2 g.

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE TOPOLOGIA DIFERENCIAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

Oscar Alfredo Palmas Velasco

MEXICO, D.F. 1984

INDICE

Requisitos

Los requisitos para leer estas notas son de los siguientes temas:

1. Cálculo Diferencial e Integral.

Principalmente para los primeros capítulos, se requiere que el lector conozca -y haya manejado en problemas- fundamentalmente el Teorema de la Función Inversa. Un libro que puede consultarse para este tema es el Sagan, Advanced Calculus.

2. Algebra Lineal.

Debido a que en muchas partes de las notas trabajaremos con transformaciones lineales, el lector debe manejar conceptos tales como espacios vectoriales, subespacios, bases, isomorfismos lineales, kernels, la representación de una transformación lineal por medio de una matriz, el rango de una transformación. En algún momento hablaremos de bases ortonormales y del proceso de Gram-Schmidt. Para consultas, se puede ver el Lang de Algebra Lineal.

3. Topología.

Supondremos que el lector conoce los conceptos como topología inducida, homeomorfismo, espacio de Hausdorff, espacio normal, base numerable, espacio localmente compacto, localmente conexo. Una referencia para estos temas es el Willard, General Topology.

1. LA DEFINICIÓN DE VARIEDAD DIFERENCIABLE.

Numerosos conceptos surgidos del cálculo -derivada, diferencial integral,etc.- fueron rápidamente generalizados a espacios más generales que la recta real. Varios de ellos, como veremos posteriormente, han sido aplicados a espacios que "localmente son como R^n". A partir de este momento, pasaremos a estudiar estos conceptos, así como algunos temas clásicos de la topología diferencial. Primero discutiremos la definición de los espacios que son 'como R^n'. Simplificaremos nuestra exposición tratando primeramente estos espacios como subconjuntos de R^n.

DEFINICION. Una subvariedad topológica M de R^{n+k} de dimensión n es un subespacio topológico de R^{n+k} que posee la siguiente propiedad: Para cada punto $p\in M$ existe una vecindad $U\subseteq M$ de p y un homeomorfismo $\varphi:U\to V$ entre U y un abierto V de R^n.

Frecuentemente escribiremos M^n para denotar una subvariedad M de R^{n+k} de dimensión n. Puesto que consideramos a M como subespacio topológico de R^{n+k}, M es Hausdorff, tiene base numerable, dos propiedades que serán fundamentales.

Ejemplo 1. Claramente, R^{n+k} es subvariedad topológica de R^{n+k} de dimensión n+k. Podemos tomar, para cada $p\in R^{n+k}$, $U = R^{n+k}$ y $\varphi:U\to R^{n+k}$ como $\varphi(x)=x$. Por otro lado, se conviene que el vacío es subvariedad topológica de cualquier dimensión.

Ejemplo 2. La circunferencia unitaria

$$S^1 = \{ (x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=1 \}$$

es una subvariedad topológica de R^2 de dimensión 1. Si $p\in S^1$, para dar un homeomorfismo, podemos considerar dos casos:

i. Si $p\neq(1,0),(-1,0)$, $p=(x,y)$ con $y>0$,

$$\varphi_1:\{S^1\cap\{y>0\}\}\longrightarrow(-1,1),\qquad \varphi_1(x,y)=x,$$

y si $y<0$

$$\varphi_2:\{S^1\cap\{y<0\}\}\longrightarrow(-1,1),\qquad \varphi_2(x,y)=x.$$

ii. Si $p=(x,y)\neq(0,1),(0,-1)$ y $x>0$

$$\varphi_3:\{S^1\cap\{x>0\}\}\longrightarrow(-1,1),\qquad \varphi_3(x,y)=y,$$

y si $x<0$,

$$\varphi_4:\{S^1\cap\{x<0\}\}\longrightarrow(-1,1),\qquad \varphi_4(x,y)=y.$$

Dicho de otra forma, S es localmente la gráfica de una función continua y el homeomorfismo es precisamente la proyección de la gráfica en el dominio, que en este caso fue el intervalo $(-1,1)$.

Ejemplo 3. La observación final del ejemplo 2 nos sugiere una situación más general. Sea U un abierto de R^n y $f:U\to R$ una función continua. Entonces la gráfica de la función, es decir,

$$\{(x,f(x))\mid x\in U\}=\mathfrak{G}(f)\subseteq R^{n+1}$$

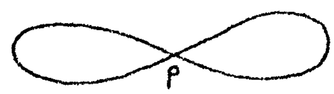
es una subvariedad topológica de R^{n+1} de dimensión n. Esto intuitivamente quiere decir que una función continua simplemente "arruga" a R. Podemos dar el homeomorfismo globalmente:

$$\varphi:\mathfrak{G}(f)\to U,\qquad \varphi(x,f(x))=x.$$

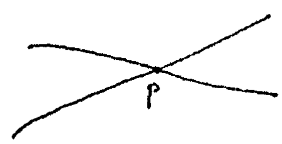
En otras palabras, φ es la proyección de R^{n+1} en R^n restringida a $\mathfrak{G}(f)$.

Antes de pasar a dar más ejemplos, debemos observar que una subvariedad topológica es localmente homeomorfa a R^n, pero no necesariamente es globalmente homeomorfa a R^n. Por ejemplo, S^1 no es globalmente homeomorfa a R, pues cualquier función continua $\varphi:S^1\to R$ manda el compacto S en otro compacto y por lo tanto $\varphi(S^1)\neq R$.

Ejemplo 4. Consideremos la siguiente figura de "8":



Afirmamos que esta figura no es una subvariedad topológica de R^2. Para mostrar esto, basta fijarnos en una vecindad del punto p. Intuitivamente, una vecindad de p se ve como una cruz:

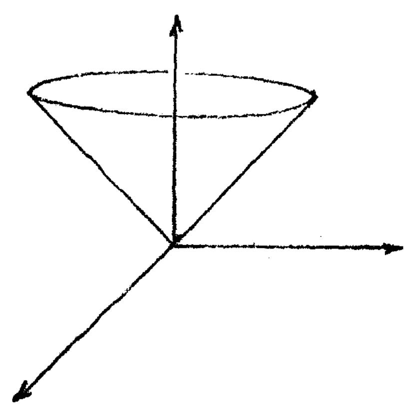


Si quitamos el punto p a esta vecindad, nos queda un conjunto con cuatro componentes conexas, lo cual no ocurre en R; por lo que no hay un homeomorfismo entre esta vecindad de p y un intervalo en R.

Ejemplo 5. El cono

$$M=\{(x,y,z)\in R^3 \mid z=\sqrt{x^2+y^2}\}$$

es una subvariedad topológica de R^3 de dimensión 2, pues es la gráfica de la función continua $f:R^2\to R$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.



Observemos en el ejemplo 5, que en el punto (0,0) la función f no es diferenciable y no existe el plano tangente. En nuestro estudio posterior será necesaria la existencia del "espacio ---

tangente" a una subvariedad; pero para llegar a este concepto, necesitamos otras definiciones. Básicamente, introduciremos el concepto de función diferenciable de una variedad M en R^n, para eliminar los "picos".

DEFINICION. Sea $A\subseteq R^n$ un subconjunto cualquiera de R^n . Una función $f:A\to R^m$ es diferenciable en A si existe una extensión diferenciable de f; es decir, si existen un abierto U en R^n tal que $U\supseteq A$ y una función $F:U\to R^n$ de clase C^∞ * tal que

$$F(x)=f(x) \quad \text{para toda } x\in A.$$

DEFINICION. Sean $A\subseteq R^n$, $B\subseteq R^m$ subconjuntos arbitrarios de R^n y R^m respectivamente. Una función $f:A\to B$ es un difeomorfismo si y sólo si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son diferenciables. En tal caso, diremos que A y B son difeomorfos.

Podemos ya introducir el concepto fundamental de la topología - diferencial: el de los espacios que localmente son como R^n.

DEFINICION. Una subvariedad diferenciable M de R^{n+k} de dimensión n es un subespacio topológico de R^{n+k} tal que para todo punto $p\in M$ existe una vecindad $U\subseteq M$ de p y un difeomorfismo $\varphi:U\to V$ entre U y un abierto V de R^n. La pareja (U,φ) es una carta en p y la pareja (V,φ^{-1}) es una parametrización en p.

Observación 1. Diremos que M es una subvariedad diferenciable de dimensión cero si cada punto $p\in M$ tiene una vecindad que no contiene ningún otro punto de M.

Observación 2. Una subvariedad diferenciable es un caso particu-

---

* Debemos recalcar que para nosotros la diferenciabilidad siempre será en términos de funciones C^∞; algunos teoremas serán válidos si ponemos restricciones menores a las funciones.

lar de subvariedad topológica.

Observación 3. Si $p \in M$ y tenemos un difeomorfismo $\varphi: U \to V$ como en la definición, entonces la carta en p (U, φ) nos sirve como carta para todos los puntos $q \in U$.

Ejemplos. Las subvariedades topológicas de los ejemplos 1 y 2 (R^n y S^1 respectivamente) son también subvariedades diferenciables con las mismas cartas descritas. El ejemplo 4 no es subvariedad diferenciable, pues ni siquiera es subvariedad topológica. Intuitivamente, el cono del ejemplo 5 es una subvariedad topológica que no es una subvariedad diferenciable; antes de mostrar esto, daremos unas ideas más generales.

Sea M una subvariedad diferenciable de R^{n+k} de dimensión n. Podemos abreviar esto diciendo que $M^n \subseteq R^{n+k}$ es una subvariedad diferenciable. Sea $p \in M$ y consideremos una parametrización $\psi: V \to U$ de M en p, donde V es un abierto de R^n y U es una vecindad de p en M. Podemos dar ψ por medio de sus coordenadas

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = (\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n+k}(x_1, \ldots, x_n))$$

con $(x_1, \ldots, x_n) \in V$. Construimos la matriz de la diferencial

$$D\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \psi_{n+k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{n+k}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Como ψ es difeomorfismo, $D\psi$ es inyectiva; y por lo tanto, la matriz tiene rango n. Esto equivale a que alguno de los menores de $n \times n$ tiene determinante distinto de cero. Podemos suponer que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_p \neq 0.$$

(Si no es así, simplemente permutamos las coordenadas) Esta --- caracterización nos servirá en la siguiente sección. Obtendremos una primera consecuencia de este hecho en la

<u>PROPOSICION</u>. Sea $M^n \subseteq R^{n+k}$ una subvariedad diferenciable y $p \in M^n$. - Entonces existe una vecindad V_0 de p en M y una función $f: V \subseteq R^n \to R^k$ donde V es abierto tal que la gráfica de f es V_0.

<u>Demostración</u>.

Con la misma notación que antes, suponemos que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Consideremos la proyección $\pi: R^{n+k} \to R^n$, $\pi(x_1, \ldots, x_{n+k}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Por la regla de la cadena,

$$D(\pi\circ\psi) = D\pi \circ D\psi = \begin{bmatrix} 1 \cdots 0\,0 \cdots 0 \\ 0\,1 \cdots 0\,0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 1\,0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\psi_{n+k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n+k}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

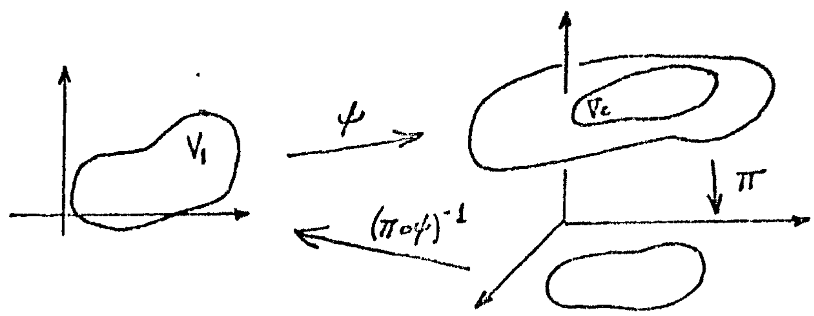
y por hipótesis, $\mathrm{Det}(D(\pi\circ\psi))_p = 0$. Aplicando el Teorema de la - Función Inversa, $\pi\circ\psi$ es un difeomorfismo entre una vecindad V_1 de $\psi^{-1}(p)$ y una vecindad V_2 de $\pi(p)$. Esto implica que π restringida a $\psi(V_1) = V_0$ es inyectiva y que $\pi\circ\psi$ tiene una inversa - - -

diferenciable

$$(\pi\circ\psi)^{-1}:V_2\to V_1\ .$$

podemos componer $(\pi\circ\psi)^{-1}$ con la función $\psi_{n+i}:V_1\to R$ y entonces V es la gráfica de la función diferenciable.

$$(\psi_{n+1}(\pi\circ\psi)^{-1},\ldots,\psi_{n+k}(\pi\circ\psi)^{-1}).$$



Observación. Podemos interpretar el resultado anterior como sigue. Si a la función obtenida la denotamos por

$$(f_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,f_k(u_1,\ldots,u_n))$$

$f=(f_1,\ldots,f_k):R^n\to R^k$, entonces V_0 es el conjunto

$$\{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+k})$$

tal que $x_{n+i}=f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,k$. Esta descripción de V_0 se abrevia diciendo que V_0 es el conjunto de ceros de k funciones reales. Más explícitamente, sean $F_i:R^{n+k}\to R$ dadas por

$F_i(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+k})=f_i(x_1,\ldots,x_n)-x_{n+i}$, $i=1,\ldots,k$.

Entonces el conjunto $\bigcap_{i=1}^{k}F_i^{-1}(0)$ de imágenes inversas de cero es - precisamente V_0. Expresemos esto en el

COROLARIO. Si M es una subvariedad de codimensión k *, entonces M es localmente el conjunto de ceros de k funciones reales.

Pensemos ahora en el cono del ejemplo 5. Si el cono fuera una - subvariedad diferenciable, la proposición anterior nos dice que

* Si $M^n\subseteq R^{n+k}$ es una subvariedad, la codimensión de M se define como el número codim M = k.

en una vecindad de $(0,0,0)$ el cono tendría alguna de las formas $x=g(y,z)$, $y=h(x,z)$, o bien $z=f(x,y)$. Podemos descartar las dos primeras formas pues las respectivas proyecciones no son inyectivas. Así, en una vecindad de $(0,0,0)$ el cono tiene la forma $z=f(x,y)$. Necesariamente, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ en una vecindad. Pero esta función no es diferenciable en $(0,0)$, lo cual muestra que el cono no es una subvariedad diferenciable *.

Ejemplo 6. El toro T es la superficie que se obtiene al rotar una circunferencia de radio r alrededor de un eje en el plano del círculo y a una distancia a > r lejos del centro de la circunferencia. Si tomamos la circunferencia con centro en $(0,a,0)$ y radio r, podemos parametrizar el toro como

$$(x,y)=((r\cos x+a)\cos y,(r\cos x+a)\operatorname{sen} y,r\operatorname{sen} x)$$

con $0<x,y<2\pi$. Esta parametrización cubre al toro excepto por un meridiano (y=const.) y un paralelo (x=const.). Se necesitan dos parametrizaciones más de este tipo para que el toro quede cubierto, y así demostrar que el toro es una variedad diferenciable de dimensión dos. Es un ejercicio encontrar dichas parametrizaciones.

* De aquí en adelante diremos "variedad diferenciable" en vez de "subvariedad diferenciable" esperando que esto no se preste a confusión.

2. ALGUNOS EJEMPLOS DE VARIEDADES.

Una vez que hemos introducido el concepto de subvariedad diferenciable y algunos ejemplos, trataremos de dar otros ejemplos de subvariedades diferenciables, buscando responder a dos preguntas fundamentalmente:

a. Si tenemos una función $f:U\subseteq R^n \to R^m$ ¿cuando $f(U)$ es subvariedad de R^m ?

b. Si tenemos una funcion $f:U\subseteq R^n \to R^m$, ¿cuándo $f^{-1}(y)$ es subvariedad de R^n ?

Nuestra herramienta fundamental en toda la sección será el Teorema de la Función Inversa (T.F.I.), [illegible]

1 . Empecemos.

Recordemos que la idea del T.F.I. es conocer el comportamiento de la función a través del comportamiento de la diferencial de dicha función en un punto; así, si la diferencial de una función $f:U\subseteq R^n \to R^m$ es un isomorfismo lineal (lo cual implica que $n=m$), en un punto, entonces f es un difeomorfismo en una vecindad de dicho punto. Veamos que ocurre si $n\neq m$. De aquí en adelante, f será una función diferenciable cuyo dominio es un abierto $U\subseteq R^n$ tal que $0\in U$ y $f(0)=0\in R^m$. Haremos la misma suposición cuando hablemos de variedades; si $p\in M$ y $\varphi:V\to U$ es una parametrización en p podemos suponer que $0\in U$ y $\varphi(0)=p$. De hecho, estas condiciones no son esenciales, pues las traslaciones en R^n y R^m no afectarán los resultados.

a. Si $n<m$, entonces lo más que puede ocurrir es que $(Df)_0 : R^n \to R^m$ sea inyectiva; en tal caso, podemos pensar en $(Df)_0$ como en una función que manda a todo R^n en un subespacio lineal de R^m isomorfo a R^n , más brevemente, una función que "mete" a R^n en R^m . La más sencilla de estas funciones es la inclusión estándar $i:R^n \to R^m$

$$i(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0).$$

Siguiendo la idea del T.F.I., si $(Df)_0$ es inyectiva, entonces f se comportará localmente como la inclusión estándar, metiendo a U en R^m sin "aplastarlo"; o dicho de otra forma, si $(Df)_0$ es --- inyectiva (lo cual ocurre si y sólo si $(Df)_0$ tiene rango n) pode mos "enderezar" localmente a f(U). Demostraremos en seguida este hecho.

PROPOSICION 1. Sea $f:U\to R^m$ tal que $(Df)_0$ tiene rango n. Entonces - existen una vecindad U' de 0 en R^n, V y W vecindades de 0 en R y un difeomorfismo $h:V\to W$ tales que $f(U')\subseteq V$ y $h\circ f:U\to R^m$ es la inclu-- sión estándar

$$h\circ f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0).$$

Demostración. Sea $f=(f_1,\ldots,f_m)$. Entonces la matriz

$$(Df)_0=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

tiene rango n. Como en el capítulo anterior, podemos suponer que

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\neq 0.$$

Construyamos ahora la función $F:U\times R^{m-n}\to R^m$ como

$$F(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_m)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n),$$
$$f_{n+1}(x_1,\ldots,x_n)+x_{n+1},\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)+x_m)$$
$$=f(x_1,\ldots,x_n)+(0,\ldots,0,x_{n+1},\ldots,x_m).$$

Tenemos que $F(0)=0$ y

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

y $\det(DF)_0 \neq 0$. Aplicando el T.F.I., existen vecindades W y V de $0 \in R^m$ tales que $F: W \to V$ es un difeomorfismo. Sean $h = F^{-1}: V \to W$ y

$$U' = W \cap (R^n \times \{0\}).$$

Entonces $f(U') \subseteq V$ y

$$h \circ f(x_1, \ldots, x_n) = h(F(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0))$$
$$= (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots 0).$$

Observemos que formalmente $U' = W \cap (R^n \times \{0\})$ está contenido en R^m, pero como las últimas m-n coordenadas de los puntos de U' son cero, haremos un abuso en la notación diciendo que U' está contenido en R^n.

COROLARIO 1. Sea $M \subseteq R^{n+k}$ un conjunto tal que para todo punto $p \in M$ ---- existe un homeomorfismo diferenciable $\varphi: U \to M$ entre U abierto en R^n (tal que $0 \in U$) y una vecindad de p en M tal que $(D\varphi)_0$ tiene rango n. Entonces M es una subvariedad diferenciable de R^{n+k} de dimensión n.

Demostración. Por la proposición anterior, existen una vecindad U' de $0 \in R^n$, vecindades V,W de $0 \in R^{n+k}$ y un difeomorfismo $h: V \to W$ tales que $\varphi(U') \subseteq V$ y

$$h \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Esto implica que $h \circ \varphi(U')$ es difeomorfo a U'. (Más formalmente, a $U' \times \{0\}$.) Pero entonces, como h es difeomorfismo, $\varphi(U')$ es difeo-- morfo a U'.

Así pues, el corolario nos muestra que para verificar si un conjunto es variedad basta construir un homeomorfismo local y calcular el rango de la diferencial en un punto.

El corolario 1 da la pauta para responder a la pregunta de cuándo $f(U)$ es una variedad. Supongamos primero que $f:U\to R^m$ es tal que $(Df)_x$ tiene rango n para toda $x\in U$. Reservaremos un nombre especial para este tipo de funciones.

<u>DEFINICION</u>. Una función $f:U\subseteq R^n\to R^m$ de clase C^∞ es una <u>inmersión</u> si $(Df)_x$ tiene rango n para todo $x\in U$.

