2 G. 40

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE LOS GRUPOS FINITOS SUPERSOLUBLES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

FERNANDO VALLEJO AGUIRRE

MÉXICO, D.F. 1984

INTRODUCCIÓN

Un grupo finito se llama soluble si admite una serie de subgrupos $G = H_0 > H_1 > \cdots > H_n = \{1\}$ tal que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ H_i es normal en H_{i-1} (pero no necesariamente en G), y el índice de H_i en H_{i-1} es un número primo.

Burnside [2] observó que en algunos grupos solubles los H_i también eran normales en G, pero no fué si no hasta 1938 que Guido Zappa [9] les da, a esos grupos, el nombre de grupos supersolubles, estudiando algunas de sus propiedades.

El objetivo de este trabajo es mostrar que en un grupo finito la supersolubilidad es equivalente a cada una de las siguientes propiedades:

1) $G/\phi(G)$ es supersoluble, donde $\phi(G)$ es el subgrupo de Frattini
2) Para todo subgrupo K de G, G/K tiene un subgrupo normal de orden primo.
3) Para todo subgrupo maximal M de G, el índice de M en G es un número primo
4) Toda serie maximal de G tiene todos los índices primos.
5) Si tomamos un subgrupo H de G y m un divisor del orden de H, existe al menos un subgrupo de H de orden m.
6) G tiene una serie principal tal que cada

factor es de orden primo.

7) Todas las series maximales tienen la misma longitud.

Solo consideraremos grupos finitos a lo largo de este trabajo.

Definición 1 Una <u>serie</u> $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_n > \cdots$ se llama <u>normal</u> si A_i es un subgrupo normal de G para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$

Definición 2 Una serie normal $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_n > \cdots$ se llama <u>serie principal</u> si para cada $i = 0, 1, 2, \ldots$ no existe un subgrupo normal H de G, tal que $A_{i+1} \subsetneq H \subsetneq A_i$

Definición 3 Una <u>serie</u> $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_n > \cdots$ se llama <u>de composición</u> si A_{i+1} es subgrupo normal de A_i para toda $i = 0, 1, \cdots$ y A_i / A_{i+1} es simple.

Definición 4 Una <u>serie</u> $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_n > \cdots$ se llama <u>maximal</u> si A_{i+1} es maximal en A_i para cada $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Definición 5 Un grupo G se llama <u>soluble</u> si G tiene una serie normal $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_{n-1} > A_n = \{1\}$ en donde cada factor A_i / A_{i+1} es abeliano.

Ejemplo de un grupo soluble es el grupo A_4

Definición 6 Un grupo G se llama <u>supersoluble</u> si G tiene una serie normal $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_{n-1} > A_n = \{1\}$ tal que A_i / A_{i+1} es cíclico.

Ejemplo de un grupo supersoluble es el grupo S_3

Observación: Los grupos supersolubles son solubles.

Definición 7 Un subgrupo P de G de orden p^m, donde p^m divide al orden de G pero p^{m+1} ya no divide al orden de G se llama p- subgrupo de Sylow de G.

Definición 8 Un grupo G se llama nilpotente si es producto directo de sus subgrupos de Sylow de G.

Definición 9 Un grupo G se llama p-nilpotente cuando G tiene un subgrupo normal R tal que el orden de G/R es p^α y el índice de R en G y el orden de R son primos relativos.

Definición 10 Una clase F de grupos finitos se llama una formación si:

i) $G \in F$ y $\bar{G}$ es imagen homomorfa de G, entonces $\bar{G} \in F$

ii) $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ y G/N_1, $G/N_2 \in F$ entonces $G/(N_1 \cap N_2) \in F$

Definición 11 Una formación se llama saturada, si para todo grupo finito G tal que $G/\phi(G) \in F$, implica que $G \in F$, donde $\phi(G)$ es el subgrupo de Frattini de G y es igual a la intersección de todos los subgrupos maximales de G.

Otros ejemplos de grupos supersolubles son:

1) Los grupos cíclicos
2) Los grupos abelianos
3) Los p-grupos.

Algunas propiedades de los grupos supersolubles son:

Proposicion 12 Si G es un grupo supersoluble y H es un subgrupo de G entonces H es supersoluble. [7]

Proposición 13 Si G es un grupo supersoluble y K es un subgrupo normal de G entonces G/K es supersoluble. [7]

Si K es un subgrupo normal de G y tanto K como G/K son supersolubles, no necesariamente G es supersoluble.

Un ajemplo de esto es el grupo A_4, el grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es normal en A_4 y es supersoluble y su cociente también es supersoluble, sin embargo A_4 no es supersoluble.

Pero si tenemos:

Proposición 14 Sea K un subgrupo de G cíclico y G/K supersoluble entonces G es supersoluble.

Demostración:

La demostración es inmediata de la definición pues como G/K es supersoluble entonces existe una serie normal $G/K = G_0/K > G_1/K > \cdots > G_n/K = K/K = \{1\}$

tal que cada $\frac{G_i/K}{G_{i+1}/K}$ es cíclico

entonces $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = K > \{1\}$ es una serie normal donde

$$G_i/G_{i+1} \cong \frac{G_i/K}{G_{i+1}/K} \quad \text{es cíclico}$$

por lo tanto G es supersoluble ⊙

<u>Proposición 15</u> Si G_1 y G_2 son grupos supersolubles entonces $G_1 \times G_2$ es supersoluble. [7]

Las demostraciones a las proposiciones 12, 13 y 15 pueden verse en la Tesis de Rosa María Menchaca Rocha [7].

<u>Proposición 16</u> Si G es un grupo finito nilpotente entonces G es supersoluble.

Demostración:

Como G es un grupo finito nilpotente entonces G es producto directo de los p-subgrupos de Sylow y como los p-grupos son supersolubles y por la proposición 13 entonces G es supersoluble ⊙

La clase de los grupos supersolubles contiene propiamente a los grupos nilpotentes ya que S_3 es supersoluble y no es nilpotente.

Proposición 17 La clase de grupos finitos supersolubles es una formación saturada, es decir, G es supersoluble si y solo si $G/\phi(G)$ es supersoluble. [7]

Proposición 18 Un grupo finito supersoluble G tiene una serie normal $G = B_0 > B_1 > \cdots > B_k = \{1\}$ en la que cada factor B_{i-1}/B_i es cíclico de orden primo.

Demostración:

Sea $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_r = \{1\}$ una serie normal con cada A_{i-1}/A_i cíclico. Si A_{j-1}/A_j es de orden $p_1 p_2 \cdots p_s$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_s$ son primos (no necesariamente distintos) entonces A_{j-1}/A_j tiene un subgrupo cíclico único de cada uno de los ordenes p_1, $p_1 p_2$, ..., $p_1 p_2 \cdots p_{s-1}$, y estos son subgrupos característicos. De donde los correspondientes $s-1$ subgrupos entre A_{j-1} y A_j son normales en G y los factores de los grupos consecutivos son cíclicos de orden primo.

