

#### A. Tráfico Casi- uniforme.

Si tenemos tráfico no-uniforme sobre una carretera y deseamos conocer la densidad de tráfico para un tiempo futuro, necesitamos justamente resolver la ecuación 7 , que, por la regla de la cadena y tomando en cuenta que  $F=F(\rho)$  es equivalente a la ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dF}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (13)$$

Si consideramos que la densidad es casi-uniforme alrededor de  $\rho_0$ , entonces podemos linearizar la ecuación (13) vía series de Taylor y obtener la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dF}{d\rho} (\rho_0) \frac{dP}{dX} = 0 \quad (14)$$

Esta ecuación rige el comportamiento de la densidad de tráfico perturbada  $p = \rho - \rho_0$  (o el desplazamiento desde la densidad constante  $\rho_0$ ).

Podemos entonces, escribir la ecuación diferencial parcial (14) como

$$\text{donde} \quad \frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (15)$$

$c(\rho_0) = (dF/d\rho)(\rho_0)$ .

Resolveremos esta ecuación diferencial con la condición inicial de tráfico perturbado  $p(X,0) = f(X)$ , haciendo el cambio de variables:

$$\begin{aligned} X' &= X - Ct \\ t' &= t \end{aligned} .$$

Expresando la ec. diferencial en términos de éstas, obtenemos la ecuación diferencial simplificada

$$\frac{\partial P}{\partial t'} = 0$$

la cual puede integrarse directamente:

$$p = g(X')$$

donde  $g(X')$  es una función arbitraria de  $X'$ .

En las variables originales se tiene:

$$p = g(X - Ct) \quad (16)$$

e inicialmente  $p(X,0) = f(X)$  implica que  $f(X) = g(X)$ .

Consecuentemente, la solución de la ec. diferencial que satisficé la condición inicial dada es

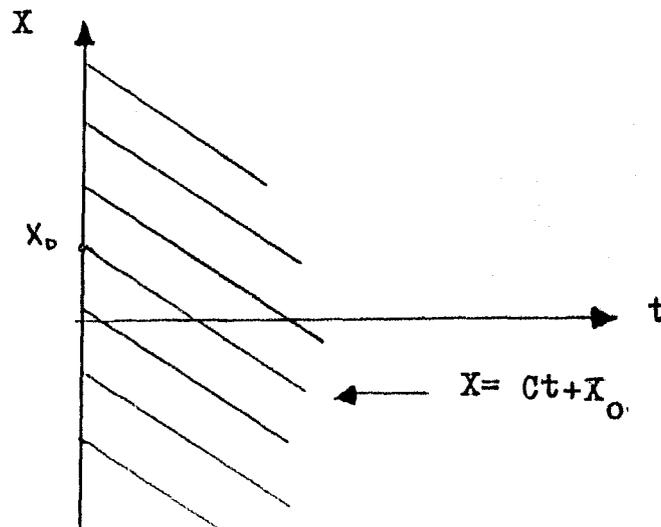
$$p(X,t) = f(X-ct) \quad . \quad (17)$$

Si nos movemos con la velocidad  $C$ , la densidad permanece igual . Se dice que la densidad se propaga como una " onda " ( llamada onda de densidad ) con velocidad de onda  $C$  que depende de  $\rho_0$  :

Es claro que, a lo largo de las curvas  $X-ct = \text{constante}$ , la densidad no cambia. Esas rectas son llamadas características de la ecuación diferencial parcial (15). En la figura 6 podemos observar el trazo de varias de ellas.

Figura 6. Características de la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial X} = 0$$



En dicha figura hemos supuesto  $C < 0$  , pero ¿ qué signo tiene  $C$ ? . Recordemos que  $C = dF/d\rho$  . y según el diagrama de la figura 5, la pendiente es positiva para densidades menores que la correspondiente a la capacidad del camino y

y la pendiente es negativa para densidades mayores que la correspondiente a la capacidad. El valor de  $C(\rho_0)$  nos da la velocidad con la cual se propagan las pequeñas perturbaciones a una densidad de tráfico uniforme  $\rho_0$ .

Por conveniencia, el tráfico pesado se define como aquél, tal que la densidad es mayor que la densidad óptima (correspondiendo a la capacidad del camino) y tráfico ligero como aquél para el cual la densidad es menor que la densidad óptima. De estas definiciones y el D.F.T. concluimos que en tráfico pesado las densidades perturbadas se mueven con una velocidad negativa, mientras que en tráfico ligero lo opuesto es cierto.

De todo lo anterior, es fácil notar que en los problemas de tráfico hay dos velocidades importantes: una es la velocidad individual de los autos y otra es la velocidad  $C$  a la cual viaja la onda de densidad.

La pendiente de la línea recta que va del origen ( $\rho=0, F=0$ ) al punto sobre la curva flujo-densidad representando el valor de  $F$  en  $\rho_0$ , es la velocidad  $U$  de un carro, puesto que  $U = F/\rho$ . La pendiente de la recta tangente a la curva  $F-\rho$  en el punto  $\rho = \rho_0$  ( $C = (dF/d\rho)(\rho_0)$ ) es la velocidad de la onda de densidad (ver figura 7). Este diagrama nos es muy útil para el trazo de soluciones a la ec. diferencia parcial (15) pues sabemos que la densidad  $\rho$  es constante a lo largo de las curvas en las cuales  $X - Ct = \text{cte.}$ , esto es, rectas con velocidad  $C$  (dichas rectas son conocidas como características).

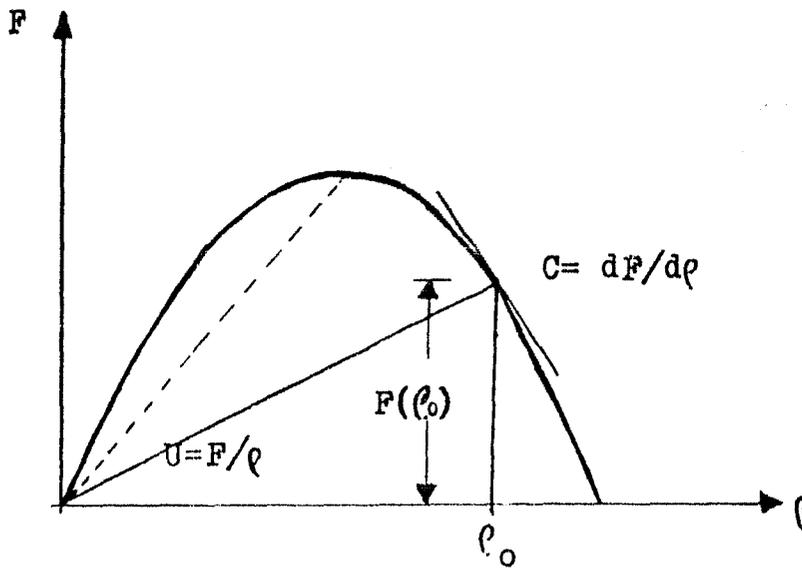
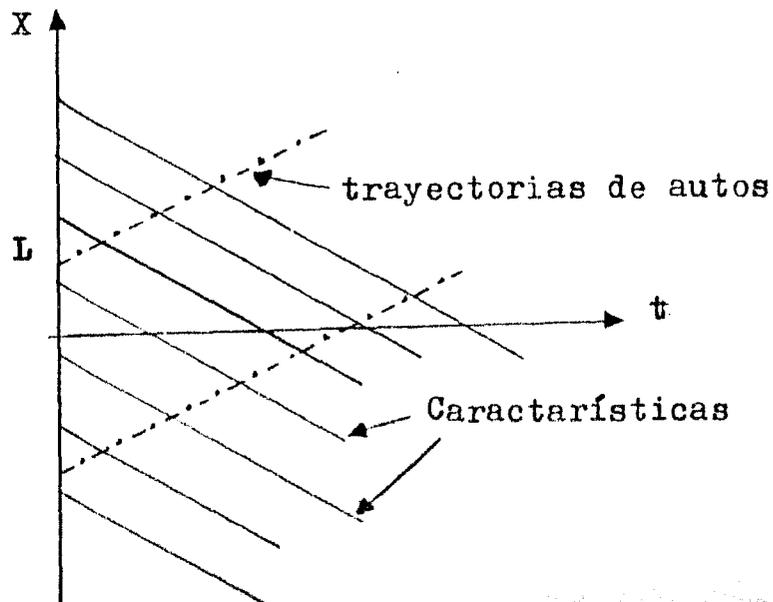


Figura 7. Diagrama F. T. : velocidad de los carros denotada por  $U$  y velocidad de la onda de densidad  $C$ .

Si trazamos esas características en un diagrama espacio-tiempo de tal forma que esas pendientes tengan las unidades de velocidad, entonces sus pendientes de las características son las mismas que la pendiente de la tangente apropiada al D.F.T.

Entonces, si la densidad es casi  $\rho_0$ , todas las características son líneas rectas paralelas a esa tangente, ver figura 8.

Figura 8. Características y trayectoria de autos determinadas por la curva  $F-\rho$ .



## B. Tráfico No-Uniforme y Método de las Características

La ecuación diferencial parcial no-lineal derivada de la conservación de los carros y el D.F.T. es, según vimos la ecuación (13) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dF}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

En esta parte nos avocaremos a estudiar el método de las características para resolver problemas de densidad de tráfico casi-uniforme.

Consideremos un observador moviéndose en alguna forma prescrita  $X(t)$ . Los cambios en el tiempo, de la densidad, cuando el observador se mueve, están dados por

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Desde el punto de vista del observador, la densidad permanecerá constante,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{dX}{dt} = \frac{dF}{d\rho}(\rho)$$

Para que esto ocurra el observador debe moverse a la velocidad  $F'(\rho)$ , es decir, a la velocidad que viaja la onda de densidad casi-uniforme.

Como esta velocidad sólo depende de la densidad, se le conoce como velocidad de onda local. En flujo no-uniforme, el observador se mueve a esta velocidad y la densidad de tráfico permanece la misma, por esta razón la velocidad de onda local para este observador permanece igual;; .

Así, cada característica es una recta como en el caso

de flujo casi-uniforme. Sin embargo, las pendientes de distintas características pueden ser diferentes.

Considere las características que inicialmente se encuentran en la posición  $X=\alpha$  y  $X=\beta$  sobre la carretera, como se muestra a continuación:

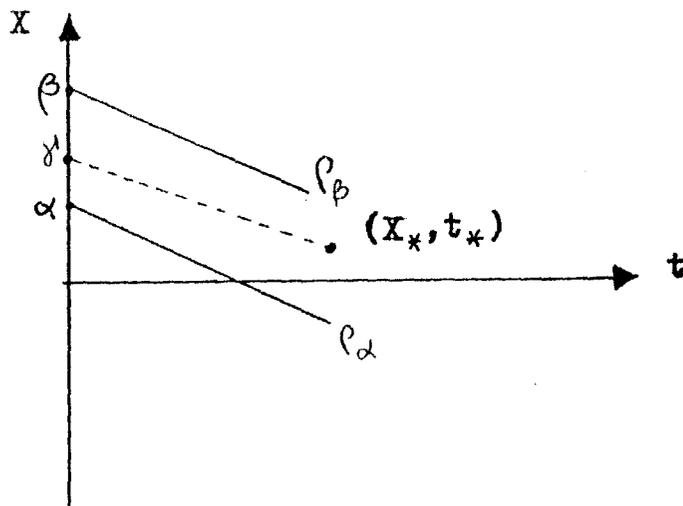


Figura 9. Uso de las características para determinar la densidad de tráfico.

En la curva  $\frac{dX}{dt} = F'(\rho)$  tenemos que  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  o  $\rho$  es constante. En  $t=0$ ,  $\rho$  es igual al valor  $\rho_\alpha$  en  $X=\alpha$ .

Entonces, en toda la característica se tiene que

$$\rho = \rho(\alpha, 0) = \rho_\alpha,$$

la cual es una constante conocida. La velocidad de onda local, determina la característica, es una constante,  $F'(\rho_\alpha)$ .

De tal forma que la característica es la recta

$$X = F'(\rho_\alpha)t + \alpha$$

y sobre ella, la densidad de tráfico  $\rho$  es constante,

$$\rho = \rho_\alpha$$

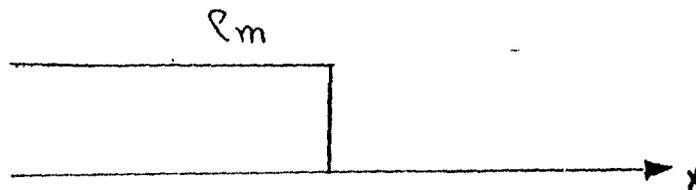
De tal manera la densidad de los carros para tiempos futuros podemos predecirla. Para determinar la densidad en

algún tiempo posterior  $t=t_*$  en un lugar posterior  $X=X_*$ , la característica que pasa por ese punto en el plano  $X-t$ , puede determinarse (ver figura 9). Si somos capaces de encontrar dicha característica, entonces la densidad será constante a lo largo de ella, la densidad del punto deseado esta dada por la densidad en la apropiada intercepción con el eje  $X$ ,

$$\rho(X_*, t_*) = \rho(X, 0).$$

Esta técnica es llamada el método de las características.

A continuación analizaremos un problema sencillo en el que tenemos una condición inicial de la forma:

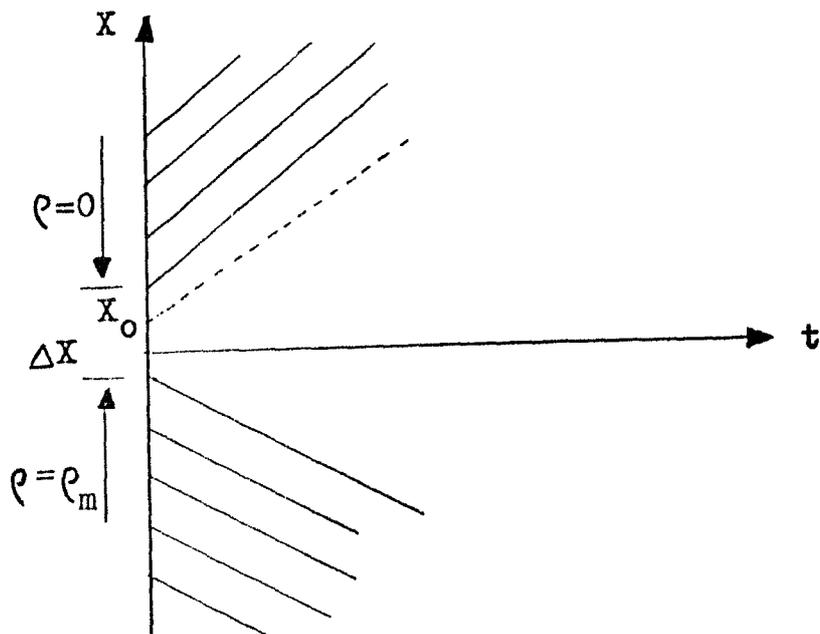


que corresponde al problema de un semáforo que cambia de luz roja a luz verde.

Para investigar este problema primero supondremos que la densidad de tráfico inicial no es discontinua sino que varía suavemente entre  $\rho=0$  y  $\rho=\rho_m$  en una distancia muy pequeña,  $\Delta X$ . Si esta distancia es suficientemente pequeña esperamos que la solución a este problema sea equivalente a la solución en el caso en el cual  $\Delta X=0$ . Si  $\Delta X \neq 0$ , las características a lo largo de las cuales  $\rho=0$  y  $\rho=\rho_m$ , pueden trazarse en el diagrama  $X-t$ . Sin embargo, debe haber características las cuales emanen cerca del origen  $(0,0)$ . La densidad  $\rho$  es constante a lo largo de la recta  $X = \frac{dF}{d\rho} t + X_0$  trazada

en líneas punteadas en la figura 10, donde  $X_0$  es la posición de la característica en  $t = 0$  y es muy pequeña.

Figura 10. Diagrama espacio-tiempo para la rápida transición de la densidad de tráfico.



Como  $\rho$  es continua según suponemos, debe tomar valores entre  $\rho=0$  y  $\rho=\rho_m$ , la velocidad  $dF/d\rho$  esta siempre entre los valores correspondientes a  $\rho=0$  y  $\rho=\rho_m$ .

Según esto, hemos trazado algunas características en la figura 11. Las características tienen distintas pendientes. Nótese que estas se ven como un abanico que se abre (de adentro hacia afuera).

Si la densidad de tráfico inicial la consideramos discontinua, entonces obtendríamos la densidad desconocida en el intervalo en cuestión, por consideración del límite del problema de la condición inicial continua cuando  $\Delta X \rightarrow 0$ .

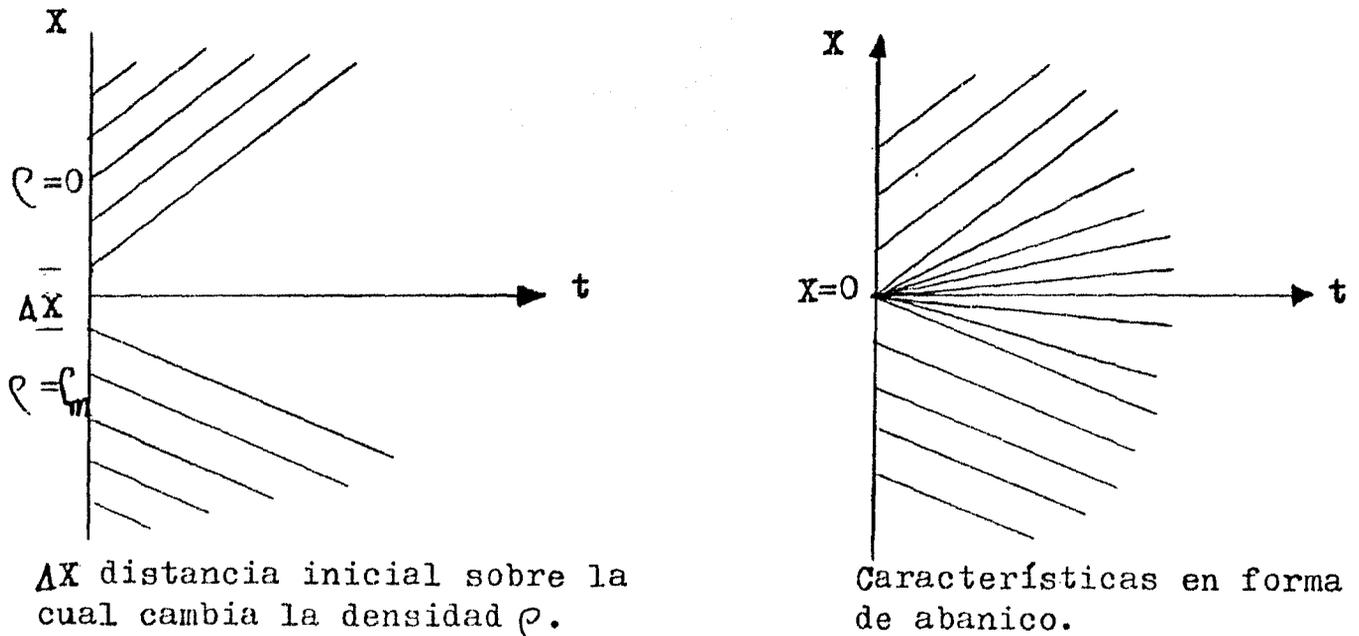


Figura 11. Método de Características, discontinuidad de la densidad.

El resultado de hacer esto se reduce a que las características no correspondientes a  $\rho=0$  o  $\rho=\rho_m$  salen de  $X=0$  en  $t=0$ . Esto es, como que a través de la discontinuidad ( $X=0$ ), todas las densidades de tráfico entre  $\rho=0$  y  $\rho=\rho_m$  son observadas.

Las características son llamadas "abanico" (representando una onda de expansión).

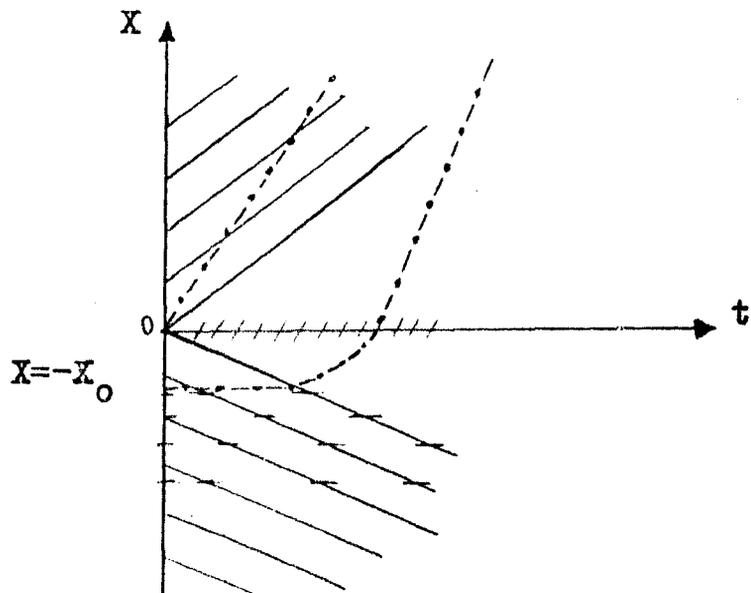
Por último queremos hacer notar que la técnica gráfica basada en la curva flujo-densidad puede usarse también para determinar la densidad de tráfico en tiempos futuros así como para aproximar la trayectoria de cada uno de los autos.

En efecto, puesto que las características son isoclinas de la ecuación diferencial  $dx/dt = U(x,t)$ , usando un diagrama  $X-t$  podemos trazar las trayectorias de los autos, pues pequeñas líneas horizontales (indicando ausencia de movimiento)

pueden trazarse con pendientes  $U(\rho)$ .

Por ejemplo, en  $X=0$ , la densidad es aquella correspondiente a la capacidad del camino, y la velocidad de un carro en esa posición la marcamos con una línea recta punteada sobre el D.F.T. (7) La pendiente de esta recta es también marcada sobre el plano  $X-t$  dondequiera que la densidad tenga ese valor, como se muestra en la figura 12. Trazando pequeñas líneas y puntos, la trayectoria de un auto puede estimarse para este problema, así como para aquellos en los que no es posible dar una solución analítica.

Figura 12.



#### 4. INTRODUCCION DE SHOCK'S EN EL DIAGRAMA ESPACIO-TIEMPO.

##### A. Tráfico Discontinuo.

Imaginemos una situación en la cual inicialmente el tráfico se hace más y más pesado conforme se avanza a lo largo del camino. Suponemos que  $\rho \rightarrow \rho_0$  cuando  $X \rightarrow +\infty$  y

$\rho \rightarrow \rho_1$  cuando  $X \rightarrow -\infty$ , donde  $0 \leq \rho_1 < \rho_0 < \rho_m$ .

¿Qué es lo que predice nuestro modelo matemático?

La onda de densidad para el tráfico más pesado  $\rho_0$  se mueve a velocidad  $(dF/d\rho)(\rho_0)$ , la cual es menor que la velocidad de la onda correspondiente al tráfico más ligero.

Eventualmente esas dos familias de características se intersectarán (ver figura 13). En cualquier situación en la cual el tráfico se hace más denso conforme se avanza en el recorrido, las características se intersectarán.

En los puntos donde ocurre una intersección, la teoría predice que la densidad es  $\rho_0$  y  $\rho_1$  al mismo tiempo, claramente esto es imposible.

