TG. 29

U. N. A. M.

FACULTAD DE CIENCIAS

UN TEOREMA DE INMERSION PARA VARIEDADES ALGEBRAICAS LISAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

ISIDRO NIETO BAÑOS

MEXICO, D. F. 1984

INTRODUCCION

Se demuestra un caso particular de un Teorema de Lluis [LL. Theo 1, 1955]:

Si X es una variedad proyectiva lisa de dimensión r entonces la proyeccion desde un punto da una inmersion cerrada de X en $\mathbb{P}^{2r+1}$

Este trabajo usa el Lenguaje de Esquemas de Grothendieck y esencialmente sigue a Hartshorne [Ha. 1]

Quisiera agradecer profundamente a los Drs: Emilio Lluis Riera, Xavier-Gomez Mont y Francisco Larrion, ya que este trabajo ha sido un fruto de mi formacion adquirida de ellos.

INDICE

CAPITULO 0

En este capitulo incluimos resultados que mas tarde usaremos. La mayor parte de estos son bien conocidos; algunos contienen referencias. Algunos son demostrados.

0.1. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ esquema, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, sea $X_f := \{ p \in X \mid f_p \notin m_p \}$
$\Rightarrow X_f$ es abierto.

Dem. Basta ver que si $U = \operatorname{Spec} B$ es afin, $U \cap X_f$ es abierto. Pero si $\bar{f} := f|_U$ entonces $U \cap X_f = D(\bar{f})$

0.2. X, Y espacios anillados. Sea $\{U_\lambda\}$ una cubierta abierta de X, si se tienen morfismos $\Psi_\lambda = (\psi_\lambda, \theta_\lambda) : U_\lambda \to Y \ni \Psi_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = \Psi_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ entonces existe $\Psi : X \to Y \ni \Psi|_{U_\lambda} = \Psi_\lambda \ \forall \lambda$.

Dem. A partir de las $\{\psi_\lambda\}$ se obtiene un $\psi : X \to Y$ continuo.
Se define $\theta : \mathcal{O}_Y \to \psi_* \mathcal{O}_X$. Sea $V \subseteq Y$ abierto $\therefore \psi^{-1}(V) = \bigcup U_\lambda'$, donde $U_\lambda' := \psi^{-1}(V) \cap U_\lambda$. Si $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$, $\theta_\lambda(\alpha) \in \Gamma(U_\lambda', \mathcal{O}_{U_\lambda})$ pero $\theta_\lambda(\alpha)|_{U_\lambda' \cap U_\mu'} = \theta_\mu(\alpha)|_{U_\lambda' \cap U_\mu'}$ & hay $\beta \in \Gamma(\psi^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \ni \beta|_{U_\lambda'} = \theta_\lambda(\alpha)$
$\therefore \theta(\alpha) := \beta$.

0.3 $\operatorname{Hom}_{Sch}(X, \operatorname{Spec} A) \cong \operatorname{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$

0.4 Sea $X = \operatorname{Spec} A$. M un A-modulo, $\mathcal{F}$ gavilla de $\mathcal{O}_X$-modulos, existe un isomorfismo:

$$\operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F})$$

0.5. Sea R un dominio, los siguientes son equivalentes:

(1) R es Noetheriano, local y el ideal maximal es principal.

(2) Existe $t \in R$ irreducible tal que $z \in R - \{0\}$ se escribe de manera única de la forma $z = ut^n$, donde u es una unidad en R.

A R se le llama entonces, de valuación discreta y t el parametro uniformizante.

0.6. Sea R un anillo de valuación discreta, $\mathrm{Coc}R = K$, sea $\mathfrak{m}_R$ el ideal maximal de R.

(1) Si $z \in K$ y $z \notin R \Rightarrow z^{-1} \in \mathfrak{m}_R$

(2) Sea S un anillo de valuación discreta, $R \subset S \subset K$, $\mathfrak{m}_R \subseteq \mathfrak{m}_S$ $\Rightarrow R = S$

0.7 Los únicos anillos de valuación discreta V, tales que $V \subseteq k(x)$ y que contienen a k son de la forma:

$$V = \begin{cases} \mathcal{O}_a & \text{para alguna } a \in k \\ \mathcal{O}_\infty & \end{cases}$$

donde $\mathcal{O}_a := \{ f \in k(x) \mid f \text{ definido en } a \}$ y $\mathcal{O}_\infty := \{ \frac{f}{g} \in k(x) \mid \deg f \leq \deg g \}$

Dem. Vease Cap. I.