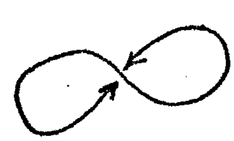
Los siguientes ejemplos muestran que no basta que f sea inmersión para que $f(U)$ sea una variedad.

<u>Ejemplo 1</u>. Sea $f:R\to R^2$ dada por

$$f(t)=(t\ ,t^3-t).$$

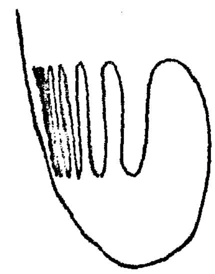
Como $Df(t)=(2t,3t\ -1)$ tiene rango 1 para toda $t\in R$, tenemos que f es una inmersión. Sin embargo, su imagen no es una variedad diferenciable(de hecho, ni siquiera topológica).

<u>Ejemplo 2</u>. Puede pensarse que el ejemplo 1 no funciona pues f no es inyectiva. Sin embargo, podemos dar una inmersión inyectiva de R en la figura de "8":



Observemos que para todo punto $t\in R$ existe una vecindad U de t difeomorfa a su imagen $f(U)$, pero aun así $f(R)$ noes variedad.

En el ejemplo 2, podemos ver que a pesar de que la figura es la imagen de una inmersión inyectiva, dicha figura no es homeomorfa al dominio de la inmersión. Otro ejemplo de inmersión inyectiva que no nos da una variedad es el siguiente:



Observación. Una inmersión siempre es localmente un difeomorfismo; esto implica que si el dominio de la inmersión es compacto, entonces la inmersión también es un difeomorfismo global.

DEFINICION. Una función $f:U\subseteq R^n \to R^m$ de clase C^∞ es un encaje si y sólo si f es inmersión y f es un homeomorfismo sobre f(M)

COROLARIO 2. Si $f:M\subseteq R^n \to R^{n+k}$ es un encaje, entonces f(U) es una variedad diferenciable de dimensión n.

DEMOSTRACION. Podemos aplicar directamente el Corolario 1, pues $f(U)\subseteq R^{n+k}$ es un conjunto tal que existe un homeomorfismo global $f:U\to f(U)$ y tal que $(Df)_x$ tiene rango n para todo $x\in U$.

EJEMPLO 3. Mostramos en la sección 1 que la gráfica de una función continua $f:U\to R$, $U\subseteq R^n$ es una subvariedad topológica de R^{n+1} de dimensión n. Si ahora tenemos una función diferenciable $g:U\to R^m$, $U\subseteq R^n$, entonces

es una subvariedad diferenciable de $R^n\times R^m$ de dimensión n, pues la función

$$G:U\to R^n\times R^m, \qquad G(x)=(x,g(x))$$

es un encaje y $\mathfrak{D}(g)=G(U)$.

b. Pasemos ahora al caso $n>m$. Nuevamente, $(Df)_0 : R^n \to R^m$ no puede ser un isomorfismo; lo más que puede ocurrir es que $(Df)_0$ sea suprayectiva, y esto ocurrirá cuando rango $(Df)_0 = m$. La función lineal suprayectiva más sencilla es la proyección estándar $\pi : R^n \to R^m$

$$\pi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Nuevamente ocurre que el comportamiento de $(Df)_0$ condiciona el comportamiento de f, al menos localmente.

PROPOSICION 2. Sea $f: U \subseteq R^n \to R^m$ una función tal que $(Df)_0$ tiene rango m. Entonces existen U_1 y U_2 vecindades de $0 \in R^n$, V vecindad de $0 \in R^m$ y un difeomorfismo $h: U_1 \to U_2$ tales que $f(U_1)=V$, $f \circ h: U_1 \to R^m$ es la proyección estándar

$$f \circ h(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Demostración. Sea $f=(f_1, \ldots, f_m)$. Entonces

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Como $(Df)_0$ tiene rango m, un menor tiene determinante distinto de cero; puedo suponer que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Construyo una nueva función $F:U \to R^n$ como

$$F(x_1,\dots,x_n)=(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n),\; x_{m+1},\dots,x_n).$$

Entonces $F(0)=0$ y

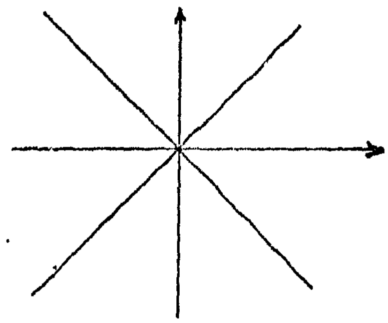
$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\det(Df)_0 \neq 0$, podemos aplicar el T.F.I. y entonces existen U_1, U_2 vecindades de 0 en R^n y tales que $F:U_2 \to U_1$ es un difeomorfismo, y si $h=F^{-1}$, entonces

$$f\circ h(x_1,\dots,x_n)=(\pi\circ F)\circ h(x_1,\dots,x_n)=\pi\circ F\circ h(x_1,\dots,x_n)$$
$$=\pi(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_m).$$

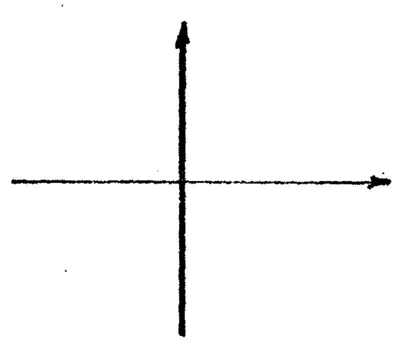
Pensemos un poco en el resultado anterior. Sabemos que si tenemos una transformación lineal $A:R^{n+k} \to R^n$ cuya matriz tiene rango n, entonces la imagen inversa de $0 \in R^n$ (el núcleo o kernel de A) es un subespacio lineal de R^{n+k} de dimensión k. De hecho, si tomamos un punto $y \in R^n$ distinto de cero, entonces $f^{-1}(y)$ es un subespacio afín; es decir, es simple-mente el kerA trasladado. Si tenemos una función $f:U \subseteq R^{n+k} \to R^n$ y $(Df)_0$ tiene rango n, entonces la imagen inversa de cada punto $y \in R^n$ bajo la diferencial $(Df)_0$ será un subespacio afín. Al pasar al análisis del comportamiento de f, obtendremos que $f^{-1}(y)$ será algo difeomorfo a un subespacio afín, o a un subespacio lineal de R^{n+k} de dimensión k: en otras palabras, $f^{-1}(y)$ será una variedad diferenciable de R^{n+k} de dimensión k. Debemos observar que si en $f^{-1}(y)$ hay puntos en donde la diferencial tenga rango menor que n, no podríamos asegurar nada.

Ejemplo 4. Sea $f:R^2 \to R$ dada por $f(x,y)=x^2-y^2$. En este caso, la diferencial $Df=(2x,-2y)$ tiene rango 1 excepto en $(0,0)$. $f^{-1}(0)$ es como se muestra.



Observemos que a pesar de que en el punto $(3,3)$ la diferencial tiene rango 1, $f^{-1}(f(3,3))$ no es una variedad.

Ejemplo 5. Sea $f:R^2 \to R$ dada por $f(x,y)=x^2$; en este caso, $Df=(2x,0)$. Esta diferencial tiene rango 1 excepto en los puntos de la forma $(0,y)$ que son los que forman $f^{-1}(0)$. Ahora resulta que $f^{-1}(0)$ sí es variedad.



En este punto es conveniente introducir la siguiente terminología:

DEFINICION. Sean $f:U \subseteq R^n \to R^m$, $x \in M$, $y \in R^m$. Entonces

i. x es un punto regular de f si rango$(Df)_x = m$.

ii. x es un punto crítico de f si rango$(Df)_x < m$.

iii. y es un valor regular de f si todo $x \in f^{-1}(y)$ es un punto regular.

iv. y es un valor crítico de f si existe al menos un punto $x \in f^{-1}(y)$ tal que x sea punto crítico.

Observemos que la definición sólo depende de la dimensión del contradominio R^m; en particular, si $n<m$ todos los puntos de M son puntos críticos. También vemos que si $f^{-1}(y)=\emptyset$ entonces -por vacuidad- no existen puntos críticos en $f^{-1}(y)$ y por lo tanto y es un valor regular de f. Así, si $n<m$ los valores críticos son exactamente la imagen de U bajo f.

COROLARIO DE LA PROPOSICION 2. Sea $f:U\subseteq R^{n+k}\to R^n$ una función diferenciable, $y\in R^n$ valor regular de f. Entonces $f^{-1}(y)$ es una variedad diferenciable de R^{n+k} de dimensión k.

Demostración. Si $f^{-1}(y)=\emptyset$ entonces $\emptyset$ es una variedad diferenciable. Si $f^{-1}(y)\neq\emptyset$, sea $x\in f^{-1}(y)$. Como y es valor regular, $(Df)_x$ tiene rango n. Por la proposición 2, existen vecindades U_1 y U_2 de $x\in R^{n+k}$, V vecindad de $f(x)=y\in R^n$ y un difeomorfismo $h:U_1\to U_2$ tal que $f(U_1)=V$ y

$$f\circ h(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+k})=(x_1,\ldots,x_n).$$

Sean

$$W=U_2\cap f^{-1}(y) \qquad y \qquad W_1=U_1\cap(\{0\}\times R^k);$$

$h:W_1\to W_2$ sigue siendo un difeomorfismo entre W_2 vecindad de x en $R^{n+k}\cap f^{-1}(y)$ y W_1 (que podemos pensar como un abierto en R^k). Por lo tanto $f^{-1}(y)$ es una variedad diferenciable de dimensión k.

Usaremos el corolario anterior para obtener más ejemplos de variedades.

Ejemplo 6. Consideremos la función $f:R^n\to R$ dada por

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1.$$

$0\in R$ es un valor regular de f, pues si $x_0\in f^{-1}(0)$, entonces $x_0\neq 0$. Como

$$Df=(2x_1,\ldots,2x_n)=2x$$

Entonces $(Df)_{x_0}$ tiene rango 1: es decir, x es punto regular de f.

Denotamos por S^{n-1} a $f^{-1}(0)$; es claro que

$$S^{n-1} = \{ x \in R^n \mid \|x\| = 1\}, \quad \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

S^{n-1} se llama la esfera unitaria en R^n; el corolario muestra que S^{n-1} es una subvariedad de R^n de dimensión n-1. Observemos que ya habíamos estudiado un caso particular de esto en el ejemplo 2 del capítulo 1, cuando n=2. Si n=1, obtenemos los puntos 1 y -1 en R, que forman una variedad diferenciable de dimensión cero, de acuerdo con la obs. de la página 5.

Recordemos finalmente que la condición dada en el corolario es suficiente mas no necesaria. En el ejemplo 5, 0 es un valor crítico de f y sin embargo $f^{-1}(0)$ sí resulta ser una variedad.

3. El Espacio Tangente a una Variedad.

Al haber estudiado algunas consecuencias del Teorema de la Función Inversa en el capítulo anterior, hemos podido establecer que el -- comportamiento de una función lineal (la diferencial) condiciona el comportamiento local de una función. Pasemos a estudiar un procedimiento análogo. Supongamos que $M^n \subseteq R^{n+k}$ es una variedad diferenciable y $p \in M$. Podemoa aplicar una traslación y suponer que $p = 0$. La pregunta es ¿cuál es el subespacio lineal de R^{n+k} que más se parece a M en una vecindad de p? Este subespacio será el llamado espacio tangente a la variedad en el punto p y lo denotaremos por $T_p M$. En el siguiente capítulo veremos un ejemplo de que el comportamiento del espacio tangente condiciona el comportamiento local de una variedad.

Pasemos a discutir la definición de espacio tangente. Una forma de definir $T_p M$ es como sigue: el espacio tangente es el conjunto de todos los vectores tangentes a todas las curvas en M que pasan por p. En el resto del capítulo y el siguiente, supondremos que $p = 0$.

DEFINICION. Sea $\alpha : I \to R^{n+k}$ una función diferenciable del intervalo $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ en R^{n+k}. Si $\alpha(I) \subseteq M$, decimos que α es una curva parametrizada diferenciable en M.

Ejemplo 1. La curva

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in R,$$

es una curva parametrizada diferenciable en la esfera

$$\{(x,y,z) \in R^3 \quad , \quad x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Observemos que α no es inyectiva, pues $\alpha(t+2\pi) = \alpha(t)$ para toda t.

DEFINICION. El conjunto

$$\{\alpha'(0) \mid \alpha \text{ es una curva parametrizada diferenciable en } M, \alpha(0) = p\}$$

donde $\alpha'(0)$ denota el vector derivada de α en el instante 0, es el espacio tangente a M en el punto p, denotado $T_p M$.

Observación. El espacio tangente no es vacío. Sea $\varphi : V \to M$ una parametrización de M en p, donde V es un abierto en R^n tal que $0\in$ y $\psi(0)=p$. Sea $m\in R^n-\{0\}$. Como V es abierto, existe una $\varepsilon>0$ tal que $\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, el vector $tm\in V$. Entonces la curva

$$\psi\circ\alpha_m(t)=\psi(tm),\qquad t\in(-\varepsilon,\varepsilon),$$

es una curva parametrizada diferenciable en M tal que

$$(\psi\circ\alpha_m)'(0)=D\psi(0)(m)\in T_pM.$$

La siguiente proposición muestra la relación entre el subespacio lineal más parecido a la variedad y la función lineal más parecida a una parametrización.

PROPOSICION. Con la notación anterior,

$$T_pM=(D\psi)_0(R^n)$$

Demostración. Demostraremos primero que $T_pM\subseteq(D\psi)_0(R^n)$. Sea $v\in T_pM$. Por definición, existe una curva $\alpha:I\to M$ tal que $\alpha'(0)=v$. Consideremos la curva $\beta=\psi^{-1}\circ\alpha:I\to R^n$. Entonces $\psi\circ\beta=\alpha$ y por la regla de la cadena,

$$v=\alpha'(0)=(D\psi)_0(\beta'(0)),$$

por lo que $v\in(D\psi)_0(R^n)$. Recíprocamente, para demostrar que $(D\psi)_0(R^n)\ T_pM$, sea

$$w=(D\psi)_0(v)\in(D\psi)_0(R^n),\qquad v\in R^n.$$

Tomemos la curva α_v como en la observación previa, tal que

$$\alpha_v(0)=0,\ \alpha_v'(0)=v.$$

Ahora, la curva $\beta=\psi\circ\alpha_v:I\to M$ es tal que

$$\beta'(0)=(D\psi)_0(\alpha_v'(0))=(D\psi)_0(v)=w,$$

lo cual muestra que $w\in T_pM$.

La diferencial $(D\psi)_0$ establece un isomorfismo lineal entre R^n y $(D\psi)_0(R^n)$; en particular tenemos el siguiente

COROLARIO. T_pM^n es un espacio vectorial de dimensión n.

Si $e_1,\ldots,e_n$ denota la base canónica de R^n, entonces los vectores $(D\psi)_0\,(e_i)$, $i=1,\ldots,n$ son una base para T_pM. A estos vectores los denotaremos

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|_0, \qquad i=1,\ldots,n$$

Más en general, si $x\in V$, entonces los vectores

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|_x, \qquad i=1,\ldots,n$$

forman una base de $T_{\psi(x)}M$.

Es tiempo ya de definir la diferencial de una función entre variedades.

Sean $M^n\subseteq R^{n+k}$, $N^m\subseteq R^{m+l}$ dos variedades diferenciables, $f:M\to N$ una función diferenciable, $p\in M$. Como f es diferenciable en p, existe una extensión diferenciable $F:U\to N$ de f tal que U es abierto en R^{n+k} y $p\in U$. Consideremos ahora la diferencial $DF:R^{n+k}\to R^{m+l}$ de F. Como las variedades están contenidas en espacios euclideanos, entonces $T_pM\subseteq R^{n+k}$ y $T_{f(p)}N\subseteq R^{m+l}$. Veamos ahora que la imagen de T_pM está contenida en $T_{f(p)}N$. Sea $v\in T_pM$. Entonces $v=\alpha'(0)$ para alguna curva diferenciable $\alpha:I\to M$, $0\in I$, $\alpha(0)=p$. Entonces $F\circ\alpha$ es una curva diferenciable en N y $(F\circ\alpha)'(0)$ $(=DF(\alpha'(0))=DF(v))$ es por definición un elemento de $T_{f(p)}N$. Entonces tiene sentido lo siguiente.

DEFINICION. La restricción de DF a T_pM se llama la diferencial de la función f en el punto p, y se denota por $Df_p:T_pM\to T_{f(p)}N$.

Antes de seguir adelante, observemos que la definición no depende de la extensión de f; sea $\hat{f}$ otra extensión de f distinta de F y $v\in T_pM$; entonces, si $\alpha:I\to M$ es tal que $\alpha'(0)=v$, entonces

$$D\hat{f}(v)=(\hat{f}\circ\alpha)'(0)=(f\circ\alpha)'(0)=Df(v),$$

pues $\hat{f}=F$ restringidas a M.

Puesto que $DF:R^{n+k}\to R^{m+l}$ es una función lineal y T_pM es un subespacio lineal de R^{n+k}, esto implica que $Df_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ es una función lineal entre los espacios tangentes. Podemos hablar entonces del rango de esta función.

DEFINICION. El rango de f en p es el rango de $(Df)_p : T_p M \to T_{f(p)} N$.

Ejercicio. Verificar que la definición anterior no depende de -- la extensión f considerada.

Con la definición de rango podemos reconstruir las definiciones y proposiciones del capítulo 2; lo haremos brevemente y sin demostraciones pues la generalización es muy sencilla.

DEFINICION. Sean $f: M^n \subseteq R^{n+k} \to N^m \subseteq R^{m+l}$ una función diferenciable ---- entre variedades diferenciables, $p \in M, q \in N$. Entonces

i. p es un punto regular de f si y sólo si el rango de f en p es igual a m.
ii. p es un punto crítico de f si y sólo si el rango de f en p es menor que m.
iii. q es un valor regular de f si y sólo si toda $p \in f^{-1}(q)$ es punto regular de f.
iv. q es un valor crítico de f si y sólo si existe al menos un punto crítico de f $p \in f^{-1}(q)$.
v. f es una inmersión si y sólo si el rango de f en p es igual a n para todo $p \in M$
vi. f es un encaje si y sólo si f es inmersión y $f: M \to f(M)$ es un homeomorfismo.

TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA ENTRE VARIEDADES.
Sean $M^k \subseteq R^{k+l}$, $N^k \subseteq R^{k+m}$ dos variedades diferenciables de la misma dimensión y $f: M^k \to N^k$ una función diferenciable tal que el rango de f en $p \in M$ es k. Entonces existen vecindades U de p en M y V de f(p) en N tales que $f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo.

Sólo requerimos de una definición más para generalizar los principales resultados del capítulo 2.

DEFINICION. Sea $M^n \subseteq R^{n+k}$ una variedad diferenciable. Una subvariedad diferenciable N de M es un subespacio topológico de M que además es variedad diferenciable.

Observación 1. Necesariamente, la dimensión de N es menor o ---- igual a n. Observemos también que todas las variedades que hemos venido considerando son subvariedades diferenciables de algún R^n.

<u>Observación 2</u>. Si N es subvariedad diferenciable de M, entonces la función $i:N\to M$ dada por $i(p)=p$, comúnmente llamada la <u>inclusión</u>, es un encaje. La siguiente proposición es una especie de recíproco.

<u>PROPOSICION 1</u>. Sea $f:M^n\subseteq R^{n+k}\to N^m\subseteq R^{m+\ell}$ una función diferenciable entre variedades diferenciables. Si f es un encaje, entonces --- f(M) es una subvariedad diferenciable de N de dimensión n.

<u>PROPOSICION 2</u>. Sea f como en la proposición 1. Si $q\in N$ es un valor regular de f, entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad diferenciable de M de dimensión n-m.

4. TRANSVERSALIDAD.

Hemos visto en el capítulo 3 que el espacio tangente es el subespacio lineal más pareciod a la variedad. De este hecho obténdremos la respuesta a las siguientes pregunats:

a. ¿Cuándo la intersección de dos variedades es nuevamente una variedad?