Refinando de este modo cada grupo factor A_{j-1}/A_j de orden finito, obtenemos la serie normal deseada en la que cada grupo factor es cíclico de orden primo ⊙

Proposición 19 Un grupo finito supersoluble G tiene una serie normal $G = C_0 > C_1 > \cdots > C_k = \{1\}$ en la que cada C_{i-1}/C_i es cíclico de orden primo y si C_{i-1}/C_i y C_i/C_{i+1} son de orden primo p_i y p_{i+1} respectivamente, tenemos $P_i \leq P_{i+1}$

Demostración:

Tomase una serie de las dadas por la proposición 4 $G = B_0 > B_1 > \cdots > B_k = \{1\}$. Si B_{i-1}/B_i y B_i/B_{i+1} son de orden primo q y p respectivamente, con $q > p$, entonces B_{i-1}/B_{i+1} es de orden pq con $p < q$ y tiene un subgrupo característico de orden q cuya imagen inversa B_i^* será normal en G. Si remplazamos B_i por B_i^* entonces B_{i-1}/B_i^* será de orden p y B_i^*/B_{i+1} será de orden q, continuando con este proceso que no altera la longitud de la serie normal, conseguiremos finalmente una serie en la que los ordenes de los grupos factores consecutivos de orden primo no aumentan en magnitud, como se enunció en la proposición ⊙

Proposición 20 Si G es un grupo finito supersoluble de orden $P_1 P_2 \cdots P_r$ con $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_r$ son primos, entonces G tiene una serie principal $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_r = \{1\}$ donde A_{i-1}/A_i es de orden P_i.

Demostración:

La demostración es inmediata de la proposición 19⊙

Proposición 21 Sea G un grupo finito supersoluble y N un subgrupo normal minimal de G entonces N tiene orden primo.

Demostración:

Ya que G es un grupo finito supersoluble entonces tiene una serie normal $G=G_0>G_1>\cdots>G_n=\{1\}$ tal que cada G_i/G_{i+1} es cíclico.

Sea i el mayor entero tal que $G_i\cap N\neq\{1\}$ con $0\leq i\leq n$ como $G_i\cap N$ es normal de G y N es normal minimal de G entonces $G_i\cap N=N$ de donde $G_i>N$ y además $G_{i+1}\cap N=\{1\}$, por lo tanto

$$N=\frac{N}{N\cap G_{i+1}}\cong\frac{NG_{i+1}}{G_{i+1}}\leq\frac{G_i}{G_{i+1}}$$

que es cíclico, por tanto N es cíclico.

Ahora bien, N es de orden primo ya que todo subgrupo propio H de un grupo cíclico es característico en N y como N es normal en G entonces H sería normal en G, lo que es una contradicción, ya que N es minimal.

Por lo tanto N no tiene subgrupos propias.

Por lo tanto N tiene orden primo ⊙

<u>Proposición 22</u> G es supersoluble si y solo si para todo subgrupo normal K de G, G/K tiene un subgrupo normal de orden primo.

Demostración:

Primero supongamos que G es supersoluble.

Por la proposición 13, G/K es supersoluble, ya que K es normal en G y por tanto G/K tiene un subgrupo normal minimal M/K. Por la proposición 21 M/K tiene orden primo.

Ahora supongamos que para cualquier subgrupo normal K de G $\frac{G}{K}$ tiene un subgrupo normal de orden primo. Por demostrar que G es supersoluble.

Por inducción sobre el orden de G.

Sea G de orden mayor que uno.

Como $\{1\}$ es normal en G, entonces $G/\{1\} = G$ tiene un subgrupo normal N de orden primo, por lo tanto es cíclico y G/N cumple con la hipótesis de inducción, G/N es supersoluble.

Por lo tanto, G es supersoluble en virtud de la proposición 14 $\odot$

<u>Proposición</u> 23 Si G es un grupo supersoluble y M es un subgrupo maximal de G. entonces el índice de M en G es un número primo.

Demostración:

Por inducción sobre el número de divisores - primos del orden de G (posiblemente iguales).

Sea n el orden de G

Si nada más un primo divide al orden de G y una sola vez, entonces el orden de G es un número primo y la proposición se verifica.

Sea P un subgrupo normal minimal de G, entonces por la proposición 21, el orden de P es un número primo P.

Si $P<M$ entonces $M/P < G/P$ es maximal (por el Teorema de la correspondencia), entonces por hipótesis de inducción

$$p=\left[G/P : M/P\right]=\frac{|G/P|}{|M/P|}=\frac{|G|}{|M|}=[G:M]$$

con p primo.

Si $P \nless M$ entonces $M \lneqq MP=G$ ya que M es maximal y P es normal minimal de G.

$$[G:M]=[MP:M]=\frac{|MP|}{|M|}=\frac{|M|\,|P|}{|M\cap P|\,|M|} \quad \text{pero}$$

$M \cap P < P$ y $M\cap P \neq P$ ya que $P \nless M$ y dado que el orden de P es p se tiene, $M\cap P=\{1\}$

Por lo tanto $[G:M]=\dfrac{|M|\,|P|}{|M|}=|P|=p$

con p primo ⊙

<u>Proposición 24</u> Cada serie maximal de un grupo finito supersoluble está constituida por subgrupos cada uno de los cuales tiene índice primo en el que lo precede.

Demostración:

Sea $G=H_0>H_1>\cdots>H_n=\{1\}$ una serie maximal de G. El subgrupo H_i deberá ser subgrupo maximal en H_{i-1} (para $i=1,2,\cdots,n$) y como H_{i-1} es supersoluble se tiene por la proposición 23 $[H_{i-1}:H_i]=p$ con p primo ⊙

<u>Proposición 25</u> (<u>P. Hall</u>) Sea G un grupo soluble tal que su orden es mn con m y n primos relativos entonces G tiene un subgrupo de orden m, además si hay otro subgrupo de orden m entonces son conjugados. [4]

<u>Proposición 26</u> Sea G un grupo supersoluble y sea p un primo tal que p divide al orden de G entonces existe un subgrupo M de G tal que el índice de M en G es p.

Demostración:

Como G es supersoluble entonces es soluble.

Sea $p^s t$ el orden de G con p que no divida a t y S un subgrupo de G de orden t entonces el índice de S en G es p^s, sea M un subgrupo maximal de G que contenga a S, entonces $[G:S]=[G:M][M:S]$ de donde el índice de M en G es p^r para alguna r, pero por la proposición 23 $r=1$ y M resulta ser el subgrupo buscado ⊙

<u>Proposición 27</u> En los grupos finitos supersolubles es válido el inverso del Teorema de Lagrange, es decir, si G es finito supersoluble y m divide al orden de G entonces existe un subgrupo H de G tal que el orden de H es m.

Demostración :

Por inducción sobre el orden de G.

Sea n el orden de G.

Si m divide n entonces $n = mh$, sea p un número primo tal que p divida a h entonces $h = h'p$ y $n = mh'p$ por la proposición 26, G tiene un subgrupo M talque su índice en G es p, es decir, que el orden de M es mh', por hipótesis de inducción M tiene un subgrupo H de orden m, por tanto $H < M < G$

Por lo tanto G tiene un subgrupo de orden m.

Como A_4 no tiene subgrupo de orden 6, en virtud de la proposición 27, A_4 no es supersoluble.

La clase de los grupos supersolubles esta contenida propiamente en la clase de los grupos donde vale el inverso del Teorema de Lagrange ya que S_4 tiene subgrupos de todos los orden y S_4 no es supersoluble. El orden de S_4 es $24 = 2^3 3$, por los Teoremas de Sylow, S_4 tiene subgrupos de orden 2, 3, 4, 8, además S_3 y A_4 son subgrupos de S_4 de orden 6 y 12 respectivamente. Sin embargo S_4 no es supersoluble ya que A_4 no es supersoluble.

Proposición 28 (Teorema de Burnside) [2]

Sea G un grupo finito de orden $p^a q^b$ con p y q primos distintos, entonces G es soluble.

Proposición 29 (P. Hall) Sea G un grupo finito tal que el índice de M en G es p ó p^2 con p número primo para cada subgrupo maximal M de G entonces G es soluble.

