UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"UN DESARROLLO ALTERNATIVO DEL TEMA DE NUMEROS REALES PARA EL C. C. H."

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

MA. EDDA SANDRA VALENCIA MONTALVAN

México, D. F. 1984

* I N D I C E *

INTRODUCCION

Realicé este trabajo debido a la inquietud que ha- surgido de mi experiencia como profesora en el Colegio de - Ciencias y Humanidades plantel Vallejo, además de un inte-- rés personal al impartir el tema de números reales en forma axiomática (correspondiente al primer semestre). Me dí - - cuenta de que los alumnos (en su mayor parte) no entienden- el tema, ya que dicha forma de desarrollarlo consiste en -- dar definiciones y principios, escribir las propiedades, -- "demostrando" los teoremas en forma teórica muy general y - abstracta, resolviendo algunos ejercicios ya que son conceptos que memorizan para el momento de ser evaluados y a través del tiempo (una o dos semanas) ya se les olvidó, ya que lo único que hizo fue memorizar, repetir y copiar datos - - fuertemente aislados y demostraciones o definiciones en su- cuaderno.

El desarrollo del tema fue en forma platicada queriendo relacionarlo con ciertas cosas que para él fueron -- ligando los conocimientos previos y familiares, lo cual sirviera para dar una pequeña motivación del conjunto de números reales presentándolos como expresiones decimales y re-- presentándolos con puntos en una recta teniendo en cuenta - que a partir del punto correspondiente al número o los puntos de la derecha son positivos y hacia la izquierda negati vos hasta concluir que "los puntos de una recta corresponden a la unión del conjunto de puntos asociados a los números -- racionales con el conjunto de puntos asociados a los números irracionales".

Creo que esta forma de presentar el tema es la de -- más fácil asimilación y comprensión, debido a mi experiencia en la labor docente.

El desarrollo del tema lo hacemos mediante el des-- glose del conjunto de números reales en conjuntos más pequeños que son: Números Naturales, Números Enteros, Números -- Racionales y Números Irracionales, además de la representa-- ción gráfica de cada uno de estos conjuntos y por último se- hace la unión del conjunto de números racionales e irraciona les para obtener el conjunto de números reales.

Para el desarrollo de este trabajo hemos consultado los libros de texto de Algebra que se encuentran en la bi--- blioteca del Colegio y en los cuales se ve que casi todos - los que se usan actualmente, como libros de texto, tratan el tema desde un punto de vista axiomático, aunque en algunos - casos pudiera ser considerado adecuado, nosotros creemos que las Matemáticas al ser enseñadas sistemáticamente en forma - general y elaborada, solo causan confusión en los alumnos -- debido a la falta de familiarización con casos particulares- y dominio del tema. Con lo cual no se logran los objetivos-ni del tema, ni del curso y mucho menos del área, que de antemano se han determinado según las características del colegio y mucho menos se interesa al alumno en el tema, de tal forma que cambie su predisposición que le tiene a la materia.

Con el propósito de hacer que los alumnos se interesen en el tema tratamos de darle un nuevo enfoque a su desarrollo, el cual pensamos va a contribuir en una mínima parte a aumentar su entendimiento y disminuir su rechazo. Queremos que este trabajo sea únicamente una guía para el desarrollo del tema, tomando en cuenta que cada grupo exige una instrumentación diferente acorde a sus propias necesidades para lo cual es necesario tener en cuenta el proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Colegio en el cual hay que tomar en cuenta todos los factores que intervienen en el trabajo del aula.

La presentación del tema es en forma platicada y corresponde a cada profesor darle la estructura más conveniente.

Esta es una primera versión del tema el cual va a tener que ser mejorado en el momento de su exposición, las notas van a ser probadas en el semestre propedéutico de la Escuela de Físico-Matemáticas de la U.A.P.

El desarrollo del tema implica, un reto para salvar las situaciones problemáticas que se presentan en el curso, para lo cual el profesor debe estar siempre atento a sus propias limitaciones y tratar de superarlas sea cual fuere la participación de los alumnos.

R E C O M E N D A C I O N E S:

1.- Las notas no deben ser tomadas como algo rígido, cada-maestro le dará la estructura más adecuada de acuerdo-a las necesidades del grupo.

2.- La cantidad de ejercicios propuestos no son suficientes para que el alumno se ejercite en el tema sino que el-maestro deberá de dar más ejercicios ya sea para resolverlos en clase o como tarea.

3.- Sería conveniente que el profesor evaluara los conocimientos de los alumnos mediante trabajos, tareas, preguntas, etcétera, para brindarle al estudiante la oportunidad de ir conociendo paso a paso el avance en el - tema.

4.- Se sugiere que al terminar el tema se haga una evaluación total (examen escrito u oral individual) para que se tenga una visión general de los resultados obtenidos.

5.- Deberá motivarse al alumno para despertar su interés - en el aprendizaje del tema, relacionando dicho tema -- con materias que él ya ha visto y con materias que llevará más adelante.

6.- Dar al alumno una visión general de las Matemáticas y-en especial del tema con relación a otras materias haciendo ver a las Matemáticas a través del proceso de enseñanza-aprendizaje como un lenguaje del mundo actual.

7.- Tratar de evitar la improvisación de la clase, ya que esto provoca desconcierto en el alumno y crea la impresión de que el maestro no tiene ningún compromiso ante su labor docente.

8.- Propiciar en el alumno la investigación mediante el desarrollo de temas o de la ampliación de estos, mediante la consulta en libros de texto, revistas, artículos, etcétera.

9.- Fomentar el trabajo tanto individual como de equipo que permita impulsar la comunicación y colaboración en el desarrollo de actividades dentro y fuera del salón de clase.

10.- Dar un repaso de las operaciones fundamentales de los números reales (+, .). Sin hacer hincapié en ello, tomando en cuenta que el alumno trabaja con estas operaciones desde la primaria. Este repaso debe de hacerse de tal forma que el alumno investigue y se interese en el tema procurando ir más allá de la simple mecanización.

PROGRAMA ACTUAL DEL TEMA DE NUMEROS REALES.

A continuación presentamos el tema de números reales que hasta la fecha se ha seguido en el C.C.H. Plantel Vallejo.

El tema consituye la tercera unidad del "Programa de Matemáticas I" que fue propuesto en el proyecto de Complementación Académica bajo el rubro de "Reestructuración del Programa de Matemáticas I" y el cual fue aprobado por el Consejo Académico del Colegio.

Este programa considera que el tema es el mas importante ya que:

a) "Es básico para todo estudio matemático" y
b) "La relación que guarda desde el punto de vista operativo, con materias posteriores así como la necesidad del manejo operacional para estudios universitarios".

Además debemos de tomar en cuenta que el objetivo general de dicho programa es:

"Habilitar al alumno mediante el razonamiento y solución de problemas reales, en la clasificación del sistema de números reales".

El tema está dado en forma axiomática, en el cual hay que deducir y demostrar las propiedades, aplicándolas a ejemplos particulares, lo cual creo no es lo más apropiado para alumnos de 1er. semestre del ciclo bachillerato.

Además también habla de representar a los números - reales como producto de potencias de base 10 y en ningún -- momento lo hace refiriéndose a su representación gráfica, - lo cual resulta más apropiado e interesante para alumnos de este nivel.

UNIDAD III TITULO LOS REALES

OBJETIVOS INTERMEDIOS El alumno con la aprehensión del tema va a desglosar el sistema de Números Reales.

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
1. Los Naturales.	El alumno va a: 1. Discutir a los naturales como una necesidad.		1. El alumno dadas las necesidades de contar y medir va a discutir la utilidad y representación de los naturales.	1. El profesor, dado un ejemplo guiará la discusión de los equipos de alumnos a la representación simbólica del conjunto de los números reales.	Baldor A. Algebra Elemental. 2. Díaz Barriga Alejandro. Desigualdades. Folleto.	
1.1 Propiedades de los naturales.	1.1 Describir la propiedad de cerradura en forma intuitiva.		1.1 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.	1.1.1 El profesor dado un ejercicio encausará al alumno a la aplicación de la propiedad de cerradura en la suma	3. Lovaglia Florence et. al. Algebra. 4. Lovaglia Florence M. Et. al Algebra.	
1.1.1 Cerradura en la suma.	1.1.1 Aplicar la propiedad de cerradura en la suma a problemas.		1.1.1 El alumno dado un ejercicio aplicará la propiedad de cerradura en la suma.		5. Odgers López Alejandro. Los Números Reales. (Folleto).	
1.1.2 Cerradura en el producto.	1.1.2 Aplicar en el producto la propiedad de cerradura de	!	1.1.2 El alumno dado un ejercicio va a aplicar la propiedad de cerra-	1.1.2 El profesor dado un ejercicio encausará al alumno a la		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
	un ejercicio dado.		dura en el producto.	aplicación de la propiedad de cerradura en el producto.	6.Tomaz Francisco <u>Los Números Racionales.</u> (folleto).	
1.1.3 Conmutativa. En la suma.	1.1.3 Definir la propiedad conmutativa en la suma.		1.1.3 El alumno de la participación por equipos va a definir la propiedad conmutativa.	1.1.3 El alumno obtendrá información de la bibliografía que se les señale.	7.Tomaz Francisco <u>Los Números Reales.</u> (folleto)	
	1.1.3.1 Ilustrar la propiedad conmutativa de la suma en forma numérica		1.1.3.1 Dado un ejercicio el alumno representará numéricamente la propiedad conmutativa de la suma.	1.1.3.1 El profesor guiará la dinámica del grupo para ilustrar la propiedad conmutativa en la suma.	8.Saymour Lipshutz. <u>Teoría de Conjuntos y Temas afines.</u> 9.Swokowski, E. <u>Algebra Universitaria.</u>	
1.1.4 Conmutativa. En el producto.	1.1.4 Definir la propiedad conmutativa en el producto.		1.1.4 El alumno de la participación por equipos va a definir la propiedad de cerradura en forma simbólica.	1.1.4 El profesor dado un ejercicio va a guiar a los alumnos a obtener la definición de la propiedad conmutativa en el producto.		
	1.1.4.1 Ilustrar la propiedad conmutativa en forma numérica.		1.1.4.1 Dado un ejercicio el alumno representará numéricamente la propiedad conmutativa del producto.	1.1.4.1Dado un ejercicio, el profesor va a guiar al alumno en la aplicación de la propiedad conmutativa del producto.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
1.1.5 Asociativa. Suma.	1.1.5 Definir la propiedad asociativa en la suma.		1.1.5 El alumno de la participación por equipos definirá la propiedad asociativa.	1.1.5 El alumno obtendrá información de la bibliografía que se le indique una clase anterior.		
	1.1.5.2 Aplicar la propiedad asociativa de la suma en ejercicios planteados.		1.1.5.2 El alumno, dado un ejercicio aplicará la propiedad asociativa de la suma.	1.1.5.2 El profesor dado un ejercicio planteado a los alumnos guiará la aplicación de la propiedad.		
1.1.5 Asociativa en el producto.	1.1.5 Definir la propiedad asociativa en el producto.		1.1.5 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			
	1.1.5.1 Aplicar la propiedad asociativa de el producto a ejercicios planteados.		1.1.5.1 El alumno, dado un ejercicio aplicará la propiedad asociativa del producto.	1.5.1 El profesor guiará a los alumnos en la aplicación de la propiedad del problema planteado.		Discutirá por equipos la solución a un ejercicio planteado y dependiendo de la forma que se profundice el tema será la evaluación.
1.1.6 Distributiva.	1.1.6 Definir la propiedad distributiva.		1.1.6 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
	1.1.6.1 Aplicar la propiedad distributiva a ejercicios planteados.	2	1.1.6.1 El alumno dado un ejercicio planteado aplicará la propiedad distributiva.	1.1.6.1 El profesor guiará a los alumnos en la aplicación de la propiedad distributiva.		
1.2 Números Pares.	1.2 Deducir la representación simbólica de los números pares en los naturales (2 n).		1.2 El alumno dado un ejercicio comprenderá la necesidad de representar en forma simbólica a los números pares.	1.2 El profesor dado un ejercicio va a dirigir el análisis de los alumnos para obtener la representación de pares.		Se realizará un examen individual y se obtendrá el promedio.
	1.2.1 Aplicar la representación simbólica de números pares en la solución de ejercicios planteados.		1.2.1 El profesor dado un ejercicio, guiará a los alumnos en la aplicación de la representación simbólica de los números pares.	1.2.1 Se dejará material para resolver extra-clase.		
1.3 Números impares.	1.3 Deducir la representación simbólica de los números impares (2n+1)	1	1.3 El alumno dado un ejercicio comprenderá la necesidad de representar en forma simbólica a los números impares.	1.3 Dado un ejercicio el profesor va a guiar a los alumnos a obtener la solución.		
				1.3.1 Se dejará material para resolver extra-clase.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
1.3.1 Múltiplos de los números impares.	1.3.1 Describir la representación simbólica de los múltiplos de los impares. n(2n+1)		1.3.1 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.	1.3.1 Se dejará material para resolver extraclase.		
	1.3.2 Aplicar la fórmula simbólica de múltiplos de impares en los cuatro primeros impares: 3,5,7,9.	2	1.3.2 El alumno va a obtener los múltiplos impares de: 3,5,7,9.	1.3.2 El profesor dado un ejercicio guiará al alumno en la aplicación de la fórmula n(n+1).		Se recopilará el material dejado extra clase y se evaluará.
1.4 Mínimo común múltiplo.	1.4 Describir el concepto del mínimo común múltiplo en los naturales.		1.4 El alumno mediante lluvia de ideas (aportación individual de información) va a describir como calcular el mínimo común múltiplo.	1.4 El alumno obtendrá información de la bibliografía especificada.		
				1.4.1 El profesor guiará la participación del alumno en la descripción del mínimo común múltiplo.		
	1.4.1 Calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m) de ejercicios planteados.	1	1.4.1 El alumno dado un ejercicio calculará su mínimo común múltiplo.	1.4.1 El profesor dado un ejercicio guiará al alumno en el calculo del mínimo común múltiplo.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
1.5 Máximo común divisor.	1.5 Describir el concepto de máximo común divisor en los naturales.		1.5 El alumno mediante lluvia de ideas (aportación individual de información, describir como calcular el máximo común divisor.	1.5 El alumno obtendrá información de la bibliografía indicada.		
				1.5.1 El profesor guiará la participación de los alumnos en la descripción del máximo común divisor.		
	1.5.1 Calcular el máximo común divisor (M.C.D.) de ejercicios planteados.	1	1.5.1 El alumno dado un ejercicio calculará su máximo común divisor.	1.5.1 El profesor dado un ejercicio guiará al alumno en el cálculo del máximo común divisor.		
2. Los negativos.	2. Aplicar la propiedad conmutativa a la resta de naturales (N^-)		2. El alumno dado un ejercicio aplicará la propiedad conmutativa en la resta de naturales obteniendo como consecuencia, que no se cumple la propiedad de cerradura.	2. El profesor dado un ejercicio guiará la aplicabilidad de la propiedad al encuentro de un nuevo conjunto diferente de los naturales.		
3. Enteros. 3.1 Los enteros y su representación simbólica.	3.1 Deducirá el conjunto de los enteros como la unión de el conjunto de los naturales, el		3.1 El alumno dado la unión de los conjuntos naturales, el cero y los negativos obtendrá un nuevo con	3.1 El profesor dado el conjunto de los naturales, el cero y los negativos, guiará a los alum-		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRs.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
	cero y los negativos. $E = N^{-} \cup \{o\} \cup N$		junto; los enteros.	nos a efectuar la unión obteniendo el conjunto de los enteros.		
	3.1.1 Localizar la posición de los elementos de los enteros en el eje real.		3.1.1 El alumno dado el eje real y el cero como punto de simetría colocará los elementos de el conjunto de los naturales y los negativos.	3.1.1 El profesor dado el conjunto de los naturales el cero y los negativos guiará a los alumnos a localizar la posición de sus elementos en el eje real.		
3.2 Orden en los enteros.	3.2 Describir la representación simbólica del orden en los enteros.		3.2 El alumno dado el planteamiento de un problema discutirá la necesidad de comparar objetos y números en forma simbólica.	3.2 El profesor dado un problema guiará a los alumnos a establecer los símbolos de orden.		
	3.2.1 Representar simbólicamente, proposiciones de desigualdades.	1	3.2.1 El alumno dadas las proposiciones de desigualdades expresadas en lenguaje ordinario, la representará simbólicamente.	3.2.1 El profesor dado un ejercicio guiará a los alumnos a representarlo simbólicamente.		Se llevará a cabo una discusión por equipos y dependiendo de la profundidad de la discusión será la evaluación