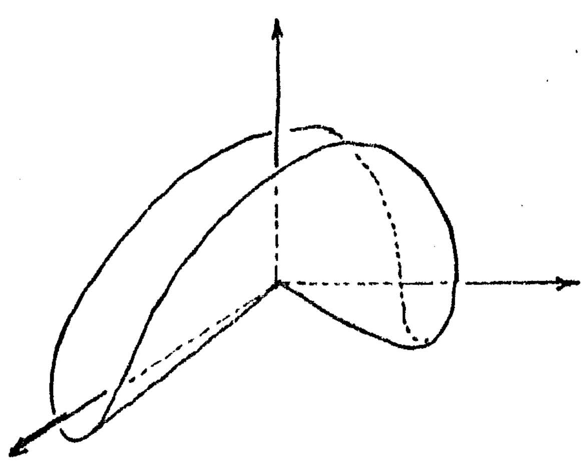
b. Si tenemos una función entre variedades, ¿cuándo la imagen inversa de una variedad es variedad?

a. Estudiemos la primera situación. Tenemos dos variedades M^n y N^m dentro de un espacio R^k y queremos investigar cómo se comporta su intersección. Esto lo veremos a través de varios ejemplos.

Ejemplo 1. Observemos primeramente que la intersección de dos variedades no siempre es una variedad. Al intersectar el paraboloide hiperbólico

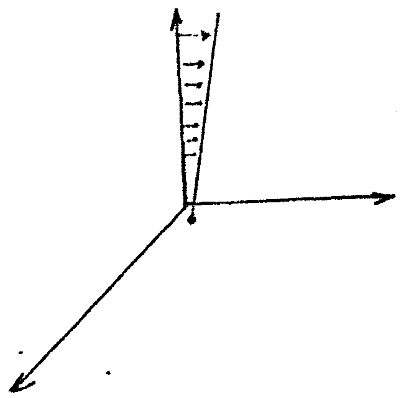
$$\{(x,y,z)\in R^3 \mid z = xy\}$$

con el plano xy, obtendremos una figura de cruz que no es variedad.

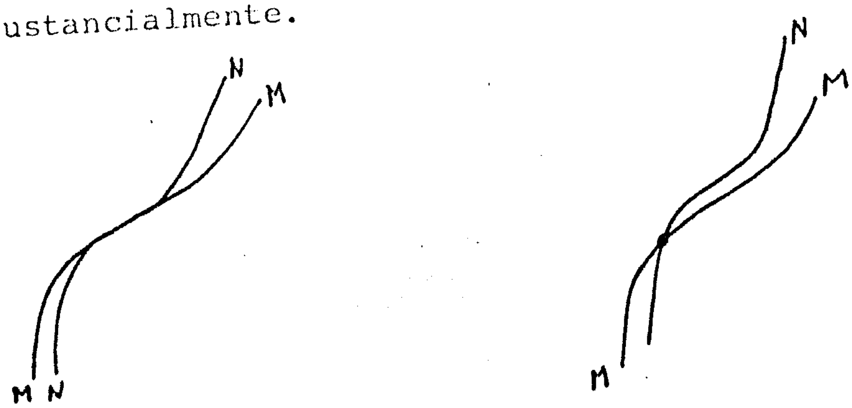


Aun cuando $M\cap N$ fuese una variedad, por el momento no nos interesan todos los tipos de intersecciones, sino solamente las que -- llamaremos 'buenas' intersecciones. Una buena intersección será aquella tal que si 'movemos poco' M o N, la nueva intersección -- será esencialmente la misma con la que comenzamos. Observemos que el ejemplo 1 es un ejemplo de una mala intersección.

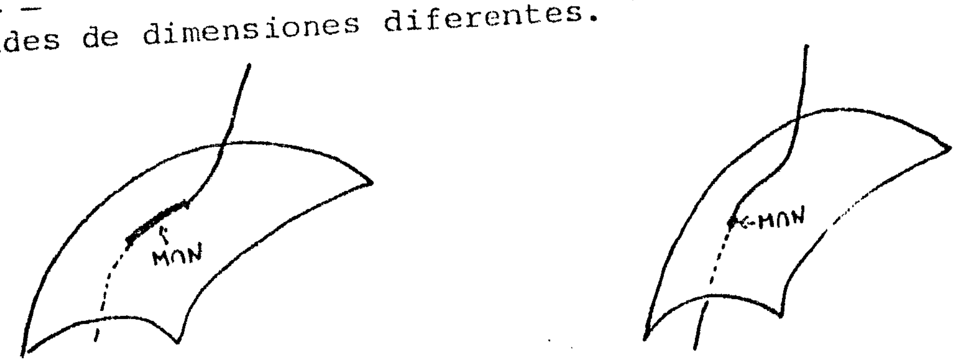
Ejemplo 2. La intersección del plano xy con la recta $x = 0, y = 0$, es una 'buena' intersección, ya que si movemos poco el plano o la recta, obtendremos siempre un único punto de intersección, que es una variedad de dimensión cero.



Ejemplo 3. Si dos curvas en R^2 son iguales a lo largo de un arco tenemos un ejemplo de una mala intersección; ya que si movemos hacia arriba a M o a N, obtendremos que la nueva intersección cambiará sustancialmente.

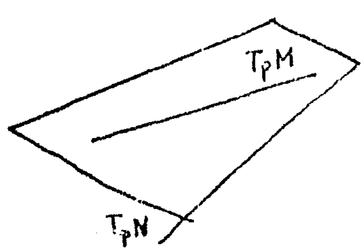


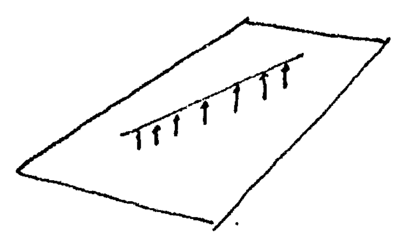
Ejemplo 4. Las malas intersecciones también se pueden dar entre variedades de dimensiones diferentes.



Aquí la intersección es todo un arco de curva, pero si subimos a M o a N obtendremos que la nueva intersección será solamente un punto.

Observemos la siguiente característica común de los ejemplos de malas intersecciones: que también entre los espacios tangentes hay malas intersecciones. En los ejemplos 1 y 3, $T_pM = T_pN$ pero podemos mover un poco los espacios tangentes para separarlos. En el ejemplo 2, $T_pM = M$ y $T_pN = N$, así que no hay ningún problema. En el ejemplo 4, $T_pM \subsetneq T_pN$ pero podemos levantar:



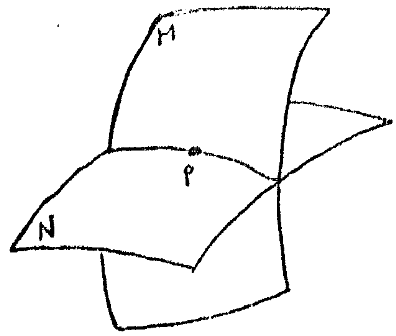


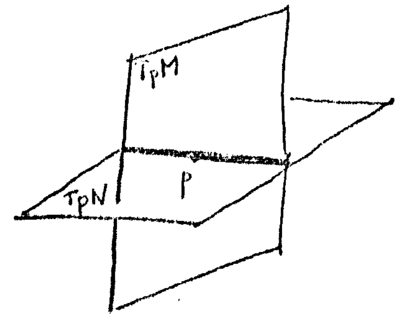
y la intersección pasa bruscamente de ser una recta a ser vacía.

Esta característica común nos sugiere estudiar la intersección de variedades a través de la intersección de sus espacios tangentes, Trataremos de precisar lo que entenderemos por una buena intersección de los espacios tangentes.

El ejemplo 4 muestra que no basta con que $T_pM \neq T_pN$ para que haya una buena intersección. Como veremos enseguida, tampoco es bueno pedir que la intersección sea la menor posible, es decir que $T_pM \cap T_pN = \{0\}$.

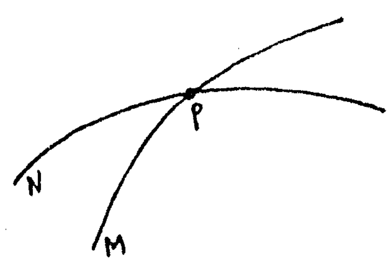
<u>Ejemplo 5</u>. Consideremos dos superficies en R^3 que tienen una buena intersección.



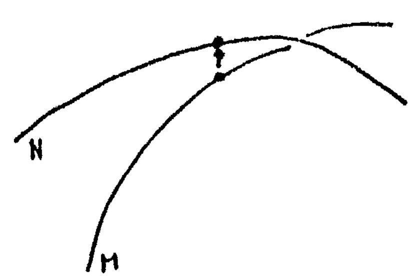


Podemos ver que $T_pM\cap T_pN$ es una recta y aún así tenemos una buena intersección.

Ejemplo 6. Aún cuando $T_pM\cap T_pN=\{0\}$, existen ejemplos de malas intersecciones ; por ejemplo, dos curvas en R^3.



Aquí, $T_pM\cap T_pN=\{0\}$, pero existe una dirección en la cual podemos "jalar" a nuestras curvas para que su intersección cambie radicalmente:



El ejemplo 6 nos muestra algo importante: dòs curvas en R^2 que cumplen $T_pM\cap T_pN=\{0\}$ sí tienen una buena intersección; pero si las curvas están en R^3 esto ya no ocurre. Esto es así porque en R^3 existe una dirección más en la cual nos podemos mover para separar a los espacios tangentes. Dicho de otra manera, si nos movemos (poco) en las direcciones determinadas por los vectores tangentes, la situación no cambia mucho, pero si existe una dirección que no quede determinada por un vector tangente, entonces

podemos cambiar radicalmente la intersección. Así, si no nos po-
demos mover más que en las direcciones determinadas por los vec-
tores tangentes, tendremos una buena intersección. Formalicemos
estas ideas.

<u>DEFINICION</u>. M y N son <u>transversales</u> en $p \in M \cap N$ si y sólo si

$$T_p M + T_p N = R^k.$$

M y N son <u>transversales</u> (Notación: $M \pitchfork N$) si y sólo si son trans-
versales en p para todo $p \in M \cap N$.

Para completar la discusión de este punto, diremos algo de la
dimensión de $M \cap N$, suponiendo que M y N son transversales. Es ---
claro que

$$\dim(M \cap N) \leq \min(\dim M, \dim N).$$

Para obtener la dimensión correcta, nuevamente recurriremos a --
los espacios tangentes. Recordemos primero que si W_1, W_2 son
subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, entonces

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

En nuestro caso, $W_1 = T_p M$, $W_2 = T_p N$, y si M y N son transversales,
$W_1 + W_2 = R^k$. Si $\dim M = n$, $\dim N = m$, entonces, despejando de la
fórmula anterior,

$$\dim(T_p M \cap T_p N) = n + m - k.$$

Es de esperarse entonces que $\dim(M \cap N) = n + m - k$.

<u>PROPOSICION 1</u>. Si M y N son transversales, entonces $M \cap N$ es una
subvariedad diferenciable de R de dimensión $n + m - k$.

La demostración quedará pendiente por el momento.

b. Pasemoa ahora al segundo problema. Si $f: M^n \to N^m$ es una función
entre subvariedades y N_1 es una subvariedad de N, ¿cuándo $f^{-1}(N_1)$
es subvariedad de M?

Dehecho, ya hemos respondido a esta pregunta en un caso: cuando
N_1 consta solamente de un punto $N_1 = \{q\}$. Sabemos que si q es un
valor regular de f, entonces $f^{-1}(q) = f^{-1}(N_1)$ es una subvariedad
de M. Quisiéramos entonces que la condición de regularidad sea un
caso particular de nuestra pregunta.

Para ver si $f^{-1}(N_1)$ es una subvariedad, debemos fijarnos localmente si lo es; es decir, si cada $x \in f^{-1}(N_1)$ tiene una vecindad U tal que U sea una subvariedad. Si $f(x) = y$, sabemos por la observación hecha en el capítulo 1 que una vecindad V de y puede expresarse como

$$V = g^{-1}(0) \qquad\qquad g: R^{m+l} \to R^{l}$$

donde l es la codimensión de N_1 en N. Entonces

$$f^{-1}(V) = f^{-1}g^{-1}(0) = (g \circ f)^{-1}(0)$$

Gracias a esta ecuación podemos establecer si $f^{-1}(N_1)$ es una subvariedad. Esto ocurre si 0 es un valor regular de $(g \circ f)$. Esta condición se puede expresar por medio de f y de N_1.

Por la regla de la cadena,

$$D(g \circ f)_x = Dg_y \circ Df_x, \quad D(g \circ f)_x : T_x M \to R^{l}.$$

Entonces para que 0 sea valor regular de $(g \circ f)$, debe ocurrir que $D(g \circ f)_x$ sea suprayectiva. Como dg_y es suprayectiva y su kernel es $T_y(N_1)$, para cubrir todo R^l debe ocurrir que el kernel de $T_y(N_1)$ y la imagen de Df_x generen $T_y(N)$. En símbolos,

$$\mathrm{Im}(Df_x) + T_y(N_1) = T_y(N).$$

<u>DEFINICION</u>. La función $f:M \to N$ es <u>transversal a</u> N_1 (Notación: $f \pitchfork N_1$) si la ecuación anterior se cumple para toda $x \in f^{-1}(N_1)$.

Es claro entonces el siguiente resultado.

<u>TEOREMA</u>. Si $f \pitchfork N_1$, entonces $f^{-1}(N_1)$ es una subvariedad de M. Además la codimensión de $f^{-1}(N_1)$ es igual a la codimensión de N_1 en la variedad N.

Esta última afirmación es precisamente porque $f^{-1}(N_1) = (g \circ f)^{-1}(0)$ donde $g \circ f: M \to R^l$. Es decir, $f^{-1}(N_1)$ es el conjunto de ceros de l funciones reales.

<u>Observación 1</u>. Si $N_1 = \{y\}$, entonces $T_y(N_1) = \{0\}$, $0 \in T_y(N)$ y la condición de transversalidad se expresa como

$$\mathrm{Im}(Df_x) = T_y N;$$

lo cual quiere decir que $(Df)_x$ es suprayectiva, o sea que y es un punto regular de f. Con esto mostramos que la condición de regularidad es un caso particular de la condición de transversalidad.

Observación 2. Observemos también que la intersección de dos subvariedades es un caso particular del problema que estamos estudiando. Si M y N son subvariedades de R^k, podemos considerar la función

$$i : M \to R^k,$$

tal que $i(x) = x$. Entonces $i^{-1}(N) = M \cap N$. Si $i \pitchfork N$, entonces esta condición se expresa como

$$T_p M + T_p N = R^k$$

para todo $p \in M \cap N$, pues $Di_p : T_p M \to R^k$ es simplemente otra inclusión. Así, $i \pitchfork N$ si y sólo si $M \pitchfork N$. Por el teorema anterior, la codimensión de $M \cap N$ es igual a la codimensión de N en R^k. Por lo tanto,

$$\mathrm{codim}(M \cap N) = \mathrm{codim}(M) + \mathrm{codim}(N)$$

que es equivalente a la ecuación

$$\dim M \cap N = \dim M + \dim N - K.$$

5. Algunos Ejemplos de Variedades Abstractas.

En la sección anterior desarrollamos un breve estudio de las variedades; o mas bien, de las subvariedades de R^n. Si nos detenemos un poco a reflexionar sobre las variedades consideradas, vemos que el hecho de que las variedades sean localmente difeomorfas a algún R^k es fundamental en el estudio de la topología diferencial. Esta característica de las variedades puede extenderse a ciertos espacios topológicos abstractos. Así pues, podemos --- construir espacios "localmente difeomorfos" a R^k, y éstas recibirán el nombre de variedades abstractas. En este capítulo daremos unos ejemplos de variedades abstractas y después daremos la definición de variedad. En los siguientes capítulos trataremos de extender las definiciones desarrolladas en la Sección I a esta nueva situación.

A. Los Espacios Proyectivos.

Quisiéramos recordar rápidamente el concepto de espacio de identificación. Sea X un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Como sabemos, R divide a X en clases de equivalencia; sea $[x]$ la clase de equivalencia en la cual se encuentra un elemento $x\epsilon X$. El conjunto cociente es el conjunto de clases de - equivalencia,

$$X/R = \{[x] \mid x\epsilon X\}$$

La función $P:X\to X/R$ que manda a cada elemento de X en su clase - de equivalencia, $P(x)=[x]$, se llama la proyección natural de X en X/R. Dotamos a X/R de una topología pidiendo que P sea una -- función continua; es decir, $U\subseteq X/R$ es abierto si y sólo si $P^{-1}(U)$ es abierto. El conjunto X/R dotado con esta topología recibe el nombre de espacio de identificación de X bajo la relación R.

Describiremos ahora los espacios proyectivos. Empezaremos con el plano proyectivo. Consideremos el conjunto

$$R_0^3 = \{v\epsilon R^3 \mid v\neq 0\}$$

y definamos la siguiente relación:

$$v\sim w \quad \text{si} \quad v=\lambda w \text{ para alguna } \lambda\neq 0.$$

Claramente, ésta es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son las rectas que pasan por el origen. El espacio cociente

$$R^3_0/\sim$$

será denotado por P^2 y se llamará el <u>plano proyectivo real</u>.

Daremos otra caracterización del plano proyectivo. Sea

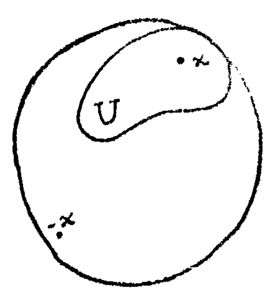
$$S^2 = \{v \in R^3 \mid \|v\| = 1\}$$

la esfera unitaria en R^3 (con la norma euclideana usual). Cada recta por el origen corta a S^2 en sólo dos puntos, x y -x. Si identificamos x con -x, obtenemos un espacio de identificación que denotaremos, por el momento, por P^2_1. La función $\varphi: P^2 \to P^2_1$ dada por

$$\varphi([x]) = \varphi([x/\|x\|])$$

es un homeomorfismo entre estos dos espacios. De aquí en adelante, no haremos ninguna distinción entre P^2 y P^2_1.

Podemos ver que localmente $P^2 = S^2/\sim$ se comporta como un conjunto abierto en la esfera. Si $[x] \in P^2$, sea $x \in [x]$. Supongamos que U es un conjunto abierto en S^2 tal que $x \in U$ pero $-x \notin U$.



Entonces la función $P|_U : U \to P(U)$ es un homeomorfismo. De hecho, podemos pensar en P(U) como la copia de U en P^2. Mostraremos posteriormente que esta función es una parametrización local de P^2 en el punto [x].

Este ejemplo se puede generalizar a cualquier dimensión. Sea

$$S^n = \{v \in R^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$$

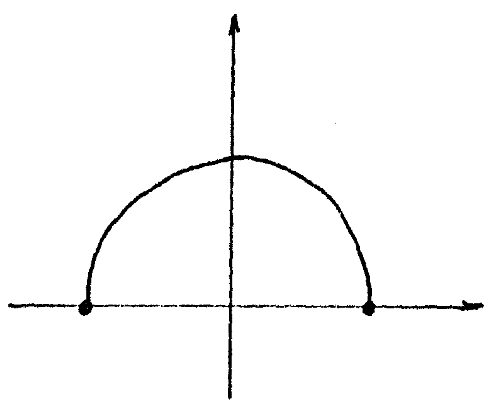
la esfera unitaria de R^{n+1}, y consideremos la relación de equivalencia

$$x \sim -x, \qquad x \in S^n.$$

El espacio cociente $S^n/\sim$ recibe el nombre de espacio proyectivo real de dimensión n * y se denota como sigue:

$$P^n = S^n/\sim$$

Esta definición tiene sentido aún cuando $n=0,1$. Pero en estos casos la descripción de los espacios proyectivos es muy sencilla. Si $n=0$, S^0 consta de sólo dos puntos, 1 y $-1\in R$. Al identificarlos obtenemos un único punto. Así, P^0 consta de un único punto. Si $n=1$, podemos simplificar como sigue: en vez de identificar los punto x y $-x\in S^1$, desechamos todos los puntos $(x,y)\in S^1$ tales que $y<0$; puesto que estos quedan identificados con los puntos del semiplano superior; finalmente, para obtener R^1, debemos identificar los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. Al hacer esto, obtenemos



un espacio homeomorfo a S^1; en otras palabras, P^1 es homeomorfo a S^1 **.

Podemos decir algo más de los espacios proyectivos. Obtengamos nuevamente P^2 como sigue. Consideremos el subconjunto de S^2

$$S^2_+ = \{(x,y,z)\in S^2 \mid z\geq 0\}$$

Para obtener P^2 a partir de S^2 hay que identificar los puntos tales que $z=0$ con la regla $x\sim -x$. Pero este conjunto es homeomorfo a S^1; así que al identificar estos puntos obtenemos un subconjunto de P^2 que es homeomorfo a P^1. En este sentido, se dice que $P^1\subseteq P^2$. Esta situación se puede generalizar a todos los espacios proyectivos:

$$P^n\subseteq P^{n+1}, \qquad n=1,2,\ldots$$

* También en $C^n=(z_1,\ldots,z_n)$, $z_i\in C$ se puede hacer esta relación de equivalencia; entonces el espacio cociente es el espacio proyectivo complejo de dimensión n.