0.8 Sea D un dominio de factorización única, $F := \mathrm{Coc}D$ y f un polinomio primitivo de grado positivo en $D[x]$. Entonces f es irreducible en $D[x] \Leftrightarrow$ f es irreducible en $F[x]$.

0.9. Sea $K \hookrightarrow F$ una extensión, $u \in F$ algebraico sobre K, $f \in K[x]$ irreducible de grado n $\ni$ $f(u)=0$ $\Rightarrow$ $[K(u):K] = \deg f = n$.

Dem. [Hu p.163 y p. 234]

0.10. Las secciones globales de $\mathcal{O}(m)$.

Discurso. Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible sobre X esquema. Entonces existe una $\{U_\lambda\}$ cubierta de X y una familia $\{\theta_\lambda\}$ de isos tales que:

$$\mathcal{L}|_{U_\lambda} \underset{\theta_\lambda}{\overset{\sim}{\to}} \mathcal{O}_{U_\lambda} \quad \therefore \quad \mathcal{L}|_{U_\lambda} = \mathcal{O}_{U_\lambda} \cdot \beta_\lambda \quad \text{donde } \beta_\lambda := \theta_\lambda(1)$$

en el abierto U_λ. ¿Que relacion existe entre las β_λ's?

Puesto que $\mathcal{L}|_{U_\lambda}(U_\lambda \cap U_\mu) = \mathcal{L}|_{U_\mu}(U_\lambda \cap U_\mu)$ $\therefore$ $\mathcal{O}_{U_\lambda}(U_\lambda \cap U_\mu)\cdot \beta_\lambda' = \mathcal{O}_{U_\mu}(U_\lambda \cap U_\mu)\cdot \beta_\mu'$

$\therefore$ hay $s_{\mu\lambda}$, $s_{\lambda\mu}$ $\ni$ $\beta_\lambda' = s_{\mu\lambda}\cdot \beta_\mu'$ y $\beta_\mu' = s_{\lambda\mu}\cdot\beta_\lambda'$ $\therefore$ $s_{\mu\lambda} \in \mathcal{O}^*(U_\lambda \cap U_\mu)$

¿Dada una seccion global $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ como la podemos caracterizar localmente en terminos de la cubierta $\{U_\lambda\}$?

Por una parte $s|_{U_\lambda} = a_\lambda \cdot \beta_\lambda$ $\quad a_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$

$$\text{pero} \quad s|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s|_{U_\lambda}|_{U_\lambda\cap U_\mu} = a_\lambda'\cdot\beta_\lambda' = a_\lambda'\cdot s_{\mu\lambda}\cdot\beta_\mu'$$
$$= s|_{U_\mu}|_{U_\lambda\cap U_\mu} = a_\mu'\cdot\beta_\mu'$$

luego $a_\mu' = a_\lambda' \cdot s_{\mu\lambda}$

Ejemplo 0.10.1. $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(m)) = \{ f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f \text{ homog. grado } m\}$

Por (0.4) sabemos que $\mathcal{O}(1)|_{D_+(x_i)} = \mathcal{O}_{D_+(x_i)}\cdot x_i$, similarmente:
$\mathcal{O}(m)|_{D_+(x_i)} = \mathcal{O}_{D_+(x_i)}\cdot x_i^m$.