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
3.3 Propiedades y operaciones en- los enteros.						
3.3.1 Cerradura- en la suma.	3.3.1 Describir la - propiedad de cerra- dura en la suma de enteros, en forma - simbólica.		3.3.1 El alumno dado los naturales y los negati vos como subconjunto - de los enteros va a -- describir la propiedad de cerradura en la su- ma obteniendo la forma simbólica. $\forall a, b \in Z, a+b \in Z$	3.3.1 El profesor da dos los subconjuntos de los enteros guia- rá a los alumnos al encuentro de la pro piedad de cerradura en la suma.		
3.3.2 Cerradura - en el producto.	3.3.2 Describir la - propiedad de cerra- dura en el producto de enteros en forma simbólica.		3.3.2 El alumno dado -- los naturales y negati vos como subconjunto - de los enteros va a -- describir la propiedad de cerradura en el pro ducto, en forma simbó- lica.	3.3.2 El profesor da dos lossubconjuntos de los enteros guia rá a los alumnos al encuentro de la pro piedad de cerradura en el producto.		
3.3.3 Conmutativa en la suma.	3.3.3 Definir la pro piedad conmutativa- en la suma de ente- ros en forma simbó- lica.	1	3.3.3 El alumno dados - los elementos de los - enteros va a definir - la propiedad conmutati va en la suma obtenién dola en forma simbóli- ca. $\forall a,b \quad a+b = b+a$	3.3.3 El profesor da do el conjunto de - los enteros va a -- guiar a los alumnos a describir la pro- piedad conmutativa en la suma.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
3.3.4 Asociativa en la suma.	3.3.4 Describir la propiedad asociativa en la suma, en forma simbólica.		3.3.4 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			
	3.3.4.1 Aplicar la propiedad asociativa a ejercicios planteados.		3.3.4.1 El alumno dado un ejercicio planteado va a aplicar la propiedad asociativa en la suma.	3.3.4.1 El profesor dado un ejercicio que contemple positivos negativos va a guiar a los alumnos en la aplicación de la propiedad asociativa en la suma.		
3.3.5 Asociativa en el producto.	3.3.5 Describir la propiedad asociativa en el producto en forma simbólica.		3.3.5 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			
	3.3.5.1 Aplicar la propiedad asociativa en el producto de enteros, en un ejercicio planteado.	2	3.3.5.1 El alumno dado el planteamiento de un ejercicio va a aplicar la propiedad asociativa en el producto de enteros.	3.3.5.1 El profesor dado un ejercicio va a guiar a los alumnos en la aplicación de la propiedad asociativa en el Prod. de enteros, cuidando el manejo adecuado de los signos.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
3.3.6 Distributiva	3.3.6 Describir la propiedad distributiva en los enteros.		3.3.6 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			
	3.3.6.1 Aplicar a ejercicios planteados la propiedad distributiva.	1	3.3.6.1 El alumno dado el planteamiento de ejercicios que contemplen enteros positivos y negativos, va a aplicar la propiedad distributiva.	3.3.6.1 El profesor dado el planteamiento de un ejercicio va a guiar a los alumnos en el manejo adecuado de los signos al aplicar la propiedad distributiva.		
3.4 Elemento Neutro. 3.4.1 En la suma.	3.4.1 Discutir la existencia del elemento neutro en la suma para un problema planteado.		3.4.1 El alumno dado un ejercicio va a identificar el elemento que sumado con cualquier otro entero da como resultado el mismo entero.	3.4.1 El profesor dado un ejercicio va a guiar a los alumnos al encuentro del elemento neutro en la suma.		
3.4.2 En el producto.	3.4.2 Discutir la existencia del elemento neutro en el producto, en un ejercicio dado.		3.4.2 El alumno dado un problema para discusión va a identificar el elemento que multiplicado con cualquier otro entero da como resultado el mismo entero.	3.4.2 El profesor dado un ejercicio guiará a los alumnos al encuentro del elemento neutro en el producto.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
3.5 Elemento inverso en la suma.	3.5 Discutir la existencia del elemento inverso en la suma en un ejercicio planteado.		3.5 El alumno dado un ejercicio para discusión va a encontrar que sumado a un entero un número especial (simétrico) va a dar como resultado el cero.	3.5 El profesor guiará a los alumnos al encuentro del inverso aditivo en un problema dado para discusión.		
3.6 No cerradura en la división de enteros.	3.6 Discutir la no-cerradura en la división de los enteros.		3.6 El alumno dado el planteamiento de ejercicios con enteros va deducir que la propiedad de cerradura entre algunos enteros en la división no se cumple, por lo que se requiere de otro conjunto que los contenga.	3.6 El profesor dados elementos escogidos de los enteros va a quitar a los alumnos a la no cerradura de los enteros en la división, por lo que requiere la extensión a un nuevo conjunto, el de los racionales.		Se realizará un examen individual de propiedades.
4. Los racionales.	4. Describir a los racionales cuyos subconjuntos son los enteros y naturales, en forma gráfica.		4. De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			
	4.1 Describir la representación geométrica y analítica de los racionales.			4.1 El profesor mediante una técnica expositiva va a representar en forma analítica. $(\frac{m}{n}, n \neq 0)$		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
4.2 Decimales	4.2 Describir las características de el decimal periódico.	1	4.2 El alumno de el cociente entre enteros va a describir las características de los decimales periódicos.	4.2 El profesor dado el cociente con enteros escogidos va a guiar a los alumnos a describir las características de los decimales periódicos.		
4.3 Operaciones con racionales. 4.3.1 Suma.	4.3.1 Definir la suma entre números racionales en forma simbólica.		4.3.1 El alumno dados dos racionales va a describir la suma y posteriormente su forma simbólica de representarla.	4.3.1 El alumno recopilará información en la bibliografía que se le indique.		
				4.3.1.1 El profesor dados dos racionales guiará al alumno a efectuar la suma y posteriormente a representarla en forma simbólica. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$		
	4.3.1.1 Calcular la suma de racionales en ejercicios planteados.		4.3.1.1 El alumno dados dos racionales va a obtener la suma de ellos.	4.3.1.1 El profesor va a guiar a los alumnos en la obtención de la suma de racionales.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
4.3.2 Producto.	4.4. Definir el producto [illegible] racionales en forma simbólica.		4.4. El alumno dados dos [illegible] bir el producto y posteriormente su forma simbólica de representarlo.	4.4 El profesor dados [illegible] guiar a los alumnos a obtener la representación simbólica del producto.		
	4.4.1 Calcular el -- producto de racionales en ejercicios planteados.	2	4.4.1 El alumno dados -- dos racionales va a obtener el producto de -- ellos.	4.4.1 El profesor dados dos racionales - va a guiar a los - - alumnos a obtener el producto.		
4.4. Elemento inverso en la multiplicación.	4.4 Describir la - - existencia del inverso multiplicativo en un ejercicio dado.		El alumno dado un ejercicio para su discusión, va a encontrar que un racional multiplicado por un número "especial" va a dar como resultado la unidad.	4.4. El profesor guiará a los alumnos al encuentro del inverso multiplicativo en un problema dado para discusión.		
4.5 Conversiones entre decimales periódicos y cocientes de enteros.	4.5 Transformar un - cociente de enteros a decimal periódico.		4.5 El alumno dado un cociente de números enteros escogidos va obtener su representación - decimal periódica.	4.5 El profesor dado un cociente de enteros escogidos va a - guiar a los alumnos a obtener su representación decimal periódica.		
	4.5.1 Transformar un decimal periódico a la forma $\frac{m}{n}$	1	**4.5.1 El alumno dado un decimal periódico va a transformarlo a la for**	**4.5.1 El profesor - - guiará a los alumnos a transformar un de-**		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
			ma $\frac{m}{n}$	cimal periódico a l· forma $\frac{m}{n}$		
4.6 Orden en los racionales.	4.6 Describir el orden entre dos números racionales positivos usando la forma; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $ad = cb$		4.6 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.			
	4.6 Calcular el orden entre racionales de ejercicios planteados.	1	4.6 El alumno dado el planteamiento de ejercicios va a calcular el orden entre los números racionales.	4.6 El profesor dados dos racionales va a guiar a los alumnos a obtener el orden entre ellos.		Se realizará un examen individual de los contenidos de racionales.
4.7 Los Irracionales.	4.7 Describir al conjunto de los números irracionales en forma decimal.		4.7 El alumno dados los decimales va a identificar la representación particular de aquellos que no son periódicos a los que les dará el nombre de irracionales.	4.7 El profesor dados los decimales no periódicos va a dirigir al alumno a identificar su representación particular. (π , $\sqrt{2}$, e , etc.)		
	4.7.1 Describir la intersección de los racionales e irracionales como un conjunto vacío.	1	4.7.1 El alumno dados el conjunto de los racionales e irracionales va a visualizar que no tienen elementos en común por lo que su intersección es	4.7.1 El profesor dados el conjunto de los racionales e irracionales guiará al alumno a identificar la intersección como el conjunto va-		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDÁCTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA	EVALUACIÓN
			el conjunto vacío.	cío.		
5. Los Reales.	5. Definir a el conjunto de los reales como la unión del conjunto de los racionales y los irracionales.	1	5. El alumno dado el conjunto de los racionales e irracionales va a identificar la unión de ellos como el conjunto de los números reales.	5. El profesor dado el conjunto de los racionales e irracionales va a guiar a los alumnos al encuentro de los reales.		
6. Expansiones decimales.	6.1 Describir la expansión decimal en potencias positivas de 10.		6.1 El alumno dado un número decimal lo va a representar en potencias positivas de 10 dependiendo del movimiento que se le de al punto decimal.	6.1 El profesor dado un número decimal va a guiar a los alumnos a representarlo en potencias positivas de 10.		
	6.1.1 Aplicar la expansión decimal a ejercicios planteados.	2	6.1.1 El alumno dado el planteamiento de números decimales como ejercicios va a expresarlos en potencias positivas de 10.	6.1.1 Se dejará material para resolverlo extra clase.		
6.2 Expansión decimal en potencias negativas de 10.	6.2 Describir la relación entre la división de la unidad entre múltiplos de 10 y la expansión decimal en potencias negativas de 10.		6.2 De la exposición del profesor el alumno tomará apuntes.	6.2 El profesor va a describir la relación con la división de la unidad entre múltiplos de 10 y la expansión decimal en potencias negativas de 10.		

