UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

F A C U L T A D DE C I E N C I A S

ECUACIONES INTEGRALES Y TEORIA DEL POTENCIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

FRANCISCO RAMON SALAZAR VELASCO

MÉXICO, D. F. 1984.

I N D I C E

INTRODUCCION

Este trabajo tiene entre sus propósitos estudiar las ecuaciones integrales y algunas aplicaciones de éstas a la teoría del potencial. Las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie son las que se vinculan con la teoría del potencial, además que las ecuaciones de Volterra de segunda especie se pueden considerar como un caso particular de las ecuaciones de Fredholm.

Otro propósito era que fuera una exposición didáctica del tema, en ese sentido desarrollé todos aquellos ejemplos y problemas que me parecieron interesantes que van dando una idea más clara de los distintos aspectos que se van desarrollando. En este mismo propósito hice demostraciones distintas de los libros consultados; propongo lemas para lograr estas, que aunque son claros no los vi en ningun libro.

Un último propósito era dar un contexto histórico del desarrollo de esta teoría.

En cuanto al cumplimiento de estos objetivos considero que quizâ no fueron cumplidos en su totalidad, pero sí en un grado satisfactorio.

Resolver lo que ahora conocemos como ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie fué lo que impulsó el poder pasar a espacios más generales que los euclideanos. La primera generalización que se da, son los espacios de Hilbert. El desarrollo de las ecuaciones integrales cobra importancia porque da un método para resolver el problema de Dirichlet. Sin embargo, es frecuente encontrar la exposición de estos temas en el sentido contrario de como fueron sucediendo.

Esto tiene una explicación natural ya que al irse desarrollando la teoría de estos problemas se van enfrentado a problemas que se van resolviendo posteriormente y se van simplificando los conceptos. Esto es, la teoría que permite resolver los problemas se desarrolla después que éstos son planteados y resueltos parcialmente.

Lo que se hace en este trabajo es dar una introducción histórica del surgimiento de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie y que pretendía, Fredholm con su teoría (cap. 0), resolver. Así como el surgimiento posterior del concepto abstracto de espacio de Hilbert.

En el capítulo I se presenta esta teoría de espacios de Hilbert, tal como lo conocemos actualmente, haciendo hincapié en varios ejemplos tanto de espacios de Hilbert, como de bases ortogonales para ellos.

En el capítulo II, se estudia el concepto de operador completamente continuo (generalización de transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) nuevamente presentamos varios ejemplos de éstos y para operadores simétricos y completamente contínuos se estudia el teorema espectral (de Hilbert).

Finalmente, en el capítulo III se aplica lo anterior al estudio de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, tal y como se conoce en la actualidad (no como lo hizo Fredholm).

Considero que presentar las cosas en su forma "acabada" tiene una ventaja y una deficiencia. La ventaja consiste, que una manera simplificada y estructurada permite una asimilación sencilla, que si nos enfrentamos a todos los problemas por los que pasaron aquellos que desarrollaron tal teoría. Pero tiene la deficiencia, que presentadas las cosas de esa manera se puede caer (y es frecuente verlo) en una o varias de estas situaciones:

1) no entender hacia donde se va.
2) cuál es el origien de tal teoría.
3) pensar que el desarrollo presentado coincide con el desarrollo histórico.

Por eso en los capítulos I, II, III se presentan los temas en su forma "acabada", la introducción histórica (capítulo 0) permite ubicarlo adecuadamente.

Por lo dicho anteriormente se eligió el orden presentado.

Finalmente, quiero enfatizar que el capítulo 0 nos puede dar una idea de las posibilidades de profundización sobre este tema.

CAPITULO 0

UBICACION HISTORICA

Las funciones armónicas surgen de problemas de la física:

En 1748 D. Bernoulli introdujo en la teoría de gravitación de Newton la función

$$\Omega(M) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i \mu}{r_i}\right)$$

para un punto M de masa μ atraído por un número finito de partículas de masa m_i, donde r_i es la distancia de M a cada una de las partículas. En 1773 Lagrange observó que esta función daba inmediatamente los componentes de la fuerza de atracción ejercida sobre M tomando las derivadas de Ω con respecto a las coordenadas x, y, z de M.

$$\vec{F} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\hat{k}$$

Cuando el número finito de partículas es reemplazado por un sóido V con función de densidad ρ y el punto **M** está está fuera de V, la función Ω queda

$$\Omega(x,y,z) = \mu \iiint_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)} \qquad (1)$$

(lo que se puede mostrar rigurosamente usando sumas de Riemann para aproximar la integral (1))

En 1782 y 1785, Laplace mostró que fuera de **V** la función Ω satisface la ecuación

$$\Delta\Omega = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = 0 \qquad (2)$$

O sea que Ω resulta ser una función armónica fuera de **V**.

Y en 1813 Poisson completó este resultado mostrando que si ρ es una función continua en V la integral (1) tiene sentido dentro de **V** y Ω satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta\Omega + 4\pi\rho = 0$$

Después del descubrimiento de las leyes de Coulomb la ecuación de Laplace adquiere una importancia central en electrostática. También se encuentra que gobierna los fenómenos "estacionarios" en hidrodinámica y la teoría de calor. Finalmente las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones reales P, Q de x, y tal que P + iQ es una función analítica de x + iy eran conocidas ya desde mediados de siglo XVIII y se vió que P y Q resultaban ser soluciones de la ecuación de Laplace en dos variables. A principios del siglo XIX Gauss conocía esta conección y el hecho que la ecuación (1) en dos variables queda así:

$$\Omega(x,y) = \iint_D \rho(\xi,\eta) \log \frac{1}{r(x,y;\xi,\eta)} \, d\xi d\eta \tag{3}$$

donde D es un dominio acotado en el plano y

$$r(x,y;\xi,\eta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

(Es facil comprobar que $\Omega(x,y)$ es armónica fuera de D:

$$\log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \quad \text{es armónica si } (x,y) \neq (\xi,\eta)$$

y se puede derivar bajo el signo de la integral.)

De la conección con funciones analíticas Gauss obtiene propiedades, para funciones armónicas tales como el principio del máximo y del mínimo.

Por otra parte George Green, estudiando problemas de electroestática escribió el primer artículo que plantea una ecuación diferencial parcial con condiciones generales a la frontera, y ésta surge al estudiar el problema del potencial generado por un alambre cargado en el plano (el mismo problema es considerado por Thompson (Lord Kelvin), Dirichlet y Gauss); el problema en términos matemáticos queda expresado así: Sea V una región acotada de $\mathbb{R}^2$, $\gamma = \partial V$ y $f:\partial V \to \mathbb{R}$ continua. Encontrar una función armónica U en V, continua en $\overline{V}$ y tal que $U|_{\partial V} = f$

La intuición sobre las propiedades físicas del problema llevó a Green a la (falsa) conclusión de dicho problema *siempre* tenía solución, y muchos matemáticos del siglo XIX y principios del siglo XX dedicaron sus esfuerzos a tratar de resolverlo, encontrándose siempre con dificultades en sus resultados, y obteniendo soluciones sólo para casos particulares (casi siempre imponían restricciones geométricas sobre ∂V). Los matemáticos de la época pensaban que estas -

restricciones se debían a imperfecciones en el método de solución dado, y es sólo cuando Lebesgue en 1913 da un dominio para el cual no hay solución, que cambia el enfoque del problema.

Nosotros aquí sólo mencionaremos el método de ecuaciones integrales iniciada con las ecuaciones "Cripto-integrales" por Beer en 1860. Se da cuenta que si Σ es una superficie suave cerrada y g es una función continua en Σ, la solución al problema de Dirichlet (en $\mathbb{R}^3$) debe satisfacer la ecuación.

$$U(M) = \iint_{\Sigma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{MP}\right) d\sigma \qquad (4)$$

y

$$2\pi\rho(M) + \iint_{\Sigma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{MP}\right) d\sigma = g(M) \qquad M \text{ en } \Sigma. \qquad (5)$$

En $\mathbb{R}^2$, $g: \partial V \to \mathbb{R}$

$$U(M) = \int_{\gamma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\log \frac{1}{MP}\right) d\sigma \qquad (4')$$

y

$$2\pi\rho(M) + \int_{\gamma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\log \frac{1}{MP}\right) d\sigma = g(M) \qquad (5')$$

El problema de Dirichlet queda entonces en términos de resolver una ecuación integral y se trata de poder determinar ρ que satisface (5) (ó (5') en $\mathbb{R}^2$).

Tanto Beer como Neumann tratan de resolver la ecuación (5) por el método de aproximaciones sucesivas pero sin poder mostrar la convergencia de la serie asociada.

En los años posteriores se abandonó este método por considerar que presentaba "dificultades insuperables" según lo afirma Du Bois-Reymond en 1888 y el mismo Poincaré compartía esa opinión. Es por tanto que viene a sorprender completamente una pequeña nota publicada en 1900, en donde Fredholm muestra que la teoría de las ecuaciones integrales (o ecuaciones cripto-integrales) consideradas antes de él eran de hecho sencillas (mucho más sencillo que cualquier cosa conocida en su tiempo sobre ecuaciones diferenciales parciales).

Ivar Fredholm fué estudiante de Mittag-Leffler Estocolmo de 1888 a 1890. Después de su visita a París, donde había estado en contacto con todos los analistas franceses y familiarizado con lor recientes artículos de Poincaré, comunicó en agosto de 1899 sus primeros resultados sobre ecuaciones integrales a su maestro y fueron publicados en 1900 y completados dos años después en un artículo en una acta matemática.

Fredholm en su artículo "sobre un nuevo método para la solución del problema de Dirichlet", hace a un lado todas las particularidades de la ecuación de Beer-Neumann (5) empezando con una ecuación integral de segunda especie, en una forma general.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)dS \qquad (6)$$

donde $K(X,s)$ es por hipótesis acotada y contínua por pedazos en $[a,b] \times [a,b]$, φ contínua en $[a,b]$ y λ un parámetro complejo.

Inspirado en los trabajos de Volterra sobre el paso al límite y en Von Koch sobre determinantes infinitos, da las condiciones necesarias y suficientes sobre φ para la existencia de una solución de (6) basándose en los resultados análogos para sistemas de ecuaciones lineales (ver caso degenerado capítulo III) y llega a la formulación completa de la "Alternativa de Fredholm" (ver capítulo III).

De su teoría general, Fredholm muestra que la ecuación de Beer-Neumann tiene solución con ciertas restricciones sobre la frontera del dominio.

Estos trabajos de Fredholm pueden considerarse como la fuente de la cual derivan todos los demás desarrollos sobre teoría espectral.

Hilbert impulsado por los trabajos de Fredholm escribe seis artículos sobre ecuaciones integrales.

Restringiéndose al caso en que el núcleo $K(x,s)$ es simétrico, es decir una función real continua tal que $K(x,s)=K(s,x)$ obtiene resultados más precisos que Fredholm, como:

1) Las raíces del determinante de Fredholm son reales
2) Considerando la multiplicidad se obtiene la sucesión λ_n (valores característicos) y las respectivas funciones características φ_n, tal que

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)d \quad = 0 \text{ para } m \neq n$$

(Ortogonalidad de las funciones características)

3) Normalizar las funciones es decir.

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1$$

4) Define los "coeficientes de Fourier" para cada función f en [a,b]

$$<f,\varphi_n> = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

Después, los trabajos de Fréchet sobre espacios métricos invitan a todo mundo a aplicar estas teorías sobre los trabajos de Hilbert y transferir la geometría euclideana a dimensiones infinitas. Así Schmidt define el espacio l_2 - con la noción de producto escalar y de norma; define ortogonalidad, conjuntos cerrados y subespacios vectoriales.

Fischer y F. Riesz, contando ya con la teoria de integración de Lebesgue, definen el espacio L_2 [I], donde I es un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$, consistente de las funciones cuadrado integrables. Dos funciones son idénticas si difieren en un conjunto de medida cero.

Su resultado fundamental es asociar a cada función $f \in L_2[I]$ la sucesión $\{x_p\}$ de sus coeficientes de Fourier, lo que permite mostrar que $L_2[I]$ es isomorfo a l_2 de lo que se deduce en particular que $L_2[I]$ es completo y separable.

Una consecuencia de todo lo anterior es que los resultados de Fredholm pueden ser aplicadas sin ningún cambio a ecuaciones integrales cuyo núcleo $K(x,s)$ esté en $L_2(I \times I)$ quitando la hipótesis de continuidad sobre $K(x,s)$ que tenía Fredholm, ya que esto equivale a un sistema de ecuaciones correspondientes a una forma bilineal "completamente continua" en el sentido de Hilbert y ésta permite resolver la ecuación de Beer para casos mas generales.

Von Neumann fué el primero en concebir un espacio "abstracto" de Hilbert definido axiomáticamente como un espacio vectorial complejo con un producto escalar de Hermite, separable y completo con la correspondiente norma.

CAPITULO 1

ESPACIOS DE HILBERT.

1. DEFINICION

Un espacio pre-Hilbert es un espacio vectorial H real con una función φ de $H \times H$ en $\mathbb{R}$ la cual mapea cada pareja de puntos (vectores) de H en un número real, llamado el producto escalar.

Donde $\varphi(\bar{X},\bar{Y}) = \langle\bar{X},\bar{Y}\rangle$ $\quad \bar{X},\bar{Y} \in H$ es tal que:

a) $\langle\bar{X},\bar{Y}\rangle = \langle\bar{Y},\bar{X}\rangle$

b) $\langle\bar{X},\bar{Y} + \bar{Z}\rangle = \langle\bar{X},\bar{Y}\rangle + \langle\bar{X},\bar{Z}\rangle$

c) $\langle\lambda\bar{X},\bar{Y}\rangle = \langle\bar{X},\bar{Y}\rangle$ para cualquier real λ

d) $\langle\bar{X},\bar{X}\rangle \geqslant 0 \ \forall \ \bar{X} \in H$

e) $\langle\bar{X},\bar{X}\rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{0}$

2. EJEMPLOS

1.- Sea el espacio l_2, definido de la siguiente manera:

Una sucesión de reales $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ es un elemento de l_2 ssi la suma de sus cuadrados converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 < \infty$$

a) si definimos las operaciones lineales.

$$\bar{X} + \bar{Y} = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n, \ldots)$$

$$\alpha\bar{X} = (\alpha X_1, \alpha X_2, \ldots, \alpha X_n, \ldots)$$

donde $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ $\quad \bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Este espacio es un espacio vectorial real. Con esta definición $\overline{X} + \overline{Y},\ \alpha\,\overline{X} \in l_2$

Como $\overline{X} + \overline{Y} = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$, veamos que $\overline{X} + \overline{Y} \in l_2$:

$0 \leq |x_n y_n| \leq \frac{1}{2}\,(x_n^2 + y_n^2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty \qquad (2)$$

y tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$$

$$\therefore\ \overline{X} + \overline{Y} \in l_2$$

si $\overline{X} \in l_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\overline{X} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n)^2 = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$$

$$\therefore\ \alpha\overline{X} \in l_2$$

b) Definimos $\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

por (2) es claro que $\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle$ está bien definido

Veamos que $\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle$ asi definido es un producto escalar en l_2:

$$\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle \in \mathbb{R}$$

Ahora

$$\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = \langle\overline{Y},\overline{X}\rangle$$

$$\langle\overline{X},\overline{Y} + \overline{Z}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(y_n + z_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n y_n + x_n z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$$

$$= \langle\overline{X},\overline{Y}\rangle + \langle\overline{X},\overline{Z}\rangle$$

porque todas estas series son convergentes por (1).

Finalmente

$$<\overline{X},\overline{X}> = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 \geq 0 \quad \forall \overline{X} \in H = l_2$$

$$<\overline{X},\overline{X}> = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 = 0 \Leftrightarrow X_n = 0 \ \forall n \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{0}$$

2. El espacio $L_2[a,b] = \{\varphi:[a,b] \to \mathbb{R} \mid \varphi$ es lebesgue medible y $\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx < \infty\}$

donde cada φ es la clase de funciones iguales a φ escepto en un conjunto de medida cero.