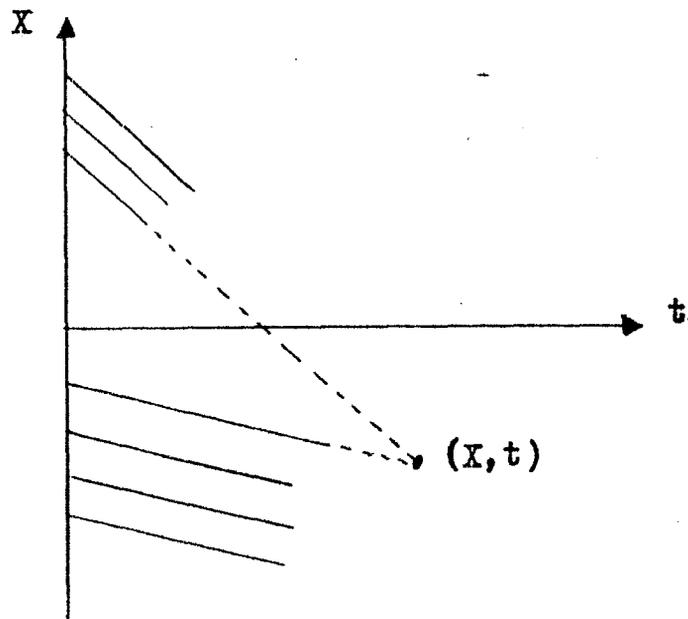


Figura 13. Intersección de Características.

Más claro, si esquematizamos rigurosamente la densidad para diferentes tiempos basándonos en el método de las características, predecimos que la densidad de tráfico será una función "multivaluada" de la posición y esto carece de sentido para nosotros; la densidad debe ser una función uni-valuada de

la posición. Así pues, debemos resolver esta dificultad.

Puesto que el método de características está matemáticamente justificado, es la ecuación diferencial parcial misma la que no es enteramente válida para nuestro problema real.

Entonces debemos modificar las suposiciones y aproximaciones que hicimos en nuestra derivación de la ec. diferencial parcial del flujo de tráfico.

Una manera de resolver esto es suponer que ahora la velocidad depende del gradiente de la densidad de tráfico  $\rho_x$ , además de depender de la densidad  $\rho$ . Con esta modificación, la dificultad de valores múltiples asociada con el método de características desaparece; las variables de tráfico permanecen uni-valuadas. Sin embargo, esto resulta muy complicado por lo tanto es preferible buscar otra forma de salvar el problema.

Otra manera sería, quitando, donde sea necesario, la suposición de que la densidad de tráfico y el campo de velocidades son funciones continuas de la posición y el tiempo.

Así se supondrá que las variables en cuestión pueden ser discontinuas en alguna posición  $X_s$  desconocida en el espacio y que esta discontinuidad puede propagarse en el tiempo,  $X_s(t)$ . A esta discontinuidad se le llama onda de shock o simplemente shock.

El flujo relativo al shock moviéndose sobre un lado de este, es igual al flujo relativo sobre el otro lado.

De esto se encuentra que la velocidad del shock obedece a la ecuación

$$dx_s / dt = \frac{F(x_+, t) - F(x_-, t)}{\rho(x_+, t) - \rho(x_-, t)}$$

( ver referencia 4 ).

El denominador es la diferencia entre las densidades sobre ambos lados del shock. Este salto se denota por  $[ \rho ]$ ,

$$[ \rho ] = \rho(x_+, t) - \rho(x_-, t) .$$

Similarmente el numerador es el salto en el flujo de tráfico a través de la discontinuidad  $[ F ]$ ,

$$[ F ] = F(x_+, t) - F(x_-, t) .$$

Así, el shock tiene velocidad dada por la ecuación

$$dx_s/dt = [ F ] / [ \rho ] \quad (18)$$

En puntos de discontinuidad esta condición de shock reemplaza el uso de la ecuación diferencial parcial, la cual es válida en otra parte.

Note que la pendiente de la línea recta conectando los puntos sobre la curva flujo-densidad que representan esas dos situaciones de tráfico ( $\rho = \rho_+$  y  $\rho = \rho_-$ ) tiene exactamente el valor de la velocidad del shock como muestra la figura 14 , (la velocidad puede ser positiva o negativa) .

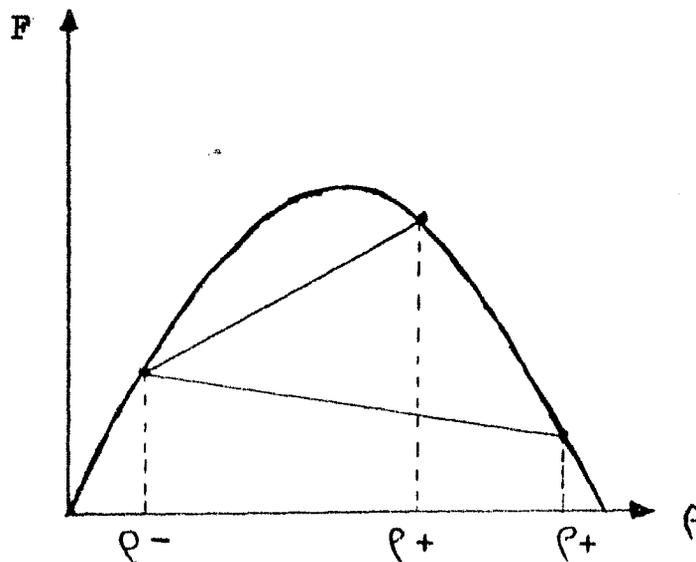


Figura 14. Curva flujo-densidad: determinación gráfica de la velocidad del shock.

A continuación tenemos un diagrama espacio-tiempo interesante que se obtiene de un problema en el que una densidad constante  $\rho_0$  es detenida en  $X=0$  por un semáforo en luz roja. Debemos imponer entonces las condiciones  $\rho = \rho_0$  en el eje  $X$  y  $\rho = \rho_m$  en el eje  $t$ .

Sobre el diagrama  $F-\rho$  (ver figura 15) están trazadas líneas asociadas con (1) la velocidad de la onda de densidad correspondiente a  $\rho_m$ ; (2) la velocidad de la onda de densidad correspondiente a  $\rho_0$ ; (3) la velocidad de los carros correspondiente a  $\rho_0$ ; y (4) la velocidad de shock entre el flujo uniforme  $\rho_0$  y el tráfico tope-con-tope  $\rho_m$ .

En dicho diagrama podemos observar que la pendiente de la recta tangente a la curva  $F-\rho$  en el punto  $F(\rho_0)$ , es positiva y que contrariamente, la pendiente de la recta tangente al punto  $F(\rho_m)$  es negativa.

Si trazamos las características correspondientes en el plano  $X-t$ , estas se tendrán que intersectar necesariamente (ver línea punteada en el diagrama 15); esta dificultad se soluciona entonces con una recta de shock cuya pendiente se muestra en el D.F.T. con el número (4).

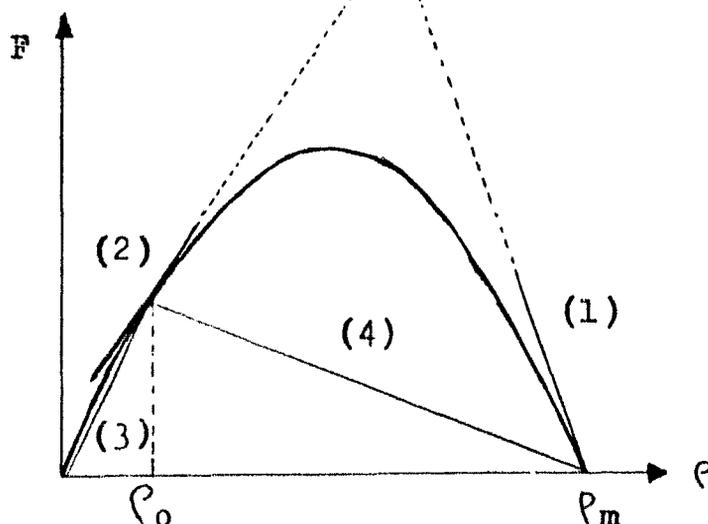


Figura 15. Varias velocidades importantes.

La velocidad de los autos que se encuentran en la región del camino donde la densidad es  $\rho_0$ , es mayor que la de los autos en la sección con densidad  $\rho_m$ , pues estos últimos tienen velocidad cero, según podemos observar de la figura 16 donde se encuentran las características (1).

El comportamiento del tráfico según los diagramas 15 y 16 puede resumirse en lo siguiente (observar trayectoria de un auto marcada en la figura 16 con punto y raya):

Los autos inicialmente se mueven con una cierta velocidad y después de transcurrido un tiempo, el tráfico se ha aglomerado tanto que los conductores se ven obligados a reducir su velocidad a cero, esto es quedan totalmente parados cuando la densidad en el camino es  $\rho_m$ .

En lo subsecuente, la determinación de la densidad de tráfico y trayectorias de autos, se hará por el método gráfico que como acabamos de ver, resulta muy adecuado y sencillo de interpretar.

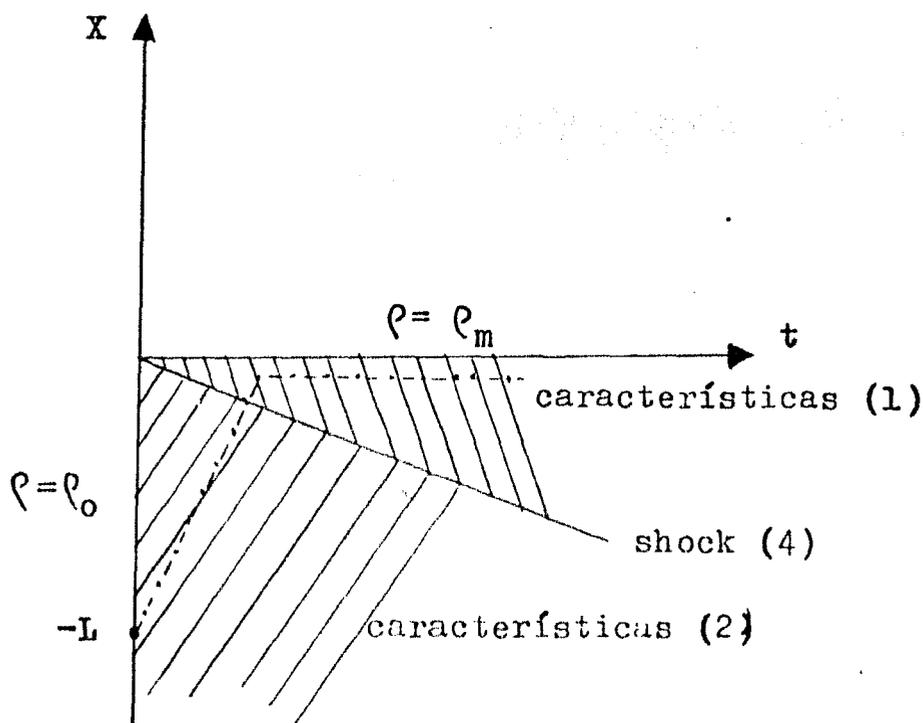


Figura 16. Determinación gráfica de la densidad

## CAPITULO II

ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE  
TRAFICO EN UN CASO ESPECIAL.

En este capítulo, se trata de analizar el comportamiento del tráfico que circula por un camino en el cual las características de un tramo son diferentes a las del resto del camino. Por ejemplo, este tramo puede estar mojado o puede representar una subida o una bajada en el camino, etc.

Para fijar nuestra atención en una situación concreta, supondremos que este tramo es una subida, pero muchas otras situaciones pueden ser descritas exactamente con el mismo modelo que desarrollaremos a continuación.

Por simplicidad imaginemos la sección del camino de nuestro interés de longitud infinita, como se muestra en la figura 17, donde  $x=0$  denota la posición del camino en la que termina la parte plana y empieza la subida o inversamente, termina la subida y empieza la parte plana.

Para introducir en el modelo matemático este cambio en las propiedades del camino, tenemos que modificar la relación  $F$  con la densidad de coches  $\rho$ .

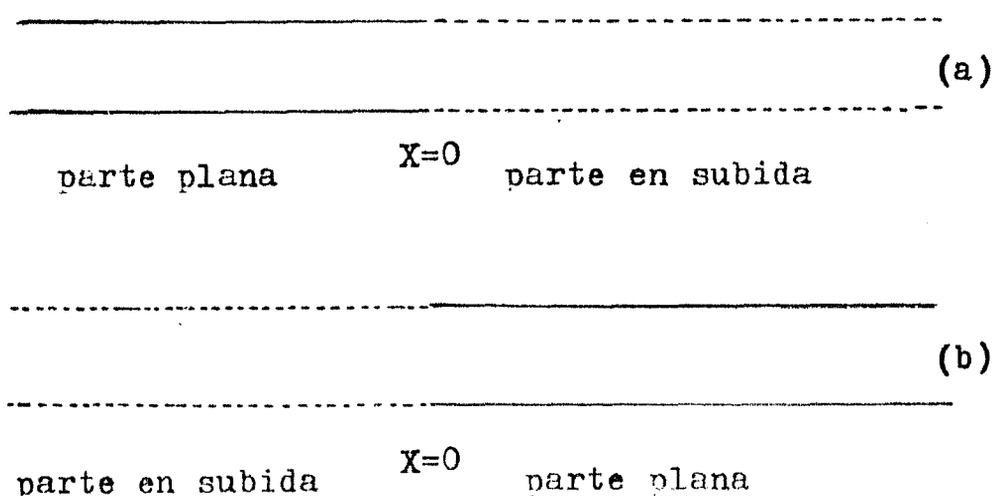


Figura 17. Configuración del Camino.

Esperamos que en una subida, la velocidad máxima de los carros ( $U_m = F'(0)$ ) se reduzca, pero que la densidad máxima cuando los coches están totalmente parados  $\rho_m$ , sea igual con respecto a las condiciones normales del terreno.

Así, la gráfica de la función  $F$  se modificará como se muestra en la figura 18. En esta, la gráfica remarcada con una línea gruesa representa la relación  $F(\rho)$  para el tráfico en la parte de terreno normal y la punteada representa a  $F(\rho)$  para el tráfico en la subida (o en la sección del camino con problemas)

Desde luego, qué tan "comprimida" se encuentre esta gráfica con respecto a la normal será una medida de que tan empinada está la subida (o que tan mojado está el terreno).

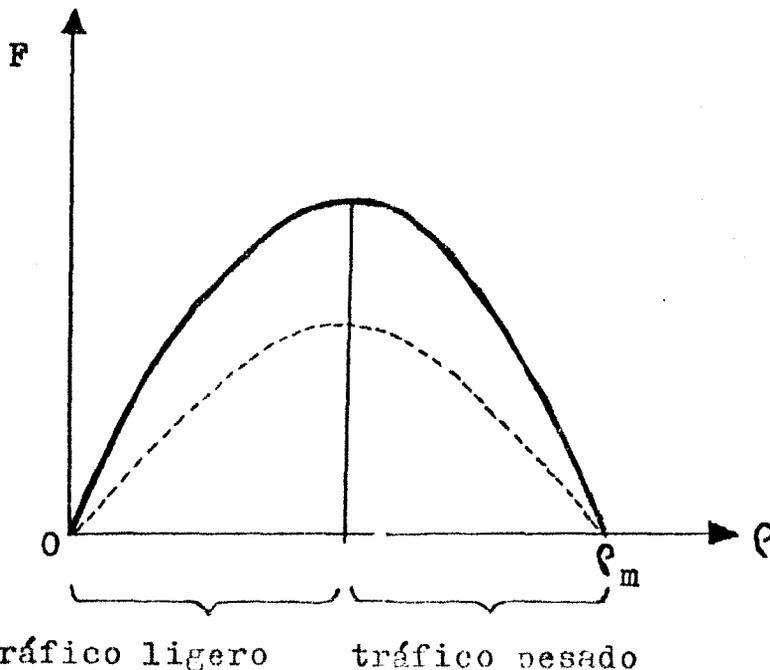


Figura 18. La línea gruesa representa la relación  $F(\rho)$  en la parte plana del camino y la punteada en la parte de subida.

## 1. DENSIDAD INICIAL CONSTANTE.

Para comenzar con nuestro análisis, consideraremos el caso más sencillo, aquel en el que inicialmente la densidad a todo lo largo del camino es constante e igual a  $\rho_0$ .

Anticipándonos un poco a que tendremos diferentes tipos de soluciones dependiendo de los valores de  $\rho_0$ , dividiremos la región de posibles valores de  $\rho$  en cuatro zonas: I y II en tráfico ligero, y III, IV para tráfico pesado.

Dichas zonas pueden observarse en el siguiente diagrama:

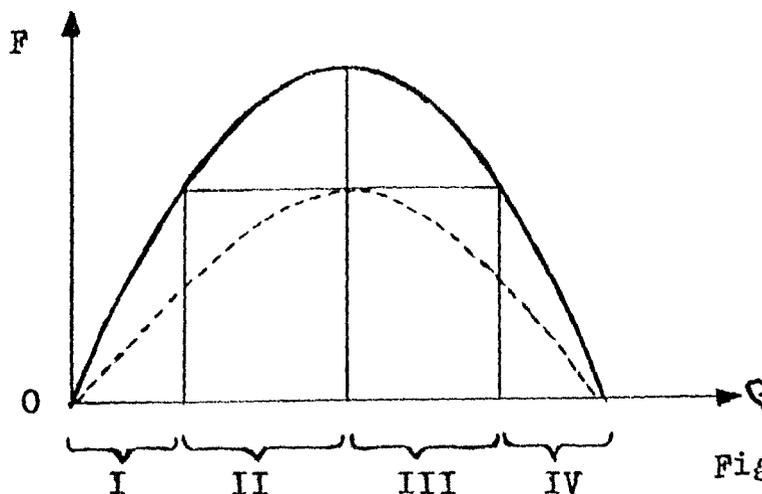


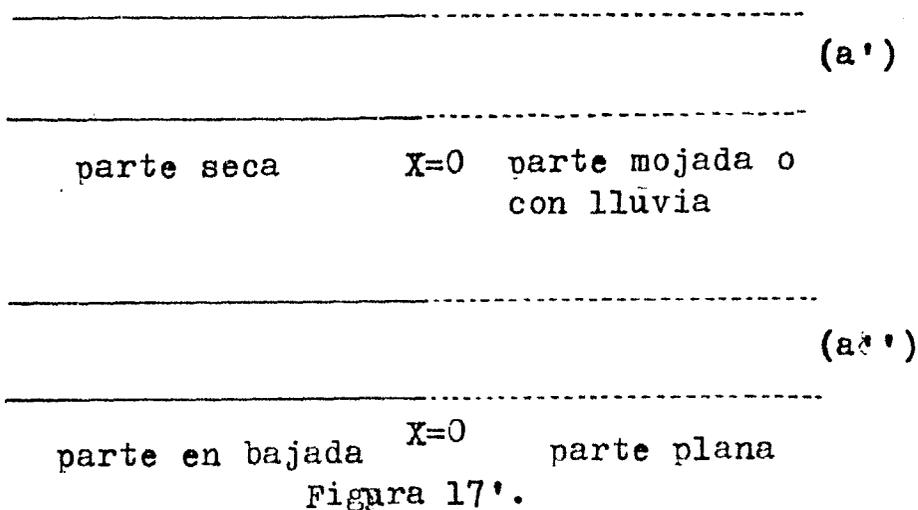
Figura 19.

### A. Análisis del Tráfico para cierta Disposición del camino.

Teniendo en mente todo lo antes dicho, iniciemos el análisis del comportamiento del tráfico, consideremos primero que la disposición del camino es la que se muestra en la figura 17 (a). Esta nos implica que en el diagrama espacio-tiempo, habrá dos regiones.

Una, el primer cuadrante ( $X > 0$ ) en el cual el flujo obedecerá la gráfica punteada en la figura 18, y otra el cuarto cuadrante ( $X < 0$ ) en el cual el flujo seguirá la relación normal de  $F(\rho)$ . Aquí estamos suponiendo que la velocidad máxima que los coches pueden alcanzar en la región  $X > 0$  es menor que la velocidad en la región  $X < 0$ .

Esto entonces, no sólo describe la situación de la figura 17 (a) sino también las siguientes situaciones:



Nosotros nos concentraremos en interpretar solamente los resultados dentro del contexto de la figura 17 (a).

Empecemos con el caso más simple en el que  $\rho_0$  se encuentra en la región de tráfico pesado, en la zona III que se muestra en el diagrama de la figura 19.

Sabemos, del capítulo anterior, que si  $\rho_0$  es la densidad asignada a un punto, la pendiente a la curva del Diagrama Fundamental de tráfico en el punto  $\rho = \rho_0$  (esto es,  $c = dF/d\rho$  evaluada en  $\rho_0$ ) nos dará en el diagrama espacio-tiempo la

pendiente de la característica que emana de ese punto.

En la situación que estamos considerando, las características que salgan del eje X positivo tendrán una pendiente dada por el diagrama que representa la subida y las que salgan del eje X negativo, su pendiente se obtendrá del diagrama normal de flujo. Así tendremos que:

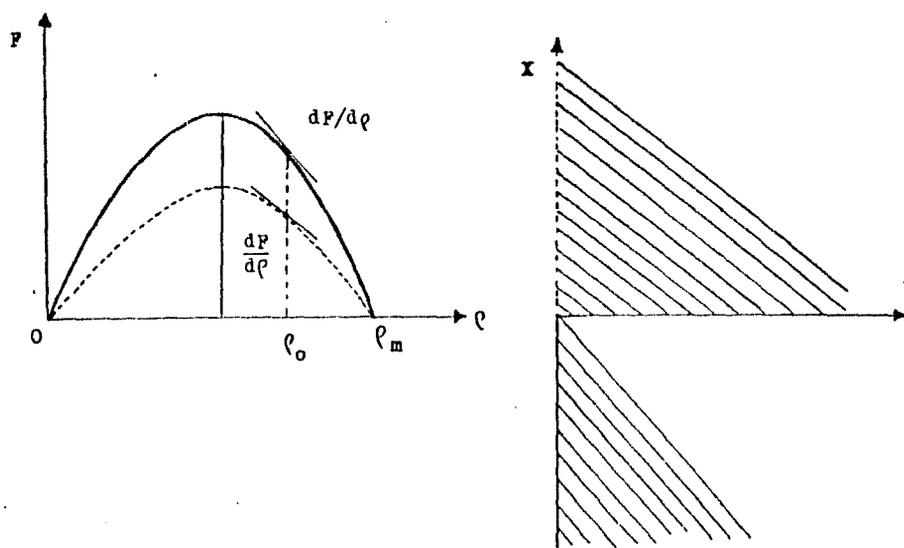


Figura 20. Diagrama Fundamental y Características determinadas por las curvas flujo-densidad.

Observamos de esa figura que en el diagrama espacio-tiempo nos ha quedado una región en blanco, ¿qué sucede en esa región ?.

Las características que salen del eje X positivo, llegan al eje t y definen en él una densidad y un flujo.

Estas no pueden ser continuadas ya que el eje t es una frontera de transición entre dos regiones. De ahí, deben salir otras características hacia abajo, correspondientes ahora al diagrama que representa la parte plana del camino.

Luego, surge la siguiente pregunta:

¿ Qué valores deben llevar estas características?.

De manera intuitiva, esperamos que en el eje  $t$  ( $X=0$ ) se conserve el flujo de autos, esto es, los coches que abandonan el tramo plano deben ser los mismos que veamos que empiezan a subir la parte inclinada de la carretera.

