

25
38



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**GRAFICAS CON ALGUNAS CONDICIONES GEOMETRICAS
SOBRE SU DISTANCIA ASOCIADA.**

T E S I S

**Que para obtener el Título de
M A T E M A T I C O**

p r e s e n t a

RAFAEL SOLIS PINEDA

México, D. F.

1984



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Í N D I C E

Introducción.....	1
Definiciones Elementales.....	4
Sección I	
Espacios Métricos de Gráficas.....	9
Sección II	
Caracterización de Gráficas de Clanes....	24
Sección III	
Propiedades Métricas de ciertas Gráficas de Clanes.....	29
Sección IV	
Una nota sobre las Propiedades Métricas de los Árboles.....	58
Sección V	
Una Caracterización de Gráficas con Distan- cia Hereditaria.....	72
Sección VI	
Una Caracterización de Gráficas Tolomeicas.	83

Sección VII

La Estructura de Clanes de las Gráficas

Tolomeicas.....	103
Referencias.....	121
Índice Alfabético.....	123

INTRODUCCIÓN

Como sabemos, toda gráfica conexa G tiene asociado un espacio métrico $(V(G), d)$ (ver definición en la página 9), donde $V(G)$ es el conjunto de los vértices de G . Estudiaremos las gráficas a través de su métrica asociada, y veremos como ciertas condiciones geométricas, como la desigualdad del triángulo, la desigualdad tolomeica, la condición de los cuatro puntos, la propiedad geodésica, la propiedad de debilidad geodésica y otras determinan mucho de la estructura de las gráficas. En especial, a partir de dichas propiedades se dan caracterizaciones de diversas clases de gráficas como árboles, árboles de Husimi, gráficas de clanes, gráficas débilmente geodésicas, \mathcal{Q} -gráficas, gráficas tolomeicas, gráficas semitolomeicas.

Para una mayor facilidad en la comprensión de esta tesis doy al principio las definiciones elementales que se tienen que conocer y que son definiciones básicas de la teoría de gráficas.

La tesis está dividida en siete secciones, al principio de cada sección se dan más definiciones que se requieren en dicha sección.

Se incluyen diversas caracterizaciones de las gráficas con la propiedad tolomeica, y en particular en el teorema final de esta tesis, se da una caracterización recursiva de ellas. Esta caracterización es importante porque permite determinar si una gráfica es tolomeica verificando si ciertas subgráficas lo son, y al mismo tiempo nos da un método para construir las gráficas con la propiedad tolomeica.

Todas las gráficas consideradas aquí, salvo mención expresa de lo contrario son conexas.

Este trabajo está basado en artículos de David C. Kay, Gary Chartrand, Fred S. Roberts, Joel H. Spencer Edward Howorka, Peter Buneman. (ver referencias).

Expreso mi más profundo agradecimiento a mis maestros, Hortensia Galeana Sánchez y Hugo A. Rincón Mejía por todo el entusiasmo con que me ayudaron y todos los consejos que me otorgaron para la realización de esta tesis.

La primera sección trata sobre los espacios métricos de gráficas, se da una caracterización de los espacios métricos de gráficas y una caracterización de cierto tipo de gráficas tolemeicas.

La segunda sección trata sobre la propiedad \mathcal{Q} y se da una caracterización de las gráficas de clanes a partir de dicha propiedad \mathcal{Q} .

La tercera sección trata sobre las propiedades métricas de ciertas gráficas de clanes, uno de los teoremas más importantes es el que se refiere a la caracterización métrica de árboles de Husimi.

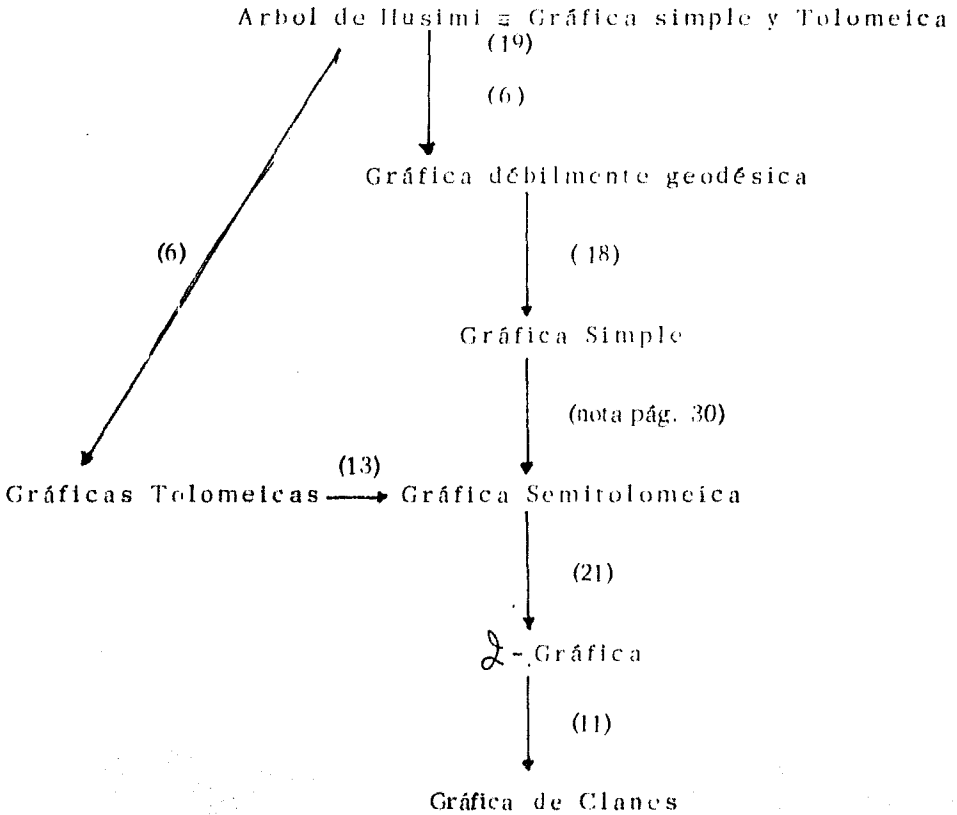
La cuarta sección es un artículo de Buneman sobre ciertas propiedades métricas de árboles.

En la sección cinco se da una caracterización de las gráficas con distancia hereditaria.

En la sexta sección se da una relación entre las gráficas tolemeicas y las gráficas con distancia hereditaria teorema 35.

En la séptima sección se da una caracterización de las gráficas tolemeicas a partir de la estructura de los clanes de la gráfica.

El siguiente diagrama muestra la relación entre distintas clases de gráficas, donde la flecha de \mathcal{A} a \mathcal{B} señala que la clase \mathcal{A} está propiamente contenida en la clase \mathcal{B} .



DEFINICIONES ELEMENTALES

Una gráfica G consiste de un conjunto finito no vacío $V(G)$ de vértices y un conjunto $A(G)$ de parejas no ordenadas de elementos distintos de $V(G)$, llamadas aristas de G y que denotaremos por \overline{uv} .

Si $\overline{uv} \in A(G)$ decimos que u es adyacente a v .

Si G y H son dos gráficas, decimos que son isomorfas y lo denotaremos por $G \cong H$, si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que preserve la adyacencia. (en ambos sentidos).

Si G y H son dos gráficas tales que $V(H) \subset V(G)$ y $A(H) \subset A(G)$ decimos que H es una subgráfica de G .

Si $V(G) = V(H)$, H es una subgráfica generadora de G .
Si $S \subset V(G)$, la subgráfica $\langle S \rangle$ inducida por S , es la gráfica que tiene por vértices a los elementos de S y $\overline{uv} \in A(\langle S \rangle)$ si y sólo si $\overline{uv} \in A(G)$ y $u, v \in S$.

Un camino de una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas $u_0, x_1, u_1, \dots, u_{n-1}, x_n, u_n$ que comienza y termina con vértices, en el cual cada arista x_i es incidente con el vértice que le precede y el vértice que le sigue inmediatamente. Este camino une u_0 con u_n y se suele denotar por u_0, u_1, \dots, u_n siendo evidentes las aristas en el contexto.

Si $u_0 = u_n$ el camino es cerrado.

Una trayectoria (por abreviación *tray*) es un camino en el que todos los vértices son distintos. Un camino cerrado u_0, u_1, \dots, u_n es un ciclo si: $u_i = u_j, i \neq j$
 $\Leftrightarrow \{i, j\} = \{0, n\}$.

Una diagonal de un ciclo es una arista que tiene ambos extremos en el ciclo pero no es arista del ciclo.

Un ciclo inducido en G es un ciclo sin diagonales en G .

La longitud de un camino, una trayectoria o un ciclo está dada por el número de aristas que aparecen en cada una. (se suele denotar por $l(u_0, u_1, \dots, u_n)$, $l(T)$
 $l(\alpha)$).

Si cada par de vértices de G esta unido por una trayectoria de G , decimos que G es conexa.

El grado de un vértice v de G , es el número de aristas incidentes con v .

Un vértice de corte de una gráfica G es un vértice tal que su supresión incrementa al número de componentes de G .

Una arista de corte (o puente) de una gráfica G , es una arista tal que su supresión incrementa al número de componentes de G .

Un corte S de una gráfica G, es un conjunto de vértices o aristas de G, tal que la gráfica $G - S$ (o $G \setminus S$) es disconexa (no conexa).

Si S es un conjunto de vértices, $G - S$ es la gráfica - que se obtiene de G, quitando los vértices de S y las aristas que tienen alguno de sus extremos en S.

Si S es un conjunto de aristas, la gráfica $G - S$ se obtiene a partir de G, quitando las aristas de S.

Sean $v_1, v_2 \in V(G)$; $(v_1 \neq v_2)$ $S \subseteq V(G)$, $v_1, v_2 \notin S$, el conjunto S separa v_1 de v_2 si en $G - S$, v_1 y v_2 están en componentes distintas.

Sea G una gráfica conexa, un conjunto S de vértices de G es un conjunto de corte mínimo de G, si ningún subconjunto propio de S es un conjunto de corte de G.

La distancia $d(u, v)$, es la longitud de la trayectoria más corta que los une ($u, v \in V(G)$ con G conexa).

Una trayectoria es geodésica, si $\ell(T) = d(u, v)$ con u, v extremos de la trayectoria T.

Gráfica trivial es la gráfica que contiene un sólo vértice.

Gráfica completa es la gráfica en la que $\forall u, v \in V(G)$, $d(u, v) = 1$.

Gráfica triangulada, una gráfica se dice que está triangulada, si cada ciclo de G de longitud ≥ 4 tiene una diagonal, (las gráficas trianguladas también son llamadas gráficas con ciclos rígidos).

Una gráfica geodésica, es una gráfica conexa tal que para cualesquiera dos vértices de la gráfica, existe una única trayectoria de longitud mínima que los une.

Una gráfica conexa G es débilmente geodésica, si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$ tales que $d(u, v) = 2$, existe una única trayectoria de longitud dos que los une.

Un bloque de una gráfica conexa G , es una subgráfica máxima conexa no trivial y sin vértices de corte.

Un clan de una gráfica G , es una subgráfica máxima completa de G . (e.d. un clan es una subgráfica completa de G , la cual no está propiamente contenida en alguna otra subgráfica completa de G).

Una gráfica conexa sin ciclos es un árbol.

Una gráfica G es un árbol de Husimi si G es conexa y todo bloque de G es completo.

La gráfica de clanes $K(G)$ de una gráfica G es la gráfica cuyos vértices pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los clanes de G , de tal manera que dos vértices de $K(G)$ son adyacentes si y sólo si los corres-

pendientes clanes de G tienen intersección no vacía.
(la gráfica de clanes es la gráfica de intersección de los clanes).

§ 1. ESPACIOS MÉTRICOS DE GRÁFICAS

1) **DEFINICIÓN** - Un espacio métrico M , es llamado el espacio métrico de una gráfica (o espacio métrico gráfico), si existe una gráfica G tal que $M = M(G)$. (e. d. si existe una gráfica G , cuyo conjunto de vértices se pueden poner en correspondencia biyectiva con los puntos de M , en tal forma que la distancia entre cualesquiera dos puntos de M , es igual a la distancia entre los correspondientes vértices de G).

2) **DEFINICIÓN**. - Un espacio métrico (M, d) es llamado tolomeico si para cualesquiera cuatro puntos $x, y, z, w \in M$ se cumple:

$d(x, y) \cdot d(z, w) \leq d(x, z) \cdot d(y, w) + d(x, w) \cdot d(y, z)$ (llamada desigualdad tolomeica; el producto de las longitudes de las "diagonales" es menor o igual que la suma de los productos de las longitudes de los "lados" opuestos).

NOTA: Para cuatro puntos cualesquiera $x, y, z, w \in M$ tenemos 3 desigualdades tolomeicas:

$$1) d(x, y) \cdot d(z, w) \leq d(x, z) \cdot d(y, w) + d(x, w) \cdot d(y, z)$$

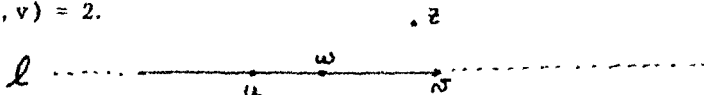
$$2) d(x, w) \cdot d(y, z) \leq d(x, y) \cdot d(w, z) + d(x, z) \cdot d(w, y)$$

$$3) d(x, z) \cdot d(y, w) \leq d(x, y) \cdot d(w, z) + d(x, w) \cdot d(y, z)$$

3) DEFINICIÓN. - Una gráfica cuyo espacio métrico asociado es toloimeico, es llamada gráfica toloimeica.

4) PROPOSICIÓN. - Si $M = M(G)$ es un espacio métrico gráfico que puede sumergirse* en algún espacio euclideo E , entonces G es una trayectoria (y puede sumergirse en \mathbb{R}^1), o bien es una gráfica completa de orden n (y puede sumergirse en \mathbb{R}^{n-1}).

Demostración. - Por reducción al absurdo, supongamos que G es tal que $M(G)$ se sumerge en un espacio euclideo E y que G no es una trayectoria ni una gráfica completa. Como no es una gráfica completa existe $u, v \in V(G)$ tal que $d(u, v) > 1$, sin pérdida de generalidad supongamos que $d(u, v) = 2$.



Y u, w, v están en una recta l en E .

Como G no es una trayectoria existe $z \in V(G)$ tal que $z \notin l$.

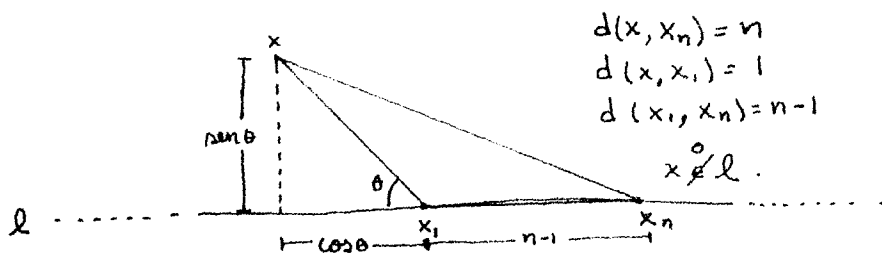
Consideremos $A = \{t \in V(G) : t \notin l\}$, $A \neq \emptyset$ pues $z \in A$.

Sea $x \in A$ tal que $d(x, \{w, v, u\})$ sea mínima.

Noteamos que $d(x, \{w, v, u\}) = 1$, pues si $d(x, \{w, v, u\}) = n$ con $n > 1$, Sea T una trayectoria de x a $\{w, v, u\}$ de

* $M(G)$ se sumerge en E , si existe $\varphi : M(G) \rightarrow E$ función biyectiva que preserva la métrica. $d_{M(G)}(x, y) = d_E(\varphi(x), \varphi(y))$. 10

longitud mínima $T = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n), x_n \in \{w, v, u\} \quad d(x, \{w, v, u\}) = n-1$, por la selección de x tenemos que $x_1 \in \ell$ pero entonces también tenemos que:



Como $x \notin \ell$ el segmento $\overline{x x_1}$ hace un ángulo θ con la recta ℓ

. Por el teorema de Pitágoras:

$$\text{Sen}^2 \theta + (\text{Cos} \theta + n-1)^2 = [d(x, x_n)]^2$$

$$\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta + 2(\text{Cos} \theta)(n-1) + n^2 - 2n + 1 = d(x, x_n)^2$$

$$\therefore n^2 - 2n + 2(n-1) \text{Cos} \theta + 2 = d(x, x_n)^2 = n^2$$

$$\therefore -2n + 2(n-1) \text{Cos} \theta + 2 = 0$$

$$\therefore 2(n-1) \text{Cos} \theta = 2n - 2$$

$$\therefore \text{Cos} \theta = 1 \quad (0 < \theta < 180^\circ \therefore \text{Cos} \theta \neq 1) \quad \nabla$$

Esta contradicción muestra que $d(x, \{u, w, v\}) = 1$.

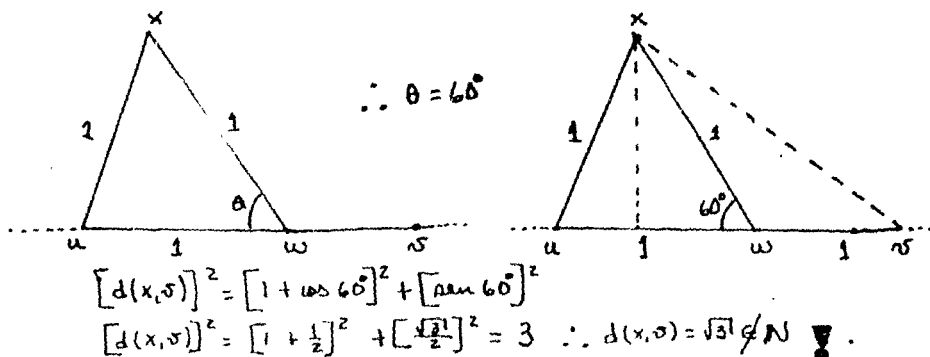
Entonces: i) $d(x, u) = 1$ o ii) $d(x, w) = 1$ o iii) $d(x, v) = 1$.

Si i), entonces como $d(x, w) \leq d(x, u) + d(u, w) = 1 + 1 = 2$.

Además $d(x, w) < 2$ pues si $d(x, w) = 2$ entonces x, u, w estarían

alineados y $\therefore x \in \ell \quad \nabla$.

Como $d(x, w) < 2$ y $x \neq w$ entonces $d(x, w) = 1$ y tenemos la siguiente situación:



Simétricamente no es posible que $d(x, v) = 1$.

\therefore Sólo nos queda el caso ii) es decir $d(x, w) = 1$, de nuevo $d(x, u) \leq d(x, w) + d(w, u) = 1 + 1 = 2$, $\therefore d(x, u) \neq 2$ pues si $d(x, u) = 2$ entonces x, u, w estarían alineados y por lo tanto $x \in \mathcal{L} \quad \blacktriangledown$.

$\therefore d(x, u) < 2 \quad \therefore d(x, u) = 1$ y como en el caso 1)
 $d(x, v) = \sqrt{3} \quad \blacktriangledown$.

Así que suponer que $M(G)$ se sumerge en un espacio euclídeo es insostenible con la hipótesis de que G no sea una trayectoria o una gráfica completa. \blacksquare

Si en lugar de pedir que $M(G)$ se sumerja en un espacio euclídeo, pedimos nada más que G sea tolomeica y

débilmente geodésica; entonces G ya no estará obligada a ser una gráfica completa o una trayectoria, y nada más se fuerza a que los bloques de G sean subgráficas completas (e. d. se fuerza a que G sea un árbol de Husimi).

Es decir, la condición de ser débilmente geodésica y tolomeica es más débil que la condición de ser sumergible en un espacio euclideo.

Daremos una caracterización de los Espacios Métricos gráficos para lo cual usaremos el siguiente concepto:

Sea M un espacio métrico con métrica d . Si $a, b \in M$ entonces para $x \in M$ se dice que está entre a y b si y sólo si $d(a, x) > 0$, $d(x, b) > 0$ y $d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$.

Caracterización de Espacios Métricos de Gráficas

5) TEOREMA: Un espacio métrico finito (M, d) es un espacio métrico gráfico si y sólo si:

- i) La distancia entre cualesquiera dos puntos de M es un entero.
- ii) Si $a, b \in M$ y $d(a, b) \geq 2$, existe $x \in M$ tal que x está entre a y b .

Demostración: \Rightarrow).

- i) Sean $a, b \in M$, por definición $d(a, b) > 0$ y $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$, (por definición de distancia entre dos puntos que es el número de aristas en la trayectoria de a a b).
- ii) Si $a, b \in M$ son tal que $d(a, b) \geq 2$ por definición de distancia existe $x \in M$ tal que $d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$ luego x está entre a y b .

⇐). Sea M un espacio métrico que satisface (i) y (ii) y considere G una gráfica cuyos vértices pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los puntos de M y donde dos vértices de G son unidos por una arista si y sólo si la distancia entre los correspondientes puntos de M es uno. Así, se tiene que M es un espacio métrico asociado a la gráfica G .

El espacio métrico (M, d) donde:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

es el espacio métrico asociado a una gráfica completa.

GRAFICAS TOLOMEICAS DEBILMENTE GEODESICAS

6) **TEOREMA .-** Una gráfica G débilmente geodésica es tolomeica $\Leftrightarrow G$ es un árbol de Husimi.

Demostración \Leftarrow). Sea G un árbol de Husimi (se quiere probar que se cumple la desigualdad tolomeica).

Sea $p, q, r, s \in V(G)$ como la desigualdad es obvia, al tomar dos o más de los vértices p, q, r, s iguales, podemos suponer, que los vértices son distintos dos a dos.

Empleamos inducción sobre $n = |V(G)|$.

La base de la inducción es obvia para $n = 1$.

Así, sea $|V(G)| = n > 1$ y supongamos que todos los árboles de Husimi con menos de n vértices son tolomeicos.

Si p, q, r, s están en un mismo bloque de G , como G es un árbol de Husimi, este bloque debe ser completo, así la distancia entre cualesquiera dos de estos vértices es 1 y la desigualdad tolomeica resulta obvia.

Así podemos suponer que p, q, r, s no pertenecen todos a un mismo bloque:

Entonces G no es un bloque así que contiene un bloque terminal* "L" digamos, ahora podemos suponer que alguno de los vértices p, q, r, s pertenecen a L y no es el punto de corte de L en G , ya que en otro caso, quitando los vértices

* Es un bloque que contiene un único punto de corte de G .

de L excepto el vértice de corte de G contenido en L , concluiríamos usando la hipótesis de inducción, que la desigualdad tolomeica se cumple para p, q, r, s y ya habríamos acabado.