Dado $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(m))$ por lo anterior hay una familia $\{a_i\}$ con $a_i \in \mathcal{O}(D_+(x_i)) \cong k[x_0,\dots,x_n]_{(x_i)}$ es decir, una familia $\left\{\varphi_i\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{x_n}{x_i}\right)\right\}$ $0 \le i \le n$ tal que $\varphi|_{D_+(x_i)} = \varphi_i\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)\cdot x_i^m$, ademas $x_i^m = s_{ji}\, x_j^m$. $\therefore$ $s_{ji} = x_i^m / x_j^m$. Se afirma que $\varphi|_{D_+(x_i)}$ es un polinomio homogeneo de grado m. Ya que $a_{\mu}' = a_{\lambda}' \cdot s_{\mu\lambda} \Rightarrow \varphi_i(x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i) =$ $\varphi_j(x_0/x_j, \ldots, x_n/x_j)\, x_j^m / x_i^m$ $\therefore$ $\varphi_j(x_0/x_j, \ldots, x_n/x_j)$ es de grado m $\therefore$ $\varphi_j(x_0/x_j, \ldots, x_n/x_j)\, x_j^m$ es homogeneo de grado m y $\therefore$ $\varphi|_{D_+(x_j)}$, $\varphi|_{D_+(x_i)}$ lo son. Analogamente $\mathcal{O}(-1)|_{D_+(x_i)} = \mathcal{O}_{D_+(x_i)} \cdot x_i^{-1}$ $\therefore$ $1/x_i = s_{ji} \cdot 1/x_j$ $\therefore$ $s_{ji} = x_j/x_i$, si hubiese $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(-1))$ no constante $\therefore$ $\varphi_i(x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i) = \varphi_j(x_0/x_j, \ldots, x_n/x_j) \cdot x_i/x_j$ lo cual es imposible.

<u>(0.11) y (0.12)</u>. Sea $\varphi : A \to B$ y $f : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ el inducido. Entonces f es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} B$ en un cerrado de $\operatorname{Spec} A$ y $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$ es suprayectiva $\Leftrightarrow$ φ es suprayectiva.

Dem. Vease [Ha Ex 2.18]

<u>(0.13)</u> Sea $\phi : M \to N$ de A modulos, los siguientes son equivalentes:

i) ϕ es suprayectiva.

ii) $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ es suprayectiva para todo $\mathfrak{p}$ primo

iii) $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ es suprayectiva para todo $\mathfrak{m}$ maximal.

Dem. Vease [At 3.9]

<u>(0.14)</u> Sea $f : X \to Y$ morfismo proyectivo de esquemas de tipo finito $/k$. Sea $\mathcal{F}$ coherente en X, entonces $f_* \mathcal{F}$ es coherente en Y.

Dem. Vease [Ha 5.20]

<u>(0.15)</u> Sea $f : (A, \mathfrak{m}_A) \to (B, \mathfrak{m}_B)$ de anillos locales Noetherianos tal que

i) $A/\mathfrak{m}_A \xrightarrow{\varphi/} B/\mathfrak{m}_B$ es iso

ii) $\mathfrak{m}_A \xrightarrow{f|} \mathfrak{m}_B \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ sea epi

iii) B sea un A-modulo finitamente generado.

entonces f es suprayectiva.

<u>Dem.</u> Como $\mathfrak{m}_B$ es finit. gen. como B-modulo, tambien $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ lo es como $B/\mathfrak{m}_B$ modulo. Por ii) $\mathfrak{m}_A \cdot B$ contiene los generadores de $\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ y por Nakayama aplicado a B y $\mathfrak{m}_B$, $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A \cdot B$.

Para ver que f es epi, basta ver que el $1 \in B$ esta generando a B como un A-modulo: claramente el 1 en $B/\mathfrak{m}_A \cdot B$ lo esta generando como $A/\mathfrak{m}_A \cong B/\mathfrak{m}_B \cong B/\mathfrak{m}_A \cdot B$ modulo, por Nakayama aplicado a B como A-modulo y $(A,\mathfrak{m}) \Rightarrow 1$ esta generando a B como A-modulo.

<u>(0.16)</u> Sea R un dominio entero noetheriano, y f una no unidad distinta de zero. Entonces todo primo minimo de f es de altura 1.

<u>(0.17)</u> Sea A anillo noetheriano que es dominio entero, y $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A tal que $A_{\mathfrak{m}}$ es UFD. Si $\wp$ es un primo de A de altura 1, entonces hay f y $a \in A$ tal que $\mathfrak{m} \in D(f)$ y $\wp A_f = aA_f$.