Uno puede convencerse mejor de esto, si pensamos al eje  $t$  como un shock (donde ocurren discontinuidades) el cual claramente tiene velocidad cero (es horizontal su pendiente) y de la fórmula 18 del capítulo I necesariamente obtenemos que  $[F] = 0$ , o sea que el flujo es igual en los dos lados del eje.

Puesto que en la parte del camino donde  $X > 0$  el flujo es igual a  $F(\rho_0)$  (de la curva punteada), en la parte negativa del eje  $X$  debemos tener ese mismo flujo inmediatamente abajo del eje  $t$ . De la figura 21 notamos que hay dos puntos,  $P$  y  $P'$  en la curva que representa al flujo normal (curva en línea gruesa) y que satisfacen que el flujo sea igual a  $F(\rho_0)$ .

La pendiente en alguno de esos puntos, nos da la información de cómo son las características en la región blanca (tienen la misma pendiente). Pero, ¿cuál es el punto que debemos escoger?.

Si tomamos el punto  $P'$ , las pendientes de las características que obtendremos deben ser positivas y emanan del eje  $t$ . Debido a esto, la información que de ellas se obtiene no sería para tiempos futuros o posteriores a un cierto  $t=t_0$ , sino para tiempos anteriores a éste, lo cual resulta físicamente imposible porque no se puede influenciar el pasado.

Debemos entonces elegir al punto P, la pendiente de la recta tangente a la curva flujo-densidad en él, nos dará la información que necesitamos.

Así, obtenemos los siguientes diagramas :

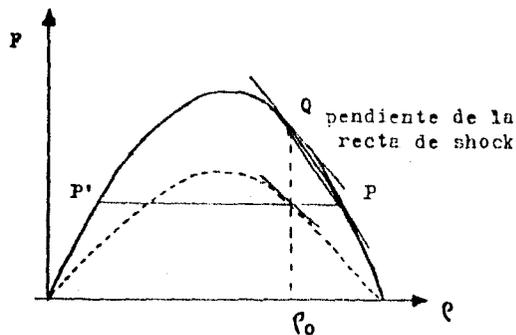


Figura 21.

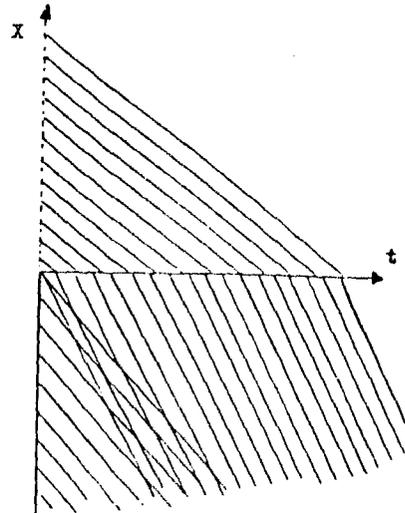
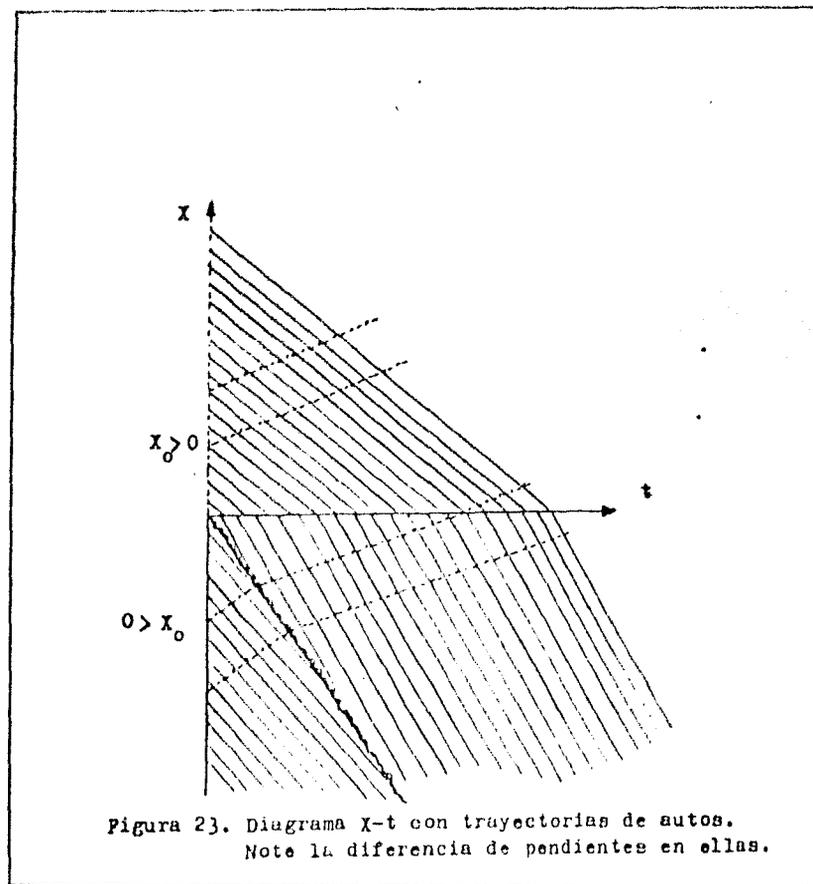


Figura 22.

Aquí se observa que en la región ( $X < 0$ ) del camino , las características se intersectan, lo cual se soluciona con la formación de un shock. Según vimos en el capítulo I, podemos encontrar la trayectoria de este shock, a partir del diagrama fundamental, considerando la pendiente de la recta que une los puntos Q y P en el diagrama de la figura 21.

En el diagrama espacio-tiempo trazamos una recta saliendo del origen, con esa misma pendiente; esta recta nos divide la región plana del camino en dos secciones donde la densidad es distinta.

El diagrama resultante sería de la forma siguiente:



Las curvas quebradas dibujadas con punto y raya (.-.-) dan las trayectorias de los autos.

Observando este diagrama podemos dar las siguientes interpretaciones :

En el tramo plano, antes de llegar a la subida, aparece una región de densidad mayor que  $\rho_0$  y la cual crece con el tiempo.

De las trayectorias de algunos autos que trazamos en el diagrama de la figura 23 podemos notar que el auto que está en una posición  $X_0 > 0$  inicia su recorrido con una cierta velocidad y continúa con esa misma, sin variarla. En cambio, al observar la trayectoria de los autos que inician su recorrido en una posición  $X_0 < 0$ , vemos que tienen una velocidad mayor en comparación con la de los autos que están en posiciones del camino en subida. Después de un tiempo, este auto se encuentra con la línea de shock, la cual provoca que baje su velocidad

considerablemente ya que la densidad de autos es mayor.

Los autos se aglutinan atrás de la subida, pero al llegar a ella pueden incrementar su velocidad a la correspondiente para la subida.

El lector debe tratar de interpretar la figura 23, por ejemplo, dentro del contexto descrito en el diagrama de la figura 17'(a) .

Para la distribución de la figura 17 (a), el segundo caso, en el que estamos en la zona IV, es fácil ver que es igual cualitativamente al anterior.

A continuación, consideramos el caso en que  $\rho_0$  está en la región de tráfico ligero, en la zona I de la figura 19.

Con estas condiciones el diagrama fundamental y las características correspondientes se ven como sigue:

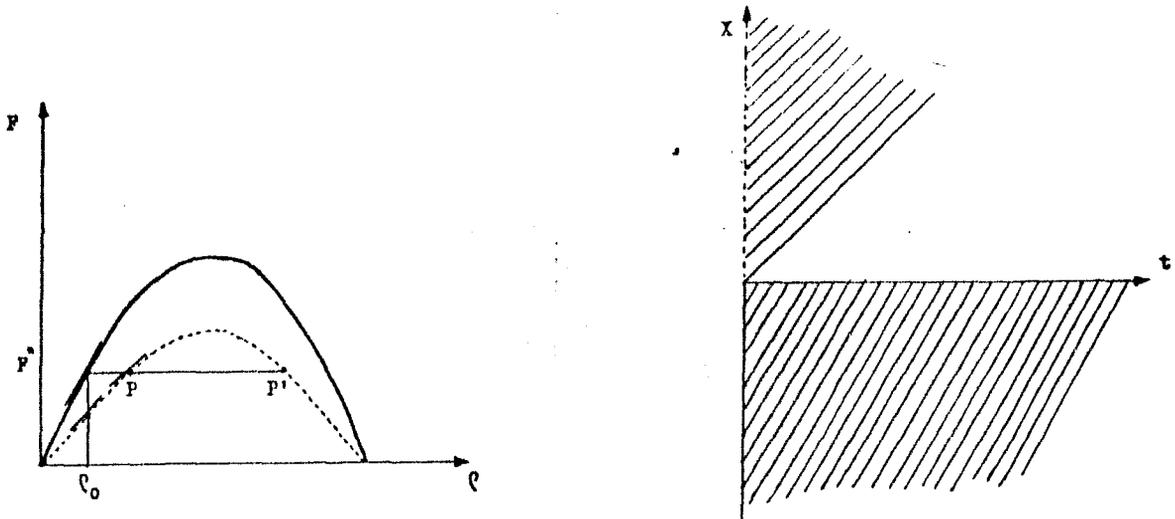


Figura 24.

Según observamos, nuevamente nos ha quedado una región en blanco; sabemos de la discusión del caso anterior que las características continúan en la parte  $x > 0$  del diagrama con la misma cantidad de flujo que había en la parte  $x < 0$ .

Del D.F.T. de la figura 24, vemos que en la curva que representa al flujo en la parte plana del camino, el valor de éste para una densidad  $\rho_0$  es  $F^* = F(\rho_0)$ , y que ese mismo valor de flujo, se alcanza, en la curva que representa al flujo en la sección del camino en subida, para la densidad correspondiente al punto P (ver figura 24).

Notemos que el punto P' en esa misma figura, también tiene el mismo valor  $F^*$ , sin embargo, como se discutió en el caso anterior, este punto nos proporciona unas características de pendiente negativa que dan información para tiempos pasados y no para futuros, lo cual no es realista.

Así, las características faltantes en nuestro diagrama X-t, tomaran su pendiente de la de la recta tangente a la curva flujo-densidad en el punto P; entonces obtenemos el esquema siguiente:

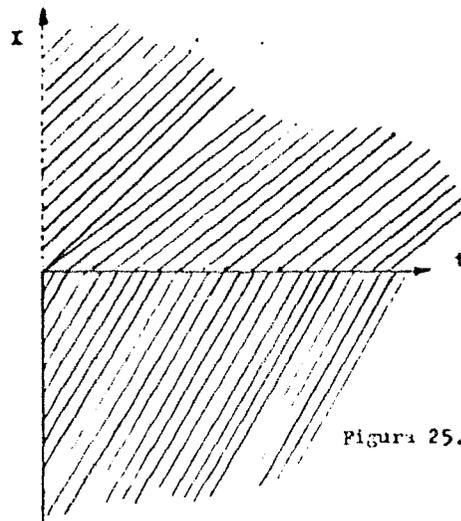
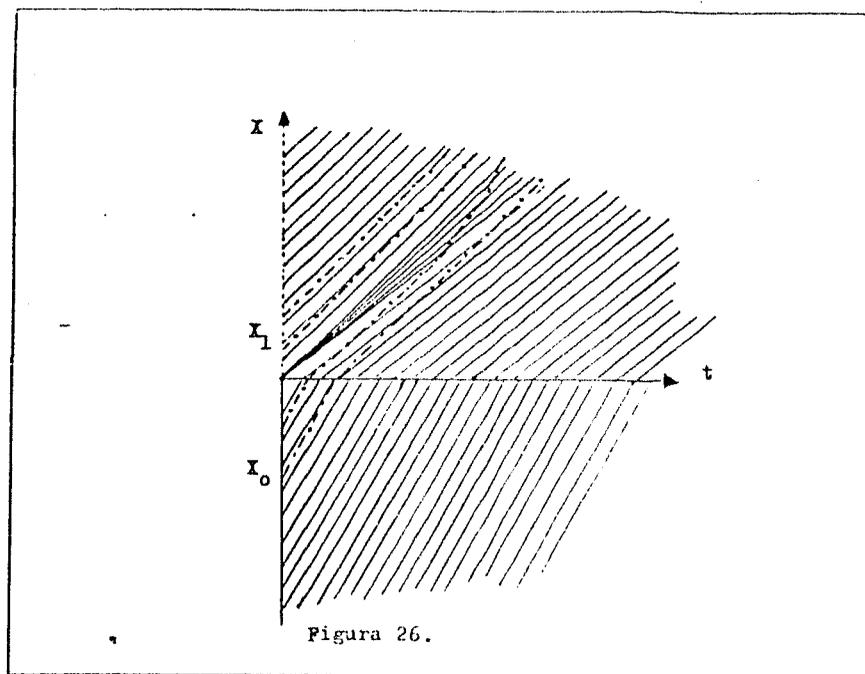


Figura 25.

Ya que, en este caso la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es menor que en el punto correspondiente a la densidad  $\rho_0$ , nos queda un hueco en el diagrama.

La pregunta ahora es ¿cómo llenarlo? ; recordando un poco el análisis que se hizo en la última sección del capítulo I , podemos ver que debido a la similaridad, en el hueco deben salir unas características en forma de abanico que representen a la onda de expansión en esa región, pues todas las densidades de tráfico entre  $\rho = \rho_0$  y la densidad correspondiente al flujo en el punto P, estan concentradas en el origen. Así, obtenemos el siguiente diagrama X-t para este caso:



Las trayectorias trazadas en ese diagrama nos permiten saber como se lleva a cabo el recorrido de los autos .

Para la distribución de densidad con  $\rho_0$  en la región de tráfico ligero y el camino como en la figura 17 (a), los autos iniciando su recorrido en un punto  $X_0$  sobre la parte plana del camino, la velocidad inicial es grande pero, después de pasar la posición  $X=0$  debido al aumento de la densidad, se ven obligados a disminuirla (su velocidad); después de cierto tiempo los autos llegan a la región de características en abanico, donde la densidad va disminuyendo poco a poco hasta ser

de nuevo igual a la densidad inicial  $\rho_0$ , en esta región los automovilistas pueden aumentar paulatinamente su velocidad hasta alcanzar una más "rápida", sin embargo será inferior a aquella con la iniciaron su recorrido ya que ahora van de subida.

Los autos que salen de una posición  $x_1 > 0$  del camino realmente no tienen problemas, la velocidad con que inician su recorrido es la misma con la que continúan para tiempos posteriores a  $t=0$ .

Por último, pasemos a considerar otro caso, suponiendo de nuevo el camino como antes. Pensemos que la densidad  $\rho_0$  se encuentra en la región de tráfico ligero y además en la zona II (ver figura 19).

En este caso, los diagramas  $F-\rho$  y  $X-t$  se ven como sigue:

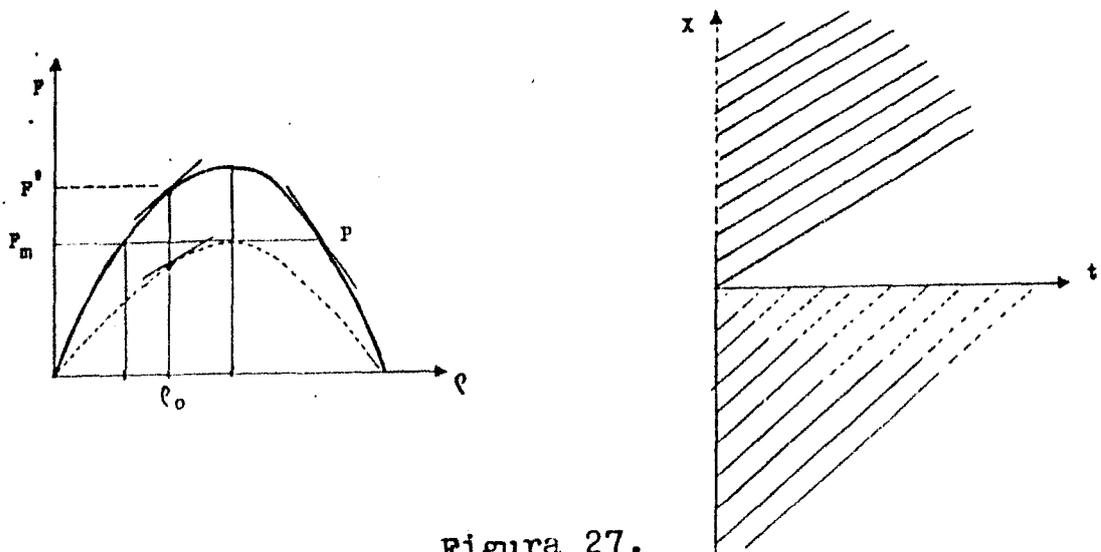


Figura 27.

Al igual que antes, nos ha quedado una región en blanco, la cual hay que completar. ¿Qué sucede en esa región?

Pues, lo que observamos es que las características que salen del eje  $X$  negativo, llegan al eje  $t$  y definen en estas ciertas condiciones. Como ya vimos en un caso pasado, el flujo debe ser el mismo en los dos lados del eje  $t$ , así, tenemos que encontrar la densidad de coches en subida que nos dé el mismo flujo que el que determinan las características que vienen de abajo del eje  $t$ . Sin embargo, (ver figura 27) este flujo tiene un valor  $F^*$  y se puede ver que no es posible tener este mismo valor de flujo en subida. Esto implica que las características que salen del eje  $X$  negativo no pueden llegar hasta el eje  $t$ ; pero ¿qué flujo habrá entonces en  $X=0$ ?

Si  $\rho_0$  estuviera en la transición entre la zona I y II tendríamos que en  $X=0$  el flujo sería el máximo que se puede alcanzar en subida.

Si ahora, nos desplazamos un poquito dentro de la zona II, esperamos que este flujo máximo se conserve en el eje  $t$  ya que no hay otra posibilidad. Así pues, en este caso debemos imponer la condición de que  $F=F_m$  en el eje  $t$  (en subida).

Hay otra razón para ver que la condición  $F=F_m$  sobre el eje  $t$  es plausible.

Las características que tratan de llegar al eje  $t$  vienen con un flujo  $F^* > F_m$  y esto nos dice que la restricción que estas ponen en el eje  $t$  es que se permite a lo más el flujo  $F^*$ . Pero como en el otro lado sólo se puede llegar al flujo  $F_m$  (en subida) entonces este se impondrá en la decisión del flujo. Así, obtenemos un diagrama  $X-t$  como el que sigue:

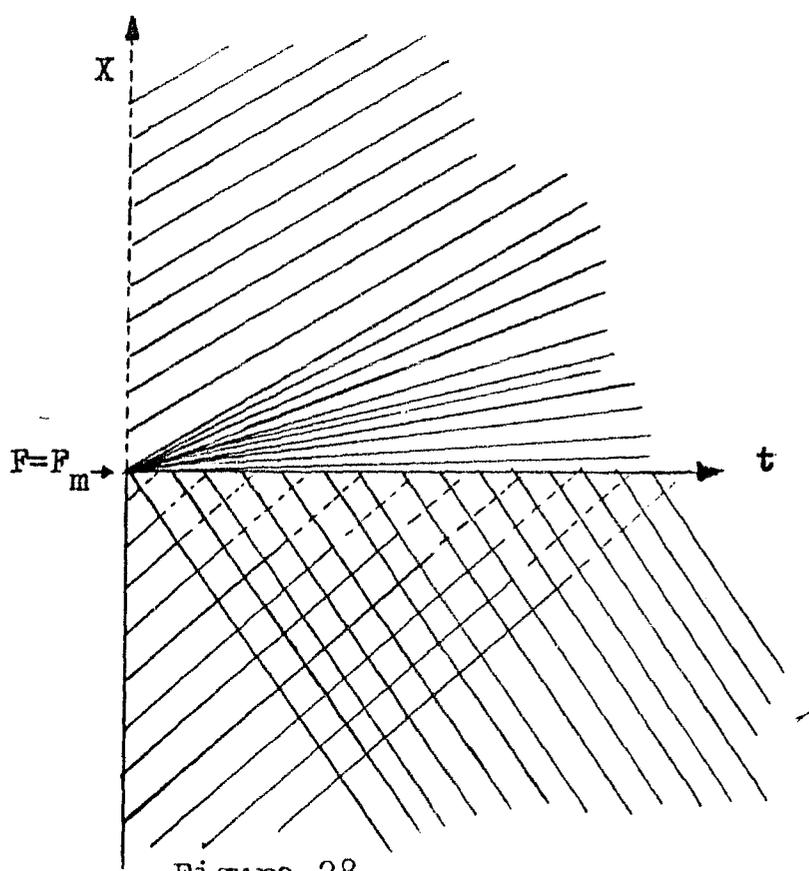


Figura 28.

En éste, la región en blanco la completamos con un abanico como en el caso de la zona I y se han añadido en  $x < 0$ , características que salen del eje  $t$  con una pendiente tal que se tenga un flujo igual a  $F_m$  pero sobre el diagrama que representa al flujo en la parte plana del camino (punto P en la figura 27). La intersección de las características que se observa en este caso, se compone con un shock como en el caso de la zona III, entonces el diagrama espacio-tiempo completo se ve como sigue:

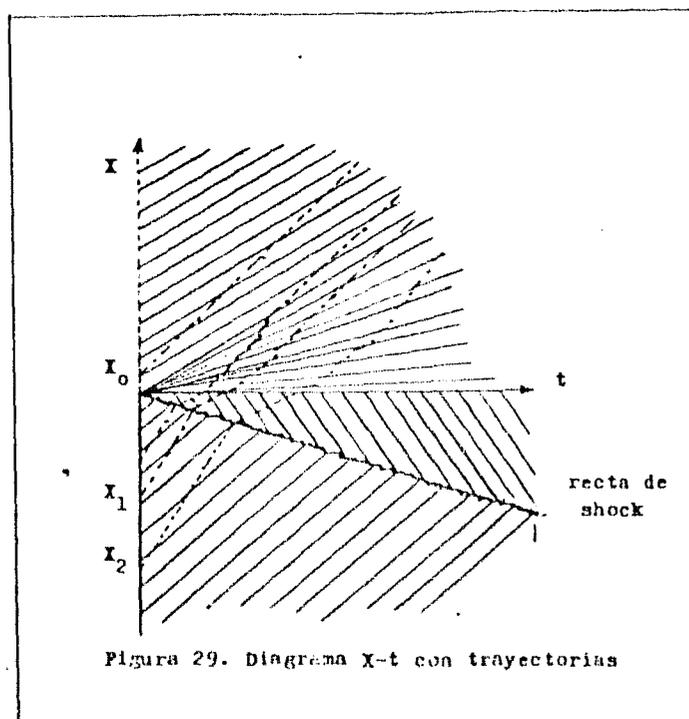


Figura 29. Diagrama X-t con trayectorias

En dicho diagrama hemos trazado las trayectorias de algunos carros y observamos que aquellos que salen de la parte  $X < 0$  del camino, inician su recorrido con velocidad considerablemente grande, pero transcurrido cierto tiempo se ven en la necesidad de disminuirla pues atraviesan la recta de shock; es claro que esta zona es problemática para el avance de los autos.

Del mismo diagrama notamos que, en cuanto los carros empiezan a subir, el tráfico se hace más fluido y pueden elevar su velocidad poco a poco.

En contraste con lo anterior, un auto que se encuentra en la región  $X > 0$ , inicialmente tiene una velocidad considerable la cual conservará en el tiempo sin ningún problema.