Supongamos que $p \in V(L)$ y sea v el vértice de corte de $G, p \neq v$ contenido en L . Ahora, si $u \in [V(G) \setminus v]$ entonces:

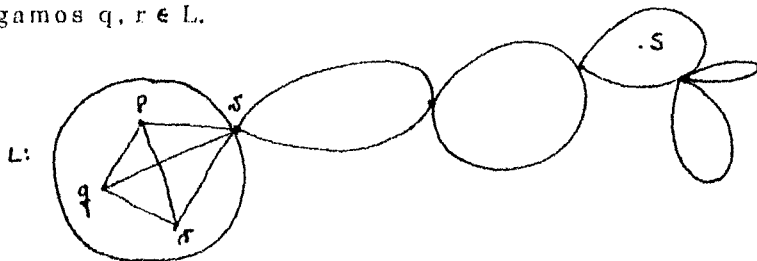
$$d(u, p) = 1 \text{ si } u \in V(L)$$

$$d(u, p) = d(u, v) + 1 \text{ si } u \notin V(L), \text{ ya que toda}$$

u - p trayectoria pasa por v .

Consideremos 3 casos que se presentan:

Caso 1. p y dos de los otros vértices q, r, s están en L . digamos $q, r \in L$.



Así se tiene:

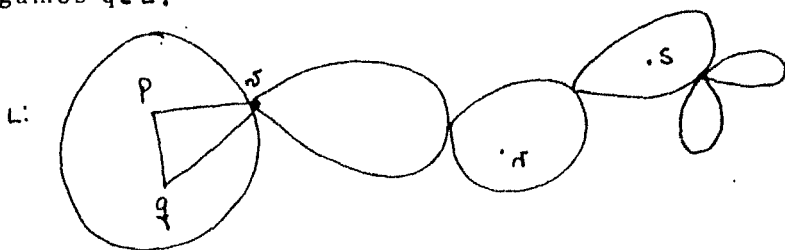
$$d(p, q) = d(p, r) = d(q, r) = 1 \text{ y}$$

$$d(p, s) = d(q, s) = d(r, s) \text{ si } v \notin \{q, r\} \text{ ó}$$

$$d(p, s) = d(q, s) = d(r, s) + 1 \text{ si } r = v, \text{ igual si } q = s.$$

En cualesquiera de los subcasos anteriores vale la desigualdad tolomeica.

Caso 2. p y uno de los vértices q, r, s están en L , digamos $q \in L$.



Si $q \neq v$ se tiene; $d(p, q) = 1$ $d(p, r) = d(q, r)$ y $d(p, s) = d(q, s)$ se presentan las tres distintas desigualdades tolemaicas por la manera distinta de tomar los vértices.

La primera: $d(p, q) \cdot d(r, s) \leq d(p, r) \cdot d(q, s) + d(p, s) \cdot d(q, r)$

la cual se obtuvo de;

$$d(r, s) \leq d(r, p) + d(p, s) \leq d(r, p) \cdot d(q, s) + \frac{d(p, s)}{d(q, r)}$$

(pues como $d(q, s) \geq 1$ entonces;

$$d(q, s) \cdot d(r, p) \geq d(r, p) \text{ análogamente}$$

$$d(p, s) \cdot d(q, r) \geq d(p, s) \text{).}$$

La segunda: $d(p, r) \cdot d(q, s) \leq d(p, r) \cdot d(q, s) + d(r, s) =$

(pues $d(r, s) \geq 1$)

$$= d(p, r) \cdot d(q, s) + d(r, s) \cdot d(p, q) =$$

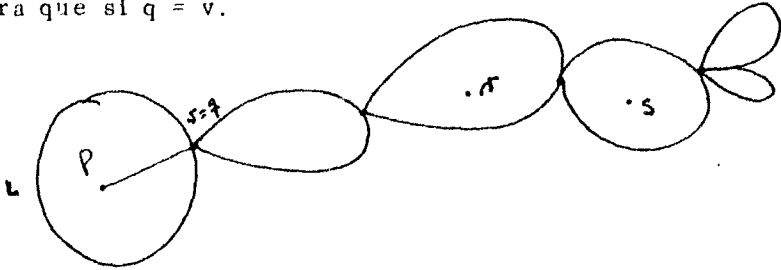
(ya que $d(p, q) = 1$)

$$= d(p, q) \cdot d(r, s) + d(p, s) \cdot d(r, q).$$

(ya que $d(p, r) = d(q, r)$ y $d(p, s) = \frac{18}{d(q, s)}$).

La tercera: $d(p, s) \cdot d(q, r) \leq d(p, q) \cdot d(s, r) + d(p, r) \cdot d(s, q)$
 se sigue como la anterior.

Ahora que si $q = v$.



Entonces $d(p, q) = 1$ y $\begin{cases} d(p, r) = d(q, r) + 1 \\ d(p, s) = d(q, s) + 1 \end{cases}$

Así tenemos $d(q, p) \cdot d(r, s) = d(r, s)$

$$d(p, r) \cdot d(q, s) = d(q, r) \cdot d(q, s) + d(q, s)$$

$$d(p, s) \cdot d(q, r) = d(q, r) \cdot d(q, s) + d(q, r)$$

que satisfacen la desigualdad tolemaica.

Caso 3. Ninguno de los tres vértices q, r, s están en L .

Tenemos que: $d(p, q) = d(v, q) + 1$

$$d(p, r) = d(v, r) + 1$$

$$d(p, s) = d(v, s) + 1$$

Si quitamos $L \setminus v$ a la gráfica, una aplicación de la hipótesis de inducción a q, r, s, v nos dice que los 3 números.

$$d(v, q) \cdot d(r, s) = d(p, q) \cdot d(r, s) - d(r, s)$$

$$d(v, r) \cdot d(q, s) = d(p, r) \cdot d(q, s) - d(q, s)$$

$$d(v, s) \cdot d(q, r) = d(p, s) \cdot d(q, r) - d(q, r)$$

satisfacen la desigualdad tolomeica siguiente:

$$d(v, q) \cdot d(r, s) \leq d(v, r) \cdot d(q, s) + d(v, s) \cdot d(q, r)$$

Como también: $d(r, s) \leq d(r, q) + d(q, s)$ (desigualdad del triángulo) sumando ésto a:

$$d(p, q) \cdot d(r, s) - d(r, s) \leq d(p, r) \cdot d(q, s) - d(q, s) + \quad - \\ + d(p, s) \cdot d(q, r) - d(q, r)$$

obtenemos $d(p, q) \cdot d(r, s) \leq d(p, r) \cdot d(q, s) + d(p, s) \cdot d(q, r)$.


Las otras dos desigualdades de Tolomeo se siguen análogamente, por lo tanto la condición es suficiente. ■

\Rightarrow). Supongamos que G es débilmente geodésica y tolomeica, probaremos que todo ciclo de G contiene todas sus diagonales con lo que quedará probado que todo bloque es completo y por lo tanto G será árbol de Husimi.

Si G no tiene ciclos, G es un árbol y por lo tanto es un árbol de Husimi.

Si G tiene ciclos mostraremos que cualquier ciclo C , tiene todas sus diagonales en G , y ésto lo haremos por inducción sobre la longitud de C .

1) base si $n = 3$, el resultado es obvio.

2) si $n = 4$  es claro que la condición de debilidad geodésica hace que el ciclo tenga sus dos diagonales.

(Si por ejemplo no hubiera la diagonal \overline{uv} en G , entonces $d(u, v) = 2$ y habría dos trayectorias geodésicas de longitud 2 de u a v).

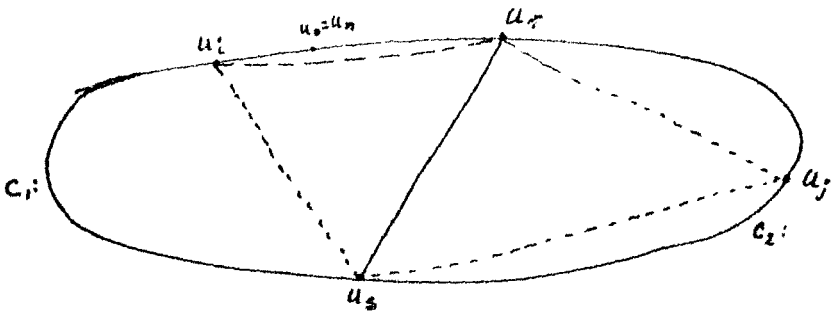
Por lo tanto sea $n > 4$ y supongamos que todo ciclo de longitud menor que n contiene todas sus diagonales.

3) Sea $C = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un ciclo en G .

Si C contiene una diagonal $D: \overline{u_r u_s}$ ($r < s - 1$ digamos) entonces D divide a C en dos ciclos de longitud menor que n , a saber;

$$C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_r, u_s, u_{s+1}, \dots, u_n)$$

$$C_2 = (u_r, u_{r+1}, \dots, u_s, u_r)$$



Por hipótesis de inducción C_1 y C_2 contienen todas sus diagonales además si $u_2 \in [V(C_1) \setminus \{u_r, u_s\}]$ y $u_3 \in [V(C_2) \setminus \{u_r, u_s\}]$, entonces $C_3 = (u_2, u_r, u_3, u_s, u_2)$

es un ciclo de longitud 4 y por tanto contiene todas sus diagonales, en particular $\overline{u_1 u_3}$ es una arista de la gráfica. Así que la inducción estará completa una vez que probemos que todo ciclo C de longitud n contiene alguna diagonal (en ese caso, contendrá a todas las diagonales por el argumento inductivo).

Supongamos lo contrario, es decir, que C no contiene diagonales.

Primero afirmamos que para cualesquiera dos vértices u_r, u_s ($r < s$ digamos) en C ,

$$d(u_r, u_s) = \min \{ \ell(T_1), \ell(T_2) \} \text{ donde;}$$

$$\ell(T_1) = \text{longitud de } T_1, \text{ donde } T_1 = (u_r, u_{r+1}, \dots, u_s) \text{ y}$$

$$\ell(T_2) = \text{longitud de } T_2, \text{ donde } T_2 = (u_s, u_{s+1}, \dots, u_r)$$

son las dos trayectorias de u_r a u_s sobre el ciclo C .

Porque si la distancia de u_r a u_s fuera menor que este mínimo, entonces habría una trayectoria T_3 de u_r a u_s de longitud menor que $\ell(T_1)$ y $\ell(T_2)$ entonces T_3 junto con T_1 formarían un ciclo C' de longitud menor que la de C que es n y por hipótesis de inducción C' contiene todas sus diagonales y análogamente el ciclo contenido en $T_3 \cup T_2$ contiene todas sus diagonales.

Así que C misma contendría alguna diagonal. \blacktriangledown .

Así que tenemos que, $d(u_p, u_s) = \min \{ \ell(T_1), \ell(T_2) \}$

tomando $p = u_0$, $q = u_1$, $r = u_2$, $s = u_k$ con $k = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + 1$

se sigue que: $d(p, q) \cdot d(r, s) = 1 \cdot (k-2) = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor - 1$

$$d(p, r) \cdot d(q, s) = 2 \cdot (k-1) = 2 \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor \geq n-1$$

$$d(p, s) \cdot d(q, r) = (n-k) \cdot 1 = n - \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor - 1$$

Así que:

$$d(p, q) \cdot d(r, s) + d(p, s) \cdot d(q, r) = n - 2 < n - 1 \leq d(p, r) \cdot d(q, s) \quad \blacktriangledown$$

contra la hipótesis de que G es tolomeica.

Por lo tanto C contiene alguna diagonal, por lo que contiene todas sus diagonales, de donde G es un árbol de Husimi. ■

Como un árbol de Husimi es una gráfica geodésica se tiene el siguiente:

7) COROLARIO: Una gráfica tolomeica débilmente geodésica es una gráfica geodésica.

Demostración. Se sigue inmediatamente del hecho de que una gráfica tolomeica débilmente geodésica es un árbol de Husimi. ■

§ II. CARACTERIZACIÓN DE GRÁFICAS DE CLANES

R. C. HAMELINK, en su trabajo [6] obtiene una condición suficiente para que una gráfica sea una gráfica de clanes.

En esta sección se da una relación entre la necesidad y la suficiencia para que una gráfica, sea gráfica de clanes, desarrollada por FRED S. ROBERTS y JOEL H. SPENCER [12].

Como una aplicación de este resultado tendremos que la condición de HAMELINK es también necesaria en ciertos casos especiales y que pueden ser simplificados. Como otra aplicación se deducen ciertos teoremas.

Sea \mathcal{K} una colección de subgráficas completas de una gráfica H .

- 8) DEFINICIÓN: Diremos que \mathcal{K} tiene la propiedad \mathcal{K} si:
- (*) $L_1, L_2, \dots, L_p \in \mathcal{K}$ y $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ para toda i, j , entonces $\bigcap_{i=1}^p L_i \neq \emptyset$.

Diremos que \mathcal{K} tiene la propiedad \mathcal{K}_m si (*) vale para $p \leq m$.

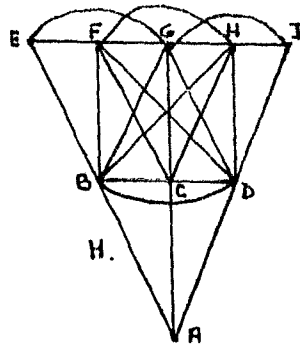
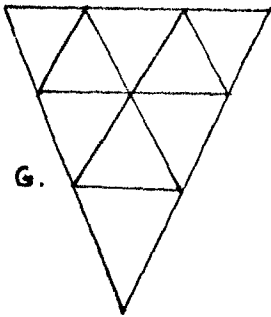
Denotaremos $\mathcal{K}(H)$ a la colección de todos los clanes de la gráfica H .

9) Diremos que G tiene la propiedad \mathfrak{A} , si $\mathcal{K}(G)$ satisface la propiedad \mathfrak{A} .

10) TEOREMA: (HAMELINK) SI $\mathcal{K}(H)$ tiene la propiedad \mathfrak{A} , entonces H es gráfica de clanes. [6]

Note que la condición de que los puntos de H corresponden a clanes se refleja en los clanes de H misma.

El recíproco del teorema es falso. Tomando G y H como se muestra en la figura.



$H = \mathcal{K}(G)$, pero $\mathcal{K}(H)$ no satisface la propiedad \mathfrak{A} , tomando
 $L_1 = \{A, B, C, D\}$ $L_2 = \{E, B, F, G\}$ $L_3 = \{I, D, G, H\}$
 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset$ $L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ pero $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$.

11) TEOREMA: (Caracterización de gráficas de clanes).

Una gráfica H es una gráfica de clanes si y sólo si existe una colección \mathcal{K} de subgráficas completas de H con las dos propiedades siguientes:

1º) \mathcal{K} cubre todas las aristas de H (e.d. $A(H) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} A(K)$).

2º) \mathcal{K} satisface la propiedad δ .

Demostración. \Leftarrow) Sea $\mathcal{K} = \{ L_1, L_2, \dots, L_p \}$ definimos G como sigue: $V(G) = V(H) \cup \mathcal{K}$, si $h \in V(H)$ entonces:

h ady L_i si y sólo si $h \in L_i$;

L_i ady L_j si sólo si $L_i \cap L_j \neq \emptyset$,

si $h, h' \in V(H)$ entonces h ady h' .

Se afirma que $H = K(G)$, para probar ésto sea;

$C(h) = \{ h \} \cup \{ L_i : h \in L_i \}$, $C(h)$ es un clan de G :

Claramente $C(h)$ es completa por definición de adyacencia en G y además

es máxima con esta propiedad, esto es $C(h)$ no se puede extender a otra

subgráfica completa de G , pues si $C(h) \not\subseteq L \subset G$ con L subgráfica completa

de G entonces existe $x \in \{ V(L) \setminus V(C(h)) \}$, por definición de G

$x = h$ o $x \in \mathcal{K}$. Pero $x \neq h$ pues $h \in V(C(h))$, entonces $x = L_i$ con

x ady h $\therefore h \in L_i$ $\therefore L_i \in V(C(h))$ (ya que $L_i \not\subseteq V(C(h))$). Así

pues, $C(h)$ es efectivamente un clan de G . Además los únicos clanes de G

son de la forma $C(h)$ para alguna $h \in V(H)$:

Sea C un clan de G , supongamos que $\mathcal{K} \cap V(C) = \{ L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_k} \}$

donde $L_{i_s} \cap L_{i_t} \neq \emptyset$ para toda $s \neq t$.

Por la propiedad \mathfrak{A} , $\bigcap_{j=1}^k L_{i_j} \neq \emptyset$ de donde existe $h \in \bigcap_{j=1}^k L_{i_j}$ con lo que h ady L_{i_j} para toda $j = 1, \dots, k$, $\therefore C$ contiene al elemento h de H . Como C es completa y $V(C) = \{h, L_{i_1}, \dots, L_{i_k}\}$ y como $h \in L_{i_j}$ $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ entonces $C \subset C(h)$, como $C(h)$ es completa y C es un clan tenemos que $C = C(h)$, $H = K(G)$. \square

=>) Supongamos $H \cong K(G)$, por demostrar que existe \mathfrak{K} una familia de completas de H con las propiedades 1) y 2).

Sean $V(G) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y $V(H) = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_m\}$, sean K_1, K_2, \dots, K_m los clanes de G etiquetados de tal forma que h_i ady h_j si y sólo si $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, (e.d. $h_i \in V(H)$ corresponde al clan K_i de $V(G)$). Para $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos $L_i = \{h_j : g_i \in V(K_j)\}$. Observemos que cada L_i induce una subgráfica completa de H , ($L_i \subseteq H$) pues dos vértices h_α, h_β de L_i corresponden a dos clanes K_α, K_β de G que contienen a g_i . $\therefore g_i \in \{V(K_\alpha) \cap V(K_\beta)\}$ y así K_α ady K_β y $\therefore h_\alpha$ ady h_β , y así L_i induce una subgráfica $K(G)$ completa de G .

Afirmación: $\mathfrak{K} = \{H(L_1), H(L_2), \dots, H(L_n)\}$ tiene las propiedades 1) y 2).

Donde $H(L_i)$ es la subgráfica (completa) de G inducida por L_i .

1) $\mathfrak{K} = \{H(L_1), \dots, H(L_n)\}$ cubre $\Lambda(H)$.

Supongamos que $\overrightarrow{h_i h_j} \in \Lambda(H) =$

Tenemos: $h_i \text{ ady}_H h_j \Rightarrow K_i, K_j$ son clanes de G

$h_i \longleftrightarrow K_i$ tales que $K_i \cap K_j \neq \emptyset$. luego existe

$h_j \longleftrightarrow K_j$ $g_k \in \{K_i \cap K_j\}, g_k \in V(G)$.

Ahora $h_i \in L_{i_1} = \{h_s : g_s \in V(K_{i_1})\}$ y $h_j \in L_{i_2} = \{h_s : g_s \in V(K_{i_2})\}$

$\therefore h_i, h_j \in V(L_{i_1})$ entonces $\overrightarrow{h_i h_j}$ está en la subgráfica completa de H inducida por L_{i_1} , y la proposición (1) se cumple.

2) \mathcal{K} goza de la propiedad \mathcal{Q} .

Supongamos $\{H(L_{i_1}), \dots, H(L_{i_r})\} \subseteq \mathcal{K}$ es tal que $L_{i_j} \cap L_{i_k} \neq \emptyset$

$\forall j, k \in \{1, \dots, r\}$, entonces para cada pareja i_j, i_k existe

$h_{\alpha(j,k)} \in \{L_{i_j} \cap L_{i_k}\}, \therefore g_{i_j}, g_{i_k} \in V(K_{\alpha(j,k)})$.

$h_{\alpha(j,k)} \longleftrightarrow K_{\alpha(j,k)}$

$\left. \begin{array}{l} g_{i_j} \in K_{\alpha(j,k)} \\ g_{i_k} \in K_{\alpha(j,k)} \end{array} \right\} \Rightarrow g_{i_j} \text{ ady}_G g_{i_k}$

se sigue que: $\{g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r}\} \subset K_s$ clan de G

$K_s \longleftrightarrow h_s \in V(H)$.

$h_s \in L_{i_1}$ pues $L_{i_1} = \{h_s : g_{i_1} \in V(K_{i_1})\}$

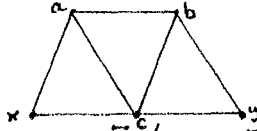
$h_s \in \{L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \dots \cap L_{i_r}\}$.

Y así vemos que se satisface la propiedad 2). ■

B III. PROPIEDADES METRICAS DE CIERTAS GRAFICAS DE CLANES

- 12) DEFINICION.- Una gráfica G es semitolomeica si para toda subgráfica H (como la de la fig. 1) de G, $\vec{xb} \notin A(G)$ o $\vec{ya} \in A(G)$.

(fig. 1) H:



- 13) NOTA. si H es subgráfica de G y $\vec{xb} \notin A(G)$, $\vec{ya} \notin A(G)$, entonces x, a, b, y violan la desigualdad tolomeica.

Por lo tanto, si G es tolomeica entonces G es semitolomeica.

Demostración. Supongamos que G no es semitolomeica, existe H --- (como la fig. 1) subgráfica de G con $\vec{ya} \notin A(G)$ y $\vec{xb} \notin A(G)$, luego se tiene $d(a,y) = 2$, $d(b,y) = 1$, $d(x,y) \leq 2$, $d(a,x) = 1$, $d(b,x) = 2$, $d(a,b) = 1$ entonces:

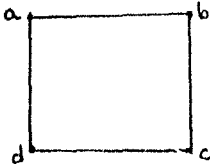
$$d(a,y)d(b,x) \leq d(a,b)d(y,x) + d(a,x)d(y,b)$$

$$(2)(2) \not\leq (1)(2) + (1)(1)$$

$$4 \not\leq 3$$

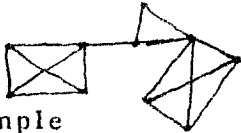
Y la desigualdad tolomeica no se cumple. ■

El recíproco es falso (e.d. si G es semitolomeica no necesariamente G es tolomeica). C_4 es un ejemplo de ésto.



C_4 es semitolomeica y no es tolomeica
 $d(a,c) \cdot d(b,d) \not\leq d(a,b)d(d,c) + d(a,d) \cdot d(b,c)$. ■

14) DEFINICION.- una gráfica G es simple si cualesquiera dos clones distintos de G , tienen a lo más un punto en común.



G simple

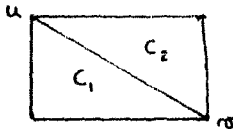


G no simple

NOTA. G gráfica simple implica G es semitolomeica:

Ya que si H (como la fig. 1) es subgráfica de G con $\bar{a}y \notin G \Rightarrow$
 $abc \in C_1$ y $bcy \in C_2$ para C_1, C_2 clones distintos de G tales que
 $V(C_1 \cap C_2) \supseteq \{b, c\}$, luego G no es simple. ■

El recíproco es falso: K_4 sin una diagonal es un ejemplo.



es semitolomeica y no es simple

porque $(C_1 \cap C_2) \ni uv$. ■

GRÁFICAS DÉBILMENTE GEODÉSICAS

Una caracterización de gráficas débilmente geodésicas se dará en teo.(17). Primero introduciremos la noción de protuberancia.

15) DEFINICION: 1) Un ciclo de G será llamado un b-ciclo de G , si no está contenido en un clan de G .