Demostración:

Por inducción sobre el orden de G.

Sea p el mayor primo que divida al orden de G y sea S un p-subgrupo de Sylow de G y N el normalizador de S en G.

Si $N = G$ entonces S es normal en G y G/S es soluble por hipótesis de inducción.

Ahora bien, como S es un p-grupo entonces S es soluble y por tanto G es soluble

Supongamos ahora que N es un subgrupo propio de G.

Sea H un subgrupo maximal de G tal que $N < H < G$ y $N = N_G(S) = N_H(S)$

Por el Tercer Teorema de Sylow $[G:N] = 1+k_1 p$ y $[H:N] = 1+k_2 p$ siendo éstos el número de p-subgrupos de Sylow en G y H respectivamente.

Por lo tanto el índice de H en G es $1+kp$ pero por hipótesis $[G:H] = q$ o q^2 para algún primo q y $q < p$, $k > 0$.

Si el índice de H en G es q entonces $q = 1+kp$, tenemos $q-1 = kp$ contradiciendo que $q < p$, por lo tanto $q^2 = 1+kp$ de ahí que $(q-1)(q+1) = kp$ por tanto p divide a $(q-1)$ o a $(q+1)$, pero p no puede dividir a

Por lo tanto, si N es normal minimal de G y existe un subgrupo maximal M de G tal que $N \not\leq M$ entonces el orden de N es un número primo p.

Sea M_1/N un subgrupo maximal de G/N entonces M_1 es subgrupo maximal de G, de donde

$$\left[G/N : M_1/N\right] = \left[G : M_1\right] = p$$

con p primo y por hipótesis de inducción G/N es supersoluble. Sea

$$G/N = A_0/N > A_1/N > \cdots > A_n/N = \{1\}$$

una serie normal tal que cada factor sea de orden primo entonces la serie $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_{n-1} > N > \{1\}$ es normal y cada factor tiene orden primo, lo que implica que G es supersoluble ⊙

Proposición 31 Si G es un grupo finito entonces G es supersoluble si y solo si toda serie maximal de G tiene todos los índices primos.

Demostración:

Supongamos primero que G es supersoluble y sea $G = H_0 > H_1 > \cdots > H_n = \{1\}$ una serie maximal de G. Si H_i y H_{i+1} son subgrupos consecutivos de la serie, entonces H_i es supersoluble y H_{i+1} es subgrupo maximal de H_i entonces tiene índice primo por la proposición 23.

Inversamente sea M un subgrupo maximal de G y sea $G > M > M_1 > \cdots > \{1\}$ una serie maximal de G, por hipótesis el índice de M en G es un primo p y por la proposición 30 (Huppert) G es supersoluble ⊙

Diremos que un grupo finito G tiene la propiedad α si H es un subgrupo de G y m divide al orden de H entonces existe un subgrupo S de H tal que el orden de S es m.

Todo grupo supersoluble verifica la propiedad α y demostraremos que si un grupo G satisface la propiedad α entonces G es supersoluble.

Demostraremos primero unas proposiciones previas.

Proposición 32 Si G tiene la propiedad α entonces cada subgrupo de G tiene la propiedad α.

Demostración:

La demostración es evidente ⊙

Proposición 33 Si el grupo finito G tiene la propiedad α y N es un subgrupo normal de G entonces G/N tiene la propiedad α.

Demostración:

Si G tiene orden primo entonces se verifica la proposición.

Por inducción sobre el orden de G.

Sea $S/N \subsetneq G/N$ y $S \subsetneq G$ (por el Teorema de la correspondencia) entonces S tiene la propiedad α y por hipótesis de inducción S/N tiene la propiedad α.

En particular sea $\bar{m}$ un divisor del orden de S/N entonces tiene un subgrupo de orden $\bar{m}$.

Basta con demostrar que si $\bar{m}$ es un divisor del orden de G/N, G/N tiene un subgrupo de orden $\bar{m}$.

Sea g el orden de G y $\bar{g}$ y n el orden de G/N y N respectivamente entonces $g = \bar{g}n$.

Sea $\bar{m}$ un divisor de $\bar{g}$ y supongamos primero que $\bar{g} = \bar{m}p$ con p primo.

Dado que $\bar{g}$ divide a g y p divide a $\bar{g}$ entonces p divide a g, por hipótesis G tiene un subgrupo S de orden g/p.

Si $N \leq S$ entonces $S/N \leq G/N$ cuyo orden es $g/pn = \bar{g}/p = \bar{m}$ como se requería.

Supongamos $N \nleq S$. Siendo S de índice primo en G entonces es máximo y siendo N normal en S se tiene que $SN = G$.

Puesto que $I = S \cap N$ se tiene que $G/N \cong S/I$ (por el segundo Teorema de isomorfismos).

Pero $S \lneqq G$ que tiene la propiedad α por hipótesis de inducción tambien S/I la verifica. Por tanto S/I al igual que G/N tiene orden $\bar{g}$ y p divide a $\bar{g}$ entonces tiene un subgrupo de orden $\bar{g}/p = \bar{m}$ como se requería.

Ahora bien, si $\bar{g} = \bar{m}d$ con d compuesto, sea p un divisor primo de d entonces $d = pr$. Por cuanto se ha visto G/N tiene un subgrupo T/N de orden $\bar{g}/p = \bar{m}r$

$T \leq G$ (por el Teorema de la correspondencia) y siendo $\bar{m}$ un divisor del orden de T/N entonces este último tiene un - subgrupo de orden $\bar{m}$ por hipótesis de inducción, el cuál es también subgrupo de G/N ⊙

Proposición 34 Sea G un grupo finito, H un subgrupo maximal de G y H_1 subgrupo maximal de G tal que $H \neq H_1$ y - H y H_1 son conjugados. Entonces H y H_1 no son permutables.

Demostración:

Supongamos que H y H_1 son permutables y siendo máximos $HH_1 = G$

Sea $g \in G$ tal que $g^{-1} H g = H_1$ entonces $g = hh_1$ con $h \in H$ y $h_1 \in H_1$ de donde $(hh_1)^{-1} H (hh_1) = H_1$, de ahí que $h_1^{-1} H h_1 = H_1$ ya que $h \in H$, por lo tanto $H = h_1 H_1 h_1^{-1}$ de donde $H = H_1$ ya que $h_1 \in H_1$ contradiciendo la hipótesis de que fueran distintos ⊙

Proposición 35 Sean A y B subgrupos de G. Entonces el producto AB está constituido por clases laterales derechas de A en G (está constituido por clases laterales izquierdas de B en G). Si se pone, para cada clase lateral derecha Ax de A contenida en AB (para cada clase lateral izquierda yB de B contenida en AB)

$$\varphi(Ax) = Ax \cap B \qquad [\psi(yB) = yB \cap A]$$

se viene a definir una aplicación biyectiva φ (respectivamente φ) del conjunto de clases laterales derechas de A contenidas en AB sobre el conjunto de clases laterales derechas de $A\cap B$ en B (del conjunto de clases laterales izquierdas de B contenidas en AB sobre el conjunto de clases laterales izquierdas de $A\cap B$ en A).

Demostración:

Por demostrar que $AB = \bigcup_{b\in B} Ab$

Si $x \in \bigcup_{b\in B} Ab$ entonces $x \in Ab$ para alguna $b\in B$ pero $Ab \leq AB$ entonces $x \in AB$.

Si $x \in AB$ entonces x es de la forma $x = ab$ con $a\in A$ y $b\in B$, de donde $x \in Ab$ con $b\in B$. Por lo tanto $x \in \bigcup_{b\in B} Ab$.