### B. Análisis del Comportamiento del Tráfico para otra Configuración del Camino .

Ahora veamos que sucede con el caso en que el camino tiene la forma que se muestra en la figura 17 (b), esta situación es equivalente a las siguientes:

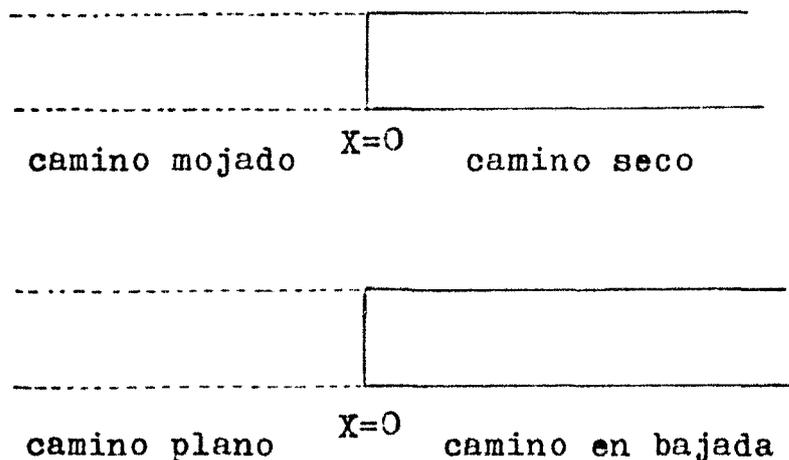


Figura 30.

En ambas, adelante es más rápido el tráfico.

Comencemos con el caso en que  $\rho_0$  está en la zona II de la figura 19; el diagrama fundamental en este caso se ve como sigue :

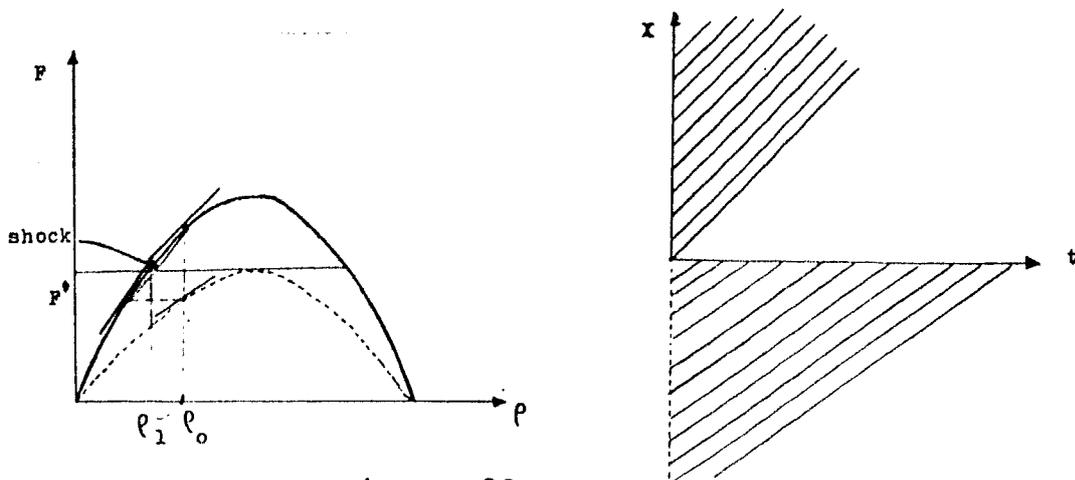


Figura 31.

También en este caso, tenemos una zona en blanco en la cual debemos poner características.

Para tener un flujo continuo en el eje  $t$ , tenemos que escoger una densidad  $\rho_1$  que tenga el mismo flujo  $F^*$  en la parte plana, el cual se tiene para la densidad  $\rho_0$  en subida (ver figura 31). Estas características que salen del eje  $t$  interseccionarán las que salen del eje  $X$  positivo y necesitaremos introducir un shock en el primer cuadrante.

Si ahora, deseamos saber cual será el comportamiento de un auto que sale de una determinada posición del camino, basta trazar las trayectorias sobre el diagrama espacio-tiempo y luego interpretar los cambios de velocidades .

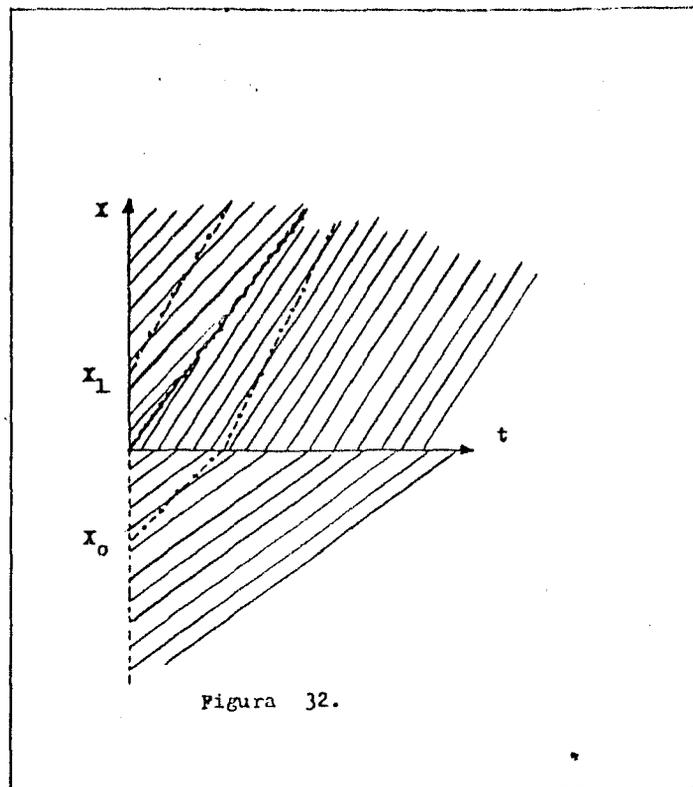


Figura 32.

En la figura 32 hemos trazado las trayectorias de dos autos que salen, uno de la posición  $x_0 < 0$  del camino y otro de la posición  $x_1 > 0$ .

El primer auto (el que sale de  $x_0$ ) tiene una velocidad inicial menor que el que sale de  $x_1$ , podemos notar además, que después de la posición  $x=0$ , este primer auto aumentará su velocidad considerablemente ya que la densidad  $\rho_1$  es pequeña; por la pendiente de la recta de shock y la de la trayectoria del auto, notamos que eventualmente se cruzaran, lo cual implica que los autos deberán disminuir su velocidad.

En cuanto a la trayectoria que sigue el auto que sale de  $x_1$  podemos afirmar que no se cruzará con la recta de shock pues sus pendientes no lo permiten, es claro que todo auto que salga de una posición  $x_1 > 0$  del camino, iniciará su recorrido con una cierta velocidad que conservará en el transcurso del

tiempo, en general su recorrido se llevará a cabo sin contra-  
tiempos.

A grandes razgos, lo descrito anteriormente es lo que  
le sucederá a un automovilísta que se encuentre en alguna  
de esas posiciones del camino.

Para esa misma configuración del camino, cuando  $\rho_0$   
esta en la zona I, los diagramas que se obtienen son cualita-  
tivamente iguales a los de este caso (zona II), lo único que  
varía es la pendiente de la recta de shock y de las caracterís-  
ticas. Podemos observar que el diagrama X-t anterior es una  
reflexión de la figura 23. Así, esperamos que los otros dos  
casos que nos faltan, también resulten reflexiones de los dos  
casos restantes ya discutidos.

Siguiendo con nuestro análisis; supongamos que  $\rho_0$   
está en la región de tráfico pesado y en la zona IV.

De manera similar obtenemos los diagramas X-t y F- $\rho$   
siguientes:

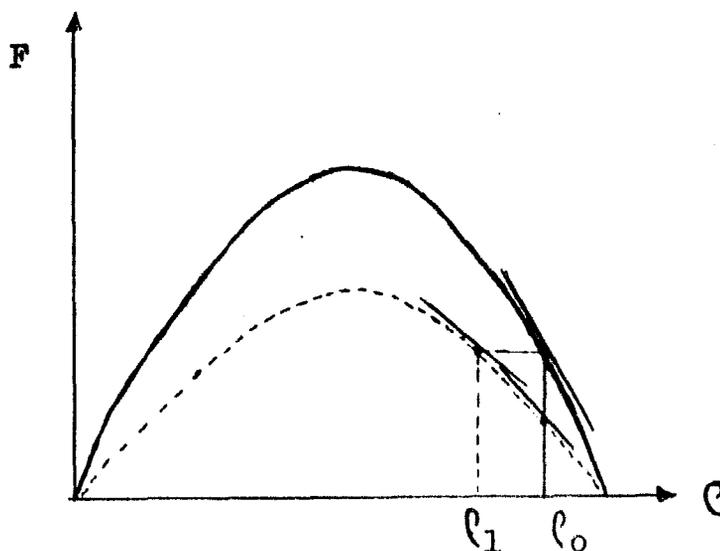


Figura 33. Diagrama F- $\rho$

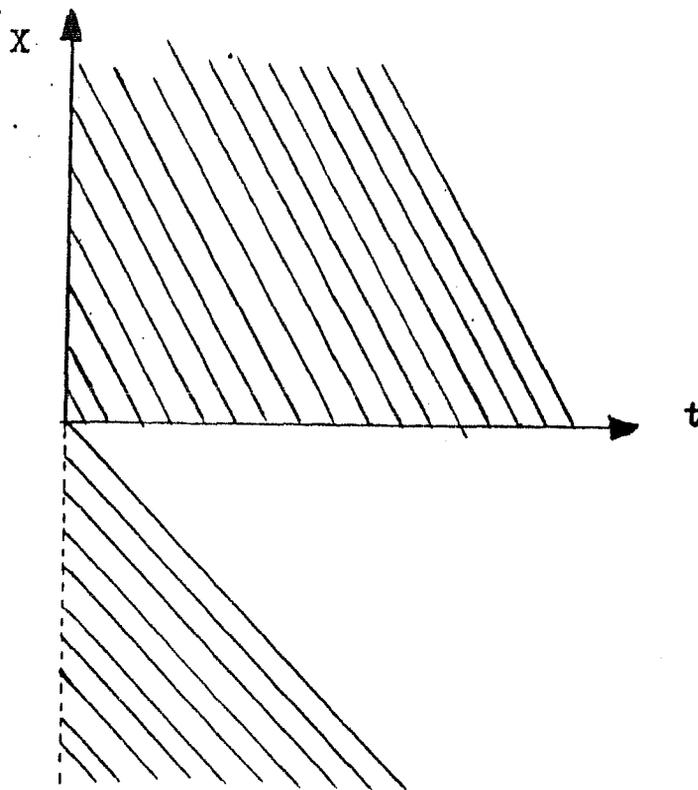
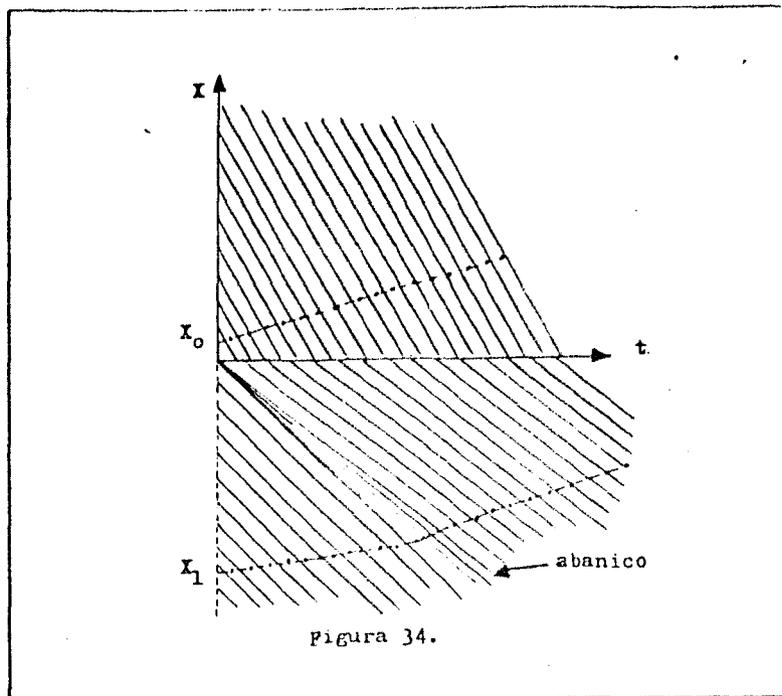


Figura 33. Diagrama X-t.

Como hemos venido observando, en este caso también tenemos una región en blanco en el diagrama espacio-tiempo la cual llenaremos siguiendo los argumentos que usamos en casos anteriores. Entonces del diagrama fundamental escogemos el punto  $F(\rho_1)$  para que se satisfaga la condición de continuidad del flujo en el eje  $t$ . Tomando en cuenta lo anterior y trazando algunas trayectorias de coches, obtenemos el diagrama de la figura 34. Señalamos que, debido a la diferencia de pendientes de las características en la región  $X < 0$  nos quedó una abertura que llenamos con un abanico de características que de manera lógica representan el cambio en las pendientes de las rectas tangentes a la curva que reopresenta el flujo en la parte de subida del camino en el intervalo  $[\rho_1, \rho_0]$ .

El lector puede tratar de interpretar la figura 34 para el recorrido de los autos que salen de las posiciones  $X_0$  y  $X_1$ .



Por último, vamos a ver que sucede cuando  $\rho_0$  se encuentra en la zona III. Los diagramas  $x-t$  y  $F-\rho$  para este caso se muestran en la página siguiente.

Lo primero que en ellos se observa es que este caso es similar al de la zona III para la configuración del camino de la figura 17 (a), de la misma forma que en ese caso, decidimos que sobre el eje  $t$  se tenga el flujo  $F_m$  y luego completamos el diagrama con un abanico y la introducción de un shock.

Entonces, el diagrama completo se muestra en la figura 36. Las trayectorias en él trazadas nos permiten describir cual es el comportamiento de los autos que se encuentran en distintas posiciones del camino.

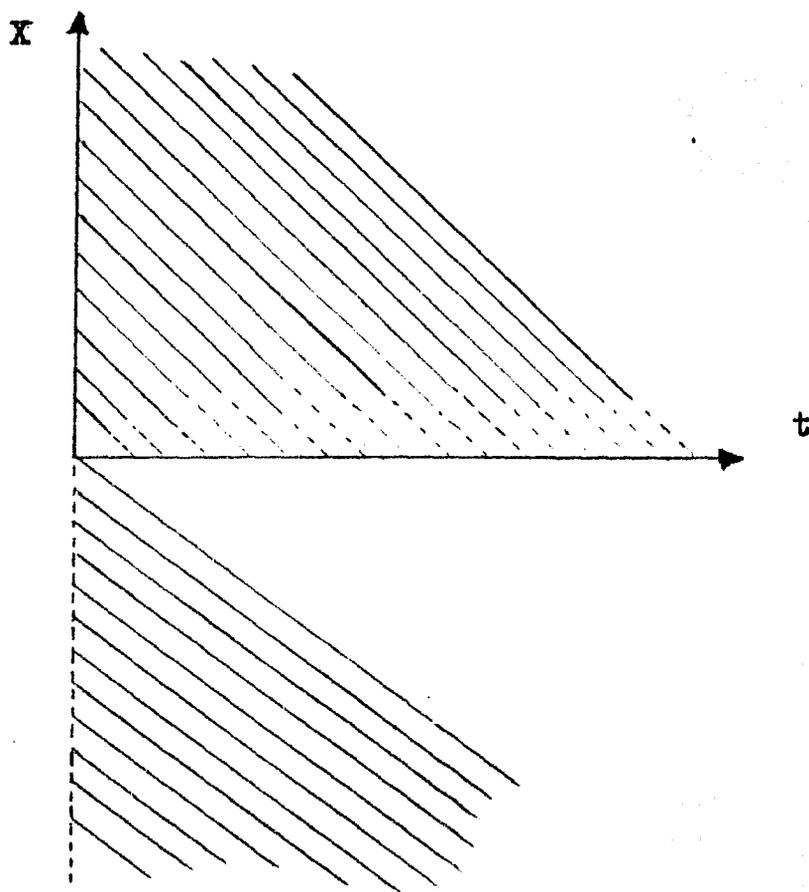
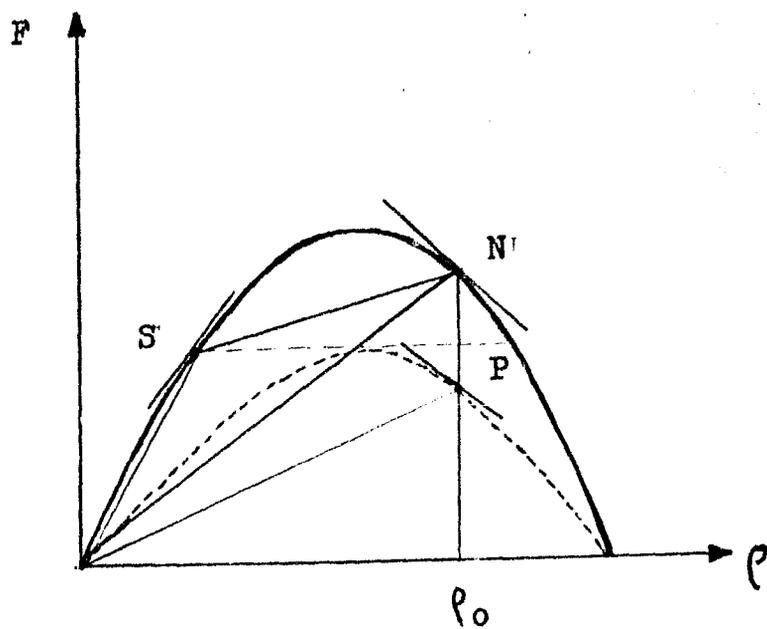


Figura 35.

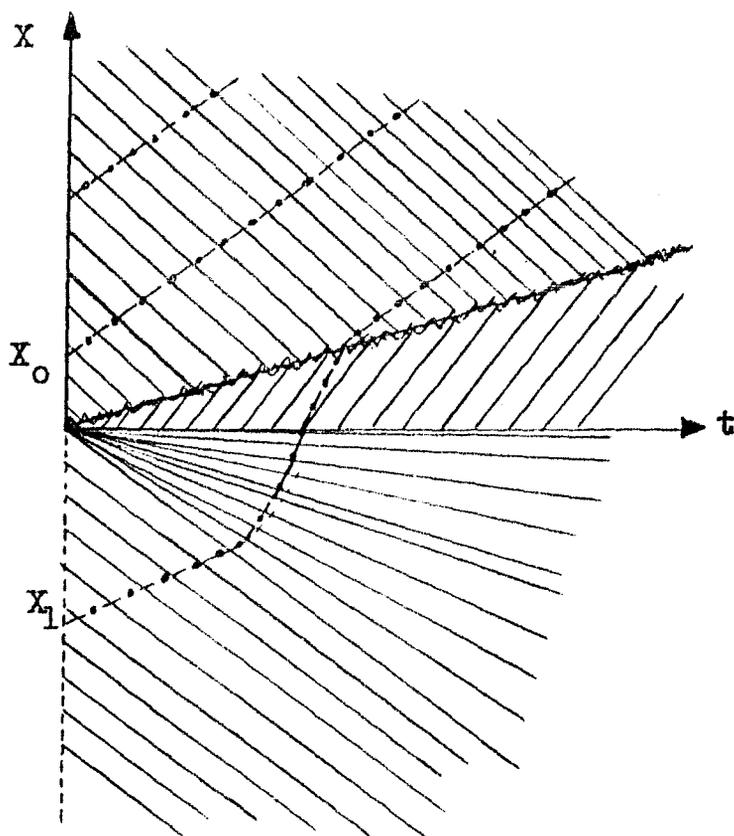


Figura 36. Diagrama  $X-t$  con trayectorias de autos que salen de  $X_0$  y  $X_1$  .

Lo que primero se observa es que un auto que tiene la posición  $X_0 > 0$  no tendrá problemas en su recorrido pues la velocidad inicial la conservará al transcurrir el tiempo. Los autos que parten de la posición  $X_1$ , por ejemplo, tienen una velocidad constante que luego va aumentando poco a poco al entrar al abanico de características, pero al salir de esta zona su velocidad vuelve a ser constante hasta que se encuentran con la recta de shock que provoca que su velocidad disminuya, pasando esta recta continúan su viaje sin dificultad.

## 2. DISTINTA DENSIDAD A LO LARGO DEL CAMINO

Ahora, en lugar de que la densidad sea constante en todo el camino, supondremos que, en una parte tenemos densidad  $\rho_0$  y en otra  $\rho_1$ , con  $\rho_0 \neq \rho_1$ .

Se supone un camino como en la figura 17, pero ahora con  $\rho = \rho_1$  si  $x < 0$  y  $\rho = \rho_0$  si  $x > 0$ .

Se distinguen dos casos posibles :

A)  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son del mismo tipo, esto es, ambas son densidades de tráfico ligeras ó ambas son pesadas.

B)  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son de tipos distintos.

Daremos sólo los casos que son algo diferentes a los ya vistos en la sección anterior y analizaremos el caso de la figura 17 (b) ; la otra configuración del camino, es como se vió una reflexión de los otros casos.

Caso A) ambas densidades son del mismo tipo.

La mayoría de los casos presentan un diagrama  $x-t$  muy similar a los ya encontrados. Sin embargo hay un caso cualitativamente diferente, en él  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son densidades ligeras ( $\rho_0$  en la zona I y  $\rho_1$  en la zona II) ; de las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de flujo, obtenemos los diagramas que se muestran a continuación.

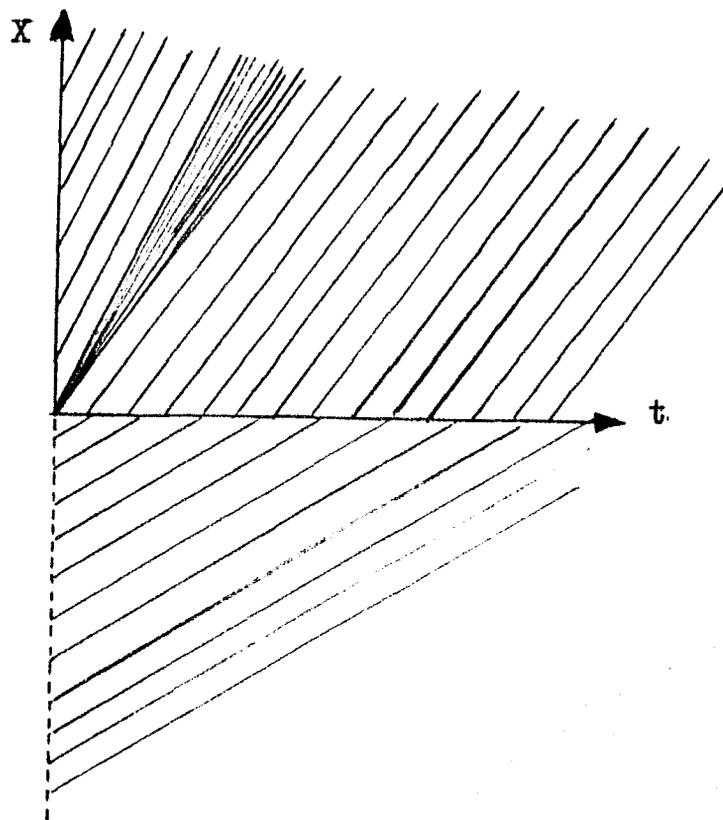
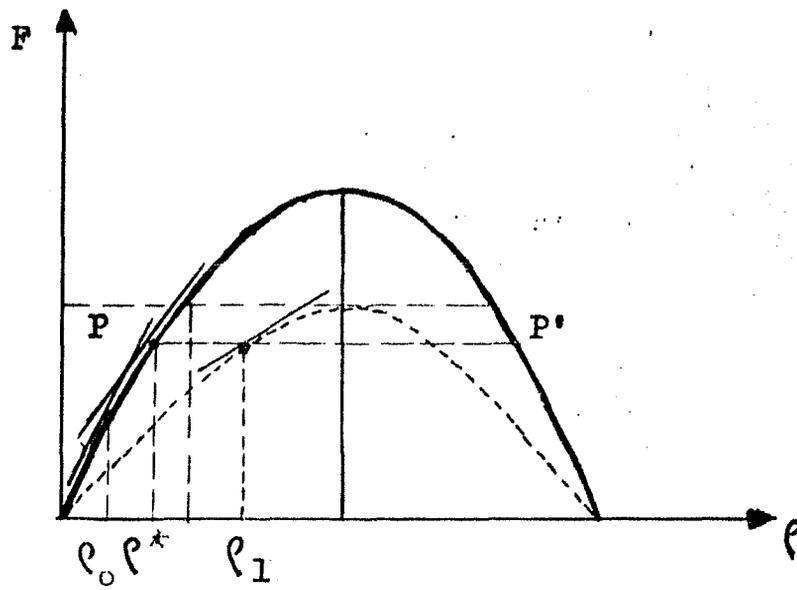


Figura 37.