La protuberancia de G , es el número $b(G) = \min \{ \ell(\alpha) : \alpha \text{ es un b-ciclo} \}$. Si G no tiene b-ciclos, se define $b(G) = \infty$.

Recordemos que un ciclo inducido de G es un ciclo sin diagonales.

2) Un b-ciclo inducido de longitud ≥ 4 será llamado un bb-ciclo de G .

Claramente un bb-ciclo tiene a lo más una arista en común con un clan de G .

La protuberancia grande de G es el número

$$bb(G) = \min \{ \ell(\alpha) : \alpha \text{ es un bb-ciclo} \}.$$

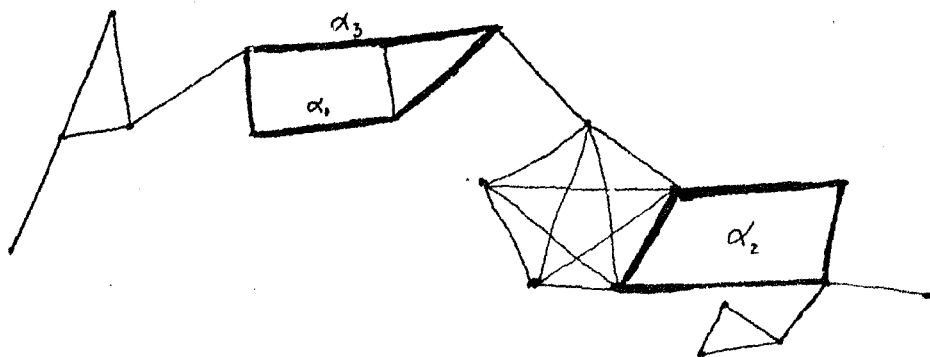
Si G no tiene bb-ciclo se define $bb(G) = \infty$.

3) El cuello de G se define como el número $g(G) = \min \{ \ell(\alpha) : \alpha \text{ es un ciclo de } G \}$.

Si G no tiene ciclos definimos $g(G) = \infty$.

Tenemos la relación entre $b(G)$, $bb(G)$ y $g(G)$ dada por el teorema siguiente. (como un ejemplo ver página 32).

Sea G la gráfica siguiente:



En la gráfica hay tres b-ciclos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

La protuberancia de G , $b(G) = 4$.

Hay dos b-ciclos inducidos α_1 y α_2

La protuberancia grande de G , $bb(G) = 4$.

El cuello de G , $g(G) = 3$.

16) TEOREMA. Para cualquier gráfica G.

- 1) $3 \leq g(G) \leq b(G) \leq bb(G)$,
- 2) $b(G) \geq 4$.
- 3) Si G es conexa entonces:
 - a) $g(G) < \infty$ si y sólo si G no es un árbol.
 - b) $b(G) < \infty$ si y sólo si G no es un árbol de Husimi.
- 4) $g(G) \geq 4$ si y sólo si $g(G) = b(G) = bb(G)$.
- 5) si G es simple entonces cualquier b-ciclo de longitud mínima es un ciclo inducido, en particular $b(G) = bb(G)$.
- 6) si $b(G) \geq 5$ entonces G es simple.
- 7) si G es tolomeica entonces $bb(G) \geq 5$.

Demostración.

1) $3 \leq g(G) \leq b(G) \leq bb(G)$

1ro) Si G no tiene ciclos se tiene por definición:

$$g(G) = \infty, b(G) = \infty, bb(G) = \infty, \text{ de lo cual}$$

$3 \leq g(G) \leq b(G) \leq bb(G)$ se cumple.

2do) Si G tiene ciclos se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} & \{ \text{ciclos de } G \} \supset \{ \text{b-ciclos de } G \} \supset \{ \text{bb-ciclos de } G \} \\ & \text{luego } \min \{ l(\alpha) : \alpha \text{ es un ciclo de } G \} \leq \min \{ l(\beta) : \beta \\ & \text{es b-ciclos de } G \} \leq \min \{ l(\beta) : \beta \text{ es un bb-ciclo de } G \}. \\ & \therefore 3 \leq g(G) \leq b(G) \leq bb(G). \end{aligned}$$

2) $b(G) \geq 4$.

1ro) si G no tiene ciclos, $b(G) = \infty$, $\therefore b(G) \geq 4$.

2do) si G tiene ciclos, el ciclo de longitud mínima que puede no estar contenido en un clan es C_4 , el ciclo de longitud 4, \therefore O todo ciclo de G está incluido en un clan, o el ciclo de longitud mínima que no está contenido en un clan, es de longitud ≥ 4 , (e.d. $b(G) = \infty$ o $b(G) \geq 4$).

3) Si G es conexa entonces:

a) $g(G) < \infty$ si y sólo si G no es un árbol.

\Leftarrow) si G no es un árbol existe un α -ciclo en G de donde $g(G) \leq l(\alpha)$ por lo tanto $g(G) < \infty$.

\Rightarrow) $g(G) < \infty$ se sigue que G tiene un α -ciclo tal que $g(G) = l(\alpha) < \infty$, $\therefore G$ no es un árbol.

b) $b(G) < \infty$ si y sólo si G no es un árbol de Husimi.

\Rightarrow) $b(G) < \infty$ implica que en G hay un α -ciclo contenido en un bloque que no es completo, de donde G no es un árbol de Husimi.

\Leftarrow) G no es un árbol de Husimi, entonces existe un bloque B que no es completo, y se tiene que B tiene por lo

menos tres vértices. Sean $u, v \in V(B)$ tal que $u \neq v$, como B es bloque con $|V(B)| \geq 3$, entonces existe un ciclo α en B que pasa por u y v , y α es un b -ciclo (falta la diagonal entre u y v)

$$\therefore b(G) \leq \ell(\alpha) < \infty .$$

4) $g(G) \geq 4$ si y sólo si $g(G) = b(G) = bb(G)$.

\Rightarrow) Sea α un ciclo tal que $\ell(\alpha) = g(G) \geq 4$ (no hay triángulos).

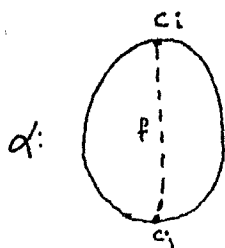
Observación: α no tiene diagonales, por lo que α es un b -ciclo y un bb -ciclo luego $g(G) = \ell(\alpha)$ y $\ell(\alpha) = bb(G) = b(G)$, $\therefore g(G) = b(G) = bb(G)$.

\Leftarrow) Basta ver que no hay triángulos en G :

Por el inciso 2) $b(G) \geq 4$ y por hipótesis $bb(G) = b(G) = g(G)$, $\therefore g(G) = b(G) \geq 4$.

5) Si G es simple entonces cualquier b -ciclo de longitud mínima es un ciclo inducido en particular $b(G) = bb(G)$.

Demostración. Sea α un b -ciclo de longitud mínima en G supongamos que α tiene una diagonal f .



Si $\alpha = (c_0, c_1, \dots, c_n = c_0)$ y
 $f = (c_i, c_j)$ entonces se -
 forman $\alpha_1 = (c_i, c_{i+1}, \dots, c_j, c_i)$
 $\alpha_2 = (c_j, c_{j+1}, \dots, c_i, c_j)$

Dos ciclos de menor longitud que α y que por lo tanto no son b-ciclos, de donde existen clanes de G ; W_1, W_2 con la propiedad $\alpha_1 \subset W_1$ y $\alpha_2 \subset W_2$ con $W_1 \neq W_2$ porque de otro modo α estaría contenido en un clan (por ejemplo W_1).

Por lo tanto $W_1 \neq W_2$ y $f \in (W_1 \cap W_2)$ lo que es una contradicción al hecho de que G es simple.

\therefore si G es simple entonces cualquier b-ciclo de longitud mínima es un ciclo inducido.

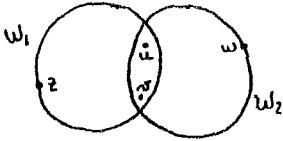
Ahora se demostrará que $b(G) = bb(G)$.

Se sabe por (1) que $b(G) \leq bb(G)$, consideremos α un b-ciclo de longitud mínima; $l(\alpha) = b(G)$, como α es un ciclo inducido (e.d. un ciclo sin diagonales) se sigue que α es un bb-ciclo.

De donde $l(\alpha) \geq bb(G)$, luego $l(\alpha) = b(G) \geq bb(G)$ y por (1) se sigue $b(G) = bb(G)$.

6) Si $b(G) \geq 5$ entonces G es simple.

Demostración. Si G no es simple, existen clanes W_1 , y W_2 tales que $|V(W_1) \cap V(W_2)| \geq 2$, así, sean $u, v \in (V(W_1) \cap V(W_2))$ entonces como W_1 y W_2 son completos u $\text{ady}_G v$.



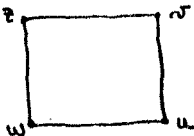
Como $W_1 \neq W_2$ existe $z \in W_1, w \in W_2$ tal que $z \not\text{ady}_G w$.

Tenemos que, $z \text{ady}_G u$ y $z \text{ady}_G v$ pues $z, u, v \in W_1$ y también, $w \text{ady}_G u$ y $w \text{ady}_G v$ pues $w, u, v \in W_2$.

Por lo tanto $\alpha = (z, u, w, v)$ es un b-ciclo y $\ell(\alpha) = 4 = b(G)$ \square .

7) Si G es tolomeica entonces $bb(G) \geq 5$.

Demostración. Si $bb(G) \not\geq 5$ entonces $bb(G) = 4$, de lo cual existe α un b-ciclo en G sin diagonales con $\ell(\alpha) = 4$.



$$\begin{aligned} d(z, u) &= 2 = d(v, w) \\ d(z, v) &= d(v, u) = d(u, w) = \\ d(w, z) &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore d(z, u)d(v, w) \not\leq d(z, w)d(v, u) + d(z, v)d(w, u)$$

la desigualdad tolomeica es falsa, de donde G no es tolomeica. \blacksquare

Las siguientes caracterizaciones nos ayudan a comprender mejor la estructura de las gráficas débilmente geodésicas.

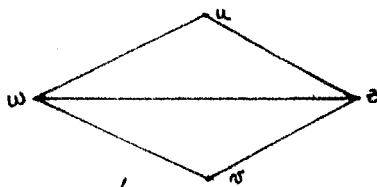
17) TEOREMA: Una gráfica G es débilmente geodésica si y sólo si $b(G) \geq 5$.

Demostración: \Rightarrow) si $b(G) \neq 5$ entonces $b(G) = 4$ de donde se tiene que existe α un ciclo en G con $l(\alpha) = 4$ y no está contenido en un clan de G .

Digamos $\alpha = (u, z, v, w, u)$

con $u \text{ ady}_G v$ o $w \text{ ady}_G z$

(al menos una).



Spongamos sin pérdida de generalidad $u \text{ ady}_G v$ de donde $d(u, v) = 2$ y existen $T_1 = (u, z, v)$, $T_2 = (u, w, v)$ dos u - v trayectorias distintas de longitud 2.

De lo que se infiere que G no es débilmente geodésica.

\Leftarrow) Sea G una gráfica que no es débilmente geodésica, entonces existen $u, v \in V(G)$ tal que $d(u, v) = 2$ y dos u - v trayectorias distintas $T_1 = (u, w, v)$ y $T_2 = (u, z, v)$, luego $\alpha = (u, z, v, w, u)$ es un b -ciclo con $l(\alpha) = 4 \therefore b(G) = 4 \neq 5$.

18) COROLARIO: G es débilmente geodésica si y sólo si G es simple y $bb(G) \geq 5$.

Demostración. \Rightarrow)

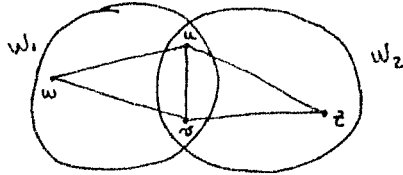
1ª se demostrará que G es simple.

Si G no fuera simple existirían dos clanes W_1, W_2 distintos en G tales que $|V(W_1) \cap V(W_2)| \geq 2$, sean $u, v \in (V(W_1) \cap V(W_2))$ existe $w \in W_1$ y $z \in W_2$ con $w \not\text{ady}_G z$ ya que $W_1 \neq W_2$. También se tiene

$w \text{ady}_G u, w \text{ady}_G v$

y

$z \text{ady}_G u, z \text{ady}_G v$.



$d(w, z) = 2$ y existen dos w - z trayectorias distintas por lo que G no sería débilmente geodésica.

2° Se demostrará que $bb(G) \geq 5$.

Si $bb(G) \neq 5$ entonces $bb(G) = 4$ c.a. donde existe un b-ciclo α sin diagonales con $l(\alpha) = 4$, sea $\alpha = (u, z, v, w, u)$ con $w \not\text{ady}_G z$ luego $d(w, z) = 2$ y existen dos w - z trayectorias distintas de longitud 2, lo que implica que G no es débilmente geodésica, pero sí lo es.

$\therefore G$ débilmente geodésica $\Rightarrow G$ es simple y $bb(G) \geq 5$. ■

\Leftarrow) Supongamos que G es simple y que $bb(G) \geq 5$.

Como G es simple, por el teorema (16) inciso 5, tenemos que $b(G) = bb(G)$. $\therefore b(G) = bb(G) \geq 5$ y por el teorema anterior tenemos que G es débilmente geodésica. ■

19) **TEOREMA.** Una gráfica G es un árbol de Husimi si y sólo si G es simple y tolomeica.

Demostración. \Rightarrow) Sea G un árbol de Husimi (e.d. que todo bloque de G es completo), luego todo bloque de G es un clan; como dos bloques se intersectan en a lo más un punto, aquí se tiene que dos clanes de G se intersectan a lo más un punto de donde tenemos que G es simple. Además por el teorema (16.3) $b(G) = \infty$,

$\therefore G$ es simple y $bb(G) = \infty (> 5)$ entonces, por el corolario anterior, G es débilmente geodésica. Por el teorema (6) G es tolomeica.

\Leftarrow) Por ser G tolomeica, el teorema (16.7) implica $bb(G) \geq 5$ y por ser G simple el teorema (16.5) implica $bb(G) = b(G)$ de donde $b(G) \geq 5$ y por el teorema (17) G es débilmente geodésica.

Así, G es débilmente geodésica y tolomeica, entonces por el teorema (6) G es un árbol de Husimi.

20) **DEFINICION.** Se dice que la colección \mathcal{K} de subgráficas de G tiene la propiedad $\bar{\mathcal{K}}$, si para cualquier subcolección $\mathcal{K} = \{K_i : i \in I\}$ de \mathcal{K} tal que $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, $i, j \in I$; y para cualquier $h \in I$, la colección $\{K_i \cap K_h : i \in I\}$ es totalmente ordenada por inclusión. (no se requiere que las gráficas $K_i \cap K_h$ sean distintas).

La definición anterior está relacionada con la propiedad α
(ver pag. 24).

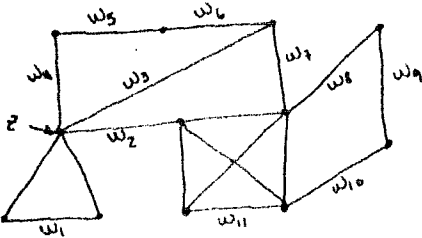
Como veremos el concepto de α gráfica es una generalización
del de gráfica semitolomeica (Corolario 22 pag. 44).

Trabajando con este tipo de ideas se llegará al concepto de
identificación subatómica (definición 42 pag. 104) y a la
caracterización "definitiva" de las gráficas tolomeicas dada
por HOWORKA y que es la parte culminante de esta tesis.

Observación. $\{K_h \cap K_i : i, h \in I\}$ es totalmente ordenada por inclusión

$\Leftrightarrow K_h \cap K_i \subseteq K_h \cap K_j$ ó $K_h \cap K_j \subseteq K_h \cap K_i$, para toda $i, j \in I$.

Ejemplo. Sea la G la siguiente gráfica;



\mathcal{K} la colección de clanes de G , como G no tiene subgráficas H (ver la definición 12 de gráfica semitolomeica) es claro que G es semitolomeica y el teorema siguiente nos dice que \mathcal{K} tiene la propiedad $\bar{\mathcal{A}}$.

21) **TEOREMA.** Una gráfica es semitolomeica si y sólo si la colección $\mathcal{K}(G)$ de todos los clanes de G tiene la propiedad $\bar{\mathcal{A}}$.

Demostración. \Leftarrow) Supongamos que G no es semitolomeica, por definición en G hay una subgráfica donde $\overline{ay} \notin \mathcal{A}(G)$

y $\overline{bx} \notin \mathcal{A}(G)$. Sean W_1, W_2, W_3 clanes distintos de G tales que:

$$\{a, b, c\} \subseteq W_1, \{a, c, x\} \subseteq W_2, \{c, b, y\} \subseteq W_3.$$

Si consideramos la subfamilia de clanes $\{W_1, W_2, W_3\}$ estos se intersectan dos a dos pero $\{W_1, W_1 \cap W_2, W_1 \cap W_3\}$ no está totalmente

ordenado por inclusión pues $W_1 \cap W_2 \not\subseteq W_1 \cap W_3$ y $W_1 \cap W_3 \not\subseteq W_1 \cap W_2$, y así $K(G)$ no tiene la propiedad $\bar{\alpha}$.

\therefore si $K(G)$ tiene la propiedad $\bar{\alpha}$ entonces G es semitolomeica.

\Rightarrow) Supongamos que $K(G)$ no tiene la propiedad $\bar{\alpha}$.

Existe $\mathcal{K} = \{W_i : i \in I\}$ una colección de clanes, tales que dos a dos se intersectan y para algún $h \in I$, $\{W_i \cap W_h : i \in I\}$ no está totalmente ordenado por inclusión. (e.d. existen $p, q \in I$ tales que $W_p \cap W_h$ y $W_q \cap W_h$ no son comparables por inclusión).

Así, existe $a \in [(W_p \cap W_h) - (W_q \cap W_h)] = W_h \cap (W_p - W_q)$, y existe

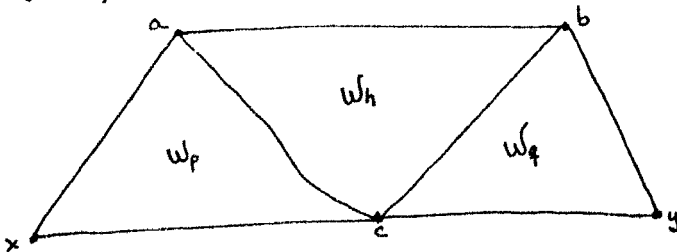
$b \in [(W_q \cap W_h) - (W_p \cap W_h)] = W_h \cap (W_q - W_p)$.

Como $a \in [W_h \cap (W_p - W_q)]$ y $b \in [W_h \cap (W_q - W_p)]$ entonces existe

$y \in W_q$ tal que $\bar{a}y \notin \Lambda(G)$, e.d. $a \not\sim y$, y existe $x \in W_p$ tal que $\bar{b}x \notin \Lambda(G)$ e.d. $b \not\sim x$.

Como $W_p \cap W_q \neq \emptyset$ existe $c \in W_p \cap W_q$, luego $W_p \supseteq \{x, a, c\}$, $W_q \supseteq \{b, y, c\}$.

$W_h \supseteq \{a, b, c\}$, y así la gráfica



es subgráfica de G con $a \not\sim y$ y $b \not\sim x$.

$\therefore G$ no es semitolomeica. ■

22) COROLARIO. La propiedad $\bar{\mathfrak{A}}$ implica la propiedad \mathfrak{A} .

Consecuentemente, las gráficas semitolomeicas son \mathfrak{A} -gráficas.

La gráfica H (fig 1) es \mathfrak{A} -gráfica pero no es semitolomeica.

Demostración. Sea \mathcal{K} una familia de subgráficas que satisfacen la propiedad $\bar{\mathfrak{A}}$, por demostrar que \mathcal{K} satisface la propiedad \mathfrak{A} .

Sea $\mathcal{K} = \{G_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $G_i \cap G_j \neq \emptyset$ para toda $i \neq j$,

por demostrar $\bigcap_{i \in I} G_i \neq \emptyset$.

Sea $h \in I$, por la propiedad $\bar{\mathfrak{A}}$, $\{G_h \cap G_i : i \in I\}$ está totalmente ordenado por inclusión, por lo tanto tiene un elemento mínimo.

Existe $i_0 \in I$ tal que $\emptyset \neq G_h \cap G_{i_0} \subseteq G_h \cap G_i$ para toda $i \in I$, por tanto

$$\emptyset \neq G_h \cap G_{i_0} \subseteq \bigcap_{i \in I} (G_h \cap G_i) = G_h \cap \left[\bigcap_{i \in I} G_i \right] = \bigcap_{i \in I} G_i \neq \emptyset. \blacksquare$$

Una gráfica G es semitolomeica si y sólo si $K(G)$ satisface la propiedad $\bar{\mathfrak{A}}$ (teo 21) por tanto $K(G)$ satisface la propiedad \mathfrak{A} .

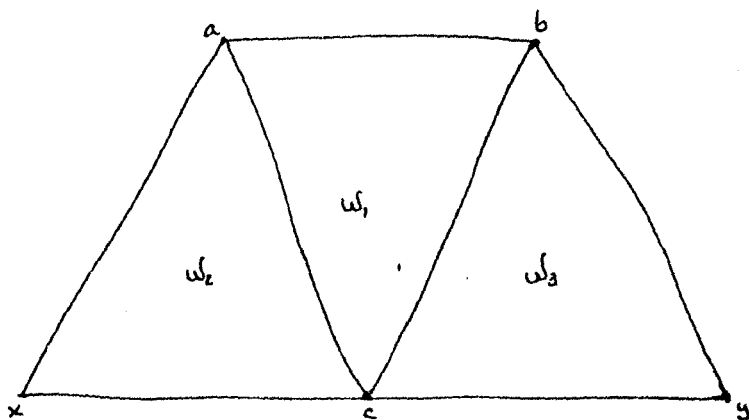
(corolario 22) es decir G es \mathfrak{A} -gráfica.

∴ Si G es semitolomeica entonces G es \mathfrak{A} -gráfica.

El recíproco es falso.

H es \mathcal{A} -gráfica y no es semitolomeica.

H:



$$K(H) = \{W_1, W_2, W_3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} W_1 \cap W_2 \neq \emptyset \\ W_1 \cap W_3 \neq \emptyset \\ W_2 \cap W_3 \neq \emptyset \end{array} \right\} W_1 \cap W_2 \cap W_3 \neq \emptyset$$

si es \mathcal{A} -gráfica.

CARACTERIZACIÓN MÉTRICA DE LOS ÁRBOLES DE HUSIMI

Los árboles de Husimi han sido caracterizados de varias -
formas, el siguiente teorema es una de ellos.

23) TEOREMA: Las siguientes proposiciones son equivalentes.

- 1) G es un árbol de Husimi.
- 2) Todo ciclo de G induce una gráfica completa.
- 3) $b(G) = \infty$ (teorema 16.3).
- 4) G es una gráfica de bloques de alguna gráfica F .
- 5) G es débilmente geodésica y tolomeica.
- 6) G es simple y tolomeica (teorema 19).