Si φ, $\psi \in L_2[a,b]$ se define

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Como

$$\varphi(x) \cdot \psi(x) \leq \frac{1}{2} [\varphi^2(x) + \psi^2(x)]$$

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dX \leq \frac{1}{2} \int_a^b [\varphi^2(x) + \psi^2(x)] dX < \infty$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b [(\varphi + \psi)(X)]^2 dX &= \int_a^b [\varphi(X) + \psi(X)]^2 dX \\ &= \int_a^b \varphi^2(X) dX + 2 \int_a^b \varphi(X) \ \psi(X) dX + \int_a^b \psi^2(X) dX \\ &\leq \int_a^b \varphi^2 (X) dX + 2 \int_a^b \frac{1}{2}[\varphi^2(X) + \psi^2(X)] dX + \\ &\qquad + \int_a^b \psi^2(X) dX \\ &= 2[\int_a^b \varphi^2(X) dX + \int_a^b \psi^2(X) dX] < \infty \end{aligned}$$

porque cada una está en $L_2[a,b]$.

$$\therefore\ (\varphi + \psi) \in L_2[a,b]$$

$\alpha\varphi \in L_2[a,b]$, es inmediato, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

De lo anterior $L_2[a,b]$ es un espacio vectorial.

El producto escalar sobre $L_2[a,b]$ se define como

$$<\varphi, \psi> = \int_a^b \varphi(X)\psi(x)\,dx$$

efectivamente es un producto escalar

$$<\varphi, \psi> = <\psi, \varphi>$$

$$<\varphi, \psi + \gamma> = \int_a^b \varphi(x)[\psi(x) + \gamma(x)]\,dx = <\varphi, \psi> + <\varphi, \gamma>$$

$$<\alpha\varphi, \psi> = \alpha<\varphi, \psi>$$

$$<\varphi,\varphi> = \int_a^b \varphi(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \geqslant 0 \quad \forall\varphi \in L_2[a,b]$$

$$<\varphi,\varphi> = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = 0$$

3. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ son espacios pre-Hilbert con las operaciones usuales.

3. DEFINICION

Dos espacios pre-Hilbert H', H" se llaman isomorfos si existe una biyección b tal que:

i) $b(x' + y') = b(x') + b(y') \quad \forall\ x', y' \in H'$

ii) $b(\alpha x') = \alpha b(x')$

iii) $< b(x'), b(y')>_{H''} = <x',y'>_{H'}$

4. DEFINICION

Si H es un espacio pre-Hilbert, definimos la norma de $x \in H$ como

$$\|x\| = {}^{+}\sqrt{\langle x,x\rangle} \qquad y \quad \mathrm{Cos}(x,\ y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$$

5. PROPOSICION

a) $-1 \leqslant \mathrm{Cos}(x,y) \leqslant 1$

b) Desigualdad de Cauchy $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\|$

c) $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\ \|y\| \Leftrightarrow x,y$ son colineales

DEMOSTRACION

a) $\langle\lambda x - y,\ \lambda x - y\rangle \geqslant 0$

$$\lambda^2\langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \geqslant 0$$

si lo vemos como función cuadrática de λ

$$f(\lambda) = \langle x,x\rangle\lambda^2 - 2\langle x,y\rangle\lambda + \langle y,y\rangle \geqslant 0$$

$f(\lambda)$ no puede tener dos raíces distintas porque habría una parte negativa lo que contradice que $f(\lambda) \geqslant 0$. Entonces a lo más puede tener una sola raíz, lo que implica que el discriminante es menor o igual a cero es decir:

$$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,y\rangle\ \langle y,y\rangle \leqslant 0$$

de donde

$$\sqrt{\langle x,y\rangle^2} \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\ \sqrt{\langle y,y\rangle} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\ \|y\|} \leqslant 1 \qquad \therefore \quad |\mathrm{Cos}(x,y)| \leqslant 1$$

b) es consecuencia de la desigualdad (3)

c) $\Rightarrow$) si $|\langle x,y\rangle| = \|x\| \, \|y\| \Rightarrow \langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle = 0$

entonces $\exists \; \lambda \in \mathbb{R} \ni \lambda^2\langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \lambda x - y, \lambda x, - y\rangle = 0$

por el axioma (e) de producto escalar

$$\lambda x - y = 0 \quad \Rightarrow y = \lambda x$$

$\Leftarrow$) si x, y son colineales $\Rightarrow y = \lambda x$

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle x;\lambda x\rangle| = \lambda\|x\|^2 = \|x\| \, \|\lambda x\| = \|x\| \, \|y\|$$

$$\therefore \; |\langle x,y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$$ ∎

6. EJEMPLOS

1) La desigualdad de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es

$$\left|\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}$$

2) En $L_2[a,b]$ queda como

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx} \; \sqrt{\int_a^b \psi^2(x)\,dx}$$

7. DEFINICION

Decimos que un espacio vectorial E es normado (e.v.n.) si existe una función $\varphi: E \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) $\varphi(\alpha x) = |\alpha|\varphi(x) \quad \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$

(2) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

(3) $\varphi(x) \geq 0 \; \forall \; x \in E$

(4) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$

8. OBSERVACIONES

1. Si (E,φ) es un espacio vectorial es claro que resulta espacio métrico, con la métrica definida como $d(x,y) = \varphi(x-y)$ y la norma es función contínua, $\varphi: E \to \mathbb{R}$, respecto a esta métrica.

2. Si H es pre-Hilbert, la norma $\varphi(x) = \|x\| = \sqrt{<x,x>}$ satisface claramente las propiedades 1,3,4 y la 2 es consecuencia de la desigualdad de Cauchy (5.b)

$$(\varphi(x + y))^2 = \|x + y\|^2 = <x + y, x + y>$$

$$= <x,x> + 2<x,y> + <y,y>$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$= [\varphi(x) + \varphi(y)]^2$$

e.d. $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

En resumen: todo espacio pre-Hilbert H es un espacio vectorial normado y cuando se hable de convergencia, continuidad, etc. en H nos estaremos refiriendo a la convergencia, continuidad, etc. en el espacio normado (por tanto en el métrico) asociado.

3. Como los espacios pre-Hilbert son un caso particular de espacios vectoriales normados, es natural que la norma en un espacio pre-Hilbert tenga propiedades especiales (no compartidas en general por los espacios normados). Una

de ellas es la ley del paralelogramo (la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma de los cuadrados de sus lados, que en $\mathbb{R}^2$ es consecuencia del teorema de Pitágoras y de la ley de los cosenos).

9. PROPOSICION

a) Si H es un espacio pre-Hilbert; $x,y \in H$ entonces

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (4)$$

(Ley del paralelogramo)

b) Si E es un espacio vectorial normado y la norma de E satisface la condición (4) entonces podemos definir un producto escalar en E con la fórmula

$$<X,Y> = \frac{1}{4}(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2) \qquad y \qquad <x,x> = \|x\|^2$$

de modo que E resulta un espacio pre-Hilbert y su producto escalar proviene de una norma.

DEMOSTRACION

a) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = <x + y, x + y> + <x - y, x - y>$

$$= 2<X,X> + 2<Y,Y> = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2$$

b) Es claro que $<x,y>$ asi definido satisface $<x,x> = \|x\|^2$ y entonces $<x,x> \geq 0 \ \forall \ x$, $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$ por propiedades de la norma. Ademas es inmediato que $<x,y> = <y,x>$

Veamos la ley distribuitiva $<x,y + z> = <x,y> + <x,z>$ Para ello aplicamos la ley del paralelogramo a los vectores

i) $x + y, z$: $2\|x + y\|^2 + 2\|z\|^2 = \|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2$

ii) $x - y, z$: $2\|x - y\|^2 + 2\|z\|^2 = \|x - y + z\|^2 + \|x - y - z\|^2$

iii) $x + z, y$: $2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + z + y\|^2 + \|x + z - y\|^2$

iv) $x - z, y$: $2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x - z + y\|^2 + \|x - z - y\|^2$

restando (ii) de (i)

$$2\|x + y\|^2 - 2\|x - y\|^2 = \|x + y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 +$$

$$+ \|x + y - z\|^2 - \|x - y + z\|^2$$

restando (iv) de (iii)

$$2\|x + z\|^2 - 2\|x - z\|^2 = \|x + y + z\|^2 - \|x-z-y\|^2 - \|x-z+y\|^2 +$$

$$+ \|x + z - y\|^2$$

al sumar estas dos igualdades obtenemos

$$2\|x + y\|^2 - 2\|x - y\|^2 + 2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2 = 2\|x+y+z\|^2 - 2\|x-y-z\|^2$$

es decir $8\langle x,y\rangle + 8\langle x,z\rangle = 8\langle x,y+z\rangle$

Por ultimo veamos que $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \; \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$

Caso 1 $\lambda = -1$

es inmediato que $- \langle x,y\rangle = \langle -x,y\rangle$

Caso 2 si $\lambda = n \in \mathbb{N}$

$\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$ aplicando la ley distribuitiva

Caso 3 si $\lambda = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$ $q \neq 0$

$$\langle \tfrac{p}{q} x, y\rangle = p \langle \tfrac{x}{q}, y \rangle$$

pero $\langle \frac{x}{q}, y\rangle = \frac{1}{q}\langle x, y\rangle$ porque $q\langle \frac{x}{q}, y\rangle = \langle x,y\rangle$

Caso 4 $\lambda = r \in \mathbb{R}$

Hemos demostrado hasta ahora que $\langle sx, y\rangle = s\langle x, y\rangle$ si $S \in \mathbb{Q}$ es decir $\frac{1}{4}(\|sx + y\|^2 - \|sx - y\|^2) = \frac{s}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ si $\{s_n\}$ es una sucesión de racionales que converge a r. Apliquemos a cada s_n la propiedad anterior.

$$\frac{1}{4}(\|s_n x + y\|^2 - \|s_n x - y\|^2) = \frac{s_n}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

por ser la norma una función continua, al pasar al límite obtenemos

$$\frac{1}{4}(\|rx + y\|^2 - \|rx - y\|^2) = \frac{r}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \blacksquare$$

La ley del paralelogramo es condición necesaria para tener producto escalar, veamos el siguiente Ejemplo.

"Norma del tarista" en $\mathbb{R}^2$ $\overline{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definimos

$$\|\overline{X}\| = |x_1| + |x_2|$$

Es claro que no cumple con la ley del paralelogramo. Por lo tanto en este espacio vectorial normado la norma no proviene de un producto escalar.

10. OBSERVACION

El producto esclar φ: H x H $\to \mathbb{R}$ es una función continua.

11. DEFINICION

Un espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo.

12. TEOREMA

El espacio l_2 es completo.

DEMOSTRACION

Sea $\{\overline{X}_m\}$ una sucesión de Cauchy en l_2

dados $\overline{X}_m = \{X_1^m, X_2^m, \ldots, X_n^m, \ldots\}$

$$\overline{X}_p = \{X_1^p, X_2^p, \ldots, X_n^p, \ldots\}$$

como es sucesión de Cauchy

$$\lim_{m,p\to\infty} \|\overline{X}_m - \overline{X}_p\| = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{m,p\to\infty} \|(X_1^m - X_1^p, X_2^m - X_2^p, \ldots, X_n^m - X_n^p, \ldots)\| = 0$$

como $|X_i^m - X_i^p| \leqslant \|\overline{X}_m - \overline{X}_p\| \Rightarrow \lim_{m,p\to\infty} |X_i^m - X_i^p| = 0 \ \forall\, i \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\{X_i^m\} \subset \mathbb{R}$ es sucesión de Cauchy $\Rightarrow \exists\, y_i \in \mathbb{R} \ni y_i = \lim_{m\to\infty} X_i^m \ \forall i \in \mathbb{N}$

Veamos que, si $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$

$\lim_{m\to\infty} \overline{X}_m = \overline{Y}$ en l_2

Sea $\varepsilon > 0$, como $\{\overline{X}_m\}$ es Cauchy $\Rightarrow$

$$\|\overline{X}_m - \overline{X}_p\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |X_i^m - X_i^p|^2 < \varepsilon \text{ si } m, p > p_0$$

para cada N fija

$$\sum_{i=1}^{N} |X_i^m - X_i^p|^2 < \varepsilon$$

tomando límite sobre P, como es una suma finita y el límite de cada uno existe:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |X_i^m - X_i^p|^2 = \sum_{i=1}^{N} |X_i^m - y_i|^2 < \varepsilon \ \forall\, N \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |X_i^m - y_i|^2 = \|\overline{X}_m - \overline{Y}\|^2 < \varepsilon \text{ si } m > p_0$$

falta mostrar para terminar la demostración del teorema que

$$\overline{Y} \in l_2$$

Como $\exists$ K $\ni$ para cada m

$$\|\overline{X}_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^m)^2 \leq k$$

porque $\{\|\overline{X}_m\|\}$ también es una suceción de Cauchy en los rea lès y por tanto esta acotada, entonces la suma parcial

$$\sum_{n=1}^{N} Y_n^2 = \sum_{n=1}^{N} (\lim_{m\to\infty} X_n^m)^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (X_n^m)^2$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^m) \leq \lim_{m\to\infty} \|\overline{X}_m\| \leq K$$

de aquí que, para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} Y_n^2 \leq K \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2 \leq K \text{ e.d. } Y \in l_2 \qquad \blacksquare$$

13. PROPOSICION

Sea $d_1, d_2, \ldots$ una sucesión fija de reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n d_n$ converge para cualquier $\{\xi_n\} \in l_2$. Entonces $\{d_n\} \in l_2$.

DEMOSTRACION

Primero veamos que $D = \{d \mid d = d_n$, donde $|d_n| > c > 0\}$ es finito. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que D es infinito. Sean, la subsucesión $\{d_{n_k}\} \ni$ $|d_{n_k}| > c \ \forall K$ y $\{\xi_n\} \ni \xi_{n_k} = \frac{1}{k}$ si $n = n_k$, $\xi_n = 0$ si $n \neq n_k$

Es claro que $\{\xi_n\} \in l_2$, sin embargo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n|d_n| = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_{n_k}|d_{n_k}| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}|d_{n_k}| \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{k} = \infty$$

lo que contradice la hipótesis.

Para mostrar que $\{d_n\} \in l_2$, nuevamente por reducción absurdo, supongamos $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\,2} = \infty$. Se puede comprobar de forma análoga a la anterior que los elementos d_n tales que $d_n^{\,2} > 1$ son un número finito.

Sea P el máximo natural tal que $d_p^2 > 1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\,2} = \infty$, formemos grupos de esta manera:

$$1 \leq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} d_n^{\,2} \leq 2 \quad \text{donde } n_1 = p + 1$$

n_k es el primer natural $\ni \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k} d_n^2 > 2 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Ahora sea

$$\xi_n = \begin{cases} \dfrac{d_n}{k} & \text{si } n_k \leq n < n_{k+1} \\ d_n & \text{si } n \leq P \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 = \sum_{i=1}^{p} d_i^{\,2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\frac{d_n^2}{k^2}\Big) \leq \sum_{i=1}^{p} d_i^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2} < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \{\xi_n\} \in l_2$$

sin embargo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n d_n = \sum_{i=1}^{p} d_i^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\frac{d_n^2}{k}\Big) \geq \sum_{i=1}^{p} d_i^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

lo que contradice la hipótesis, de donde $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$

$\therefore \{d_n\} \in l_2$ ∎

14. DEFINICION DE ORTOGONALIDAD

Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que dos vectores $\overline{X},\overline{Y} \in H$ son ortogonales si $\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle = 0$

Observación: Si $\overline{X} \neq 0$, $\overline{Y} \neq 0$ de acuerdo con la definición general de los ángulos entre dos vectores, esto significa que $\overline{X}$, $\overline{Y}$ forman un ángulo recto.

Notación: Si $\overline{X},\overline{Y}$ son ortogonales se escribe $\overline{X} \perp \overline{Y}$.

15. EJEMPLO

En el espacio $L_2[-\pi,\pi]$, el sistema trigonométrico 1, cos X, sen X, cos 2X, sen 2X,... son mutuamente ortogonales ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} pX \cos qx dx = 0$$

y
$$\langle\varphi,\psi\rangle_{L_2[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X)\psi(X)dX$$

16. PROPIEDADES

Sea H un espacio de Hilbert

1) si $X \perp Y_1$, $X \perp Y_2, \ldots, X \perp Y_k$ entonces

$$X \perp (\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_k Y_k) \quad \forall\, \alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$$

2) si $X \perp Y_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $X \perp Y = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$

3) generalización del Teorema de Pitágoras.

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \Leftrightarrow X \perp Y$$

DEMOSTRACION

1) es inmediato

2) es claro por la continuidad del producto escalar

$$\langle Y,X\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Y_n, X\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Y_n, X\rangle = 0$$

Observación: de (1) y (2) se establece $\underline{\overline{X}} = \{Y/Y \perp X\}$ forma un subespacio cerrado de H, llamado el complemento ortogonal del vector X, se denota $C_x^{\perp}$.

3) $\|X+Y\|^2 = \langle X,X\rangle + 2\langle X,Y\rangle + \langle Y,Y\rangle = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \Leftrightarrow \langle X,Y\rangle = 0$

17. DEFINICION

Una sucesión $\{X_n\}$, $X_n \neq 0$, de vectores en **H**, espacio de Hilbert, se llama "sistema ortogonal" si $X_n \perp X_m$ $\forall\, n \neq m$. Si además $\|X_n\| = 1$ $\forall_n$, se llama sistema ortonormal.