Ahora bien, dada $\varphi(Ab) = Ab\cap B$ tenemos que demostrar que φ es inyectiva y suprayectiva.

Si $\varphi(Ab_1) = \varphi(Ab_2)$ con $b_1 \in B$, $b_2\in B$, entonces $Ab_1\cap B = Ab_2 \cap B$ de ahí que $(A\cap B)b_1 = (A\cap B)b_2$ esto implica que $b_1 - b_2 \in A\cap B$ de donde, tenemos $b_1 - b_2 \in A$ entonces $Ab_1 = Ab_2$. Por lo tanto φ es inyectiva.

Sea $b\in B$ entonces $Ab\cap B = \varphi(Ab)$ con $Ab = Ab_j$ para alguna j. Por lo tanto φ es suprayectiva.

Por lo tanto φ es biyectiva $\circ$

Proposición 36 Sean A y B subgrupos de G y el índice de A en $\langle A\cup B\rangle$ es un número finito n, entonces el -

índice de $A\cap B$ en B es finito y menor o igual a n.

Demostración:

Por hipótesis $[\langle A\cup B\rangle : A] = n$ finito y dado que $\bigcup_{b\in B} Ab = AB \leq \langle A\cup B\rangle$, por la proposición 35 hay una aplicación φ biyectiva, del conjunto de clases laterales derechas de A contenidas en AB sobre el conjunto de clases laterales derechas $A\cap B$ contenidas en B. Entonces $[B : A\cap B] \leq [\langle A\cup B\rangle : A] = n$ $\odot$

Proposición 37 Sea G un grupo finito, p el primo más chico que divida al orden de G, H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal en G.

Demostración:

Sea H_1 un conjugado de H

Si $H_1 \neq H$ entonces $\langle H\cup H_1\rangle = G$, ya que siendo H de índice primo es máximo.

Sea $[H_1 : H\cap H_1] = i$, pero i no supera al índice de H en G, ya que por la proposición 36

$$[H_1 : H\cap H_1] \leq [G : H] = p$$

Por lo tanto $i \leq p$, por otra parte i debe dividir al orden de G, de ahí que $i \geq p$. Por lo tanto $i = p$ y $[H_1 : H\cap H_1] = p$ entonces

$$[H_1 : H\cap H_1] = \frac{|H_1|}{|H\cap H_1|} = p \quad y \quad \frac{|H_1|}{p} = |H\cap H_1|$$

pero

$$|HH_1| = \frac{|H||H_1|}{|H \cap H_1|} = \frac{g/p \; g/p}{|H_1|/p} = \frac{g/p \; g/p}{g/p^2} = g$$

y el orden de G es igual al orden de HH_1, pero entonces H y H_1 permutan y son maximales, lo cual no es posible por la proposición 34. Por lo tanto $H = H_1$ y ya que H_1 es cualquier conjugado de H, se tiene entonces que H es normal ⊙

<u>Proposición 38</u> Si G es un grupo finito de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ con $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ números primos. Si G tiene la propiedad α entonces G tiene un subgrupo normal de orden $p_1^{\alpha_1}$.

Demostración:

Por inducción sobre el orden de G.

Ya que G tiene la propiedad α entonces debe existir un subgrupo H de G tal que su orden sea $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r - 1}$ cuyo índice en G es p_r y siendo p_r el primo más chico de los divisores del orden de G, entonces H es normal en G por la proposición 37

Cada subgrupo H de G tiene la propiedad α, de ahí que, por hipótesis de inducción, H tiene un subgrupo P de orden $p_1^{\alpha_1}$ normal en H, el que resulta ser un p_1-subgrupo de Sylow de H. Por el segundo Teorema de Sylow, los p_1-subgrupos de Sylow de H son conjugados, pero siendo P normal es el único p_1-subgrupo de Sylow de H, por lo tanto es caracterís tico en H. Siendo H normal en G entonces P es normal en G ⊙

Proposición 39 Cada grupo finito G que verifica la propiedad α es soluble.

Demostración:

Por inducción sobre el orden del grupo.

Si P es el divisor más grande que divide al orden de G, G tiene un p-subgrupo de Sylow normal P por la proposición 38.

Por la proposición 33, G/P tiene la propiedad α, y por hipótesis de inducción G/P es soluble, Pero P es soluble ya que es un p-grupo.

Por lo tanto G es soluble⊙

Proposición 40 Un grupo finito G es supersoluble si y solo si verifica la propiedad α.

Demostración:

La condición de necesidad se satisface del hecho de que en los grupos finitos supersolubles es válido el inverso del Teorema de Lagrange (proposición 27) y de que los subgrupos de un grupo finito supersoluble son supersolubles.

Probaremos que esta condición es suficiente.

Por inducción sobre el orden de G.

Sea G que verifique la propiedad α, de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ con $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ números primos.

Ahora bien, por la proposición 38 G tiene un p_1-subgrupo de Sylow normal P, y el centro Z de P es distinto de la identidad y siendo Z característico en P, es normal en G. Por otra parte G es soluble (proposición 39) por lo tanto tiene un p_1-complemento de Sylow S de orden $p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

Como p_1^{β} es el orden de Z, se tiene que siendo Z normal de G, $\langle S \cup Z \rangle = SZ$ y tiene orden $p_1^{\beta} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, por lo tanto $SZ < G$ que tiene la propiedad α y entonces tiene un subgrupo R tal que su orden es $p_1 p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

Tenemos que $\langle R \cup Z \rangle = RZ$ cuyo orden debe ser, por un lado, divisible por p_1^{β} y por otro por $p_1 p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, por lo tanto debe ser divisible por $p_1^{\beta} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y siendo $RZ \leqq SZ$ se tiene que $RZ = SZ$

Ya que el orden de Z es p_1^{β} y el orden de R es $p_1 p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y el orden de RZ es $p_1^{\beta} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y el índice de Z en RZ es $p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ que es igual al índice de $R \cap Z$ en R, tenemos que el orden de $R \cap Z$ es p_1 y siendo Z normal en G entonces Z es normal en RZ y $R \cap Z$ es normal en R (por el Teorema de isomorfismos). Como $R \cap Z \leqq Z$ y Z es normal en P entonces $R \cap Z$ es normal en P, de donde $\langle P \cup R \rangle \geqslant \langle P \cup S \rangle = G$, por lo tanto $R \cap Z$ es normal en $\langle P \cup R \rangle = G$

por lo tanto G tiene un subgrupo normal $R \cap Z$ tal que su orden es un primo p_1, en base a la proposición 33 $G/R \cap Z$ tiene la propiedad α y por hipótesis de inducción $G/R \cap Z$ es supersoluble.

Sea $$\frac{G}{R\cap Z} > \frac{L_1}{R\cap Z} > \cdots > \frac{L_n}{R\cap Z} = \frac{R\cap Z}{R\cap Z} = \{1\}$$

una serie principal de $G/R \cap Z$ entonces la serie formada (por el Teorema de la correspondencia)

$$G > L_1 > \cdots > L_n = R\cap Z > \{1\}$$

es una serie principal de G con índices todos primos

Por lo tanto G es supersoluble ⊙

<u>Proposición 41</u> Si G es un grupo finito supersoluble de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ números primos, entonces el p_1-subgrupo de Sylow de G es normal en G.

Demostración:

La demostración es inmediata de la proposición 38 ⊙

Se dice que un grupo G tiene la <u>propiedad</u> β si M es un subgrupo maximal de G, entonces existe un subgrupo cíclico X de G tal que el orden de X es una potencia de un número primo y $G = MX$.