Dem. vease [Li Lemma 2.20]

<u>(0.18)</u> Si $f: X \to Y$ es un mapeo regular de variedades irreducibles, $f(X) = Y$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, Entonces $m \leq n$ y:

(1) $\dim f^{-1}(y) \geq n-m \quad \forall y \in Y$

(2) Existe un abierto de Y, U tal que $\dim f^{-1}(y) = n-m$ para todo $y \in U$

Dem. vease [Sha Th. 7 p. 60]

CAPITULO I

Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un esquema, $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-modulos.

Definicion 1. $\mathcal{F}$ se dice estar generada por secciones globales ssi hay $\{s_i\}$ con $s_i \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ tal que para todo $P \in X$ $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P \langle (s_{i,P}) \rangle$.

Ejemplo 1.1. Sea $X = \operatorname{Spec} A$. si $\mathcal{F}$ es una gavilla quasi-coherente sobre X $\mathcal{F} \simeq \tilde{M}$ para algun M A-modulo, cualquier conjunto de generadores para $\Gamma(X,\mathcal{F}) \simeq \tilde{M}$ basta.

Ejemplo 1.2 Sea $X = \operatorname{Proj} S$, donde S es un anillo graduado, finitamente generado por S_1 como una S_0-algebra. Si $\wp \in \operatorname{Proj} S$ se tiene:
$\mathcal{O}_X(1)_\wp \xrightarrow{\sim} S(1)_{(\wp)}$ como $\mathcal{O}_{X,P}$ modulos, los elementos de $S(1)_{(\wp)}$ son los elementos de $S_{(\wp)}$ de grado 1 con la graduacion en S, pero si $x_0, x_1, \dots, x_r$ son los generadores de S_1, factorizando, siempre $\mathcal{O}_X(1)_\wp$ es generado por $x_0/1, \dots, x_r/1$ como $\mathcal{O}_{X,P}$ modulo.

2. MORFISMOS PROYECTIVOS. Dado un esquema y una gavilla invertible generada por secciones globales, se puede construir un morfismo de X a $\mathbb{P}^n$. En caso de existir esta completamente determinado por la informacion del pullback de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

2.1 Pullback de Gavillas. Dado $\varphi : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ de esquemas y $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_Y$-modulos, se interesa por una gavilla sobre X, pero tambien de $\mathcal{O}_X$-modulos. Considerese $\varphi^{-1}\mathcal{G}$ que es de $\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y$-modulos, pero $\mathcal{O}_Y \to \varphi_*\mathcal{O}_X$ induce $\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \varphi^{-1}\varphi_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, asi $\mathcal{O}_X$ es de $\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y$-modulos y asi

$$\begin{array}{ccc} ? & & \mathcal{G} \\ | & & | \\ X & \to & Y \end{array}$$

por extensión de escalares $\varphi^*\mathcal{G} := \varphi^{-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X$ de $\mathcal{O}_X$-modulos. Luego $(\varphi^*\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{\varphi(p)} \otimes \mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{O}_{X,p}$ $\therefore$ $\varphi^*\mathcal{G}$ es invertible.

Ademas, si $\{s_i\}$ generan a $\mathcal{G}$, $\{s_i \otimes 1\}$ generan a $\varphi^*\mathcal{G}$. Se obtiene:

<u>Lema 2.2.</u> Si $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_Y$-modulos, generado por las secciones globales $\{s_i\}$ $\varphi^*\mathcal{G}$ es generado por $\{s_i \otimes 1\}$. Si $\mathcal{G}$ es invertible $\varphi^*\mathcal{G}$ lo es tambien.