Notación: En general hablaremos de un sistema de vectores como una sucesión de vectores en que cada conjunto finito que se forma de elementos de esta sucesión sean éstos linealmente independientes.

18. METODO DE ORTOGONALIZACION

Dado un sistema de vectores $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ encontramos un sistema ortogonal.

Escogiendo adecuadamente los coeficientes a_{ij} en la fórmula

$$Y_n = X_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} X_i \qquad (5)$$

Obtenemos un sistema, no nulo, mutuamente ortogonal de vectores Y_i, $Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$

A partir de la idea que se presenta en la fórmula (5) encontraremos un método inductivo de construcción de este sistema.

Para esto veamos primero que el vector Y_n es una combinación lineal de X_n, $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$.

$$Y_n = X_n + a_{n1}X_1 + a_{nn-1}X_{n-1}$$

como $\underline{Y_1 = X_1}$

$$Y_2 = X_2 + a_{21}X_1$$

$$\underline{Y_2 = X_2 + a_{21}Y_1}$$

$$Y_3 = X_3 + a_{31}X_1 + a_{32}X_2$$

$$\underline{Y_3 = X_3 + (a_{31} - a_{32}a_{21})\, Y_1 + a_{32}Y_2}$$

siguiendo el procedimiento

$$Y_n = X_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{ni} Y_i \qquad (7)$$

Luego si hacemos el producto por Y_k, $K < n$ y usando la supuesta ortogonalidad de Y_k $k = 1, \ldots, n-1$ queda

$$\langle Y_n, Y_k\rangle = \langle X_n, Y_k\rangle + b_{nk}\,\langle Y_k, Y_k\rangle$$

si $\langle Y_k Y_k\rangle \neq 0 \Rightarrow b_{nk}$ tiene solución.

$$b_{nk} = -\frac{\langle X_n, Y_k\rangle}{\langle Y_k, Y_k\rangle}$$

Una vez obtenidos los coeficientes b_{nk} $K = 1,\ldots,n-1$ la ecuación (7) permite establecer el vector Y_n, que por construcción es ortogonal a todos los anteriores.

Finalmente, si sustituimos las expresiones para $Y_1,\ldots$ Y_{n-1} de las primeras $n-1$ ecuaciones de (6) en la n'esima ecuación, restablecemos una expresión como en (5)

$$Y_n = X_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} X_i$$

$$\text{si} \quad Y_n = 0 \Rightarrow X_n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} X_i$$

lo que contradice que los X_i $i = 1,\ldots, n$ son linealmente independientes.

Este sistema ortogonal así construido puede ser además normalizado, resultando el sistema de vectores.

$$e_n = \frac{Y_n}{\|Y_n\|} \quad n \in \mathbb{N}$$

que es ortonormal

19. PROPOSICION

Sea un sistema de vectores $X_1,\ldots, X_n,\ldots$ dado, entonces existe un sistema de vectores $Y_1,\ldots, Y_n,\ldots$ que satisface:

a) $\langle X_j, Y_k\rangle = 0$ para $j < K$

b) $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ para algunas $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

(y este sistema es único salvo por multiplicación por un escalar.)

DEMOSTRACION

La existencia es inmediata de acuerdo a la construcción del sistema $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ con el método de ortogonalización (18). Para demostrar la unicidad.

Sea $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ otro sistema que cumple con (a) y (b).

De acuerdo con (b)

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X_i$$

$$\| z_n \|^2 = \langle z_n, z_n \rangle = \langle z_n, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X_i \rangle$$

como cumple con (a)

$$\| z_n \|^2 = \langle z_n, \gamma_n X_n \rangle$$

si $\alpha_n \neq 0$ despejamos X_n en la ecuación de Y_n

$$\| z_n \|^2 = \langle z_n, \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \left(Y_n - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) \rangle = \langle z_n, \frac{\gamma_n}{\alpha_n} Y_n \rangle$$

haciendo lo mismo con el otro factor z_n

$$\| z_n \|^2 = \langle \frac{\gamma_n}{\alpha_n} Y_n, \frac{\gamma_n}{\alpha_n} Y_n \rangle = \frac{\gamma_n^2}{\alpha_n^2} \| Y_n \|^2 \Rightarrow$$

$$\| z_n \| = |\gamma_n / \alpha_n| \, \| Y_n \|$$

por otro lado usando la misma técnica

$$|\langle Y_n, z_n \rangle| = |\gamma_n / \alpha_n| \, \| Y_n \|^2 = \| z_n \| \, \| Y_n \|$$

Por la proposición (5.C) Y_n, z_n son colineales es decir $z_n = \lambda_n Y_n$.

Para completar la demostración

si $\alpha_n = 0$

$$<Y_n, Y_n> = <\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, Y_n> = <\alpha_n Y_n, Y_n> = <0, Y_n> = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_n = 0 \ !$$

$$\therefore \quad \alpha_n \neq 0$$

20. EJEMPLO

Los polinomios, obtenidos de ortogonalizar las funciones $1, X, X^2, \ldots$ sobre el espacio $L_2[-1,1]$, son los polinomios de Legendre. Donde el n'ésimo polinomio de Legendre tiene la forma

$$P_n(X) = C_n[(X^2-1)^n]^{(n)}$$

(n) es la n'esima derivada y $C_n = \dfrac{1}{2^n n!}$

Utilizando la proposición (19) habría que mostrar

a) $<X^p, P_n(X)> = 0 \quad \text{si } p < n$

b) $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$

En el segundo de los ejemplos (2) se definió el producto escalar para el espacio $L_2[a,b]$, de donde:

$$<X^p, P_n(X)> = \int_{-1}^{1} X^p P_n(X)\, dX \tag{8}$$

Sea $p < n$. Se puede comprobar la forma recursiva en $P_n(X)$

$$P_n(X) = \frac{P'_{n+1}(X) - XP'_n(X)}{n+1} \tag{9}$$

la cual es equivalente a esta otra

$$\int P_n(X) = \frac{P_{n+1}(X) - X\, P_n(X)}{n} \tag{10}$$

Estas nos permitiran encontrar la integral (8). Integrando por partes y usando (10)

$$\int X^p P_n(X)\, dX = \frac{-P}{n-P} \int X^{p-1} P_{n+1}(X)\, dX$$

Usando esta última sucesivamente llegamos

$$\int X^p P_n(X)\, dX = \frac{(-1)^p\, p!}{\prod_{i=1}^{p} [n-p+2(i-1)]} \int P_{n+p}(X)\, dX \quad p < n$$

usando nuevamente (2) y como $P_m(1) = 1$, $P_m(-1) = (-1)^m$ $\forall\ m \in \mathbb{N}$; tenemos

$$\int_{-1}^{1} P_m(X)\, dX = 0 \quad \forall\ m \Rightarrow \langle X^p, P_n(X)\rangle = 0 \quad \text{si} \quad p < n$$

Finalmente, como las derivadas de polinomios son polinomios, (b) es inmediato.

21 TEOREMA

Dos espacios euclideanos de la misma dimensión son isomorfos.

DEMOSTRACION.

Sean E'_n y E''_n espacios euclideanos de dimensión n. Podemos encontrar por el método que acabamos de ver, unas bases ortonormales para cada uno.

Sean $\{e_1,\ldots,e_n\}$ $\{e^*_1,\ldots,e^*_n\}$ estas bases para E'_n y E''_n, respectivamente.

Dado $X \in E'_n \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i$. Podemos claramente, establecer la siguiente biyección. $X \to X^* = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i^*$ de E'_n en E''_n. Con los mismos coeficientes $X_1, \ldots, X_n$ donde se preservan las operaciones lineales.

Finalmente, el producto escalar de vectores correspondientes en E'_n , E''_n

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i,\quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i e_i,\quad X^* = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i^*,\quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i e_i^*$$

como las bases $\{e_i\}$ $\{e_i^*\}$ son ortonormales

$$\langle X,Y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} X_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n} Y_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

$$\langle X^*,Y^*\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} X_i e_i^*,\ \sum_{i=1}^{n} Y_i e_i^*\rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

con lo que se muestra que son isomorfos.

22. DEFINICION

Una base numerable en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es un sistema de vectores $\{e_i\}_{i\in \mathbb{N}}$ tal que todo elemento $X \in \mathbb{H}$ se puede expresar en la forma

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Observación: En los espacios de Hilbert de dimensión numerable para poder determinar, si dado un sistema de vectores ortonormales, éste es una base para el espacio, se establece la siguiente:

23. DEFINICION

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Se dice que un sistema de vectores ortonormales $\{e_1,\ldots,e_n,\ldots\}$ es completo si y solo si $X\in H$ y $\langle e_n, X\rangle = 0 \;\forall\; n\in\mathbb{N} \Rightarrow X = \overline{0}$.

24. TEOREMA

Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_1,\ldots,e_n,\ldots\}$ un sistema ortonormal completo. Entonces para cualquier vector $f\in H$ existe una descomposición:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} C_j e_j \tag{11}$$

y

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 \tag{12}$$

donde $C_k = \langle f, e_k\rangle$ (13)

Observemos que el teorema garantiza que un sistema ortonormal completo es una base.

DEMOSTRACION

Primero comprobemos (13) suponiendo que la descomposición (11) existe.

Multiplicando escalarmente (11) por el vector e_k y por ser continua el producto escalar

$$\langle f, e_k\rangle = \langle \sum_{j=1}^{\infty} C_j e_j, e_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{j=1}^{n} C_j e_j, e_k\rangle = \lim_{n\to\infty} C_k = C_k$$

Los coeficientes C_k son los coeficientes de Fourier del vector f con respecto al sistema $\{e_k\}$

Los C_k tienen un significado geométrico, ya que

$$<f,e_k> = \|f\| \|e_k\| \text{ Cos } (f,e_k) = \|f\| \cos(f,e_k)$$

$C_k = <f,e_k>$ es la proyección de f sobre la dirección del vector e_k.

Dado un vector determinado f y un sistema ortonormal finito $e_1,\ldots,e_n$, Sea $g = \sum_{k=1}^{n} <f,e_k> e_k$. $g \in H_n$ el subespacio generado por los vectores $e_1,\ldots,e_n$.

Sea h ∤ $f = g + h$

Como $<h,e_j> = <f,e_j> - <g,e_j> = <f,e_j> - <f,e_j> = 0$

$$\Rightarrow h \perp H_n$$

En lenguaje geométrico h es la perpendicular que baja desde el final del vector f sobre el subespacio H_n, y el vector g es la proyección de f sobre este mismo subespacio.

Por teorema de Pitágoras

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2 = \sum_{k=1}^{n} <f,e_k>^2 + \|h\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} <f,e_k>^2$$

Obtenemos la conocida como desigualdad de Bessel.

$$\sum_{k=1}^{n} <f,e_k>^2 \leq \|f\|^2 \qquad \forall\ n \tag{14}$$

lo que implica

$$\sum_{k=1}^{\infty} <f,e_k>^2 \leq \|f\|^2 \tag{15}$$

también conocida con el mismo nombre.

Ahora formemos la sucesíon $\{h_n\}$ donde

$$h_n = f - \sum_{j=1}^{n} <f,e_j> e_j, \text{ como vimos } < h_n,e_j> = 0$$

si $j \leq n$.

Sea h_p $p > n$

$$\| h_n - h_p \|^2 = \| (f - \sum_{j=1}^{n} <f,e_j> e_j) - (f - \sum_{j=1}^{p} <f,e_j> e_j) \|^2$$

$$= \| \sum_{j=n+1}^{p} <f,e_j> e_j \|^2 = \sum_{j=n+1}^{p} <f,e_j>^2 \to 0$$

$$n \to \infty$$

Ya que la serie es convergente por (15) $\Rightarrow \{h_n\}$ es una sucesión de Cauchy y como $\mathbf{H}$ es completo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h \varepsilon H$$

como $<h_n,e_j> = 0 \quad \forall\, j \leq n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} <h_n,e_j> = 0 \ \forall\, j \varepsilon \mathbb{N}$

$$\Rightarrow <\lim_{n\to\infty} h_n,\ e_j> = <h,e_j> = 0 \qquad \forall\, j \varepsilon \mathbb{N}$$

como $\{e_n\}$ es completo, entonces $h = \overline{0}$, es decir

$$0 = \lim_{n\to\infty} h_n = f - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} <f,e_j> e_j \quad \Rightarrow$$

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} <f,e_j> e_j = \sum_{j=1}^{\infty} <f,e_j> e_j$$

con lo que se comprueba (11). Ahora

$$\| f \|^2 = <f,f> = \lim_{n\to\infty} <\sum_{j=1}^{n} <f,e_j> e_j, \sum_{j=1}^{n} <f,e_j> e_j>$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} <f,e_j>^2 = \sum_{j=1}^{\infty} <f,e_j>^2$$

Con lo que se prueba (12)

Nota 1: la fórmula (12) se le conoce como fórmula de Parseval

Nota 2: si g es otro vector en H.

$$<f,g> = \sum_{k=1}^{\infty} <f,e_k> <g,e_k>$$

Nota 3: si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es cualquier sucesión de reales, tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ converge en H.

Si $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, $a_k = <f,e_k>$

25. PROPOSICION

Los espacios $L_2[a,b]$ y l_2 son isomorfos.

De acuerdo con la nota 3 cada serie de cuadrados convergente es la sucesión de coeficientes de Fourier de algún vector en el espacio H. Con lo cual podemos establecer claramente la biyección entre estos dos espacios.

Observación: para aplicar el teorema 24 necesitamos un sistema ortonormal completo. Como no es inmediato que - dado un sistema ortonormal $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ sea completo, en el espacio H; un criterio de completez es el siguiente.

26. TEOREMA

Un sistema ortonormal $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ es completo si y sólo si las combinaciones lineales de vectores del sistema forma un conjunto denso en H espacio de Hilbert.

DEMOSTRACION.

$\Rightarrow$) Sea $M = \{f | f$ es combinación lineal de $e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$

$$\text{Sea } g \in H \Rightarrow g = \sum_{j=1}^{\infty} C_j e_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} C_j e_j$$

como para cada n $\sum_{j=1}^{n} C_j e_j \in M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} C_j e_j \in \overline{M} \Rightarrow H \subset \overline{M}$ y evidentemente $\overline{M} \subset H$

$\therefore \quad \overline{M} = H$

$\Leftarrow$) Sea $g \in H \ni g \perp e_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow g \perp f \ \forall\, f \in M$

por propiedad 16.1 y 2, $g \perp f \quad \forall\, f \in \overline{M} = H \Rightarrow g \perp g \Rightarrow g = \bar{0}$

$\therefore \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ es un sistema completo $\square$

Observación: De acuerdo con la fórmula de ortogonalización cada vector e_n es una combinación lineal de los vectores $X_1, X_2, \ldots X_n$ y recíprocamente cada X_n es combinación lineal de los vectores $e_1, \ldots, e_n$. Entonces, la completez del Sistema $\{e_n\}$ puede ser establecida demostrando que la totalidad de combinaciones lineales de los vectores originales $\{X_n\}$ es denso en el espacio H.

27. EJEMPLO

Los vectores 1, cos X, sen X,... forman un sistema ortogonal en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$. Como las combinaciones de vectores de este sistema (los polinomios trigonométricos) forman un conjunto denso en $L_2[-\pi, \pi]$, Por el teorema 26 el sistema 1, cos X, sen X,... es completo en el espacio $L_2[-\pi,\pi]$. De acuerdo con el teorema 24 cada función $\varphi(X)\in L_2[-\pi,\pi]$ se puede expresar como una serie de estas - funciones la cual es convergente en la métrica del espacio $L_2[-\pi,\pi]$. Para normalizarlas, se puede calcular que $\|1\|^2 = 2\pi$, $\|\cos mx\|^2 = \|\text{sen } nX\|^2 = \pi$. La descomposición que buscamos tiene la forma

$$\varphi(X) = <\varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}> \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + <\varphi, \frac{\cos X}{\sqrt{\pi}}> \frac{\cos X}{\sqrt{\pi}} +$$

$$+ <\varphi, \frac{\text{sen } X}{\sqrt{\pi}}> \frac{\text{sen } X}{\sqrt{\pi}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X)\,dX + \frac{\cos X}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X) \cos X\,dX +$$

$$+ \frac{\text{sen } X}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X) \text{ sen } X\,dX + \ldots$$

Con la siguiente notación

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X)\,dX \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X) \cos nX\,dX$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(X) \text{ sen } nX\,dX$$

llegamos a la conocida expansión de la serie de Fourier.

$$\varphi(X) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx).$$

$\therefore$ Esta serie converge, para cualquier $\varphi(X)\in L_2[-\pi,\pi]$, en la métrica de $L_2[-\pi,\pi]$.