** Para una "visualización" de P^2, ver Spivak.

B. LA DEFINICION DE VARIEDAD ABSTRACTA.

Antes de definir lo que es una variedad abstacta, debemos hacer algunas modificaciones a nuestras definiciones. En primer lugar, dijimos que una subvariedad topológica de dimensión n es un subespacio topológico de R^{n+k} localmente homeomorfo a R^n.
También mencionamos que el hecho de que las subvariedades fueran sudespacios de R^{n+k} implica que las subvariedades son Hausdorff y que su topología tiene base numerable. Como ahora trabajaremos con espacios topológicos que no necesariamente están inmersos en un espacio euclídeano, debemos observar que estas propiedades no quedan garantizadas pidiendo que el espacio topológico sea localmente homeomorfo a R^n. *

DEFINICION. Una variedad topológica M de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable tal que todo punto de M tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de R^n. Una carta (U,φ) en M es un homeomorfismo $\varphi:U\to V$ entre un abierto U de M y un abierto $V\subseteq R^n$. A menudo hablaremos también de una parametrización (V,ψ) de M, que es un homeomorfismo tal que $(\psi(V),\psi^{-1})$ es una carta en M.

Ejemplo 1. Toda subvariedad topológica de R^{n+k} de dimensión n es una variedad topológica de dimensión n.

Ejemplo 2. El espacio proyectivo real P^n es una variedad topológica de dimensión n. Una carta puede ser $(P(U),(P|_U)^{-1})$, con la notación ya introducida.

Introduciremos ahora los conceptos más importantes, que son los que se refieren a la diferenciabilidad. Para esto nos valdremos de las cartas.

DEFINICION. Dos cartas (U_1,φ_1) y (U_2,φ_2) son C^r-compatibles si la función

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap U_2)\to\varphi_2(U_1\cap U_2)$$

es un difeomorfismo de clase C^r, es decir, que tanto esta función como su inversa son de clase C^r, $0\leq r\leq+\infty$. Un atlas de clase C^r sobre M es una colección de cartas $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\alpha\in\Lambda$ en M tales que

* Para un ejemplo de un espacio localmente homeomorfo a R, Hausdorff con base numerable, ver Spivak [ ]

i. $(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1})$ y $(U_{\alpha_2}, \varphi_{\alpha_2})$ son C^r-compatibles para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in A$.

ii. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$; es decir, las cartas cubren a todo M.

Podríamos empezar a trabajar con esta definición * y decir que - una variedad diferenciable es un conjunto dotado de una atlas diferenciable. Sin embargo, a veces es más conveniente trabajar con atlas máximos.

DEFINICION. Un atlas máximo es un atlas $\mathcal{A}$ tal que si (U,φ) es - una carta compatible con las cartas de $\mathcal{A}$, entonces $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$.

LEMA. Todo atlas sobre una variedad M está contenido en un atlas máximo.

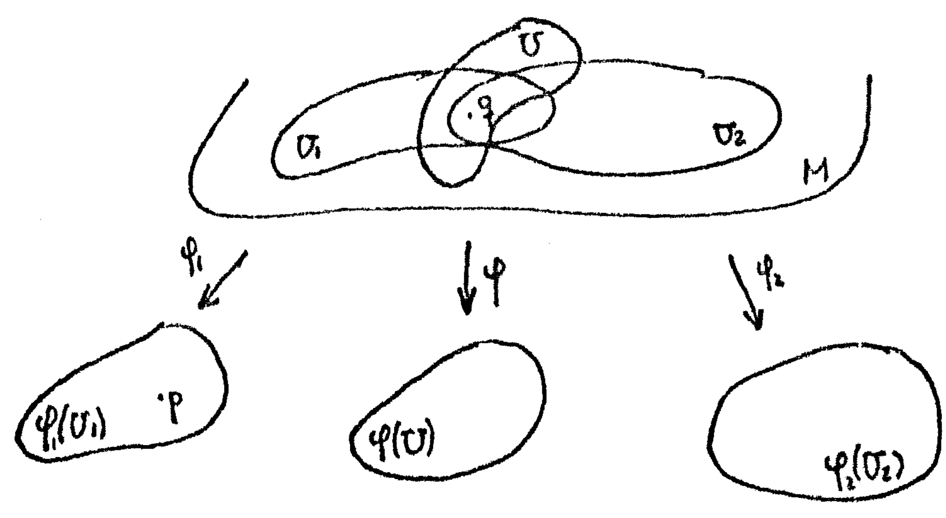
Para demostrar este lema, necesitamos una proposición previa.

PROPOSICION. Si (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son dos cartas compatibles --- con las cartas de un atlas $\mathcal{A}$, entonces son compatibles entre sí.

Demostración. Debemos mostrar que la función

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1 (U_1 \cap U_2) \to \varphi_2 (U_1 \cap U_2)$$

es C^∞. Sea $p \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\varphi_1^{-1}(p) = q$. Como $\mathcal{A}$ es un atlas, existe -- una carta $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $q \in U$. Como (U_1, φ_1) es compatible con -- las cartas de $\mathcal{A}$, entonces $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞. De la misma manera, $\varphi_2 \circ \varphi^{-1}$ es C . Por lo tanto, $\varphi_2 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞ en una vecindad de p; como p era arbitrario, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞ en $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$



* Nosotros sólo consideramos atlas de clase C^∞ y cartas C^∞-compatibles.

Demostración del Lema. Sea $\mathcal{A}'$ el conjunto de todas las cartas compatibles con las cartas de $\mathcal{A}$. Por la proposición anterior, cualquier pareja de cartas en $\mathcal{A}'$ son compatibles. Además, como $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}$ es una atlas, entonces las cartas de $\mathcal{A}'$ cubren a M. Por otro lado, es claro que si $\mathcal{B}$ es un atlas que contiene a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}'$.

DEFINICION. Una variedad diferenciable M de dimensión n * es una variedad topolǵica de dimensión n dotada de un atlas máximo diferenciable.

Observación. En algunos ejemplos es usual dar las variedades con sus parametrizaciones y no con sus cartas.

Ejemplo 1. Toda subvariedad diferenciable de R^n es una variedad diferenciable.

Ejemplo 2. Sea $M = R$. Damos la función $\varphi:M\to R$ como

$$\varphi(x) = x^3.$$

El conjunto

$$\mathcal{A}=\{(M,\varphi)\}$$

es un atlas (pues en particular, φ es compatible con sí misma).- Sabemos entonces que $\mathcal{A}$ está contenido en un atlas máximo $\mathcal{A}'$. Este atlas es distinto del que se obtiene con el atlas máximo que contiene a

$$\mathcal{B} = \{ (M,i) \mid i(x) = x \}$$

pues $i\circ\varphi^{-1} = \varphi^{-1}$ no es una función C^{∞}.

Ejemplo 3. Sea P^n el espacio proyectivo real de dimensión n: es decir,

$$P^n = S^n/x\sim -x$$

Sea $P:S^n\to P^n$ la proyección $P(x) = [x]$. Sea $[x]\in P^n$, $x\in[x]$. Entonces existe W vecindad de x en S^n tal que W no comtiene puntos antípodas. Sabemos también que existe un difeomorfismo $h:V\to W$ de W con un abierto V de R^n. Diremos entonces que $(V,P\circ h)$ es una parame--

---

* A partir de este momento sólo trabajaremos con variedades diferenciables, a menos que se indique lo contrario.

trización de P^n en x.

<u>PROPOSICION</u>. El conjunto

$$\mathcal{A} = \{ P(W), (P\circ h)^{-1} \}$$

es un atlas sobre P^n; y por lo tanto, P^n con el atlas máximo --- que contiene a $\mathcal{A}$ es una variedad diferenciable de dimensión n.

<u>Demostración</u>. Claramente, los conjuntos $P(W)$ cubren a P^n. Por -- lo tanto, sólo debemos verificar que si $(P(W_1), (P\circ h)^{-1})$ y ------ $(P(W_2), (P\circ g)^{-1})$ son dos cartas de $\mathcal{A}$, entonces son compatibles entre sí. Restringiendo adecuadamente h y g, podemos suponer que - $P(W_1) = P(W_2) = V$. Si $P\circ h : U_1 \to V$ y $P\circ g : U_2 \to V$, debemos mostrar que - $(P\circ g)^{-1}\circ (P\ h) : U_1 \to U_2$ es un difeomorfismo. La parte más delicada - es analizar qué pasa con $P^{-1}\circ P : W_1 \to W_2$ (recordemos que P no es inyectiva globalmente, aunque localmente sí lo es). Sea $x \in S^n$. Entonces $P(x) = [x] \in P^n$ y $P^{-1}([x])$ puede tomar dos valores: o bien $P^{-1}([x]) = x$, o $P^{-1}([x]) = -x$. Si W_1 es conexo, como $P^{-1}\circ P$ es continua, vale sólo alguna de estas ecuaciones. Por lo tanto,

$$(P\circ g)^{-1}\circ (P\circ h)(x) = \begin{cases} g^{-1}h(x) \\ \text{o bien} \\ g^{-1}(-h(x)) \end{cases}$$

pero g y h son difeomorfismos de R^n a S^n, por lo que en ambos -- casos esta composición es un difeomorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es - un atlas sobre P^n.

<u>Ejemplo 4</u>. Si $N \subseteq M$ es un subconjunto abierto de una variedad diferenciable con atlas $\mathcal{A}$, entonces N es una variedad diferenciable con el atlas máximo que contiene a las cartas

$$\{(U,\varphi)\} \subseteq \mathcal{A}$$

tales que $U \subseteq N$.

<u>Ejemplo 5</u>. Sea $M(m\times n)$ el espacio vectorial de las matrices de -- $m\times n$. A este espacio lo identificamos con R^{nm}.. Sea $M(m\times n;k)$ el - subconjunto formado por las matrices de rango k. Demostraremos que si $k \leq \min(m,n)$, entonces $M(m\times n;k)$ es una (sub)variedad de $M(m\times n)$ de dimensión $k(m+n-k)$.

Sean P una matriz de $m\times m$ y Q una matriz de $n\times n$, ambas no singulares. Entonces la función $M \to PMQ$ de $M(m\times n)$ sobre $M(m\times n)$ es un difeomorfismo. Si M es cualquier elemento de $M(m\times n;k)$, entonces -- existen matrices P y Q tales que PMQ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz no singular de $k\times k$. Así que basta construir vecindades coordenadas en $M(m\times n;k)$) para estas matrices.
Sea

$$M_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

una matriz en $M(m\times n;k)$ donde A_0 es una matriz no singular de $k\times k$. dada $A\in M(k\times k)$, sea $d(A,A_0)$ el máximo de los valores absolutos de los componentes de la matriz $A-A_0$. Como $\det A_0 \neq 0$ y como det es una función continua (de hecho, es un polinomio) de los componentes de A, sabemos que existe una $\delta>0$ tal que si $d(A,A_0)<\delta$ entonces $\det A\neq 0$, y así A es no singular. Sea U el conjunto de las matrices $M(m\times n)$ de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde $A\in M(k\times k)$ y $d(A,A_0)<\delta$. Entonces U es un subconjunto abierto de $M(m\times n)$. La matriz

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix}$$

donde I_j es la matriz identidad de $j\times j$, tiene el mismo rango que la matriz M. Así que la matriz M tiene rango k si y sólo si $D=CA^{-1}B$. Esto implica que las matrices del conjunto abierto --- $U\cap M(m\times n;k)$ de $M(m\times n;k)$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

donde $A\in M(k\times k)$ y $d(A,A_0)<\delta$. Este conjunto abierto contiene a la matriz M_0.
El conjunto de las matrices de $M(m\times n)$ de la forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

donde $A \in M(k\times k)$, tiene una estructura diferenciable derivada del espacio euclideano R^j con $j = mn - (m-k)(n-k) = k(m+n-k)$. Sea W el subconjunto de estas matrices tal que $d(A,A_o)<\delta$. Entonces W es un subconjunto abierto de $R^{k(m+n-k)}$. Consideremos la función $\sigma : W \to M(m\times n)$, que es suprayectiva en $U\cap M(m\times n;k)$, definida por

$$\sigma \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

Es claro que σ es una función diferenciable. Si $\tau : U \to W$ se define

$$\tau \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

entonces τ es diferenciable y $\tau\circ\sigma$ es la identodad en W. Entonces $U\cap M(m\times n;k)$ es una subvariedad de $M(m\times n)$. Si tomamos $U\cap M(m\ n;k)$ como una vecindad coordenada de $M(m\times n;k)$, entonces $M(m\times n;k)$ es - una subvariedad de $M(m\times n)$ de dimensión $k(m+n-k)$.

6. El Espacio Tangente a una Variedad Abstracta.

A. El Espacio Tangente.

Como el título lo indica, en este capítulo generalizaremos el -- concepto de espacio tangente a esta nueva situación de las variedades abstractas. De aquí en adelante, M representará una variedad abstracta de dimensión n y N una variedad abstracta de dimensión m, que no estarán contenidas en algún R^n a menos que se indique lo contrario.

Examinemos la definición del espacio tangente dada en el capítulo 3.

$$T_pM = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : I \to M \text{ curva parametrizada diferenciable en } M \text{ tal que } \alpha(0) = p. \}$$

El primer problema que aparece para poder generalizar esta definición es la palabra "diferenciable". ¿Qué quiere decir que una función $\alpha : I \to M$ sea diferenciable? Como veremos, este problema se resuelve muy rápidamente usando cartas. Sin embargo, hay un se-- gundo problema: como M era una variedad contenida en algún R^n, - entonces el vector $\alpha'(0)$ tenía sentido como un elemento de R^n. - En este caso, no podremos usar este recurso, pues M no está contenida en un "espacio ambiente". Esto nos llevará a hacer una modificación a nuestra definición.

Pasemos entonces al primer problema. ¿Cuándo una función $\alpha : I \to M$ es diferenciable? De hecho, podemos plantear el problema en una forma más general: ¿cuándo una función entre variedades $f : M \to N$ - es diferenciable?

Recordemos nuestra definición de diferenciabilidad para funciones entre variedades contenidas en algún R^n: $g : M \subseteq R^{n+k} \to N \subseteq R^{m+\ell}$ es diferenciable si existe una extensión diferenciable de g a un abierto $U \subseteq R^{n+k}$ tal que $M \subseteq U$; es decir, si existe una función diferenciable $G : U \to N$ tal que $G(x) = g(x)$ para toda $x \in M$. Observemos que esta definición (como la de espacio tangente) hace uso del hecho de - que M está contenida en R^{n+k}: en R^{n+k} ya tenemos definida la diferenciabilidad y únicamente la estamos extendiendo a subconjuntos arbitrarios de R^{n+k}.

Pero sigamos adelante. Con esta definición de función diferenciable obtenemos el siguiente resultado: Si $p \in M$ y (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) son cartas de M en p y de N en f(p) respectivamente, entonces la composición $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ es una función diferenciable. Este resultado nos indica cómo extender la diferenciabilidad a espacios más generales.

DEFINICION. $f: M \to N$ es diferenciable (C^∞) en $p \in M$ si y sólo si existen cartas (U_1, φ_1) de M en p y (U_2, φ_2) de N en f(p) tales que la función $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \to \varphi_2(U_2)$ es diferenciable.

Observemos que en la definición, los conjuntos $\varphi_i(U_i)$, $i = 1,2$ son abiertos en sus respectivos espacios.

Ejercicio. Verificar que la definición anterior no depende de las cartas consideradas; en otras palabras, si la definición se cumple para una pareja de cartas, entonces se cumple para cualquier otra pareja de cartas.

De las funciones diferenciables, hay que destacar a las funciones $f: M \to R$. Podemos decir que estas funciones determinan la estructura diferenciable, ya que entre estas funciones se encuentran las funciones coordenadas. Podríamos haber definido las variedades diferenciables como sigue:

DEFINICION. (alternativa) Un estructura diferenciable $\mathcal{D}$ sobre una variedad* M es una colección de funciones reales f definidas cada una en un subconjunto abierto de M tal que

i. Para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y un homeomorfismo φ de U sobre un conjunto abierto de R^n tal que la función f definida en un subconjunto abierto W de U está en $\mathcal{D}$ si y sólo si $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable.

ii. Si U_i son conjuntos abiertos contenidos en el dominio de f y $U = \bigcup U_i$, entonces $f|_U \in \mathcal{D}$ si y sólo si $f|_{U_i}$ está en $\mathcal{D}$ para cada i.

Una variedad diferenciable M es una variedad topológica con una estructura diferenciable $\mathcal{D}$. Los elementos de $\mathcal{D}$ son las funciones reales diferenciables sobre M. Cualquier abierto U y homeomorfismo φ que satisfagan la codición (i) será una carta en M.

* Una variedad topológica.

Si en nuestra definición de función diferenciable hacemos $N = R$, entonces es claro que las dos definiciones son equivalentes, --- pues $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = f \circ \varphi_1^{-1}$ si $\varphi_2 : N \to N$ es la identidad.

Ya que hemos hablado de las funciones diferenciables, tiene sentido hablar de las curvas diferenciables en M que pasan por $p \in M$.

<u>DEFINICION</u>. Una <u>curva parametrizada diferenciable</u> en M es una -- función diferenciable $\alpha : I \to M$ de un intervalo $I \subseteq R$ a M. Si $\alpha(t) = p$ diremos que α pasa por p en el instante t.

Observemos que, usando traslaciones, podemos suponer que $0 \in I$ y que $\alpha(0) = p$.

Pasemos ahora al problema de definir a los vectores tangentes.

Poedmos pensar en el espacio tangente como en el conjunto de todas las "direcciones" de todas las curvas diferenciables que pasan por p. Es claro que distintas curvas pueden tener el mismo - vector tangente. Podemos agrupar entonces a distintas curvas que tengan "dirección común". Empecemos con el caso conocido.

<u>DEFINICION</u>. Las curvas $\sigma : I \to R^n$, $\tau : J \to R^n$, con $0 \in I \cap J$ y $\sigma(0) = \tau(0)$ son <u>equivalentes</u> en $\sigma(0) = p$ (notación: $\sigma \sim \tau$) si y sólo si

$$\sigma'(0) = \tau'(0).$$

Es claro que existe una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia y el conjunto de vectores tangentes.

Ahora bien, para definir una cierta equivalencia de curvas, recurriremos nuevamente a las cartas.

<u>DEFINICION</u>. Sea M una variedad abstracta, $p \in M$ y $\sigma : I \to M$, $\tau : J \to M$ curvas diferenciables tales que $0 \in I \cap J$, $\sigma(0) = \tau(0) = p$. Sea (U, φ) una carta en p tal que $\varphi(p) = 0$. σ y τ son <u>equivalentes</u> si y sólo si las curvas $\sigma_1 = \varphi \circ \sigma$ y $\tau_1 = \varphi \circ \tau$ son equivalentes en el sentido - de la definición anterior; es decir, si

$$\sigma_1'(0) = \tau_1'(0). \qquad (*)$$

Debemos ahora verificar que esta definición no depende de la carta. Si (U_1, φ_1) es una carta tal que $p \in U \cap U_1$, entonces

$(\varphi_1 \circ \sigma)'(0) = (\varphi_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma)'(0)$

Por la regla de la cadena,

$$= (\varphi_1 \circ \varphi^{-1})'(\varphi\circ\sigma)(0)\,(\varphi\circ\sigma)'(0)$$
$$= (\varphi_1 \circ \varphi^{-1})(0)\,(\varphi\circ\tau)'(0)$$
$$= (\varphi_1 \circ \varphi^{-1}\circ\varphi\circ\tau)'(0)$$
$$= (\varphi_1\circ\tau)'(0).$$

Podemos ya trabajar con esta definición. Sin embargo, quisiéramos establecer la siguiente definición alternativa.

DEFINICION. Sean σ y τ como antes. Entonces σ y τ son equivalentes si y sólo si

$$(f\circ\sigma)'(0) = (f\circ\tau)'(0) \qquad (**)$$

para toda función diferenciable $f:M\to R$.

PROPOSICION. Las dos definiciones son equivalentes.

Demostración.

i. Sean σ y τ equivalentes en el sentido de la primera definición; es decir, si φ es una carta en p, entonces $(\varphi\circ\sigma)'(0)$ es igual a $(\varphi\circ\tau)'(0)$. Sea $f:M\to R$ diferenciable. Entonces $f\circ\varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p)$ y por la regla de la cadena,

$$(f\circ\sigma)'(0) = (f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\sigma)'(0) = (f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))(\varphi\circ\sigma)'(0)$$
$$= (f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))(\varphi\circ\tau)'(0) = (f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\tau)'(0) = (f\circ\tau)'(0)$$

y por lo tanto, σ y τ son equivalentes según la segunda definición.

ii. Sean σ y τ equivalentes según la segunda definición y $\varphi:U\to R^n$ una carta en p. Entonces $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, donde φ_i es diferenciable y $\varphi_i:U\to R$. Entonces para φ_i vale la ecuación (**), de lo que se sigue inmediatamente la ecuación (*), que dice que σ y τ son equivalentes según la primera definición.