<u>Teorema 2.3.</u> Sea $\mathcal{L}$ gavilla invertible sobre X y suponga que existan $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ que la generan, entonces existe un unico A-morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ tal que $\mathcal{L} \cong \varphi^*\mathcal{O}(1)$ y bajo esto iso $s_i \mapsto x_i \otimes 1$

<u>Dem.</u> Sea $X_i := \{p \in X \mid (s_i)_p \notin m_p \mathcal{L}_p\}$ es abierto. Las $\{X_i\}$ son cubiertas ya que las $\{s_i\}$ generan. Para definir $\varphi_i : X_i \to U_i := D_+(x_i)$ (El abierto canonico de $\mathbb{P}^n$) basta hacerlo a nivel de secciones globales:

$$A\left[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \longrightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$$

$$x_k/x_i \longmapsto s_k/s_i$$

donde $s_k/s_i : X_i \to \coprod \mathcal{O}_{p,X_i}$ esta dado por $Q \mapsto (s_k)_Q / s_{i,Q}$, lo cual tiene sentido ya que $s_{i,Q}$ es invertible por hipotesis. En las intersecciones se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\left(\frac{x_k}{x_i}\right)\cdot\frac{1}{x_j} \arrow[r, mapsto] & \left(\frac{s_k}{s_i}\right)\cdot\frac{1}{s_j} & \\
A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]_{(x_j)} \arrow[r] \arrow[ddd, "\wr"'] & \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \arrow[dr, "\text{rest.}"] & \\
 & & \Gamma(X_i \cap X_j, \mathcal{O}) \\
\left(\frac{x_k}{x_j}\right)\cdot\frac{1}{x_i} \arrow[r, mapsto] & \left(\frac{s_k}{s_j}\right)\cdot\frac{1}{s_i} & \\
A\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right]_{(x_i)} \arrow[r] & \Gamma(X_j, \mathcal{O}_{X_j}) \arrow[uur, "\text{rest.}"'] &
\end{tikzcd}$$

Se demuestra ahora $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Por una parte se tiene la cubierta que da la invertibilidad de $\mathcal{L}$ y ademas la cubierta $\{X_\lambda\}$, tomando un refinamiento $\{U_j\}$ de tal manera que las U_i's sean abiertos de X_i. Intentamos provar que $\mathcal{L}|_{U_i'} \xrightarrow[\sim]{\theta_i} \varphi^* \mathcal{O}(1)|_{U_i'}$.

Luego asignese $s \longmapsto (s/s_i)\cdot(x_i \otimes 1)$, a s/s_i como antes: a nivel de germen, e igual con $x_i \otimes 1$. La multiplicacion $\cdot$ es de $\mathcal{O}_X$-modulos.

θ_i es inyectiva. teniendo secciones s, s' $\ni$ $s/s_i \cdot (x_i \otimes 1) = s'/s_i \cdot (x_i \otimes 1)$, se tiene a nivel de fibras la cadena de isos:

$$\varphi^*\mathcal{O}(1)_p = \varphi^{-1}\mathcal{O}(1)_p \otimes \mathcal{O}_{X,p} \simeq \mathcal{O}(1)_{\varphi(p)} \otimes \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow[\sim]{(1)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,\varphi(p)} \otimes \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow[\sim]{(2)} \mathcal{O}_{X,p}.$$

el (1) iso esta dado simplemente por ser $\mathcal{O}(1)_{\varphi p}$ invertible:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,\varphi(p)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(1)_{\varphi(p)} \qquad si \quad \varphi(p) \in U_i = D_+(x_i)$$
$$s \longmapsto s\, x_i$$

el (2) es el iso canonico ; $M \otimes_A A \xrightarrow{\sim} M \qquad m \otimes a \longmapsto ma$,

notese que $\mathcal{O}_{X,p}$ tiene la estructura de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,\varphi(p)}$-modulo mediante la restriccion de escalares inducida por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,\varphi(p)} \xrightarrow{\varphi^\#} \mathcal{O}_{X,p}$.

Luego $(2)(1)(s/s_i\,(x_i \otimes 1)) = (2)(1)(s'/s_i\,(x_i \otimes 1)) \Rightarrow s'/s_i = s/s_i$

$\Rightarrow s' = s$, ya que s_i es invertible.