Una observación importante, es que por las propiedades de separabilidad, se puede establecer, sin dificultad, que un espacio de Hilbert H es separable (es decir tiene un conjunto denso numerable) si y sólo si tiene un sistema ortogonal completo (o una base numerable)

28. TEOREMA

Si H es un espacio de Hilbert y $L \subset H$ es un subespacio cerrado entonces para cualquier $f \in H$ existe una descomposición.

$$f = g + h$$

donde $g \in L$, $h \perp L$

y además g y h estan determinadas de forma única.

DEMOSTRACION

Es claro que L por ser cerrado también es un espacio de Hilbert. Entonces existe un sistema ortonormal $\{e_n\}$ completo en el subespacio L. Supongamos que la Dimensión de L es infinita.

Ahora sea $f \in H$ y sea

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \Rightarrow g \in L$$

Sea $h \ni f = g + h$

$$\langle h, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n, e_j \rangle$$

$$= \langle f, e_j \rangle - \lim_{k \to \infty} \langle \sum_{n=1}^{k} \langle f, e_n \rangle e_n, e_j \rangle$$

como estamos en el caso del teorema 24

$$= \langle f, e_j \rangle - \lim_{k \to \infty} \langle f, e_j \rangle = 0$$

$$\Rightarrow h \perp L$$

para demostrar la unicidad de los vectores g, h.

Sea g' cualquier vector en L.

$$f = g' + h' \quad y \quad como\ g' = g + (g'-g)$$

$$< h',e_j> = <f, e_j> - <g',e_j>$$

$$= <f, e_j> - <g, e_j> - <g'-g,e_j>$$

$$< h',e_j> = -<g'- g,e_j> = 0 \ \forall j \Leftrightarrow g' - g = 0$$

$$\Rightarrow h' = h$$

Si la dimensión es finita es inmediato ∎

29. PROPOSICION

El sistema de Legendre es completo en el espacio $L_2[-1,1]$.

Solo daremos el camino para su demostración ya que resultó muy larga.

Primero se demuestra que toda función en $L_2[a,b]$ puede aproximarse, en la norma de L_2, por funciones continuas en $L_2[a,b]$. Luego que los polinomios, es decir las combinaciones lineales de $1,X,X^2,\ldots$ son densos en $C[-1,1]$ para la norma uniforme, por lo tanto para la norma de $L_2[-1,1]$. Por lo dicho anteriormente lo mismo vale para el sistema ortonormalizado, que son los polinomios de Legendre.

CAPITULO 2

OPERADORES LINEALES

1. DEFINICION

a) Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que la función $f : H \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal si:

i) $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$

ii) $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

b) Si además f es acotada en la esfera unitaria,

(e.d. $\exists\ M \in \mathbb{R} \ni \forall\ X \in H$, $\|X\| = 1$ tenemos $|f(X)| \leq M$)

decimos que f es acotada.

2. EJEMPLO BASICO

Dado un vector fijo X_0 en H un espacio de Hilbert. $\forall\ X \in H$, sea

$$f(X) = \langle X, X_0 \rangle \tag{1}$$

Claramente f es una funcional lineal sobre H. Además, está acotada sobre la esfera unitaria debido a la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky.

$$|f(X)| = |\langle X, X_0 \rangle| \leq \|X\| \|X_0\|$$

En lo sucesivo H designará a un espacio de Hilbert.

3. DEFINICION

El ortogonal de un conjunto S, al cual denotaremos por $S^{\perp}$, es $\{X \in H \mid \forall\ Y \in S\ \langle X, Y \rangle = 0\}$

Observaciones: 1. $S^{\perp}$ es subespacio vectorial de H.

2. $S^{\perp}$ es cerrado por la propiedad 16 cap. I.

4. LEMA

Si f es una funcional lineal entonces f es acotada si y sólo si f es continua.

$\Rightarrow$) es inmediato

$\Leftarrow$) si f es continua $\Rightarrow$ f es continua en 0 $\Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 \ni$ si $\|X\| \leq \delta$ entonces $|f(X)| < \varepsilon$

Por otro lado

Sea $X \ni \|X\| \leq 1 \Rightarrow \delta\|X\| = \|\delta X\| \leq \delta$

$\Rightarrow |f(\delta X)| < \varepsilon \Rightarrow |f(X)| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall\ X \ni \|X\| \leq 1$

$\therefore$ f es acotada.

Ahora es inmediato el siguiente resultado.

5. PROPOSICION

Si f es una funcional lineal acotada en H, entonces $H_f = \{X | f(X) = 0\}$ es un subespacio cerrado de H.

6. LEMA

Si $f \neq 0$ es una funcional lineal acotada en H, y $H_f = \{X \in H | f(X) = 0\}$ entonces $(H_f)^{\perp}$ es un subespacio unidimensional.

DEMOSTRACION

Sean $X, Y \in (H_f)^{\perp}$; $z = f(X)y - f(Y)X \Rightarrow z \in (H_f)^{\perp}$.

Por otro lado

$f(z) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X) = 0 \Rightarrow z \in H_f$

$\Rightarrow$ $<z,z> = 0$ $\Rightarrow Z = 0$

$\therefore$ x,y son linealmente dependientes

7. TEOREMA

Sea H un espacio de Hilbert. Entonces para toda funcional lineal acotada f en H, existe X_0 en H tal que $f(X)=<X,X_0>$

DEMOSTRACION

Cada $X\varepsilon H$, por teorema 28 Capítulo I, $X = Y+Z$ donde $Y\varepsilon H_f$, $z\varepsilon H_f^{\perp}$. Por otro lado, sea $e\varepsilon H_f^{\perp}$ un vector unitario; por lema 6 cada $z\varepsilon H_f$, $Z = \lambda e$ para alguna $\lambda\varepsilon \mathbb{R}$. De donde $X = Y + \lambda e$, entonces por teorema 24 Capítulo I.

$$f(X) = f(Y) + <X,e>\, f(e) = <X, f(e)\,e> = <X,X_0>$$

donde $X_0 = f(e)e$ es un vector fijo del espacio H.

Observación: toda funcional lineal acotada tiene la forma del ejemplo básico 2.

8. DEFINICION

Sea V un espacio vectorial. Un operador A es una función de V en V.

El operador es lineal si:

i) $A(X + Y) = AX + AY$ para toda $X,Y\varepsilon V$

ii) $A(\alpha X) = \alpha AX$ para cualquier $X\varepsilon V$ y cualquier escalar α.

Aquí trabajaremos principalmente con operadores en espacios de Hilbert H.

De (i) (ii) obtenemos la forma mas general $A(\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k) =$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

9. EJEMPLOS

1.- El operador $N: V \to V$ tal que $Nx = 0 \;\forall\; x \in V$ es obviamente lineal. Este es el operador nulo.

2.- El operador $E \ni Ex = x$ también es lineal.

Este es el operador idéntico

3.- Un operador lineal $A \ni Ax = \lambda x$ (donde λ es un real fijo) es llamado el operador de homotecia.

4.- Sea H de dimensión numerable. Sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ un sistema ortonormal completo en H y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de reales $\ni$. $|\lambda_n| \leq C$, para cualquier

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in H \quad (\text{donde } \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty)$$

definimos $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j$ (2)

A es efectivamente un operador lineal sobre H ya que

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \xi_j^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty$ y evidentemente A satisface las condiciones (i) (ii). Semejante operador será llamado un operador de la forma normal. Cada vector básico e_n es mapeado por el operador A en su hemotético con coeficiente λ_n. $Ae_n = \lambda_n e_n$.

5.- Sea $\alpha(X)$ una función acotada medible sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. Un operador lineal puede ser definido sobre el espacio $L_2[a,b]$ como la multiplicación por $\alpha(X)$.

$$A\varphi = \alpha\varphi \text{ ó } (A\varphi)(X) = \alpha(X)\varphi(X)$$

y por la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky el operador A es acotado.

6.- El operador de Fredholm. Sea $K(X,S)$ una función medible fija definida en la región

$$G = \{(X,S) \mid a \leqslant X \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant b\}$$

Cuyo cuadrado es integrable sobre la región G.

$$(\text{e.d. } \int_a^b \int_a^b k^2(X,S)\,dS\,dX = K^2 < \infty).$$

Definimos un operador A sobre el espacio $L_2[a,b]$ por la fórmula

$$\psi(X) = (A\varphi)(X) = \int_a^b k(X,S)\ \varphi(X)\,dS \tag{3}$$

Por el teorema de Fubini, como $K(X,S)$ es integrable sobre la región G, es integrable como función de S y pertenece a $L_2[a,b]$ para casi toda X.

Además

$$\int_a^b \psi^2(X)\,dX = \int_a^b [\int_a^b k(X,S)\varphi(S)\,dS]^2 dX$$

y como $\varphi(S) \in L_2[a,b]$ usando la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky para $L_2[a,b]$

$$\int_a^b \psi^2(X)\,dX \leqslant \int_a^b [\int_a^b k^2(X,S)\,dS \int_a^b \varphi^2(S)\,dS]\,dX$$

$$= \int_a^b \varphi^2(S)\,dS [\int_a^b \int_a^b k^2(X,S)\,dS\,dX]$$

$$\leqslant [\int_a^b \varphi^2(S)\,dS]\ k^2 < \infty$$

$$\therefore \quad \psi(X) \in L_2[a,b]$$

(es decir A está bien definido como operador en el espacio $L_2[a,b]$).

Finalmente es claro que el operador de Fredholm es un operador lineal.

10. PROPOSICION

Si para alguna sucesión $\{\lambda_n\}$ un operador A esta definido en H como $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j$, si $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ entonces los números $|\lambda_n|$ tienen una cota común.

DEMOSTRACION

Será por reducción al absurdo. Supongamos que A está bien definido pero que $\{\lambda_n\}$ es no acotada, entonces para

$M = 1 \ \exists \ N_1 \ni |\lambda_{N_1}| > 1$

$M = 2 \ \exists \ N_2 \ni |\lambda_{N_2}| > 2$ podemos escoger $N_2 \ni N_2 > N_1$

Así sucesivamente

para $M = K \ \exists \ N_k \ni |\lambda_{N_k}| > K$ donde $N_k > \ldots > N_2 > N_1$

Sea $\{\xi_n\} \ni$

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } n = N_k \\ 0 & \text{si } n \neq N_k \end{cases}$$

Sea $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j$ entonces $x \varepsilon H$ ya que

$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ sin embargo $Ax \notin H$ porque

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{N_k} \xi_k e_k \quad y$$

$$\| Ax \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{N_k}^2 \xi_k^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

que no es finito, entonces A no puede ser un operador lineal en H ! ∎

Observación: La proposición lo que muestra es que también es condición necesaria, que la suceción $\{\lambda_n\}$ sea acotada, - para que el operador de los ejemplos 9.4 este bien definido.

11. PROPOSICION

Si para alguna función $\alpha(X)$ medible, un operador A está definido en $H = L_2[a,b]$ como $A\varphi = \alpha\varphi$ para toda $\varphi \varepsilon L_2[a,b]$ entonces $\alpha(X)$ es una función acotada.

DEMOSTRACION

No pierde generalidad si suponemos que $\alpha(X) \geq 0$

Sea $B_n = \{X | n \leq \alpha(X) < n + 1\}$ (4)

y $a_n = \mu(B_n)$ μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (5)

Sea $\varphi(X)$ ∋

$$\varphi(X) = \begin{cases} 0 & si \quad X \varepsilon B_n \quad y \ a_n = 0 \\ 0 & si \quad X \varepsilon B_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_n}\ \alpha(X)} & si \quad X \varepsilon B_n \ y \quad a_n \neq 0 \end{cases}$$

$\varphi(X)$ se puede expresar como

$$\varphi(X) = \sum_{i\varepsilon j} \frac{\chi_{B_n}}{\sqrt{a_n}\ \alpha(X)} \qquad \text{donde} \quad J = \{n \mid a_n \neq 0\} \quad \text{y} \quad \chi_{B_N}$$

es la función característica de la B_n. Veamos que $\varphi\varepsilon L_2$.

$$\int_a^b \varphi^2 dX = \sum_{n\varepsilon j} \int_{B_n} \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}\ \alpha(X)}\right)^2 dX \text{ ya que las } B_n \text{ son ajenas}$$

$$= \sum_{n\varepsilon j} \int_{B_n} \frac{1}{a_n\ \alpha^2(X)} dX \leq \sum_{n\varepsilon j} \int_{B_n} \frac{1}{a_n\ n^2} dX \text{ por } \quad (4)$$

$$= \sum_{n\varepsilon j} \frac{1}{a_n\ n^2} \int_{B_n} dX = \sum_{n\varepsilon j} \frac{a_n}{a_n\ n^2} \quad \text{por (5)}$$

$$= \sum_{n\varepsilon j} \frac{1}{n^2} < \infty \quad \text{como se afirmó.}$$

Ahora veamos, si $\alpha\varphi\varepsilon L_2$.

$$\int_a^b (\alpha\varphi)^2\ dX = \sum_{n\varepsilon j} \int_{B_n} \frac{\alpha^2(X)}{a_n \alpha^2(X)} dX = \sum_{n\varepsilon j} \frac{1}{a_n} \int_{B_n} dX$$

$$= \sum_{n\varepsilon J} 1 < \infty$$

$\Leftrightarrow$ J es finito $\Leftrightarrow$ son un número finito de $B_n \ni \mu(B_n) \neq 0$

y esto equivale a que $\alpha(X)$ es acotada. ∎

Observación: La proposición afirma que es condición necesaria, también, que la función $\alpha(X)$ sea acotada, para que el operador de los ejemplos 9.5 esté bien definido.

Como se pueden hacer varias operaciones entre operadores lineales sobre un espacio vectorial V, resultando la creación de nuevos operadores , tenemos la siguiente.

12. DEFINICION

Se le llamará operador:

(1) Adición

Si dados los operadores lineales A, B en V; el operador $C = A + B$ queda definido por la fórmula

$$Cx = (A + B)x = Ax + Bx.$$

(2) Multiplicación por un escalar.

Si A es un operador lineal y λ un número real; el operador $B = \lambda A$ está definido por la fórmula

$$Bx = (\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

(3) Composición

Si A,B son operadores lineales; el operador $C=AB$ está definido por la fórmula

$$Cx = (AB)x = A(Bx).$$

(4) Potencia n'ésima.

Si A es un operador lineal, el operador A^n está definido por la fórmula de recurrencia $A^n = A\,A^{n-1}$ donde $A^\circ = E$ $n = 1,2,\ldots$

(5) Inverso

Si dado el operador A, existe el operador B tal que $AB = BA = E$, se le denotará por A^{-1} $(B = A^{-1})$

observación: Las propiedades usuales del álgebra son válidas para estas operaciones especificas. La conmutatividad de la suma, asociatividad y distribuitividad (con la excepción de la conmutatividad para la composición de operadores).

Una propiedad importante de los operadores lineales es: Si los operadores C, D tienen inversos C^{-1}, D^{-1} respectivamente entonces el operador C D tiene el inverso $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$.

13. DEFINICION

Si $A: H \to H$ es un operador definido en un espacio de Hilbert H, la norma de A es la mínima cota superior (puede ser ∞) de los valores de la función $f(x) = \|Ax\|$ sobre los vectores X unitarios de H.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{6}$$

Un operador A con norma finita se llama acotado.

Nota: para evitar confusión entre la norma de un vector y la norma de un operador nos referiremos a los operdores con las primeras letras del alfabeto latino y queda establecido que un operador acompañado de un vector es el vector imagen.

14. EJEMPLOS

(1) La norma del operdor nulo es evidentemente cero.

Pero además es el único con norma cero

Si $\|A\| = 0 \Rightarrow Ax_0 = 0 \quad \forall\, x_0 \ni \|x_0\| = 1$. Como $\forall\, x \in H$

$x = \lambda x_0 \Rightarrow Ax = A(\lambda x_0) = \lambda A x_0 = 0$

(2) La norma del operador idéntico E es igual a 1 ya que

$\|Ex\| = \|x\| \Rightarrow \|E\| = 1$

(3) La norma del operador de hometecia $Ax = \lambda x$ es igual a $|\lambda|$

(4) La norma de un operador de la forma normal en el espacio de Hilbert (ejemplo 9.4) es igual a la mínima cota superior de los números $|\lambda_n|$.

$$\text{Si} \quad C = \sup|\lambda_n| \ \text{y} \quad \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \lambda_j^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = C^2$$

por tanto $\|A\| \leq C$, por otro lado

$$\|A\| \geq \sup_n \|Ae_n\| = \sup_n \|\lambda_n e_n\| = \sup_n |\lambda_n| = C$$

con lo que se demuestra la afirmación.