CONTENIDO	OBJETIVO	HRS.	ACTIVIDADES	SUGERENCIAS DIDACTICAS	REFERENCIA BIBLIOGRAFICA	EVALUACION
	6.2.1 Describir la relación entre el punto decimal y la expansión de potencias negativas de 10.		6.2.1 El alumno dado el movimiento de el punto decimal va a establecer su relación con las potencias negativas de 10.	6.2.1 El profesor dado un número representado en forma decimal guiará a los alumnos a obtener su representación en potencias negativas de 10.		
	6.2.2 Describir la expansión en potencias de 10 del movimiento de el punto decimal.		6.2.2 El alumno dado el movimiento de el punto decimal va a describir su expansión en potencias de 10.	6.2.2 El profesor dado un ejercicio para conversión va a guiar al alumno a obtener un número en forma decimal.		Se realizará una discusión por equipos dependiendo de la profundidad del tema será la evaluación del tema.
	6.2.3 Convertir decimales sin enteros a enteros con potencias negativas de 10.	2	6.2.3 El alumno dado un decimal sin enteros va a convertirlo a entero con potencias negativas de 10.	6.2.3 El profesor dado un ejercicio para su conversión va a guiar al alumno a obtenerla.		
7. Propiedades de Campo.	7. Enunciar en forma simbólica las propiedades de campo.		7. El alumno va a resumir las propiedades dadas en los conjuntos anteriores en forma simbólica para llegar a las propiedades de campo.	7. El profesor guiará a los alumnos al encuentro de las propiedades de campo		Se realizará un examen de todas las unidades y se promediará con las evaluaciones parciales.
	7.1 Aplicar las propiedades de campo en problemas planteados para su solución.	2	7.1 El alumno dado un problema para solucionarlo va aplicar las propiedades de campo.	7.1 El profesor encausará a los alumnos en la aplicación de las propiedades de campo.		

UNIDAD I. LOS NUMEROS NATURALES.

Los números naturales surgen de la necesidad que -- tiene el hombre de contar.

Los números naturales que usamos para contar son: 1,2,3,4...... etcétera. El conjunto formado por todos los - números naturales se representa por:

$$N = \{ 1.2.3.4.5............ \}$$

donde cada uno de ellos recibe el nombre de miembro o ele-- mento del conjunto. en el cual hay un orden ya establecido.

La idea básica de número, está íntimamente ligada - con la de orden y correspondencia, teniendo en cuenta la -- idea de número, está asociada a la de contar y a la de mag- nitud. Ya que dado un número natural por grande que sea, - siempre es posible sumarle la unidad y tendremos su conse-- cutivo, se concluye que el conjunto de números naturales es infinito.

Desde la antigüedad los números se han representado por distintos símbolos hasta llegar a la edad media con la invención hindú-arábiga de la notación decimal posicional la cual nos permite representar mas cómodamente los números y facilita las operaciones con ellos.

Como ejemplo de algunas numeraciones tenemos:

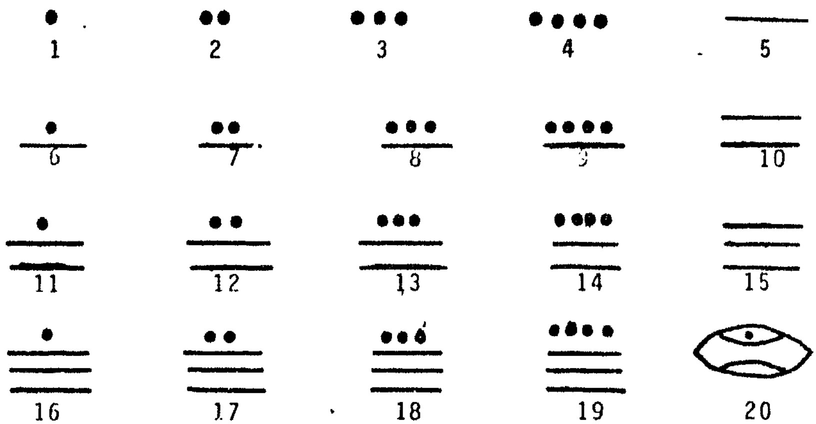
a) La numeración Romana.
b) La numeración Maya
c) La numeración Medieval.
d) Una numeración Egipcia.
e) Una numeración China.

Primero presentaremos los numerales de algunos sistemas:

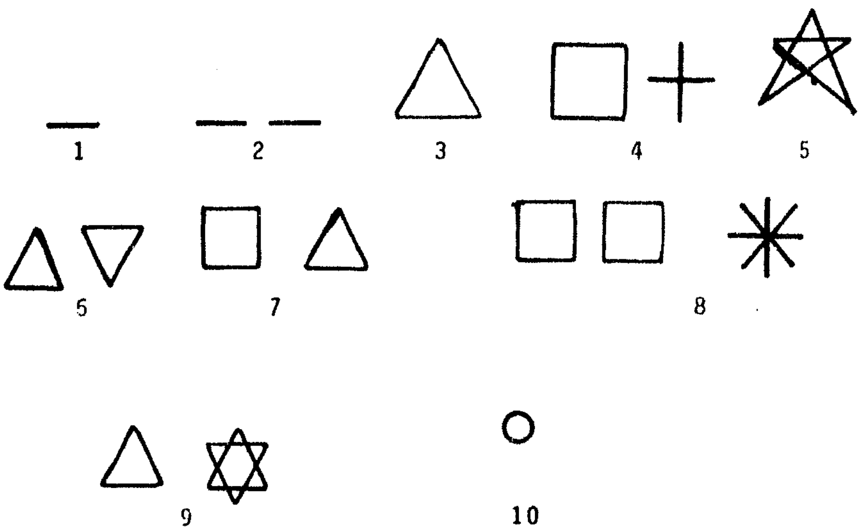
NUMERALES ROMANOS

I	II	III	IV	V
1	2	3	4	5
VI	VII	VIII	IX	X
6	7	8	9	10
L	C	D	M	
50	100	500	1000	

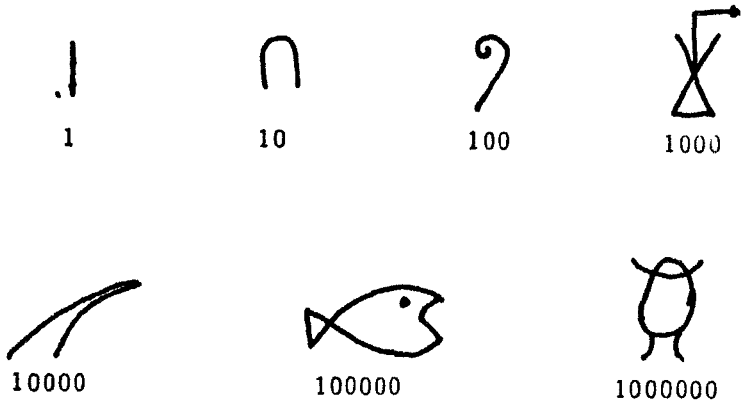
NUMERALES MAYAS



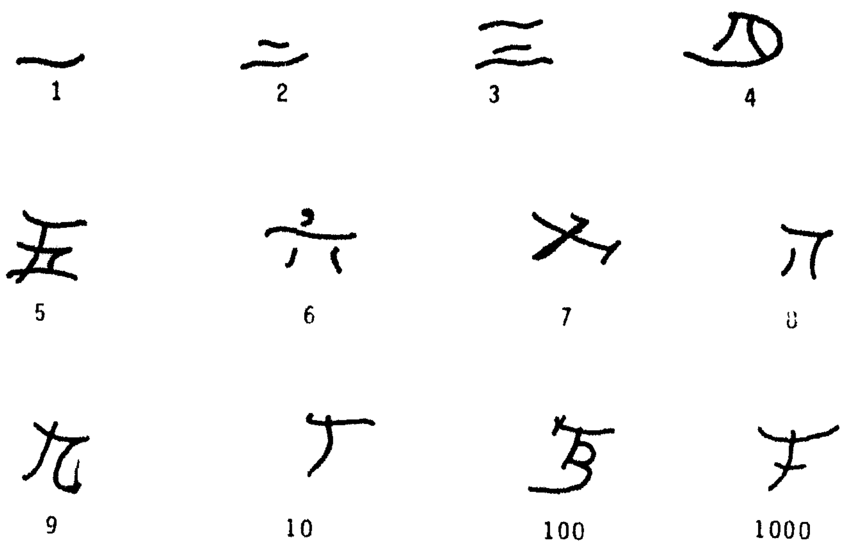
NUMERALES MEDIEVALES



NUMERALES EGIPCIOS



NUMERALES CHINOS



Los sistemas de numeración son hoy en día parte importante de nuestro desarrollo.

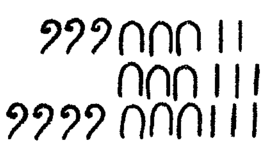
Daremos una breve descripción de un sistema de numeración egipcio.

La numeración egipcia es un sistema de numeración puramente decimal en el cual cada símbolo puede repetirse nueve veces.

El número representado por un conjunto particular de símbolos se encontraba sumando los valores de cada símbolo representado. Si el símbolo debía de escribirse mas de cuatro veces lo escribían en dos filas, así ahorraban espacio lateral; los símbolos de un numeral pueden escribirse de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, siendo costumbre que los símbolos de mayor valor precedieran a los de menor valor por lo que vemos que el sistema de numeración egipcia no es un sistema posicional; es decir no tiene el concepto de posición.

E J E M P L O :

El número setecientos noventa y ocho:



Los numerales chinos constituyen un sistema de nu-- meración de los más antiguos que hay en el mundo y se emplea en los cheques.

El sistema de numeración romana usaba el principio- de adición. Para el sistema romano la regla de orden es la siguiente:

Los símbolos han de escribirse de izquierda a derecha en el orden de valores decrecientes, y el principio de suma se - - aplica.

Las únicas excepciones son:

I antes de V ó X

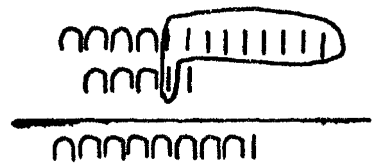
X antes de L ó C

C antes de D ó M

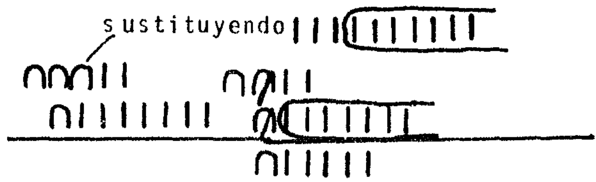
Aplicándose en estos casos el principio de sustracción, es - decir, que en estos casos se sustrae el numeral de la ------ izquierda al numeral de la derecha.

Una forma de ver porque se han adaptado el sistema de numera ción hindú-arábigo es la comodidad de operar con ellos, por ejemplo:

Sumemos: cuarenta y nueve y treinta y dos

Representación arábiga	Representación egipcia
$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 32 \\ \hline 81 \end{array}$$	

Restaremos: diecisiete detreinta y dos

$$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 17 \\ \hline 15 \end{array}$$	

Los egipcios multiplicaban mediante un proceso de duplicación que se basa en el hecho de que cualquier número se puede representar como suma de potencias de dos.

EJEMPLO: multiplicar diecinueve por veinticinco

19 x 25

para efectuar el producto primero duplicamos el 25.

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & \times & 25 & = & 25 \\ 2 & \times & 25 & = & 50 \\ 4 & \times & 25 & = & 100 \\ 8 & \times & 25 & = & 200 \\ 16 & \times & 25 & = & 400 \\ 32 & \times & 25 & = & 800 \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Los egipcios ya tenían establecidas las tablas con los dobles de los números.

Luego aplicando el principio de duplicación en el cual se basaban tenemos:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ \vdots \end{array}$$

El siguiente paso a seguir, será ver cual es el -- número mayor que cabe en 19, en este caso es 16 y sobran -- 3, luego cual de estos es mayor que cabe en 3 el cual es 2- y sobra 1 y por último el 1 y sobra 0, así:

$$19 = 1 + 2 + 16$$

entonces

$$25 \times 19 = 25 \quad (1 + 2 + 16)$$

$$25 \times 19 = 25 \quad (1) + 25(2) + 25(16)$$

$$= 25 + 50 + 475$$

$$\therefore 25 \times 19 = 475$$

De aquí que si tratamos de hacer esto mediante la -- numeración egipcia sería muy largo.

Ahora multipliquemos un mil doscientos treinta y - siete por ochocientos veinticinco en otro sistema de numeración.

Numeración arábiga	Numeración romana
1237	MCCXXXVII
x 825	DCCCXXV
6185	
2474	
9896	
1020525	

Para efectuar la multiplicación en números romanos no conocemos ningún algoritmo que nos diga como efectuar dicha operación.

Debido a todo esto, vemos la comodidad de usar la notación hindú-arábiga que es una numeración decimal posicional usada actualmente.

Este sistema de numeración está basado en potencias de 10 y tiene un valor posicional, es decir, que el valor -- posicional de cada dígito depende de la posición que ocupa,- en el cual el uso del cero "0" es muy importante ya que lo - usamos como un espaciador.

El uso del cero fue un logro grandioso de los ---- hindúes y uno de los más grandes aciertos de la ciencia. -- Permitió a los calculadores hindúes abandonar las columnas del ábaco y desarrollar métodos de cálculo escrito, siendo- el "0" el último de los números en ser descubierto sin el - cual el sistema hindú-arábigo no hubiera sido más eficiente para cálculos que los sistemas egipcio o romano.

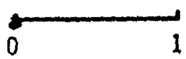
Muchos autores incluyen el número cero "0" en el -- conjunto de los números naturales y se escribe:

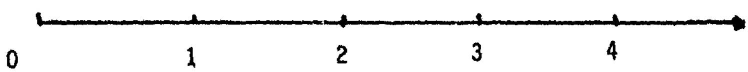
$$N = \{ 0,1,2,3,4,.......... \}$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS NATURALES

Los números naturales se representan como puntos en una semirecta, tomando como unidad un segmento unitario (distancia entre 0 y 1) en el cual a el punto de la izquierda del segmento lo representaremos con 0 y el punto final del segmento como 1.