Demostración .

1) \Rightarrow 2)

Sea α un ciclo de G (G árbol de Husimi), α está contenido en un algún bloque B de G , como B es completo se tiene entonces $V(\alpha)$ induce una gráfica completa.

2) \Rightarrow 3)

Por definición (15) de b -ciclo.

3) \Rightarrow 4)

Supongamos $b(G) = \infty$. Analizamos dos casos posibles:

1ª $b(G) = \infty$ y la gráfica G no tiene ciclos.

Si G es trivial ($G \cong K_1$) entonces G es la gráfica de bloque de B , donde B es un bloque (e.d. B gráfica sin puntos de corte). Si G no es trivial, entonces todo bloque de G es K_2 , que es -- completo.

2° $b(G) = \infty$ y la gráfica G tiene ciclos. Por la definición (15) todo ciclo de G está contenido en un clan. Todo bloque de G es completo pues si B es bloque de G ($B \neq K_2$), para $u, v \in V(B)$ -- existe un ciclo α de B que pasa por u y v .

Como α está contenido en un clan se sigue que u y v son adyacentes, luego B es completo.

En cualquiera de los dos casos se aplica el teorema 3.5 pag. 30

del libro : GRAPH THEORY de HARARY.

24) TEOREMA: Una gráfica H es la gráfica de bloques de alguna gráfica si y sólo si cualquier bloque de H es completo.

4) \Rightarrow 5)

Por demostrar que G gráfica de bloques implica que G es débilmente geodésica y tolomeica.

Como G es gráfica de bloques entonces (por teorema 24) todo bloque de G es completo, de donde G es un árbol de Husimi . Por teo (6) se sigue que G es débilmente geodésica y tolomeica.

5) \Rightarrow 6)

G es débilmente geodésica y tolomeica, por teo (6) G es árbol de Husimi y por teo (19) se sigue que G es simple y tolomeica.

6) \Rightarrow 1)

G simple y tolomeica por teo (19) implica G es árbol de Husimi. ■

OTRA CARACTERIZACIÓN MÉTRICA DE LOS
ÁRBOLES DE HUSIMI (BUNEMAN)

25) DEFINICIÓN: Una gráfica G satisface la condición de los cuatro puntos (c.c.p.) si G es conexa y para cualesquiera $u, v, x, y \in V(G)$:

$$d(u, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

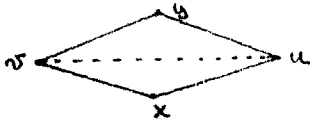
Nota: Cuando dos de estos puntos son iguales esta desigualdad es simplemente la desigualdad del triángulo.

Se hace notar en [3] que los árboles satisfacen la c.c.p.

26) TEOREMA: (Una caracterización métrica de los árboles de Husimi).

Una gráfica G conexa es un árbol de Husimi si y sólo si satisface la c.c.p.

Demostración (\Leftarrow). Supongamos que G satisface la c.c.p. probaremos que $b(G) = \infty$. Por reducción al absurdo. Vemos primero que los vértices de cualquier 4b-ciclo violan la c.c.p. pues para $\{u, x, v, y, u\}$



Podemos suponer y ~~ady~~ x, u posiblemente adyacente a v .

luego:

$$d(u, v) + d(x, y) \geq 3$$

$$d(u, x) + d(v, y) = 2$$

$$d(u, y) + d(v, x) = 2 \quad \text{de donde:}$$

$$d(u, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

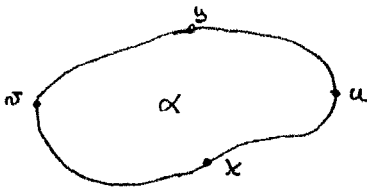
no se satisface.

Por lo tanto $b(G) \geq 5$. y por teo (16.6) se tiene que G es simple. Sea α un b -ciclo de longitud mínima por teo (16.5) todo b -ciclo de longitud mínima es inducido, así que α es un ciclo inducido luego α es un bb -ciclo y \therefore

$b(G) = bb(G)$. De esta manera se tiene que la distancia entre puntos de α está dada por el arco de α de menor longitud. $l(\alpha) = 4q + r$, $q \geq 1$, $0 \leq r \leq 3$, de hecho $1 \leq r \leq 3$ pues $l(\alpha) = b(G) \geq 5$.

Podemos escoger cuatro vértices u, v, x, y en α tales que $d(u, v), d(v, x), d(x, y), d(y, u)$ sea q ó $q + 1$.

($r \in \{1, 2, 3\}$ será el número de parejas tomadas que estén a distancia $q + 1$).



$$\text{Por tanto } d(y, x) + d(u, v) \geq 4q$$

$$\text{y } d(u, x) + d(v, y) \leq 2q + 2$$

$$d(y, u) + d(v, x) \leq 2q + 2$$

Luego se viola la c.c.p. pues tendríamos que

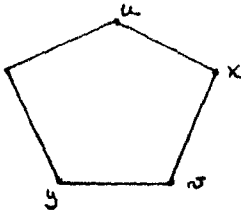
$$d(y, x) + d(v, u) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(y, u) + d(v, x) \end{cases}$$

en particular $4q \leq 2q + 2$

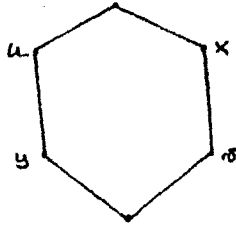
$$\therefore 2q \leq 2$$

$$\therefore q \leq 1 \text{ (e.d. } q = 1 \text{)}.$$

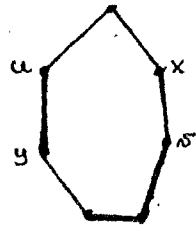
Ahora: Si $q = 1$ como $3 \geq r > 0$ tenemos los tres casos posibles:



a) $r=1$



b) $r=2$



c) $r=3$

a) $d(x, y) + d(u, v) = 4$ $d(x, u) + d(y, v) = 2$

$d(x, v) + d(y, u) = 3$ y se viola la c.c.p. ,

análogamente para b) y c).

$\therefore b(G) = \infty$. luego G es árbol de Husimi. \square

\Rightarrow). Probaremos ahora que si G es un árbol de

Husimi entonces G satisface la c.c.p. .

La demostración se hará por inducción sobre el número de bloques de G.

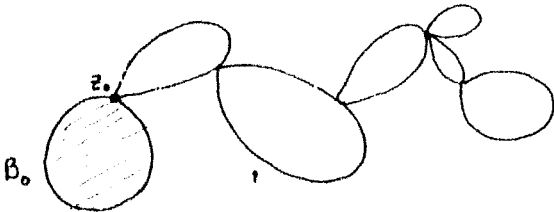
1º) $B(G) = 1$ es decir, G es un bloque y como además G es un árbol de Husimi, G es una gráfica completa en este caso para $u, v, x, y \in V(G)$

$d(u, v) = d(x, y) = d(u, x) = d(v, y) = d(u, y) = d(v, x) = 1$
 luego la c.c.p. se cumple.

2º) Supongamos que si G' es un árbol de Husimi con $B(G') = n$ entonces G' satisface la c.c.p.

3º) Sea G un árbol de Husimi con $B(G) = n + 1 \geq 2$ por demostrar que G satisface la c.c.p.

Sea B_0 un bloque terminal de G ; es decir, B_0 tiene un único punto de corte de G , llamémosle z_0 .



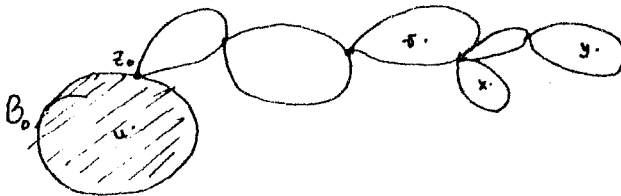
Sea $G^* = G - (B_0 - z_0)$, G^* es claramente un árbol de Husimi ya que $B(G^*) = n$ y por hipótesis de inducción se satisface la c.c.p. en G^* .

Queremos demostrar que la c.c.p. se satisface en G .

Sean $u, v, x, y \in V(G)$ analizaremos los cuatro posibles casos:

Caso 1. - $|V(B_0) \cap \{u, v, x, y\}| = \emptyset$ $\{u, v, x, y\} \subseteq V(G^*)$
 y por hipótesis de inducción la c.c.p. se satisface para
 u, v, x, y .

Caso 2. - $|V(B_0) \cap \{u, v, x, y\}| = 1$ sin pérdida de genera-
 lidad supongamos $u \in V(B_0)$ y $v, x, y \in V(G^*)$.



Caso 2 a. $u \in V(B_0)$ y $u = z_0$ de donde $u \in V(G^*)$ por
 lo tanto $\{u, v, x, y\} \subseteq V(G^*)$ y se cumple la c.c.p. para
 u, v, x, y por hipótesis de inducción.

Caso 2 b. $u \in V(B_0)$ y $u \neq z_0$ se tiene $d(u, z_0) = 1$
 $d(u, x) = d(z_0, x) + 1$ $d(u, y) = d(z_0, y) + 1$
 $d(u, v) = d(z_0, v) + 1$. Por demostrar:

$$d(u, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

Se tiene que $d(u, v) + d(x, y) = d(z_0, v) + 1 + d(x, y) =$
 $d(z_0, v) + d(x, y) + 1$ como $\{z_0, v, x, y\} \subseteq V(G^*)$ la c.c.p.
 se satisface por hipótesis de inducción.

$$\therefore d(z_0, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(z_0, x) + d(v, y) \\ d(z_0, y) + d(v, x) \end{cases}$$

de aquí se sigue:

$$d(z_0, v) + d(x, y) + 1 \leq 1 + \max \begin{cases} d(z_0, x) + d(v, y) \\ d(z_0, y) + d(v, x) \end{cases}$$

se sigue que:

$$d(z_0, v) + 1 + d(x, y) \leq \max \begin{cases} 1 + d(z_0, x) + d(v, y) \\ 1 + d(z_0, y) + d(v, x) \end{cases}$$

luego:

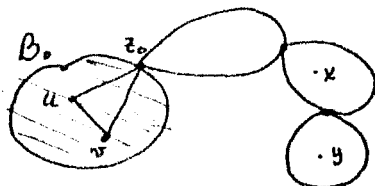
$$d(u, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

Caso 3. - $|V(B_0) \cap \{x, y, u, v\}| = 2$ sin pérdida de generalidad supongamos $\{u, v\} = V(B_0) \cap \{x, y, u, v\}$

Caso 3 a. $u = z_0$ o $v = z_0$ este caso se reduce al caso 2 b).

Caso 3 b. $u \neq z_0$ y $v \neq z_0$

Por demostrar:



$$i) \quad d(u, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

$$ii) \quad d(u, x) + d(v, y) \leq \max \begin{cases} d(u, v) + d(x, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$(*) \left. \begin{aligned} d(u, x) &= d(z_0, x) + 1 \\ d(u, y) &= d(z_0, y) + 1 \\ d(v, x) &= d(z_0, x) + 1 \\ d(v, y) &= d(z_0, y) + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d(u, x) &= d(v, x) \\ d(u, y) &= d(v, y) \end{aligned}$$

Para la demostración de (i). $d(u, v) = d(u, z_0) = 1$.

En la misma forma en que se vió el caso 2 b. se demuestra que la c. c. p. se cumple para $\{u, z_0, x, y\}$ por lo

tanto:

$$d(u, z_0) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(z_0, y) \\ d(u, y) + d(z_0, x) \end{cases}$$

luego por (*):

$$d(u, v) + d(x, y) < \max \begin{cases} d(u, x) + d(y, v) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

Para la demostración de (ii) se tiene por (*):

$$\begin{aligned} d(u, x) + d(v, y) &\leq \max \begin{cases} d(u, v) + d(x, y) \\ d(u, y) + d(x, v) \end{cases} \\ [d(z_0, x) + 1] + [d(z_0, y) + 1] &= [d(z_0, y) + 1] \\ &\quad + [d(z_0, x) + 1] \end{aligned}$$

o sea que siempre se cumple (ii).

Caso 4. $|V(B_0) \cap \{u, v, x, y\}| = 3$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\{u, v, x\} \subseteq V(B_0)$.

Podemos suponer que $y \notin \{V(G) \setminus V(B)\}$ y que $z_0 \notin \{u, v, x\}$.

Por demostrar que :

$$d(u, v) + d(x, y) \leq \max \begin{cases} d(u, x) + d(v, y) \\ d(u, y) + d(v, x) \end{cases}$$

Por (*) se tiene:

$$1 + [d(z_0, y) + 1] \leq \max \begin{cases} 1 + [d(z_0, y) + 1] \\ [d(z_0, y) + 1] + 1 \end{cases}$$

de aquí que:

$$2 + d(z_0, y) \leq \max \begin{cases} 2 + d(y, z_0) \\ 2 + d(y, z_0) \end{cases}$$

siempre se cumple.

Caso 5. - es trivial $\{u, v, x, y\} \subseteq B_0$ ya que B_0 es completo la desigualdad de la c.c.p. se cumple trivialmente. ■

27) COROLARIO: Una gráfica conexa es un árbol si y sólo si no contiene triángulos y satisface la c.c.p. .

Demostración: Sea G un árbol, por definición de árbol G no contiene triángulos: claramente G es un árbol de Husimi y por teo (26) se sigue que G satisface la c.c.p. ■

Ahora sea G una gráfica que no contiene triángulos y que satisface la c.c.p. .

Por teo (26) G es un árbol de Husimi lo que implica que todo bloque de G es completo, ya que G no contiene triángulos y todo bloque de G es completo se sigue que si B es bloque de G, $|V(B)| = 2$.

Por lo tanto, G es un árbol de Husimi donde todo bloque es isomorfo a K_2 , se sigue que G es un árbol. \square

En el teorema (19) se probó que una gráfica G es un árbol de Husimi si y sólo si es simple y tolomeica, en vista del teorema (26) es claro que la condición de los cuatro puntos es más fuerte que la desigualdad tolomeica.

§ IV. UNA NOTA SOBRE LAS PROPIEDADES MÉTRICAS DE LOS
ÁRBOLES (BUNEMAN)

Si G es gráfica conexa, $u, v \in V(G)$ definimos $d(u, v) = \min \{ \ell(T) : T \text{ es } uv\text{-trayectoria} \}$. $\ell(T) =$ número de aristas en T . En particular si G es árbol, dados $u, v \in V(G)$ sabemos que existe una única uv -trayectoria en G que los une, de donde la longitud de la única uv -trayectoria en G es la distancia en G de u a v .

Nótese que la distancia así definida depende directamente de la definición de la longitud de una trayectoria.

28) DEFINICION. Un árbol pesado es un árbol en el cual cada arista "e" de G tiene asociado un valor positivo λ_e .

Dado un árbol pesado G , podemos definir una distancia en G en la cual se refleje los pesos de las aristas de G (e.d. un concepto de distancia en el cual los valores asociados a las aristas sean relevantes).

29) Se define la distancia en un árbol pesado como sigue:

Si G es un árbol pesado y denotamos λ_e el peso de $e \in A(G)$,

entonces $\bar{d}(x, y) = \sum_{e \in E(x, y)} \lambda_e$. ($E(x, y)$ es la única xy -tray en G)

Nótese que en particular si G es un árbol arbitrario la distancia usual en G coincide con la distancia pesada cuando a cada arista se le ha asignado peso 1.

30) OBSERVACION: Esta nueva distancia es una métrica.

Sea G un árbol pesado, λ_e el peso asociado a $e \in A(G)$ entonces

$\bar{d}(x, y) = \sum_{e \in E(x, y)} \lambda_e$ define una métrica en G .

- 1) $\bar{d}(x, y) \geq 0$ y $\bar{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 2) $\bar{d}(x, y) = \bar{d}(y, x)$
- 3) $\bar{d}(x, y) \leq \bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y)$.

Demostración.

- 1) Se cumple porque para toda $e \in A(G)$, $\lambda_e \geq 0$.
- 2) Sea T la única xy -trayectoria en G .

T tiene asociado un peso, claramente,

$$\bar{d}(x, y) = \sum_{e \in A(T)} \lambda_e = \bar{d}(y, x).$$

- 3) Sea $x, y, z \in G$, T_1 la única xy -trayectoria en G
 T_2 la única xz -trayectoria en G
 T_3 la única zy -trayectoria en G .

$T_2 \cup T_3$ es un xy -camino que por tanto, contiene a T_1 .

De donde $\sum_{e \in A(T_1)} \lambda_e \leq \sum_{e \in A(T_2)} \lambda_e + \sum_{e \in A(T_3)} \lambda_e$
 (e.d. $\bar{d}(x, y) \leq \bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y)$). ■

Analizando las configuraciones posibles de las trayectorias que conecten cuatro puntos x, y, z, t en un árbol, puede verse que la distancia gráfica satisface la desigualdad:

$$d(x, y) + d(z, t) \leq \max \begin{cases} d(x, z) + d(y, t) \\ d(x, t) + d(y, z) \end{cases}$$

Nos referiremos a esta condición como la c.c.p. (ver la definición 25): es más fuerte que la desigualdad del triángulo (que se obtiene haciendo $z = t$), y es equivalente a decir que de las tres sumas ($d(x, y) + d(z, t)$; $d(x, z) + d(y, t)$; $d(x, t) + d(y, z)$) dos sean iguales y no menores que la tercera. La c.c.p. es también una condición suficiente para que una gráfica sea un árbol en el siguiente sentido.

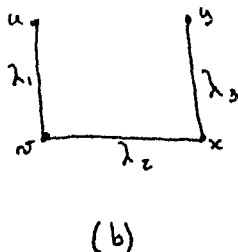
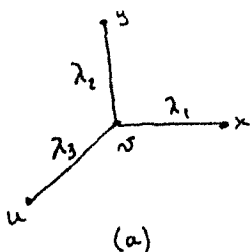
TEOREMA: Una gráfica es un árbol si y sólo si es conexa, no contiene triángulos y la distancia gráfica satisface la c.c.p..

(vease Corolario 27).

Esta nueva distancia también satisface la c.c.p. .

Sea G un árbol con aristas pesadas, demostraremos por inducción sobre $|V(G)|$ que en G con la distancia inducida por los pesos de las aristas, satisface la c.c.p. .

1° Si G tiene sólo 4 vértices u, v, y, x , consideremos los casos:



Caso (a). Por demostrar:

$$\bar{d}(u, v) + \bar{d}(x, y) \leq \max \begin{cases} \bar{d}(u, y) + \bar{d}(v, x) \\ \bar{d}(u, x) + \bar{d}(v, y) \end{cases}$$

e.d. $\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2) \leq \max \begin{cases} (\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_1 \\ (\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 \end{cases}$

lo cual es obvio.

Caso (b). Por demostrar:

$$\bar{d}(u, v) + \bar{d}(x, y) \leq \max \begin{cases} \bar{d}(u, y) + \bar{d}(v, x) \\ \bar{d}(u, x) + \bar{d}(v, y) \end{cases}$$

e.d. $\lambda_1 + \lambda_3 \leq \max \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2 \\ (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$.

lo cual es obvio.

En forma análoga se demuestra los otros posibles casos para G con 4 puntos.

2°) Supongamos que si G' es un árbol con aristas pesadas y con p-1 puntos entonces G' satisface la c.c.p. respecto a la distancia pesada.

3°) Sea G un árbol con aristas pesadas y con p puntos.

Por demostrar que G satisface la c.c.p. respecto a la distancia pesada. (e.d. para $u, v, x, y \in V(G)$)

$$\bar{d}(u, v) + \bar{d}(x, y) \leq \max \begin{cases} \bar{d}(u, x) + \bar{d}(y, v) \\ \bar{d}(u, y) + \bar{d}(x, v) \end{cases} \quad (i)$$

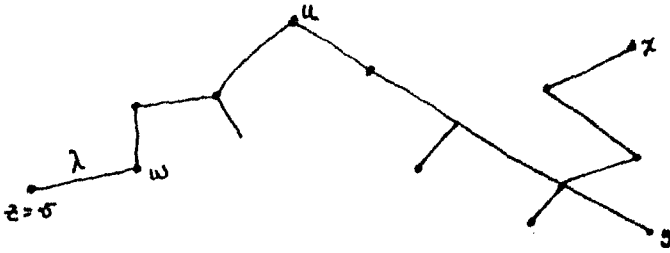
Sea z un punto de grado 1 en G.

Caso a) Si $z \notin \{u, v, x, y\}$ la desigualdad (i) se sigue de la hipótesis de inducción de (G-z).

Caso b) $z \in \{u, v, x, y\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z = v$. Sea w el único punto de G que es adyacente a z.

Por hipótesis de inducción en G-z se cumple la c.c.p. para u, y, x, w .

Observación. La c.c.p. se cumple también si dos o más de los 4 puntos son iguales, ya que la distancia \bar{d} satisface la desigualdad del triángulo.



Sea λ el peso de la arista \bar{zw} .

$$\bar{d}(w, x) + \bar{d}(u, y) \leq \max \begin{cases} \bar{d}(w, y) + \bar{d}(u, x) \\ \bar{d}(w, u) + \bar{d}(y, x) \end{cases}$$

Por la hipótesis de inducción.

Claramente:

$$\bar{d}(v, x) = \bar{d}(w, x) + \lambda$$

$$\bar{d}(v, y) = \bar{d}(w, y) + \lambda$$

$$\bar{d}(v, u) = \bar{d}(w, u) + \lambda \quad \text{y por tanto}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}(w, x) + \bar{d}(u, y) + \lambda &\leq \max \begin{cases} \bar{d}(w, y) + \bar{d}(u, x) + \lambda \\ \bar{d}(w, u) + \bar{d}(y, x) + \lambda \end{cases} \\ &= \max \begin{cases} \bar{d}(v, y) + \bar{d}(u, x) \\ \bar{d}(v, u) + \bar{d}(y, x) \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo cual terminamos la demostración. ■

Así, si G es un árbol con aristas pesadas y d es la distancia pesada en G , esta nueva distancia también satisface la c.c.p..

Esto nos dará un método para construir un árbol sobre cualquier conjunto finito de puntos en el cual está definida una distancia que satisface la c.c.p..

Esta construcción está dada en el siguiente teorema.

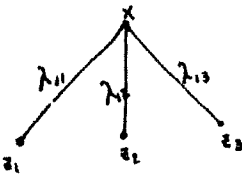
31) **TEOREMA:** Sea d una métrica en un conjunto S y tal que satisface la c.c.p. entonces existe un árbol pesado T que contiene a los elementos de S entre sus puntos y que induce d . (e.d. tal que $\bar{d}/S = d$, donde \bar{d}/S denota la restricción de \bar{d} a S).

Demostración: Por inducción sobre $|S|$.

1°) $|S| = 3$ Sea $S = \{z_1, z_2, z_3\}$ con d la distancia definida en S como sigue:

$$d(z_1, z_2) = \lambda_1 \quad d(z_2, z_3) = \lambda_2 \text{ y } d(z_3, z_1) = \lambda_3.$$

Consideremos el siguiente árbol pesado:



λ_{1i} es el peso de la arista $\bar{x}z_i$.