(5) La norma de un operador que consista en la multiplicación por una función $\alpha(X)$ sobre el espacio $L_2[a,b]$ (ejemplo 9.5) es igual al real k tal que

$$\mu\{X \mid |\alpha(X)| > k\} = 0 \quad y \quad \mu\{X \mid |\alpha(X)| > k - \varepsilon\} > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ (7)$$

(para una función continua $k = \max\limits_{a \leq X \leq b} |\alpha(X)|$

DEMOSTRACION

Sea $B_r = \{X \mid |\alpha(X)| > r\}$ y $B_r^c = \{X \mid |\alpha(X)| \leq r\}$

si $\mu(B_r) = 0$

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\alpha(X)\varphi(X)\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \sqrt{\int_a^b \alpha^2(X)\varphi^2(X)\,dX}$$

$$= \sup_{\|\varphi\|=1} \sqrt{\int_{B_r} \alpha^2\varphi^2\,dX + \int_{B_r^c} \alpha^2\varphi^2\,dX}$$

como $\mu(B_r) = 0$

$$= \sup_{\|\varphi\|=1} \sqrt{\int_{B_r^c} \alpha^2\varphi^2 dx} \leq r$$

$$\text{e.d. } \|A\| \leq r \quad \text{Si } \mu(B_r) = 0 \tag{8}$$

Si $\mu(B_k) = \delta > 0$

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \sqrt{\int_{B_k} \alpha^2\varphi^2 \, dx + \int_{B_k^c} \alpha^2\varphi^2 dx}$$

$$\geq \sqrt{\int_{B_k} \alpha^2\varphi_0^2 dx + \int_{B_k^c} \alpha^2\varphi_0^2 dx} \quad \text{donde } \|\varphi_0\| = 1$$

escogiendo $\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu(B_k)}} & \text{si} \quad x\varepsilon B_k \\ 0 & \text{si} \quad x\varepsilon B_k^c \end{cases}$

es claro que $\|\varphi_0(x)\| = 1$ entonces

$$\|A\| \geq \sqrt{\int_{B_k} \left(\frac{\alpha(X)}{\sqrt{\mu(B_k)}}\right)^2 dx} \geq \sqrt{k^2 \frac{\mu(B_k)}{\mu(B_k)}} = k$$

$$\text{e.d. } \|A\| \geq k \quad \text{si} \quad \mu(B_k) = \delta > 0 \tag{9}$$

Sean $N_1 = \{r\varepsilon\ \mathbb{R} \mid \mu(B_r) = 0\}$ y $N_2 = \{r\varepsilon\ \mathbb{R} \mid \mu(B_r) > 0\}$

Veremos que:

$$\sup N_2 = \inf N_1 = k = \|A\| \tag{10}$$

y que el real k satisface las condiciones (7)

La primera igualdad de (10) es consecuencia inmediata del hecho siguiente:

$r_1 < r_2 \Rightarrow B_{r_2} \subset B_{r_1}$ y la primera igualdad de (10) implica que $k = \|A\|$

Por definición de sup N_1 es claro que

$\forall\ \varepsilon > 0,\ (k - \varepsilon) \notin N_1 \ \therefore\ \mu(B_{k-\varepsilon}) > 0$ lo que muestra que $\mu\{X|\ |\alpha(X)| > k - \varepsilon\} > 0$

Para ver que k satisface la condición

$\mu\{X|\ |\alpha(X)| > k\} = 0$ basta mostrar que $k \notin N_1$, y esto es consecuencia de:

$$B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{k+\frac{1}{n}},$$

$$k = \sup N_2 \Rightarrow (k + \tfrac{1}{n}) \notin N_2 \Rightarrow \mu(B_{k+\frac{1}{n}}) = 0 \quad \forall\ n$$

Por lo tanto $\mu(B_k) = 0$, por una unión numerable de conjuntos de medida cero.

(6) Para la norma del operador de Fredholm (ejemplo 9.6) con núcleo cuadrado integrable $k(X,S)$ sólo daremos una cota.

$$\|A\|^2 = (\sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|)^2 \leq \sup_{\|\varphi\|=1} \int_a^b \varphi^2(S)\,dS\ [\int_a^b \int_a^b k^2(X,S)\,dS\,dX]$$

por la ecuación de los ejemplos 6.2 capítulo I.

$$\therefore\ \|A\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b k^2(X,S)\,dS\,dX$$

15. Propiedades de los operadores lineales con norma finita.

Sean A, B operadores lineales con norma finita

(1) para todo vector $x \in H$; $\|Ax\| \leq \|A\|\ \|x\|$

(2) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(3) $\|AB\| \leqslant \|A\| \; \|B\|$

DEMOSTRACION

(1) obviamente es verdadero para el vector nulo y para cualquier vector unitario por la definición de norma del - operador, es válido.

Si x es un vector arbitrario no nulo entonces

$$\|A \frac{x}{\|x\|}\| \leqslant \|A\|$$

Como A es un operador lineal, $\frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \leqslant \|A\|$ es decir

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \; \|x\|$$

(2) Si $\|x\| = 1 \Rightarrow \|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\|$

$$\leqslant \|A\| + \|B\|$$

(3) Si $\|x\| = 1 \Rightarrow \|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \|Bx\| \leqslant \|A\| \|B\|$

16. PROPOSICION

A es un operador lineal acotado con norma M si y sólo si $\sup\limits_{\|x\| = \|y\| = 1} |\langle Ax, y\rangle| = M$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) para cada x_0 } $\|x_0\| = 1$,

$\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y\rangle| \geqslant \sup\limits_{\|y\|=1} |\langle Ax_0, y\rangle| = \|Ax_0\|$ ya que pa-

ra $y = \dfrac{Ax_0}{\|Ax_0\|}$, $|\langle Ax_0, y\rangle| = \|Ax_0\|$ y $|\langle Ax_0, y\rangle| \leqslant \|Ax_0\| \;\; \forall\, y$ }

$$\|y\| = 1 \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x_0\|=1} \|Ax_0\| \leqslant \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |\langle Ax, y\rangle| \qquad (11)$$

Por otro lado por la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky y por la primera propiedad de los oparadores lineales con norma finita tenemos

$$|\langle \Lambda x, y\rangle| \leq \|\Lambda x\| \, \|y\| \leq \|\Lambda\| \, \|x\| \, \|y\| \tag{12}$$

para vectores unitarios x, y $|\langle \Lambda x, y\rangle| \leq \|\Lambda\| \Rightarrow$

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle \Lambda x, y\rangle| \leq \|\Lambda\| \tag{13}$$

queda demostrada la condición suficiente.

$\Leftarrow$) Como el $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle \Lambda x, y\rangle|$ es finito y de acuerdo con la desigualdad (11), Λ es acotada. Como Λ es acotada es válida la desigualdad (12) y por lo tanto la (13).

Con lo que queda demostrada la condición necesaria ∎

17. PROPOSICION

Cada funcional bilineal acotada F(x,y) en un espacio de Hilbert, H, puede ser representado en la forma $\langle \Lambda x, y\rangle$, donde Λ es un operador lineal acotado.

DEMOSTRACION

Sea F(x,y) una funcional bilineal acotada $\Rightarrow$ para cada x fija, F(x,y) es una funcional lineal en y, por teorema 7. $F(x,y) = \langle x', y\rangle$ para alguna $x' \in H$.

Sea Λ el operador que manda a cada $x \in H$ en x'.

Por un lado, usando la bilinealidad en la primera variable.

$$F(\alpha x + z, y) = \alpha F(x,y) + F(z,y) = \alpha\langle Ax,y\rangle + \langle Az,y\rangle$$

$$= \langle \alpha Ax + Az, y\rangle$$

por otro lado $F(\alpha x + z, y) = \langle A(\alpha x + z), y\rangle$

$\Rightarrow \quad A(\alpha x + z) = \alpha Ax + Az$

$\therefore \quad A$ es un operador lineal

Si $F(x,y) = \langle Ax,y\rangle$ esta acotado

$$\Rightarrow \quad \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |\langle Ax, y\rangle| = M$$

por proposición 16 tenemos que A es un operador acotado ∎

18. PROPOSICION

Para cada operador lineal A en H, existe un operador lineal A^* en H tal que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \tag{14}$$

DEMOSTRACION

Sea $F(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ es claro que es una funcional bilineal en $H \times H$. Haciendo una demostración pareceida a la proposición anterior, cambiando las variables tenemos $\exists\, A^*$ $\ni$ $F(x,y) = \langle x, A^*y\rangle$

$\therefore \exists\, A^*$ un operador lineal $\ni \langle Ax,y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$

Nota: A^* con la propiedad (14) se le conoce con el nombre del operador adjunto de A. ∎

19. PROPOSICION

$$\|A^*\| = \|A\|$$

DEMOSTRACION

Si A es acotado y $\|A\| = M \Rightarrow$ por la proposición 16,

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax,y\rangle| = M = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x,A^*y\rangle|$$

por la misma proposición 16.

A^* es acotada y $\|A^*\| = M$.

20. PROPOSICION

Si el operador A tiene un operador inverso acotado entonces su adjunto A^* posee operador inverso acotado B^*.

DEMOSTRACION

Sea A un operador con operador inverso B por la proposición (18) existe B^* un operador tal que $\langle Bx,y\rangle = \langle x,B^*y\rangle$

veamos que B^* es el operador inverso de A^*

Sea el operador producto A^*B^* entonces

$$\langle x,(A^*B^*)y\rangle = \langle x,A^*(B^*y)\rangle$$

como A^* es el adjunto de A entonces

$$= \langle Ax,B^*y\rangle$$

como B^* es el adjunto de B

$$= \langle B(Ax),y\rangle$$

como A,B son inversos

$$= \langle x,y\rangle$$

$$\Rightarrow (A^*B^*) = E$$

análogamente $(B^*A^*) = E$

$\Rightarrow$ B^* es el operador inverso de A^* la proposición 19 permite asegurar que B^* es acotado.

21. DEFINICION

Un subespacio V' de un espacio vectorial V es llamado invariante bajo el operador A, si y sólo si $x \in V' \Rightarrow Ax \in V'$.

El espacio nulo y el espacio total son invariantes bajo cualquier operador lineal.

Sin embargo nos interesan los subespacios invariantes no triviales.

Los subespacios invariantes unidimensionales de un operador A juegan un papel importante, por lo cual les daremos una atención especial.

22. DEFINICION

Los vectores no nulos que pertenecen a un subespacio invariante unidimensional del operador A es llamado un vector característico ($\overline{v}$.c.) del operador A. Es decir, si $x \neq 0$ es mapeado por A en un vector colineal, entonces x es un $\overline{v}$.c.

$$Ax = \lambda x$$

El real λ que aparece en la ecuación es llamado el valor característico (v.c.) del operador A corresponde al $\overline{v}$.c. x.

23. EJEMPLOS

(1) Considerando los ejemplos 9 de 1 a 3 cada subespacio es invariante y cada vector no nulo del espacio es $\overline{v}$.c. con v.c. $0, 1, \lambda$ respectivamente.

(2) Un operador de la forma normal por definición tiene $\overline{v}$.c. $e_1, e_2, \ldots, e_n \ldots$ con valores característicos $\lambda_1 \ldots, \lambda_n, \ldots$ respectivamente.

(3) El operador de multiplicación por $\alpha(x) = x$ no

tiene $\overline{v}$.c. en el espacio $L_2[a,b]$ ya que no existe ninguna función $\varphi(X)$ no nula en $L_2[a,b]$ tal que

$$x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

(4) Los $\overline{v}$.c del operador de Fredholm son la solución de la ecuación integral

$$A\varphi = \int_a^b k(x,S)\varphi(S)dS = \lambda\varphi(X)$$

La existencia de soluciones a esta ecuación será el tema del capítulo 3.

24. OBSERVACIONES BASICAS

(1) Sea A un operador lineal en H, si

$$S = \{x \mid x \text{ es } \overline{v}.c. \text{ de un mismo v.c. } \lambda\}$$

entonces S es un subespacio de H, ya que A es un operador lineal.

(2) Llamaremos a S el subespacio característico correspondiente al valor característico λ.

(3) Si tenemos un operador lineal A en un espacio de Hilbert el cual es de la forma normal (ejemplos 9.4) la investigación de sus propiedades se facilita notablemente, ya que una base de $\overline{v}$.c. del operador A determina un "sistema coordenado" único en el cual los problemas conectados con el operador A pueden ser convenientemente resueltos.

(4) Una condición necesaria para que un operador A sea reducible a la forma normal es la ecuación,

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle \tag{15}$$

la cual debe ser satisfecha para cualquier x,y en el espacio H.

Claramente los operadores de los ejemplos 9.1,9.2,9.3 cumplen con la ecuación (15).

25. DEFINICION

Se dice que un operador es simétrico si y sólo si

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle \quad \forall \quad x,y\varepsilon H.$$

Observación: La condición de simetria no es suficiente para que un operador se pueda expresar en su forma normal, en efecto veamos el siguiente.

26. Ejemplo

El operador de multiplicación por la función $\alpha(x) = x$ sobre el espacio $L_2[a,b]$ es simétrico.

$$\langle x\varphi,\psi\rangle = \int_a^b x\varphi\psi\, dx = \langle\varphi,x\psi\rangle$$

Este operador no tiene $\overline{v}$.c. como vimos y por tanto no es reducible a una forma normal.

Observación: Queda claro de lo anterior la importancia que tiene el que un operador pueda ser reducible a su forma normal. En esta última parte de este capítulo contestaremos a esta pregunta y veremos el por qué los operadores compactos o completamente continuos son tan relevantes.

27. DEFINICION

Sea A un operador en H. Si para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ de vectores en H, la sucesión $\{Ax_n\}$ tiene una subsucesión convergente diremos que A es completamente contínuo o compacto.

En otras palabras un operador es completamente continuo si la imagen de todo acotado es relativamente compacto.

EJEMPLOS

1. El operador nulo, evidentemente, es completamente continuo (ejemplos 9.1)

2. El operador de homotecia y el operador idéntico (ejemplos 9.2 y 9.3) en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita no son completamente continuos.

En efecto, tomemos el sistema ortonormal completo de H. Para cada $n \neq m$

$$\|Ae_n - Ae_m\| = \|\lambda e_n - \lambda e_m\| = |\lambda| \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}\,\lambda$$

De donde, no se puede extraer ninguna subsucesión convergente. Como el operador idéntico es un caso particular del operador de homotecia ($\lambda = 1$) tampoco es un operador completamente continuo.

3. El operador normal (ejemplo 9.4) es completamente continuo si y sólo si $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

4. Si α acotada medible $|\alpha(x)| \geq \delta > 0$ donde quiera en $[a,b]$ entonces el operador $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ definido en los ejemplos 9.5 no es completamente continuo, ya que tomando un sistema ortonormal completo en $L_2[a,b]$ $\{f_n\}$ $\|f_n\| = 1$.

$$\|Af_n - Af_m\|^2 = \|\alpha(f_n - f_m)\|^2 \geq \delta^2 \|f_n - f_m\|^2 = 2\delta^2$$

entonces, no se puede extraer ninguna subsucesión convergente. Es decir el operador A no es completamente continuo.

5. El operador de Fredholm (ejemplo 9.6) es completamente continuo, se demostrará en el capítulo III.

28. PROPOSICION

Sea A un operador completamente continuo en H, entonces A es un operador acotado.

DEMOSTRACION

Lo haremos por reducción al absurdo.

Supongamos que A es un operador no acotado es decir

$$\forall\, M \;\exists\, x,\ \|x\| = 1 \;\}\; \|Ax\| > M$$

formemos la siguiente sucesión

para cada $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n$ $\|x_n\| = 1$ $\}$

$$\|Ax_n\| > n \quad .$$

La sucesión $\{x_n\}$ es acotada y de la sucesión $\{Ax_n\}$ es imposible extraer una subsucesión convergente ! ∎

Observación: como un operador acotado garantiza que éste es continuo entonces por la proposición 28 un operador completamente continuo garantiza la continuidad del operador.

Ahora avanzaremos al teorema fundamental sobre operadores simétricos y completamente continuos.

29. Teorema de Hilbert. (o teorema espectral)

En un espacio de Hilbert separable cada operador simétrico y completamente continuo posee un sistema ortogonal completo de vectores característicos.

Para la prueba de este teorema requerimos antes de los siguientes lemas.