Representaremos a los números naturales como los extremos derechos de los múltiplos del segmento unitario de la siguiente manera :





REPRESENTACION POSICIONAL DECIMAL DE LOS NUMEROS NATURALES

Todos los números están representados por diez - - símbolos que son: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 que reciben el nombre de dígitos, por ejemplo:

Pensemos en el número trescientos veintisiete, este número se puede representar de muchas maneras, por ejemplo:

𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

CCCXXVII

$3 \times 100 + 2 \times 10 + 7$

$3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7$

327

La representación más cómoda usada en este caso es la posicional decimal actualmente utilizada en artimética.

Por ejemplo pensemos en el número cuarenta y ocho-millones trescientos mil cuatrocientos treinta y ocho, llamémosle abreviadamente R, primero expresemos este número -- como lo hacemos usualmente en nuestro sistema posicional - decimal de base 10.

$$48300438 = R$$

tratemos de ver claramente el significado de esta expresión

48300438 significa:

cuatro decenas de millón, más ocho unidades de millón, más tres centenas de millar, más ninguna decena de millar, más ninguna unidad de millar, más cuatro centenas, más tres decenas, más ocho unidades, todo esto como sabemos se escribe así:

$$4 \times 10000000 + 8 \times 1000000 + 3 \times 100000 + 4 \times 100 + 3 \times 10 + 8 = R$$

OBSERVEMOS:

1) Que los factores que aparecen en segundo lugar en cada sumando son potencias de diez y por tanto la base que estamos usando es diez.

2) Por un momento representemos a nuestra base; esto es diez por el símbolo # entonces nuestro número R quedaría representado por:

   $$R = 4 \times (\#)^7 + 8 \times (\#)^6 + 3 \times (\#)^5 + 4 (\#)^2 + 3x(\#) + 8$$

   Observemos que para esta representación no necesitamos hacer uso del cero.

3) Que la representación R o R' no es posicional ya que las posiciones pueden ser cambiadas y el número sigue siendo el mismo.

4) Si el símbolo # que representa a la base, es representado posicionalmente le correspondería el 10.

El paso de la representación R a la representación usual, - esto es, 48300438 requiere de dos cosas:

1) El uso de la posición de la manera siguiente:

Definimos a

$$10^0 = 1$$

se toman las potencias sucesivas de 10

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$
$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$$
$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000000$$
$$\vdots$$
$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \; \ldots\ldots \times 10}_{\text{n veces 10}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n veces cero}}$$

Comenzaremos de derecha a izquierda:

.....,	10^8,	10^7,	10^6,	10^5,	10^4,	10^3,	10^2,	10^1,	10^0
......	noveno lugar	octavo lugar	séptimo lugar	sexto lugar	quinto lugar	cuarto lugar	tercer lugar	segundo lugar	primer lugar

y en el lugar correspondiente escribimos el símbolo que nos dice <u>cuantas</u> unidades de ese orden hay en el número.

De esta manera a cada potencia de 10 le hemos asignado uno - y solo un lugar.

2) ¿Qué pasa cuando no hay unidades de un cierto orden en - el número? Pues que necesitaremos un símbolo para indicar esto, o sea que este símbolo <u>es el cero</u>.

RESUMIENDO :

El número R puede ser representado de muchas formas, algunas son:

1) Cuarenta y ocho millones trescientos mil cuatrocientos treinta y ocho.

2) $4 \times 10^7 + 8 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 0 \times 10^3$
$+ 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 8$

3) $4 \times 1000000 + 8 \times 1000000 + 3 \times 100000 + 4 \times 100$
$3 \times 10 + 8$

4) $- \times (\#)^7 + 8 \times (\#)^6 + 3 \times (\#)^5 + 4 \times (\#)^2 + 3 \times (\#) + 8$

5) 48300438

Pensemos ahora en otro ejemplo, el número setecientos veintinueve mil trescientos cuarenta y cinco y representémoslo en forma de potencias de 10.

$7 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5$

Observemos que en este caso hay tantos términos como cifras tiene el número en cuestión y que cada término -- tiene un número multiplicado por una potencia de diez, cu-- yo exponente es el número de cifras que queda a la derecha- en este caso no hubo necesidad de substituir las potencias- de 10 que no aparecen por el término 0×10 y obtenemos el-número escrito en forma usual:

7293456

E J E M P L O:

a) Sea el número 1437 expresémoslo en forma de suma de potencias de diez.

$$1437 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7$$

1	4	3	7
cuarto lugar	tercer lugar	segundo lugar	primer lugar .....

donde cada una de las cifras tiene asignado un lugar.

b) Expresar el número 57096 en potencias de diez

$$57096 = 5 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 9 \times 10 + 6$$

5	7	0	9	6
......	......	......	......	......
quinto lugar	cuarto lugar	tercer lugar	segundo lugar	primer lugar

Fijémenos ahora en el ejercicio a) 1437 y cambiemos de lugar los dígitos 3 y 4 y obtendremos:

$$1347 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 7$$

$$1437 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7$$ y vemos que:

$$1347 \neq 1437$$

hagamos lo mismo con el ejercicio b) y tendremos que, cambiando el lugar de los dígitos 5 y 6 tenemos:

$$57096 \neq 67095$$

y así en cualquier número que nosotros tengamos, si cambiamos de posición un dígito obtendremos un número diferente por lo-que concluimos que en nuestro sistema de numeración, la posición de los dígitos juega un papel muy importante.

Para estudiar cada una de las representaciones, es necesario tener en cuenta los principios aditivos y principios multiplicativos, la información de los símbolos que intervienen (4,8,7,#, + , x, (), etcétera) y sus relaciones esto lo hemos tratado de presentar para la representación usual de nuestro sistema posicional decimal, que dicho sea de paso es una representación muy breve y cómoda.

E J E R C I C I O S

a) Escribe en numeración Maya, Egipcia y Romana, los si---guientes números:

7, 69, 375, 49605, 34, 56, 18 y 23.

b) Escribe los siguientes números en potencias de dos y --efectúa los siguientes productos como los egipcios.

56 x 45, 689 x 23, 42 x 5678.

c) Representa los siguientes números naturales en la semi-recta.

5, 67, 23, 4, 16.

d) Escribe los siguientes números en forma de potencias de diez.

435, 5648, 78548492, 9468030547.

e) Indica qué lugar ocupan cada una de las cifras de los -números anteriores.

Ahora tenemos los siguientes ejercicios:

1) 507

2) 30060

3) 1000

Si observamos estos ejercicios vemos que el cero (0) desempeña un papel muy importante ya que nos sirve de espaciador y cada lugar tiene designado un valor diez veces mayor que el anterior a la derecha, es decir,

10 unidades = 1 decena

10 decenas = 1 centena

10 centenas = 1 unidad de millar

10 unidades de millar = 1 decena de millar

10 decenas de millar = 1 centena de millar

10 centenas de millar = 1 unidad de millón

10 unidades de millón = 1 decena de millón.

⋮

u. millón,	c. millar,	d. millar,	u. millar,	centena,	decenas,	unidades
7° lugar	6° lugar	5° lugar	4° lugar	3° lugar	2° lugar	1° lugar

Ahora vemos esto con potencias de diez:

.... 10^9,	10^8,	10^7,	10^6,	10^5,	10^4,	10^3,	10^2,	10
centena de millón	decena de millón	unidad de millón	centena de millar	decena de millar	unidad de millar	centenas	decenas	unidades

El uso del cero como elemento posicional consiste en ponerlo en los lugares correspondientes en donde no se tenga ningún número asociado a la potencia de 10 correspondiente a las unidades de ese orden.

---

u.millar = unidad de millar u.millón = unidad de millón

d.millar = decena de millar d.millón = decena de millón

c.millar = centena de millar c.millón = centena de millón

R E S U M E N:

Los números naturales surgen de la necesidad que el hombre tiene de contar.

El conjunto de los números naturales es infinito y lo representamos por N

$$N = \{1,2,3,4,.........\}$$

En el cual tenemos ya establecido un orden, en donde cada elemento del conjunto es seguido por otro, el cual es una unidad mayor.

Los números naturales se representan en la recta numérica tomando un segmento unitario y colocándolo en la recta numérica uno a continuación de otro.

Por otra parte los números naturales pueden ser representados por sumas de productos de base 10, en el cual a cada potencia de 10 le corresponde un lugar.

UNIDAD II. LOS NUMEROS ENTEROS

En la aritmética tenemos definidas cuatro operaciones fundamentales, que son: suma, resta, multiplicación y división.

La suma y el producto de dos números naturales siempre va a resultar un número natural, es decir, la operación suma y - producto son cerradas para estas operaciones, lo cual no -- siempre sucede con la resta ya que para que esto suceda el minuendo debe ser mayor o igual que el sustraendo.

Por ejemplo:

$$7 - 5 = 2$$

$$3 - 2 = 1$$

$$107 - 99 = 8$$

$$324 - 324 = 0$$

Pero que sucede si el minuendo es menor que el sustraendo.

Por ejemplo:

$$5 - 7 = ?$$

$$33 - 39 = ?$$

$$18 - 25 = ?$$

No sabemos cual es el resultado ya que no existe ningún número natural que satisfaga esta operación por lo que nos vemos obligados a hablar de un conjunto mayor que contenga la solución para estas operaciones, este conjunto es el conjunto de <u>números enteros</u>, el cual está formado por los números naturales distintos de cero, que reciben el nombre de enteros positivos, cero y los números simétricos que reciben el nombre de enteros negativos.

El conjunto de números enteros se va a denotar por Z y lo representaremos como

$$Z = \{ \ldots\ldots\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots \}$$

Vamos a entender por simétrico de un número n aquel número que sumado con n nos da cero; es decir, el simétrico de n es -n, ya que

$$n + (-n) = 0$$

En general tenemos que para cada número entero positivo n existe su simétrico (-n).

Ahora nos preguntaremos si tendrán simétrico los números negativos, apliquemos la misma receta, el simétrico de un número negativo, será el que sumado con éste nos de cero.

Por ejemplo:

a) El simétrico de -3 será 3 porque $-3 + (+3) = 0$

b) El simétrico de -239 será 239 porque $-239 + (+239) = 0$

c) El simétrico de -83 será 83 porque $-83 + (+83) = 0$

En general el simétrico de un número negativo $-n$ será n ya que $(-n) + (n) = 0$

Este número $-n$ es también llamado el inverso aditivo de n ó sea el número que tiene la propiedad de que

$$n + (-n) = 0$$

Ahora vemos que con estos nuevos números, las operaciones

$$5 - 7 = ?$$
$$33 - 39 = ?$$
$$18 - 25 = ?$$

Pueden ser efectuadas y dan:

$$5 - 7 = -2$$
$$33 - 39 = -6$$
$$18 - 25 = -7$$

E J E R C I C I O:

Efectúa las siguientes operaciones en el conjunto de números enteros:

a) 43 - 578

b) -97 + 34

c) -85 + 97

d) 78 - 765

ORDEN EN LOS ENTEROS

Así como los números naturales, el conjunto de los enteros tiene también un orden.

Si tenemos dos números enteros cualesquiera a y b se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones (Ley de la Tricotomía).

$$a < b$$

$$a > b$$

$$a \neq b$$

Los enteros positivos son números mayores que cero, y los enteros negativos son menores que cero, en otras palabras un número entero puede ser o bien natural o bien cero, ó -- bien su inverso aditivo es un número natural.

VALOR ABSOLUTO

A cada número entero n vamos a asociarle otro número entero que llamaremos el "valor absoluto de n" y lo denotaremos por /n/, este número está determinado de la siguiente manera:

$$
n = \begin{cases} n \text{ si } n > 0 \\ -n \text{ si } n < 0 \\ 0 \text{ si } n = 0 \end{cases}
$$

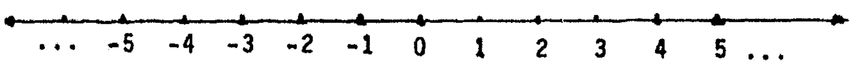
Esto nos sirve únicamente para medir la distancia - entre el número y cero sin tener en cuenta el lado de la -- recta en que nos encontramos.

E J E M P L O S:

a)	/-115/	=	115
b)	/-3/	=	3
c)	/ 7/	=	7
d)	/ 0/	=	0
e)	/ 824/	=	824
f	/-4993/	=	4093

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS ENTEROS

La gráfica lineal (semi-recta) que utilizamos para representar los números naturales puede prolongarse hacia la izquierda del cero, por lo que los enteros pueden represen-tarse sobre un eje numérico de la siguiente manera:



Cómo representarías las siguientes operaciones:

a) $6 - 11 = -5$

b) $8 - 9 = -1$

c) $7 - 7 = 0$

d) $-3 + 5 = 2$

e) $-9 + 3 = -6$

Esto lo vamos a representar por medio de puntos en la recta, los cuales nos representarán el resultado.

La operación indicaría desplazarse hacia la derecha o izquierda del cero tantas unidades, como lo indica el primer número y luego hacia la izquierda o derecha tantas unidades como lo indica el segundo número y llegaríamos a un punto en la recta, el cual va a ser el punto que representa el resultado, por ejemplo en el ejercicio a), nos desplazaríamos seis unidades hacia la derecha ya que el número es 6, de ahí regresaríamos 11 unidades hacia la izquierda ya que estamos restando y el punto que obtenemos será -5.

E J E R C I C I O S:

a) Representa gráficamente los ejercicios anteriores.

b) ¿Podrías interpretar geométricamente en la recta numérica /n/ ?

c) ¿Qué significa /n/?