Por el Teorema de Huppert (proposición 23) se tiene que si G es un grupo finito supersoluble y M es un subgrupo maxi mal de G entonces el índice de M en G es un número primo.

Ahora bien, debe existir un elemento x de G que no - pertenezca a M cuyo orden es una potencia de p, de lo - contrario M contendría a todos los p-subgrupos de Sylow de G y por lo tanto su índice en G no podría ser p. El - subgrupo $\{x\} \cap M \neq \{x\}$ ya que si $\{x\} \cap M = \{x\}$ entonces $\{x\} < M$ y $x \in M$ contradiciendo lo supuesto, por tanto el índice de $\{x\} \cap M$ en $\{x\}$ es una potencia p^i de p, por ser $\{x\}$ un p-grupo, pero $\{x\}/\{x\} \cap M \cong \{x\}M/M$ y por lo - tanto $[\{x\}M : M] = p^i$ pero

$$p = [G : M] = [G : \{x\}M][\{x\}M : M] = [G : \{x\}M]\, p^i$$

por lo tanto $i = 1$ y $G = \{x\}M$

Entonces un grupo finito supersoluble tiene la propiedad β.

Nos podemos preguntar ahora si el inverso es cierto, es- decir, si un grupo finito tiene la propiedad β, será supersoluble. La respuesta es <u>no</u>. Tomemos el grupo de permutaciones S_4, que no es supersoluble, sin embargo tiene la propiedad β, ya que los subgrupos maximales de S_4 son: 1) el subgrupo de Sylow de orden 8

2) el grupo alternante A_4

3) los cuatro subgrupos de orden 6, cada uno de- los cuales está constituido de las permutaciones que dejan fijo uno de los cuatro elementos.

Los subgrupos de 1) y 2) tienen por índice un número primo, así, por cuanto se ha visto, si M es uno de- ellos, existe un subgrupo X, de orden potencia de un número primo, tal que $S_4 = MX$

Examinemos un subgrupo de 3), por ejemplo, el formado por las permutaciones que dejan fijo al elemento 4, a este subgrupo lo denotaremos por M. Sea X el subgrupo cíclico de orden 4 generado por $(1\,2\,3\,4)$, se tiene que $M \cap X = \{1\}$, de ahí que MX tiene orden 24 y por tanto $S_4 = MX$. Por lo tanto S_4 tiene la propiedad β.

O. K. Kegel en [5] ha demostrado que:

> Una condición necesaria y suficiente para que un grupo finito G sea supersoluble es que tenga la propiedad β y no sea homomorfo al grupo de permutaciones S_4, es decir, no existe un epimorfismo de G en S_4.

<u>Proposición 42</u> (<u>Teorema de Jordan - Hölder</u>)

Dadas dos series de composición (principales) de G

$$G = A_0 > A_1 > \cdots > A_r > \{1\}$$
$$G = B_0 > B_1 > \cdots > B_s > \{1\}$$

existe una biyección φ entre los factores de composición (principales) de dichas series, tal que $\varphi\left(A_i/A_{i+1}\right)$ es isomorfo a A_i/A_{i+1}.

Demostración:

Se dará primero la demostración para series de composición.

Sean

$$G = A_0 \triangleright A_1 \triangleright \cdots \triangleright A_r \triangleright \{1\} \qquad (\mathrm{I})$$

$$G = B_0 \triangleright B_1 \triangleright \cdots \triangleright B_s \triangleright \{1\} \qquad (\mathrm{II})$$

dos series de composición de G. Si es el caso que los factores de composición

$$G/A_1, \ A_1/A_2, \ \ldots, \ A_{r-1}/A_r, \ A_r \qquad (\mathrm{I}')$$

y

$$G/B_1, \ B_1/B_2, \ \ldots, \ B_{s-1}/B_s, \ B_s \qquad (\mathrm{II}')$$

son isomorfos a pares, escribiremos $\mathrm{I} \sim \mathrm{II}$. Esto establece claramente una relación de equivalencia en el conjunto de todas las posibles series de composición, y nuestro propósito es demostrar que todas las series de composición son equivalentes en este sentido. Observando que en particular, $\mathrm{I} \sim \mathrm{II}$ implica que $r = s$.

Cuando G es un grupo simple, la única serie de composición posible es $G \triangleright \{1\}$. En este caso, las series I y II son idénticas y tenemos $r = s = 0$. Entonces la proposición se cumple trivialmente para todos los grupos simples y en particular para los grupos de orden menor que cuatro.

Procederemos por inducción sobre el orden de G, supongamos que $r \geq 1$ y $s \geq 1$. Dos casos deben ser distinguidos.

1°) Si $A_1 = B_1$. Omitiendo el primer término en I y II obtenemos dos series de composición para A_1

$$A_1 \triangleright A_2 \triangleright \cdots \triangleright A_r \triangleright \{1\}$$

y

$$A_1 \triangleright B_2 \triangleright \cdots \triangleright B_s \triangleright \{1\}$$

Ya que el orden de A_1 es menor estrictamente que el orden de G, por hipótesis de inducción tenemos que los factores de composición

$$A_1/A_2\ ,\ A_2/A_3\ ,\ \ldots\ ,\ A_{r-1}/A_r\ ,\ A_r$$

y

$$A_1/B_2\ ,\ B_2/B_3\ ,\ \ldots\ ,\ B_{s-1}/B_s\ ,\ B_s$$

son isomorfos a pares. En virtud de que los primeros términos en I' y II' ahora son idénticos, tenemos $I \sim II$, y por lo tanto la proposición se verifica en este caso.

2°) Si $A_1 \neq B_1$. Como A_1 y B_1 son normales en G, el grupo $C = A_1B_1$ es normal en G y contiene a A_1 y a B_1, en particular $G \gneqq C \gneqq A_1$. Pero A_1 es un subgrupo normal maximal de G. Entonces $C = G$ o $C = A_1$. Si $C = A_1$ entonces $B_1 < A_1 < G$ que contradice que B_1 es normal maximal de G. Por lo tanto $G = A_1B_1$.

Sea $D = A_1 \cap B_1$. Por los Teoremas de isomorfismos

$$G/A_1 = A_1B_1/A_1 \cong B_1/A_1\cap B_1 = B_1/D \quad \text{y} \quad G/B_1 \cong A_1/D$$

Por construcción G/A_1 y G/B_1 son grupos simples y por tanto B_1/D y A_1/D también lo son, esto es, D es subgrupo normal maximal de A_1 y de B_1.

Sea $D \triangleright D_1 \triangleright D_2 \triangleright \cdots \triangleright D_t \triangleright \{1\}$ cualquier serie de composición para D. Podemos construir dos series de composición para G, de esta manera

$$G \triangleright A_1 \triangleright D \triangleright D_1 \triangleright \cdots \triangleright D_t \triangleright \{1\} \qquad (\mathrm{III})$$

y

$$G \triangleright B_1 \triangleright D \triangleright D_1 \triangleright \cdots \triangleright D_t \triangleright \{1\} \qquad (\mathrm{IV})$$

Necesariamente todos los factores de composición

$$G/A_1, \ A_1/D, \ \Big| \ D/D_1, \ \ldots, \ D_t \qquad (\mathrm{III}')$$

y

$$G/B_1, \ B_1/D, \ \Big| \ D/D_1, \ \ldots, \ D_t \qquad (\mathrm{IV}')$$

son grupos simples como hemos observado. Los factores de composición del lado ~~t~~derecho de la linea vertical son comúnes en III' y IV', ahora bien, los del lado izquierdo son isomorfos a pares. Entonces $\mathrm{III} \sim \mathrm{IV}$. Pero I y III tienen los primeros dos términos iguales, que es la situación que ya discutimos en el 1^er^ caso, por lo tanto $\mathrm{I} \sim \mathrm{III}$, similarmente $\mathrm{II} \sim \mathrm{IV}$. Podemos concluir por lo tanto que $\mathrm{I} \sim \mathrm{II}$, y esto completa la demostración para las series de composición ⊙

Seguiremos con la demostración para series principales.