30. LEMA

Si $\|e\| = 1$ y A es un operador simétrico, entonces

$$\|Ae\|^2 \leqslant \|A^2e\|$$

La igualdad se da sólo si existe un $\overline{v}$.c. del operador A^2 con el v.c. $\lambda = \|Ae\|^2$

DEMOSTRACION

En virtud de la simetría del operador y la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky.

$$\|Ae\|^2 \leqslant \langle Ae, Ae\rangle = \langle A^2e, e\rangle \leqslant \|A^2e\| \; \|e\| = \|A^2e\|$$

La desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky es la igualdad sólo cuando son colineales, es decir $A^2e = \lambda e$ o sea que e es un vector característica de A^2 y

$$\lambda = \|A^2e\| = \|Ae\|^2 \qquad \blacksquare$$

31. DEFINICION

Llamaremos el *vector maximal* de un operador acotado A, al vector unitario e_0, para el cual

$$\|Ae_0\| = \|A\|$$

Observación: En general no todos los operadores acotadas - tiene vector maximal.

EJEMPLO.

Sea $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ el operador multiplicación por una función no constante α acotada y medible (Ejemplo 9.5) no tiene vector maximal. Por el ejemplo 14.5 sabemos que $\|A\| = k$ donde

$$\mu\{x \mid |\alpha(x)| > k\} = 0, \quad \mu\{x \mid |\alpha(x)| > k-\varepsilon\} > 0 \ \forall \ \varepsilon > 0 \quad (*)$$

Mostrar que no tiene vector maximal es verificar que $\forall$ $f, \|f\| = 1$ $\|Af\| \neq k$ por definición de norma $\|Af\| \leq k$ se reduce a verificar $\|Af\| < k$ o equivalentemente $\|Af\|^2 < k^2$ es decir $\forall$ f, $\|f\| = 1$ $\int_a^b \alpha^2(x)\, f^2(x)dx < k^2$

$[a,b]$ se puede descomponer como una unión ajena

$$[a,b] = E_k \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n) \cup N \text{ donde}$$

$$E_k = \{x \mid |\alpha(x)| = k\}, \quad C_0 = \{x \mid k-1 > |\alpha(x)| \geq 0\}$$

$$C_n = \{x \mid k - \tfrac{1}{n+1} > |\alpha(x)| \geq k - \tfrac{1}{n}\} \quad n = 1,2,\ldots \quad \text{y}$$

$$N = \{x \mid |\alpha(x)| > k\}$$

De acuerdo a (*) $\mu(N) = 0$ y $\exists$ $n \varepsilon \mathbb{N}$ $\ni$ $\mu(C_n) \neq 0$ ya que de lo contrario α sería la función constante k casi donde quiera.

Sea $J = \{n \varepsilon \mathbb{N} \mid \mu(C_n) \neq 0\}$

$$\int_a^b \alpha^2(x) f^2(x)dx = \int_{E_k} \alpha^2(x)dx + \sum_{n \varepsilon J} \int_{C_n} \alpha^2(x) f^2(x)dx$$

$$< k^2 \int_{E_k} f^2(x)dx + \sum_{n \varepsilon J} (k - \tfrac{1}{n+1})^2 \int_{C_n} f^2(x)dx$$

$$< k^2 \int_{E_k} f^2(x)dx + k^2 \sum_{n \varepsilon J} \int_{C_n} f^2(x)dx$$

$$= k^2 \int_a^b f^2(x)dx = k^2$$

$\therefore \int_a^b \alpha^2(x)f^2(x)dx < k^2$ con lo que se muestra la afirmación.

32. LEMA

Sea A un operador simétrico y completamente continuo, entonces A tiene un vector maximal.

DEMOSTRACION

Como A es acotado podemos escoger una sucesión $y_n = Ax_n$ con $\|x_n\| = 1 \;\; \forall\, n \ni \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = M$

Como A es completamente continuo.

$\exists\; y_{n_k}$ una subsucesión de y_n que converge es decir

$\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y$, por continuidad en la norma $\|y\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|y_{n_k}\| = M$

Sea $Z = \frac{y}{M}$ veamos que es el vector maximal

$$\|Az\| = \|A(\lim_{k\to\infty} \frac{Ax_{n_k}}{M})\| = \frac{1}{M} \lim_{k\to\infty} \|A^2 x_{n_k}\|$$

por el lema anterior.

$$\geq \frac{1}{M} \lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\|^2 = M$$

Por otro lado como $\|z\| = 1 \Rightarrow \|Az\| = M$

$\therefore$ z es el vector maximal del operador A ∎

33. LEMA

Si e_0 es el vector maximal de un operador simétrico A, entonces e_0 es un vector característico del operador A^2

con valor característico $\|A\|^2$.

DEMOSTRACION

Como e_0 es un vector maximal de A, por el lema 30 y por la definición de norma tenemos.

$$\|A\|^2 = \|Ae_0\|^2 \leq \|A^2 e_0\| \leq \|A^2\| = \|A\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\|Ae_0\|^2 = \|A^2 e_0\| = \|A\|^2 \text{ por el lema 30} \quad \Rightarrow$$

e_0 es vector característico del operador A^2

con valor $\lambda = \|Ae_0\|^2$.

$\therefore \quad \lambda = \|Ae_0\|^2 = \|A\|^2$. ∎

Observación: e_0 también es vector maximal del operador A^2.

34. LEMA

Si el operador A^2 tiene un vector característico con valor característico $M^2 = \|A\|^2$, entonces el operador A posee un vector característico con valor característico (M) ó (-M).

DEMOSTRACION

La ecuación $A^2 e_0 = M^2 e_0$ puede ser escrita en la forma $(A-ME)(A+ME)e_0 = 0$ donde E es el operador idéntico. Si suponemos que $z = (A+ME)e_0 \neq 0 \Rightarrow (A-ME)\, z = 0 \Rightarrow z$ es un $\overline{v}$.c. con v.c.M y si $(A+ME)e_0 = 0 \Rightarrow e_0$ es un $\overline{v}$.c con el v.c. - M ∎

Observación: Los cuatro ultimos lemas muestran que cada operador A simétrico y completamente continuo posee un vector característico con valor característico $\pm \|A\|$.

35. LEMA

Los vectores característicos de un operador simétrico correspondientes a valores característicos diferentes son mutuamente ortogonales.

DEMOSTRACION

Sea $\Lambda x = \lambda x$, $\Lambda y = \mu y$ donde $\lambda \neq \mu$.

Multiplicando la primera ecuación escalarmente por y, la segunda por x, además restando la segunda de la primera.

$$<\Lambda x, y> - <x, \Lambda y> = (\lambda - \mu) <x, y>$$

La parte izquierda de la ecuación es nula de acuerdo con la simetría del operador.

ya que $\lambda \neq \mu \Rightarrow <x,y> = 0$ ∎

36. LEMA

Sea Λ un operador completamente continuo. Si $\{e_k\}$ es un sistema ortonormal de $\overline{v}$.c. cuyos v.c. λ_k satisfacen la condición "$\exists \delta > 0$ tal que $|\lambda_k| > \delta \; \forall \; k$" entonces $\{e_k\}$ es finito.

DEMOSTRACION

Sean e_j, e_k vectores característicos, de acuerdo con la hipótesis $\Rightarrow \|e_j\| = \|e_k\| = 1$, $<e_j, e_k> = 0$, $\Lambda e_j = \lambda_j e_j$,

$$\Lambda e_k = \lambda_k e_k \qquad |\lambda_j|, |\lambda_k| > \delta > 0$$

entonces $\|\Lambda e_j - \Lambda e_k\|^2 = \|\lambda_j e_j - \lambda_k e_k\|^2 = \lambda_j^2 + \lambda_k^2 > 2\delta^2 \Rightarrow$

$$d(\Lambda e_j, \Lambda e_k) > 2\delta^2$$

de donde, si el sistema ortonormal de vectores característicos no es finito entonces sería imposible obtener una subsucesión convergente de la sucesión $\{Ae_n\}$ lo que contradecería lo completamente continuo del operador A.

$\therefore$ Cada sistema que cumpla la hipótesis es finito.

COROLARIO 1

Cada subespacio característico; con valor característico $\lambda \neq 0$, de un operador completamente continuo; es de dimensión finita.

COROLARIO 2

Si A es un operador completamente continuo y $\delta > 0$. A tiene a lo más un número finito de valores característicos cuyo valor absoluto es mayor que δ.

Observación: Esto en particular nos permite afirmar que un operador A completamente continuo tiene a lo más un número numerable de valores característicos.

37. OBSERVACIONES BASICAS

1. En cada subespacio característico con v.c. distinto del cero, podemos dar un conjunto finito de vectores ortonormales el cual es base del subespacio característico.

2. Por el lema 35 los subespacios característicos son mutuamente ortogonales.

3. Si los valores característicos distintos del cero constituyen un conjunto infinito, deben formar una sucesión que converge a cero (corolario 2) y se pueden ordenar decrecientemente de acuerdo a su valor absoluto.

4. De acuerdo a lo anterior podemos construir un sistema ortonormal de vectores característicos con v.c. diferentes del cero, que tiene a lo más un número numerable de vectores.

Notación. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ los valores característicos ordenados, de acuerdo a su valor absoluto, decrecientemente y acordaremos que cada v.c aparecerá tantas veces como la dimensión de su subespacio característico de modo que tenemos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ valores característicos en correspondencia biunívoca con $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ vectores característicos.

38. LEMA

Si S es un subespacio invariante bajo el operador simétrico A entonces $S^{\perp}$ es un subespacio invariante bajo A.

DEMOSTRACION

Sea $x \in S$, $y \in S^{\perp}$. Por hipótesis $\langle Ax, y\rangle = 0$. Como A es simétrico $\Rightarrow \langle x, Ay\rangle = 0 \Rightarrow Ay \perp x \ \forall\ x \in S \Rightarrow Ay \in S^{\perp}$ ∎

39. DEFINICION

Llamaremos la envolvente lineal de un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ al subespacio que abarca a todas sus combinaciones lineales y se denota por $L(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$

40. LEMA

Sea A un operador simétrico y completamente continuo en H. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sus valores característicos diferentes del cero y $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ sus $\overline{\text{v}}$.c. correspondientes (sistema ortonormal). Si $L = L(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ entonces

$$L^{\perp} = N(A) = \{z \in H \mid Az = 0\}$$

DEMOSTRACION

L es evidentemente invariante bajo A. Por el lema 38, $L^{\perp}$ es invariante bajo A. Podemos considerar a A restringida a $L^{\perp}$ (que es subespacio cerrado y por tanto un espacio de Hilbert).

Ahora sea $M(L^{\perp}) = \sup \{\|Az\| \mid z \in L^{\perp}, \|z\| = 1\}$

Por lemas 30-34 $\exists$ e_0 un $\overline{v}$.c. de A con v.c. $\pm M(L^{\perp}) \Rightarrow$

$M(L^{\perp}) = 0 \Rightarrow Az = 0 \ \forall \ z \in L^{\perp} \Rightarrow L^{\perp} \subset N(A)$

y por el lema 35 $L^{\perp} \supset N(A)$. ∎

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente .

41. TEOREMA

Sea H un espacio de Hilbert y A un operador simétrico y completamente continuo en H. Cada vector $x \in H$ puede ser expresado en la forma de una suma ortogonal.

$$x = x' + x'' = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j + x'' \tag{16}$$

donde $x' \in \overline{L}$ = cerradura de L, $x'' \in N(A)$, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ son vectores característicos del operador A con valores característicos no cero, $A x'' = 0$ y $\xi_j = \langle x, e_j \rangle$ es el j'ésimo coeficiente de Fourier.

42. OBSERVACIONES BASICAS

1. El teorema de Hilbert es corolario de este teorema.

En un espacio separable H, el subespacio N(A) también es separable y contiene un sistema ortonormal completo, a lo mas numerable, $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, \ldots$ que se pueden considerar $\bar{v}$.c. con valor característico $\lambda = 0$, y junto con los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ forman un sistema ortonormal completo para todo el espacio H.

2. Vectores que pertenecen al rango de un operador A admiten un desarrollo en los $\bar{v}$.c. del operador A con v.c.no cero, ya que si $\psi = A\varphi$ donde φ se puede expresar como en la ecuación (16) por el teorema de Hilbert. Operando a φ, de la ecuación (16), con el operador A, obtenemos

$$\psi = A\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j e_j \tag{17}$$

3. Resumiendo: *Todo operador lineal, simétrico y completamente continuo, en un espacio de Hilbert separable, es reducible a una forma normal.*

CAPITULO 3

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM

DE SEGUNDA ESPECIE

Recordando a los operadores de Fredholm (ejemplos 9.6 capítulo II) tenemos

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,s)\varphi(s)ds$$

con núcleo cuadrado integrable $k(x,s)$, es decir

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,s)ds\ dx = k^2 < \infty$$

Como vimos en el capítulo II en los ejemplos 14.6 el operador de Fredholm es acotado sobre el espacio de Hilbert $H = L_2[a,b]$ y su norma es menor o igual que k.

1. TEOREMA

Sea A un operador de Fredholm correspondiente a un núcleo $k(x,s)$ entonces el operador conjugado A^* se define por el núcleo conjugado $k(s,x)$.

DEMOSTRACION

Para todo operador se cumple que

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle$$

$$\langle A\varphi,\psi\rangle = \langle\varphi,A^*\psi\rangle = \int_a^b \varphi(t)A^*\psi(t)dt$$

pero por otro lado

$$\langle A\varphi,\psi\rangle = \int_a^b A\varphi(x)\ \psi(x)dx$$

$$= \int_a^b [\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt]\,\psi(x)dx$$

$$= \int_a^b \int_a^b k(x,t)\psi(x)\varphi(t)dtdx$$

por teorema de Fubini

$$= \int_a^b \int_a^b k(x,t)\psi(x)\varphi(t)dxdt$$

$$= \int_a^b \varphi(t)[\int_a^b k(x,t)\psi(x)dx]\,dt$$

$$\therefore\ (A^*\psi)(t) = \int_a^b k(x,t)\psi(x)dx$$

reacomodando las variables.

A^* también es un operador de Fredholm y además si $k(x,s)$ es el núcleo del operador A entonces $k(s,x)$ es el núcleo del operador A^*.

2. COROLARIO

Sea A un operador de Fredholm en $L_2[a,b]$. Si el núcleo $k(x,s)$ es simétrico (e.d. $k(x,s) = k(s,x)$) casi donde quiera en la región $G = \{(x,s) \mid a\leq x\leq b,\ a\leq s\leq b\}$ entonces el operador de Fredholm es simétrico.

Observación: Ahora veremos que si $k(x,s)$ es cuadrado integrable, el operador de Fredholm con núcleo $k(x,s)$ es un operador completamente continuo en el espacio $L_2[a,b]$. Para ello requerimos de los siguientes resultados previos.

3. LEMA

Sea $A:H\to H$ un operador acotado tal que el rango del operador A es de dimensión finita entonces A es un operador completamente continuo.

DEMOSTRACION

Es inmediato que $R(A)$ es un subespacio vectorial de H, y como es de dimensión finita, es cerrado $\Rightarrow$ toda sucesión acotada $\{x_n\}\in H$, la sucesión $\{Ax_n\}$ es acotada y $\{Ax_n\}\subset R(A)\subset H$.

Como $R(A)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para alguna n. Por teorema de Weierstrass $\{Ax_m\}$ tiene una subsucesión convergente (e.d. A es un operador completamente continuo). ∎

4. LEMA

Si $A:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ es un operador de Fredholm con núcleo degenerado (e.d. $k(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(s)$), entonces $R(A)$ es de dimensión finita.

DEMOSTRACION.

Sea cualesquier $g\varepsilon L_2[a,b]$

$$Ag(x) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(s)\right] g(s)ds = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\int_a^b\psi_i(s)g(s)ds$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) \quad \text{donde} \quad a_i = \int_a^b \psi_i(s)g(s)ds \ \varepsilon\ \mathbb{R}$$

g es una combinación lineal de un número finito de $\psi_{i's}$ $\Rightarrow$ $\dim R(A) \leq n$ ∎

5. TEOREMA

Si $\{A_n\}$ n = 1,2,... es una sucesión de operadores completamente continuos en H que converge a un operador A (Según la norma de operadores) entonces A es también completamente continuo.

DEMOSTRACION

Para mostrar que A es c.c. basta ver dada una sucesión $\{x_n\}$ en H la sucesión $\{Ax_n\}$ contiene una subsucesión convergente.

Como A_1 es c.c. $\Rightarrow$ $\{A_1x_n\}$ contiene una subsucesión convergente. Sea $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots$ la subsucesión de $\{x_n\}$ tal que $\{\Lambda_1 x_n^1\}$ converge.