Esta representación es muy útil para saber entre otras cosas que número es mayor, ya que todo número que se encuentra a la izquierda es menor que el que se encuentra a la derecha.
Los números enteros son útiles para representar cantidades físicas en el cual el signo (+) es utilizado para representar ganancias, grados sobre cero, distancias en dirección positiva hacia la derecha del punto de partida o hacia arriba, etcétera, el signo (-) se utiliza para pérdidas, grados bajo cero, distancia hacia la izquierda del punto de partida o hacia abajo, etcétera.

En matemáticas se ha visto que es muy conveniente representar esas ideas en forma simbólica por medio de los signos (+) y (-).

E J E M P L O S :

a) Ganancias obtenidas de \$40 = + \$40 ó \$40

b) Temperatura de 35°C sobre cero = 35°C

c) Temperatura de 8°C bajo cero = 8°C

d) Distancia de 38 m del punto de partida hacia el oeste = -38 m

C O M E N T A R I O S:

Si ustedes repasan su experiencia en relación con los números negativos, verán que al principio los ven como objetos raros con poco o nulo significado, con poca o nula relación con la realidad, etc. Sin embargo al paso del tiempo y de otros estudios de matemáticas, ustedes fueron viendo la importancia y utilidad de usar este tipo de objetos matemáticos, por ejemplo al resolver cierto tipo de problemas como los ya mencionados, al establecer o usar direcciones para los movimientos de una recta, el poder efectuar operaciones que antes no podíamos realizar, etcétera.

Esta situación de aprendizaje o conocimiento es típica del estudio de las matemáticas y aún a nivel de desarrollo de las matemáticas, uno puede ver en la historia de éstas como este tipo de patrón de dificultades iniciales y familiarización y aceptación se ha dado constantemente.

MORALEJA: (parcial).- Cuando encuenstres un objeto matemático un tanto extraño o raro procura buscar su significado, importancia y utilidad dentro de las matemáticas por medio de un estudio más amplio y profundo del campo en que aparece dicho objeto.

MORALEJA: (parcial).- Toma en cuenta que cada paso que des en el avance del tema será más seguro, si tienes la certeza- que está dado superando todos los obstáculos.

R E S U M E N:

No todas las operaciones son siempre posibles en el conjunto de números naturales por lo que nos vemos precisados a hablar de un conjunto más grande, que es el conjunto de números enteros, el cual está formado por los números naturales positivos, el cero y los enteros negativos, y los - denotaremos por Z, y los representaremos como:

$$Z = \{ \ldots\ldots -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\ldots\ldots \}$$

En el conjunto de números enteros tenemos que para cada número (n) tenemos su simétrico (-n), lo mismo para cada número (-n) su simétrico será (n) El conjunto - de números enteros tambien tiene un orden, es decir, dados- dos números enteros a y b tienen que:

$$a < b, \qquad a > b, \qquad a = b$$

Los números enteros son útiles para representar cantidades físicas entre otras, en el cual el signo positivo - (+) se utiliza para representar ganancias, grados sobre - cero, distancias hacia la derecha, etc. y el signo (-) se utiliza para representar pérdidas, grados bajo cero, distancias hacia la izquierda. Los números enteros también se -- pueden representar gráficamente.

UNIDAD III. NUMEROS RACIONALES

Observamos que cuando efectuamos la operación de la división en el conjunto de números enteros el resultado obtenido no necesariamente va a ser un número entero, esto solo es posible si el numerador es múltiplo del denominador por lo que nos vemos en la necesidad de definir un conjunto de números mayor, que contenga a cualquier cociente de dos enteros, en el que el denominador sea distinto de cero, que llamaremos el conjunto de números racionales y que denotaremos por Q, y lo definiremos como sigue:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p,q \in Z \text{ y } q \neq 0 \right\}$$

El conjunto Q guarda las siguientes relaciones de contención de los conjuntos N y Z.

$$N \subset Z \subset Q$$

Porque $5 = \frac{5}{1}$ $-7 = \frac{-7}{1}$, etcétera. Entonces cada entero puede ser representado como un cociente de enteros. Y estas contenciones se pueden representar gráficamente de la siguiente manera:

Un número racional de la forma $\frac{p}{q}$ tiene diferentes representaciones, por ejemplo:

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{10} = \frac{70}{140} = \frac{25}{50}$ = etcétera

b) $\frac{3}{9} = \frac{9}{27} = \frac{300}{900}$ = etcétera

c) $\frac{5}{4} = \frac{20}{16} = \frac{35}{28} = \frac{500}{400} = \frac{1500}{1200}$ = etcétera

Dos expresiones de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con a,b,c y d $\in Z$ y b,d $\neq 0$ representan al mismo número racional si y solo si ad = cb.

A veces podemos observar que a partir de un número racional $\frac{p}{q}$ podemos ir cancelando los factores comunes del numerador y el denominador hasta llegar a un paso donde no es posible efectuar otra cancelación, en otras palabras el numerador y el denominador ya no tienen factores en común, o lo que es equivalente tienen como máximo común divisor (M.C.D.) a la unidad, en este caso decimos que la expresión es irreducible.

E J E M P L O S:

a) $\frac{150}{500} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{84}{126} = \frac{42}{63} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{2700}{9450} = \frac{300}{1050} = \frac{30}{105} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

E J E R C I C I O S:

Expresa en forma irreducible las siguientes fracciones:

a) $\frac{27}{9} =$

b) $\frac{675}{1215} =$

c) $\frac{768}{1280} =$

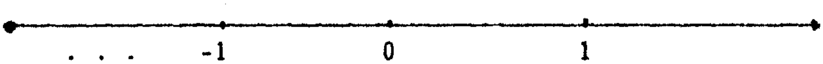
d) $\frac{163}{243} =$

e) $\frac{256}{512} =$

REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS RACIONALES

1.- Representación de los números de la forma $\frac{1}{n}$ por ejemplo

$\frac{1}{2}$, 1/3 , $\frac{1}{5}$, 1/8 etc.

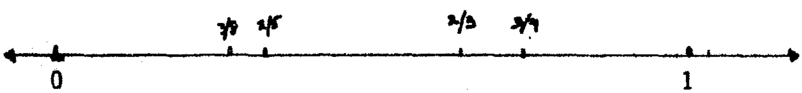


Fijémonos en la recta numérica y tomemos el segmento entre 0 y 1 y dividamos el segmento en tantas partes como lo indica el denominador, primero fijémonos en el racional $\frac{1}{2}$ y dividamos nuestro segmento en dos partes iguales. La primera parte tiene como extremo izquierdo al punto asociado a- cero, la segunda parte tiene como extremo derecho el punto - asociado a 1. El extremo derecho de la primera parte, que - coincide con el extremo izquierdo de la segunda parte es el- punto asociado a $\frac{1}{2}$, luego fijémonos en el siguiente $\frac{1}{3}$, - dividamos el segmento en tres partes iguales y tomemos la -- parte que está mas a la izquierda y tomemos el punto extremo de la derecha, este punto nos representará a $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente con los demás.

2.- Ahora fijémonos en los números $\frac{p}{q}$ de tal manera que el numerador sea menor que el denominador, es decir, $p < q$ y $p \neq 1$

Sean los números $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etcétera

Se procede como en el caso anterior, dividimos el segmento en tantas partes iguales como lo indica el denominador a partir de cero y tomamos tantas partes como lo indica el numerador, el extremo derecho de estas partes nos representa el número, y así lo tendremos representados por un punto de la recta.



Recordemos que el orden en está dado por la siguiente desigualdad:

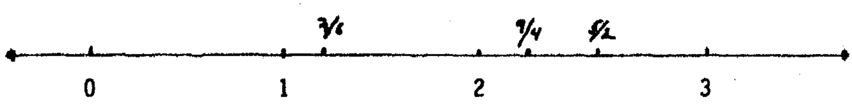
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{si y solo si} \quad ad < bc$$

Haremos notar que el orden de los números corresponde al orden de los puntos de la recta al recorrerla en el sentido de izquierda a derecha, esto es, un número es menor que otro, si y solo si, si el punto asociado al primero, está a la izquierda del punto asociado al segundo.

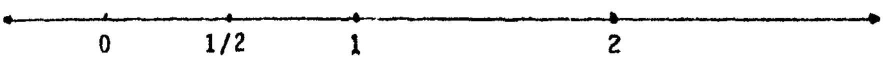
3.- Coloquemos en la recta cualquier número de la forma $\frac{p}{q}$ en el que p q por ejemplo: $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{6}$, etcétera.

Tomemos el número $\frac{5}{3}$ y representémoslo en la recta de la siguiente manera:

Dividamos el segmento en tres partes iguales, tomemos la primera y obtendremos el segmento $\overline{OC}$, luego marquemos sobre la recta cinco segmentos iguales a $\overline{OC}$, y el punto que representa el extremo derecho corresponderá al número $\frac{5}{3}$, para los otros se procede de manera semejante y obtendremos los puntos que representan $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{6}$, como están marcados en la recta numérica.



E J E M P L O:



"El punto siempre será el mismo"

O sea independientemente del representante que elijamos para el número, el punto asociado siempre será el mismo.
¿Cómo ver que esto no solo es natural, sino necesario?
Porque el número representa una cantidad o magnitud.

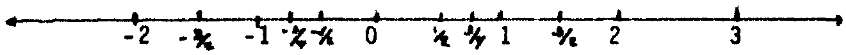
En la representación geométrica la cantidad asociada al número queda representada por la longitud del segmento y por lo tanto esta última es independiente del nombre o representación que se use para ese número, y el punto que es extremo derecho de ese segmento es el punto asociado al número y por lo tanto la siguiente observación:

"El punto es el mismo independientemente del representante elegido".

¿ Qué sucede si el número es negativo?

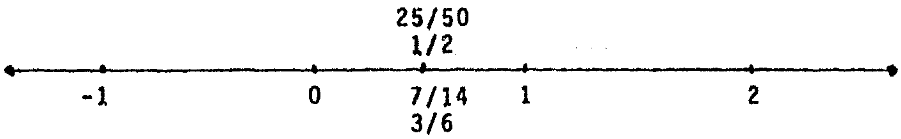
Se procede de manera semejante solo que los puntos se colocan en dirección opuesta, es decir, hacia la izquierda del cero.

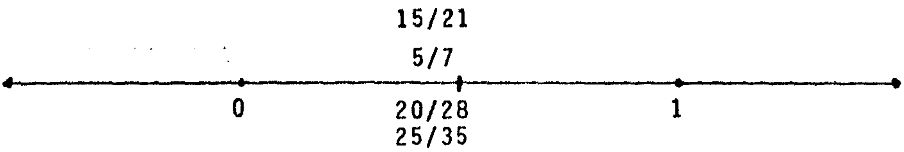
E J E M P L O S:



En esta representación geométrica la cantidad o magnitud asociada que determina el número, queda representada por la longitud del segmento cuyos puntos extremos son cero y el punto asociado al número.

$\frac{1}{4}$ queda a la mitad entre 0 y $\frac{1}{2}$ y al dos veces un cuarto el punto final es el que corresponde a $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$,etcétera.





E J E M P L O S:

A) $\frac{1}{2} = \frac{7}{14} = \frac{3}{6} = \frac{25}{50}$ etcétera

B) $\frac{5}{7} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35}$ etcétera

Dado que el número es el mismo y sólo el nombre es lo que cambia, la representación geométrica al conservar la idea de magnitud asociada al número nos determinará el mismo punto, o equivalentemente la misma longitud del segmento a partir de cero.

EJERCICIOS:

1.- Representa en la recta numérica los siguientes números racionales.

a) $\frac{7}{9}$

b) $\frac{6}{16}$

c) $-\frac{9}{3}$

d) $-\frac{5}{11}$

e) $\frac{16}{14}$

2.- Comprueba que las siguientes igualdades son verdaderas.

a) $\frac{7}{14} = \frac{21}{42} = \frac{35}{70} = \frac{63}{126} = \frac{189}{378}$

b) $\frac{1}{8} = \frac{3}{24} = \frac{5}{40} = \frac{9}{72}$

c) $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{50}{25}$

3.- Si p y q son números enteros, en la fracción $\frac{p}{q}$, ¿Qué nos indica p y q al representar esta fracción en la -- recta numérica?

REPRESENTACION DECIMAL DE $\frac{p}{q}$

Cuando efectuamos la operación división de dos enteros el - cociente obtenido, no necesariamente es un número entero pero sí un número decimal de la forma $A.a_1a_2a_3a_4......a_n$ donde A es la parte entera y $a_1a_2a_3.....a_n$ la parte decimal.

E J E M P L O S:

a) $\frac{1}{2}$ = .5

b) $\frac{7}{2}$ = 3.5

c) $\frac{5}{3}$ = 1.666...

d) $\frac{2}{7}$ = .285714285714285714...

e) $\frac{3}{5}$ = 1.6

f) $\frac{2}{11}$ = .181818.....

Fijándonos en los ejemplos anteriores, vemos que hay dos casos:

a) La expresión decimal es finita.

b) La expresión decimal es periódica.

Por lo tanto todo número racional de la forma $\frac{p}{q}$ tiene una expresión decimal finita o periódica.

Veamos con más cuidado que significan estas expresiones decimales.

A) Representación de la expresión decimal periódica.

Fijémonos en el número $\frac{1}{8}$. Efectuando la división tenemos:

$\frac{1}{8} = 0.125$ y expresándolo como suma

$$0.125 = 0.100 + 0.020 + 0.005$$

= una décima más dos centésimas más cinco milésimas.