Sean

$$G > A_r > A_{r-1} > \cdots > A_2 > A_1 > \{1\} \qquad (\mathrm{I})$$

$$G > B_s > B_{s-1} > \cdots > B_2 > B_1 > \{1\} \qquad (\mathrm{II})$$

dos series principales de G. Si es el caso que los factores principales

$$G/A_r\,,\ A_r/A_{r-1}\,,\ \ldots,\ A_2/A_1\,,\ A_1 \qquad (I')$$

y

$$G/B_s\,,\ B_s/B_{s-1}\,,\ \ldots,\ B_2/B_1\,,\ B_1 \qquad (II')$$

son isomorfos a pares, escribiremos $I \sim II$. Esto establece una relación de equivalencia, como en el caso para series de composición, y se demostrará que las series principales son equivalentes en este sentido. Observando en particular que $I \sim II$ implica que $r = s$.

Notemos que si G es un grupo simple, la única serie principal es $G \triangleright \{1\}$. En este caso, las series I y II son identicas y $r = s = 0$. Entonces la proposición para series principales se cumple trivialmente para todos los grupos simples y en particular para los grupos de orden menor que cuatro.

Se procederá por inducción sobre el orden de G, y supongamos que $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$. Se analizarán dos casos.

1°) Si $A_1 = B_1$. Entonces tenemos

$$G/A_1 > A_r/A_1 > \cdots > A_2/A_1 > \{1\}$$

y

$$G/A_1 > B_s/A_1 > \cdots > B_2/A_1 > \{1\}$$

dos series principales de G/A_1 ya que

$A_i/A_1 \triangleleft G/A_1$ y $B_j/A_1 \triangleleft G/A_1$ para $i=2,\dots,r$, $j=2,\dots,s$

y además

$$\frac{A_i/A_1}{A_{i-1}/A_1} \cong A_i/A_{i-1} \qquad \frac{B_j/A_1}{B_{j-1}/A_1} \cong B_j/B_{j-1}$$

son simples para $i=2,\dots,r$, $j=2,\dots,s$.

Pero el orden de G/A_1 es menor que el orden de G, por hipótesis de inducción tenemos que los factores principales

$$\frac{G/A_1}{A_r/A_1}, \frac{A_r/A_1}{A_{r-1}/A_1}, \dots, \frac{A_3/A_1}{A_2/A_1}, A_2/A_1$$

y

$$\frac{G/A_1}{B_s/A_1}, \frac{B_s/A_1}{B_{s-1}/A_1}, \dots, \frac{B_3/A_1}{B_2/A_1}, B_2/A_1$$

son isomorfos a pares. Entonces

$$\frac{A_i}{A_{i-1}} \cong \frac{A_i/A_1}{A_{i-1}/A_1} \cong \frac{B_j/A_1}{B_{j-1}/A_1} \cong \frac{B_j}{B_{j-1}}$$

Por lo tanto $I \sim II$ y $r=s$.

2°) Si $A_1 \neq B_1$. Como $A_1 \triangleleft G$ y $B_1 \triangleleft G$ entonces $A_1B_1 \triangleleft G$ y $A_1B_1/A_1 \cong B_1/A_1\cap B_1$, ahora bien, ya que $A_1 \cap B_1 < A_1$ y $A_1\cap B_1 < B_1$ entonces $A_1 \cap B_1 \triangleleft G$ y A_1 y B_1 son normales minimales de G, se tiene $A_1 \cap B_1 = \{1\}$. Por lo tanto

$$\frac{A_1B_1}{A_1} \cong B_1 \qquad y \qquad \frac{A_1B_1}{B_1} \cong A_1$$

Supongamos ahora que $B_1 < TB_1 < A_1B_1$ y $TB_1 \triangleleft G$ entonces $g^{-1}TB_1g = TB_1$, pero $g^{-1}TB_1g = g^{-1}Tgg^{-1}B_1g = g^{-1}Tg\,B_1 = TB_1$, entonces $T \triangleleft G$, además $T \cong TB_1/B_1 < A_1B_1/B_1 \cong A_1$ entonces $T < A_1$ y $T \triangleleft A_1$ contradiciendo que A_1 es normal minimal de G. Entonces A_1 y B_1 son subgrupos normales maximales de A_1B_1. Podemos formar dos series principales para G de esta manera:

$$G > T_n > T_{n-1} > \cdots > T_1 > A_1B_1 > A_1 > \{1\} \qquad (\mathrm{III})$$

y

$$G > T_n > T_{n-1} > \cdots > T_1 > A_1B_1 > B_1 > \{1\} \qquad (\mathrm{IV})$$

donde los factores principales

$$G/T_n,\ T_n/T_{n-1},\ \ldots,\ T_2/T_1,\ T_1/A_1B_1,\ \Big|\ A_1B_1/A_1,\ A_1 \qquad (\mathrm{III}')$$

y

$$G/T_n,\ T_n/T_{n-1},\ \ldots,\ T_2/T_1,\ T_1/A_1B_1,\ \Big|\ A_1B_1/B_1,\ B_1 \qquad (\mathrm{IV}')$$

son grupos simples. Los factores principales del lado izquierdo de la linea vertical son comúnes en III' y IV', ahora bien, los del lado derecho son isomorfos a pares. Entonces $\mathrm{III} \sim \mathrm{IV}$. Pero I y III tienen los últimos dos términos iguales y esta situación ya la discutimos en el 1er caso, por lo tanto $\mathrm{I} \sim \mathrm{III}$, similarmente $\mathrm{II} \sim \mathrm{IV}$. Podemos concluir que $\mathrm{I} \sim \mathrm{II}$, y esto completa la demostración para las series principales y por lo tanto de la proposición ⊙

Como una consecuencia del Teorema de Jordan-Hölder (proposición 42), la proposición 21 (G grupo finito supersoluble y N un subgrupo normal minimal de G entonces N tiene orden primo) tiene una demostración más sencilla, ya que por la proposición 20 se sabe que G tiene una serie principal en la que cada factor es de orden primo y por el Teorema de Jordan-Hölder se tiene que N es de orden primo.

Por el Teorema de Jordan-Hölder sabemos entonces que en un grupo finito dos series de composición o dos series principales tienen la misma longitud. Esto no sucede con las series maximales, por ejemplo, tomemos al grupo alternante A_4

$$A_4 > \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 > \mathbb{Z}_2 > \{1\}$$

y

$$A_4 > \mathbb{Z}_3 > \{1\}$$

son series maximales de A_4 y no tienen la misma longitud.

Sin embargo si el grupo es supersoluble, entonces todas las series maximales tienen la misma longitud.

En efecto, sea $G = A_0 > A_1 > \cdots > A_t = \{1\}$ una serie maximal de G. Por la proposición 23, todo subgrupo maximal de un grupo supersoluble tiene índice primo, por lo tanto $[A_i : A_{i+1}] = p_i$ con $i = 0,1,\ldots,t-1$ ya que subgrupos de supersolubles son supersolubles, de donde el orden de G es $p_0 p_1 \cdots p_{t-1}$ con p_i primo (no necesariamente distintos).