El diagrama  $X-t$  es diferente a los otros casos pues en la región  $X > 0$  aparece un abanico, el cual surge de la trancisión de densidades de  $\rho_0$  a  $\rho^*$  (ver figura 37). Pasemos al otro caso.

Caso B) ambas densidades son de tipos distintos.

Dado que estamos suponiendo que  $\rho_0 \neq \rho_1$ , ambas densidades pueden estar dispuestas en el eje  $\rho$  de diferentes maneras, pero nosotros, después de analizar varios casos, sólo presentamos aquellos que nos parecen de mayor interés por la diferencia que existe entre los diagramas  $X-t$  que ya hemos obtenido antes y los que se tienen ahora.

Bajo este criterio tenemos el caso que mostramos a continuación.

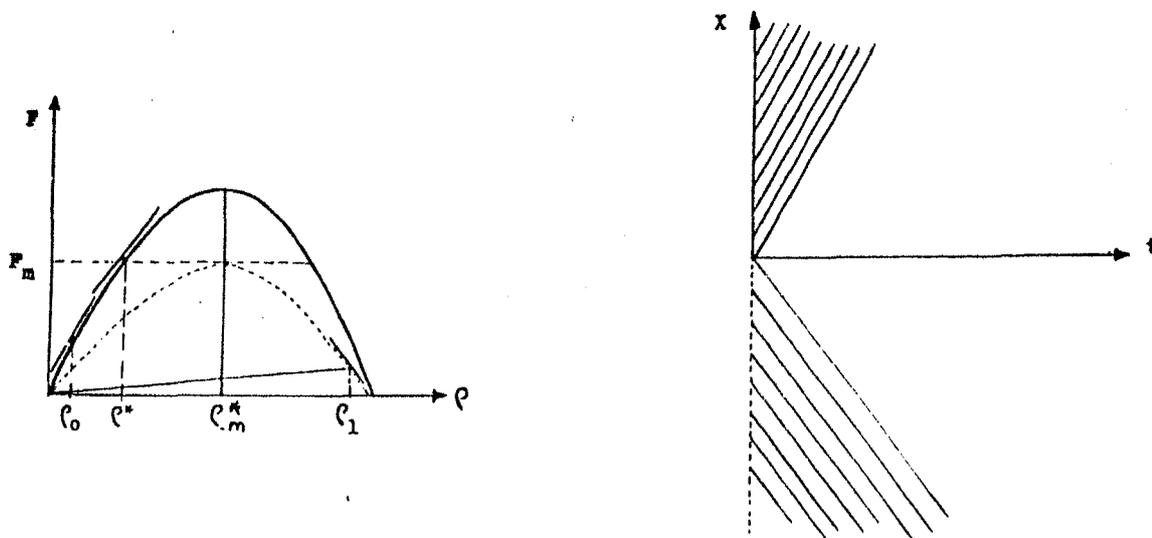


Figura 38.

Lo primero que notamos en el diagrama espacio-tiempo es una enorme región en blanco. Es claro que en dicho diagrama el flujo que corresponde a las características que han de tocar el eje  $t$ , aún no está determinado. Entonces, el problema actual es, cómo vamos a llenar estas regiones.

A primera vista podríamos pensar que la solución al problema es un abanico de rectas que partan del origen; en la sección  $X > 0$ , se pondrían características correspondientes al flujo en la región plana del camino y en la sección  $X < 0$ , pondríamos características correspondientes al flujo en la región del camino en subida, pero claramente esos abanicos se unirían en el eje  $t$ , pues ahí las características serían horizontales, sin embargo la característica con pendiente cero que proviene del punto donde se alcanza el flujo máximo que puede haber en la parte plana del camino, es distinta de la que proviene del máximo que puede haber en la subida del camino, pues ambos máximos son distintos, entonces sobre el eje  $t$ , se tendrían dos cantidades de flujo distintas para determinar las características, tanto para  $X < 0$  como para  $X > 0$  y esto no es coherente, así pues, ésta no es la solución apropiada.

Luego de observar cuidadosamente cuál es la situación del diagrama fundamental, encontramos que la curva que representa al flujo en sección del camino en subida, es la que debe decidir que flujo máximo tomaremos en cuenta sobre el eje  $t$  para trazar las características ya que es el menor de los dos.

Puesto que tal máximo lo alcanza para la densidad  $\rho_m^*$

y  $F(\rho_m^*) = F_m$ , "reflejamos" este punto sobre la otra curva restante y obtenemos dos puntos posibles para determinar la pendiente de las características que han de llenar la parte  $X > 0$  del diagrama  $X-t$ . Analizando ambos puntos, como antes, vemos que sólo el del lado izquierdo del D.F.T. nos proporciona información correcta. En la región  $X > 0$  del camino hay una transición de la densidad  $\rho_0$  a la densidad  $\rho^*$  (ver figura 38) y como en los casos anteriores hay un abanico en el diagrama que representa los cambios en las pendientes de las características. El diagrama  $X-t$  completo se presenta a continuación.

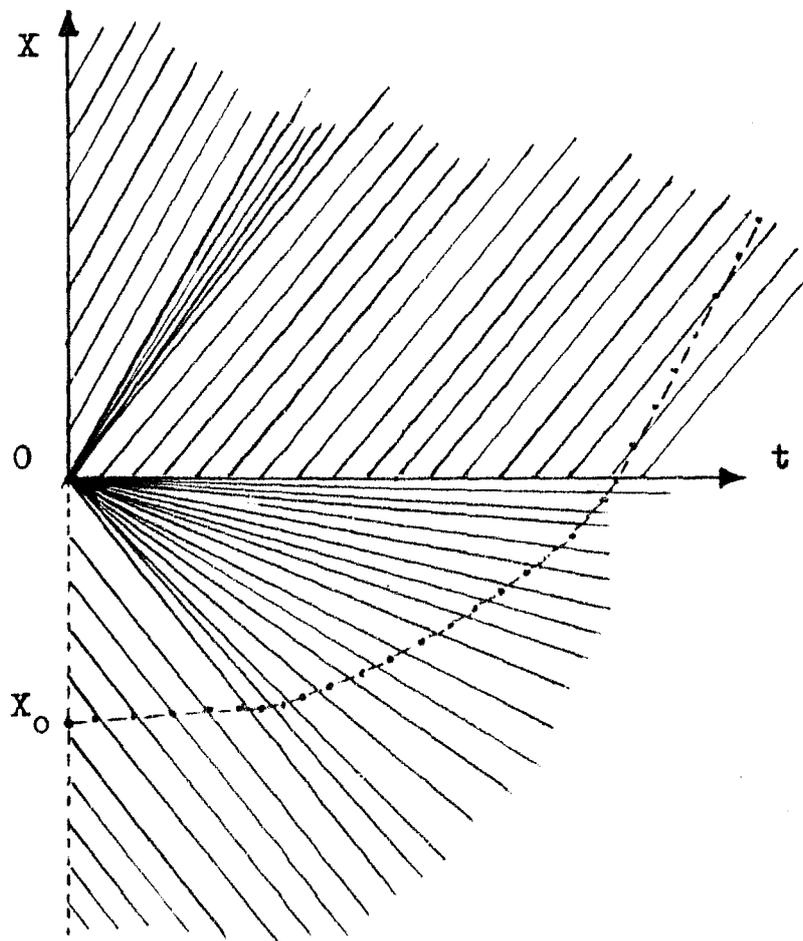


Figura 39. Diagrama espacio-tiempo

Consideremos ahora el caso contrario al anterior y que se muestra a continuación.

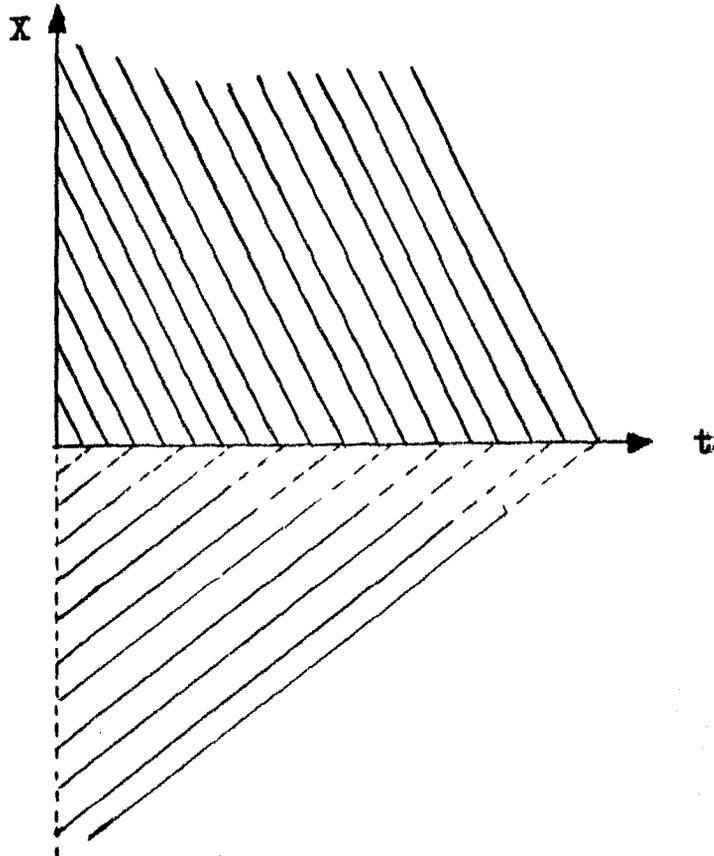
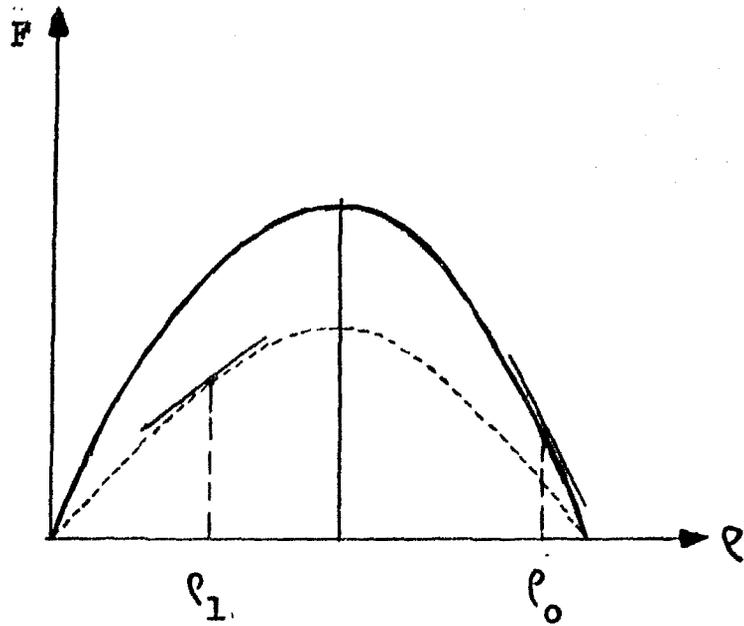


Figura 40.

Es claro que, si dejamos este diagrama tal cual aparece, sobre el eje  $t$ , llegan características determinadas por dos flujos distintos. No podemos permitir que esto suceda, necesariamente sólo algunas de ellas ya sean las de sección  $X < 0$  o las de la sección  $X > 0$ , podrán tocar el eje  $t$ , entonces hay que resolver este problema.

Examinando la figura 41, vemos que si tratamos de continuar las características ya trazadas en la región  $X < 0$ , hacia la  $X > 0$  haciendo el flujo continuo, encontramos que hay dos puntos sobre la curva,  $N$  y  $M$ , para los cuales el flujo es igual al que se tiene en la región de subida del camino con densidad  $\rho_1$ , pero estos puntos nos conducen a rectas de shock en la sección  $X > 0$  con pendientes tales que no podemos dibujar en el diagrama espacio-tiempo sin que este pierda su sentido, pues si por ejemplo, elegimos el punto  $N$ , la recta de shock que se obtiene es de pendiente negativa y al trazarla en el diagrama  $X-t$  queda sobre la otra región, esto es, en la sección  $X < 0$  ;;; Lo mismo sucede si tomamos el punto  $M$  (ver figura 41).

Entonces, trataremos de continuar las características ya trazadas en la sección  $X > 0$  hacia la  $X < 0$ ; al igual que antes se tienen dos puntos sobre la curva que nos pueden servir, sin embargo elegimos aquel que nos proporciona información para tiempos futuros, el del lado derecho. Este punto nos obliga a trazar una recta de shock en la región  $X < 0$  y así el diagrama espacio-tiempo se ve como muestra la figura 42.

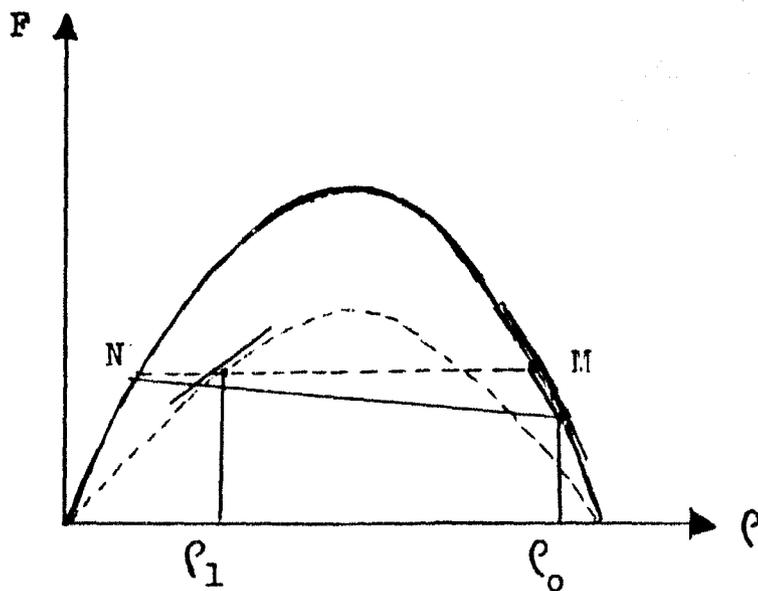
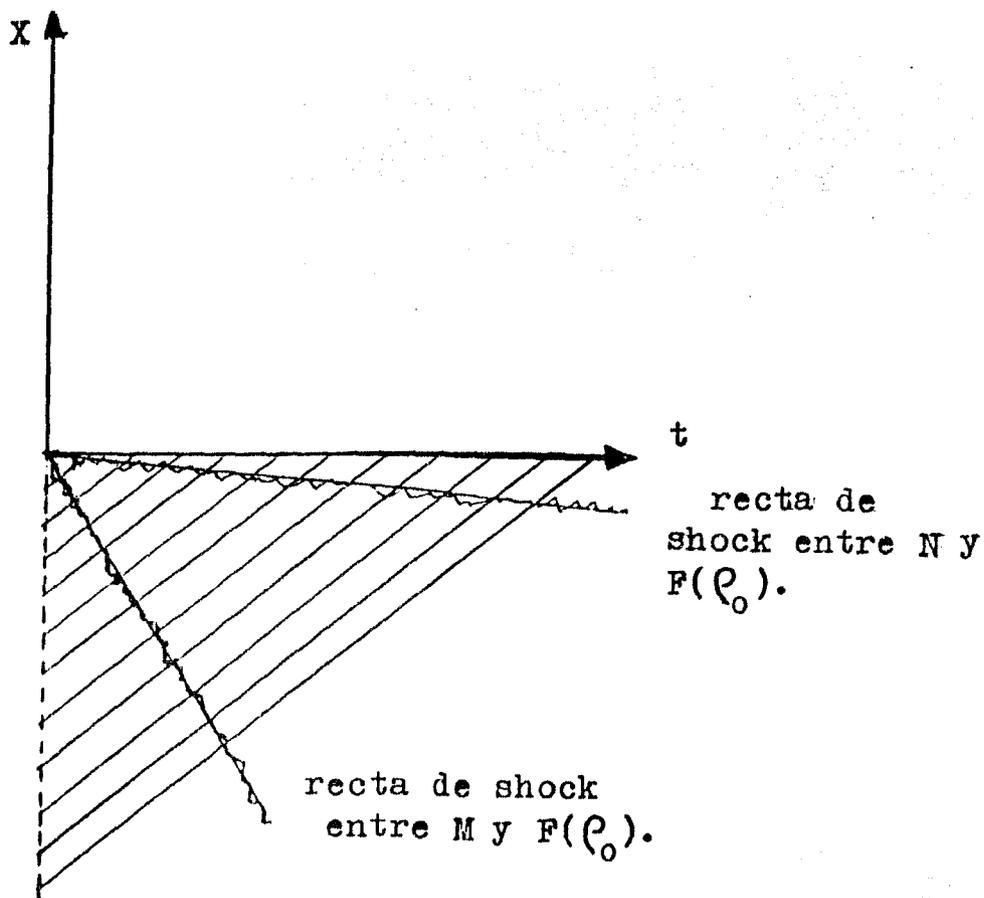


Figura 41.

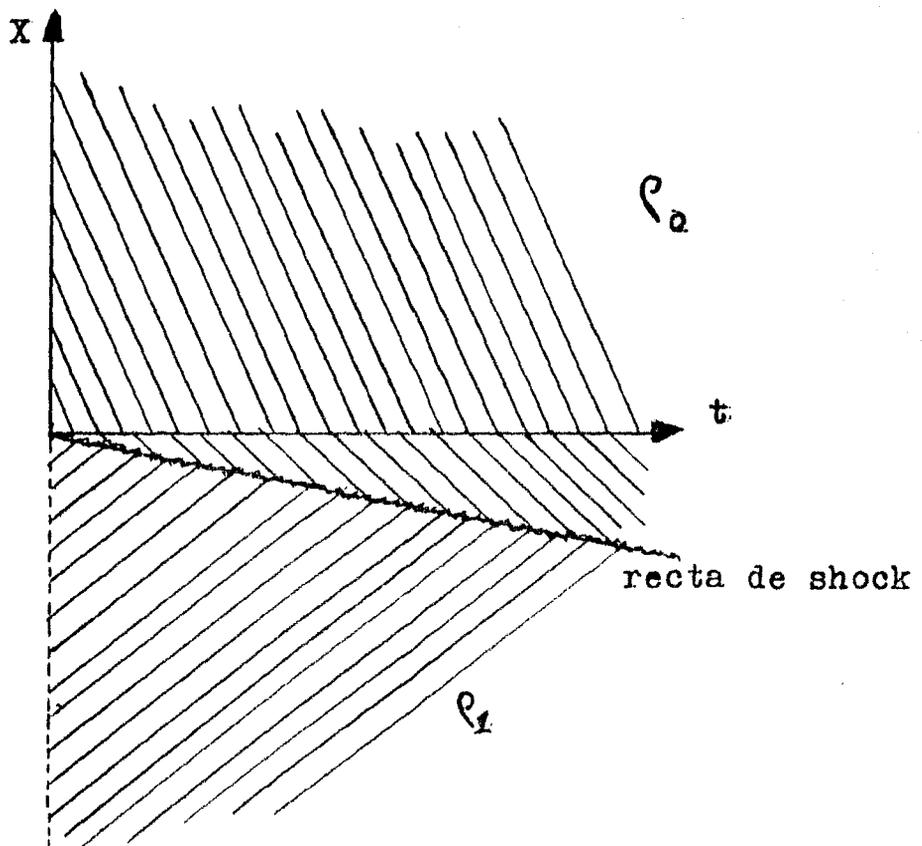
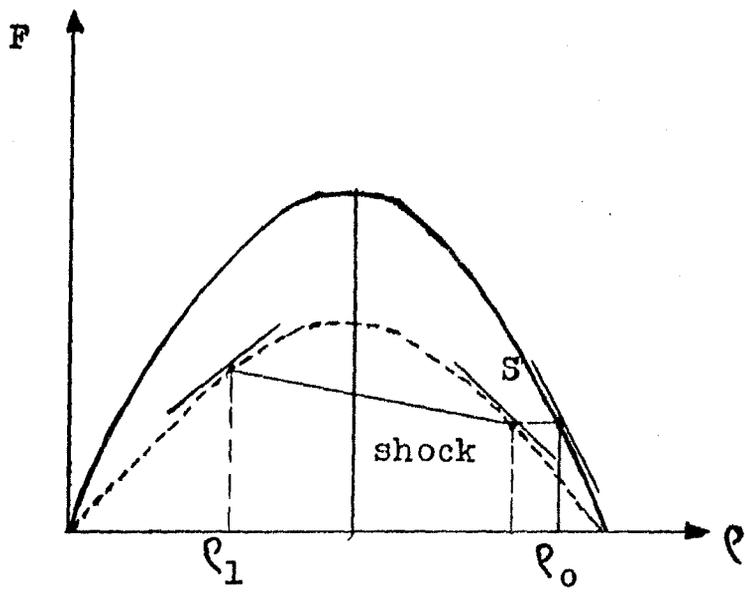


Figura 42.

Otro ejemplo que es muy similar al de la figura 36 se muestra en la siguiente figura 43.