De aquí en adelante usaremos indistintamente las dos definiciones.

Finalmente, hemos llegado a una definición satisfactoria de los vectores tangentes.

DEFINICION. El espacio tangente a una variedad M en un punto p, denotado T_pM, es el conjunto de clases de equivalencia de curvas en M que pasan por p, con la relación de equivalencia dada en cualesquiera de las dos definiciones anteriores.

Es claro que el espacio tangente a R^n en un punto $p\in R^n$ se puede identificar con R^n.

Ahora que hemos definido el espacio tangente, veamos si tiene -- sentido hablar de una estructura de espacio vectorial en él. Es claro que esperamos que el espacio tangente a una variedad de dimensión n sea un espacio vectorial de dimensión n.

Procederemos como sigue. Sea $\psi: V \to U$ una parametrización de M en p, tal que $\psi(0) = p$. Estableceremos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los vectores tangentes a R^n en 0 y el conjunto de los vectores tangentes a M en p; es decir, entre T_pM y $T_0R^n = R^n$. Con esta correspondencia introduciremos una estructura de espacio vectorial en T_pM.

Sea $[\sigma]$ un vector tangente a R^n en 0 y sea σ una curva tal que $\sigma \in [\sigma]$. La composición $\psi\circ\sigma$ es una curva en M tal que $(\psi\circ\sigma)(0) = p$. Diremos que el vector asociado a $[\sigma]$ es la clase de equivalencia de $\psi\circ\sigma$. Debemos verificar que esta correspondencia está bien definida; es decir, que si $\tau \in [\sigma]$, entonces $\psi\circ\tau \in [\psi\circ\sigma]$. Por hipótesis, $\sigma'(0) = \tau'(0)$; luego entonces, usando la carta ψ^{-1},

$$(\psi^{-1}\circ\psi\circ\sigma)'(0) = (\psi^{-1}\circ\psi\circ\tau)'(0)$$

lo cual indica que $\psi\circ\sigma$ y $\psi\circ\tau$ son equivalentes.

<u>DEFINICION</u>. La <u>diferencial</u> de ψ es la función $d\psi_p: R^n \to T_pM$ tal que

$$d\psi_p([\sigma]) = [\psi\circ\sigma] \qquad [\sigma] \in R^n. \quad *$$

<u>PROPOSICION</u>. $d\psi_p$ es una función biyectiva entre R^n y T_pM.

<u>Demostración</u>. Demostraremos únicamente que $d\psi_p$ es suprayectiva; - la demostración de la inyectividad es igualmente sencilla. Sea - $[\sigma_1]$ un vector tangente a M en p y sea σ_1 una curva tal que ---- $\sigma_1 \in [\sigma_1]$. Entonces la curva $\psi^{-1}\circ\sigma_1 = \sigma$ es una curva en R^n tal que $d\psi_p[\sigma] = [\sigma_1]$.

Gracias a esta proposición, podemos introducir una estructura de espacio vectorial a T_pM pidiendo que $d\psi_p$ sea un isomorfismo entre espacios vectoriales. En otras palabras, definimos las siguien-- tes operaciones en T_pM:

$$v + w = (d\psi)_p^{-1}(v) + (d\psi)_p^{-1}(w), \quad \lambda v = \lambda (d\psi)_p^{-1}(v), \quad v, w \in T_pM, \quad \lambda \in R.$$

<u>PROPOSICION</u>. Con las operacones así definidas, $d\psi_p$ es un isomor-- fismo entre R^n y T_pM; en particular, T_pM tiene dimensión n.

* Reservaremos la letra D para las diferenciales entre subconjuntos de R^n.

Para terminar con esta parte de la discusión, demostraremos que esta estructura de espacio vectorial no depende de la parametrización ψ, en el sentido de que si ψ_1 y ψ_2 son parametrizaciones de M en p tales que $\psi_1(0) = \psi_2(0) = p$, entonces la función

$$(d\psi_2)_\psi^{-1} \, (d\psi_1) : R^n \to R^n$$

es un isomorfismo de R^n en sí mismo. Para mostrar esto, sea $u \in R^n$ y $\sigma : I \to R^n$ tal que $\sigma'(0) = u$ (por ejemplo, $\sigma(t) = tu$). $d\psi_{1,p}$ manda a u en la clase de equivalencia de $(\psi_1 \circ \sigma)$ y después $(d\psi_2)_p^{-1}$ lo manda al vector $(\psi_2^{-1} \circ \psi_1 \circ \sigma)'(0) = D((\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(\sigma'(0)) = D(\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(u)$, donde denota la diferencial de la función.* Pero $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ es un difeomorfismo y por lo tanto $D(\psi_2^{-1} \circ \psi_1)$ es un isomorfismo; como

$$D(\psi_2^{-1} \circ \psi_1) = (d\psi_2)^{-1} \circ (d\psi_1),$$

podemos concluir que es cierta nuestra afirmación.

Tal vez sea conveniente en este momento generalizar algunos de los conceptos que dimos en la sección I. En particular, generalizaremos los conceptos de punto regular o crítico, valor regular o crítico. Recordemos que estos conceptos dependen del rango de una cierta difernecial.

Revisemos el caso en que $M \subseteq R^{n+k}$, $N \subseteq R^{m+\ell}$ y $f : M \to N$ es diferenciable. Para definir la diferencial de f, usamos el hecho de que M estaba contenida en un espacio ambiente, pues extendíamos f a un abierto de R^{n+k} y en este abierto ya tiene sentido la diferencial.

De hecho, ya hemos definido una diferencial: la diferencial de una parametrización $d\psi([\sigma]) = [\psi \circ \sigma]$. Ésta definición es precisamente la adecuada, como veremos en seguida.

DEFINICION. Sea $\sigma : I \to M$ una curva parametrizada diferenciable en M tal que $\sigma(0) = p$. Entonces $f \circ \sigma : I \to N$ es una curva parametrizada diferenciable en N tal que $(f \circ \sigma)(0) = f(p)$. La diferencial de f en p, denotada por df_p, es la función $df_p : T_p M \to T_{f(p)} N$ definida por

$$df_p([\sigma]) = [f \circ \sigma].$$

Queremos pasar ahora a generalizar los conceptos que mencionamos antes. Para esto, usaremos otra caracterización de la diferencial.

---

* Ver nota de la página anterior.(45)

Sean (V_1, ψ_1) y (V_2, ψ_2) parametrizaciones de M en p y de N en f(p) respectivamente, con $\psi_1(0) = p$, $\psi_2(0) = f(p)$. Entonces df_p es la única función que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)}N \\ \uparrow{\scriptstyle d\psi_{1o}} & & \uparrow{\scriptstyle d\psi_{2o}} \\ R^n & \xrightarrow{D(\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_1)_o} & R^m \end{array}$$

sea conmutativo*. Esto es claro de la definición de df_p:

$$\begin{aligned} df_p \circ d\psi_{1o}([\sigma]) &= df_p[\psi_1\circ\sigma] = [f\circ\psi_1\circ\sigma] \\ &= [\psi_2\circ\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_1\circ\sigma] \\ &= d\psi_{2o}[\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_1\circ\sigma] \\ &= d\psi_{2o}\circ D(\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_{1o})_o[\sigma]\ . \end{aligned}$$

La unicidad proviene del hecho de que df_p se expresa de manera única, como $d\psi_{2o}\circ D(\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_1)_o\circ(d\psi_{1o})^{-1}$. Puesto que cada una de las diferenciales involucradas es lineal (dψ_2 y $(d\psi_1)^{-1}$ son lineales por definición, y $D(\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_1)$ es una diferencial usual entre espacios euclideanos), tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICION. La diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una función lineal

Ahora que sabemos que df_p es una transformación lineal entre los espacios vectoriales (sobre R) T_pM y $T_{f(p)}N$, podemos hablar de su rango.

DEFINICION. El rango de f en p es el rango de df_p

Observación. Puesto que $d\psi_1$ y $d\psi_2$ son isomorfismos entre los espacios correspondientes, tenemos que

rango df_p = rango $D(\psi_2^{-1}\circ f\circ\psi_1)_o$.

Habiendo superado la dificultad aparente de no estar trabajando en los espacios euclideanos, podemos ya generalizar los conceptos que mencionamos al principio del capítulo. El lector puede revisar una lista de estos conceptos en la página 23 , quitando la condición de que las variedades están contenidas en espacios euclideanos. Los resultados sobre imágenes inversas de puntos regulares e imágenes directas en el capítulo 3 son ciertos también en esta nueva situación y se dejarán al lector como ejercicio.

*Esto implica en particular, la regla de la cadena.

B. Una Breve Introducion al Haz Tangente.

Tomemos ahora una parametrización (V,ψ) de M en p con $\psi(0)=p$.--- Para cada $x\in V$ podemos definir un isomorfismo

$$d\psi_x : R^n \to T_{\psi(x)}M.$$

Gracias a este isomorfismo, podemos introducir una base natural en $T_{\psi(x)}M$: si $e_1,\ldots e_n$ denotan los vectores de la base canónica de R^n, entonces

$$d\psi_x(e_i) = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x), \quad i=1,\ldots,n$$

forman una base de $T_{\psi(x)}M$. Queremos expresar una condición para que estos vectores varíen continuamente con x.

Pongamos el problema en una situación un poco más general.

DEFINICION. Un campo vectorial v sobre M es una función

$$v: M \to \bigcup_p T_pM$$

tal que a cada $p\in M$ le asocia un vector $v(p)\in T_pM$.

Vemos entonces que hemos definido n campos vectoriales $\partial\psi/\partial x_i$, $i=1,\ldots,n$ sobre V. Nuestro problema está entonces en definir -- una topología adecuada para $\bigcup_p T_pM$. Por conveniencia, haremos que esta unión sea ajena.

Definición. El haz tangente sobre una variedad diferenciable M es el conjunto

$$TM = \{(p,v) \mid p\in M,\ v\in T_pM\}$$

Observación. De aquí en adelante, identificaremos T_pM con el subconjunto del haz tangente dado por

$$\{p\}\times T_pM,$$

en el cual definimos las operaciones de espacio vectorial así:

$$\alpha(p,v_1) + (p,v_2) = (p,\alpha v_1 + v_2)$$

Con esta convención, si $p\neq q$, entonces $T_pM\cap T_qM=\emptyset$.

Dicho de otra manera, el haz tangente es la familia de todos los espacios tangentes a la variedad. Para darle una topología, nos valdremos de la parametrización (V,ψ). Como para cada $x\epsilon V$ tenemos un isomorfismo $d\psi_x : R^n \to T_{\psi(x)}M$, podemos definir una biyección

$$d\psi : V\times R^n \to T(\psi(V)) \subseteq TM$$

como

$$d\psi(x,u) = (\psi(x), d\psi_x(u)).$$

Se puede verificar fácilmente que $d\psi$ es una biyección. Introduzco entonces una topología en $T(\psi(V))$ haciendo que $d\psi$ sea un homeomorfismo entre $V\times R^n$ (que es abierto en R^{2n}) y $T(\psi(V))$. Tenemos ahora una cubierta de TM por medio de las $T(\psi(V))$. Definiremos la topología de TM como sigue:

DEFINICION. $A \subseteq TM$ es abierto si y sólo si para toda parametrización $\psi : V \to U$, el conjunto

$$(d\psi)^{-1} \quad (TU\cap A)$$

es abierto en $V\times R^n$, o equivalentemente, en R^{2n} .

Ejercicio. Verificar que realmente estamos definiendo una topología; es decir, mostrar que $\emptyset$ y TM son abiertos, que la intersección finita de abiertos es abierta y que la unión arbitraria de abiertos es abierta.

Debemos verificar que esta definición no depende de la parametrización considerada. Si $\psi_o : V_o \to U_o$ es otra parametrización, es suficiente ver que $(d\psi_o)^{-1} \circ (d\psi)$ es un homeomorfismo. Pero esta función está dada por

$$(d\psi_o)^{-1} \circ (d\psi)(x,u) = ((\psi_o^{-1} \circ \psi((x), d\psi_o^{-1}(\psi(x))(d\psi(x)(u))$$

y, por la regla de la cadena,

$$= ((\psi_o^{-1} \circ \psi((u), D(\psi_o^{-1} \circ \psi)_x(u))$$

que es incluso un [illegible]feomorfimso. Esto muestra que la topología no depende de la parametrización y además muestra el siguiente resultado.

PROPOSICION. TM es una variedad diferenciable de dimensión 2n.

Podemos hablar enotnces de funciones continuas o diferenciables. Por ejemplo, un campo vectorial diferenciable es una función diferenciable $v:M \to TM$ tal que $v(x) \in T_xM$. Otro ejemplo de función -- diferenciable es la proyección

$$\pi : TM \to M; \quad \pi(p,v) = p. \ *$$

Para terminar este capítulo, daremos dos ejemplos de haces tan-- gentes.

Ejemplo 1. El haz tangente TS^n es muy fácil de obtener, e inclu- so podemos dar unas ecuaciones para este haz. Como $S^n \subseteq R^{n+1}$, en-- tonces el haz tangente

$$TS^n \subseteq S^n \times R^{n+1} \subseteq R^{n+1} \times R^{n+1} = R^{2n+2}$$

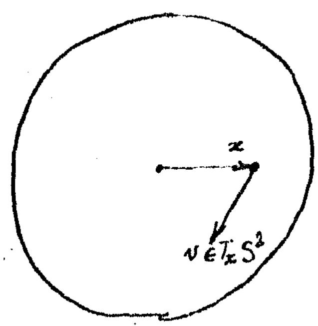
Más explícitamente,

$$TS^n = \{ (x,v) \in S^n \times R^{n+1} \mid x \cdot v = 0 \}$$

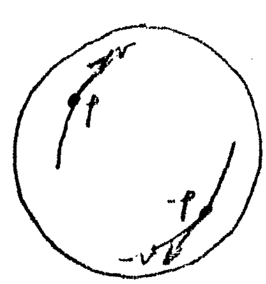
donde $\cdot$ denota el producto punto usual en R^{n+1}. Como $x \in S^n$,

$$TS^n = \{ (x,v) \in R^{2n+2} \mid x \cdot x = 1, \ x \cdot v = 0 \}$$

Estas son las ecuaciones del haz tangente.



Ejemplo 2. Sea $P^n = S^n / x \sim -x$. Observemos que la equivalencia de -- curvas es un hecho local. Por tanto, podemos ver a las curvas -- euqivalentes en P^n como parejas de curvas en S^n;



---

* Podemos decir que un campo vectorial es una función $v:M \quad TM$ tal que $\quad v$ es la identidad.

Los vectores de la figura anterior representan el mismo vector tangente en P^n. Podemos pensar entonces en TP^n como TS^n con una relación de equivalencia entre puntos antípodas y entre vectores antípodas:

$$TP^n = TS^n/(p,v) \sim (-p,-v).$$

7. El Teorema de Whitney.

Después de haber estudiado en la primera sección las subvariedades de R^n, y en la segunda sección las variedades abstractas, nos puede surgir naturalmente la siguiente pregunta: ¿Habrá alguna variedad abstracta que no podamos "meter" en ningún R^n?, la respuesta es que no. En realidad, el teorema de Whitney nos dice algo más: que a cualquier variedad la podemos meter como un subconjunto cerrado de algún R^n. Sin embargo, para llegar a demostrar el teorema necesitamos un buen número de conceptos y resultados.

A. El Concepto de Paracompacidad.

DEFINICION. Sea X un espacio topológico. Una cubierta de X es una familia de subconjuntos de X tal que la unión de la familia es X. Una cubierta es localmente finita sí cada punto de X tiene una vecindad que intersecta a un número finito de elementos de la cubierta. Si $\{x_\alpha\}$ y $\{x'_\beta\}$ son dos cubiertas de X, decimos que $\{x_\alpha\}$ es refinamiento de $\{x'_\beta\}$ si cada elemento x_α está contenido en algún x'_β. Un espacio de Hausdorff X es paracompacto si cada cubierta de X por conjuntos abiertos tiene un refinamiento localmente finito también formado por conjuntos abiertos.
Según la definición, un espacio de Hausdorff compacto siempre es paracompacto. Sin embargo, aquí usaremos la propiedad que pedimos en la definición de las variedades abstractas para mostrar que existen muchos más ejemplos de espacios paracompactos.

PROPOSICION. Sí X es Hausdorff, localmente compacto y con base numerable, entonces X es paracompacto.

DEMOSTRACION. Sea $U_1, U_2, \ldots$ una base numerable de subconjuntos de X. Como X es localmente compacto, podemos suponer que $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots$ son compactos. Definimos $W_1 = U_1$. Procediendo por inducción, supongamos que el conjuntto abierto W_{j-1} se define de forma tal que $\bar{W}_{j-1}$ es compacto. Sea k el menor entero tal que

$$W_j = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$$

Definimos entonces

$$W_j = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k \cup U_j .$$

Por definición, $\bar{W}_j$ es compacto y $\bar{W}_{j-1} \subset W_j$ para j=2,...Además

$$\cup W_j = \cup \bar{W}_j = X.$$

Sea $\{U_\alpha\}$ cualquier cubierta abierta de X, y $j\geq 2$. El conjunto compacto $\bar{W}_{j+1}-W_j$, que está contenido en el abierto $W_{j+2}-\bar{W}_{j-1}$, es cubierto por un número finito $U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_{n_j}}$ de elementos de la cubierta. Sea

$$V_i = U_{\alpha_i}\cap(W_{j+2}-\bar{W}_{j-1}), \qquad i=1,\ldots,n_j.$$

Sea $B_j=\{V_1,\ldots,V_{n_j}\}$. Si $j=1$, cubrimos a $\bar{W}_2$ con un número finito de elementos de la cubierta $\{V_1,\ldots,V_{n_1}\}=B_1$. Definimos

$$B=\bigcup_{j=1}^{\omega} Bj.$$

Puesto que $\bar{W}_2\cup\bigcup_{j=2}^{\infty}(\bar{W}_{j+1}-W_j)=X$, B es una cubierta abierta de X que a la vez es refinamiento de $\{U_\alpha\}$. Por otro lado, si x es cualquier punto de X, existe j tal que $x\in W_j$. Pero entonces $\bar{W}_j$ intersecta solo un número finito de elementos de B; es decir, B es un refinamiento localmente finito de $\{U_\alpha\}$, y X es paracompacto.

COROLARIO. Toda variedad diferenciable es paracompacta.

PROPOSICION. Sea M una variedad diferenciable, $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M. Entonces existe una familia numerable $\{V_i\}$ de vecindades coordenadas de M tales que :

i. $\{V_i\}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_\alpha\}$

ii. Si $\psi:V_i\to R^n$ es la parametrización asociada a V_i, entonces $\psi(V_i)=\{x\in R^n \mid \|x\|<3\}$

iii. Si para cada parametrización (V_i,ψ) en $\{V_i\}$ definimos $V'=\psi^{-1}(\{x\in R^n \mid \|x\|<1\})$, entonces los V' cubren a M.

DEMOSTRACION. Sean $W_1,W_2,\ldots$ los subconjuntos introducidos en la demostración de la proposición anterior. Entonces M es la unión de los conjuntos ajenos $W_2, W_3-W_2, W_4-W_3,\ldots$ Si $m\in M$, entonces existe j tal que $m\in W_{j+1}-W_j$. Sea $\alpha(m)$ un índice tal que $m\in U_{\alpha(m)}$. Es claro que existe una carta, (U_m,φ_m) tal que $\varphi_m(m)=0$, $\varphi_m(U_m)=\{x\in R^n \mid \|x\|<3\}$ y $U_m\subseteq U_{\alpha(m)}\cap(W_{j+1}-W_{j-1})$. Si $m\in W_2$, cambiaremos esta condición pidiendo que $U_m\subseteq U_{\alpha(m)}\cap W_3$. La familia $\{U_m\}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha\}$, así que para esta familia demostraremos la proposición.

Sean $V_m=\varphi_m^{-1}(\{x\in R^n \mid \|x\|<1\})$.

Para $j\geq 2$, $\bar{W}_{j+2}-W_j$ es cubierto por un número finito de V_m, digamos $V_{m_1},\ldots,V_{m_r}$ con $m_1,\ldots,m_r\in\bar{W}_{j+1}-W_j$. Como $m_1,\ldots m_r\in W_{j+2}-W_j$, $V_{m_1},\ldots,V_{m_r}$ están contenidos en $W_{j+3}-\bar{W}_{j-1}$. Para $j=1$, cubrimos $\bar{W}_2$ con un número finito de V_m. Definimos $V_i=V_{m_i}=\varphi_{m_i}^{-1}(\{x\in R^n \mid \|x\|<1\})$. El resto de la demostración es idéntica a la de la proposición anterior..