Sea $G = B_0 > B_1 > \cdots > B_s = \{1\}$ otra serie maximal de G

por el mismo argumento $[B_j : B_{j+1}] = q_j$ con $j=0,1,\cdots,s-1$ y el orden de G es igual a $q_0 q_1 \cdots q_{s-1}$ con q_j primo (no necesariamente distintos), por el Teorema Fundamental del Algebra se tiene que $t=s$, por lo tanto tienen la misma longitud.

Aún más, este hecho caracteriza a los grupos supersolubles.

Proposición 43 (Teorema de K. Iwasawa)

Si todas las series maximales de G tienen la misma longitud entonces G es supersoluble.

Antes de demostrar el Teorema de K. Iwasawa, veremos unas proposiciones previas.

Proposición 44 (O. J. Schmidt - K. Iwasawa)

Si G es un grupo finito tal que cada subgrupo máximal es nilpotente entonces G es soluble.

Demostración:

Se hará la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un grupo finito no soluble cuyos subgrupos maximales son todos nilpotentes.

De el conjunto de grupos finitos con esta propiedad sea G de orden mínimo.

Cada subgrupo de G está contenido en un subgrupo maximal que es nilpotente, por lo tanto será nilpotente.

Mostraremos que G es simple. Porque de lo contrario, si G no fuera simple entonces G tendría un subgrupo normal propio H. Ahora bien, H será nilpotente, por tanto soluble y cada subgrupo propio de G/H será nilpotente ya que será una imágen homomorfa de un subgrupo propio (que es nilpotente) de G. Pero el orden de G/H es más chico que el orden de G entonces por hipótesis G/H es soluble y siendo H soluble tendríamos que G es soluble. Pero por hipótesis G no era soluble y entonces llegamos a una contradicción. Por lo tanto G es simple.

Notamos que G deberá tener al menos dos subgrupos maximales, porque si tuviese uno solo, llamémosle M, un elemento de G que no pertenezca a M no puede estar contenido en ningún subgrupo maximal, de donde no puede generar ningún subgrupo propio y generaría a todo G, que resultaría ser cíclico y por lo tanto soluble, contradiciendo la hipótesis.

Probaremos que la intersección de dos subgrupos maximales de G es siempre la unidad. Supongamos que no lo sea y tomemos dos subgrupos maximales distintos A, B de G, tal que la intersección

D tenga el mayor orden posible.

El subgrupo A es por hipótesis nilpotente, por lo tanto el normalizador de D en G es mayor que D y $N_G(D) \cap A > D$. Ya que $N_G(D)$ contiene elementos de A que no están en D, por lo tanto contenidos en A pero no en B, por lo tanto $N_G(D)$ no está contenido en B. Análogamente $N_G(D)$ no está contenido en A. Además $N_G(D)$ es distinto de G ya que si $N_G(D) = G$ entonces D sería normal en G y como D es un subgrupo propio diferente de la identidad entonces G no sería simple.

Por lo tanto $N_G(D)$ está contenido en al menos un subgrupo maximal C, distinto de A y B. Tenemos $C \cap A \geq N_G(D) \cap A > D$, entonces la intersección de los subgrupos A y C tendrá orden mayor que el orden de D, contradiciendo a la hipótesis de que D tuviera mayor orden posible.

Por lo tanto la intersección de dos subgrupos maximales distintos deberá ser la unidad.

Ahora, sea A un subgrupo maximal de G y sean $A_1 = A, A_2, \ldots, A_m$ los subgrupos conjugados de A. Todos ellos son maximales, por lo tanto tenemos que la intersección de cualesquiera dos de ellos es la unidad. El normalizador de A en G es A, ya que de lo contrario, siendo A maximal, entonces el normalizador de A en G sería G y por lo tanto A resultaría normal en G, contradiciendo de que G es simple. Pero el índice del normalizador de A en G deberá ser igual al número de conjugados de A que son m. Por lo tanto si a es el orden de A, g el orden de G, se tiene que $am=g$. El número de elementos distintos de la unidad contenidos en $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sera $(a-1)m = am-m = g-m$. Por lo tanto deberá existir al menos un subgrupo maximal distinto de $A_1, A_2, \ldots, A_m$, de lo contrario cada elemento de G deberá estar en uno de los subgrupos maximales $A_1, \ldots, A_m$ y tendríamos que $g-m=g-1$ entonces $m=1$ y A sería igual a G; sea B uno de los subgrupos maximales distintos de $A_1, A_2, \ldots, A_m$ y $B_1=B, B_2, \ldots, B_n$ los subgrupos conjugados de B. Si b es el orden de B, el número de elementos distintos de la unidad contenidos en B y sus conjugados será $(b-1)n = bn-n = g-n$. Porque cada conjugado de B tiene solo la unidad en común con cada conjugado de A, el número de elementos distintos de la unidad contenidos en un conjugado de A o de B es $g-m+g-n = 2g-m-n$ y se tendrá que $2g-m-n \leq g-1$ que es $g \leq m+n-1$

Pero siendo A y B diferentes de la identidad y $a \geq 2$, $b \geq 2$ tenemos $m = g/a \leq g/2$, $n = g/b \leq g/2$ y por lo tanto

$$g \leq m+n-1 \leq g/2 + g/2 - 1 = g-1$$

que es una contradicción.

Por lo tanto G es soluble ⊙

<u>Proposición 45</u> Si cada subgrupo propio de G es nilpotente y G no lo es entonces el orden de G es igual a $p^a q^b$ con p y q primos distintos.

Demostración:

Por la proposición 44 G es soluble

Supongamos que el orden de G es $\prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ con $a_i > 0$ y $r \geq 3$.

Cada grupo soluble tiene un subgrupo normal maximal N de índice primo

Sea p_1 el orden de G/N, por hipótesis N es nilpotente. El subgrupo de Sylow de N es por tanto característico en N y por consiguiente normal en G.

Sea B_i un p_i-subgrupo de Sylow de G. Para $i>1$ B_i es también un p_i-subgrupo de Sylow de N, entonces normal en G. El producto B_1B_i con $i \geq 2$ es un subgrupo de G ya que $r \geq 3$, de ahí que es nilpotente.

Ahora bien $B_1 \triangleleft B_1B_i$ y $B_i \triangleleft B_1B_i$ para $i>1$, además $B_1 \cap B_i = \{1\}$ entonces $xy = yx$ para todo $x \in B_1$ y $y \in B_i$ con $i>1$, por lo tanto B_1 es normal en G. Entonces $B_i \triangleleft G$ para toda i, por lo tanto G es nilpotente ya que G es producto directo de sus subgrupos de Sylow, contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto $r = 2$ ⊙

Proposición 46 (Schur) [4]

Sea G un grupo finito, N subgrupo normal de G y el orden de N y G/N primos relativos entonces existe en G un complemento de N.

Proposición 47 Si cualquier subgrupo de G es p-nilpotente entonces G es p-nilpotente ó los p-subgrupos de Sylow son normales en G. [1]

Proposición 48 Si G no es p-nilpotente pero cualquier subgrupo propio de G es p-nilpotente entonces

i) G no es nilpotente

ii) el p-subgrupo de Sylow de G es normal

iii) Cualquier subgrupo propio de G es nilpotente.

Demostración:

(i) Si G fuera nilpotente entonces G sería producto de sus p_i-subgrupos de Sylow, $G = S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_t}$ sea $p = p_1$. Como $S_{p_2} \times S_{p_3} \times \cdots \times S_{p_t} = R \triangleleft G$ y $|G/R| = |S_{p_1}| = p_1^{\alpha}$, además el orden de R y el orden de G/R son primos relativos, entonces G sería p-nilpotente, contradiciendo la hipótesis de que G no lo era.