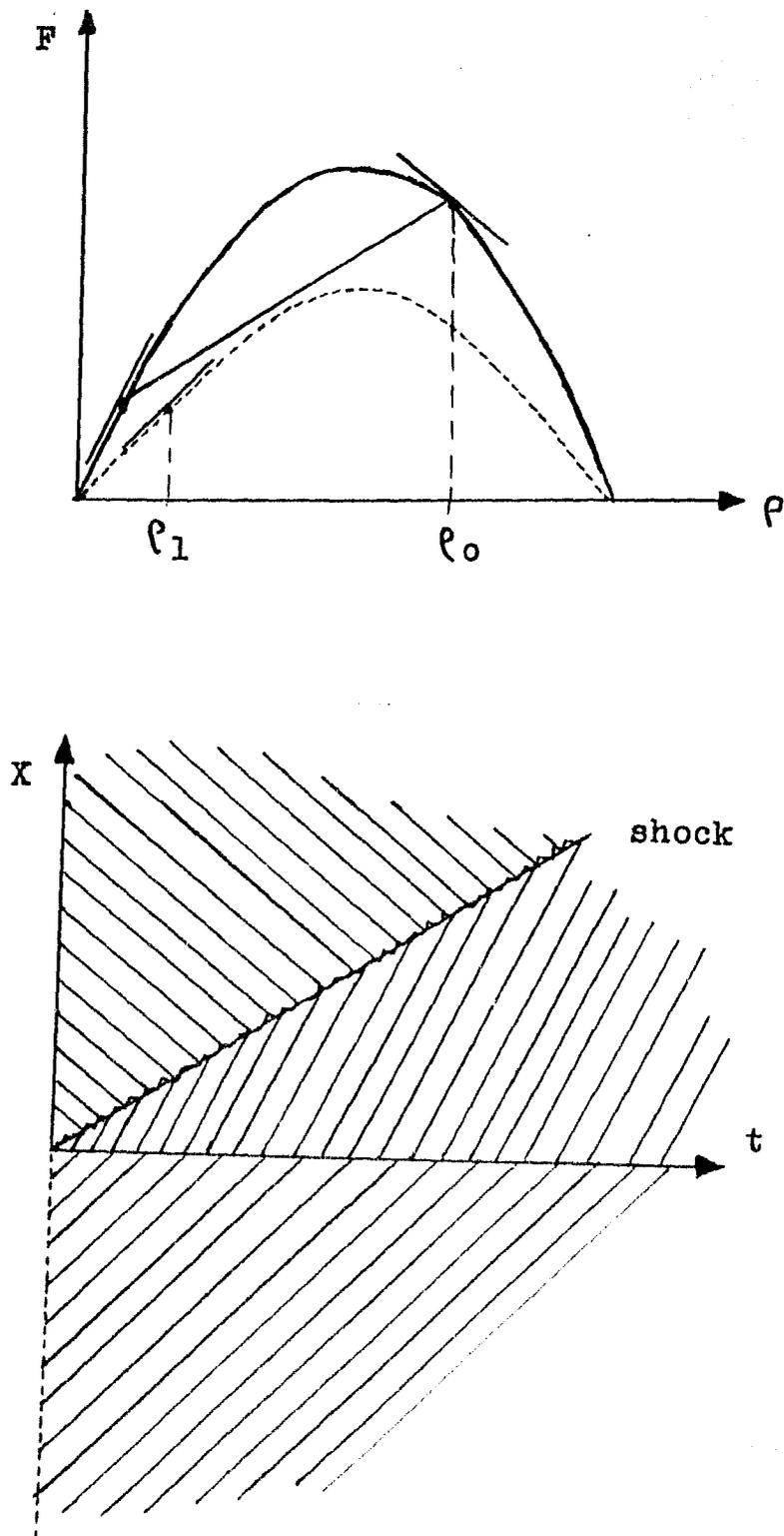


Figura 43.

### 3. UN CASO MAS REAL

En esta sección consideraremos un caso más realista de los que anteriormente hemos estudiado. La actual situación de los diagramas  $F-\rho$  y  $X-t$  se presenta a continuación.

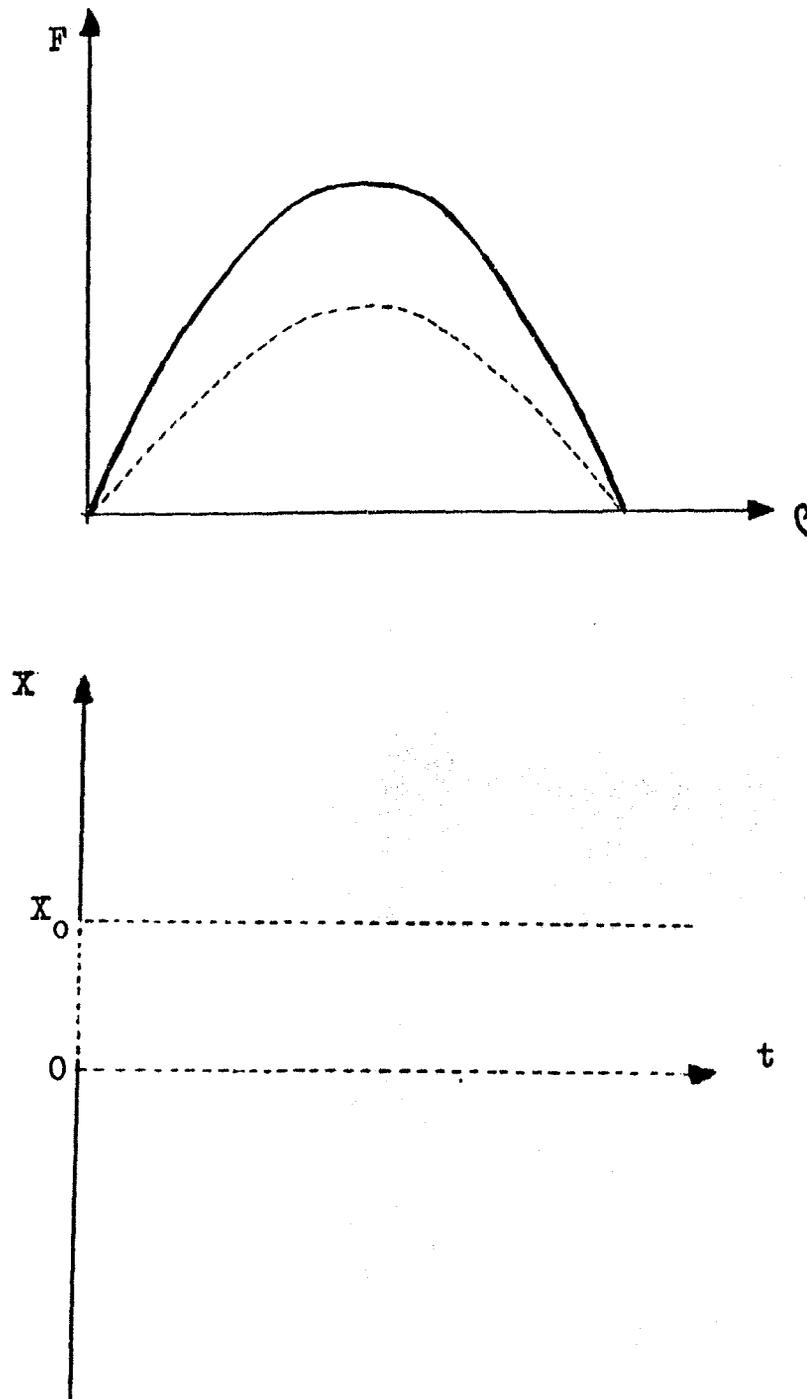


Figura 44.

En dichos diagramas, la parte marcada con línea continua (sólida) representa la sección seca del camino (o en forma equivalente, la sección sin problemas) y la línea punteada representa la sección del mismo donde se presenta algún problema, como sería por ejemplo, una lluvia intensa o granizo.

Las condiciones de frontera son las mismas que se tenían antes; densidad inicial constante e igual a  $\rho_0$ , el flujo es continuo a lo largo del eje  $t$  y de la recta  $X=X_0$ , (Fig 44).

Supondremos primero que en el lado derecho del diagrama (esto es, donde  $t \rightarrow \infty$ ) no hay restricciones de frontera.

Esto equivaldría a decir que el granizo durará un tiempo infinito.

Comencemos analizando el caso en que la densidad inicial  $\rho_0$  es ligera. Los diagramas que tenemos para esta situación se ven como sigue:

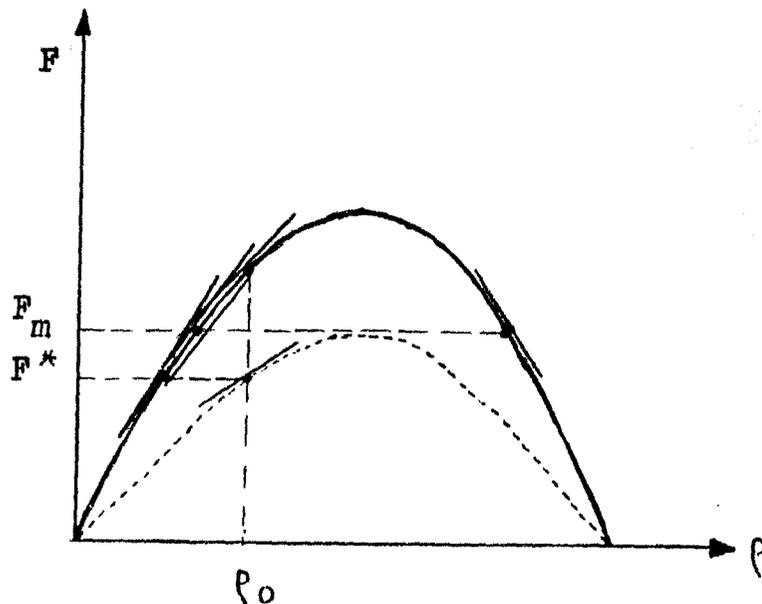


Figura 45.

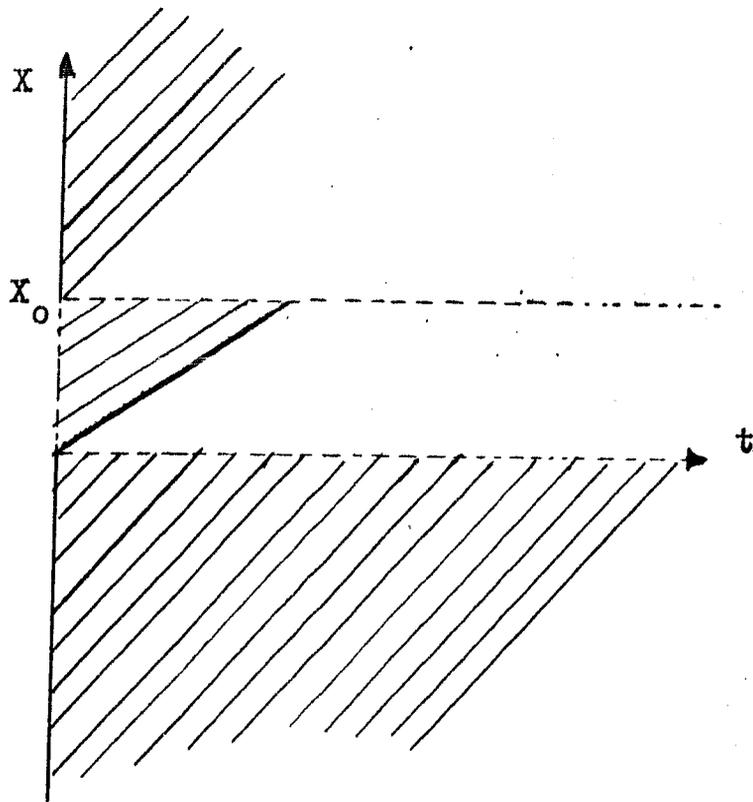


Figura 45.

Por las condiciones de continuidad del flujo, debemos ver cual de las secciones decide el flujo sobre el eje  $t$  y sobre la recta  $x_0$  para continuar las características.

Lo primero que notamos es que para  $x < 0$ , las características no pueden seguir hacia arriba (ver figura 27 y 29), si determinamos, como en casos anteriores que el flujo sobre el eje  $t$  sea el flujo máximo  $F_m$  sobre la curva punteada del D.F.T, entonces es posible llenar la región en blanco de la sección punteada en el diagrama  $x-t$  con un abanico e introducir un shock en la sección  $x < 0$  según el siguiente diagrama:

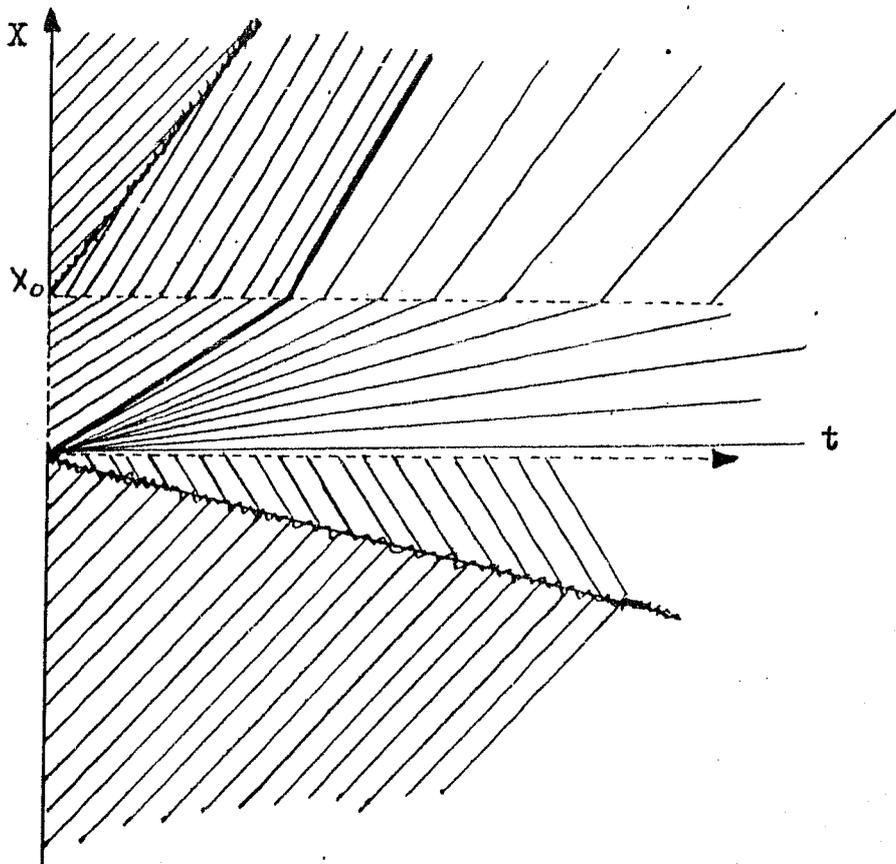


Figura 46.

Para la parte no mojada del camino en  $X > 0$ , lo que se hizo es continuar las características que están por debajo de la recta  $X_0$  manteniendo el mismo flujo. Las pendientes de éstas varían desde la pendiente a la curva sólida en  $F(\rho_0) = F^*$  hasta la pendiente a la curva en el punto  $F_m$ . En  $t=0$ ,  $X=X_0$  se introduce un shock para evitar intersecciones y las pendientes de las características se van reclinando hacia la derecha.

Esta situación que muestra el diagrama espacio-tiempo se conserva indefinidamente pues no hemos dado una frontera o restricción hacia la derecha del diagrama. ¿Qué sucedería si ahora ponemos una frontera en la sección punteada, digamos en  $t=t_0 > 0$ ? ¿Cómo se vería el diagrama  $X-t$ ?

Después de pensarlo unas horas concluimos que se vería como muestra la siguiente figura.

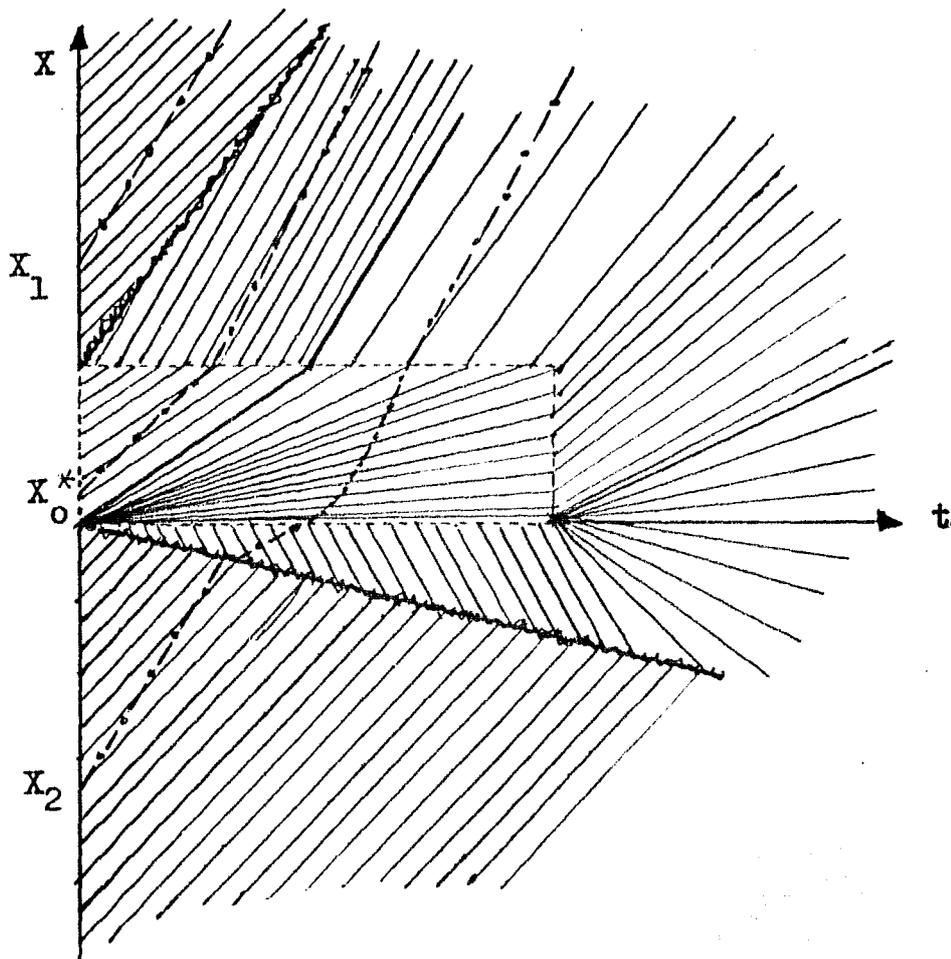


Figura 47.

En la parte vertical de nuestra frontera hemos continuado las características suponiendo que la densidad debe ser continua ahí (ya que es un shock de pendiente infinita), y la parte en blanco que queda se ha llenado con un abanico que representa la transición entre las dos regiones.

Supongamos que ahora se tiene densidad  $\rho_0$  pesada inicialmente y construyamos sus diagramas correspondientes.

Este caso se ilustra a continuación (ver figura 23):

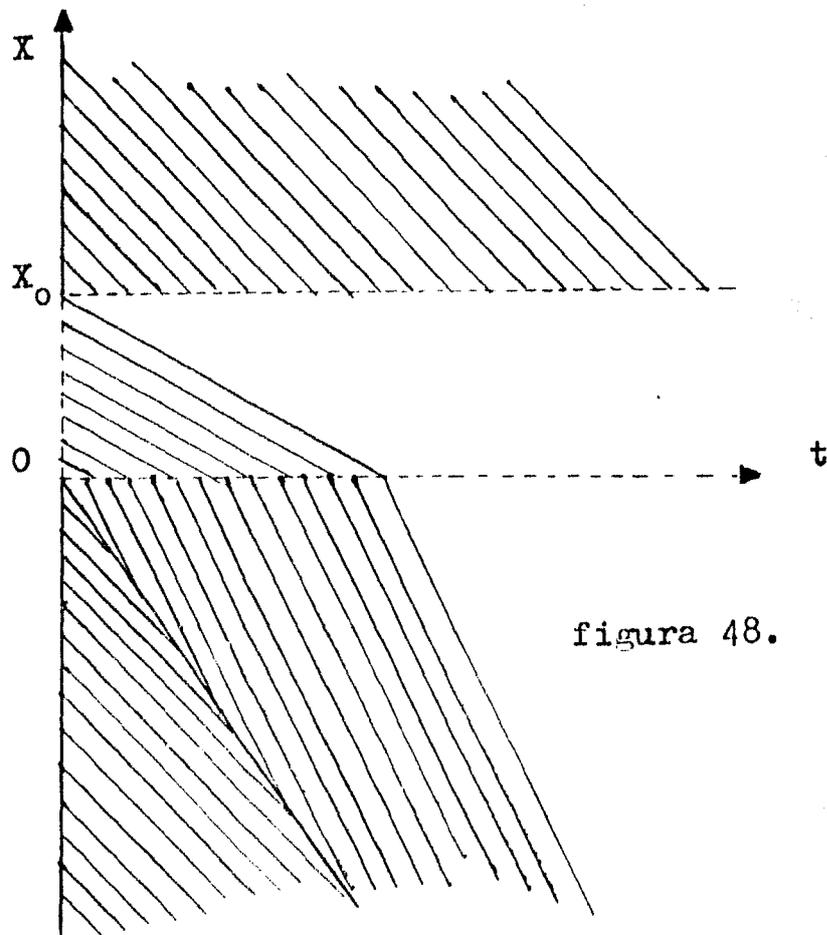
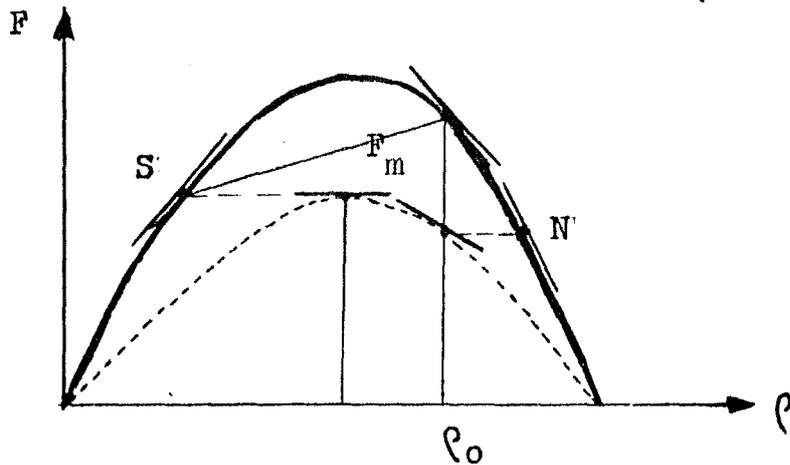


figura 48.

Ahora, el como llenar la sección en blanco que aparece en el diagrama es nuestro problema inmediato.

Podemos notar que para  $X > 0$  la situación que se tiene es la siguiente: las características de la sección de  $X > X_0$  no pueden llegar a tocar la recta  $X = X_0$ ; la sección que queda en blanco en la región punteada (entre  $X = 0$  y  $X = X_0$ ) la llenamos con un abanico si elegimos sobre la recta  $X = X_0$ , que el flujo sea igual al máximo que puede tenerse en la parte del camino donde esta granizando (ver figura 36).

Así, tenemos el diagrama  $X-t$  completo que se muestra en la página siguiente.

Del caso que antes estudiamos, cuando  $\rho_0$  era ligera, ahora podemos pensar y ver claramente que si ponemos una frontera hacia la derecha, para la cual en  $t = t_0$  se acaba el granizo, entonces, suponiendo que el cambio del flujo máximo de la curva punteada a la curva sólida es instantáneo en  $t = t_0$ ; hacia la derecha de este punto y sobre el eje  $t$  supondremos que se tiene el flujo máximo y la región se llena con un abanico.

Entonces, el diagrama espacio-tiempo para este caso se verá como muestra la figura 50.

De las trayectorias que muestran los diagramas  $X-t$  para autos que salen de las posiciones  $X_1$ ,  $X_0^*$  y  $X_2$  podemos darnos cuenta de las dificultades que ocasiona una fuerte lluvia o una granizada en una parte del camino.