Por el Lema 0,4 tomandose $\mathcal{F} := \mathcal{O}_{D_+(x_i)}\cdot x_i$ luego $\Gamma(X,\mathcal{F}) = x_i\cdot\left(A[x_0,\dots,x_n]_{(x_i)}\right)$ pero $\mathcal{O}(1)|_{D_+(x_i)} \simeq \widetilde{S(1)_{(x_i)}}\Big|_{\operatorname{Spec} S_{(x_i)}}$, si $M := S(1)_{(x_i)}$, pero $S(1)_{(x_i)} = x_i\cdot(A[x_0,\dots,$ $\dots, x_n]_{(x_i)})$.

Asi se obtiene $\mathcal{O}(1)|_{D_+(x_i)} \cong \mathcal{O}_{D_+(x_i)}\cdot x_i$, por lo cual la afirmacion es clara, ya que entonces $\varphi^*\mathcal{O}(1)|_{U_i'}$ es generada por $x_i \otimes 1$.

tambien $\theta_i|_{U_i'\cap U_j} = \theta_j|_{U_i'\cap U_j'}$, ya que $\theta_i(s) = s/s_i \cdot (x_i \otimes 1) = \frac{s}{s_i}\cdot\left(x_j\left(\frac{x_i}{x_j}\right)\otimes 1\right)$
$= \frac{s}{s_i}\left(x_j \otimes \frac{s_i}{s_j}\right) = \frac{s}{s_i}\cdot\frac{s_i}{s_j}\left(x_j\otimes 1\right) = \frac{s}{s_j}(x_j\otimes 1) = \theta_j(s)$

Si $\mathcal{L} \cong \varphi^*\mathcal{O}(1)$ tal que $s_i \longmapsto x_i\otimes 1$, se afirma que φ esta determinada localmente. Como $\mathcal{L}$ es invertible, podemos suponer que $\{X_i\}$ son tales que existen $\{\beta_i\}$ isos con la propiedad $\mathcal{L}|_{X_i} \xrightarrow[\beta_i]{\sim} \mathcal{O}_{X_i}$. Sea $\eta_i := \beta_i^{-1}(1)$ donde $1 \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$, entonces $\mathcal{L}|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}\cdot \eta_i$. Ademas se tiene una familia de isos $\{\psi_i\}$ $\ni$ $\mathcal{L}|_{X_i} \xrightarrow{\psi_i} \varphi^*\mathcal{O}(1)|_{X_i}$ y $\psi_i|_{X_i\cap X_j} = \psi_j|_{X_i\cap X_j}$ y que son de $\mathcal{O}_{X_i}$-modulos. Asi si $s\in\Gamma(X_i,\mathcal{L})$, $s=\bar{s}\cdot\eta_i$ con $\bar{s}\in\Gamma(X_i,\mathcal{O}_{X_i})$ y ademas $\psi_i(s) = \bar{s}\cdot\psi_i(\eta_i)$, Por hipotesis $\psi_i(s) = x_i\otimes 1$ y tambien $\psi_i(s_i) = \bar{s}_i\cdot\psi_i(\eta_i)$, luego $\psi_i(\eta_i) = 1/\bar{s}_i\cdot(x_i\otimes 1)$ $\therefore$ $\psi_i(s) = \bar{s}/\bar{s}_i\cdot(x_i\otimes 1)$.
Como $\psi_i|_{X_i\cap X_j} = \psi_j|_{X_j\cap X_i}$, cuando $\bar{s}=1$, se tiene:

$$\frac{1}{\bar{s}_i}(x_i\otimes 1) = \frac{1}{\bar{s}_j}(x_j\otimes 1) = \frac{1}{\bar{s}_j}\left(x_i\cdot\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\otimes 1\right) = \frac{1}{\bar{s}_j}\left(x_i\otimes\varphi\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\right) = \frac{1}{\bar{s}_j}\varphi\left(\frac{x_j}{x_i}\right)(x_i\otimes 1)$$

$\Rightarrow$ $\varphi\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \frac{\bar{s}_j}{\bar{s}_i}$ que es como se habia definido la φ.

Ejemplos 3.1. Automorfismos de $\mathbb{P}^1_k$: $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1_k \cong PGL(1) := GL(2,k)/k^*$

Se calcularan de 2 maneras : 1) Mediante la construccion de la curva abstracta asociada a un campo de funciones de dim 1.