Considerando la sucesión $\{\Lambda_2 x_n^1\}$ por ser Λ_2 c.c. es claro que $\{\Lambda_2 x_n^1\}$ contiene una subsucesión convergente.

Sea $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots$ la subsucesión de $\{x_n^1\}$ tal que $\{\Lambda_2 x_n^2\}$ converge.

Haciendo esto inductivamente; consideremos después la sucesión diagonal, es decir $x_1^1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots$

La sucesión diagonal es subsucesión de cada una de las subsucesiones $\{x_n^m\}_n$ para cada m, a partir de cierto rango. Además para toda $m \in \mathbb{N}$, cada sucesión $\{\Lambda_m x_n^n\}$ es convergente.

Veamos que la sucesion $\{\Lambda x_n^n\}$ es convergente.

Es suficiente ver que es una sucesión de Cauchy.

$$\|\Lambda x_n^n - \Lambda x_m^m\| \leq \|\Lambda x_n^n - \Lambda_k x_n^n\| + \|\Lambda_k x_n^n - \Lambda_k x_m^m\| + \|\Lambda_k x_m^m - \Lambda x_m^m\|$$

Como $\Lambda_k \to \Lambda$ en la norma de operadores $\Lambda_k y \to \Lambda y \ \forall \ y \in H$.

Además como la sucesión $\{\Lambda_k x_n^n\}$ es convergente.

Si $\varepsilon > 0 \ \exists \ k_1 \ \ni$ si $k > k_1 \Rightarrow \|\Lambda x_n^n - \Lambda_k x_n^n\| < \varepsilon/3$

$\exists \ k_2 \ \ni$ si $k > k_2 \Rightarrow \|\Lambda_k x_m^m - \Lambda x_m^m\| < \varepsilon/3$

$\exists \ k_3 \ \ni$ si $m, n > k_3 \Rightarrow \|\Lambda_k x_n^n - \Lambda_k x_m^m\| < \varepsilon/3$

Sea $k = \max \{k_1, k_2, k_3\}$ entonces

$\|\Lambda x_n^n - \Lambda x_m^m\| < \varepsilon$ si $m, n > k$

$\Rightarrow \{\Lambda x_n^n\}$ es convergente y $\{x_n^n\}$ es subsucesión de $\{x_n\}$

$\therefore \Lambda$ es completamente continuo ∎

6. TEOREMA

Sea $K: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ un operador de Fredholm (con núcleo $k(x,s)$ cuadrado integrable), entonces K es completamente continuo.

DEMOSTRACION

Sea $k(x,s)$ el núcleo del operador K

Como existe un sistema ortonormal $\{e_n(x)\}$ en $L_2[a,b]$ entonces $\{e_m(x).e_n(s)\}$ es un sistema ortonormal en $G = \{(x,s)\,|\,a\leqslant x\leqslant b \;\; a\leqslant s\leqslant b\}$ entonces $k(x,s)\in L_2([a,b]\times[a,b])$ se puede expresar como

$$k(x,s) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}e_m(x)e_n(s)$$

Veamos que el operador K se puede aproximar por los operadores K_p de núcleo degenerado

$$k_p(x,s) = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{p} a_{mn}e_m(x)e_n(s)$$

Como se mostró

$$\| k-k_p\| \leqslant \sqrt{\int_a^b\int_a^b [k(x,s)-K_p(x,s)]^2\, dsdx}$$

$$= \sqrt{\int_a^b\int_a^b [\sum_{m=p+1}^{\infty}\sum_{n=p+1}^{\infty} a_{mn}e_m(x)e_n(s)]^2\, dsdx} < \varepsilon$$

si $p > N_0$ para algún N_0, ya que $k(x,s)$ es cuadrado integrable.

Finalmente, aplicando, el lema 4 después el lema 3, cada K_p es un operador completamente continuo y por el teorema 5, K es un operador completamente continuo.

7. DEFINICION

Se llama ecuación integral a una ecuación que contiene la función incógnita bajo el signo de la integral.

8. EJEMPLO

$$\varphi(x)= \int_{-\pi}^{\pi}(x \cos s +s^2 \operatorname{sen} x +\cos x \operatorname{sen} s)\varphi(s)ds+ x$$

Observaciones:

1. Esta ecuación integral pertenece al grupo de la forma $\varphi(x) = \int_a^b k(x,s)\varphi(s) + f(x)$ (1)

conocido como ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie y vamos a dedicar el resto del capítulo al estudio de estas ecuaciones. Aunque, cabe señalar que existen otros tipos de ecuaciones, como las ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie que son de la forma

$$\varphi(x) = \int_a^x k(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

y las ecuaciones integrales de primera especie tanto de Fredholm como de Volterra, que se distinguen por no tener la función incógnita despejada, como en las de segunda especie.

2. La ecuación integral del ejemplo 8 se resolvera al final del capítulo (ejemplo 25).

3. La ecuación integral de Fredholm de segunda especie se puede expresar en forma simbólica con la notación del operador de Fredholm

$$\varphi = K\varphi + f \tag{2}$$

donde φ es la función incógnita, K el operador de Fredholm con núcleo $k(x,s)$ y f una función elemento de $L_2[a,b]$.

Notación: No debe confundirse a K el operador de Fredholm con su núcleo $k(x,s)$, la diferencia queda claramente establecida porque el núcleo va acompañado de sus variables.

OBSERVACION

Antes de entrar al caso general, analizaremos cuando el núcleo es simétrico y el caso en que el núcleo es degenerado. En todos los casos consideremos al núcleo $K(x,s)$ cuadrado integrable lo que por el teorema 6 el operador K es completamente continuo.

A. Caso simétrico

Consideremos la ecuación integral de Fredholm de segunda especie (ecuación (1)), donde el núcleo del operador $k(x,s)$ es cuadrado integrable y simétrico.

Por el corolario 2, K es un operador simétrico y como es completamente continuo entonces por el teorema de Hilbert 29 capítulo II existe para K un sistema ortonormal $\{e_n\}$ de vectores (funciones) características correspondientes a los valores característicos $\lambda_n \neq 0 \ \forall \ n$ tal que $\forall \ f \varepsilon L_2$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n(x) + f^*(x) \qquad (3)$$

donde $Kf^*(x) = 0$

buscaremos la solución de la ecuación (1) bajo la forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n e_n(x) + \varphi^*(x) \qquad (4)$$

$(K\varphi^*(x)=0)$

Sustituyendo (3) y (4) en la forma simbólica (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n(x) + \varphi^*(x) = K[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n(x) + \varphi^*(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n(x) + f^*(x)$$

como $Ke_n = \lambda_n e_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n(x) + \varphi^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \lambda_n e_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n(x) + f^*(x)$$

como $\varphi^*, f^* \in N(K) = \{f | Kf = 0\}$

entonces la igualdad se cumple si

$$\varphi^*(x) = f^*(x)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \lambda_n e_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\lambda_n) \xi_n e_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n(x)$$

para que φ sea la solución propuesta se debe cumplir

$$(1-\lambda_n) \xi_n = b_n$$

$$\xi_n = \frac{b_n}{1-\lambda_n} \qquad \text{si} \quad \lambda_n \neq 1$$

y $\qquad b_n = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_n = 1$

se pueden observar tres casos.

Caso 1

Si $\forall\, n = 1,2,\ldots \quad \lambda_n \neq 1$

entonces la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integral queda como

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{1-\lambda_n} e_n(x) + f^*(x)$$

Caso 2

Si para alguna $n = K$ $\lambda_k = 1$ y $b_k \neq 0$ entonces la ecuación integral no tiene solución.

Caso 3

Si existe $J \neq \phi$ $J \subset N$ tal que $n \in J$ implica $\lambda_n = 1$ y $b_n = 0$ entonces la ecuación (1) tiene una infinidad de soluciones $\Leftrightarrow$ $f \perp S$ (donde S es el subespacio característico correspondiente a $\lambda = 1$)

Además las soluciones están dadas por:

$$\varphi(x) = \sum_{n \notin J} \frac{b_n}{1-\lambda_n} e_n(x) + f^*(x) + g(x)$$

con g un elemento arbitrario de S.

En efecto

$$b_n = 0 \Leftrightarrow f \perp e_n$$

e.d. $b_n = 0$ $\forall$ $n \in J \Leftrightarrow f \perp S$.

$\varphi(x)$ asi definido es efectivamente solución de $\varphi = K\varphi + f$

$$\sum_{n \notin J} \frac{b_n}{1-\lambda_n} e_n + f^* + g = K\left(\sum_{n \notin J} \frac{b_n}{1-\lambda_n} e_n + f^* + g\right) + f$$

lo que se reduce a

$$\sum_{n \notin J} b_n e_n + f^* + g = Kg + f$$

O sea $f + g = Kg + f$

e.d. $g = Kg$ lo que se cumple por estar $g \in S$.

B. <u>Caso núcleo degenerado</u>

Consideremos la ecuación (1) sólo que ahora el núcleo, del operador K, es degenerado

$$k(x,s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\ Q_i(s) \tag{5}$$

donde P_i, $Q_i \in L_2\ \forall\ i$. El operador así, transforma la función φ en

$$K\varphi(x) = \int_a^b k(x,s)\varphi(s)ds = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(s)\varphi(s)ds \tag{6}$$

que es un elemento del subespacio generado por las funciones $P_i(x)$ $i=1,\ldots,n$ las cuales podemos considerar linealmente independientes. En efecto en caso contrario se podría expresar con un número menor de sumandos de forma que las funciones $P_i(x)$ sean L.I. Ahora sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (1) nos queda la siguiente ecuación integral.

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{7}$$

Sea $q_i = \int_a^b Q_i(s)\ \varphi(s)ds$

la ecuación (7) queda como

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x)$$

si ésta es solución entonces al sustituirla en la ecuación (1)

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(s) \left[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(s) + f(s)\right]ds + f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\left[\sum_{j=1}^{n} q_j \int_a^b Q_i(s)P_j(s) + \int_a^b Q_i(s)\ f(s)ds\right] + f(x)$$

simplificando $f(x)$ y renombrando queda

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\left(\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} + b_i\right) \quad \text{donde}$$

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(s)P_j(s)ds \quad \text{y} \quad b_i = \int_a^b Q_i(s)f(s)ds$$

Como las funciones $P_i(x)$ son linealmente independientes se puede establecer la igualdad.

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} + b_i \qquad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (8)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones podemos obtener los coeficientes q_i, siendo $\varphi(x)$ la solución.

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x)$$

veamos ahora las condiciones bajo las cuales existe la solu ción del sistema (8). Este se puede expresar como

$$\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} - q_i = -b_i \quad i = 1,\ldots,n.$$

haciendo el siguiente arreglo

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad i \neq j \\ a_{ii}-1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

queda el sistema

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} q_j = -b_i \qquad (9)$$

ésto se puede representar en la forma matricial $Ax = b$ donde A es la representación matricial de una *transformación lineal* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, $A = \{A_{ij}\}$, además $b \in \mathbb{R}^n$ $b = (-b_1,-b_2,\ldots,-b_n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector incógnita representando las incognitas $(q_1,\ldots,q_n)$.

Para poder dar las condiciones bajo las cuales el sistema (9) tiene solución requerimos de los siguientes resultados.

9. LEMA

Sea S un subespacio vectorial en H, entonces S es cerrado si y sólo si $(S^{\perp})^{\perp} = S$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) Sea $y \varepsilon s \Rightarrow (y,z) = 0 \ \forall \ z \varepsilon s^{\perp} \Rightarrow y \varepsilon (s^{\perp})^{\perp}$

$$\Rightarrow s \subset (s^{\perp})^{\perp} \tag{10}$$

Sea $y \varepsilon (s^{\perp})^{\perp}$ para cada $z \varepsilon s^{\perp}$, por el teorema 28 capítulo I $z + y = x$ representa a un único $x \varepsilon H$. De donde

$$y = x - z \tag{11}$$

pero como S es cerrado, por el mismo teorema 28, x se representa en forma única

$$x = y' + z \quad \text{donde} \quad y' \varepsilon S \qquad y \qquad z \varepsilon S^{\perp}$$

sustituyendo a x en la ecuación (11) es facil ver que

$$y = y' \quad \Rightarrow \quad y \varepsilon S \quad \Rightarrow \quad S^{\perp} \subset S \tag{12}$$

de (10) y (12) tenemos $(S^{\perp})^{\perp} = S$

$\Leftarrow$) Como el ortogonal de cualquier conjunto es un subespacio cerrado y $(S^{\perp})^{\perp} = S$ entonces S es cerrado. ∎

10. COROLARIO

Si U y V son subespacios vectoriales cerrados entonces

$$U \subset V \Leftrightarrow U^{\perp} \supset V^{\perp}$$

11. LEMA

Sea Λ una transformación lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$ entonces

$$N^{\perp}(\Lambda^*) \subset R(\Lambda)$$

donde $R(A) = \{y | y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n\}$,

$N(A^*) = \{z \in \mathbb{R}^n | A^*z = 0\}$ y

A^* es el conjugado de A.

Observación: Las tranformaciones lineales son operadores li neales.

Demostración del lema 11

Veamos que $R^{\perp}(A) \subset N(A^*)$

Sea $z \in R^{\perp}(A)$. para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$\langle Ax, z\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, A^*z\rangle = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A^*z = 0 \Rightarrow$

$$z \in N(A^*) \Rightarrow R^{\perp}(A) \subset N(A^*)$$

usando el corolario 10 ya que $R(A)$ es un subespacio cerrado por ser finito

$$(R^{\perp}(A))^{\perp} \supset N^{\perp}(A^*)$$

y por el lema 9

$$R(A) \supset N^{\perp}(A^*) \qquad \blacksquare$$

Ahora si, las condiciones bajo las cuales el sistema (9) tiene solución están dadas por el siguiente

12. TEOREMA.

Sea A una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Un sistema de ecuaciones lineales representado por la ecuación $Ax = b$ tiene solución si y sólo si b es ortogonal a toda la solución del sistema homogeneo conjugado $A^*z = 0$ donde $A^* = \{A_{ji}\}$ ($A^* = A^T$ la transpuesta de A)

Observación: En el caso de tranformaciones lineales es fá-- cil comprobar que el conjugado de una transformación lineal en su representación matricial es la matriz transpuesta.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA.

$\Rightarrow$) Sea x solución del sistema $Ax=b$, z cualquier solución de $A^*z = 0$

haciendo producto escalar de b y z

$$<b,z> = <Ax,z> = <x,A^*z> = 0 \Rightarrow b \perp z \;\forall\; z \in N(A^*)$$

haciendo uso de la notación, dada en el lema 11.

$\Rightarrow b \in N^{\perp}(A^*)$

$\Leftarrow$) por el lema 11 tenemos

$N^{\perp}(A^*) \subset R(A)$

Si $b \in N^{\perp}(A^*) \Rightarrow b \in R(A) \Rightarrow \exists\; x \ni \; Ax = b$ ∎

Se puede hacer la siguiente interpretación geométrica del teorema 12.

Considerando a las columnas de la matriz A como vectores.

$R(A)$ es el subespacio S generado por las columnas de A.

$N(A^*)$ es el subespacio ortogonal a S es decir el subespacio ortogonal a los vectores columna de A.

Como $R(A)$ y $N(A^*)$ son mutuamente ortogonales entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución para aquellas $b \in \mathbb{R}^n$ que esten en el $R(A)$ es decir para aquellas $b \in \mathbb{R}^n$ que sean ortogonales a $N(A^*)$.

De acuerdo con el teorema hay 3 casos posibles.

Caso 1

Si $N(A^*) = \{0\}$ entonces el sistema $Ax=b$ tiene solución $\forall\ b \in \mathbb{R}^n$, es única y esta dada por $x = A^{-1}b$ donde A^{-1} es la matriz inversa.

Caso 2.

Si b no es ortogonal a $N(A^*)$ entonces no tiene solución.

Caso 3.

Si $N(A^*) \neq \{0\}$ y $b \perp N(A^*)$

hay una infinidad de soluciones, pero todas ellas se pueden expresar como

$$x = x_p + x_h$$

donde x_p es una solución cualquiera y x_h es cualquier elemento del subespacio $\{x | Ax = 0\}$

C. Caso general (núcleo no degenerado)

Consideremos nuevamente la ecuación

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{13}$$

la cual solo verifica que su núcleo es cuadrado integrable, es decir

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,s)dxds < \infty$$

recordemos que ésto nos garantiza la continuidad completa del operador K

$$K\varphi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

En el análisis para establecer las condiciones en las cuales la ecuación (13) tiene solucion, lo esencial radica en que el operador es completamente continuo y no tanto en su forma, por tanto tomaremos la ecuación de Fredholm en su forma simbólica

$$\varphi = K\varphi + f \tag{14}$$

donde K es un operador arbitrario completamente continuo en el espacio Hilbert H.