Si por ejemplo, nos fijamos en la figura 47 y observamos el auto que sale de la posición  $X_2$ , vemos que en los primeros momentos de recorrido conserva su velocidad inicial constante, luego atraviesa la recta de shock y se encuentra con una

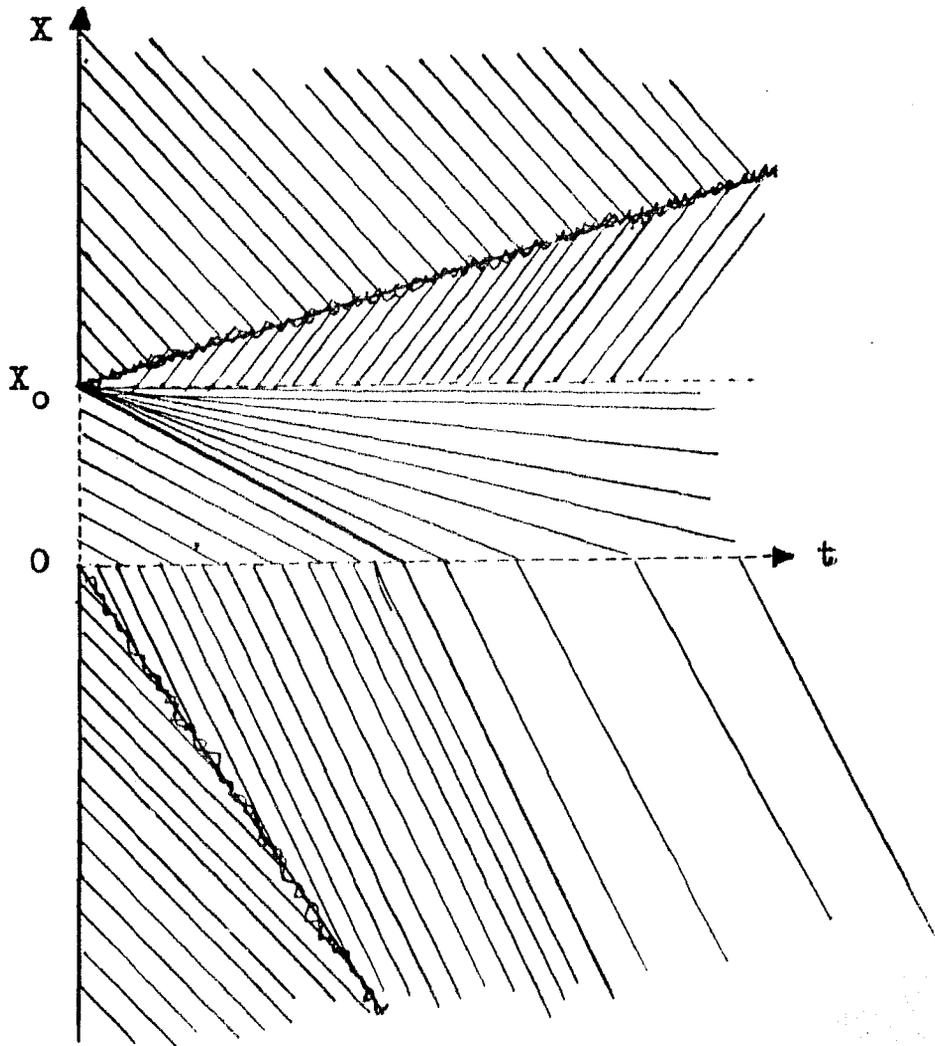


Figura 49.

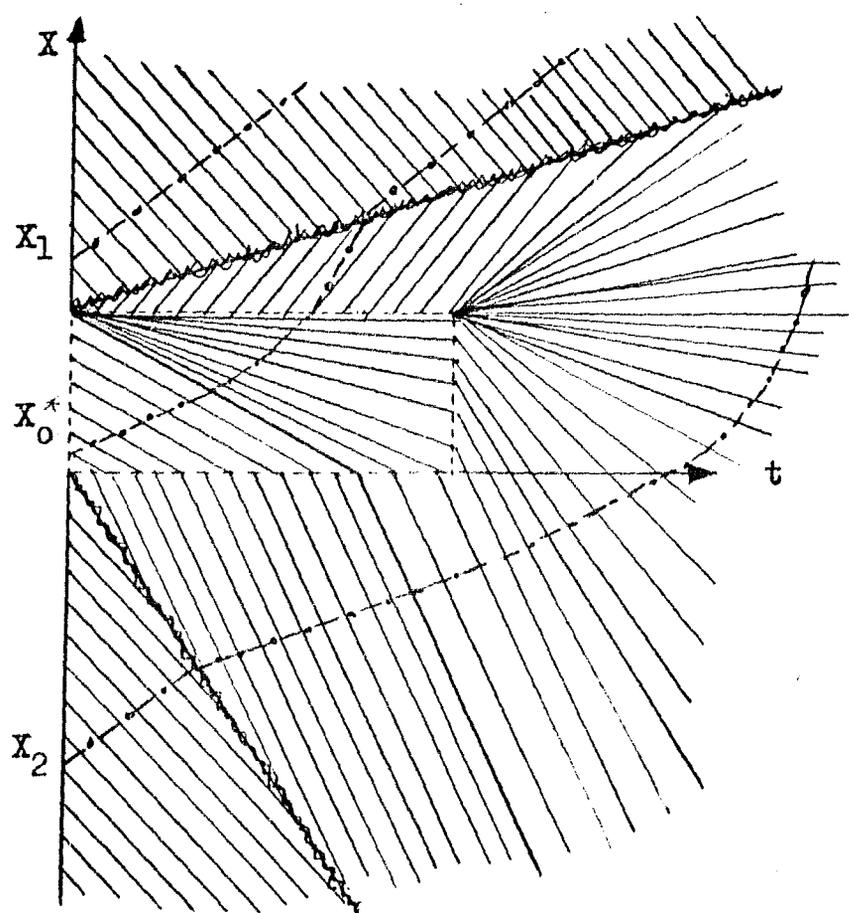


Figura 50.

densidad pesada lo cual provoca que tenga que disminuir su velocidad hasta que, llegando a la región donde está granizando, que tiene densidad más ligera, comienza a variarla; saliendo de la zona lluviosa su velocidad vuelve a ser constante y puede continuar su recorrido sin dificultad.

También observamos que, el auto que sale de la posición  $X_1$  no tiene problemas pues para él la granizada ha quedado atrás del camino; en cambio, el auto que sale de  $X_0^*$  se encuentra en plena granizada e inicia su recorrido con una cierta velocidad (la que le permite la granizada) que es menor que la de los autos que salen de  $X_1$  y  $X_2$  al iniciar su movimiento.

Sin embargo, al salir de ésta región, el auto aumenta su velocidad y la mantiene constante. Por la pendiente de la recta de shock y la de su trayectoria podemos intuir que eventualmente se cruzaran y por lo tanto el auto tendrá problemas, pero no mayores que los que tuvo en la región del camino donde esta granizando.

De manera similar en la figura 50, si nos fijamos en la trayectoria del auto que sale de la posición  $X_1$  observamos que éste no tendrá ningún problema en su recorrido y los que encontrará el que sale de  $X_2$  serán también muy pocos, sólo la recta de shock y pasará de una densidad pesada a otra cada vez más y más ligera haciendo más veloz su recorrido.

Sin embargo, para el auto que sale de la posición  $X_0^*$  la situación no es muy grata pues encontrándose en mitad de la granizada su velocidad inicial es pequeña y pasa de una densidad pesada a otras menos pesadas, pero solo hasta que sale de

la granizada circula en una región con densidad ligera, esto le permite aumentar su velocidad en forma considerable hasta que se encuentra con una recta de shock y pasa a una región con densidad más pesada que con la que inició su recorrido, sólo que ahora ahí no hay granizo y su velocidad puede ser mayor.

Así, si deseamos, podemos trazar muchas más trayectorias de autos en los diagramas , interpretarlas y tener una visión general y más completa de lo que está sucediendo con el tráfico en la sección del camino de nuestro interés.

### CAPITULO III

#### EXTENCION Y APLICACION

## 1. UN EJEMPLO Y UN CASO ESPECIAL.

En este capítulo sugerimos una posible extensión para el estudio de problemas de tráfico un poco más complicados que aquél en el cual se tenía un camino unidireccional de un sólo carril. Para esto usaremos los mismos conceptos que antes. En realidad existen un sin número de problemas de tráfico que permanecen para investigaciones futuras. Se sabe que la teoría de Flujo de Tráfico es un área bastante fértil y que tiene aplicaciones a situaciones de tráfico bastante complejas, claro que, siempre existirá la diferencia entre la solución matemática que se obtiene mediante esta teoría y los datos que podemos obtener directamente sobre la carretera. Sin embargo, sabemos que en gran número de casos ha funcionado de manera eficaz y hay quienes aseguran que con ella se ha podido prever la seguridad de los conductores.

Así pues, estudiaremos rápidamente con un caso interesante, cómo podemos extender nuestro conocimiento al estudio de problemas de tráfico distintos de los que hemos visto antes; posteriormente nos gustaría dar un ejemplo (o aplicación) de una situación real en el cual podemos apreciar la aplicabilidad de la teoría de tráfico, dicho ejemplo fué propuesto por el investigador Donald Drew y, en él se ilustran claramente las ideas básicas de flujo y conservación de autos, considerando la razón a la cual se suman los autos a una fila que espera tras un semáforo el cambio de luz roja a verde.

Atendiendo al primero de nuestros propósitos, consideremos que se tiene un camino unidireccional de un carril y que en una determinada posición (digamos  $X=0$ ), éste se amplía a dos carriles; también consideramos el caso contrario, en el que, una

carretera con dos carriles se estrecha en un solo carril para una posición determinada. La pregunta en este caso sería: ¿Qué sucede con el flujo de tráfico después de un intervalo de tiempo considerado?

Antes de contestar esta pregunta, notemos que, al llegar los autos a la posición  $X=0$  y pasar a la sección del camino con dos carriles, unos se van hacia un carril y otros hacia el otro, esto es, se dispersan de manera que tendremos dos densidades diferentes; en un carril podemos tener, por ejemplo, una densidad  $\rho_1$  y en el otro una densidad  $\rho_2$ . (ver figura 51).

Entonces, las ecuaciones para la densidad serán

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (\text{ver sección 3, Cap. I})$$

o más precisamente, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \text{ para } X < 0 \text{ y} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \end{array} \right\} \text{ para } X > 0,$$

en el caso de la figura 51 (a), para el caso (b) las ecuaciones serían las mismas sólo que la primera corresponderá a la región  $X > 0$  y las dos últimas a la sección  $X < 0$ .

El analizar esta caso tal cual, sería bastante complicado e iría más allá del propósito que se persigue al presentar una extensión de lo ya estudiado en capítulos anteriores.

Si en lugar de pensar que, para la región  $X > 0$  ( o bien  $X < 0$  en el caso (b) ) tenemos dos densidades diferentes, suponemos que la densidad en esa región es más o menos homogénea y la re-

ducimos a una sola, de alguna manera estaremos en una situación similar a la considerada en la sección 2 del capítulo II y podremos representar en una sola  $F(\rho)$  el flujo de tráfico en esa región. Así, podemos responder a la pregunta haciendo un análisis que siga la misma tendencia general que aquél que se usó para los casos anteriores.

Pensemos en una situación concreta, para fijar ideas.

Consideremos un camino unidireccional que para la posición  $X < 0$  es de un solo carril y que partiendo del punto  $X=0$  hacia el frente del camino (figura 51) se abre en dos carriles.

¿Cómo es la curva  $F(\rho)$  para cada sección del camino?

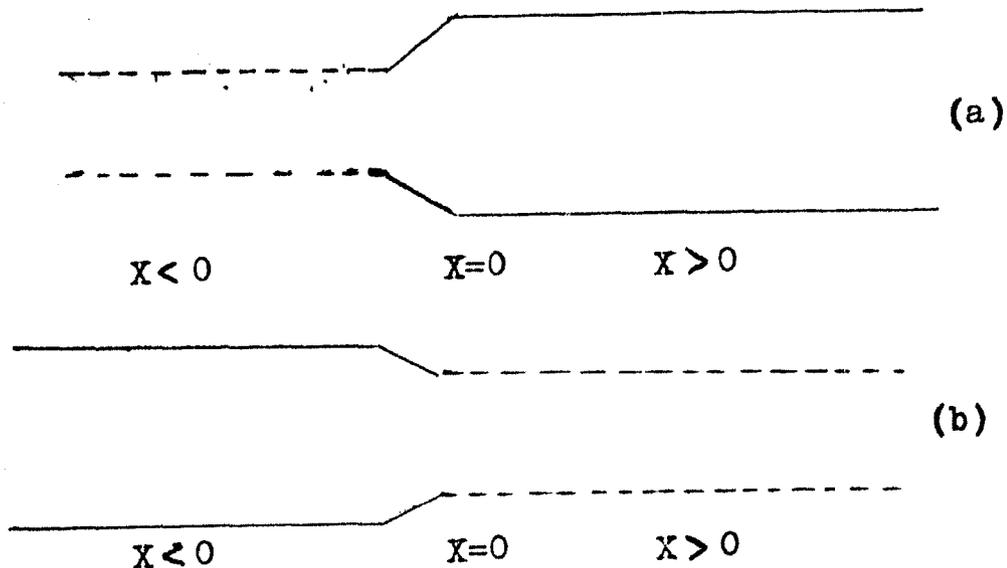


Figura 51.

Si representamos dicha curva ( o curvas) en un solo diagrama  $F-\rho$  debemos tener en cuenta lo siguiente:

Puesto que hemos hecho una partición del camino en dos secciones (  $X < 0$  y  $X > 0$ ) separadas por la posición  $X=0$ , tendremos una curva  $F-\rho$  para cada sección .

Es claro que, si la densidad es cero a todo lo largo del camino, es decir, no hay tráfico, el flujo  $F$  es cero también y por lo tanto, ambas curvas  $F(\rho)$  se inician en el origen  $(0,0)$  del cuadrante  $F-\rho$  .

Bajo la misma suposición que hicimos con respecto a la dependencia de la velocidad y la densidad (ver sección 2, apartado B, capítulo I), cuando la densidad de tráfico es muy pequeña, incluso  $\rho=0$  , la velocidad máxima  $U_m$  en este caso, es la misma para ambas regiones del camino ya que,

$$U_m = U(0)$$

y por lo tanto, la pendiente de las rectas tangentes a las curvas  $F(\rho)$  en densidades muy pequeñas (casi cero) son iguales.

Así, las curvas flujo-densidad serán de la misma forma que se muestra en la figura 5 del capítulo I, no necesariamente simétricas; dado que en la región del camino donde se tienen dos carriles la densidad es el doble de aquella que se tiene en la parte donde solo tenemos uno, la curva que describe el flujo de tráfico en la región con un carril, está más "comprimida" que la otra y además se hace cero más rápidamente puesto que la capacidad es menor donde tenemos un carril y en cuanto se satura, el tráfico se detiene y el flujo se hace cero.

En base a los argumentos anteriores, el diagrama  $F-\rho$  que tendremos se ve como sigue:

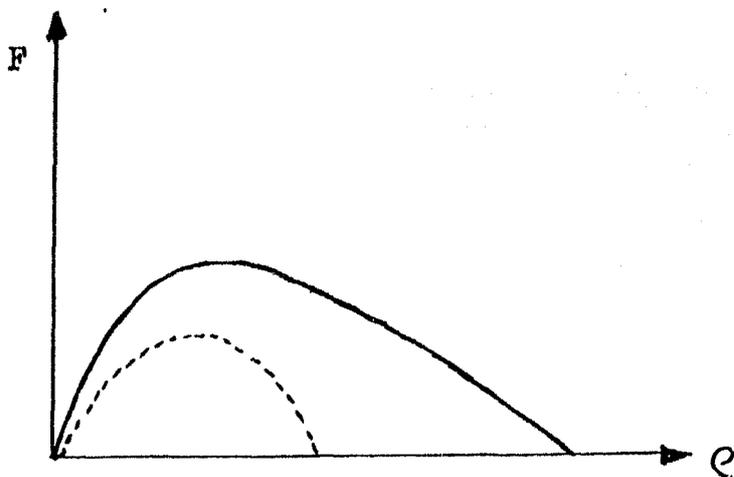


Figura 52.

En el diagrama, la curva punteada representa al flujo de tráfico en la sección  $X < 0$  del camino y la curva continua (gruesa) al flujo en la sección restante.

Luego, si pensamos en la otra situación del camino (ver figura 51 (b)), las curvas flujo-densidad que obtenemos serán las mismas que en la figura 52, solo que ahora la curva punteada representa el flujo en la región  $X > 0$  y la continua, al flujo en la otra sección.

Así, el diagrama de la figura 52 nos sirve igual para hacer el análisis de este caso.

El tratamiento que puede darse a estos casos, es análogo al ya realizado en el capítulo II. Para responder a la pregunta: ¿qué sucede con el flujo de tráfico después de un cierto intervalo de tiempo?, primero, podemos considerar que tenemos una densidad  $\rho_0$  constante a lo largo del camino y revisar todas las variantes que podemos tener en cuanto a si es densidad ligera, pesada, extraligera o extrapesada.

Posteriormente, puede considerarse que se tienen dos densidades distintas  $\rho_0$  y  $\rho_1$ , con las variantes:

- a)  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son del mismo tipo, ambas ligeras o ambas pesadas.
- b)  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son densidades de tipos distintos.

La manera de proceder al análisis de estos casos será, como ya dijimos, la misma que antes utilizamos. Para mostrar que este tratamiento es posible, brevemente, pensemos que estamos en el caso de la figura 51 (a) y que tenemos densidad constante  $\rho_0$  a todo lo largo del camino.

Si por ejemplo  $\rho_0$  es densidad ligera, el diagrama  $F-\rho$  será como muestra la figura siguiente:

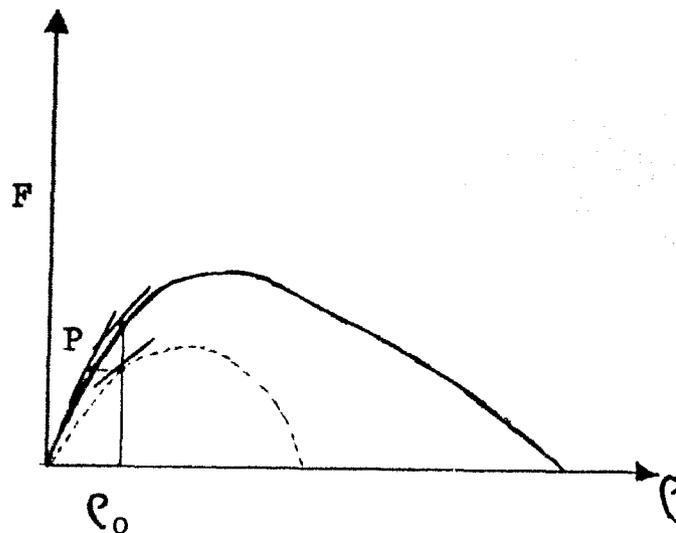


Figura 53.

Si trazamos el diagrama espacio-tiempo correspondiente tendremos la figura:

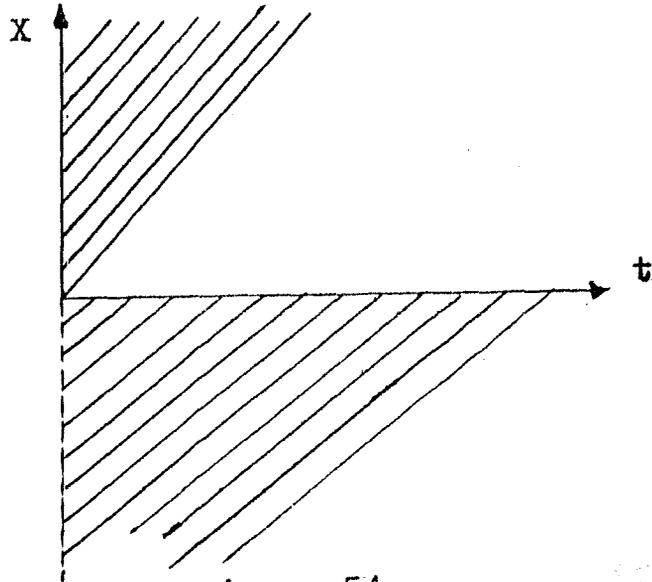
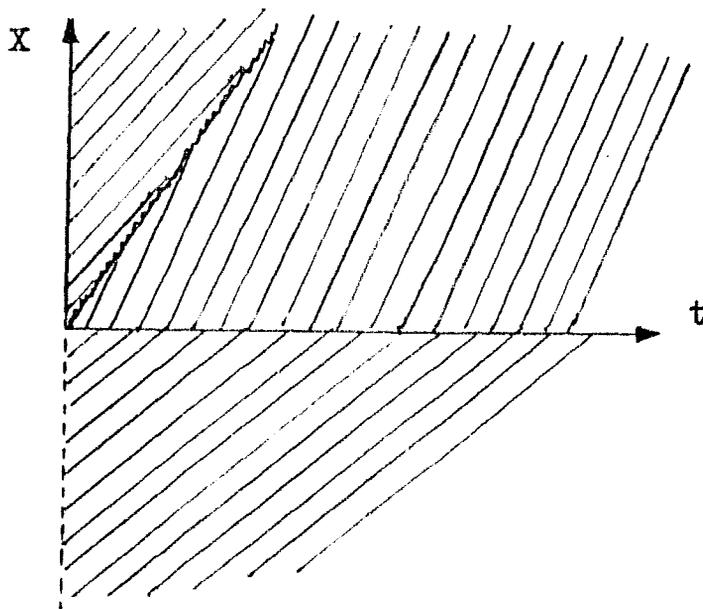


Figura 54.

Al igual que nos había sucedido antes , tenemos una región en blanco, la cual podemos llenar de la misma manera en que lo hemos venido haciendo. Entonces, el diagrama completo, introduciendo una recta de shock (pues las características se cruzan) se ve como sigue:

Figura 55. Diagrama  $x-t$ .

Si trazamos sobre este diagrama, trayectorias de autos, podríamos saber cual es el comportamiento del tráfico que sale de una posición  $X_1$  dada.

En efecto, en la figura 56 podemos observar que los autos que salen de cierta posición  $X_1 > 0$ , inician su recorrido con una velocidad que conservan en el transcurso del tiempo; en contraste con esto, los que salen de una posición  $X_0 < 0$  sufren un cambio en su velocidad al cruzar la posición  $X=0$ .

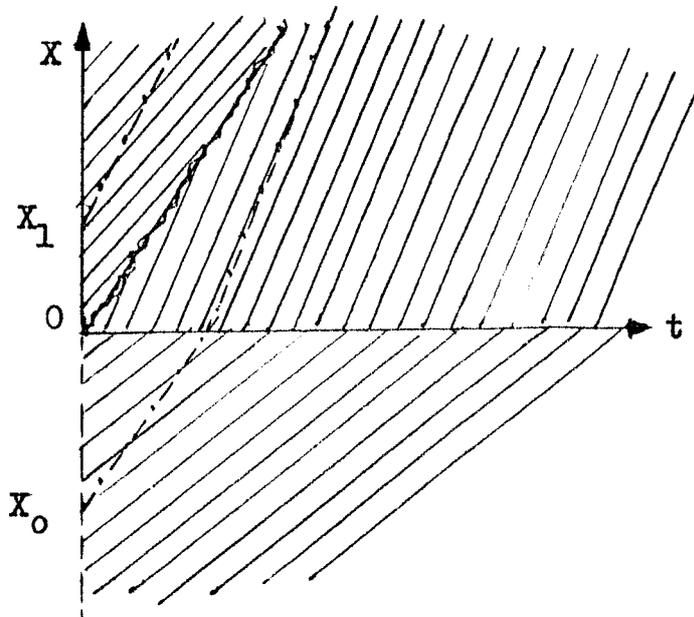


Figura 56.