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

Ahora recordemos las siguientes divisiones:

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

$$\frac{1}{100} = 0.01$$

$$\frac{1}{1000} = 0.001$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{100..0} = 0.000.01$$

En términos de exponentes negativos esto puede ser escrito así:

$$0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{10}{10^3} = 10^{-3}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{0.000\ldots01}_{n-1 \text{ ceros}} = \frac{1}{1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{-ceros}}} = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$$

Ahora volviendo a nuestro ejemplo $\frac{1}{8} = 0.125$ expresémoslo como una suma de potencias de 10.

$$0.125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$= \frac{1}{10} \quad \frac{2}{10^2} \quad \frac{5}{10^3}$$

$$= 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

Notemos que la descomposición tiene tantos sumandos como cifras tiene el número 0.125 después del punto decimal y que los exponentes de base 10 van disminuyendo de -1 a -3.

Tenemos también que en la igualdad:

$$0.125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

$\frac{1}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{5}{1000}$ son números racionales por lo tanto - la suma de ellos será un número racional ya que los racionales tienen la propiedad de cerradura (dados dos números racio nales cualesquiera, su suma será siempre otro número racio-- nal). Y este argumento nos da que, en general, todo número- decimal finito es un número racional.

REPRESENTACION GEOMETRICA DE UNA EXPRESION FINITA

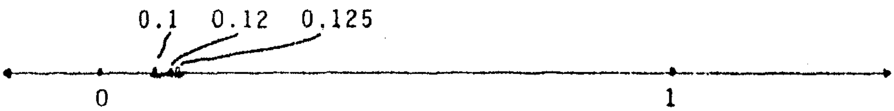
Ahora representaremos 0.125 en la recta numérica.

a) $\frac{1}{10} = 0.1$ lo localizamos dividiendo la unidad en 10 partes y tomamos la primera al extremo derecho de este segmento le asociamos el número 0.1

b) El número $0.12 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ lo localizamos en la recta dividiendo la unidad en 100 partes iguales y tomamos dos de ellas y las colocamos a partir del punto 0.1 al extremo derecho le asociamos el número 0.12

c) El número $0.125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$ para localizar el - punto dividimos el segmento 01 en mil partes iguales y - tomamos una de ellas y la colocamos a partir del punto - 0.12 cinco veces y tomamos el extremo derecho a este punto le asociamos el número 0.125 el cual tenemos ya localizado en la recta.

Para la localización del punto lo hicimos paso a paso mediante un número finito de pasos.



b) REPRESENTACION DECIMAL PERIODICA

Fijémonos ahora en los números $\frac{p}{q}$ tales que la división no sea finita, en este caso se tiene que un grupo de números - que se repiten indefinidamente.

<u>E J E M P L O S</u>:

a) $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots.$

b) $\frac{8}{7} = 1.142857142857142857\ldots.$

c) $\frac{1}{12} = 0.08333\ldots$

d) $\frac{5}{24} = 0.208333\ldots$

e) $\frac{2}{11} = 0.181818\ldots$

f) $\frac{36}{11} = 3.272727\ldots$

En estos casos a partir de cierto número después del -- punto decimal se encuentra un grupo de dígitos que se repi-- te indefinidamente en el mismo orden, a este grupo de núme-- ros que se repite se le da el nombre de período.

En el primer ejemplo el período comienza inmediatamen- te después del punto decimal y está representado por el dígi to 3, el segundo ejemplo comienza con un dígito a la izquier da del punto decimal y 6 dígitos a la derecha que se repiten indefinidamente, en el tercer ejemplo el período comienza en el tercer número después del punto decimal, análogamente pa- ra los otros ejemplos nos fijamos en donde empieza a repetir se el grupo de dígitos.

El período se indica poniendo una rayita horizontal -- (llamada testa) sobre los números del período en lugar de - los puntos suspensivos:

<u>E J E M P L O S</u>:

$0.3333\ldots = 0.\overline{3}$

$1.142857142857142857\ldots = 1.\overline{142857}$

$0.8333\ldots = 0.8\overline{3}$

$0.181818\ldots = 0.\overline{18}$

E J E M P L O S:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

$$\frac{36}{11} = 3.\overline{27}$$

$$\frac{8}{7} = 1.\overline{142857}$$

$$\frac{1}{12} = 0.\overline{83}$$

$$\frac{5}{12} = 0.41\overline{6}$$

$$\frac{5}{24} = 0.20\overline{83}$$

E J E R C I C I O S:

Expresar las siguientes expresiones en forma decimal periódica.

a) $\frac{13}{7}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{18}{24}$

d) $\frac{6}{26}$

e) $\frac{527}{38}$

En resumen, tenemos que en toda expresión de la forma $\frac{p}{q}$ al efectuar la operación (división) tenemos que el cociente es una expresión decimal finita, o bien, una expresión decimal infinita la cual siempre será periódica, de donde tenemos que <u>todo número racional tiene una expresión decimal finita o periódica</u>.

REPRESENTACION DECIMAL PERIODICA DE UN NUMERO COMO UNA SUMA INFINITA

Consideremos el número $\frac{1}{3}$, el cual se puede representar en la recta numérica de la siguiente manera:

Además como hemos visto anteriormente:

$\frac{1}{3} = 0.333...,$ en donde

$$0.333... = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + ...$$

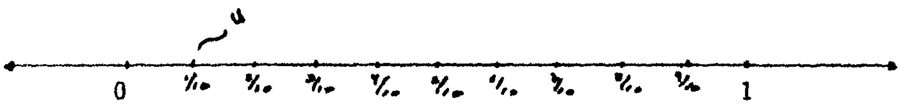
$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ...$$

La igualdad anterior nos indica que el número racional $\frac{1}{3}$ - puede ser expresado como una "suma infinita" de términos que son el producto del número 3 con potencias negativas de 10- como:

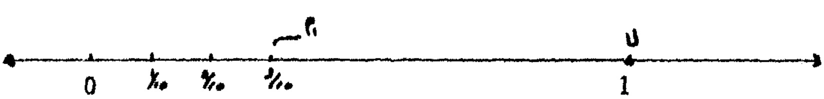
$\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{1}{3}$, debe ser natural que el punto que le corresponda a la "suma" $\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ...$ debía ser el punto que le habíamos asociado a $\frac{1}{3}$.

Supongamos que no sabemos que $\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots\ldots$ es igual a $\frac{1}{3}$, ¿Cómo podríamos localizar el punto que corresponde a la suma $\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots\ldots$ en la recta numérica?

Como anteriormente, para localizar el punto en la recta numérica que corresponde al primer término de la suma, tomamos un segmento unitario (01) en la recta y lo dividimos en 10 segmentos iguales.

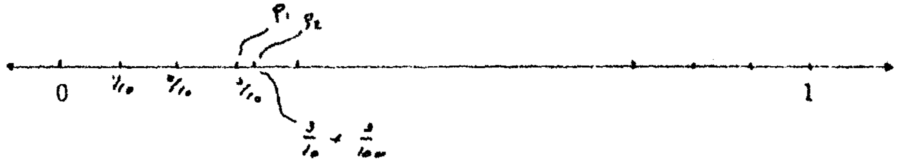


Luego a partir del cero colocamos tres segmentos uno tras otro congruentes (iguales) al segmento OU_1 y el punto P_1 de la recta que quede en el extremo derecho del último segmento le asociamos $\frac{3}{10}$.



Para localizar el punto en la recta que corresponde a la -- suma de los dos primeros términos de la "suma infinita" esto es, a $\frac{3}{10} + \frac{3}{100}$, tomemos el mismo segmento unitario y lo dividimos en 100 segmentos iguales.

Después a partir de P colocamos tres segmentos iguales al -- segmento 0 U_2 y obtenemos el punto P_2 el cual está localizado en el extremo derecho del último segmento y le asociamos el número $\frac{3}{10} + \frac{3}{100}$



Para localizar el punto en la recta que corresponde a la suma de los tres primeros sumandos de la "suma infinita", esto es, a $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$, tomamos el mismo segmento unitario y lo dividimos en mil segmentos iguales.

Después a partir del punto P colocamos tres segmentos uno tras otro, congruentes al segmento OU y al punto P de la recta que queda en el extremo derecho del último segmento le asociamos el número $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$.

Siguiendo este procedimiento hasta un número n de pasos suficientemente grande para localizar el punto P en la recta que corresponde a un número n suficientemente grande de los primeros términos de la "suma infinita".

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^{n-1}} + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

Observamos que los puntos P_1, P_2, P_3, ... P_n tienen las características siguientes:

1) P_2 está a la derecha de P_1

P_3 está a la derecha de P_2

P_4 está a la derecha de P_3

P_5 está a la derecha de P_4

$\vdots$

P_n está a la derecha de P_{n-1}

2) A medida que avanzamos el punto P_i es más cercano al punto P_{i-1}, o en otras palabras, la distancia entre P_{i-1} y P_i es cada vez mas pequeña, a medida que i crece.

De 1) y 2) podríamos suponer que si continuamos este procedimiento un número suficientemente grande de pasos el punto P localizado en el n-ésimo paso se "acerca tanto como queramos a un punto P" el cual no será rebasado aunque el proceso continúe indefinidamente, a tal punto le llamaremos "punto tope" y en este caso a tal punto P le corresponde el número racional $\frac{1}{3}$.

En este caso fijémonos primero en algunos casos particu--lares:

1.- $\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$ porque $9 < 10$

2.- $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} < \frac{1}{3}$ porque $\frac{33}{10^2} < \frac{1}{3}$

3.- $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} < \frac{1}{3}$ porque $\frac{333}{1000} < \frac{1}{3}$

y en general tenemos la progresión finita

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots\ldots \frac{3}{10^n} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots\ldots + \frac{3}{10^n} < \frac{1}{3}$$

$$3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{10^n}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}^2 + \frac{1}{10}^3 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{10}^n\right)$$

$$= 3\left(\frac{\frac{1}{10}^{n+1} - 1}{\frac{1}{10} - 1} - 1\right) = 3\left(\frac{\frac{1 - 10^{n+1}}{10^{n+1}}}{-\frac{9}{10}} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{10} - 1} - 1\right) = 3\left(\frac{\frac{1 - 10^{n+1}}{10^{n+1}}}{-\frac{9}{10}} - 1\right) =$$

$$= 3\left(\frac{10\,(1 - 10^{n+1})}{-9(10^{n+1})} - 1\right) = 3\left(\frac{1 - 10^{n+1}}{-9\,(10^{n})} - 1\right)$$

$$= \frac{1 - 10^{n-1}}{-3(10^{n})} - 3 = \frac{1 - 10^{n+1} + 9(10^{n})}{-3(10^{n})}$$

$$= \frac{10^{n}\left(\frac{1}{10^{n}} - 10 - 9\right)}{-3\,(10^{n})} = \frac{\frac{1}{10^{n}} - 1}{-3} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{10^{n}}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(10^{n})} < \frac{1}{3}$$

==

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a-1} = a^{n} + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1$$

Con este método podemos hacer natural o factible que a toda expresión decimal infinita periódica corresponda un punto - de la recta.

E J E R C I C I O S:

1.- Dadas las siguientes expresiones decimales, escribirlas como sumas de productos de potencias de base 10.

a) 0.383615291529 ....

b) 94.8527721313131...

c) 0.3244242424...

d) 0.791343134313431

e) 5.222...

2.- Localizar en la recta numérica los números indicados en el ejercicio anterior.

R E S U M E N:

Los números racionales los definiremos como:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q, \in Z \quad y \quad q \neq 0 \right\}$$

el cual guarda la siguiente relación con N y Z

$$N \subset Z \subset Q$$

Un número racional tiene diferentes representaciones,- aunque el punto asociado en la recta numérica siempre será el mismo, no importando su representación.
Ya que en su representación geométrica la cantidad asociada al número, queda representada por la longitud del segmento, y por lo tanto, es independiente de la representación que - para ese número se tenga.

Los números racionales pueden representarse no sólo co- mo un cociente de enteros sino que también en forma decimal- para lo cual tendrán una expresión decimal finita o una re-- presentación decimal periódica.

Además los números racionales se pueden representar co- mo una " suma infinita " de términos con potencias de base- 10.

UNIDAD IV NUMEROS IRRACIONALES

Si nos fijamos en las expresiones decimales infinitas - no periódicas, en las cuales no existe ningún grupo de dígi-- tos fijo que se repita indefinidamente como:

A) 0.101001000100001....

B) 2.10110111011110.....

C) 43.1271227122271222227...; tomemos el caso A)

¿Cuál es la regla que define la expresión?

Se escribe un uno seguido de un bloque de ceros que cada vez- tiene un cero más.

$$1\ \underbrace{0}_{1}\ 1\ \underbrace{00}_{2}\ 1\ \underbrace{000}_{3}\ 1\ \underbrace{0000}_{4}\ 1\ \underbrace{00000}_{5}\ 1\ \underbrace{000000}_{6}\ 1\ \ldots.$$

¿Porqué decimos que no es periódico?

Porque no existe ningún grupo de dígitos <u>fijo</u> que se repita - indefinidamente, como veremos a continuación.

Si suponemos que es periódico, sea M la longitud del período, entonces tenemos dos posibilidades.

a) El período está compuesto únicamente de ceros.

b) En el período aparece al menos un uno.

a) Entonces a partir de donde aparece por primera vez el pe ríodo solo habría ceros a la derecha pero esto contradi- ce la forma en que construímos la expresión (ya que siem pre aparecerán unos, aunque cada vez más separados).

b) Consideremos que el período tiene m dígitos, si nos vamos hacia la derecha encontramos hileras de ceros cada vez más grandes y en particular a partir de un cierto punto con más de 2m ceros, y por lo tanto no aparecerán los unos del período.

O sea que en ambos casos llegamos a que no puede haber período.