B. MEDIDA CERO.

Sea $x \in R^n$. El hipercubo de radio $r>0$ con centro en x es el conjunto

$$C(x,r)=\{y=(y_1,\ldots,y_n)\in R^n \mid |y_i-x_i|<r,\ i=1,\ldots,n\}.$$

El volumen de dicho hipercubo es r^n.

DEFINICION. Un conjunto $S\subseteq R^n$ tiene medida cero si para cada $\varepsilon>0$ - existe una familia numerable de hipercubos $C(x_i,r_i)$ $i=1,\ldots,$ tales que

i. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C(x_i,r_i)\supseteq S$,

ii. $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n<\varepsilon$.

PROPOSICION. Si S es un conjunto de medida cero, R^n-S es denso.

DEMOSTRACION. Sea $y\in R^n-S$. Para todo cubo $C(y,r)$ existe un punto $z\in R^n-S$, $z\neq y$ tal que $z\in C(y,r)$ (Si no, entonces existe $C(y,r_0)$ contenido en $S\cup\{x\}$ y entonces S no tiene medida cero). Esto quiere decir que R^n-S es denso.

PROPOSICION. Sea $U\subseteq R^n$ un abierto y $f:U\to R^n$ una función diferenciable. Si $S\subseteq U$ tiene medida cero, entonces $f(S)$ tiene medida cero.

DEMOSTRACION. Sea $\varepsilon>0$. Entonces existe una familia numerable de hipercubos que cubren a S y cuya suma de volúmenes es menor que ε. Podemos suponer que cada hipercubo está contenido en U (Si $C(x,r)$ es cualquier hipercubo, podemos dividirlo en 2^n hipercubos de lado - $1/2r$. Eliminamos los hipercubos que sean ajenos a U y repetimos el proceso. Finalmente obtenemos una familia finita o numerable de hipercubos contenidos en U cuya suma de volúmenes es menor que r^n. Ahora, sea $y\in C(x,r)\cap U$. Cuando el proceso de subdivisión llega al punto en que los lados de los hipercubos son menores que $1/2\rho$ (donde ρ es el radio de una vecindad de y totalmente contenida en U) entonces y queda en uno de los hipercubos que conservamos; esto muestra que la familia de hipercubos así construída cubre a $C(x,r)\cap U$). Sea $f=(f_1,\ldots,f_n)$ y sea $C(x,r)$ un hipercubo contenido en U. Como f es diferenciable, las funciones $|\partial f_i/\partial x_j|$ son continuas; como $C(x,r)$ es compacto, podemos asegurar que existe el máximo de los valores de $|\partial f_i/\partial x_j|$ restringido a $C(x,r)$. Sea K este máximo. Usando el teorema del valor medio, tenemos que

$$\|f(x)-f(y)\|\leq Kn\,\|x-y\|$$

para toda $x,y\in C$. Entonces si $y\in C(x,r)$, $f(y)\in C(f(x),Knr)$. Entoces $f(S\cap C(x,r))$ queda cubierto por el cubo $C(f(x),knr)$ de volumen - $k^n n^n r^n$. Como S está cubierto por $C_i(x_i,r_i)$ con $\sum r_i^n < \varepsilon$, $f(S)$ está cubierto con $C_i(f(x_i),knr_i)$ con $k^n n^n \sum r_i^n < k^n n^n \varepsilon$. Por lo tanto, $f(S)$ tiene medida cero.

COROLARIO. Si $f:U\to R^m$ es una función diferenciable con $U\subseteq R^n$ y $n< m$ entonces $f(U)$ tiene medida cero.

DEMOSTRACION. Sea $p:U\times R^{m-n}\to U$ la proyección estándar. $f\circ p:U\times R^{m-n}\to R^m$ es diferenciable, y como $U\times\{0\}$ tiene medida cero en R^m, entonces $f\circ p(U\times\{0\})=f(U)$ tiene medida cero.

EJERCICIO. Demuestre que $U\times\{0\}$ tiene medida cero en R^m.

DEFINICION. Sea M una variedad diferenciable, $S\subseteq M$. Diremos que S tiene medida cero si para cada carta (U,φ), $\varphi(U\cap S)$ tiene medida cero.

Del corolario anterior obtenemos que

PROPOSICION. Si f es una función diferenciable entre dos variedades M y N, y si $\dim M<\dim N$, entonces $f(M)$ tiene medida cero en N.

C. APROXIMACION POR INMERSIONES

PROPOSICION. Sea $U\subseteq R^n$ abierto, $f:U\to R^m$ diferenciable con $m\geq 2n$. Dada $\varepsilon>0$ existe $A=(a_{ij})$ matriz de $m\times n$ tal que $|a_{ij}|<\varepsilon$ y tal que la función

$$g(x)=f(x)+A\cdot x$$

es una inmersión, es decir Dg_x tiene rango n para toda $x\in U$.

DEMOSTRACION. Buscamos A de la forma $A=Q-Df$, donde Q es una matriz de rango n.

Definimos $f_k:M(m\times n;k)\times U\to M(m\times n)$ como

$$f_k(Q,x)=Q-Df_x.$$

f_k es diferenciable, y su dominio tiene dimensión $k(m+n-k)+n$ y su codominio tiene - dimensión mn. Si $k\leq n-1$, usando el hecho de que $m\geq 2n$, tenemos $mn-[k(m+n-k)+n]=(m-k)(n-k)-n\geq(2n-n+1)(n-n+1)-n=1>0$.

Por los resultados sobre medida cero, la imagen de f_k tiene medida cero en $M(m\times n)$ y el complemento de la imagen es denso en $M(m\times n)$. Sea $A=(a_{ij})$ con $|a_{ij}|<\varepsilon$ tal que A no está en ninguna de las imagenes de f_k para $0\leq k\leq n-1$. Entonces $Q=A+Df_x$ tiene rango n para toda $x\in U$.

TEOREMA.

Sea M^n una variedad diferenciable, $f:M\to R^m$ con $m\geq 2n$ y $C\subseteq M$ un subconjunto cerrado, Tal que el rango de f en x es n para todo $x\in C$. Entonces, para cada función $\delta:M\to R^+$ continua existe una inmersión $g:M\to R^m$ tal que $\|f(x)-g(x)\|\leq\delta(x)$ y $f=g$ en C.

DEMOSTRACION. Si $p\in C$, entonces existe una vecindad de p donde f tiene rango n. Esto implica que C está contenido en un abierto U donde f tiene rango n, los conjuntos U, M-C cubren a M. Sea (U_i,φ_i) un refinamiento de esta cubierta por vecindades coordenadas (ver página 53).

Numeramos los U_i de forma tal que si $i<0$ $U_i\subseteq U$. Si (U_i,φ_i) es una carta, sean

$$V_i=\varphi_i^{-1}(\{x\in R^n \mid \|x\|<2\})\ ;\ W_i=\varphi_i^{-1}(\{x\in R^n \mid \|x\|<1\})$$

Recordemos que los W_i siguen cubriendo a M.

Sea $f_0=f$. Dado $f_{k-1}:M\to R^m$ con rango n en $N_{k-1}=\bigcup_{j<k}\bar{W}_j$, consideremos

$$f_{k-1}\circ\varphi_k^{-1}:\{\|x\|<3\}\longrightarrow R^m$$

Si A es una matriz $m\times n$ y φ es una función C^∞ tal que $\varphi(\{\|x\|<1\})=1$, $\varphi(\{\|x\|\geq 2\})=0$; fuera de estos conjuntitos, $0\leq\varphi\leq 1$. Sea f_A dada por

$$f_A(x)=f_{k-1}\circ\varphi_k^{-1}(x)+\varphi(x)Ax$$

Queremos escoger A de forma que F_A tiene rango n en $K=\varphi_i(N_{i-1}\cap\bar{U}_i)$. Sabemos que $f_{k-1}\circ\varphi_k^{-1}$ tiene rango n. Tomemos

$$DF_A(x)=Df_{k-1}\circ\varphi_k(x)+A(x)\cdot D\varphi(x)+\varphi(x)A$$

la función $F:K\times M(m\times n)\to M(m\times n)$ dada por $F(x,A)=DF_A(x)$ es continua y $F(K\times\{0\})\subseteq M(m\times n;n)$ Si A es suficientemente pequeña, $f(K\times\{A\})\subseteq M(m\times n;n)$. También si A es pequeña, podemos hacer

$$\|Ax\|<\varepsilon_k/2^k \qquad x \ni \|x\|<3$$

Finalmente, por la última proposición, si A es pequeña $f_{k-1}\circ\varphi_k^{-1}+A$ tiene rango n en $\{\|x\|<3\}$. Definimos entonces

$$f_k(y)=\begin{cases} f_{k-1}(y)+\varphi(\varphi_k(y))A(\varphi_k(y)) & \text{si } y\in U_k \\ f_{k-1}(y) & \text{si } y\notin U_k \end{cases}$$

Es fácil ver que f_k es diferenciable, además f_k tiene rango n en $\mathring{N}_{k-1}$ y por la tercera condición tiene rango n en $\mathring{N}_k$. Por la segunda condición, $\|f_k(y)-f_{k-1}(y)\|$ es menor que $\delta/2^k$; Definimos : $g(x)=\lim f_k(x)$; como la cubierta de U_i es localmente finita, todos los f_k coinciden en un conjunto compacto a partir de una cierta k; esto implica que g es diferenciable y tiene rango n para toda x. - Además,

$$\|f(x)-g(x)\|<\delta(x)$$

PROPOSICION. Si $m>2n$, para cualquier inmersión $f:M^n \to R^m$ y cualquier función $\delta:M\to R^+$ continua, existe una inmersión inyectiva $g:M\to R^m$. Si f es inyectiva es una vecindad U de un cerrado N, podemos escoger $g|N=f|N$.

DEMOSTRACION. Sea (U_k) una cubierta de M tal que $f|U_k$ es un encaje, y sea (U_i,φ_i) el refinamiento obtenido en la parte A de este capítulo . Sea φ la función mencionada en la demostración de la proposición anterior. Sea

$$h_i(y)=\varphi(\varphi_i(y))$$

si $y\in U_i$, O si no. Entonces h_i es diferenciable. Como antes, podemos suponer que (U_i,φ_i) refina a $\{U,M-N\}$ y que $U_i\subseteq U$ si $i<0$. Sea $f_0=f$. Dada la inmersión $f_{k-1}:M\to R^m$, definimos f_k como

$$f_k(y)=f_{k-1}(y)+\varphi_k(y)b_k$$

donde $b_k\in R^m$ está por determinarse. Por el argumento de la proposición anterior, si b_k es suficientemente pequeño f_k tendrá rango n. Pedimos también que

$$\|f_k(y)-f_{k-1}(y)\|<\delta(y)/2^k$$

Finalmente, sea $N^{2n}\subsetneq M^n\times M^n$ el conjunto de parejas (y,y_0) con $h_k(y)\neq h_k(y_0)$. Consideremos la función de N^{2n} en R^m que lleva a (y,y_0) EN

$$-\frac{(f_{k-1}(y)-f_{k-1}(y_0))}{h_k(y)-h_k(y_0)}$$

Como $2n<m$, la imagen de N^{2n} tiene medida cero, así que b_k puede ser suficientemente pequeño y no estar en la imagen. Se sigue que $f_k(y)-f_k(y_0)=0$ si y solo si $h_k(y)-h_k(y_0)=0$ y $f_{k-1}(y)-f_{k-1}(y_0)=0$ $(k>0)$. Definimos $g(y)=\lim f_k(y)$. Si $g(y)=g(y_0)$ y $y\neq y_0$ esto implicaría que

$f_{k-1}(y)=f_{k-1}(y_0)$ y $h_k(y)=h_k(y_0)$ para toda $k>0$.
La última condición implica que $f(y)=f(y_0)$ y por lo tanto y y y_0 no pueden pertenecer al mismo U_i. Pero esto significa que ninguno de los dos está en U_i para $i>0$; por lo tanto $y, y_0 \in U$, y esto contradice el hecho de que f es inyectivo en U.

D. El Teorema de Whitney.

DEFINICION. Sea $f:M^n \to R^m$. El conjunto límite $L(f)$ es por definición el conjunto $L(f)=\{y \in R^m \mid y=\lim f(x_n)$ para una sucesión x_n que no tiene puntos de acumulación en $M\}$

EJERCICIO. $f(M)$ es cerrado si y solo si $L(f) \subseteq f(M)$

LEMA. Existe una función diferencible $f:M^n \to R$ con $L(f)=\emptyset$

DEMOSTRACION. Sean $(U_i, \varphi_i), \varphi$ como en las dos proposiciones anteriores, $i>0$; sea $h_i = \varphi \cdot \varphi_i$ si $y \in U_i$ y $h_i=0$, si no. Definimos :
$f(y) = \sum_{j=1}^{\infty} j h_j(y)$. En realidad, la suma es finita, pues $\{U_i\}$ es una cubierta localmente finita. Si $\{x_i\} \subseteq M$ no tiene puntos de acumulación en M, entonces sólo un número finito de estos caen en cualquier compacto de M. Dado $m \in N$, existe un entero i tal que $x_i \notin \bar{W}_i \cup \cdots \cup \bar{W}_m$.
Por lo tnato, $x_i \in \bar{W}_j$ para $j>m$, y $f(x_i)>m$.
Por lo tanto la sucesión $f(x_n)$ no converge.

COROLARIO . (Teorema de Whitney)
Sea M^n una variedad diferenciable. Entonces existe un encaje $g:M^n \to R^{2n+1}$ tal que $g(M)$ es cerrado en R^{2n+1} .

DEMOSTRACION. Sea $f:M \to R \subseteq R^{2n+1}$ diferenciable con $L(f)=\emptyset$. Sea $\delta(x)\equiv 1$, y sea g una inmersión inyectiva tal que $\|f(x)-g(x)\| < \delta(x)$. Entonces $L(g)=\emptyset$ y i. $g(M)$ es cerrado en R^{2n+1} ii. g es un homeomorfismo; por lo tanto g es un encaje.

Antes de terminar con este capítulo, quisiéramos señalar que, desde un cierto punto de vista, el Teorema de Whitney nos dice que podemos quedarnos con las variedades contenidas en espacios euclidianos y trabajar con ellas. Sin embargo, muchas veces es necesario trabajar con variedades abstractas. Por ejemplo, los espacios proyecti--

vas se pueden encajar en un R^n, pero la imagen de P^n bajo el encaje dista mucho de ser un "espacio de rectas" : es más fácil y ayuda mucho más a la intuición el trabajar con esta definición de P^n .

Con el encaje dado por el Teorema de Whitney podemos introducir la estructura de R^n en nuestra variedad; en particular, tenemos un resultado importante.

COROLARIO. Toda variedad es un espacio métrico.

8) Ejemplos de Haces Vectoriales

Después de haber estudiado en las secciones anteriores el concepto de variedad diferenciable, pasaremos a estudiar el concepto de haz. Ya habíamos introducido un ejemplo de un haz, el haz tangente a una variedad.

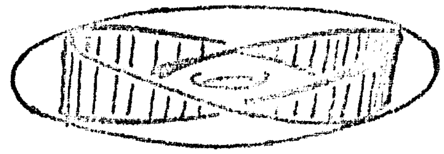
En el caso en que $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, podemos pensar en el haz tangente como una familia de subespacios lineales de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+k}$ que varían de manera continua - hasta diferenciable, en este caso - conforme nos movemos en M. Un modo de formalizar este hecho es pedir que las funciones $\partial\varphi/\partial x_i$ $i=1,\dots,n$ (ver Capítulo 6) sean continuas en una vecindad de p; expresaremos este hecho diciendo que la base de T_pM varía continuamente con p.

Otro ejemplo sencillo es el haz normal, que es la familia de subespacios lineales de $\mathbb{R}^{n+k}$ dadas por $p\in M \longrightarrow N_pM=(T_pM)^{\perp}$. Es claro que cada N_pM tiene dimensión k; lo que probablemente no es tan claro es el hecho de que N_pM varíe continuamente con p. Para mostrar esto, sea $p_0\in M$, (V,φ) una parametrización de M en p_0. Entonces el conjunto $\{\partial\varphi/\partial x_i(p_0)\}$ forma una base de T_pM. Podemos completar este conjunto a una base de $\mathbb{R}^{n+k}$ de la forma $\{\partial\varphi/\partial x_i(p_0), w_j\}$ $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,k$. La matriz formada por estos vectores tiene determinante distinto de cero, y como el determinante es una función continua, existe una vecindad de p_0 tal que los vectores $\{\partial\varphi/\partial x_i(p), w_j\}$ siguen siendo base de $\mathbb{R}^{n+k}$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a esta base obtenemos una base ortonormal $\{v_i(p), w_j(p) \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,k\}$ tal que $\{v_i(p)\}$ es base de T_pM y $\{w_j(p)\}$ es base de N_pM. Se puede verificar fácilmente que, siguiendo este proceso, cada w_j es una función continua.

Una primera definición de haz es como sigue: Un haz de n-subespacios de $\mathbb{R}^{n+k}$ sobre un espacio topológico X es una familia de subespacios de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+k}$ que varían continuamente con $p\in X$. Denotaremos por l_p (ocasionalmente H_p) el subespacio asociado a p. Una forma de expresar la continuidad es usando las bases; es decir, pidiendo que para todo $p\in X$ exista una vecindad U de p y funciones continuas $v_i: U\to\mathbb{R}^{n+k}$, $i=1,\dots,n$ tales que $\{v_i(p)\}$ es base de l_p.

Ejemplo 1.

Sea $X=S^1\subset\mathbb{R}^2$. A cada $p\in S^1$ le asociamos T_pS^1. Podemos entonces dar una base a $T_pS^1=l_p$ como sigue. Para $p\in S^1$, sea $p'\in S^1$ ortogonal a p tal que la base $\{p,p'\}$ esté orientada positivamente. Entonces la familia $\{p'\}$ varía continuamente con p. Observemos que, en este caso, la vecindad U de p puede ser $U=X$. Para representar este haz, lo haremos en $X\times\mathbb{R}^2$, o mejor en $X\times D^2$, donde D es el disco de radio 1 alrededor de $0\in\mathbb{R}^2$?



Ejemplo 2.

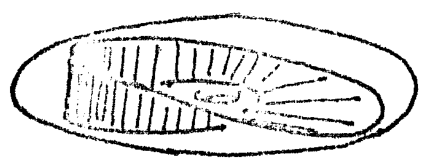
Sea $X=S^1$. Parametricemos $S^1-\{(1,0)\}$ por la función $\varphi:(0,2\pi)\to S^1$ dada por $\varphi(\theta)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$. Entonces el haz sobre $S^1-\{(1,0)\}$ se define como

$$L_{\varphi(\theta)}=\langle \cos\tfrac{\theta}{2},\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\rangle$$

donde $\langle\ \rangle$ indica el subespacio generado por el (los) vector(es) que aparezcan dentro de este símbolo. Podemos extender este haz a todo S^1 pues

$$\langle\cos 0,\operatorname{sen}0\rangle = \langle(\cos\pi,\operatorname{sen}\pi)\rangle.$$

Sin embargo, la base $(\cos\frac{\theta}{2},\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$ no puede extenderse continuamente a todo S^1.



Este haz es la banda de Möbius.

Ejemplo 3.

Sea X un espacio topológico, $p\in X$. Sea $L_p=\mathbb{R}^n$. Las funciones continuas $v_i: X\to\mathbb{R}^n$ dadas por $v_i(p)=e_i$ $i=1,\dots,n$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, forman una base para L_p que varía continuamente con p. Este ejemplo recibe el nombre de haz constante.

Supongamos ahora que tenemos dos haces sobre el mismo espacio X, $p\to L_p$, de dimensión n y $p\to H_p$ de dimensión m; es decir $\dim L_p=n$ y $\dim H_p=m$, con $L_p,H_p\subseteq\mathbb{R}^k$. Podemos considerar ahora una familia de transformaciones lineales $T_p:L_p\to H_p$, $p\in X$. Queremos expresar el hecho de que T_p varíe continuamente con p. Si $p_0\in X$, tenemos bases $v_i,w_j: X\to\mathbb{R}^k$ $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$ de L_p y H_p respectivamente que son continuas en una vecindad de p_0. En términos de estas bases, T_p tiene una representación matricial $A_p\in M(m\times n)$. Esto nos define una función $f:U\to M(m\times n)$ con $f(p)=A_p$. Si f es continua, diremos que la familia T_p es continua. Diremos que los dos haces son equivalentes si existe una familia continua $\{T_p:L_p\to H_p\}$ tal que cada T_p es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Supongamos que $T_p: L_p \to H_p$ es una familia continua de isomorfismos. Con la notación de arriba, esto quiere decir que $f: U \to M(n\times n)$ es continua. Ahora bien, la función $g: M(n\times n; n) \to M(n\times n; n)$ dada por $g(A) = A^{-1}$ es continua, por lo que $g\circ f$ es continua. Como la expresión de $T_p^{-1}: H_p \to L_p$ en las bases w_j, v_i es precisamente A_p^{-1}, este hecho nos dice que $\{T_p^{-1}: H_p \to L_p\}$ es una familia continua de isomorfismos

Diremos que un haz es trivial si es equivalente a un haz constante, $p \to \mathbb{R}^n$.