Es claro que la manera de analizar este caso es la misma que se usó antes, entonces la teoría es perfectamente aplicable.

De manera similar, si ahora suponemos que se tiene el caso de la figura 51 (b) y densidad constante  $\rho_0$  (pesada, por ejemplo) a todo lo largo del camino, entonces tenemos el diagrama fundamental que se muestra a continuación.

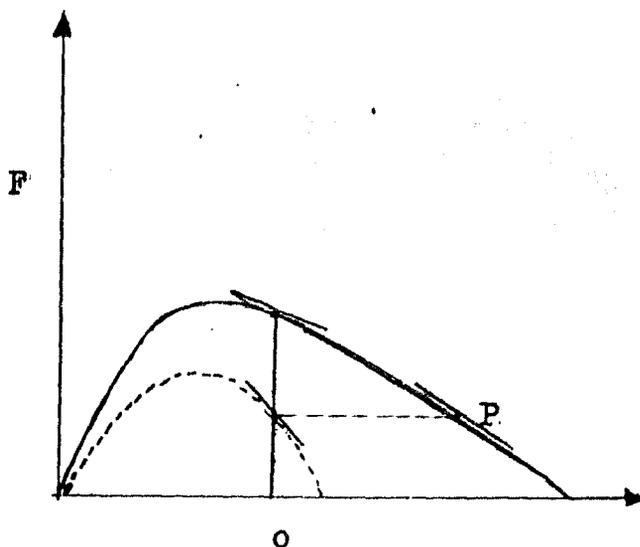


Figura 57.

Según las pendientes de las rectas tangentes a las curvas, trazamos el diagrama espacio-tiempo correspondiente, introduciendo además una recta de shock, pues en la región  $x < 0$  del camino, la densidad de tráfico cambia.

Tracemos ahora algunas trayectorias de autos para observar que sucede con los autos que salen, por ejemplo, de las posiciones  $x_0 > 0$  y  $x_1 < 0$  que se muestran en la figura 58.

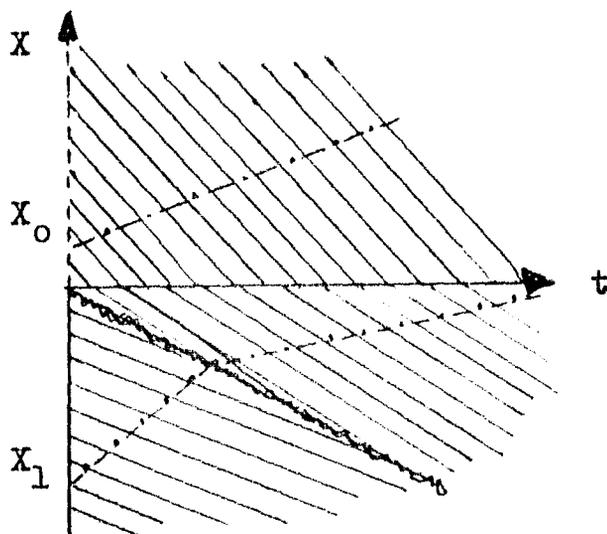


Figura 58.

Si un auto sale de  $X_0$ , su velocidad es constante y su recorrido no presenta ningún problema, en cambio para el sale de  $X_1$ , necesariamente deberá encontrarse con la recta de shock y esto provoca que su velocidad inicial cambie al momento de entrar en la región donde la densidad es más pesada. Luego de pasar la recta de shock su velocidad será constante aunque menor que la inicial.

De esta manera podríamos continuar analizando otras variantes del problema, podemos pasar al caso en que se tienen dos densidades distintas y ver que sucede con el tráfico en este caso. No obstante, realizar aquí el estudio de esto sería repetir en gran parte lo ya realizado en el capítulo anterior ya que, los resultados que se obtienen son muy similares.

Con lo que hemos visto se muestra que la teoría de flujo puede aplicarse a casos más complejos que los que regularmente se muestran en la literatura. A continuación damos el ejemplo en el que se ilustran las ideas básicas de esta teoría y su aplicabilidad se hace evidente.

Se supone un camino, el cual en condiciones normales de operación tiene un flujo de 1000 vehículos por hora a una densidad  $\rho$  de tráfico de 20 vehículos por milla.

Se tienen dos intersecciones en este camino, la 1 y la 2 (ver figura 59), separadas una de la otra por una distancia de .2 millas.

El propósito que se persigue es instalar un semáforo en alguna de esas dos intersecciones y para ello es preciso saber, según nos ha indicado un ingeniero de tránsito, si la fila que

se forma bajo la luz del semáforo en 1, alcanza a interferir con la otra intersección, porque, de ser así, debemos hacer otras consideraciones, posiblemente instalar una luz sincronizada en la intersección 2.

Es claro que, si la información que se tiene desde un principio no es suficiente para obtener una solución, estamos obligados a indagar por información adicional y clarificar nuestras dudas, para ello se supone que contamos con la ayuda de un ingeniero de tránsito, el cual nos informa que, para nuestro problema, la luz del semáforo será verde por dos minutos de un ciclo de 3 minutos.

Tratemos de resolver nuestro problema usando un modelo "simplificado" del cual esperamos obtener una estimación cuantitativa útil a nuestros propósitos .

Supongamos que se suman vehículos a la fila a la razón a la cual llegan estos a la intersección 1 del camino. Dado que la razón de flujo es de 1000 vehículos/hr. , habrá  $16 \frac{2}{3}$  vehículos llegando a la intersección 1 en un minuto. Si la luz que el semáforo tiene es roja para ese período de un minuto, entonces esos vehículos deben quedar formados en la fila. La cola resultante tiene entonces  $16 \frac{2}{3}$  vehículos.

En cuanto a la longitud de la fila, podemos calcularla considerando cuanta distancia es ocupada por cada vehículo en la formación, sin embargo el ingeniero nos dice que la concentración de autos es de  $\rho_j = 257$  vehículos por milla. Así pues, en nuestro problema, 257 autos por milla, trasladados en  $1/257 \stackrel{v}{=} .00389$  millas/vehículo, se tiene que  $16 \frac{2}{3}$  vehículos ocupan .065 millas, en realidad solo una pequeña parte de las .2 millas de longitud que separan las intersecciones. Poco después, llega nuestro ingeniero y nos comunica que él ya tiene instalada la luz y que la fila que

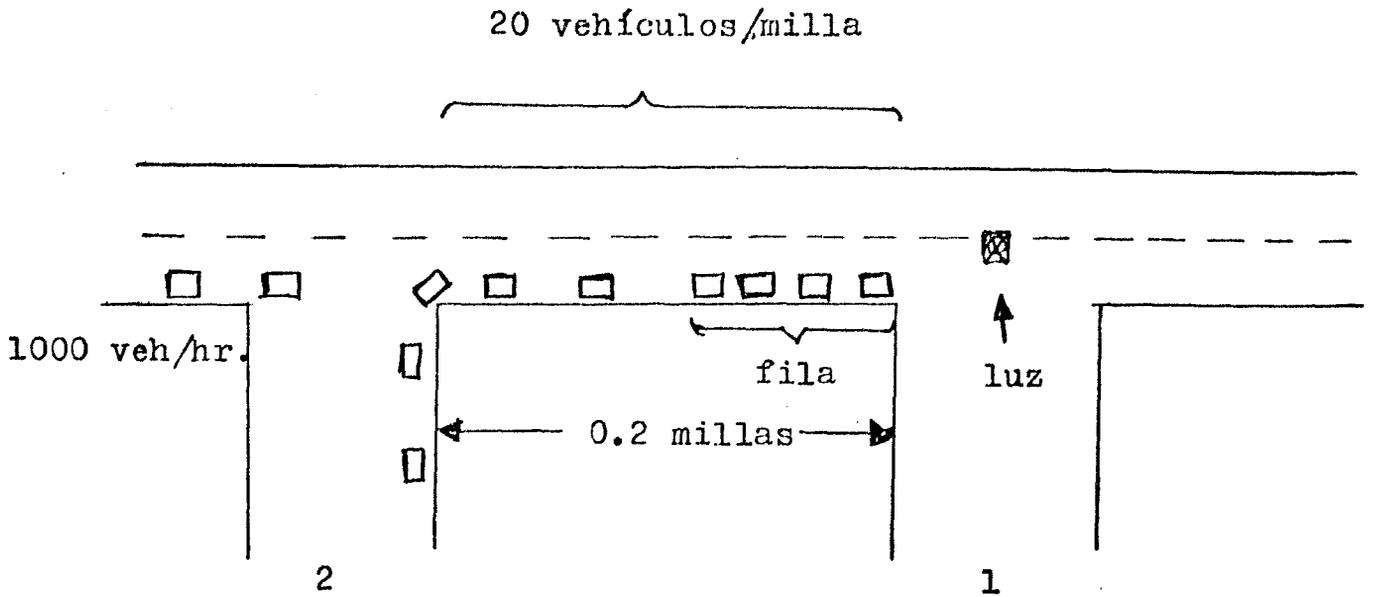


Figura 59.

se forma es mucho más larga que  $16 \frac{2}{3}$  vehículos la mayoría de las veces cuando la razón de flujo es 1000 vehículos /hr.

En efecto, él ha observado que la longitud de la fila depende de la concentración de autos, esto es, de la densidad.

Cuando la concentración alcanza cerca de 175 vehículos por milla, la fila es muy larga y entonces interfiere con la intersección 2 del camino.

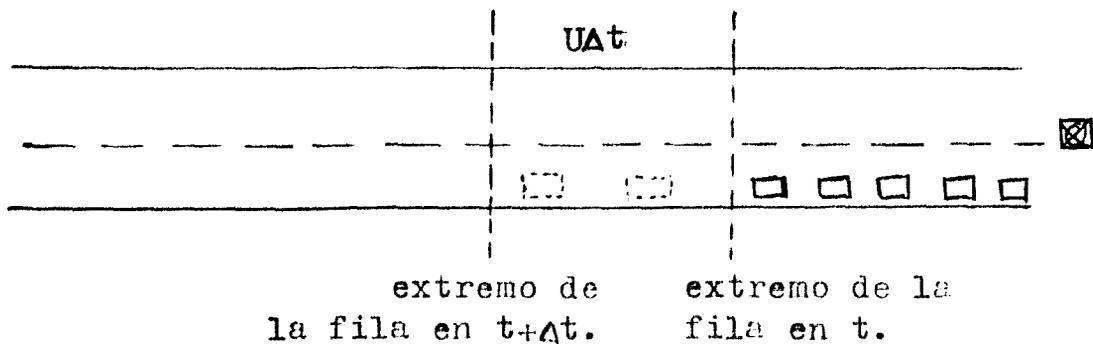


Figura 60. Razón a la cual se suman los vehículos a la fila.

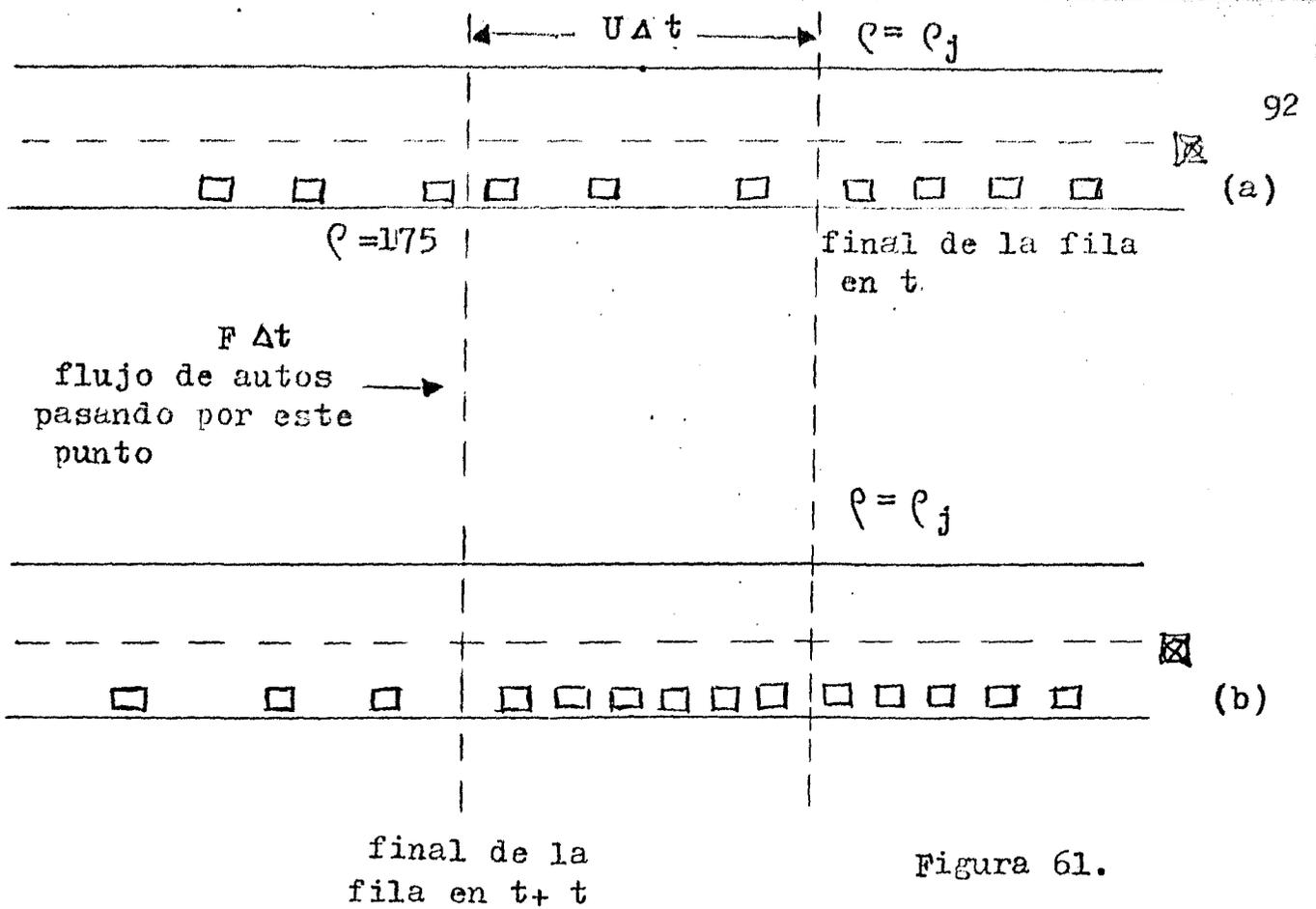


Figura 61.

Un hecho que nosotros hemos ignorado es nuestro primer análisis es que la parte posterior de la fila se mueve hacia atrás cuando los vehículos se van sumando a ella. En efecto, cuando los vehículos se suman a la fila, el final de esta se mueve hacia atrás (hacia la intersección 2) y entonces el tráfico se intersecta a una razón más rápida que aquella para la cual el flujo de tráfico pasa un punto arbitrario sobre el camino.

Desde el punto de vista de la modelación, la simplificación que hemos hecho nos resulta fatal, pues obtenemos una respuesta incorrecta, siendo el ingeniero el más perjudicado en este caso .

Deseando rectificar nuestra respuesta, consideremos un análisis más detallado que nos dé una relación para el movimiento hacia atrás de la parte final de la fila.

Si denotamos por  $U$  la velocidad a la cual la parte posterior de la fila se mueve hacia atrás, entonces la razón a la cual los vehículos se suman a la fila podemos expresarla de dos

formas . Primero, esta razón es  $U \cdot \rho_j$  . Para ver esto, considere el número de vehículos sumándose a la fila en el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$  (figura 61).

La longitud de la fila adherida es  $U \cdot \Delta t$  y el número de vehículos sumados a la fila es entonces  $U \cdot \Delta t \rho_j$  . De aquí que, la razón a la cual se suman los vehículos a fila sea  $U \cdot \rho_j$  .

Esta razón puede expresarse también por la ecuación

$$F + U \cdot \rho$$

Para ver esto, considere los vehículos fluyendo al tiempo  $t$  y al  $t + \Delta t$  . En la figura 61 (b), aquellos vehículos, los cuales han tenido que pasar la ubicación del final de la fila en el instante  $t + \Delta t$  durante el intervalo  $[t, t + \Delta t]$ , se suman a la fila. Esta contribución es  $F \cdot \Delta t$  , y en suma, aquellos vehículos, los cuales se encuentran entre el final de la fila al tiempo  $t$  y el final de la misma al tiempo  $t + \Delta t$ , son también sumados a la fila de autos. Esta contribución es  $U \Delta t \rho$  ; entonces la razón total es  $F + \rho U$ .

De las dos razones de adición de autos obtenemos la relación

$$U = \frac{F}{\rho_j - \rho}$$

(nótese que el calculo que hicimos antes usó este resultado con  $\rho = 0$ ).

Si ahora suponemos que la fila crece por un minuto ( el tiempo de duración del ciclo de luz roja), entonces su longitud será

$$U \cdot 1 = \frac{F}{\rho_j - \rho} \cdot 1$$

la cual para las condiciones de operación más graves (densidad muy pesada) con  $\rho = 175$  vehículos por milla, es cerca de .203 millas. Entonces, en esta pesada densidad, se espera que las intersecciones 1 y 2 interaccionen.

La sugerencia que podríamos hacer al ingeniero es que la luz sea instalada en la intersección 2 y que los ciclos de luces sean sincronizados de tal forma que se complementen uno con otro, con la luz en la intersección 2 permitiendo el paso de vehículos de tal manera que arriven a la intersección 1 cuando ésta entra a su ciclo de luz verde.

Con esta última respuesta, posiblemente el ingeniero de tráfico quede satisfecho. Sin embargo, el análisis que se hizo es un poco incompleto. Con una fila de vehículos de .2 millas de largo, la suposición de que la cola de autos se mueve solo para el ciclo de luz roja, es muy pobre. Al final del ciclo de luz roja, el primer auto empieza a moverse de un lado de intersección 1 al otro, seguido poco después por el segundo carro, etc.

El ingeniero nos informa que la razón de flujo  $F_s$  para este proceso que se ha observado es de 1500 vehículos/hr., a una densidad  $\rho_s$  de 50 vehículos/milla. Si la velocidad de esta onda estacionaria es  $U_s$ , entonces un análisis como el anterior nos dará :

$$U_s = \frac{F_s}{\rho_j - \rho_s}$$

lo cual tiene un valor de .12 millas por minuto en comparación con la velocidad de la parte posterior de la fila cerca de .20 millas por minuto.

De aquí se concluye que la fila de autos nunca se disipa del todo; la onda de vehículos permanece viajando tan lento que alcanza a la parte posterior de la fila. La siguiente figura es bastante ilustrativa de este hecho.

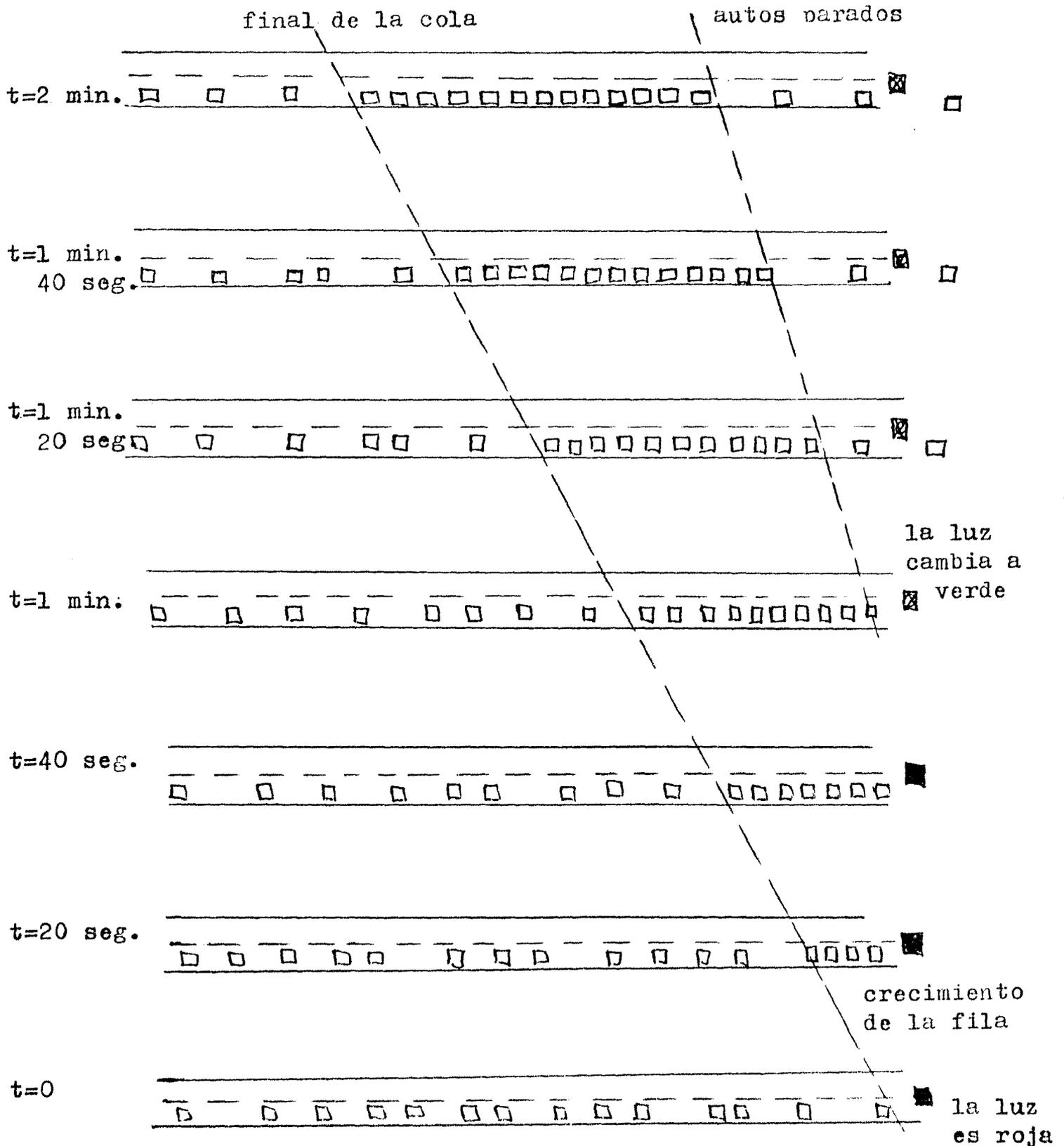


Figura 62. Evolución de la fila de autos.

Como hemos visto , podemos afirmar que la teoría del Flujo de Tráfico se encuentra aún en pleno desarrollo y que tiene y tendrá una verdadera utilidad para la resolución de los problemas de tráfico que aquejan a las grandes ciudades.

## BIBLIOGRAFIA

1. Baker, R.L., "Car Following Models", MODULES IN APPLIED MATHEMATICS, MAA College Faculty Workshop, 1976.
2. Drew, D.A., "Queue Length at a Traffic Light via Flow Theory", MODULES IN APPLIED MATHEMATICS, MAA College Faculty Workshop, 1976.
3. Gazis, D.C., Traffic Flow and Control : Theory and Applications, American Scientist, 60, 414; 1972.
4. Haberman, Richard, Mathematical Models, Prentice Hall, 1971.
5. Mochón, S., "Introducción a Medios Continuos", Notas de Clase, Comunicaciones Técnicas, IIMAS, 1983.