Basta resolver el siguiente Sistema de Ecuaciones.

$$\lambda_{11} + \lambda_{13} = \lambda_3$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_1$$

$$\lambda_{12} + \lambda_{13} = \lambda_2$$

Obtenemos: $\lambda_{11} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{2} \geq 0$ por la desigualdad del triángulo.

$\lambda_{13} = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1}{2} \geq 0$ por la desigualdad del triángulo.

$\lambda_{12} = \frac{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2}{2} \geq 0$ por la desigualdad del triángulo.

Así que: el árbol pesado contiene a S entre sus vértices, y la distancia pesada entre los puntos de S coincide con la distancia en S.

Supongamos que el teorema es válido para cualquier conjunto con menos de n - puntos.

Sea (p, q, r) una terna de elementos de S tal que :

$d(p, r) + d(q, r) - d(p, q)$ sea máxima entonces para

toda $x \notin \{p, q\}$ se tiene para la terna (x, q, r) que:

$$d(x, r) + d(q, r) - d(x, q) \leq d(p, r) + d(q, r) - d(p, q)$$

$$d(x, r) + d(p, q) \leq d(p, r) + d(x, q) \dots \dots \dots (1)$$

Análogamente para la terna (p, x, r) se tiene:

$$d(p, r) + d(x, r) - d(p, x) \leq d(p, r) + d(q, r) - d(p, q)$$

$$d(x, r) + d(p, q) \leq d(q, r) + d(p, x) \dots \dots \dots (2)$$

$$d(x, r) + d(p, q) \leq d(p, r) + d(x, q)$$

$$d(x, r) + d(p, q) \leq d(q, r) + d(p, x)$$

o

Observación: (*)

En la c.c.p. estan involucradas tres sumas, dos de las cuales son iguales y no menores que la tercera, sean:

$$(3) \dots d(x, y) + d(z, t) \leq \max \begin{cases} d(x, z) + d(y, t) \dots \dots \dots (1) \\ d(x, z) + d(y, z) \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

Si (1) = (2) ya!, si (1) > (2) entonces (3) ≤ (1),

$$(1) \dots d(x, z) + d(y, t) \leq \max \begin{cases} d(x, y) + d(z, t) \dots \dots \dots (3) \\ d(x, t) + d(y, z) \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

(3) ≥ (1) por tanto (3) = (1) y (1) ≥ (2)

o

$$\text{Probaremos: } d(p, r) + d(x, q) = d(q, r) + d(p, x) \dots \dots \dots (1')$$

Tomemos: $a = d(x, r) + d(p, q)$

$b = d(p, r) + d(x, q)$

$c = d(q, r) + d(p, x)$

$a \leq b$

Por demostrar $b = c$

$a \leq c$

Si $b \neq c$ entonces (por la observación (*))

i) $a = b$ y $a \geq c$ y por tanto $a = c$ y $b = c$ contradicción.

ii) $a = c$ y $a \geq b$ y por tanto $a = b$ y $b = c$ contradicción de donde $b = c$ y la afirmación queda probada.

Similarmente para cualquier otro elemento $y \in S \setminus \{p, q\}$, tenemos que

$$d(y, q) + d(p, r) = d(y, p) + d(q, r) \dots \dots \dots (2')$$

y también

$$d(x, q) + d(p, r) = d(x, p) + d(q, r) \dots \dots \dots (3')$$

Despejando $d(q, r)$ en (1') obtenemos:

$$d(q, r) = d(x, q) + d(p, r) - d(x, p) \text{ sustituyendo en (2') obtenemos:}$$

$$d(y, q) + d(p, r) = d(y, p) + [d(x, q) + d(p, r) - d(x, p)] \text{ de donde}$$

$$d(y, q) + d(x, p) = d(y, p) + d(x, q) \dots \dots \dots (I)$$

Describimos ahora un nuevo objeto t dando su distancia similaridad con cada miembro de S , extendiendo d de tal forma que:

$$i) \quad d(t, p) = \frac{1}{2} [d(p, q) + d(p, r) - d(q, r)] = \frac{1}{2} (r, q, p) \quad (5')$$

$$ii) \quad d(t, x) = d(x, p) - d(t, p) \quad \text{si } x \neq p. \quad (6')$$

se sigue que:

$$d(p, x) = d(p, t) + d(t, x) \dots \dots \dots (4')$$

por (I) $d(q, x) = d(x, p) + d(y, q) - d(y, p)$

por (4) $d(q, x) = d(p, t) + d(t, x) + d(y, q) - d(y, p)$

Sustituyendo de nuevo tenemos:

$$\begin{aligned} (1) \quad d(q, x) &= d(x, p) + d(y, q) - d(y, p) \\ &= \frac{1}{2} [d(p, q) + d(q, r) - d(q, r)] + d(x, p) - d(t, p) + d(y, q) - d(y, p) \end{aligned}$$

de (3') se sigue que:

$$d(q, x) = d(x, p) + d(r, q) - d(r, p)$$

$$\begin{aligned} (4') \\ &= d(t, x) + d(t, p) + d(q, r) - d(p, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5') \\ &= d(t, x) + \frac{1}{2} d(p, q) + \frac{1}{2} d(p, r) - \frac{1}{2} d(q, r) - d(p, r) + d(q, r) \\ &= d(t, x) + d(p, q) - \frac{1}{2} d(p, q) - \frac{1}{2} d(p, r) + \frac{1}{2} d(q, r) \\ &= d(t, x) + d(p, q) - \frac{1}{2} [d(p, q) + d(p, r) - d(q, r)] \\ &= d(t, x) + d(p, q) - d(t, p) \end{aligned}$$

$$= d(t, x) + d(t, q) \quad (\text{En el último paso hemos usado que por}$$

definición $d(t, x) = d(x, p) - d(t, p)$ cuando $x \neq p$. Y en particular para $x = q$

$$d(t, q) = d(p, q) - d(t, p)).$$

$$\text{Reescribiendo: } d(q, x) = d(t, x) + d(t, q).$$

Hagamos la siguiente observación:

$$**) \begin{cases} d(p, x) = d(p, t) + d(t, x) \\ d(q, x) = d(q, t) + d(t, x) \end{cases} \quad (\text{válidas } \forall x \notin \{p, q\}).$$

Ahora demostraremos :

$$Sv\{t\} \text{ satisface la (c. c. p.)}$$

Tomemos 4 puntos en $S \cup \{t\}$, $\alpha, \beta, \delta, \delta'$.

Si $t \notin \{\alpha, \beta, \delta, \delta'\}$ entonces $\alpha, \beta, \delta, \delta'$ satisfacen la (c. c. p.) ya que S tiene la (c. c. p.).

Supongamos sin pérdida de generalidad $\alpha = t$.

$d(t, \beta) + d(\delta, \delta')$; $d(t, \delta) + d(\beta, \delta)$; $d(t, \delta) + d(\beta, \delta')$ queremos probar que de estas 3 sumas 2 son iguales y no menor que la tercera (e. d. la c. c. p.)

Sabemos que: $d(p, \beta) = d(p, t) + d(t, \beta)$ por $(***)$

Las sumas a considerar son:

$$d(p, \beta) - d(p, t) + d(\delta, \delta')$$

$$d(p, \delta) - d(p, t) + d(\beta, \delta) \quad (II)$$

$$d(p, \delta) - d(p, t) + d(\beta, \delta')$$

Sabemos que $p, \beta, \delta, \delta'$ satisfacen la (c. c. p.), por lo tanto si a cada una de las 3 sumas les restamos $d(p, t)$ se sigue cumpliendo la (c. c. p.).

$$d(p, \beta) + d(\delta, \delta')$$

$$d(p, \delta) + d(\beta, \delta)$$

$$d(p, \delta) + d(\beta, \delta')$$

Con lo cual las sumas en (II) también satisfacen la (c. c. p.).

Ahora, $(S \cup \{t\}, d)$ es un espacio métrico:

Ya que (S, d) es un espacio métrico entonces para probar que $(S \cup \{t\}, d)$ es también un espacio métrico es suficiente demostrar que:

$$\text{iii) } d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, t) + d(t, \beta)$$

$$d(\alpha, \beta) + d(p, q) \leq \max \begin{cases} d(\alpha, p) + d(\beta, q) \\ d(\alpha, q) + d(\beta, p) \end{cases} \quad \text{estas dos sumas son iguales por (I)}$$

$$\text{De donde } d(\alpha, \beta) + d(p, q) \leq d(\alpha, p) + d(\beta, q)$$

$$\text{Pero ahora } d(t, q) \stackrel{(\ast)}{=} d(\alpha, t) + d(t, p) + d(\beta, t) + d(t, q) \text{ que sustituida arriba nos da:}$$

$$d(\alpha, \beta) + d(p, q) \leq d(\alpha, t) + d(t, p) + d(\beta, t) + d(q, p) - d(t, p)$$

$$d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, t) + d(\beta, t) \text{ asi (iii) queda probado.}$$

∴ $(S \cup \{t\}, d)$ es un espacio métrico que satisface la (c. c. p.). Por lo tanto

$(S \cup \{t\} \setminus \{p, q\}, d)$ es un espacio métrico que satisface la (c. c. p.).

Como $|S \cup \{t\} \setminus \{p, q\}| = n - 1$ usando la hipótesis de inducción tenemos que

existe un árbol pesado T' que incluye a $S \cup \{t\} \setminus \{p, q\}$ entre sus vértices y

tal que $\bar{d}(s_i, s_j) = d(s_i, s_j)$ para toda $s_i, s_j \in (S \cup \{t\} \setminus \{p, q\})$ donde \bar{d} es la

distancia pesada en T' y d es la distancia en $(S \cup \{t\}, d)$.

Por la observación (*) tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} d(p, x) = d(p, t) + d(t, x) \quad (2a) \\ d(q, x) = d(q, t) + d(t, x) \quad (2b) \end{array} \right\} \text{ para toda } x \in (S \cup \{t\} \setminus \{p, q\}).$$

Entonces si definimos el árbol pesado T por:

$$V(T) = V(T') \cup \{p, q\}$$

$$A(T) = A(T') \cup \{\bar{p}t, \bar{q}t\}$$

a la arista $\bar{p}t$ le damos peso = $d(p, t)$

y a la arista $\bar{q}t$ le damos peso = $d(q, t)$.

Las igualdades (2a) y (2b) de arriba nos aseguran que este nuevo árbol pesado

induce d en S . Con lo que la inducción está completa. ■

§ V. Una caracterización de Gráficas con distancia hereditaria

(E. HOWORKA)

La presente sección describe aquellas gráficas cuya estructura métrica, es hereditaria, en el siguiente sentido:

Una gráfica G se dice que tiene distancia hereditaria (d. h.) si cada subgráfica conexa inducida F de G tiene la propiedad $d_F(u, v) = d_G(u, v)$ para cada $u, v \in F$. En otras palabras se requiere que para cualquier subgráfica inducida conexa F de G , $(V(F), d_F)$ sea un subespacio métrico de $(V(G), d_G)$, donde G es la componente de G que contiene a F .

La distancia hereditaria está totalmente caracterizada en el teorema (2).

Es conveniente identificar una trayectoria α de una gráfica G como una subgráfica de G que tiene los mismos vértices y aristas que α .

En particular, una trayectoria inducida de G es una trayectoria que es una subgráfica inducida de G .

Sea ϕ un ciclo de G , una tray α se llama parte esencial de ϕ si: $\alpha \subseteq \phi$ y $\frac{1}{2} l(\phi) < l(\alpha) < l(\phi)$.

Diremos que dos diagonales ρ_1, ρ_2 de ϕ se cruzan si la gráfica $\phi + \rho_1 + \rho_2$ es homeomorfa a K_4 .

32) TEOREMA: (CARACTERIZACION DE GRAFICAS CON (d.h))

Las siguientes proposiciones son equivalentes.

- 1) G tiene distancia hereditaria.
- 2) Toda trayectoria inducida de G es una geodésica.
- 3) Ninguna parte esencial de un ciclo de G es inducido.
- 4) Cada ciclo de G de longitud ≥ 5 tiene al menos dos diagonales y cada ciclo de longitud 5 tiene dos diagonales que se cruzan.
- 5) Cada ciclo de G de longitud ≥ 5 tiene un par de diagonales que se cruzan.

Demostración: (1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 3).

1) \Rightarrow 2). Sea α una trayectoria inducida de G y G una gráfica con (d.h).

Como α es una trayectoria inducida, $d_\alpha(u, v) = d_G(u, v)$ para toda $u, v \in \alpha$, en particular si t, w son los vértices terminales de α , $d_\alpha(t, w) = d_G(t, w)$ de donde α es una trayectoria geodésica. ■

2) \Rightarrow 1). Supongamos que toda trayectoria inducida de G es una geodésica.

Sea F una subgráfica inducida de G y sean $u, v \in V(F)$ y α una uv -geodésica en F, de donde α es una trayectoria

inducida en F , como F es una subgráfica inducida de G se sigue que α es una uv -tray inducida en G ; por la hipótesis α es una uv -tray geodésica en G , y así $d_G(u, v) = l(\alpha) = d_F(u, v)$. De aquí se sigue que G tiene (d. h). \square

2) \Rightarrow 3). Supongamos que toda trayectoria inducida de G es una geodésica y supongamos (para llegar a una contradicción) que existe un ciclo C de G que tiene una parte esencial inducida. Sea α la parte esencial de C que es subgráfica inducida de G . Por hipótesis α es geodésica, de donde si u y v son los vértices terminales de α entonces $l(\alpha) = d_G(u, v)$.

Sea $C = (u, z_1, z_2, \dots, z_n = v, z_{n+1}, \dots, z_m, u)$, como $l(\alpha) > \frac{1}{2} l(C)$ se sigue $l(z_n = v, z_{n+1}, \dots, z_m, u) < \frac{1}{2} l(C)$ de donde $l(v, z_{n+1}, \dots, z_m, u) < l(\alpha)$ lo cual contradice que α es una uv -geodésica. \square

3) \Rightarrow 2). Supongamos que G satisface (3) y sean $u \neq v \in V(G)$, sea $\alpha = (u = a_0, a_1, \dots, a_m = v)$ una uv -tray de G que no sea geodésica.

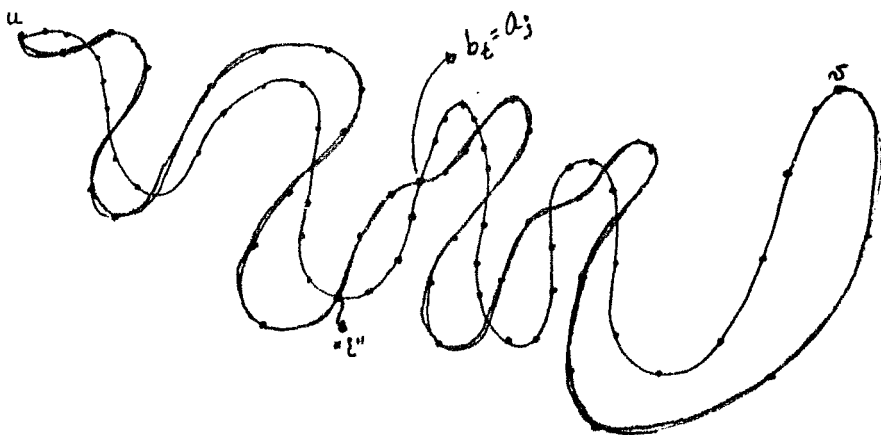
Consideremos ahora $\beta = (u = b_0, b_1, \dots, b_n = v)$ una uv -geodésica, por las elecciones de α y β tenemos que $n < m$.

Denotemos por "i" el más grande índice para el cual $a_i = b_i$ con $0 \leq i < n$.

Nótese que por la definición de "i" se tiene;

$$\mathcal{L}(a_0, a_1, \dots, a_i) = \mathcal{L}(b_0, b_1, \dots, b_i)$$

Sea t el más pequeño índice mayor que i para el cual $b_t \in \alpha$, así $b_t = a_j$ donde $j > t$, pues i es el máximo índice para el cual $a_i = b_i$ y además α no es geodésica y β si es geodésica.



α no es geodésica

β si es geodésica

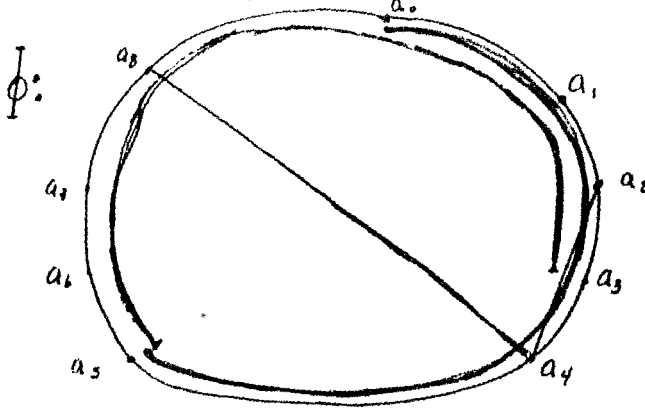
Por lo tanto $\delta = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$ es una parte esencial del ciclo $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j = b_t, b_{t+1}, \dots, b_i = a_i)$, y por la hipótesis, δ no es inducido. Por lo tanto α no es una trayectoria inducida. ■

3) \Rightarrow 4).

Sea $\Phi = \{a_0, a_1, \dots, a_n = a_0\}$ $n \geq 5$ un ciclo de G que satisface (3).

Considerando la parte esencial $(a_0, a_1, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1})$ del ciclo Φ , tenemos que esta parte esencial tiene al menos una diagonal $\overline{a_i a_j}$

ya que $(a_0, a_1, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1})$ no es inducida por la hipótesis.



Considerando ahora $T = (a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{j-1})$ vemos que es una parte esencial de Φ ya que $\ell(T) = n - 2 > \frac{n}{2}$ pues $n \geq 5$.

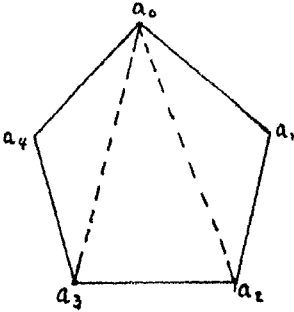
Por hipótesis, T no es inducida. Luego existe $\overline{a_r a_s}$ una arista de G que no está en T

Claramente $\overline{a_i a_j}$ y $\overline{a_r a_s}$ son dos diagonales distintas en Φ pues $j \notin \{r, s\}$.

Si $\Phi = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_0)$ es un ciclo de longitud 5, entonces por lo que se acaba de demostrar, Φ tiene al menos dos diagonales; si estas dos son cruzadas ya acabamos.

En caso contrario:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las diagonales de \mathcal{C} son $\overleftrightarrow{a_0 a_2}$ y $\overleftrightarrow{a_0 a_3}$



Consideremos ahora $T = (a_4, a_3, a_2, a_1)$ que es una parte esencial del ciclo, por hipótesis tiene una diagonal $\overleftrightarrow{a_1 a_3}$. Por tanto $\overleftrightarrow{a_1 a_3}$ cruza al menos una de las dos $\overleftrightarrow{a_0 a_3}$, $\overleftrightarrow{a_0 a_2}$. \square

4) \Rightarrow 5).

Supongamos que G satisface (4).

(e. d. cada ciclo de G de longitud ≥ 5 tiene dos diagonales y cada ciclo de G de longitud 5 tiene dos diagonales cruzadas).

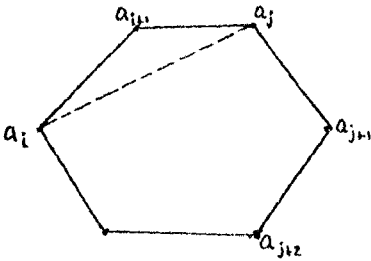
Por demostrar que cada ciclo de G de longitud ≥ 5 tiene dos diagonales cruzadas:

Por inducción sobre la longitud del ciclo \mathcal{C} de G .

1º) Si $l(\zeta) = 5$ entonces por hipótesis ζ tiene dos diagonales cruzadas.

Si $l(\zeta) = 6$, denotemos $\zeta = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$. Ahora,

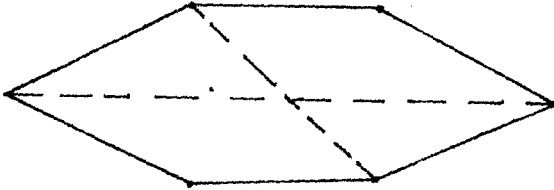
si ζ tiene una diagonal $\overline{a_i a_j}$ con $l(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j) = 2$



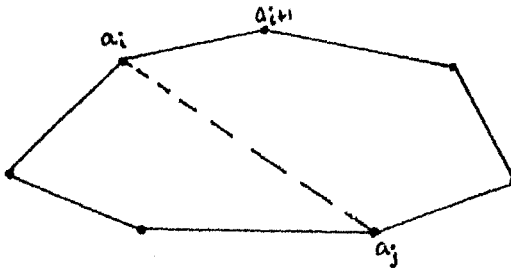
entonces $(a_i, a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_i) = \zeta'$ que es un ciclo de longitud 5; por la hipótesis ζ' tiene dos diagonales cruzadas y por lo tanto ζ tiene dos diagonales cruzadas.

En caso contrario;

Cada diagonal de ζ , $\overline{a_i a_j}$ satisface $l(a_i, \dots, a_j) = 3$ y como ζ tiene al menos dos diagonales (por hipótesis), necesariamente sus dos diagonales se cruzan.



Si $l(\zeta) = 7$



Sea $\mathcal{C} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, a_0)$ y sea $\overline{a_i a_j}$ una diagonal de \mathcal{C} .

Como $l(\mathcal{C}) = 7$ al menos una de las dos trayectorias de \mathcal{C} determinadas por $\overline{a_i a_j}$ tiene longitud ≥ 4 , sin pérdida de generalidad supongamos

$l(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j) = 4$; de donde $\mathcal{C}' = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_j, a_i)$ es un ciclo de longitud $l(\mathcal{C}') = 5$ y por tanto tiene dos diagonales cruzadas, de donde \mathcal{C} con $l(\mathcal{C}) = 7$ tiene dos diagonales cruzadas.

2^a) Supongamos que si \mathcal{C}' es un ciclo de G con $8 \leq l(\mathcal{C}') < n$ entonces \mathcal{C}' tiene dos diagonales cruzadas.

3^a) Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud n , tal que $l(\mathcal{C}) = n \geq 8$, \mathcal{C} tiene alguna diagonal \overline{uv} , u y v determinan dos trayectorias en el ciclo \mathcal{C} , llamémosles \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , luego $l(\mathcal{C}_1) \geq \frac{n}{2}$ o $l(\mathcal{C}_2) \geq \frac{n}{2}$, sin pérdida de generalidad, supongamos $l(\mathcal{C}_1) \geq \frac{n}{2}$, $\mathcal{C}_1 \cup \overline{uv}$ es un ciclo de longitud ≥ 5 .

Por tanto tiene dos diagonales cruzadas que también son dos diagonales cruzadas en G , y la inducción esta completa. \square

5) \Rightarrow 3).

Sea G una gráfica que satisface (5).