<u>Ejemplo 4</u>.

Sea $X = I = [0,1]$, $p \in I$. Sea $L_p = \langle (1,0,p), (0,1,3p) \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

Vamos a mostrar que el haz $p \to L_p$ es trivial. En particular, demostraremos que es isomorfo al haz $p \to H_p = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$. Sea $T_p: L_p \to H_p$ dada por

$$T_p(\alpha(1,0,p) + \beta(0,1,3p)) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$$

Es claro que T_p es un isomorfismo. Faltaría ver si la expresión matricial de T_p varía continuamente con p. Pero esta expresión en las bases $(1,0,p)$, $(0,1,3p)$ de L_p y $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ de H_p es precisamente

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para toda p; es decir la función $f: [0,1] \to M(2\times 2)$ es constante y por lo tanto continua. Es decir, el haz $p \to L_p$ es equivalente a un haz constante y por lo tanto es trivial.

<u>Ejemplo 5</u>. Sea $p \mapsto L_p$ el haz del ejemplo 1. Es claro que para cada p existe un isomorfismo entre L_p y $\mathbb{R}$, pero el problema es hacerlo que varíe continuamente. Si parametrizamos $S^1 - \{(1,0)\}$ por el ángulo (ver ejemplo 2), entonces $T_p S^1 = \langle(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\rangle$, $p = \psi(\theta)$. Sea $T_p: L_p \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_p(a(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)) = a$$

Entonces su expresión matricial en las bases $\{(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}$ y $\{1\}$ es precisamente $A_p = 1$, por lo que $f: S^1 - \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$ es continua. Finalmente, podemos completar con $L_{(1,0)} = \langle (0,1) \rangle$ y $T_{(1,0)}: L_{(1,0)} \to \mathbb{R}$ como $T_{(1,0)}(a(0,1)) = a$. También en este caso, $A_{(1,0)} = 1$, lo cual muestra que $f: S^1 \to \mathbb{R}$ es continua y para cada p, T_p es un isomorfismo. Por lo tanto, $p \to L_p$ es trivial.

Observemos ahora una característica común de los dos ejemplos de haces vectoriales triviales. Para demostrar que ambos haces eran triviales, usamos el hecho de que podíamos escoger una base de L_p que varía continuamente con p. Para el ejemplo 4, dimos la base desde un principio, y para el ejemplo 5 dimos la base para $S^1 - \{(1,0)\}$ y luego completamos estas bases de manera continua. El hecho de tener una familia continua de bases definida en todo X caracteriza totalmente a los haces triviales.

Sea $p \mapsto L_p$ un haz de n-subespacios de $\mathbb{R}^{n+k}$. Una <u>sección</u> del haz es una función continua $v: X \to \mathbb{R}^{n+k}$ tal que $v(p) \in L_p$. Por ejemplo, una sección del haz tangente es un campo vectorial tangente. Demostraremos en el capítulo 10 que un haz es trivial si y sólo si existen n secciones $v_1, \ldots, v_n: X \to \mathbb{R}^{n+k}$ tales que para cada p, el conjunto $\{v_i(p)\}$ es base de L_p. Por el momento, supondremos válida la proposición.

<u>Observación</u>. La condición de que L_p varíe continuamente con p puede expresarse diciendo que el haz es localmente trivial.

<u>Ejemplo 6</u>. Tomemos nuevamente el haz del ejemplo 2,

$$L_\theta = \langle (\cos\tfrac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}) \rangle \qquad L_{(1,0)} = \langle (1,0) \rangle = \langle (-1,0) \rangle$$

La base $(\cos\frac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$ no puede extenderse continuamente a todo S^1; pero supongamos que existe una sección $v: S^1 \to \mathbb{R}^2$ tal que $v(p)$ sea base de L_p. Consideremos el producto interior $\rho: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ dado por $\rho(\theta) = (\cos\frac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \cdot v(\theta)$ (observemos que no hay ambigüedad, pues como v es continua, $v(0) = v(2\pi)$). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\rho(0) > 0$. Entonces $\rho(2\pi) = (-1,0) \cdot v(2\pi) = -(1,0) \cdot v(0)$

que es menor que cero. Por el teorema del valor medio, existe $\theta_0 \in (0,2\pi)$ tal que $p(\theta_0)=0$. Esto implica que $(\cos\frac{\theta_0}{2}, \operatorname{sen}(\frac{\theta_0}{2}))$ y $v(\theta_0)$ son ortogonales; pero además son linealmente independientes, pues ambos vectores son base de L_{θ_0}. Puesto que $(\cos\frac{\theta_0}{2}, \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}) \neq 0$, tenemos que $v(\theta_0)=0$; lo cual es una contradicción y muestra que este haz no es trivial.

Para terminar el capítulo, daremos dos definiciones más.

Sea M una variedad diferenciable. Diremos que M es paralelizable si y sólo si su haz tangente es trivial

Ejemplo 7.

Por el resultado obtenido en el ejemplo 6, S^1 es paralelizable. De hecho, se sabe que las únicas esferas $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ paralelizables son S^1, S^3 y S^7.

Recordemos que $p \to N_pM = (T_pM)^\perp$ recibe el nombre de haz normal. Diremos que M es orientable si su haz normal es trivial.

Ejemplo 8.

Es un hecho más o menos conocido que la banda de Möbius M no es orientable. En efecto, si escogemos un cierto vector v como base de $L_p = N_pM$, al dar la vuelta a M este vector regresa como $-v$, por lo que no existe una sección del haz normal que sea continua en todo M.

Ejemplo 9.

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es una variedad orientable. Sea $v: S^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $v(p)=p$. Entonces v es continua en todo S^2 y $\{p\}$ es base de N_pS^2.

Ejemplo 10.

Sea $X=[0,1]$; si $p \in X$ definimos $L_p \subseteq \mathbb{R}^2$ como $L_p = <(1,0)>$ $p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $L_p = <(0,1)>$, $p \in \mathbb{I} \cap [0,1]$. Esta familia de subespacios ni siquiera es un haz, pues para cada $p \in X$ no existe una vecindad donde L_p varíe continuamente con p.

Capítulo 9. El Concepto de Haz Vectorial

Pasaremos ahora a definir formalmente el concepto de haz. Recordemos que, intuitivamente un haz de n-subespacios de $\mathbb{R}^{n+k}$ sobre un espacio topológico X es una familia de subespacios de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+k}$ que varían continuamente con $p \in X$. Digamos que L_p es el espacio asociado con p. El espacio X recibe el nombre de base del haz. El conjunto

$$E = \{(p,u) \in X \times \mathbb{R}^{n+k} \mid u \in L_p\}$$

que puede considerarse como un subespacio topológico de $X \times \mathbb{R}^{n+k}$ es el espacio total del haz. Tengo entonces una proyección $\pi : E \to X$ dada por $\pi(p,u) = p$. El conjunto $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times L_p$ (que puede identificarse con L_p) recibe el nombre de fibra del haz en p. En los ejemplos considerados en el capítulo anterior, L_p es un subespacio de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+k}$, por lo que $\{p\} \times L_p$ puede considerarse como un espacio vectorial definiendo

$$\alpha(p,u_1) + (p,u_2) = (p, \alpha u_1 + u_2) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ u_1, u_2 \in L_p.$$

Formalizaremos ahora el concepto de la trivialización local. Para cada p, tenemos un isomorfismo lineal $h_p : \mathbb{R}^n \to L_p$, que podemos considerar como un isomorfismo

$$h_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \{p\} \times L_p$$

Para "coleccionar" todos estos isomorfismos de manera continua pediremos que exista una vecindad U de p tal que la función

$$h : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n+k}$$
$$h(p,u) = (p, h_p(p,u))$$

sea continua.

<u>Observación</u>. Si π_1 denota la proyección $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U$, $\pi_1(p,u) = p$, entonces

$\pi\circ h \overset{?}{=} \pi_1$: $\pi\circ h(p,u) = \pi(p, h_p(p,u)) = p = \pi_1(p,u)$. Así pues, podemos dar en primer término la h pidiéndole esta condición y después pedir que la función

$$h_p = h\Big|_{\pi_1^{-1}(p)=\{p\}\times\mathbb{R}^n} : \{p\}\times\mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(p)$$

sea un isomorfismo lineal.

<u>Definición</u> a. Un <u>haz vectorial real</u> ξ de dimensión n sobre un espacio topológico X (llamado <u>base</u> del haz) es una pareja $\xi = (E,\pi)$ tal que

i. $E = E(\xi)$ es un espacio topológico llamado el <u>espacio total</u> del haz

ii. $\pi : E \to X$ es una función supraeyectiva y continua, llamada la <u>proyección</u>.

iii. Para cada $p\in X$, $\pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial real de dimensión n, llamado la <u>fibra</u> del haz sobre p.

iv. (La condición de la trivialización local) Para cada $p\in X$ existe una vecindad U de p y un homeomorfismo

$$h : U\times\mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

tal que para cada $p\in U$, $h|_{\{p\}\times\mathbb{R}^n} : \{p\}\times\mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(p)$ es un isomorfismo lineal. La pareja (U,h) es un <u>sistema local de coordenadas</u> de ξ en p

b. Un <u>haz diferenciable</u> ξ es un haz vectorial tal que E y X son variedades diferenciables, π es diferenciable y en iv, pedimos que h sea un difeomorfismo.

<u>Ejemplo 1</u>. (Haz constante)

El haz constante (canónico) ε^n_X sobre X es el haz tal que $E(\varepsilon^n_X) = X\times\mathbb{R}^n$, $\pi(p,u) = p$. Entonces $\pi^{-1}(p) = \{p\}\times\mathbb{R}^n$ tiene una estructura de espacio vectorial natural:

$$\alpha(p,u_1) + (p,u_2) = (p, \alpha u_1 + u_2) \qquad \alpha\in\mathbb{R},\ u_1,u_2\in\mathbb{R}^n.$$

Es claro que ε^n_X satisface la condición iv. de la definición. De hecho, podemos tomar $U = X$.

Ejemplo 2 (Haz Tangente)

Sea $X = M$ una variedad diferenciable. El haz tangente τ_M sobre M es el haz tal que

$$E(\tau_M) = \{(p,u) \mid p \in M, u \in T_pM\}$$

(es decir, nuestra vieja definición de haz tangente) y $\pi(p,u) = p$. Este es un ejemplo de un haz diferenciable.

Observación. Cuando se sobreentienda como se define π y la estructura de espacio vectorial en cada fibra, definiremos el haz dando solamente el espacio total.

Ejemplo 3. (Haz lineal)

Sea $X = \mathbb{P}^n = S^n/p\sim -p$, y sea

$$E(\gamma_n^1) = \{([p],u) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid u = \lambda p \text{ p.a. } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

γ_n^1 es el haz lineal (canónico) sobre $\mathbb{P}^n$. Para demostrar que γ_n^1 es localmente trivial, sea $U_1 \subseteq S^n$ un abierto que no contiene puntos antípodas, y sea

$$U = \{[p] \in \mathbb{P}^n \mid p \in U_1\}$$

Damos $h: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ como $h([p],\lambda) = ([p],\lambda p)$. Se comprueba fácilmente que (U,h) es un sistema local de coordenadas de γ_n^1 en $[p]$.

Ejemplo 4. (Haz universal)

Sabemos que $\mathbb{P}^n$ es la familia de todos los subespacios de dimensión uno en $\mathbb{R}^{n+1}$. Daremos ahora un haz sobre la familia de los subespacios de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Definición. La variedad grassmanniana $G_{n,k}$ es el conjunto de todos los subespacios de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Podemos darle una topología a $G_{n,k}$, mediante el siguiente procedimiento.

Un <u>n-marco</u> en $\mathbb{R}^{n+k}$ es un conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^{n+k}$. La colección de todos los n marcos en $\mathbb{R}^{n+k}$ forma un subconjunto abierto del producto $\mathbb{R}^{n+k}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n+k}$ (n veces). Esto puede verse pues así: tenemos un n-marco y formamos la matriz A cuyas columnas son los vectores del n-marco. Como los vectores son linealmente independientes, existe un menor $n\times n$ de dicha matriz distinto de cero. Como la función que manda a la matriz a dicho menor es continua, existe una vecindad de la matriz A tal que los menores de todas las matrices en esa vecindad son distintos de cero y así los vectores de dichas matrices forman un n-marco.

La colección de todos los n-marcos en $\mathbb{R}^{n+k}$ es entonces una variedad llamada la <u>variedad de Stiefel</u> $V_{n,k}$. Existe una función

$$q : V_{n,k} \to G_{n,k}$$

que manda cada n-marco en el subespacio generado por los vectores de dicho marco. Dotamos a $G_{n,k}$ de una topología obligando a que q sea continua: $U \subseteq G_{n,k}$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U) \subseteq V_{n,k}$ es abierto.

Esta forma de topologizar a $G_{n,k}$ es equivalente a la siguiente: sea $V^{o}_{n,k}$ el subconjunto de $V_{n,k}$ formado por n-marcos de vectores ortonormal, y q_0 es la restricción de q a $V^{o}_{n,k}$. Dado cualquier n-marco en $V_{n,k}$, podemos aplicarle el proceso de Gram-Schmidt para obtener un n-marco en $V^{o}_{n,k}$; y los subespacios generados por estos ~~subespacios~~ vectores son iguales.

<u>Proposición</u>. $G_{n,k}$ es una variedad topológica de dimensión nk. La función que manda cada $p \in G_{n,k}$ en su complemento ortogonal $p^{\perp} \in G_{k,n}$ es un homeomorfismo entre $G_{n,k}$ y $G_{k,n}$.

<u>Demostración</u>.

i. Demostraremos primero que $G_{n,k}$ es Hausdorff mostrando que si $p \neq q$, entonces existe una función continua que separa estos puntos. Sea $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ y sea $d_x : G_{n,k} \to \mathbb{R}$ la función tal que $d_x(p)$ es el cuadrado de la distancia de p a x. Si $x_1, \dots, x_n$ es una base de p ortonormal, entonces

$$d_x(p) = x\cdot x - (x\cdot x_1)^2 - \cdots - (x\cdot x_n)^2$$

Así la composición $d_x \circ q_0 : V^0_{n,k} \to \mathbb{R}$ es continua, y como q_0 es identificación, d_x es continua. Ahora bien, sean $p \neq q$ y sea $x \in p$, $x \notin q$. Entonces

$$d_x(p) = 0 < d_x(q).$$

ii. $G_{n,k}$ es compacto. Puesto que $q_0(V^0_{n,k}) = G_{n,k}$ y q_0 es continua, basta demostrar que $V^0_{n,k}$ es compacto; pero $V^0_{n,k}$ es el conjunto dado por las ecuaciones

$$\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+k}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n+k} \ (n \text{ veces}) \mid x_i \circ x_j = 0 \text{ si } i\neq j,\ x_i\cdot x_j = 1\}$$

Así, $V^0_{n,k}$ es la imagen inversa dada por

$$V^0_{n,k} = \bigcap_{i,j} f_{ij}^{-1}(0) \qquad \begin{pmatrix} f_{ij} : \mathbb{R}^{n+k}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R} \\ f_{ij} = x_i \circ x_j - \delta_{ij}\end{pmatrix}$$

y $V^0_{n,k}$ es cerrado y acotado y por lo tanto compacto.

iii. $G_{n,k}$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{nk}$. Sea $p \in G_{n,k}$. Consideremos $\mathbb{R}^{n+k}$ como $p \oplus p^\perp$. Sea $U \subseteq G_{n,k}$ el subconjunto abierto formado por todos los $q \in G_{n,k}$ tales que la proyección ortogonal $\pi_1 : p\oplus p^\perp \to p$ manda a q sobre p (es decir, tales que $q \cap p^\perp = \{0\}$) Entonces podemos pensar en q como la gráfica de una transformación lineal $L_q : p \to p^\perp$. La función

$$L : U \to \mathrm{Hom}(p,p^\perp) \cong \mathbb{R}^{nk}$$

(donde $\mathrm{Hom}(p,p^\perp)$ representa el conjunto de transformaciones lineales de p en $p^\perp$) tal que $L(q) = L_q$ es una función biyectiva (ejercicio). Veremos que es un homeomorfismo. Sea $x_1,\dots,x_n$ una base ortonormal para p. Puesto que π_1 es biyectiva, restringida a q, existen n vectores únicos $y_1,\dots,y_n \in q$ que forman una base y tales que $\pi_1(y_i) = x_i$, $i=1,\dots,n$. Estos vectores dependen continuamente de q. Tenemos entonces la ecuación

$$y_i = x_i + L_q(x_i) \qquad i=1,\dots,n.$$

Como γ_i varía continuamente con q, $l_q(\gamma_i) \in p^{\perp}$ varía continuamente con q y entonces l_q varía continuamente con q. Por otro lado, esta ecuación muestra que q varía continuamente con l_q, así L^{-1} también es continua, y L es un homeomorfismo, lo cual muestra que $G_{n,k}$ es una variedad.

iv. Veremos que $G_{n,k}$ es homeomorfo a $G_{k,n}$. Sea $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ una base para $p^{\perp}$. Definimos $f : q^{-1}U \to V_{k,n}$, donde U es el abierto de la parte iii, como sigue. Si $(y_1, \dots, y_n) \in q^{-1}(U)$, aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a los vectores $y_1, \dots, y_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ para obtener un $(n+k)$-marco $(y'_1, \dots, y'_{n+k})$ tal que $y'_{n+1}, \dots, y'_{n+k}$ están en $q^{\perp}$. Haciendo $f(y_1, \dots, y_n) = (y'_1, \dots, y'_{n+k})$, tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}U & \xrightarrow{\ f\ } & V_{k,n} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ U & \xrightarrow[\text{nalización}]{\text{ortogo-}} & G_{k,n} \end{array}$$

es conmutativo (es decir, $q \circ f$ es igual a q seguida de la ortogonalización). Puesto que f es continua, $q \circ f$ es continua y por lo tanto la ortogonalización debe ser continua.

Construiremos ahora un haz sobre $G_{n,k}$. Sea

$$E(\gamma_n^k) = \{(p,u) \in G_{n,k} \times \mathbb{R}^{n+k} \mid u \in p\}.$$

con la topología heredada por $G_{n,k} \times \mathbb{R}^{n+k}$. La proyección $\pi : E(\gamma_n^k) \to G_{n,k}$ se define en forma usual y puesto que $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times p$, entonces definimos la estructura de espacio vectorial como

$$\alpha(p, u_1) + (p, u_2) = (p, \alpha u_1 + u_2).$$

<u>Observación</u>. Si $k=1$, $G_{n,1} = \mathbb{P}^n$.

Proposición. El haz γ_n^k sobre $G_{n,k}$ satisface la condición de la trivialización local.

Demostración.

Sea U la vecindad de p construida en la proposición anterior. Definimos

$$h: U \times p \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

como

$$h(q,u) = (q,v)$$

donde v es el único vector en q tal que $\pi_1(v)=u$, y

$$\pi_1 : p \oplus p^{\perp} \longrightarrow p$$

es la proyección ortogonal. Las ecuaciones

$$h(q,u) = (q, u + L_q(u))$$

y

$$h^{-1}(q,v) = (q, \pi_1 v)$$

muestran que h y h^{-1} son continuas.

Definición. El haz γ_n^k así definido recibe el nombre de haz universal (por razones que veremos en el capítulo 10).

Ejemplo 5. (Restricción de un haz)

Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz sobre X, $Y \subseteq X$ un subconjunto de la base de X. Sean $E_1 = \pi^{-1}(Y)$, $\pi_1 = \pi/_{E_1} : E_1 \to Y$. El haz (E_1, π_1) sobre Y se llama la restricción de ξ a Y y se denota por $\xi|_Y$.