Sea $T = E - K$ donde E es el operador idéntico la ecuación (14) queda como

$$T\varphi = f \tag{15}$$

consideremos la ecuación homogenea

$$T\varphi_0 = 0 \tag{16}$$

y sus respectivas ecuaciones conjugadas

$$T^*\psi = g \tag{17}$$

$$T^*\psi_0 = 0 \tag{18}$$

Es facil comprobar que $T^* = E - K^*$.

La solución de la ecuación (15) junto con las soluciones de sus ecuaciones relacionadas (16), (17), (18) estan expresadas en los siguientes teoremas de Fredholm.

13. TEOREMA

La ecuación no homogenea $T\varphi = f$ tiene solución para - aquellas f y sólo aquellas que son ortogonales a toda solución de la ecuación homogenea conjugada $T^*\psi_0 = 0$.

14. TEOREMA (Alternativa de Fredholm)

O bien la ecuación $T\varphi = f$ tiene una solución, y sólo una, cualquiera que sea $f \in H$ o bién la ecuación homogenea $T\varphi_0$ tiene solución no nula.

15. TEOREMA

Las ecuaciones homogeneas (16)(18) tiene el mismo número, además finito, de soluciones linealmente independientes.

Para demostrar estos teoremas requerimos antes de los siguientes lemas.

16. LEMA

Si $T = E - K$ donde K es un operador lineal completamente continuo en H entonces $R(T)$ es un subespacio cerrado, donde $R(T)$ es la imagen de T.

DEMOSTRACION

Es inmediato que es un subespacio de H.

Para mostrar que es cerrado

Sea $\{y_n\} \in R(T)$ } $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ para cada n

$$y_n = T(x_n) = (E - K)x_n = x_n - Kx_n$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - Kx_n) = y$ (19)

$\{x_n\}$ es una sucesión acotada (e.d. $\|x_n\| < M \ \forall\, n \in N$).

En efecto de lo contrario (e.d. $\|x_n\| \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{x_n}{\|x_n\|} - K\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n\|}(x_n - Kx_n) = 0$$

ya que, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n\|} = 0$ y por (19).

Como K es completamente continuo y como $\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| = 1 \ \forall\, n$

existe una subsucesión $\{\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\}$ tal que $\{k(\frac{x_{n_p}}{\|x_{n_p}\|})\}$ es convergente, como

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_n}{\|x_n\|} - K\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\left[\frac{x_{n_p}}{\|x_{n_p}\|} - K\left(\frac{x_{n_p}}{\|x_{n_p}\|}\right)\right] = 0$$

entonces $\{\frac{x_{n_p}}{\|x_{n_p}\|}\}$ también converge, digamos a $z\varepsilon H$.

$$T(z) = (E - K)(z) = z - Kz = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{x_{n_p}}{\|x_{n_p}\|} - K\left(\frac{x_{n_p}}{\|x_{n_p}\|}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow z\varepsilon N(T) \tag{20}$$

Por otro lado $y_n = T(x_n)$ y x_n se puede expresar por teorema 28 capítulo I como $x_n = \overline{X}_n + \hat{X}_n$ donde $\overline{X}_n \varepsilon N^{\perp}(T)$ y $\hat{X}_n \varepsilon N(T)$ por ser claramente $N(T)$ un subespacio cerrado. Entonces

$$y_n = T(x_n) = T(\overline{X}_n + \hat{X}_n) = T(\overline{X}_n) + T(\hat{X}_n) = T(\overline{X}_n)$$

significa que podemos suponer que las y_n provienen bajo el operador T, de x_n que estan en $N^{\perp}(T)$ y como $N^{\perp}(T)$ es cerrado entonces

$$z = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\|x_n\|} \varepsilon N^{\perp}(T) = \{z\varepsilon T \mid Tz = 0\} \tag{21}$$

de (20) y (21) tenemos que $z = 0$ lo cual no puede ser porque $\|z\| = 1$. Esta contradicción surgió de suponer que $\|x_n\|\to\infty$.

Como $\|x_n\| < M \ \forall \ n \ \exists$ una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ para la cual la subsucesión $\{kx_{n_p}\}$ es convergente y como $\lim_{p\to\infty} y_{n_p} = \lim_{p\to\infty}(x_{n_p} - Kx_{n_p}) = y$ entonces $\{x_{n_p}\}$ también es convergente digamos a x entonces $T(x) = \lim_{p\to\infty} T(x_{n_p}) = \lim_{p\to\infty} y_{n_p} = y \Rightarrow$

$$y \varepsilon R(T)$$

$\therefore$ Si $T = E - K$ donde K es un operador completamente continuo entonces $R(T)$ es cerrado. ∎

17. LEMA

Sea T un operador tal que $T = E - K$ donde K es un operador completamente continuo entonces

$$N^{\perp}(T^*) \subset R(T)$$

donde $\quad R(T) = \{y \mid y = Tx, \ x \varepsilon H\}$

$$N(T^*) = \{z \varepsilon H \mid T^*z = 0\}$$

DEMOSTRACION

Veamos que $R^{\perp}(T) \subset N(T^*)$

Sea $z \varepsilon R^{\perp}(T)$ para cada $x \varepsilon H$

$$\langle z, Tx\rangle = 0 \Rightarrow \langle T^*z, x\rangle = 0 \quad \forall \ x \varepsilon H \Rightarrow$$

$$T^*z = 0 \Rightarrow z \varepsilon N(T^*)$$

Usando el corolario 10 ya que $R(T)$ es un subespacio cerrado por el lema 16.

$$(R^{\perp}(T))^{\perp} \supset N^{\perp}(T^*)$$

y por el lema 9

$$R(T) \supset N^{\perp}(T^*)$$ ∎

18. COROLARIO.

H es la suma directa de los subespacios cerrados $N(T^*)$ y $R(T)$, es decir

$$N(T^*) \oplus R(T) = H$$

y análogamente para $N(T)$ y $R(T^*)$,

$$N(T) \oplus R(T^*) = H$$

19. DEMOSTRACION DE' PRIMER TEOREMA DE FREDHOLM (teorema 13)

De acuerdo con el corolario 18, $f \perp N(T^*)$ si y sólo si $f \in R(T)$, es decir, si $\exists\ \varphi \in H \ni T\varphi = f$ ∎

20. LEMA

Sea $T = E - K$ donde k es un operador completamente continuo. Si $H^n = R(T^n)$ entonces

i) $H^n \supset H^{n+1} \quad \forall\ n$

ii) $T(H^n) = H^{n+1}$

DEMOSTRACION

i) Sea $y \in H^{n+1} \Rightarrow \exists\ x \in H \ni y = T^{n+1}(x) = T^n(Tx)$

como $T(x) = x' \in H$

$\Rightarrow y = T^n(x') \Rightarrow y \in H^n$

ii) Si $y \in T(H^n) \Leftrightarrow y = T(x)$ donde $x \in H^n$

$\Leftrightarrow \exists\ z \in H \ni x = T^n(z),\ y = T(T^n(z))$

$\Leftrightarrow \exists\ z \in H \ni y = T^{n+1}(z)$

$\Leftrightarrow y \in H^{n+1}$

21. LEMA

Existe un j tal que $H^{n+1} = H^n \ \forall \ n \geq j$.

DEMOSTRACION

Lo haremos por reducción al absurdo.

Supongamos que $H^{n+1} \neq H^n \quad \forall \ n \varepsilon \mathbb{N}$

Por corolario 18

$$H = N(T^*) \oplus R(T) = N(T^*) \oplus H^1$$

como $H = H^\circ$, $H^1 = R(T)$ por la suposición, $H \neq H^1$ lo que implica $N(T^*) \neq \{0\} \ \therefore \ \exists \ x_0 \varepsilon N(T^*) \ \ni \ x_0 \perp H^1$ y como $x_0 \neq 0$ lo que podemos escoger de modo que $\|x_0\| = 1$.

Nuevamente por corolario 18

$$H^1 = N(T^*/H^1) \oplus R(T/H^1)$$

como $\quad R(T/H^1) = T(H^1) = H^2$

entonces $H = N(T^*/H) \oplus H^2$

como $\quad H^1 \neq H^2 \Rightarrow N(T^*/H^1) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists \ x_1 \varepsilon N(T^*/H^1) \ \ni \ x_1 \perp H^2 \quad \|x_1\| = 1$

Así construiremos la sucesión $\{x_n\}$ tal que $\|x_n\| = 1$, $x_n \perp H^{n+1} \ \forall \ n$, $x_n \varepsilon H^n$.

Ahora, sea $q > P$

$$Kx_q - Kx_p = x_q - Tx_q - (x_p - Tx_p)$$

$$= -x_p + (x_q + Tx_p - Tx_q)$$

Sea $\quad y = x_q + Tx_p - Tx_q \varepsilon H^{p+1}$ ya que $q > P$

Ahora

$\|kx_q - kx_p\| \geq \|-x_p\| = 1$ porque $y \perp H^p$

de la sucesión $\{kx_n\}$ no se puede extraer ninguna subsucesión convergente lo que contradice la continuidad completa del operador K.

$\therefore \ \exists \ j \ \ni \ \forall \ p \geq j \quad H^{p+1} = H^p$

22. LEMA

Si $N(T) = \{0\}$ entonces T es un operador biyectivo.

DEMOSTRACION

T es un operador inyectivo. En efecto si

$$T(x) = T(y) \Rightarrow T(x) - T(y) = 0 \Rightarrow T(x-y) = 0$$

como $N(T) = \{0\}$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Veamos que T es un operador sobreyectivo.

Por el lema 21, $\exists \ j \ \ni H^n = H^{n+1} \ \forall \ n \geq j$

como $H^n = H^{n+1} \ \forall \ z \in H$, sea $x = T^n(z) \in H^n$

sabemos que $\exists \ y \in H \ \ni \ x = T^{n+1}(y)$

esto es, $\forall \ z \in H \ \exists \ y \in H \ \ni T^n(z) = T^{n+1}(y)$

$\Rightarrow T^n(z) = T^n(T(y))$

es facil verificar que si $N(T) = \{0\}$, $N(T^n) = \{0\}$ entonces T^n es un operador inyectivo.

$$\Rightarrow \forall \ z \in H \ \exists \ y \in H \ \ni \ z = T(y)$$

$\Rightarrow$ T es un operador sobreyectivo.

23. LEMA

$N(T) = \{0\}$ si y sólo si $R(T) = H$

DEMOSTRACION

$\Rightarrow$) es inmediato del lema 22

$\Leftarrow$) si $R(T) = H$, por el corolario 18, $N(T^*) = \{0\}$

$\Rightarrow$ $R(T^*) = H$ y nuevamente por el corolario 18, $N(T) = \{0\}$ ∎

Observación: El lema 23 demuestra el segundo teorema de Fredholm (teorema 14).

24. DEMOSTRACION DEL TERCER TEOREMA DE FREDHOLM (Teorema 15)

$N(T)$ es de dimensión finita. De lo contrario $Tz = (E-K)z = 0$ $\Rightarrow Kz = z$ (e.d. K funciona en $N(T)$ como operador idéntico) y si es infinito, K no sería un operador completamente continuo.

Analogamente $N(T^*)$ es de dimensión finita.

Para mostrar que $N(T)$ y $N(T^*)$ tienen la misma dimensión lo haremos por reducción al absurdo.

No perdemos generalidad al suponer que la dimensión de $N(T)$ es menor que la de $N(T^*)$ sea $DIM(N(T)) = u$ y $DIM(N(T^*)) = r$

$$u < r$$

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_u\}$ base de $N(T)$ y

$\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_r^*\}$ base de $N(T^*)$

Sea S el operador definido de la siguiente forma

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{u} \langle x, e_j \rangle e_j^*$$

Como el operador S se obtiene de agregar al operador T un operador degenerado, todo lo demostrado anteriormente es válido para S.

Veamos cual es el conjunto solución de la ecuación $Sx = 0$.

$$Sx = 0 \Rightarrow Tx + \sum_{j=1}^{u} \langle x, e_j \rangle e_j^* = 0$$

por el corolario 18 $R(T) \perp N(T^*) \Rightarrow$

$$Tx = 0 \quad y \quad \langle x, e_j \rangle = 0 \ \forall\, j$$

la primera igualdad implica $x = \sum_{i=1}^{u} a_i e_i$

la segunda implica $x \perp e_j \ \forall\, j = 1, \ldots, u$

$\Rightarrow x = 0$ e.d. la única solución de $Sx = 0$ es la solución nula.

Por el teorema 14 $Sx = y$ tiene solución única $\forall\, y \in H$.

En particular para $y = e_{u+1}^*$

$Sx = e_{u+1}^*$ tiene solución única.

Sea z ésta solución

$$Sz = Tz + \sum_{j=1}^{u} \langle z, e_j \rangle e_j^* = e_{u+1}^*$$

Ahora $\langle Sz, Sz \rangle = \langle Tz + \sum_{j=1}^{u} \langle z, e_j \rangle e_j^*, e_{u+1}^* \rangle$

$$= \langle Tz, e_{u+1}^* \rangle + \sum_{j=1}^{u} \langle z, e_j \rangle \langle e_j^*, e_{u+1}^* \rangle = 0$$

ya que $R(T) \perp N(T^*)$ y $\{e_1^*, \ldots, e_r^*\}$ es un sistema ortonormal.

Pero por otro lado $\langle Sz, Sz \rangle = \langle e_{u+1}^*, e_{u+1}^* \rangle = 1$!

$\therefore$ $N(T)$ y $N(T^*)$ tiene la misma dimensión además finita.

25. EJEMPLO

Sea la siguiente ecuación integral

$$\varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos S + S^2 \text{sen } x + \cos x \text{ sen } S)\varphi(S)dS + x \quad (22)$$

Esta es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie de núcleo degenerado donde su solución queda dada por

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x)$$

q_i son la solución del sistema

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} q_j = -b_i$$

$$A_{ij} = \begin{cases} \int_a^b Q_i(S)P_j(S)dS & \text{si} \quad i \neq j \\ [\int_a^b Q_i(S)P_j(S)dS] - 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

$$b_i = \int_a^b Q_i(S) f(S) dS$$

Ahora como $P_1(x) = x, Q_1(S) = \cos S$, $P_2(x) = \text{sen } x$, $Q_2(S) = S^2$, $P_3(x) = \cos x$, $Q_3(S) = \text{sen } S$ y $f(x) = x$

Entonces

$$A_{11} = [\int_{-\pi}^{\pi} S \cos S \, dS] - 1 = 0$$

$$A_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } S \cos S \, dS = 0$$

$$A_{13} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 S dS = \pi$$

$$A_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} S^3 dS = 0$$

$$A_{22} = [\int_{-\pi}^{\pi} S^2 \text{sen } S dS] - 1 = -1$$

$$A_{23} = \int_{-\pi}^{\pi} S^2 \cos S dS = -4\pi$$

$$A_{31} = \int_{-\pi}^{\pi} S \text{ sen } S dS = 2\pi$$

$$A_{32} = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 S dS = \pi$$

$$A_{33} = [\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } S \cos S dS] - 1 = -1$$

$$b_1 = \int_{-\pi}^{\pi} S \cos S dS = 0$$

$$b_2 = \int_{-\pi}^{\pi} S^3 dS = 0$$

$$b_3 = \int_{-\pi}^{\pi} S \text{ sen } S dS = 2\pi$$

Hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones para encontrar las q_i's.

$$\begin{aligned} -q_1 \qquad + \pi q_3 &= 0 \\ -q_2 - 4\pi q_3 &= 0 \\ 2\pi q_1 + \pi q_2 - q_3 &= -2\pi \end{aligned}$$

las cuales son

$$q_1 = \frac{2\pi^2}{1+2\pi^2}, \quad q_2 = \frac{-8\pi^2}{1+2\pi^2}, \quad q_3 = \frac{2\pi}{1+2\pi^2}$$

$$\therefore \quad \varphi(x) = x + \frac{2\pi}{1+2\pi^2} (\pi x - 4\pi \text{ sen } x + \cos x)$$

es la solución de la ecuación integral (22).

BIBLIOGRAFIA

1. J. DIEUDONNÉ

History of functional analysis.

North-Holland.

2. O.D. KELLOGG.

Foundations of potencial theory.

Dover publications, inc.

3. A.N. KOLMOGOROV.

S.V. FOMIN.

Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.

Editorial MIR-MOSCU.

4. M. KRASNOV.

A. KISELIOV

G. MAKARENKO

Ecuaciones integrales.

Editorial MIR-MOSCU.

5. G. YE. SHILOV

Matemathical Analysis.

Pergamon student editions.