2) Mediante el Teor. anterior como caso particular.

Discurso. Sean $a, b, c, d \in k$ $\ni$ $\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$ definimos $T: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ por $T(x_0:x_1) = (ax_0+bx_1 : cx_0+dx_1)$. Un cerrado en $\mathbb{P}^1$ es de la forma $W = \{P\in\mathbb{P}^1 \mid f(P)=0 \ \forall f\in(F_0,\ldots,F_n),\ F_i$ homogeneos en $k[x_0,x_1]\}$.
$T^{-1}W = \{P\in\mathbb{P}^1 \mid T(P)\in W\} = \{P\in\mathbb{P}^1 \mid f(P)=0$, y f hom tal que
$f\in(F_0(ax_0+bx_1:cx_0+dx_1),\ldots,F_n(\ ,\ ))\}$

Se verifica analogamente que T^{-1} es continua. T es biyectiva ya que $\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$ y si existe tal solucion es unica. Por la manera que esta definida la T, T es incluso automorfismo. Notese que $T(x_0:x_1) = (x_0:x_1)$ esta inducida por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Definimos $PGL(1) := \left\{ T: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \;\middle|\; T(x_0, x_1) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1) \text{ para algun } a, b, c, d \ni \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} \neq 0 \right\}$

Definimos una relacion de equivalencia en $GL(2,k)$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{bmatrix} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in k^\times \ni \lambda\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{bmatrix}$$

tenemos un morfismo obvio de $GL(2,k)/k^\times \to PGL(1)$ que es trivialmente suprayectivo. La inyectividad se sigue suponiendo que si hay 2-tales matrices que inducen la misma transformación, se aplica esta transformacion a los puntos $(0:1)$, $(1:0)$ y $(1:1)$, y de esta manera se imponen las relaciones de equivalencia.

1) <u>$\mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{Aut}_k K(\mathbb{P}^1)$</u> donde $K(\mathbb{P}^1) \simeq k(x)$

Recordemos que las siguientes categorias son equivalentes [Ha 6.12]:

i) Curvas proyectivas lisas y ~~morfismos dominantes~~

ii) Curvas quasi-proyectivas y mapeos dominantes racionales

iii) Campos de funciones de dim 1 sobre k y k-homomorfismos.

Si denotamos por $C_{k(x)}$ la curva abstracta no singular de $k(x)/k$, entonces tenemos de hecho:

$$\mathrm{Aut}_k C_{k(x)} \simeq \mathrm{Aut}_k k(x).$$

Si demostramos $\mathbb{P}^1 \simeq C_{k(x)}$ habremos terminado.

Para ello necesitamos (0.5), (0,6) y (0.7).

Demostraremos (0.7) ya que los otros son standard [Fu p.46, 48]

Es claro que $\mathcal{O}_a$ es D.V.R y tambien $\mathcal{O}_\infty$, ya que $(x-a)$ y $1/x$ son parametros uniformizantes, y las unidades en $\mathcal{O}_\infty$ son las de grado zero en $k(x)$.

Dem. Lema (0.7): Intentaremos demostrar en los 2 incisos de abajo que:

i) $\mathcal{O}_a \subseteq V$ y $\mathfrak{m}_a \subseteq \mathfrak{m}_V$ ii) $\mathcal{O}_\infty \subseteq V$ y $\mathfrak{m}_\infty \subseteq \mathfrak{m}_V$.

i) Si $x \in V$ $\therefore$ $k[X] \subseteq V$. Sea $\mathfrak{m}_V = (t)V$ t irreducible y un parametro uniformizante en $t \in k(x)$, pero $t = (x-a)u$ para algunos $u \in k(x)$ y $u(a) \neq 0$ y alguna $a \in k = \bar{k}$. $\mathcal{O}_a \subseteq V$ ya que si $f(a) \neq 0$ es tal que $f = h/g$ $\therefore h(a) \neq 0$ $\Rightarrow f^{-1} \notin \mathfrak{m}_V \Rightarrow f \in V$ por (0.6) (i). Si $f(a) = 0$ $\therefore f = (x-a)^l\, g/l \ni g(a) \neq 0$, $l > 0$ $\therefore f \in V$ $\therefore \mathcal{O}_\infty \subseteq V$ pero $\mathfrak{m}_a = (x-a)\,\mathcal{O}_a \subseteq (x-a)\,\mathcal{O}_V \subseteq \mathfrak{m}_V$.