(e. d. cada ciclo de G de longitud ≥ 5 tiene dos diagonales cruzadas)

Probaremos por inducción sobre n que ninguna parte esencial de un ciclo de longitud n es inductiva.

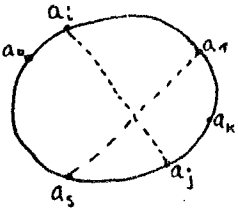
Para $n = 3$ y $n = 4$ se cumple.

Supongamos que $n > 4$ y que la afirmación se cumple para todos los ciclos de longitud $< n$.

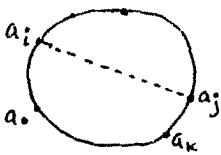
Sea $\Phi = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = a_0)$ un ciclo de longitud n y sea α una parte esencial de Φ , $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k)$ donde $\frac{n}{2} < k < n$.

Sean $\overline{a_i a_j}$ y $\overline{a_r a_s}$ dos diagonales cruzadas de Φ (que existen por la hipótesis) sin pérdida de generalidad, supongamos

$$0 \leq i < j < n, \quad 0 \leq r < s < n, \quad i < r;$$

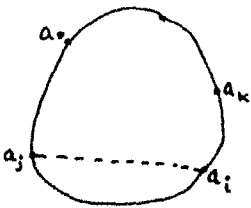


Por ser $\overline{a_i a_j}$ y $\overline{a_r a_s}$ diagonales cruzadas tenemos que $i > j$.

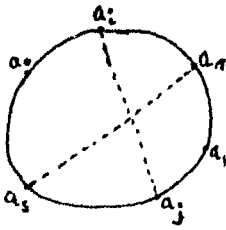


Consideremos la diagonal $\overline{a_i a_j}$.

Si $j \leq k$ entonces $\overline{a_i a_j}$ une dos vértices de α y por lo tanto α no es inducida.



Si $i \geq k$, se tiene entonces que α es una parte esencial del ciclo $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_i, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n = a_0)$ de longitud $< n$, así que por la hipótesis de inducción α no es inducida.



Por lo tanto podemos suponer que $0 \leq i < k < j < n$.

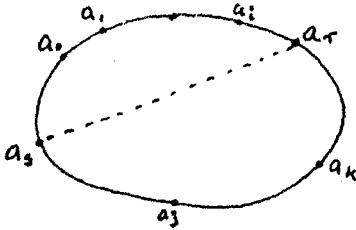
Aplicando los mismos argumentos a la diagonal

$\overline{a_r a_s}$, y como $\overline{a_r a_s}$ y $\overline{a_i a_j}$ se cruzan tenemos que:

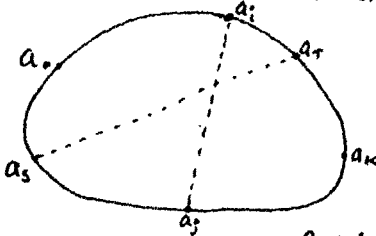
$$0 \leq i < r < k < j < s < n.$$

Ahora denotemos $\alpha' = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ y $\alpha'' = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_k)$.

Afirmamos que, o bien α' es parte esencial del ciclo $(a_0, a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n, a_0)$,



O bien α'' es parte esencial del ciclo $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j, a_i)$.



En efecto tenemos que:

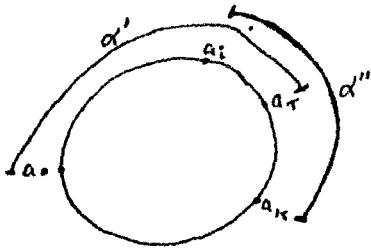
$$l(\alpha') + l(\alpha'') \geq k + 1$$

$$l(\alpha') + l(\alpha'') \geq k + 1 > (n - k) + 2 >$$

$$(n - k) + (j - i) + 2 = (n - i + 1) + (j - k + 1),$$

Por tanto o bien $l(\alpha') > n - i + 1$

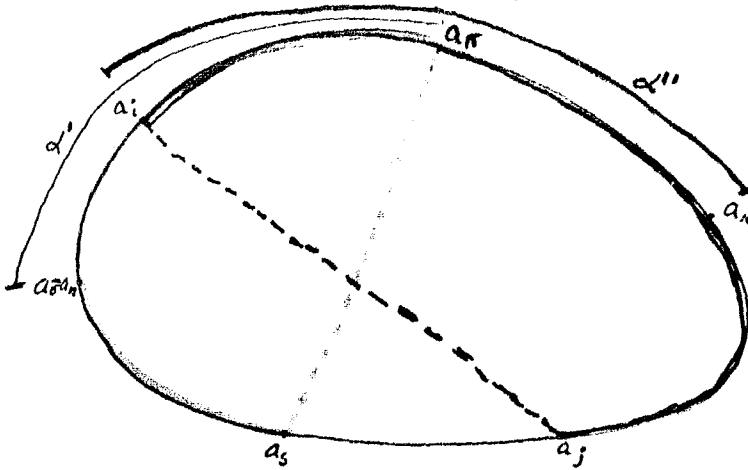
o bien $l(\alpha'') > j - k + 1$



Lo que prueba que α' es una parte esencial del ciclo

$(a_n = a_0, a_1, \dots, a_r, a_s, \dots, a_0)$ ó que α'' es una parte esencial del ciclo

$(a_i, a_{i+1}, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_j, a_i)$

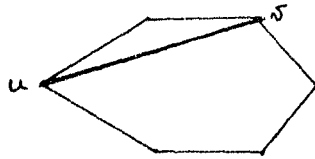
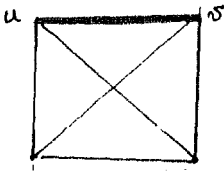


Y por hipótesis de inducción tenemos que al menos una entre α' y α'' no es una trayectoria inducida.

Por lo tanto (a_s, a_1, \dots, a_k) no es una trayectoria inducida. ■

§ VI. UNA CARACTERIZACIÓN DE GRÁFICAS TOLOMEICAS

Sea F una subgráfica de G , y sea u, v vértices distintos de F adyacentes en G . La arista \overline{uv} de G se llama cuerda triangular de F (en G), si existe un vértice x de F distinto de u y de v tal que ambas aristas \overline{xu} y \overline{xv} esten en $A(F)$.



Se dice que F es una subgráfica fuerte de G si contiene todas sus cuerdas triangulares.

Claramente una subgráfica inducida de G es fuerte en G .

Claramente toda uv -tray geodésica es una tray fuerte.

Una subgráfica conexa F de G tal que $d_F(u, v) = d_G(u, v)$ para cada $u, v \in F$, es llamada una subgráfica métrica.

(e. d. F es subgráfica métrica de $G \iff F$ es conexa y $(V(F), d_F)$ es un subespacio métrico de $(V(G), d_G)$).

Así, una gráfica conexa tiene distancia hereditaria si y sólo si toda subgráfica de G es una subgráfica métrica de G .

Ya hemos probado que G tiene distancia hereditaria si y sólo si toda uv -tray inducida es una uv -tray geodésica ver teorema (32.2)

Para la demostración del teorema (35) son necesarios los siguientes dos teoremas, basados en los conjuntos de corte relativamente mínimos de una gráfica.

- 33) TEOREMA (DIRAC). Una gráfica G es triangulada si y sólo si todo conjunto de corte relativo mínimo de G induce una gráfica completa [5].

Sean u, v vértices de una gráfica conexa G , $n = d_G(u, v)$ para cada $k = 1, 2, \dots, n - 1$ sea :

$L_k(u, v) = \{ x \in V(G) : d_G(u, x) = k, d_G(x, v) = n - k \}$, los conjuntos $L_k(u, v)$ serán llamados uv-niveles.

34) TEOREMA : (Una caracterización de gráficas con distancia hereditaria).

Sea G una gráfica conexa, las siguientes proposiciones son equivalentes.

- 1) G tiene distancia hereditaria.
- 2) Para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ todo uv -nivel es un uv -corte.
- 3) Para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ todo uv -corte relativamente mínimo es un uv -nivel.

Demostración: 1) \Rightarrow 2).

Sean $u, v \in V(G)$ y sea $S \subseteq V(G)$, tal que S no separa u de v en G .

(e. d. en $G-S$ u y v están conectados). Sea α una uv -trayectoria en $G-S$ de longitud mínima; por ser α una trayectoria de longitud mínima α no tiene diagonales (e. d. α es una uv -trayectoria inducida), y ya que por hipótesis G tiene (d. h) se sigue que α es una uv -trayectoria geodésica.

Por tanto $d_G(u, v) = n = \ell(\alpha)$, α tiene puntos de todos los uv -niveles; de donde S no es un uv -nivel. \square

1) \Rightarrow 3).

Sea $u, v \in V(G)$ y sea S un uv -corte relativo mínimo de G .

*OBSERVACION: ya que S es un uv -corte mínimo existe al menos una uv -trayectoria que tiene exactamente un punto en común con S .

Ya que : en el caso de que $|S| = 1$ claramente toda uv -trayectoria pasa por S donde $S = \{s\}$ y en este caso también la observación se cumple y así podemos suponer $|S| \geq 2$.

$L \in L_k(u, v)$ claramente $(u, \alpha, a_{k+1}) \cup (a_{k+1}, w)$ es una uw -trayectoria mínima ; de donde $d_G(u, w) = k$ y análogamente $d_G(w, v) = n-k$ para cada $w \in L$.

Por (2) L es un (a_{k-1}, a_{k+1}) corte y por tanto L es un uv -corte.

Si L no fuera un uv -corte, existiría α' una uv -trayectoria en $G-L$, además por construcción de L : $L \cap \alpha = \{a_k\}$ y $(a_{k-1}, \alpha, u) \cup \alpha' \cup (v, \alpha, a_{k+1})$ es un $a_{k-1}a_{k+1}$ -camino en $G-L$ contradicción.

Por tanto L es también uv -corte.

Así que por la minimalidad de S tenemos que $L = S$.

*Finalmente observemos que : ningún uv -corte puede estar proplamente contenido en un uv -nivel:

Sea S un uv -corte. Sabemos que existen uv -trayectorias geodésicas que tienen exactamente un punto de S . Sea α una uv -trayectoria geodésica, $\alpha = (u, a_1, a_2, \dots, a_m, v)$. Sea a_k el único punto de α en S ; si S está proplamente contenido en un uv -nivel, como $S \cap \alpha = a_k$ se tendría $S \not\subseteq L_k(u, v)$ y por tanto existiría $w \in L_k(u, v)$ y $w \notin S$.



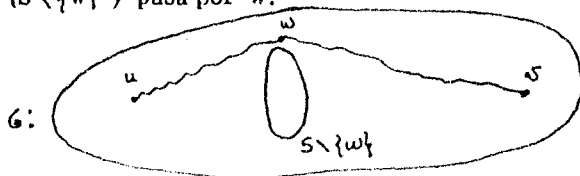
Sea T_1 una uw -trayectoria geodésica, entonces :

$$d_G(u, w) = k = \ell(T_1) \text{ y } T_1 \cap S = \emptyset.$$

Sea T_2 una wv -trayectoria geodésica, entonces :

$$d_G(w, v) = n-k = \ell(T_2) \text{ y } T_2 \cap S = \emptyset.$$

Sea $w \in S$. $G - (S - \{w\})$ no separa u de v (ya que S es uv -corte mínimo) en $S \setminus \{w\}$, existen uv -trayectorias y toda uv -trayectoria en $G - (S \setminus \{w\})$ pasa por w .



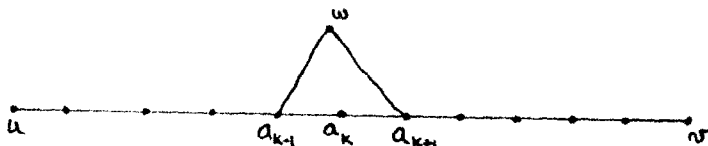
Sea $\alpha = (u, a_1, a_2, \dots, a_m, v)$ una uv -trayectoria que tienen exactamente un punto en común con S y es de longitud mínima, entonces α no tiene diagonales por ser de longitud mínima (e.d. α es una uv -trayectoria inducida). De donde, como G tiene (d.h), α es una uv -trayectoria geodésica.

Sea a_k el único punto de $\alpha \cap S$ y consideremos el conjunto:

$$L = L_1(a_{k-1}, a_{k+1}).$$

Como $d(a_{k-1}, a_{k+1}) \geq 2$, $L = L_1(a_{k-1}, a_{k+1})$ es el conjunto de puntos de G que están a distancia 1 de a_{k-1} y a distancia 1 de a_{k+1} .

*Observemos que $L \subseteq S$ y $L \subseteq L_k(u, v)$



Pues: si existe $w \in L$ tal que $w \notin S$ entonces

$(u, \alpha, a_{k-1}) \cup (a_{k-1}, w) \cup (w, a_{k+1}) \cup (a_{k+1}, \alpha, v)$ será una uv -trayectoria en $G \setminus S$, lo que es una contradicción.

De donde $w \in S$ y por tanto $L \subseteq S$.

Por tanto existe uv -trayectoria en $G - S$, contradicción .

Así que ningún uv -corte está contenido propiamente en un uv -nivel.

Pero hemos visto que L es un uv -corte y $L \subseteq L_k(u, v)$, de donde

$L = L_k(u, v)$ y como se probó que $L = S$, entonces $S = L_k(u, v)$.

(e. d. todo uv -conjunto de corte relativamente mínimo es un uv -nivel). \square

2) \Rightarrow 1) Supongamos que vale (2) y que G no tiene d. h. (e. d. que existen trayectorias inducidas que no son trayectorias geodésicas).

Sea α una trayectoria inducida de longitud mínima tal que no sea una trayectoria geodésica. Sean u, v los puntos extremos de α , como α es una uv -trayectoria inducida entonces $d_G(u, v) \geq 2$ y por tanto existe un uv -nivel: así que por (2) existe un uv -corte.

Como $L_k(u, v)$ es un uv -corte y α es una trayectoria de u a v entonces

$L_k(u, v) \cap \alpha \neq \emptyset$. Ahora si $x \in L_k(u, v) \cap \alpha$ entonces $d_G(u, x) = k$ y

$d_G(x, v) = n - k$ ($d_G(u, v) = n - k \in \{1, \dots, n-1\}$) pero:

$$d_G(u, x) = \mathcal{L}(u, \alpha, x) = k$$

$$d_G(x, v) = \mathcal{L}(x, \alpha, v) = n - k$$

$\mathcal{L}(\alpha) = n = d_G(u, v) \quad \nabla$ (contradiciendo la selección de α).

Por lo tanto $L_k(u, v) \cap \alpha = \emptyset$, pero entonces $L_k(u, v)$ no sería un uv -corte relativo, contradiciendo 2). \square

3) \Rightarrow 1). Supongamos G no tiene d.h. entonces existen trayectorias inducidas que no son trayectorias geodésicas.

Sea α una trayectoria inducida de longitud mínima tal que no sea trayectoria geodésica: Sean u y v los extremos de α , como α no es una uv -trayectoria inducida se sigue $d_G(u, v) \geq 2$.

Sea S' un uv -corte relativo mínimo entonces por hipótesis (3) S' es un uv -nivel, además por ser S' un uv -corte tenemos que existe

$z \in (S' \cap \alpha) \setminus \{u, v\}$, así que $l(u, \alpha, z) < l(\alpha)$ y por la selección de α se sigue que $l(u, \alpha, z) = d(u, z) = k$ y

$$l(z, \alpha, v) = d(z, v) = n - k \text{ donde } n = d(u, v) \text{ pero entonces}$$

$$\text{se sigue } l(\alpha) = l(u, \alpha, z) + l(z, \alpha, v) = n = d(u, v) \quad \nabla$$

(como α no es geodésica, su longitud es mayor que la distancia entre sus extremos). ■

35) TEOREMA: Sea G una gráfica conexa; las siguientes proposiciones son equivalentes.

- 1) G es tolomeica.
- 2) Toda trayectoria fuerte de G es una trayectoria geodésica.
- 3) G es triangulada y tiene d. h. .
- 4) Para todo par de vértices u, v de G todo uv -corte relativamente mínimo es un uv -nivel e induce una subgráfica completa.

Demostración: 1) \Rightarrow 2)

Supongamos que existen trayectorias fuertes de G que no son trayectorias geodésicas; sea $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ una trayectoria fuerte de longitud mínima que no es trayectoria geodésica.

Supongamos $k = d(a_0, a_n)$; por la elección de α , cada subtrayectoria de α es una tray. geodésica, de donde tenemos (a_1, \dots, a_n) es una a_1, a_n -tray. geodésica por lo tanto, $d(a_1, a_n) = n-1$ también (a_0, \dots, a_{n-1}) es una tray. geodésica y por tanto $d(a_0, a_{n-1}) = n-1$ se sigue que $n = k + 1$ o $n = k + 2$: ya que como α no es una a_0, a_n -tray. geodésica se tiene $d(a_0, a_n) < l(\alpha) = n$ de donde $d(a_0, a_n) \leq n-1$.

Si $d(a_0, a_n) = n-1$ ya acabamos .

En caso contrario $d(a_0, a_n) = n-2$, pues si ésto no sucediera se tendría $d(a_0, a_n) \leq n-3$ y tomando T una $a_0 a_n$ -tray geodésica $T = (a_0 = u_0, u_1, \dots, u_k = a_n)$ tendríamos que $\zeta = (a_0, u_1, \dots, u_k, a_{n-1})$ es un $a_0 a_{n-1}$ camino de longitud a lo más $n-3$, por lo tanto $d(a_0, a_{n-1}) \leq n-2 \forall (d(a_0, a_{n-1}) = n-1)$.

Por lo tanto $n = k + 1$ o $n = k + 2$.

Consideremos ahora los vértices a_0, a_{n-1}, a_n, a_1 .

como a_0 ady a_n (notemos que $n \geq 3$) entonces a_0, a_{n-1}, a_n, a_1 son puntos distintos.

$$\begin{matrix} a_0 & & a_n \\ \bullet & & \bullet \end{matrix} \quad d(a_0, a_{n-1})d(a_1, a_n) = (n-1)(n-1)$$

$$d(a_0, a_n)d(a_1, a_{n-1}) \leq (n-1)(n-2)$$

$$\begin{matrix} a_1 & & a_{n-1} \\ \bullet & & \bullet \end{matrix} \quad d(a_0, a_1)d(a_n, a_{n-1}) = 1 \cdot 1 = 1$$

por la desigualdad tolemeica tenemos que:

$$d(a_0, a_{n-1})d(a_1, a_n) \leq d(a_0, a_n)d(a_1, a_{n-1}) + d(a_0, a_1)d(a_n, a_{n-1})$$

$$\text{por lo tanto} \quad (n-1)(n-1) \leq (n-1)(n-2) + 1$$

$$\cancel{n^2} - 2n + \cancel{1} \leq \cancel{n^2} - 3n + 2 + \cancel{1}$$

$$- 2n + 3n \leq 2$$

$$n \leq 2. \text{ pero } n \geq 3 \quad \forall.$$

Por lo tanto la suposición de que existen trayectorias fuertes de G que no son tray. geodésicas es insostenible con la hipótesis de que G es tolemeica de donde 1) \Rightarrow 2). \square

2) \Rightarrow 3).

Supongamos que toda trayectoria fuerte es tray geodésica y por tanto inducida.

Sabemos que toda tray inducida es fuerte de donde en este caso, una trayectoria es inducida si y sólo si es fuerte.

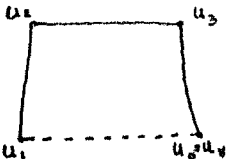
Por hipótesis toda tray fuerte es tray geodésica. Por tanto toda tray inducida es tray geodésica, de donde G tiene distancia hereditaria.

Sea $\alpha = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ un ciclo de longitud ≥ 4 .

Si $\ell(\alpha) = 4$, $\alpha = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$ entonces

(u_1, u_2, u_3, u_0) no es una $u_1 u_3$ -tray fuerte; si lo fuera,

por hipótesis sería una tray geodésica, pero $d(u_1, u_3) = 1$.



Por tanto (u_1, u_2, u_3, u_0) tiene alguna diagonal triangular. Por lo tanto α tiene una diagonal.

Si $\ell(\alpha) \geq 5$, $\alpha = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ entonces (u_2, \dots, u_n, u_0) no es una $u_2 u_0$ -tray geodésica, luego no es fuerte por lo que tiene alguna diagonal triangular. Por tanto α tiene alguna diagonal. \square

3) \Rightarrow 4).

Se sigue inmediatamente de los teoremas 33 y 34

4) \Rightarrow 1).

Sea G una gráfica conexa que satisface (4) y sea $\omega = \{u_1, \dots, u_4\}$ un conjunto de cuatro vértices no necesariamente distintos de G .

Escribiremos por comodidad $d_{ij} = d(u_i, u_j)$ y sea $d(\omega) = \sum d_{ij}$. ($1 \leq i < j \leq 4$).

Ver que ω satisface la desigualdad tolemeica, significa ver que todas las siguientes desigualdades se cumplen:

$$d_{12} d_{34} \leq d_{13} d_{24} + d_{14} d_{23} \quad (1)$$

$$d_{13} d_{24} \leq d_{12} d_{34} + d_{14} d_{23} \quad (2)$$

$$d_{14} d_{23} \leq d_{12} d_{34} + d_{13} d_{24} \quad (3)$$

Para probar (1) es suficiente demostrar que cualquier conjunto de 4 vértices de G satisface la desigualdad tolemeica. La demostración se hará por inducción sobre $d(\omega)$.

Consideremos un conjunto fijo $\omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y supongamos que cada conjunto ω' de cuatro vértices de G tal que $d(\omega') < d(\omega)$ satisface la desigualdad tolemeica.

Observamos primero que si $\langle \omega \rangle = k_4$ o si dos de los cuatro (o más) vértices coinciden, entonces ω trivialmente satisface la desigualdad tolemeica.

Supondremos pues que ninguno de estos dos casos sucede.

Sea S un conjunto de vértices de G mínimo con respecto a la propiedad de que $\omega - S$ no está totalmente contenido en una misma componente de $G \setminus S$ (por la elección de ω un tal conjunto S existe).

Si u y v son elementos de $\omega - S$ separados por S entonces claramente S es un uv -corte relativo mínimo, entonces por (4) S es un uv -nivel e induce una subgráfica completa de G .

Supongamos ahora que S contiene exactamente dos vértices de ω , digamos u_1, u_2 , así que u_1 y u_2 son adyacentes $d_{i\bar{i}} = d_{\bar{i}i}$ ($i = 3, 4$) pues $\{u_1, u_2\} \subseteq S$ y S es uv -nivel e. d. $S = L_k(u, v)$.

Por lo tanto $d(u, u_1) = d(u, u_2) = k$ y

$$d(u_1, v) = d(u_2, v) = n - k \text{ donde } n = d(u, v)$$

y $d_{3\bar{1}} + d_{\bar{1}4} = d_{34}$. Pues ($i = 1, 2$) $u = u_3, v = u_4$.