A estas expresiones decimales correspondería una "suma infinita" de productos de potencias de base 10. Pero estas sumas infinitas no sabemos hasta ahora como manejarlas.

a) $0.10100100010001\ldots = 0. + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \ldots$

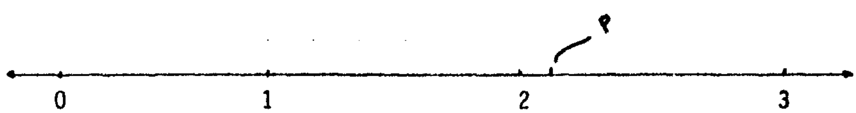
b) $2.10110111011110111110\ldots = 2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots$

c) $43.127122712227\ldots = 43 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{2}{10^6}$

$$+ \frac{7}{10^7} + \frac{1}{10^8} + \frac{2}{10^9} + \frac{2}{10^{10}} + \ldots\ldots\ldots$$

REPRESENTACION GEOMETRICA

Mediante un proceso parecido para localizar la expre--- sión decimal periódica 0.33333... en la recta podemos encontrar puntos p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, ... p_n para cada expresión decimal finita.



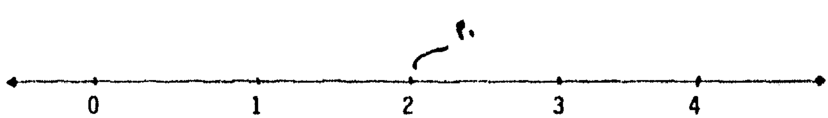
P = Punto en la recta que corresponde al número

2.10110111011110...

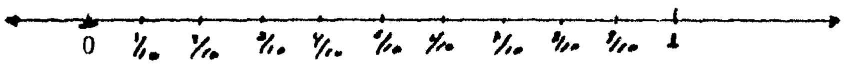
Esto es:

$$2.10110111011110... = 2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{0}{10^5} + ...$$

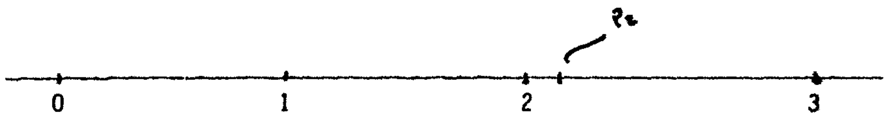
Este punto lo localizamos en la recta de la siguiente manera: tomamos el segmento unidad y marcamos dos de ellos en la recta y llamemósle $P_1 = 2$



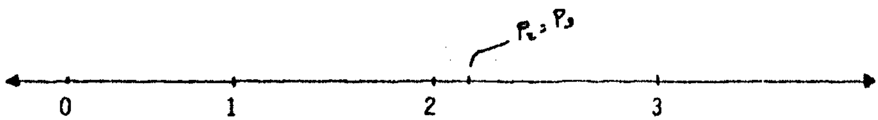
Luego para localizar el punto correspondiente a los -- dos primeros sumandos, esto es, $2 + \frac{1}{10}$ tomamos el segmento unidad y lo dividimos en 10 segmentos congruentes.



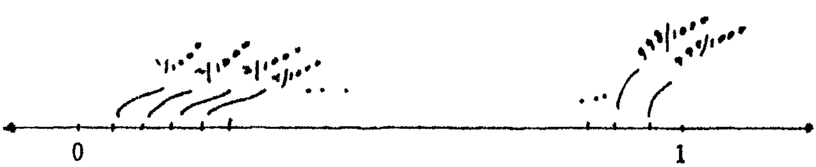
Luego a partir del punto P_1 de la recta, colocamos un segmento que llamaremos P_2 a este punto de la recta que queda en el extremo derecho le asociamos el número $2 + \frac{1}{10}$



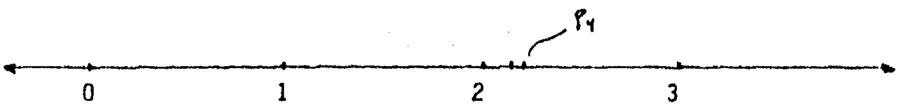
Luego para localizar el punto que corresponde a la suma de los tres primeros sumandos, esto es $2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2}$, nos damos cuenta que va a coincidir con P_2 ya que el tercer sumando es $\frac{0}{10^2}$ o sea que no hay que agregar ninguna longitud al segmento de la recta que representa el punto $2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2}$ por lo tanto P_2 y P_2 coincidirán.



por lo que pasamos a localizar el punto que representa los cuatro primeros sumandos, esto es, $2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3}$, de la suma infinita no periódica, tomamos el mismo segmento unitario y lo dividimos en 1000 segmentos congruentes.



Después a partir del punto P_3 de la recta colocamos un segmento congruente al segmento $\overline{Q}_3$ y al punto P_4 de la recta que queda en el extremo derecho del segmento, le asociamos el número $2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000}$



Siguiendo este procedimiento un número n de veces suficientemente grande para localizar el punto p_n en la que corresponde a un número suficientemente grande de los primeros términos de la suma infinita no periódica tenemos:

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{0}{100000} + \ldots\ldots\ldots$$

1.- Observamos que en la recta los puntos P_1, P_2, $P_3 \ldots$ P_n están a la derecha o coinciden con el anterior, y

2.- A medida que avanzamos, el punto P_{i-1} es mas cercano a P_i

De donde deducimos que si continuamos este proceso indefinidamente el punto P_n se acerca tanto como queramos a un punto P que llamaremos "punto tope" y en este caso le corresponde el número irracional 2.101101110...

En general, el procedimiento para representar en la recta expresiones decimales no periódicas e infinitas será:
Dada la expresión decimal no periódica.

$a = A.a_1a_2a_3.....a_n$ donde los a_i son dígitos cualesquiera.
$i = 1,2,3,4,......9$ y A es un número natural o cero.

Se tomarán:

1.- $S_0 = A$ y se le asignará el punto P_0 en la recga.

2.- $S_1 = A + \frac{a}{10}$ y se le asociará el punto P_1 en la recta.

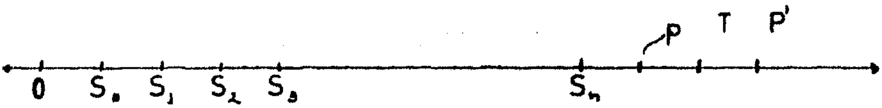
3.- $S_2 = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$

4.- $S_4 = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000}$

$\vdots$

n.- $S_n = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^n}$ y se le asociará el punto P_n en la recta.

Haremos notar que cada número representado hasta aquí, es un número racional, ya que es la suma de números racionales, y que si continuamos este proceso indefinidamente, es decir, tantas veces como decimales tenga la expresión decimal, nos iremos acercando a un número " T " en la recta que llamaremos "tope" y al cual ya no podemos "pasar" con los puntos P_n que corresponden a las n-ésimas sumas S_n por mas grande que hagamos la n.

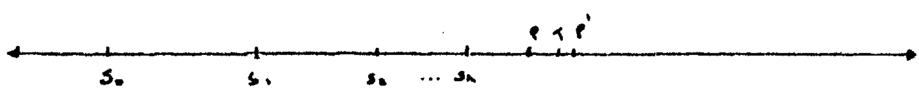


Para que el punto T sea un punto tope se deben cumplir los siguientes requisitos.

1.- Si se elige cualquier punto P en la recta a la izquierda de T tan cerca como se quiera de T, llegará el momento en que los racionales que estamos considerando empezarán a estar a la derecha de P.

2.- Si escogemos un punto P' a la derecha de T entonces no existirá ni un sólo número racional entre T y P'.

3.- El punto T será el punto asociado al "número" que corresponde a la expresión decimal finita no periódica - $A.a_1a_2a_3......a_n .....$



Notaremos que cuando este procedimiento es aplicado a - expresiones decimales periódicas $A.a_1a_2a_3.....a_n\overline{b_1b_2.....b_r}$ donde los a_i , b_i son dígitos del punto tope (T) que co-- rresponderá tal expresión decimal en la recta se localizará expresando $A.a_1a_2......a_n\overline{b_1b_2b_n}$ como un cociente de dos - enteros.

$$A.a_1a_2.....a_nb_1b_2......b_n = \frac{p}{q}$$

Una expresión decimal infinita que no tenga período será llamada aperiódica.

Ejemplos:

a) 2.3030030003....

b) 15.010010001 ....

c) 0.5151151115....

De la misma manera podemos considerar expresiones decimales infinitas, periódicas y negativas, por ejemplo:

- 3.070070007.....
- 34.123579843157....
- 17.1231523172351119632....

El punto tope T que le corresponde a una expresión decimal negativa se localizará a la izquierda del punto que le - corresponde al número cero en la recta.

Estas expresiones decimales aperiódicas infinitas, tanto positivas como negativas se les conoce como números irracionales y se representan por I y los definiremos de la siguiente manera:

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \text{conjunto de números que no pueden expre-} \\ \text{sarse como el cociente de enteros en el} \\ \text{que el denominador es distinto de cero.} \end{array} \right\}$$

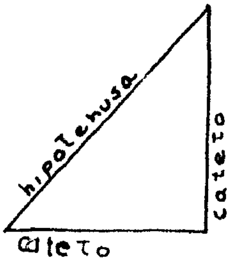
El descubrimiento de estos números se debe al famoso matemático Pitágoras de Samos (567 a.c. - 500 a.c.).

Diremos también que uno de los números irracionales que primero se conocieron fue el número $\sqrt{2}$. Cuando los pitagóricos querían obtener una expresión para la longitud de la diagonal de un cuadrado de longitud 1 en función de sus lados.

Ellos buscaban la razón entre la longitud de la diagonal y la longitud de uno de sus lados y esperaban calcularla como la razón de dos números naturales.

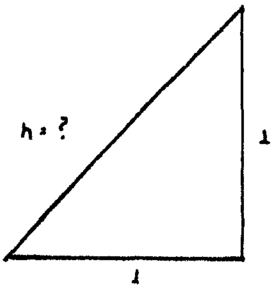
Tal vez, esta idea de razón es la que conduce al uso del término <u>racional</u> en el sentido que tiene una razón

Los pitagóricos sabían que en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. (Teorema de Pitágoras).



El cuadrado de un número se obtiene multiplicando el número por si mismo.

De acuerdo a ésto, si los catetos del triángulo rectángulo miden la unidad ¿Cuánto mide la hipotenusa?



Debido a los conocimientos que tenían los pitagóricos

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$

por tanto

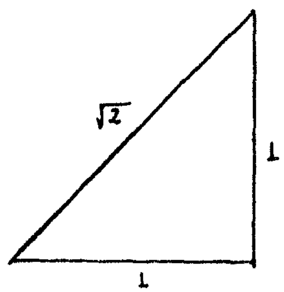
$$h^2 = 2$$

luego sacando raiz cuadrada a ambos lados de la igualdad

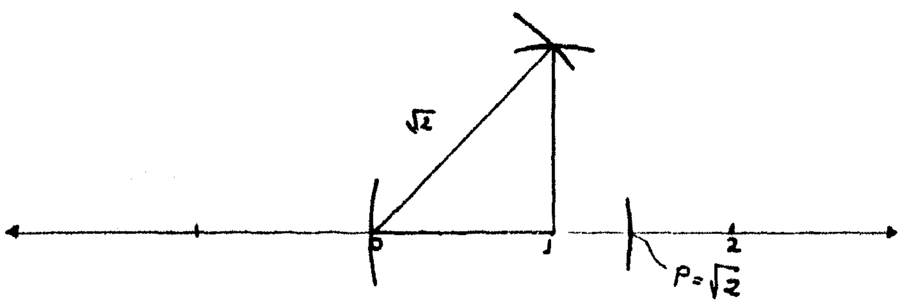
$$h = \sqrt{2}$$

Los pitagóricos intentaron escribir este número como el cociénte de enteros, lo cual nunca lograron.

Construyamos el triángulo rectángulo con catetos de lon gitud 1, según lo anterior tenemos que la longitud de la hipo tenusa es 2 . Este número es irracional como demostraremos más adelante.

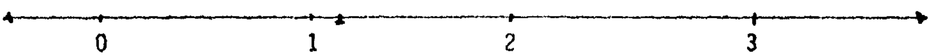


Tracemos la longitud correspondiente a $\sqrt{2}$ en la recta numérica de la siguiente manera:



Con centro en cero y radio $\sqrt{2}$. Tracemos un arco que corta a la recta en un punto P a este punto se le asigna el valor de $\sqrt{2}$.

Esta longitud está determinada entre cero y el punto asociado, es un tipo de cantidad (longitud) que no corresponde a ningún número de Q (conjunto de números racionales). Este punto sería el mismo si expresamos en forma decimal a $\sqrt{2}$ y usamos el procedimiento que vimos en la sección anterior.



$$\sqrt{2} = 1.4142135.....$$

Demostraremos que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como un cociente de dos enteros en el cual el denominador es de cero, por medio del siguiente método de demostración, llamado reducción al absurdo.

Primero haremos la siguiente aclaración:

En matemáticas hemos visto que si tenemos una afirmación y su contraria o negación, sólo una de ellas es verdadera y la otra es falsa.

E J E M P L O S:

a) $2 + 3 = 7$ ó $2 + 3 \neq 7$

b) $5 < 9$ ó $5 > 9$

c) Un cuadrado tiene once lados. ó Un cuadrado no tiene once lados.

d) $5 + 2 = 3 + 2$ ó $5 + 2 \neq 3 + 2$

e) La suma de los ángulos interiores de un polígono, es igual al número de lados, menos 2 multiplicado por 180°. ó La suma de los ángulos interiores de un polígono, es $\neq$ a el número de lados, menos 2, multiplicado por 180°.

Hemos visto que existen proposiciones que ya se ha demostrado son verdaderas, otras que son falsas y otras que no se ha demostrado si son falsas o verdaderas.