Ejemplo 6 (Haz inducido)

Sea $\xi = (E, \pi)$ haz sobre X y sea $f: Y \to X$ una función continua entre espacios topológicos. Sea

$$E_1 = \{ (p,u) \in Y \times E \mid f(p) = \pi(u) \}.$$

La proyección $\pi_1 : E_1 \to Y$ se define como $\pi_1(p,u) = p$ y la estructura de espacio vectorial en cada fibra se define como

$$\alpha(p,u_1) + (p,u_2) = \alpha (p, \alpha u_1 + u_2)$$

Observemos que esto tiene sentido pues $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(f(p))$.

Si (U, h) es un sistema local de coordenadas para ξ, sea $U_1 = f^{-1}(U)$ y

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi_1^{-1}(U_1)$$

dado por $h_1(p,u) = (p, h(f(p),u))$. Entonces (U_1, h_1) es un sistema local de coordenadas para el haz (E_1, π_1), el cual recibe el nombre de haz inducido por f en Y y se denota por $f^*(\xi)$.

En particular, todos los ejemplos del capítulo 9 pueden interpretarse como haces inducidos. Decíamos entonces que X es un espacio topológico y un haz es una familia de n-subespacios de $\mathbb{R}^{n+k}$ que varía continuamente con $p \in X$. Esto se puede formalizar diciendo que existe una función $f: X \to G_{n,k}$ continua. Entonces $f^* \gamma_n^k$ es el haz que habíamos considerado. Cualquier haz inducido por el haz universal se llama haz de subespacios.

Ejemplo 7. (Haz Producto)

Sean $\xi_i = (E_i, \pi_i)$ haces sobre X_i, $i = 1,2$. El haz producto $\xi_1 \times \xi_2$ está definido por $X = X_1 \times X_2$, $E = E_1 \times E_2$ $\pi(u_1, u_2) = \pi_1 \times \pi_2 (u_1, u_2) = (\pi_1(u_1), \pi_2(u_2))$ y cada fibra $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(p_1, p_2) = \pi_1^{-1}(p_1) \times \pi_2^{-1}(p_2)$ tiene la estructura de espacio vectorial dado por

$$\alpha((p_1,u_1),(p_2,u_2)) + ((p_1,w_1),(p_2,w_2))$$
$$= ((p_1, \alpha u_1 + w_1), (p_2, \alpha u_2 + w_2)).$$

Ejemplo 8 (Suma de Whitney)

Sean $\xi_i = (E_i, \pi_i)$ $i=1,2$ haces sobre X. Podemos construir entonces el haz producto sobre X^2. Sea $d: X \to X^2$ dada por $d(p) = (p,p)$. El haz inducido $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ sobre X recibe el nombre de <u>suma de Whitney</u> o <u>suma directa</u> de ξ_1 y ξ_2 y lo denotaremos por $\xi_1 \oplus \xi_2$. Observemos que cada fibra de $\xi_1 \oplus \xi_2$ es de la forma

$$\{(p, v_1, p, v_2) \mid v_1 \in \pi_1^{-1}(p),\ v_2 \in \pi_2^{-1}(p)\}$$

y esta fibra es isomorfa a la suma directa de $\pi_1^{-1}(p)$ y $\pi_2^{-1}(p)$:

$$\pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p) = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in \pi_1^{-1}(p),\ v_2 \in \pi_2^{-1}(p)\}$$

Capítulo 10. Equivalencia de Haces

Definición Sean $\xi_i = (E_i, \pi_i)$ haces sobre X_i, $i=1,2$. Una transformación de haces entre ξ_1 y ξ_2 es una función continua $f: E_1 \to E_2$ tal que $f(\pi_1^{-1}(p))$ es una fibra en E_2 y $f|_{\pi_1^{-1}(p)}: \pi_1^{-1}(p) \to f(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(q)$, $q \in X_2$ es un isomorfismo para cada p.

f es una equivalencia si f es una transformación de haces, $X_1 = X_2$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X & \xrightarrow{id} & X \end{array}$$

es decir, que $f(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(p)$.

Observación: Si f es una transformación de haces, entonces la función $f_1: X_1 \to X_2$ dada por $f_1(p) = q$ si $f(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(q)$ es una función continua llamada la función inducida por f.

Definición. Sean ξ_1, ξ_2 como antes. Un homomorfismo de ξ_1 en ξ_2 es una función continua $f: E_1 \to E_2$ que manda fibras linealmente en fibras y la función inducida por f es la identidad $i: X_1 \to X_1 = X_2$.

Ejemplo 1. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz sobre X y sea $f_1: X_1 \to X$ una función continua. Entonces, por definición, existe una transformación de haces entre ξ y $f_1^*(\xi)$. De hecho, la función inducida por dicha transformación es precisamente f_1.

Ejemplo 2. Supongamos que el haz $\xi = (E, \pi)$ es trivial; es decir, que existe un homeomorfismo $h: X \times \mathbb{R}^n \to E$ tal que para cada p, $h|_{\{p\} \times \mathbb{R}^n}: \{p\} \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(p)$ es un isomorfismo. En otras palabras, ξ es equivalente al haz constante $(X \times \mathbb{R}^n, \pi_1)$.

Podríamos también haber dado esta propiedad como definición de trivial.

Definición. Una sección de un haz $\xi = (E, \pi)$ sobre X es una función continua $v: X \to E$ tal que $v(p) \in \pi^{-1}(p)$, o bien $\pi \circ v: X \to X$ es la identidad.

La sección se anula en p si $v(p) = 0 \in \pi^{-1}(p)$.

Ejemplo 3. Un campo vectorial tangente sobre una variedad diferenciable M es una sección del haz tangente τ_M.

Proposición. Un haz $\xi=(E,\pi)$ de dimensión n es trivial si y sólo si existen n secciones $v_i, i=1,\dots,n$ tales que para toda $p\in X$, $\{v_i(p)\}$ es base de $\pi^{-1}(p)$

Demostración

i. Sean $v_i: X\to E, i=1,\dots,n$ las n secciones mencionadas. Definimos $f: X\times\mathbb{R}^n\to E$ como

$$f(p,u_1,\dots,u_n)=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i(p)$$

Como cada v_i es continua, f es continua; además, para cada p tenemos un isomorfismo

$$f|_{\{p\}\times\mathbb{R}^n}:\{p\}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\pi^{-1}(p)$$

y por lo tanto, ξ es equivalente a un haz constante, y ξ es trivial.

ii. Supongamos que ξ es trivial. Entonces existe una equivalencia $f: X\times\mathbb{R}^n\to E$. Definimos

$$v_i(p)=f(p,e_i)\qquad i=1,\dots,n$$

donde $\{e_i\}$ son la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Como f es continua cada v_i es continua, $v_i(p)\in\pi^{-1}(p)$ y como $f|_{\{p\}\times\mathbb{R}^n}$ es un isomorfismo $\{v_i(p)\}$ es base de $\pi^{-1}(p)$.

Ejemplo 4. Sea M una variedad diferenciable. Diremos que M es paralelizable si τ_M es trivial; o equivalentemente, si M tiene n campos vectoriales tangentes linealmente independientes en cada punto.

Ejemplo 5. Sea γ_n^1 el haz lineal sobre $\mathbb{P}^n$. Mostraremos que este haz no es trivial. Por la proposición anterior, basta demostrar que para cualquier sección $v:\mathbb{P}^n\to E$ existe $p_0\in\mathbb{P}^n$ tal que $v(p_0)$ es el cero de $\pi^{-1}(p_0)$, es decir, $v(p_0)=(p_0,0)$. Sea v cualquier sección y sea $\pi_1:\mathbb{S}^n\to\mathbb{P}^n$ la proyección natural. Entonces $v\circ\pi_1:\mathbb{S}^n\to E$ está dada por

$$v\circ\pi_1(u)=(\pi_1(u),t(u)u)\in E$$

donde $t:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$ es una función continua. Como $t(-u)=-t(u)$ y $\mathbb{S}^n$ es conexo, el teorema del valor intermedio nos dice que existe $q_0\in\mathbb{S}^n$ tal que $t(q_0)=0=t(-q_0)$. Por lo tanto, si $p_0=\pi_1(q_0)$,

$$v(p_0)=(p_0,0).$$

Pasaremos ahora a definir el tipo más importante de haces.

<u>Definición</u>. Sea X un espacio normal y $\xi = (E, \pi)$ un haz sobre X. Decimos que ξ es <u>de tipo finito</u> si existe una cubierta abierta finita $U_1, \dots, U_m$ de X tal que $\xi|_{U_i}$ es trivial para cada $i = 1, \dots, m$.

La siguiente proposición muestra porqué éste es el tipo más importante de haces.

<u>Proposición</u>. ξ es de tipo finito si X es compacto o paracompacto de dimensión finita.*

<u>Demostración</u>. Si X es compacto, la demostración es clara. Si X es paracompacto de dimensión finita (por ejemplo, si X es una variedad topológica de dimensión n), sea $\{U_\alpha\}^{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de X tal que $\xi|_{U_\alpha}$ es trivial para cada α y sea $\{V_\alpha\}$ un refinamiento abierto de esta cubierta tal que todo $p \in X$ está en a lo más $n+1$ elementos de $\{V_\alpha\}$. Puesto que X es paracompacto, podemos suponer que $\{V_\alpha\}$ es localmente finita. Sea φ_α una partición de la unidad subordinada a V_α, con soporte $\varphi_\alpha \subset V_\alpha$. Sea $A_i = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_i) \mid \alpha_j \in A\}$. Si $a = (\alpha_0, \dots, \alpha_i) \in A_i$, sea $W_{ia} = \{x \in X \mid \varphi_\alpha(x) < \min_{j=0,\dots,i}\{\varphi_{\alpha_j}(x)\}, \ \alpha \neq \alpha_j\}$. Cada W_{ia} es abierto y $W_{ia} \cap W_{ib} = \emptyset$ si $a \neq b$. Además,

$$W_{ia} \subseteq \bigcap_{j=0}^{i} \text{soporte } \varphi_{\alpha_j} \subseteq V_\alpha \quad \text{para alguna } \alpha$$

Si $X_i = \bigcup_{a \in A_i} W_{ia}$, entonces, como $\xi|_{W_{ia}}$ es trivial y los W_{ia} son ajenos, $\xi|_{X_i}$ es trivial. Para terminar, basta demostrar que $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$. Si $x \in X$, x está en a lo más $n+1$ elementos de $\{V_\alpha\}$, por lo que a lo más $n+1$ funciones φ_α son positivas en x. Como alguna φ_α es necesariamente positiva en X (φ_α es una partición de la unidad), entonces x está en algún W_{ia} con $0 \le i \le n$.

<u>Observación</u>. El hecho de que una variedad topológica de dimensión n tiene dimensión finita menor o igual que n es un teorema de topología que no demostraremos aquí. Sin embargo, sí supondremos este hecho en adelante.

---

* X tiene dimensión [illegible]

Para terminar esta parte, daremos una caracterización de los haces de tipo finito en términos de los transformaciones de haces

<u>TEOREMA</u>. Sea $\xi = (E(\xi), \pi)$ un haz de dimensión n sobre un espacio normal X. Entonces los siguientes condiciones son equivalentes.

i. ξ es de tipo finito

ii. Existe un haz η de dimensión k tal que $\xi \oplus \eta$ es trivial.

iii. Existe una transformación de haces entre ξ y γ_n^k, donde γ_n^k es el haz universal sobre $G_{n,k}$.

(de ahí el nombre del haz universal).

iv. Existe un homomorfismo inyectivo entre E y $X \times \mathbb{R}^{n+k}$, para k suficientemente grande.

<u>Observación</u>. La parte iii implica que ξ es equivalente al haz inducido en X por la función $f_1 : X \to G_{n,k}$ inducida por la equivalencia

<u>Demostración</u>.

1. Demostraremos que la condición i. implica la condición iv. Sea $U_1, \ldots, U_m$ cubierto de X tal que $\xi|U_i$ es trivial. Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ una partición de la unidad tal que soporte $\varphi_i \subset U_i$. Sea $f_i : E(\xi|U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ la equivalencia local, y sean $f_i^1 \ldots f_i^n$ las funciones coordenadas $f_i^j : E(\xi|U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$. Definimos $f : E(\xi) \to X \times \mathbb{R}^{nk}$ por

$$f(v) = (\pi(v),\ \varphi_i(\pi(v)) f_i^j(v)) \quad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$$
$$= (\pi(v), \varphi_1(\pi(v)) f_1^1(v), \varphi_1(\pi(v)) f_1^2(v), \ldots, \varphi_m(\pi(v)) f_m^n(v))$$

f es un homomorfismo, pues f_i^j es lineal en $E(\xi|U_i)$. Para mostrar que es inyectivo, sea $v \neq 0$. Entonces $\varphi_i(\pi(v)) > 0$ para alguna i y como f_i es una equivalencia, $f_i^j(v) \neq 0$ para alguna j. Por tanto, $f(v) \neq (\pi(v), 0)$.

2. Dejaremos pendiente la demostración de que iv. implica ii.

3. Demostraremos que ii implica iv. ii quiere decir que existe una transformación de haces entre $\xi \oplus \eta$ y el haz trivial $X \times \mathbb{R}^{n+k}$; en otras palabras que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[drr, "\pi"'] & E(\xi \oplus \eta) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_2"] & X \times \mathbb{R}^{n+k} \arrow[d, "\pi_1"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Pero $E(\xi)$ se puede meter en $E(\xi \oplus \eta)$ de manera natural (Cada fibra $\pi_2^{-1}(p)$ es de la forma $\pi^{-1}(p) \oplus \pi_3^{-1}(p)$, donde $\eta = (E_1, \pi_3)$. Así, si $q \in \pi^{-1}(p)$, $f_1 : E(\xi) \to E(\xi \oplus \eta)$

está dada por $f_1(q) = (q,0)$. Este es un homomorfismo inyectivo.

Claramente $f \circ f_1$ es un homomorfismo inyectivo.

4. Mostraremos que iv implica iii. Queremos definir g y g_1 en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\gamma_n^k) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ X & \xrightarrow{g_1} & G_{n,k} \end{array}$$

Nuestra hipótesis es que tenemos un homomorfismo inyectivo $f_1 : E(\xi) \to X \times \mathbb{R}^{n+k}$. Sabemos que $f_1(\pi^{-1}(p)) = (p, H)$, donde H es un subespacio lineal de dimensión n en $\mathbb{R}^{n+k}$, es decir, $H \in G_{n,k}$. Definimos $g_1(p) = H$. Si $v \in \pi^{-1}(p)$, entonces $f_1(v) = (p,u)$ donde $u \in H = g_1(p)$. Definimos entonces $g(v) = (H,u) \in E(\gamma_n^k)$. De la definición es claro que

$$g|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi_1^{-1}(g_1(p)) = H$$

es un isomorfismo. Para mostrar que g es continua, hacemos lo siguiente: Localmente, g es una función $U \times \mathbb{R}^n \to G_{n,k} \times \mathbb{R}^{n+k}$ (tomando un sistema local de coordenadas (U,φ).) Expresaremos g como la composición de una función $h : U \times \mathbb{R}^n \to M(n \times (n+k); n) \times \mathbb{R}^{n+k}$ y la función $h_1 : M(n \times (n+k); n) \times \mathbb{R}^{n+k} \to G_{n,k} \times \mathbb{R}^{n+k}$, $h_1(A,x) =$ (subespacio generado por las columnas de A, x). En coordenadas locales, $f_1 : U \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^{n+k}$. Sea $\{e_i\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$; definimos $h(p,v) = (A, p_2 f_1(p,v))$ donde $p_2 : X \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ es la proyección y A es la matriz cuyas columnas son $p_2 f_1(p,e_1), \dots, p_2 f_1(p,e_n)$. Entonces h y h_1 son continuas, por lo que $h_1 \circ h = g$ es continua.

5. Mostraremos que iii. implica i. Como $G_{n,k}$ es compacto, el haz γ_n^k es de tipo finito. Si $f : E(\xi) \to E(\gamma_n^k)$ es la transformación de haces y $f_1 : X \to G_{n,k}$ es la función inducida por esta transformación, entonces $f_1^{-1}(U_i) = V_i$, donde U_i es la cubierta de $G_{n,k}$ tal que $\gamma_n^k|U_i$ es trivial, los V_i cubren a X y $\xi|V_i$ es equivalente al haz inducido por $f_1 : V_i \to G_{n,k}$, por lo que $\xi|V_i$ es trivial.

B. Homotopía de Haces

Para finalizar estas notas, daremos una introducción —más bien geométrica que formal— de la teoría de homotopía de haces.

Definición. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una homotopía es una función continua $f: X \times I \longrightarrow Y$. Dos funciones continuas $f_0, f_1: X \longrightarrow Y$ son homotópicas si existe una homotopía $f: X \rightarrow I \rightarrow Y$ tal que $f(x,0) = f_0(x)$ y $f(x,1) = f_1(x)$ para toda $x \in X$.

El hecho de que dos funciones sean homotópicas nos dice que podemos deformar la imagen de una función en la imagen de la otra continuamente. Hablando intuitivamente, ésto no lo podríamos hacer si X tuviera un hoyo.

Homotópicas

No Homotópicas

Proposición. Sea X cualquier espacio topológico, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Entonces f y g son homotópicas.

Demostración. La homotopía es $F: X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$.

Ejemplo 1. Sea $X = \mathbb{S}^1$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ el disco unitario. El Teorema de Brouwer establece que no hay ninguna función continua $g: D^2 \rightarrow D^2$ sin puntos fijos; es decir, si g es continua, existe al menos un punto $x_0 \in D^2$ tal que $g(x_0) = x_0$. Este resultado obliga a que las funciones $f_0, f_1: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dadas por

$$f_0(x) = x, \quad f_1(x) = p_0 \in \mathbb{S}^1,$$

no sean homotópicas. En efecto, de existir una homotopía $f: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ entre f_0 y f_1, la función $G(x,t) = \dfrac{F(x,1-t)}{|F(x,1-t)|}$ es tal que $G(x,1) = x$, $G(x,0) = p_0 \in S^1$. Por lo tanto, como $G(x,t)$ es continua si fijamos t, Entonces $G(x,0): D^2 \rightarrow D^2$. Como p_0 puede ser punto fijo de $G(x,0)$, componemos con la función $-x$. Así,

$$g: D^2 \to D^2 \qquad g(x) = -G(x,0) = -p_0$$

no tiene puntos fijos, contradiciendo el teorema de Brouwer.

Muchas veces, demostrar que dos funciones son homotópicas (o más bien, que no lo son) puede ser difícil; es por eso que se buscan ciertos conceptos "invariantes bajo homotopías", como lo es, el número de vueltas de una función $f: S^1 \to \mathbb{C}-\{0\}$

$$n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(S^1)} \frac{dz}{z}$$

Se puede ver que si f y g son homotópicas, entonces $n(f) = n(g)$. Incluso

De hecho, la teoría de homotopía

Mostraremos ahora la relación que existe entre las homotopías y las equivalencias de haces.

Diremos que los haces de subespacios sobre un espacio X,

$$x \longrightarrow L_x, \quad x \longrightarrow H_x \qquad L_x, H_x \subset \mathbb{R}^n, \ x \in X$$

son homotópicos si existe un haz de subespacios sobre $X \times I$ tal que si

$$(x,t) \longrightarrow K_{(x,t)}, \qquad K_{(x,0)} = H_x \quad K_{(x,1)} = L_x.$$

Si $t_0 \in I$ está fijo, entonces $K_{(x,t)}$ está cerca de $K_{(x,t_0)}$ (Dicho de otra forma, puesto que existen bases de $K_{(x,t)}$ y $K_{(x,t_0)}$ que varían continuamente con $x \in X$) y entonces existe una $\varepsilon > 0$ tal que si $|t-t_0| < \varepsilon$, la proyección ortogonal

$$P_t: K_{(x,t)} \longrightarrow K_{(x,t_0)}$$

es un isomorfismo de estos espacios. Como P_t varía continuamente con t, tenemos que para cada $t_0 \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que el haz sobre $X \times (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ es equivalente al haz constante $X \times K_{(x,t_0)}$. De aquí obtenemos rápidamente el

COROLARIO. Si X es compacto y $x \to L_x, x \to H_x$ son haces homotópicos, entonces los haces son equivalentes.

Falta: Equivalencia ⇒ homotópicos

BIBLIOGRAFIA

Atiyah, M. K-Theory, W.A. Benjamin, Inc. (1967)

Auslander, L y Mackenzie, R. Introduction to Differentiable Manifolds, Mc. Graw Hill, Inc (1963)

Guillemin, V. y Pollack, A. Differential Topology, Prentice Hall, Inc. (1974)

Husemoller. Fibre Bundles, Mc. Graw Hill, Inc. (1966)

Milnor, J. Differential Topology, Notes, Department of Mathematics, Princeton University. (1958)

Milnor, J. y Stasheff, J. Characteristic Classes. Princeton University Press. (1974)

Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, Publish or Perish, Inc. (1970)