Consecuentemente ω satisface la desigualdad tolemeica.

$$(1) \quad d_{12} d_{34} \leq d_{13} d_{24} + d_{14} d_{23} \quad (d_{12} = 1)$$

$$d_{34} \leq d_{13} d_{24} + d_{14} d_{23}$$

$$= d_{13} d_{14} + d_{14} d_{13}$$

$$= d_{13} (2d_{14})$$

$$d_{13} + d_{14} \leq 2 d_{13} d_{14} \quad \text{pues } d_{ij} \in \mathbb{N}_+$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & d_{13}d_{24} \leq d_{12}d_{34} + d_{14}d_{23} \\
 \Leftrightarrow & d_{13}d_{14} \leq d_{12}(d_{31} + d_{14}) + d_{14}d_{13} \\
 \Leftrightarrow & d_{13}d_{14} \leq d_{12}d_{31} + d_{12}d_{14} + d_{14}d_{13} \\
 (3) \quad & \frac{d_{14}d_{23} \leq d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24}}{\Leftrightarrow} \\
 & d_{14}d_{13} \leq d_{12}(d_{13} + d_{14}) + d_{13}d_{14}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos suponer que S contiene a lo más un punto de \mathcal{W} .

Sea v tal vértice, si existe. (si no existe un punto de S y de \mathcal{W} escogemos v cualquier punto de S y escribimos $d_i = d_G(u_i, v)$ para cada $u_i \in \mathcal{W}$).

Nótese que si u_i, u_j son elementos de \mathcal{W} no contenidos en la misma componente de $G \setminus S$, entonces por (4)

$d_{ij} = d_i + d_j$ (pues para toda u_i, u_j en distintas componentes de $G \setminus S$, S es un $u_i u_j$ separador mínimo y por hipótesis es también un $u_i u_j$ -nivel).

Para terminar la demostración consideremos dos casos. la hipótesis de inducción se usará sólo en el segundo caso.

Caso 1.- Una componente C de $G \setminus S$ contiene exactamente dos elementos de \mathcal{W} .

Ya que la etiquetación no es importante, podemos suponer que $u_1, u_2 \in C$.

Así por (4) $d_{ij} = d_i + d_j$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) (5)

sustituyendo (5) y reagrupando en (1) y (3) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= d_i + d_j \quad (i = 1, 2, j = 3, 4) \dots (5) \\
 d_{12} d_{34} &\leq d_{13} d_{24} + d_{14} d_{23} \dots (1) \\
 d_{12} d_{34} &\leq (d_1 + d_3)(d_2 + d_4) + (d_1 + d_4)(d_2 + d_3) \\
 &= d_1 d_2 + d_1 d_4 + d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_1 d_2 + d_1 d_3 \\
 &\quad + d_2 d_4 + d_3 d_4 \\
 &= (d_1 + d_2)(d_3 + d_4) + d_1 d_3 + d_3 d_4 + d_1 d_2 + d_3 d_4 \\
 &= (d_1 + d_2)(d_3 + d_4) + 2(d_1 d_2 + d_3 d_4)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(1') \dots d_{12} d_{34} \leq (d_1 + d_2)(d_3 + d_4) + 2(d_1 d_2 + d_3 d_4)$$

$$(2) \quad d_{13} d_{24} \leq d_{12} d_{34} + d_{14} d_{23}$$

\Leftrightarrow

$$d_{12} d_{34} \geq d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 d_{12} d_{34} &\geq (d_1 + d_3)(d_2 + d_4) - (d_1 + d_4)(d_2 + d_3) \\
 &= \cancel{d_1 d_2} + d_1 d_4 + d_2 d_3 + \cancel{d_3 d_4} - \cancel{d_1 d_2} - d_1 d_3 \\
 &\quad - d_2 d_4 - \cancel{d_3 d_4} \\
 &= (d_1 - d_2)(d_4 - d_3)
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$d_{12} d_{34} \geq (d_1 - d_2)(d_4 - d_3) \dots (2')$$

$$(3) \dots d_{14} d_{23} \leq d_{12} d_{34} + d_{13} d_{24}$$

\Leftrightarrow

$$d_{12} d_{34} \geq d_{14} d_{23} - d_{13} d_{24}$$

\Leftrightarrow

$$d_{12} d_{34} \geq (d_1 + d_4)(d_2 + d_3) - (d_1 + d_3)(d_2 + d_4)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 d_{12} d_{34} &\geq d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_4 + \cancel{d_3 d_4} - \cancel{d_1 d_2} - d_1 d_4 \\
 &\quad - d_2 d_3 - \cancel{d_3 d_4}
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$d_{12} d_{34} \geq (d_1 - d_2)(d_3 - d_4) \dots (3')$$

Ahora bien, para probar que \mathcal{W} satisface (1), (2), (3) es suficiente probar que \mathcal{W} satisface (1'), (2'), (3') hemos visto que:

$$(1') \text{ se cumple pues: } d_{12} = d(u_1, u_2), d_{34} = d(u_3, u_4) \\ d_1 = d(u_1, v).$$

Por lo tanto $d_{12} \leq d_1 + d_2$ y $d_{34} \leq d_3 + d_4$ (desigualdad del triángulo).

Por tanto:

$$d_{12} d_{34} \leq (d_1 + d_2)(d_3 + d_4) \leq (d_1 + d_2)(d_3 + d_4) + 2(d_1 d_2 + d_3 d_4).$$

$$(2'): (d_1 - d_2)(d_4 - d_3) \leq d_{12} d_{34}$$

$$d_1 = d(u_1, v) \leq d(u_1, u_2) + d(u_2, v)$$

Por tanto:

$$d_1 \leq d_{12} + d_2, \quad d_{12} \geq d_1 - d_2 \quad \text{análogamente}$$

$$d_{34} \geq d_4 - d_3$$

Por lo tanto (2') se satisface.

$$(3'): d_{12} d_{34} \geq (d_1 - d_2)(d_3 - d_4)$$

$$d_{34} \geq d_3 - d_4$$

pues $d_3 \leq d_{34} + d_4$ por la desigualdad del

triángulo.

Caso 2. - Una componente C de $G \setminus S$ contiene exactamente un vértice de W .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_1 \in C$.

$$\text{Por (4)} \quad d_{1j} = d_1 + d_j \quad (j = 2, 3, 4).$$

(ya que S es un $u_1 u_j$ -nivel para toda $j \in \{2, 3, 4\}$)

Claramente: $d(\{v, u_2, u_3, u_4\}) \leq d(W)$ (pues $v \in S$ y S es un $u_1 u_j$ -separador mínimo).

Así, por hipótesis de inducción el conjunto $\{v, u_2, u_3, u_4\}$ satisface la desigualdad tolomeica.

En particular, por (1):

$$d_2 d_{34} \leq d_3 d_{24} + d_4 d_{23} \dots \dots \dots (7).$$

Por otra parte, por la desigualdad del triángulo:

$$d_{34} \leq d_{24} + d_{23} \dots \dots \dots (8)$$

Ahora, multiplicando ambos lados de (1) por d_1 y sumando la desigualdad resultante a (7) obtenemos:

$$\begin{aligned} d_1 d_{34} &\leq d_1 (d_{24} + d_{23}) \\ (d_2 + d_1) d_{34} &\leq d_1 (d_{24} + d_{23}) + d_3 d_{24} + d_4 d_{23} \\ &= (d_1 + d_3) d_{24} + (d_1 + d_4) d_{23} \\ (d_2 + d_1) d_{34} &\leq (d_1 + d_3) d_{24} + (d_1 + d_4) d_{23} \end{aligned}$$

Y por (6) sabemos que $d_{1j} = d_1 + d_j$ para toda $j \in \{2, 3, 4\}$

Por lo tanto:

$$d_{12} d_{34} \leq d_{13} d_{24} + d_{14} d_{23} \dots \dots \dots (3)$$

Por (2), en $\{v, u_1, u_3, u_4\}$, obtenemos

$$d_3 d_{24} \leq d_2 d_{34} + d_4 d_{23} \dots \dots \dots (9)$$

Por la desigualdad del triángulo:

$$d_{24} \leq d_{34} + d_{23} \dots \dots \dots (10)$$

Multiplicando (10) por d_1 en cada lado de la desigualdad y sumando la desigualdad resultante con (9) obtenemos:

$$d_3 d_{24} \leq d_2 d_{34} + d_4 d_{23}$$

$$d_1 d_{24} \leq d_1 d_{34} + d_1 d_{23}$$

$$(d_3 + d_1) d_{24} \leq d_{34} (d_1 + d_2) + d_{23} (d_1 + d_4) \text{ y por (6)}$$

se sigue

$$d_{13} d_{24} \leq d_{12} d_{34} + d_{14} d_{23} \dots \dots \dots (2)$$

Por (3), en $\{v, u_2, u_3, u_4\}$, obtenemos:

$$d_4 d_{23} \leq d_2 d_{34} + d_3 d_{24} \dots \dots \dots (11)$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$d_{33} \leq d_{34} + d_{24} \text{ y multiplicando cada lado por } d_1$$

$$d_1 d_{23} \leq d_1 d_{34} + d_1 d_{24} \dots \dots \dots (12)$$

Sumando (12) y (11) obtenemos:

$$(d_4 + d_1) d_{23} \leq (d_2 + d_1) d_{34} + (d_3 + d_1) d_{24} \text{ y por (6)}$$

$$d_{14} d_{23} \leq d_{12} d_{34} + d_{13} d_{24} \dots \dots \dots (3)$$

Por lo tanto Ω satisface las desigualdades tolemaicas

(1), (2) y (3). ■

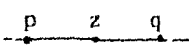
- 36) COROLARIO: Una gráfica conexa G es tolomeica si y sólo si cada componente conexa fuerte de G es métrica.
- 37) COROLARIO: Cada componente conexa fuerte de una gráfica tolomeica es tolomeica. En particular, cada subgráfica conexa inducida de una tolomeica es una gráfica tolomeica.
- 38) TEOREMA: Una gráfica conexa G es tolomeica si y sólo si para cada par de distintos clanes no ajenos P y Q de G , $P \cap Q$ separa $P-Q$ y $Q-P$.

Demostración: \Rightarrow)

Sea G una gráfica tolomeica, P y Q clanes distintos no ajenos de G , escojamos vértices no adyacentes $p \in P$ y $q \in Q$, y supongamos (para llegar a una contradicción) que $P \cap Q$ no separa P y Q .

Como G tiene distancia hereditaria entonces

$$d_{G \setminus (P \cap Q)}(p, q) = d_G(p, q) = 2$$

(pues $P \cap Q \neq \emptyset$, $z \in \{P \cap Q\}$  (p, z, q) es una pq -tray. geodésica).

Como $d_{G \setminus (P \cap Q)}(p, q) = 2$ existe $T = (p, v, q)$ una pq -tray. geodésica en $G \setminus (P \cap Q)$.

Por lo tanto existe $v \in \{G \setminus (P \cap Q)\}$. digamos $v \notin P$ tal que v es adyacente a ambos p y q en G .

Como $v \notin P$ (P es un clan) existe $u \in P$ tal que $u \text{ ady}_G v$, en particular $u \notin p$ y $u \notin q$. Ahora la trayectoria (u, p, v, q) es una trayectoria fuerte que no es tray. geodésica (pues $u \text{ ady}_G v$ y $p \text{ ady}_G q$ entonces (u, p, v, q) no tiene diagonales triangulares) lo cual contradice el teorema (35.2).

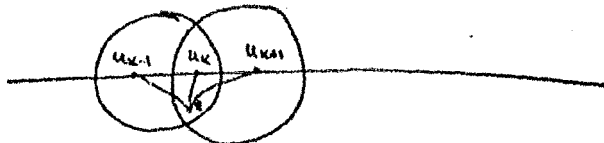
Por lo tanto $P \cap Q$ separa $P \setminus Q$ de $Q \setminus P$. \square

\Leftarrow). Supongamos ahora que G es una gráfica conexa que satisface la hipótesis del teorema.

Sean u y v dos vértices no adyacentes de G y sea

$$1 \leq k \leq d_G(u, v) - 1$$

Sea $T = (u_0, u_1, \dots, u_{d_G(u,v)})$ una uv -tray geodésica, P un clan que contiene a $\overline{u_{k-1} u_k}$ y Q un clan que contiene a $\overline{u_k u_{k+1}}$. Ahora $P \cap Q \subseteq L_k(u, v)$, sea $z \in \{P \cap Q\}$ entonces:



$$d(z, u) = d(u, u_k) = k \text{ pues } z \text{ ady}_G u_{k-1}$$

$$d(z, v) = d(u_k, v) = n - k \text{ donde } n = d_G(u, v) \text{ pues } z \text{ es adyacente a } u_{k+1}.$$

Por lo tanto $\{P \cap Q\} \in L_{\kappa}(u, v)$. Como $P \cap Q$ separa $P-Q$ de $Q-P$ también separa u de v . (pues $\{P \cap Q\} \in L_{\kappa}(u, v)$ de donde $P \cap Q$ separa $u_{\kappa-1}$ de u_{κ} luego separa u de v).

De donde $P \cap Q = L_{\kappa}(u, v)$ [pues si existiera $z \in \{L_{\kappa}(u, v) - \{P \cap Q\}\}$, como $\{P \cap Q\} \in L_{\kappa}(u, v)$ entonces una uz -tray. geodésica esta en $G \setminus \{P \cap Q\}$ y una zv -tray. geodésica está en $G \setminus \{P \cap Q\}$, por lo que $P \cap Q$ no separaría u de v].

Se sigue que todo uv -nivel de G es un uv -corte que induce una subgráfica completa y se sigue de los teoremas 34

y 35 que G es una gráfica tolemeica. ■

§ VII. LA ESTRUCTURA DE CLANES DE LAS GRÁFICAS TOLOMEICAS

Sea G una gráfica, consideremos \mathcal{B} el álgebra booleana de subconjuntos de $V(G)$ generada por los clanes de G , (con las operaciones de " \cup " y " \cap ").

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcup_{i \in J} \left(\bigcap_{u \in S_i} V(K_i) \right) : \# J \text{ finito} \right\}, S_j \text{ es una familia finita de clanes de } G \}.$$

" Las uniones finitas de las intersecciones finitas de clanes de G ".

- 39) DEFINICION: Sea G una gráfica, un elemento mínimo (con respecto a la inclusión), no vacío del algebra booleana de subconjuntos de $V(G)$ generada por los clanes de G , es llamado un átomo de G .

Es claro, que los átomos de G son una partición de $V(G)$.

Los vértices u, v de G están en el mismo átomo de G con tal que: ó bien $u = v$ ó $\vec{uv} \in \Lambda(G)$, y para cada vértice x de G distinto de u y v , $\vec{xu} \in \Lambda(G)$ si y sólo si $\vec{xv} \in \Lambda(G)$.

- 40) DEFINICION: Si un átomo A es intersección de por lo menos dos clanes de G , diremos que A es un átomo de intersecciones de G .

41) DEFINICION: Un subconjunto no vacío de un átomo de una gráfica G es llamado un subátomo de G .

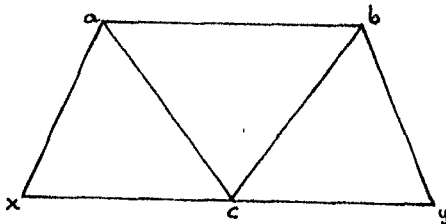
42) Sean G_1 y G_2 gráficas tales que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, y sean S_1 y S_2 subátomos de G_1 , G_2 respectivamente que tienen la misma cardinalidad. Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una correspondencia uno a uno. Considere la gráfica G obtenida de G_1 y G_2 por identificación de S_1 con S_2 bajo f .

Decimos que G (o cualquier gráfica isomorfa a G) se obtiene por identificación subatómica de G_1 y G_2 . (G sólo depende de la elección de S_1 y S_2 y no de la elección de f).

Tenemos el siguiente teorema:

- 43) G es tolomeica \Leftrightarrow (G no tiene ciclos inducidos de longitud ≥ 4 y $L \subset G$ con $H \cong L \Rightarrow \varphi(a)$ ady $\varphi(y)$ ó $\varphi(b)$ ady $\varphi(x)$).

H:



Se sigue del teorema de la página (90) inciso 3 y usando el teorema de la página (73) usando la equivalencia 1 \Leftrightarrow 4.

- 44) TEOREMA. Sea G obtenida de G_1 y G_2 por identificación subatómica, entonces G es tolomeica \Leftrightarrow G_1 y G_2 son tolomeicas.

Demostración. \Leftarrow) Supongamos que G_1 y G_2 son tolomeicas.

Por demostrar que G satisface las hipótesis del teorema anterior.

- 1º) G no tiene ciclos inducidos de longitud ≥ 4 , pues si C es un ciclo inducido en G de longitud ≥ 4 , consti -

deremos $u_0, u_1, u_2, u_3 \in V(C)$.

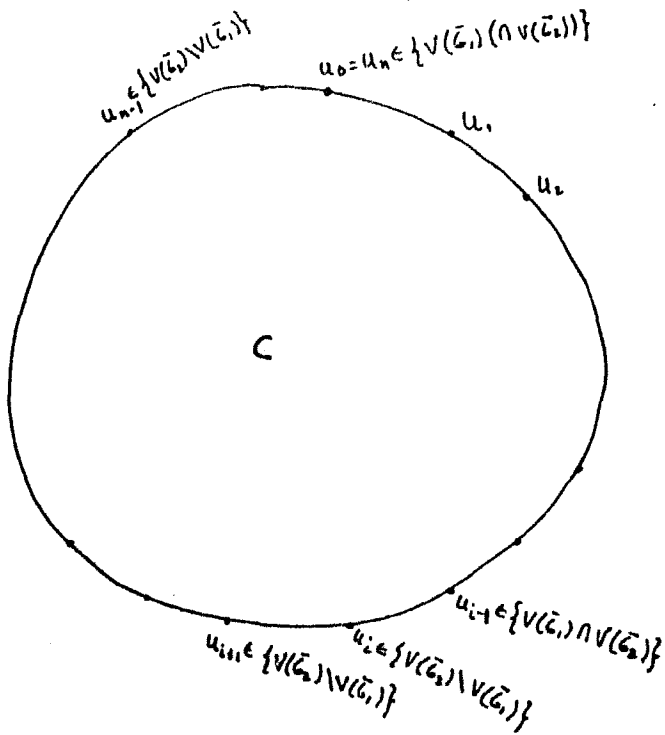
$u_0 \in V(G_1)$ ó $u_0 \in V(G_2)$, sin perder generalidad

supongamos $u_0 \in V(G_1)$; por otra parte $C \not\subset G_1$, ya que

G_1 es tolomeica (usando el teorema anterior),

así que podemos tomar $i = \min \{ u_j \in V(C) : u_j \notin V(\bar{G}_1) \}$.

Observemos que $i > 1$ ya que $u_0 \text{ ady}_G u_1$.



Como $u_i \notin V(\bar{G}_1)$ entonces $u_i \in V(\bar{G}_2)$ (e.d. $u_i \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$). como $u_{i-1} \text{ ady}_c u_i$ se sigue que $u_{i-1} \in V(\bar{G}_2)$. Así que $u_{i-1} \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$, por la elección de i .

Por otra parte $u_{i+1} \in V(\bar{G}_2)$ pues $u_i \text{ ady}_c u_{i+1}$ y $u_{i+1} \notin V(\bar{G}_1)$ (porque en caso contrario u_{i-1} y u_{i+1} serfan ambos vértices del mismo subátomo de G_1 , y como los subátomos inducen gráficas completas entonces

$u_{i-1} \text{ ady}_c u_{i+1}$ y $\overline{u_{i-1} u_{i+1}}$ serfa una diagonal en el ciclo inducido $C \text{ } \blacktriangledown$).

Análogamente, $u_j \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\} \Rightarrow u_j = u_{i-1}$ o $u_j \text{ ady } u_{i-1}$.

Como $u_i \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$ tenemos por lo de arriba que,

$$V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2) = \begin{cases} \{u_{i-1}\} \\ 0 \\ \{u_{i-2}, u_{i-1}\} \end{cases} \quad (*)$$

También: $u_k \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$ y $u_{k+1} \text{ ady}_c u_k \Rightarrow u_{k+1} \in V(\bar{G}_2)$ (\ddagger)

Combinando $(*)$ y (\ddagger) tenemos que $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1} \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$

y que $u_n = u_0 \in \{V(\bar{G}_2) \cap V(\bar{G}_1)\}$. Como $i > 1$ entonces $u_0 \neq u_{i-1}$ así que de $(*)$, concluimos que $\{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\} = \{u_{i-2}, u_{i-1}\}$ con $u_0 = u_{i-2}$.

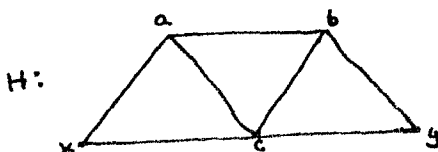
Así que: $u_0 \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$, $u_1 \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$, $u_2 \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$,

$u_3 \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$, \dots , $u_{n-1} \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$.

$\therefore C = (u_0 \dots u_{n-1}, u_n) \subset \bar{G}_2 \cong G_2 \text{ } \blacktriangledown$ (pues G_2 es tolomeica).

De donde si G_1 y G_2 son tolomeicas no es posible que G tenga ciclos inducidos de longitud ≥ 4 .

Ahora demostraremos que si $H \subset G$ entonces en G existe alguna de las dos aristas \vec{ay} o \vec{xb} .



Por reducción al absurdo, supongamos que $H \subset G$ y que $A(G)$ no contiene \vec{ay} ni \vec{xb} . Como se tiene que G_1 y G_2 son toloelcas podemos suponer por el teorema (43) que existen $u, v \in V(H)$ tal que:

$$u \in \{V(\vec{G}_1) \setminus V(\vec{G}_2)\}$$

$$v \in \{V(\vec{G}_2) \setminus V(\vec{G}_1)\}$$

(pues si por ejemplo $H \subset G_1$ entonces $\vec{ay} \in A(G_1)$ o $\vec{bx} \in A(G_1)$ y así al hacer la identificación $\vec{ay} \in A(\vec{G}_1) \subset A(G)$ o $\vec{bx} \in A(\vec{G}_1) \subset A(G)$ y no habría nada que demostrar).

Notar que $u \not\text{ady}_c v$, hay esencialmente tres casos:

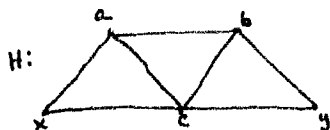
i) $u = a, v = y$

ii) $u = x, v = b$

iii) $u = x, v = y$

pero como i) y ii) son simétricos, basta analizar i) y iii).

i) Por hipótesis, $a \in \{V(\vec{G}_1) \setminus V(\vec{G}_2)\}$, $y \in \{V(\vec{G}_2) \setminus V(\vec{G}_1)\}$



$$\left. \begin{array}{l} c \text{ ady}_c a \Rightarrow c \in V(\vec{G}_1) \\ c \text{ ady}_c y \Rightarrow c \in V(\vec{G}_2) \end{array} \right\} \Rightarrow c \in \{V(\vec{G}_1) \cap V(\vec{G}_2)\}$$

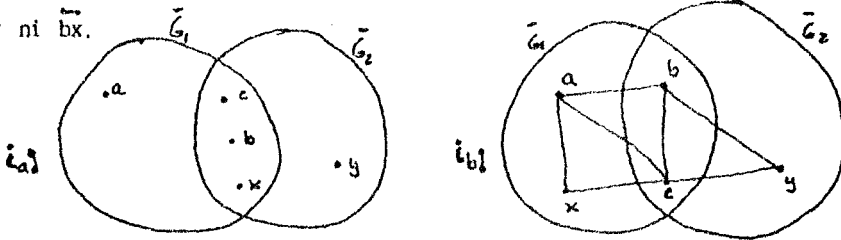
Análogamente: $b \in \{V(\vec{G}_1) \cap V(\vec{G}_2)\}$.