Un bosquejo de la demostración es presentado a continuación:

1.- Usaremos hipótesis auxiliares que ya sabemos son verdaderas, porque en algún momento esto se ha demostrado.

A) Que todo número racional se puede expresar en forma irreducible como un cociente de dos enteros, lo cual ya sabemos que es verdadero.

B) Que si p^2 es par, p también lo es. Esto lo demostraremos en un momento.

C) Usaremos como una hipótesis más la negación de lo que queremos demostrar como verdadero, esto es, que $\sqrt{2}$ si es racional.

A partir de estas hipótesis deduciremos con procedimientos lógicos completamente válidos una serie de conclusiones verdaderas hasta llegar a una que es contraria a la hipótesis A, que ya sabemos que es verdadera.

Por lo tanto estamos ante la situación de que una afirmación y su negación serían verdaderas, cosa que como habíamos mencionado es inadmisible en matemáticas.

Por tanto algo está equivocado o es falso en nuestro proceso.

Pero sólo hay dos cosas:

I.- Ciertas hipótesis.

II.- Un proceso de deducción lógica.

Ya dijimos que nuestras deducciones son lógicamente válidas como ustedes pueden revisar, con un análisis cuidadoso, por tanto sólo queda revisar las hipótesis auxiliares A y B son verdaderas, entonces sólo queda como única posibilidad para explicar el arribo a una contradicción, el que la hipótesis C no sea verdadera, pero si C no es verdadera, esto es, C es falsa por lo que hemos visto su negación es verdadera.

Y este procedimiento nos conduce a establecer como verdad que $\sqrt{2}$ no es racional.

D E M O S T R A C I O N E S:

Teorema 1:

Si p^2 es par, entonces p también lo es.

DEMOSTRACION:

Sólo hay dos posibilidades que p sea par o que p sea impar.

a) Supongamos que p es impar entonces se puede escribir como:

$$p = 2n + 1$$

elevando al cuadrado, tenemos:

$$p^2 = 4_n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 1$$

sea $K = 2n^2 + 2n$

entonces

$$p^2 = 2k + 1$$

entonces, si p es impar, p^2 también lo es.

Si p^2 es par, p tiene que ser par, ya que ningún número impar elevado al cuadrado es un número par.

Teorema 2:

2 es un número irracional.

DEMOSTRACION:

Hipótesis:

A) p^2 es par, implica p par

B) $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

C) $(p,q) = 1$

$(p,q) = 1$, significa que el máximo común divisor es 1

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, por lo tanto

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donde $\frac{p}{q}$ está en forma irreducible por la hipótesis C) ya que todo número racional se puede expresar - como el cociente de dos enteros en donde el denominador es - distinto de cero y que $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ , elevando al cuadrado , tenemos:}$$

$$2 = \frac{p^2}{p^2} \qquad 2q^2 = p^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

de (1) tenemos que p^2 es par, entonces p es par debido a la hipótesis B); por lo tanto,

$$p = 2r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$2q^2 = (2r)^2$$

$$2q^2 = 4r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

de (3) tenemos que:

$$q^2 = 2r \qquad q^2 \text{ es par} \qquad q \text{ es par}$$

p y q son números que tienen un factor común (lo cual es -- contradictorio a la hipótesis A).

$$\sqrt{2} \text{ no se puede escribir como } \frac{p}{q}$$

$$\sqrt{2} \text{ no es racional, } \sqrt{2} \text{ es irracional}$$

Por lo tanto existen una infinidad de números irracionales - no sólo 2, entre otros tenemos π, e, $n\sqrt{2}$, $n\sqrt{3}$, $n\sqrt{5}$, $n\sqrt{7}$, donde $n \in Q$,

$$\frac{p}{q} + n\sqrt{x} \qquad \text{donde } p, q \in Z \quad y \quad q \neq 0$$

además $\sqrt{x}$ no es exacta.

E J E R C I C I O S:

1) Dado cualquier número $p^2 = 2n$ ver que p es par

2) Siguiendo la demostración anterior demuestre que:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{11}$

No se pueden escribir como el cociente de dos enteros es decir, que son números irracionales.

RESUMEN:

Los números irracionales son aquellos que no pueden ser representados como el cociente de dos enteros donde el denominador es distinto de cero, es decir, son aquellos en los que no existe ningún grupo de dígitos que se repita indefinidamente.

Los números irracionales fueron descubiertos por el famoso Matemático Pitágoras de Samos (567 a.c. - 500 a.c.)

Uno de los primeros números irracionales que se conocieron fue el número $\sqrt{2}$ cuando los pitagóricos querían obtener una expresión racional para la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

La irracionalidad de estos números se demuestra mediante un método ya muy conocido en matemáticas llamado demostración por reducción al absurdo.

Estos números se representan en la recta numérica mediante un proceso de aproximación por medio de sumas infinitas.

UNIDAD V: NUMEROS REALES

Al conjunto de números reales lo denotaremos por R y lo definiremos como el conjunto de todos los números racionales y todos los números irracionales y los expresaremos como:

$$R = Q \cup I$$

Donde Q es el conjunto de números racionales y

es el conjunto de números irracionales.

Los números reales se pueden representar geométricamente en la recta a la que llamaremos recta real.

En el conjunto de los números reales tomaremos como verdaderas las siguientes afirmaciones:

a) A cada punto en la recta le corresponde un sólo número real y a cada número real le corresponde un punto en la recta.

b) Si A y B son puntos en la recta que corresponden a dos-números racionales a y b y c es un número real tal que:

$$a < c < b$$

entonces el punto c correspondiente a c está en el segmento $\overline{AB}$; es decir, $c \in \overline{AB}$.

Si el punto A de la recta corresponde al número real a, diremos que a es la coordenada del punto A.

Se darán como válidas las siguientes propiedades básicas:

-Se pueden extender las dos operaciones +(suma) y, -------

(producto) de los números racionales al conjunto de los números reales, esto es, si tomamos dos números reales a y b de tal manera que sean racionales, su suma con la operación de R resulta igual a su suma con la operación de Q. De la misma manera su producto, con la operación de Q resulta igual a su producto con la operación de R. Pero ya también podremos operar con los irracionales.

2.- R con estas operaciones cumple las siguientes propiedades:

a) La suma de dos números reales es cerrada, es decir,
si a y $b \in R$
entonces $a + b \in R$

b) La suma de dos números reales es conmutativa, es decir, si a y $b \in R$
entonces $a + b = b + a$

c) La suma de números reales es asociativa, es decir,
si a, b y $c \in R$
entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$

d) Existe un elemento neutro aditivo que es el cero; es decir,
si $a \in R$
entonces $a + 0 = a$

e) Para cada número real $a \in R$, existe otro número en R (denotado por $-a$) el cual recibe el nombre de inverso aditivo de a tal que:

$$a + (-a) = 0$$

a') El producto de dos números reales es cerrado, es decir, si $a, b \in R$ entonces $a. b = R$

b') El producto de dos números reales es conmutativo, es decir, $a, b \in R$ entonces $a. b = b. a$

c') El producto de números reales es asociativo, es - decir, sean $a, b, c \in R$ entonces $(ab)\ c = a(bc)$

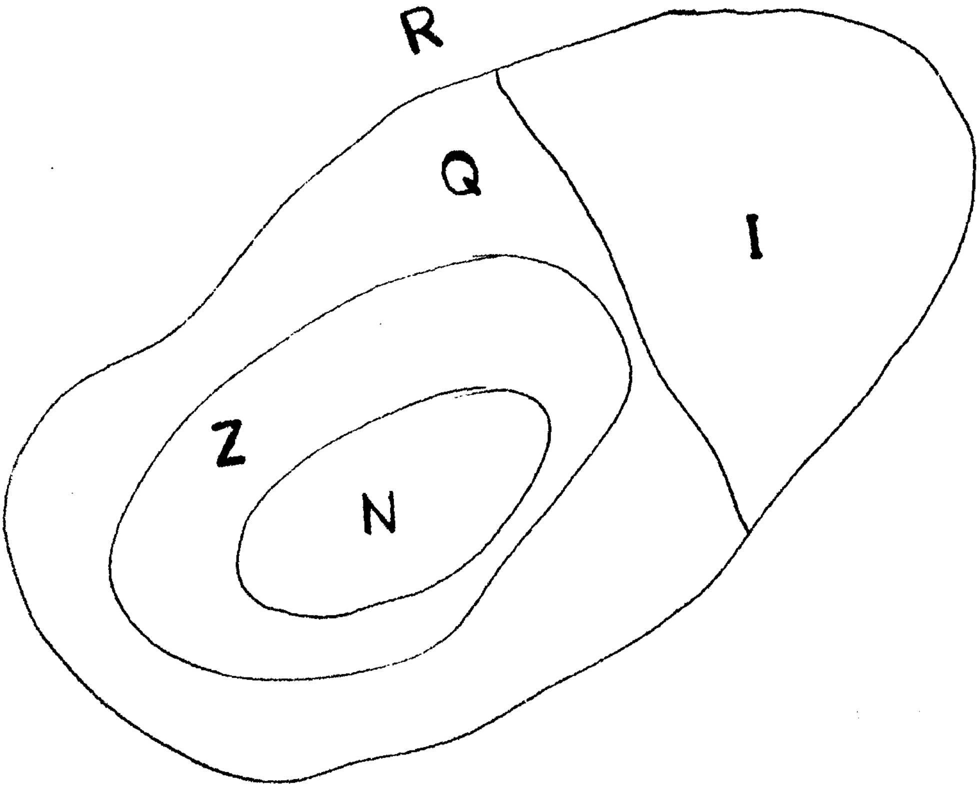
d') Existe en R un elemento (que es el 1) llamado el neutro multiplicativo, tal que: si $a \in R$ entonces $a. 1 = a$

e') Para cada número real $a \neq 0$ existe otro número -- real (denotado por a^{-1}) llamado el inverso multi-- plicativo de a tal que:

$$a.a^{-1} - 1$$

f') En R el producto distribuye a la suma; es decir,- sean a, b y $c \in R$ Entonces $a\ (b + c) = (a\ b) + (a\ c) = ab + ac$

A continuación presentamos las relaciones de con- tención del conjunto de números reales mediante un esquema- de Venn-Euler.


R
Q
I
Z
N

SUB CONJUNTOS DEL CONJUNTO DE NUMEROS REALES

- NUMEROS REALES
  - NUMEROS RACIONALES
    - NUMEROS ENTEROS
      - NUMEROS NATURALES
      - CERO
      - NUMEROS NEGATIVOS
    - NUMEROS FRACCIONARIOS
  - NUMEROS IRRACIONALES

Al conjunto R con las propiedades 1) y 2); es decir, con las operaciones + (suma) y . (producto) junto con sus propiedades le llamaremos:

"EL CAMPO DE LOS NUMEROS REALES"

E J E R C I C I O S :

a) ¿La suma de dos números irracionales siempre es irracional?

b) Demostrar que la suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

c) Explicar cada una de las propiedades de la suma y el producto de números reales tomando números en particular.

d) Comprobar gráficamente que:

   a) $R = Q \cup I$

   b) $Q \cap I = \emptyset$

TABLA DE LAS PROPIEDADES DE LOS SUBCONJUNTOS DEL CONJUNTO

DE LOS NUMEROS REALES

PROPIEDADES	NATURALES	ENTEROS	RACIONALES	IRRACIONALES	REALES
CERRADURA ADITIVA	✓	✓	✓	✓	✓
IDENTICO ADITIVO		✓	✓		✓
INVERSO ADITIVO		✓	✓	✓	✓
CERRADURA MULTIPLICATIVA	✓	✓	✓		✓
INVERSO MULTIPLICATIVO			✓	✓	✓

✓Indica la propiedad que tiene el conjunto.

B I B L I O G R A F I A

1) El fracaso de la Matemática Moderna.
Kline, Morris.
Ed. Siglo XXI editores, 1979.

2) Como plantear y resolver Problemas.
Polya, G.
Ed. Trillas, 1976

3) La Moderna Enseñanza Dinámica de las Matemáticas.
Zubieta R., Francisco.
Ed. Trillas, 1972

4) Manual de Didáctica de las Matemáticas
Centro de Didáctica, U.N.A.M.
ANUIES, 1971

5) Lecturas Universitarias # 7
Antología de Matemáticas
U.N.A.M., 1971

6) Lecturas Universitarias # 8
Antología de Matemáticas.
U.N.A.M., 1971

7) El Número Real.
Reinoso, Carlos.
Ed. Cultura Popular, 1977.

8) El Sistema de los Números Racionales.
Volumen 10

De la Colección "National Council of
Teachers of Methematic" U.S.A.
Ed. Trillas, 1983.

9) El Sistema de los Números Reales
Volumen II
De la Colección "National Council of
Teachers of Mathematics" U.S.A.
Ed. Trillas, 1983

10) Algebra II
El Campo de Números Racionales y

11) Algebra III
El Campo de Números Reales.
Humberto Cardenas.
Emilio Lluis
Francisco Raggi
Francisco Tomás.

12) Sigma en el Mundo de las Matemáticas.
Volumen I
J.R. Neuman
Ed. Grijalvo, 1974.

13) Sigma en el Mundo de las Matemáticas.
Volumen IV
J.R. Neuman
Ed. Grijalvo, 1969.

14) Sigma en el Mundo de las Matemáticas
Volumen V
J.R. Neuman
Ed. Grijalvo, 1969.

15) Mathematics in Civilization
H.C. Resnikoff
R.O. Wells Jr.

16) Introducción al Análisis Moderno
Dolciani, Beckenbach, Jurgensen,
Doneely, Wooton,
Ed. Publicaciones Culturales, S.A. 1968.

17) "El Campo de los Números Reales"
Guía para la Exposición en Clase
del Tema (notas)
Luis Aguirre Castillo.
Enero 1983.