(ii) Por la proposición 47 y por hipótesis se tiene ésta afirmación.

(iii) Sea P el p-subgrupo de Sylow de G, entonces P es normal en G. Dado que G no es p-nilpotente y $\{1\} < P < G$ y el orden de P y el -

índice de P en G son primos relativos, podemos aplicar la proposición 46 (Schur), entonces existe un complemento C de P en G (que tiene la propiedad de $G = PC$, $\{1\} = P \cap C$, $C \cong G/P$).

Supongamos que existe un elemento c con $\langle c \rangle \lneqq C$ entonces $P\langle c \rangle \lneqq G$ entonces por hipótesis $P\langle c \rangle$ es p-nilpotente. Ya que P es un p-subgrupo normal de G y por tanto normal de $P\langle c \rangle$, P está centralizado por cualquier p'-subgrupo normal de $P\langle c \rangle$ y en consecuencia por c. Por lo tanto se ha demostrado:

$$\text{Si } \langle c \rangle \lneqq C \text{ entonces } c \in C_G(P) \qquad (1)$$

Ahora bien, si $C < C_G(P)$ entonces C sería centralizado por P y normalizado por C y por tanto C sería normalizado por $PC = G$ entonces $G = P \times C$, siendo G p-nilpotente, contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto

$$C \not\leq C_G(P) \qquad (2)$$

Como cualquier elemento de un grupo finito es un producto de elementos que conmuten de orden potencia de un primo, entonces de (1) y (2) existe un elemento de orden una potencia de un número primo en C que no pertenece a $C_G(P)$ y por lo tanto de (1) se tiene que

$G/P \cong C$ es cíclico de orden $q^n \neq 1$ con q primo y p distinto de q (3)

Si $D \nleq C$ entonces de (1) y (3), P es centralizado por el q-grupo D y entonces $PD = P \times D$ que es nilpotente.

Ahora bien, si $N \triangleleft G$ con $N \nleq P$ entonces NC es un subgrupo propio de G que resulta p-nilpotente por hipótesis. Entonces C es normal en NC y $NC = N \times C$ es nilpotente.

Se ha demostrado que cualquier subgrupo propio de $PC = G$ es nilpotente ya que si $T < PC = G$ entonces T es de la forma ND con $N \lneq P$ y $N \triangleleft G$ y $D < C$ ⊙

Proposición 49 (N. Itô)

Si cada subgrupo propio de G es p-nilpotente y G no es p-nilpotente, entonces el orden de G es $p^a q^b$ para un apropiado número q.

Demostración:

Por la proposición 48, cada subgrupo propio de G es nilpotente y G no es nilpotente y entonces por la proposición 45 el orden de G es $p^a q^b$ con $p \neq q$ primos ⊙

Proposición 50 Si G es un grupo finito supersoluble de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ números primos, entonces G tiene un subgrupo normal de orden $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_i^{\alpha_i}$ con $1 \leq i \leq s-1$

Demostración:

Por inducción sobre el número de divisores primos distintos del orden de G.

Si G es un p-grupo, no hay nada que demostrar.

Supongamos que $|G| = P_1^{\alpha_1} \cdots P_s^{\alpha_s}$ con $s \geq 2$

Sea $i > 1$ y H un P_1-subgrupo de Sylow de G, consideremos G/H, el orden de G/H es $P_2^{\alpha_2} \cdots P_s^{\alpha_s}$ - por hipótesis de inducción G/H tiene un subgrupo normal K/H de orden $P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \cdots P_i^{\alpha_i}$ donde K es normal en G de orden $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_i^{\alpha_i}$ y esto para $1 \leq i \leq s-1$.

<u>Proposición 51</u> G es supersoluble si y solo si G tiene una serie principal tal que cada factor es de orden primo

Demostración:

Si G es supersoluble entonces por la proposición 20 se sigue. El inverso es inmediato de la definición.

<u>Proposición 52</u> Si G es un grupo finito supersoluble y q es el primo menor que divide al orden de G entonces G es q-nilpotente.

Demostración:

Sea $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$ el orden de G con $P_1 > P_2 > \cdots > P_r$.

Por la proposición 50 G tiene un subgrupo normal R de orden $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_{r-1}^{\alpha_{r-1}}$ y por lo tanto, el orden de R y el índice de R en G son primos relativos, entonces G es P_r-nilpotente donde P_r es el primo menor que divide al orden de G ⊙

<u>Proposición 53</u> (<u>Huppert</u>)

Si cada subgrupo maximal de G es supersoluble entonces G es soluble.

Demostración:

Sea p el divisor primo más chico del orden de G.

Por la proposición 52 cada subgrupo maximal de G es p-nilpotente.

Si G es p-nilpotente entonces el p-complemento normal de G es supersoluble, entonces G es soluble.

Si G no es p-nilpotente entonces por la proposición 49 (N. Itô) y por la proposición 28 (Teorema de Burnside) G es soluble ⊙

Demostración (al Teorema de K. Iwasawa):

Supongamos que todas las series maximales de G tienen la misma longitud.

Es claro que esta propiedad se hereda para los subgrupos maximales.

Demostraremos la supersolubilidad de G por inducción sobre el orden de G.

Cada subgrupo maximal de G es por hipótesis de inducción supersoluble. Por la proposición 53 (Huppert) G resulta ser soluble.

Tomemos una serie de composición para G.

$G \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_t = \{1\}$ con G_{i-1}/G_i simple y como G_i/G_{i+1} es simple y soluble entonces el orden de G_i/G_{i+1} es un número primo P_i, por lo tanto la serie de composición resulta ser una serie maximal y su longitud es igual al número t de divisores primos del orden de G.

Sea M un subgrupo maximal de G, M tiene una serie maximal de longitud $t-1$, porque de lo contrario G tendría una serie maximal de longitud distinta de t. Por lo tanto el orden de M tiene $t-1$ divisores primos. Así, el índice de M en G es un número primo. Esto pasa para todo subgrupo maximal M de G, por la proposición 30 (Huppert) G resulta ser supersoluble ⊙

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. BAER
"Topics in finite groups minimal classes"
Instituto Matematico "ULISSE DINI"
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FIRENZE. 1975

[2] W. BURNSIDE
"Theory of Groups of finite order"
Dover Publications, INC. 1955.

[3] M. HALL
"Teoría de los Grupos"
Editorial F. Trillas, S.A. México, 1969.

[4] B. HUPPERT
"Endliche Gruppen I"
Springer-Verlag 1967.

[5] O. KEGEL
"On Huppert's characterization of finite supersoluble groups"
Proc. Int. Conf. Theory of Groups,
Canberra 1965.

[6] W. LEDERMANN
"Introduction to Group Theory" Longman

[7] R. MA. MENCHACA ROCHA
"Sobre Grupos Supersolubles"
Tesis Profesional, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. 1983.

[8] O. ORE
"Contributions to the theory of groups of finite order"
Duke Math. J. 5 (1939), 431-460

G. ZAPPA

[9] "Sui Gruppi Supersolubiliti"
Rendi. Sem. Univ. Roma 1938

[10] "Fondamenti di teoria dei gruppi" Vol. I
Consiglio Nazionale delle Richerche Monografie Matematiche 13. Roma: Edizione Cremonese 1965

[11] "Fondamenti di teoria dei gruppi" Vol. II
Consiglio Nazionale delle Richerche Monografie Matematiche 18. Roma: Edizione Cremonese 1970

[12] "A remark on a recent paper of O. ORE"
Duke Math. J. 6, (1940) 511-512.