Ahora $x \text{ ady}_c a \Rightarrow x \in V(\vec{G}_1)$ hay dos subcasos.

$$1_a) \quad x \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}; \quad 1_b) \quad x \in \{V(\bar{G}_1) \setminus V(\bar{G}_2)\}.$$

Si 1_a): b, c, x son vértices de G que provienen del subátomo de G_1 , y del subátomo de G_2 que se han identificado al construir G , como los subátomos inducen gráficas completas en particular tenemos b ady x (contradiciendo la hipótesis).

Es decir (1_a) es insostenible con la hipótesis de que G no tiene las aristas $\vec{a}y$ ni $\vec{b}x$.



1_b). Sea C_1 el clan de G que contiene al triángulo axc .

C_2 el clan de G que contiene al triángulo bcy .

Como hemos hecho una identificación subatómica donde los vértices identificados corresponden a los elementos de $\{b, c\}$, entonces $\{b, c\}$ es subátomo (\therefore está contenido en un átomo A_2). $\therefore \{b, c\} \subset A_2$.

Por otra parte $C_1 \cap C_2 = \{c\}$, y como $b \in \{A_2 \setminus (C_1 \cap C_2 \cap A_2)\}$ entonces $(C_1 \cap C_2) \cap A_2 \not\subset A_2$.

(pues como $C_1 \cap C_2 \cap A_2$ es intersección de clanes, se contradice el hecho de que A_2 es átomo de \mathcal{B}).

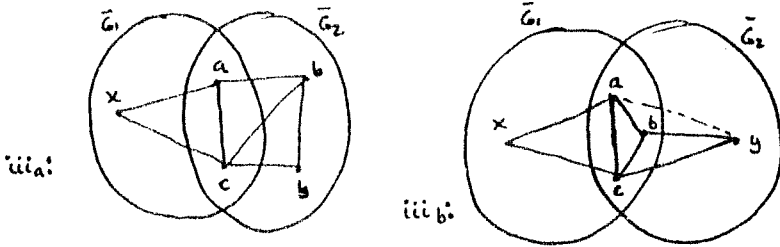
iii) Por hipótesis $x \in \{V(\bar{G}_1) \setminus V(\bar{G}_2)\}$, $y \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$.

Como en los casos anteriores $c \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$, $a \in V(\bar{G}_1)$ y $b \in V(\bar{G}_2)$. Como además a ady b entonces $a \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$ o $b \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$, sin pérdida de generalidad supongamos $a \in \{V(\bar{G}_1) \cap V(\bar{G}_2)\}$.

Tenemos dos subcasos:

iii_a) $b \in \{V(\bar{G}_2) \setminus V(\bar{G}_1)\}$; iii_b) $b \in \{V(\bar{G}_2) \cap V(\bar{G}_1)\}$.

iii_a) Que es (salvo los nombres de los elementos) el caso iii_b) ya analizado.



iii_b) Que es el caso iii_a) ya analizado.

Así, el que G_1 y G_2 sean tolomeicas es insostenible con que una gráfica $H \subset G$ no contenga ninguna de las dos aristas $\tilde{a}y$, $\tilde{b}x$.

$\therefore G_1, G_2$ tolomeicas $\Rightarrow G$ es tolomeica. \square

\Rightarrow). Por demostrar: G tolomeica $\Rightarrow G_1$ y G_2 son tolomeicas.

Por reducci3n al absurdo. Supongamos que G es tolomeica y que G_1 (o G_2) no lo es.

Como G_1 no es tolomeica entonces:

- a) G_1 tiene un ciclo inducido de longitud ≥ 4 . o
- b) existe una gráfrica H contenida en G_1 tal que $a \text{ ady}_{G_1} y$ o $b \text{ ady}_{G_1} x$.

Si a) sea C el ciclo inducido de G_1 , de longitud ≥ 4 , es claro que al hacer una identificaci3n subat3mica C permanecería como ciclo inducido en G (G es tolomeica por hip3tesis).

Si b), como H sería subgráfrica de G que es tolomeica, entonces $a \text{ ady}_G y$ o $b \text{ ady}_G x$. Supongamos, sin perder generalidad que $b \text{ ady}_G x$.

Como G_1 y G_2 son gráfricas ajenas por hip3tesis entonces $b \notin G_2$, $x \notin G_2$.

Así que la única manera de que $x \text{ ady}_G b$ es que $x \in \{G_1 \cap G_2\}$, $b \in \{\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2\}$

pero entonces $\{x, b\}$ es parte de un subátomo de G_1 , $\therefore x \text{ ady}_{G_1} b$.

Así que G_1 (o G_2) no tolomeica es insostenible con la hip3tesis de que G es tolomeica.

$\therefore G$ tolomeica $\Rightarrow G_1$ y G_2 son tolomeicas. ■

- 45) **TEOREMA:** Una gráfica G obtenida mediante una sucesión de identificaciones subatómicas a partir de gráficas completas es tolomeica.

Demostración: Como las gráficas completas son tolomeicas el teorema se deduce inmediatamente del teorema anterior.

Es un hecho notable que también el recíproco de este teorema es cierto, es decir, si una gráfica es tolomeica entonces se puede obtener mediante una sucesión de identificaciones subatómicas a partir de gráficas completas. Para probar este hecho necesitaremos unos cuantos lemas.

- 46) **LEMA 1:** Sea G una gráfica tolomeica y sea $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ $n \geq 2$, una colección finita de clanes distintos de G tal que su intersección, $S = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ($1 \leq i \leq n$) es no vacía, entonces S es un conjunto de corte de G .

El primer Teorema de la página (105) nos dice que G es tolomeica $\Leftrightarrow G$ es semitolomeica y triangulada.

Entonces G semitolomeica implica que G tiene la propiedad $\bar{\mathcal{I}}$ (página 40). La propiedad $\bar{\mathcal{I}}$ es equivalente a la

propiedad \mathcal{L}' : para cada \mathcal{X} colección finita de clanes de G ajenos dos a dos y para cada $Q \in \mathcal{X}$, existe $P \in \mathcal{X}$ tal que $Q \cap P = \emptyset$, (la equivalencia de \mathcal{L} y de \mathcal{L}' se sigue fácilmente observando que un conjunto finito P parcialmente ordenado está totalmente ordenado si y sólo si todo subconjunto finito de P tiene elemento mínimo).

El lema se sigue del teorema de la página (100).

El siguiente lema es un Teorema de A. Hajnal y J. Suranyi, y como aparece también en la página 368 del libro de Claude Berge " Graphs and Hypergraphs " lo enunciaremos sin demostración.

- 47) LEMA 2 (Hajnal y Suranyi). Si G es una gráfica trfangulable entonces cada conjunto de corte mínimo de G induce una subgráfica completa de G .

Combinamos los dos Lemas anteriores para obtener:

48) LEMA 3: Sea G una gráfica tolomeica. Un subconjunto S de $V(G)$ es un conjunto de corte mínimo de G si y sólo si S es un átomo de G (e.d. es una intersección mínima de clanes de G).

Demostración: \Rightarrow) S conjunto de corte mínimo de G y G tolomeica implica que S es un conjunto de corte en G , triangulable, implica que S induce una subgráfica completa de G (teo. 27) de Hajnal - Suranyi).

Sea \mathcal{A} la familia de los clanes que contiene a S , entonces $S \subset \bigcap \mathcal{A}$ y vale la igualdad además:

pues si $S \subsetneq \bigcap \mathcal{A}$ entonces existe $x \in \{\bigcap \mathcal{A}\} \setminus S$. Por otra parte como S es un conjunto de corte de G (conexa) y como $x \notin S$, entonces existe $y \in \{V(G) \setminus S\}$ tal que todo camino de x a y pasa por S , y podemos suponer además y ady s con $s \in S$.

Como $\{x\} \cup S \subset \bigcap \mathcal{A}$ y $\bigcap \mathcal{A}$ es completa, es claro que x y S pertenecen a un mismo clan K_1 . Como y y s pertenecen a un clan $K_2 \neq K_1$ (pues y ady x) entonces $S \subset K_2$, pues todo punto t en $K_1 \cap K_2$, es adyacente tanto a x como a y . \therefore xty es una trayectoria en G ; por hipótesis xty pasa por S y $\therefore t \in S$. $\therefore \emptyset \neq \{K_1 \cap K_2\} \subset S$ ($\{K_1 \cap K_2\} \neq \emptyset$ pues $s \in \{K_1 \cap K_2\}$)

Por el Lema 1 $K_1 \cap K_2$ es de corte y por la minimalidad de S , $\{K_1 \cap K_2\} = S$ de donde $S = \{K_1 \cap K_2\} \subset K_2$ y así

$$S \subseteq \bigcap \mathcal{A} \subset \{K_1 \cap K_2\} = S \quad \blacktriangledown.$$

$\therefore S = \bigcap \mathcal{A}$ y así S es una intersección de clanes que es además mínima, pues si \mathcal{C} es una familia de clanes tales que $\bigcap \mathcal{C} \subsetneq \bigcap \mathcal{A}$, entonces por el Lema 1, $\bigcap \mathcal{C}$ es un conjunto de corte de G \blacktriangledown , ($S = \bigcap \mathcal{A}$ es un conjunto de corte mínimo) $\therefore \bigcap \mathcal{A}$ es un átomo de G . \square

\Leftarrow) Si S es un átomo de G , entonces $S = \bigcap \mathcal{A}$ donde \mathcal{A} es una familia de clanes de G , por el Lema 1, $S = \bigcap \mathcal{A}$ es un conjunto de corte de G que además es mínima, pues si no lo fuera existiría $\mathcal{B} \subsetneq S$, con \mathcal{B} un conjunto de corte mínimo en G , pero por la primera mitad de la demostración \mathcal{B} sería un átomo de G y como $\mathcal{B} \subsetneq S$ entonces S no sería un átomo \blacktriangledown .

$\therefore S$ átomo de G implica S es conjunto de corte mínimo.

Usando el Lema 3 podemos probar el siguiente:

49) TEOREMA (Howorka): Si G es tolomeica, entonces G se puede obtener mediante una sucesión de identificaciones subatómicas a partir de gráficas completas.

Demostración: Por inducción sobre $|V(G)|$.

Si G es completa no hay nada que demostrar, en particular si $|V(G)| = 1$ la afirmación es cierta.

Si G no es completa, existen $u, v \in V(G)$ tal que u ~~ady~~ v y u y v no pueden estar ambos en un mismo clan así que si C_1 es un clan que contiene a u entonces $v \notin V(C_1)$.

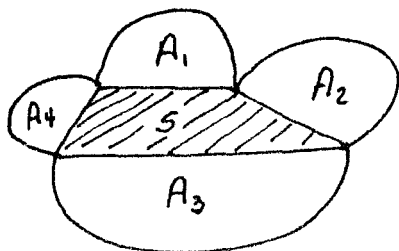
Sea C_1 un clan tal que $u \in V(C_1)$ y sea w un vértice que no está en C_1 pero que esté a distancia mínima de $V(C_1)$ como G es conexa, es claro que $d(w, V(C_1)) = 1$ y así w ~~ady~~ x con $x \in V(C_1)$.

Ahora \overline{wx} pertenece a un clan $C_2 \neq C_1$ ($C_2 \neq C_1$ pues $u \in V(C_1)$ pero $u \notin C_2$ ya que u ~~ady~~ w y $w \in V(C_2)$).

Ahora, $w \in C_1 \cap C_2$ y así $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. $\therefore C_1 \cap C_2$ contiene un átomo (una intersección mínima no vacía de clanes) que por el Lema 3 es un conjunto de corte mínimo.

Así si G es tolomeica y G no es completa, entonces G contiene un conjunto de corte mínimo S .

Sean A_1, \dots, A_r las componentes conexas de $G \setminus S$.



Como S es un conjunto de corte mínimo y G es tolomeica entonces S es la intersección de los clanes que lo contienen.

$$S = \bigcap \mathcal{A} \quad \text{donde } \mathcal{A} = \{Q \text{ clan de } G : S \subset Q\}.$$

Notemos que si $Q \in \mathcal{A}$ entonces $Q \subset \langle A_i \cup S \rangle$ para alguna $i \in \{1, \dots, r\}$, (donde $\langle A_i \cup S \rangle$ es la subgráfica de G inducida por $A_i \cup S$).

Pues si $Q \not\subset \langle A_i \cup S \rangle$ para alguna $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces Q tendría vértices de A_i 's distintos, $u \in A_i \setminus A_j, v \in A_k \setminus A_l$ digamos.

Pero por definición de las A_j 's, todo camino de u a v pasa por S y en particular u y v por otra parte, como $u, v \in Q$ y Q es clan, u y v están en Q . $\therefore Q \subset \langle A_i \cup S \rangle$.

Ahora es claro que $\langle A_i \cup S \rangle$ es una gráfica tolomeica siendo gráfica inducida de G que es tolomeica, (C tolomeica $\Rightarrow G$ tiene distancia hereditaria).

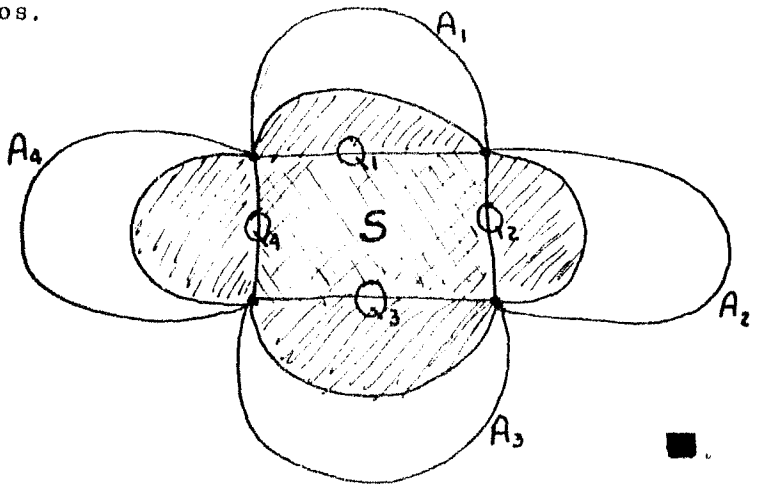
También S pertenece a un clan $Q_i \subset \langle A_i \cup S \rangle$ obviamente. Y también es claro que si tomamos clanes $Q_1 \subset \langle A_1 \cup S \rangle, \dots, Q_r \subset \langle A_r \cup S \rangle$, entonces $S = \bigcap_{i=1}^r Q_i$. Es claro que la subgráfica $\langle Q_1 \cup \dots \cup Q_r \rangle$ de G , la podemos obtener tomando una familia de gráficas completas (ajenas) K_1, \dots, K_r con $K_i \cong Q_i$ identificando subatómicamente en subátomos de K_i isomorfos a S ($S \subset Q_i \cong K_i$).

Ahora, como S es un conjunto de corte, el conjunto $\{A_1, \dots, A_r\}$ debe tener por lo menos dos elementos y así $|V(\langle A_i \cup S \rangle)| < |V(G)| \forall i \in \{1, \dots, r\}$ aplicando hipótesis de inducción a la gráfica tolemaica $\langle A_i \cup S \rangle$, tenemos que $\langle A_i \cup S \rangle$ se puede obtener a partir de subgráficas completas $K_{i,1}, K_{i,2}, \dots, K_{i,g(i)}$ mediante una sucesión de identificaciones subatómicas. Además, como S es una subgráfica completa de $\langle A_i \cup S \rangle$ entonces $S \subset K_{i,j}$ para alguna $j \in \{1, \dots, g(i)\}$ y por la definición de identificación subatómica, $K_{i,j}$ debe ser isomorfo a un clan de $\langle A_i \cup S \rangle$, de donde $K_{i,j} \cong Q_i \subset \langle A_i \cup S \rangle$.

Y así G se obtiene mediante identificación subatómica a partir de las gráficas completas:

$$\begin{aligned}
&K_{1,1}, K_{1,2}, \dots, K_{1,g(1)} \\
&K_{2,1}, K_{2,2}, \dots, K_{2,g(2)} \\
&\dots\dots\dots \\
&K_{r,1}, K_{r,2}, \dots, K_{r,g(r)}
\end{aligned}$$

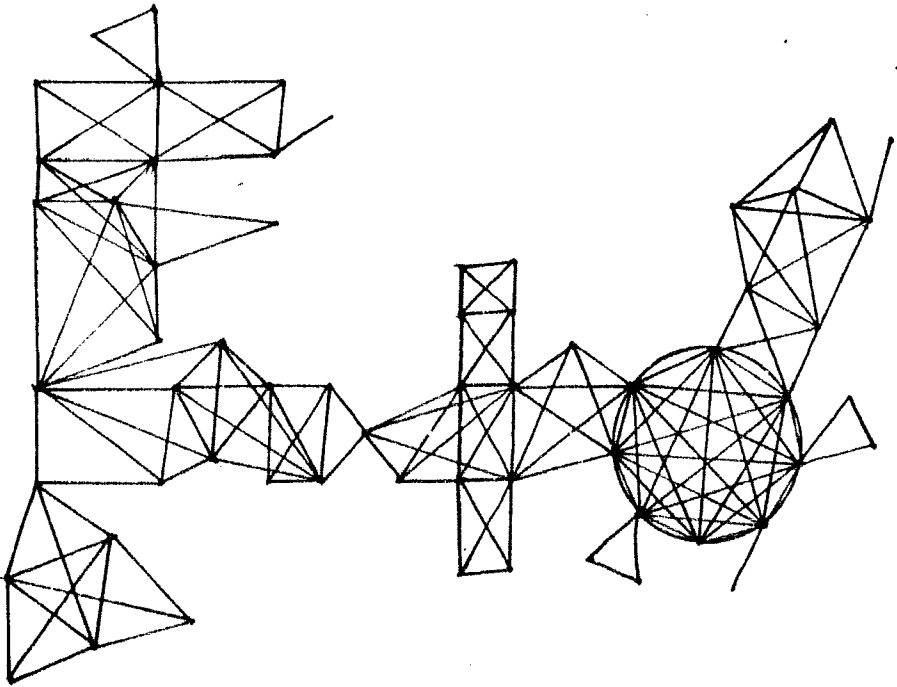
Pues $K_{2,\sigma}, \dots, K_{2,g(2)}$ producen mediante identificación subatómica apropiada la gráfica $\langle A_2 \cup S \rangle \quad \forall \ell \in \{1, \dots, r\}$. Además las gráficas Q_1, \dots, Q_r producen mediante identificaciones subatómicas la gráfica $\langle Q_1 \cup \dots \cup Q_r \rangle$ y cada $Q_\ell \cong K_{2,j(\ell)}$ para alguna $j(\ell) \in \{1, \dots, g(2)\}$ como ya vimos.



Como hemos probado también el recíproco del último teorema, tenemos:

TEOREMA: Una gráfica G es tolomeica si y sólo si G puede obtenerse mediante una sucesión de identificaciones subatómicas a partir de gráficas completas. ■

La caracterización anterior de las gráficas tolomeicas permite dibujar gráficas tolomeicas " típicas ", por ejemplo:



REFERENCIAS

- [1] M. Behzad and G. Chartrand, Introduction to the Theory of Graphs, Allyn and Bacon, Boston 1971.
- [2] C. Berge, Graphs and Hypergraphs, American Elsevier, New York 1973.
- [3] P. Buneman, A note on the Metric Properties of Trees. J. Combinatorial Theory ser. B 1 (1974)
- [4] G. Chartrand and D.C. Kay. A Characterization of Certain Ptolemaic Graphs, Canad J Math 17 (1965).
- [5] G.A. Dirac. On Rigid Circuit Graphs. Abh. Math Sem. Univ. Hamburg 25 (1961)
- [6] R.C. Hamelink, A Partial Characterization of Clique Graphs. J. Combinatorial Theory 5 (1968).
- [7] F. Harary. Graph Theory . Addison -Wesley Reading, Mass. (1969).
- [8] E. Howorka. A Characterization of Distance- Hereditary Graphs. Quarterly J. Math Oxford ser. 2 28 (1977).

- [9] E. Howorka. A Characterization of Ptolemaic Graphs. Survey of Results, in Proceedings of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Utilitas Math., Winnipeg, 1977.
- [10] E. Howorka. On Metric Properties of Certain Clique Graphs. J. Combinatorial Theory ser. B 27 (1979).
- [11] E. Howorka. A Characterization of Ptolemaic Graphs. J. of Graphs Theory, vol. 5 number 3 (1989).
- [12] F. S. Roberts and J. H. Spencer. A Characterization of Clique Graphs. J. Combinatorial Theory 10 (1971).

Índice Alfabético

- Arista de corte, 5
 Árbol, 7
 de Husimi, 7
 pesado, 58
 Átomo, 103
 de intersecciones, 103
- Bloque, 7
 terminal, 16
 b-ciclo, 31
 bb-ciclo, 31
- Camino, 4
 cerrado, 5
 Ciclo, 5
 inducido, 5
 Clan, 7
 Condición de los
 cuatro puntos (ccp), 49
 Corte de una gráfica, 6
 mínimo, 6
 Cuello, 31
 Cuerda triangular, 83
- Desigualdad tolomeica, 9
 Diagonal de un ciclo 5
 cruzada, 72
 Distancia, 6
 en un árbol pesado, 58
 hereditaria, 72
- Espacio métrico de una
 gráfica, 9
 gráfica tolomeica, 9
- Grado de un vértice, 5
 Gráfica, 4
 completa, 6
- con ciclos rígidos, 7
 conexa, 5
 débilmente geodésica, 7
 de clanes, 7
 geodésica, 7
 isomorfa, 4
 semitolomeica, 29
 simple, 30
 tolomeica, 10
 triangulada, 7
 trivial, 6
- Identificación subatómica, 104
- Longitud
 de un camino, 5
 de un ciclo, 5
 de una trayectoria, 5
- Niveles, 84
 Parte esencial de un ciclo, 72
 Propiedad \mathcal{S} , 24
 Propiedad \mathcal{I} , 40
 Protuberancia $b(G)$, 31
 grande $bb(G)$, 31
- Subátomo, 104
 Subgráfica, 4
 fuerte, 83
 generadora, 4
 inducida, 4
 métrica, 83
- Trayectoria, 5
 geodésica, 6
- Vértices adyacentes, 4
 Vértice de corte, 5