ii) si $x \notin V \Rightarrow x^{-1} \in \mathfrak{m}_V \Rightarrow (x^{-1})\,\mathcal{O}_V \subseteq \mathfrak{m}_V$ pero x^{-1} es irreducible en $k(x)$ $\Rightarrow \mathfrak{m}_V = (x^{-1})\,\mathcal{O}_V$ $\therefore$ si $y \in \mathcal{O}_\infty$, $y \in V$ ya que si $y = f/x^n g \ni \deg f = \deg g$ y si $y \notin V \Rightarrow g x^n/f \in \mathfrak{m}_V = (x^{-1})\,\mathcal{O}_V$ que es absurdo. $\therefore \mathcal{O}_\infty \subseteq V$ y claramente $\mathfrak{m}_\infty \subseteq \mathfrak{m}_V$ ya que si $y \in \mathfrak{m}_\infty$ $y = f/xg$ con $\deg f \leq \deg g$ puesto que $f/g \in V \Rightarrow y \in \mathfrak{m}_V$.

$\therefore$ $\mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^1 \cong \mathrm{Aut}_k k(x)$ (del corolario 3.1.1.b).

Corolario 3.1.1.a) :

$$\mathbb{P}^1 \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Anillos de valuación discreta} \\ \text{de } k(x)/k \ni \operatorname{tr\,deg}_k k(x) = 1 \end{array} \right\}$$

Dem. Si $a_0 \neq 0$ $(a_0 : a_1) \longmapsto \mathcal{O}_{\frac{a_1}{a_0}}$

Si $a_0 = 0$ $(0 : 1) \longmapsto \mathcal{O}_\infty$

Corolario 3.1.1 b) : $C_{k(x)} \cong \mathbb{P}^1$

Dem. Recordemos la demostracion de [Ha 6.7], en la que a cada punto $P \in Y$, se le asociaba $\mathcal{O}_P$ que era D.V.R. Se demostraba que la imagen $U \subseteq C_K$ era abierta; en nuestro caso $U = C_{k(x)}$.

2) $PGL(1) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}_k k(x)$ y $\therefore$ $PGL(1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^1$

Usaremos (0.8) y (0.9).

Dado $\sigma: k(x) \to k(x)$ k-automorfismo, se quiere demostrar $\sigma(x) = ax+b / cx+d$ con $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, que es lo mismo que caracterizar la imagen $x \mapsto \sigma(x)$.

La idea de la demostración es: ya que $\sigma(x) = f/g$ para $f/g \notin k$ y $(f,g) = (1)$ $\therefore$ $k(\frac{f}{g}) \hookrightarrow k(x)$; si se caracterizara $[K(x) : K(f/g)]$ en términos de los grados de f y g, y utilizando que son primos relativos, eso caracteriza la imagen de x bajo σ.

Empezemos con: 1) x es algebraico en $k(\frac{f}{g})$ y $[k(x) : k(\frac{f}{g})] = \max(\deg f, \deg g)$

Es claro que $\varphi(y) = \frac{f}{g} \cdot g(y) - f(y) \in k(\frac{f}{g})[y]$, puesto que $\frac{f}{g} \notin k \Rightarrow$ $\frac{f}{g}$ es trascendente sobre $k \Rightarrow k(\frac{f}{g}) \cong k(z) = \mathrm{coc}\, k[z]$. Claramente $\varphi(x) = 0$, basta demostrar que $\varphi(y)$ es irreducible en $K(\frac{f}{g})[y]$ ya que claramente en $K(\frac{f}{g})[y]$ $\deg \varphi = \max(\deg f, \deg g)$ pero haciendo $z = f/g \Rightarrow \varphi(y) = z f(y) - g(y)$, como $(f(y), g(y)) = (1)$ y $\varphi(y)$ es lineal en $z \Rightarrow \varphi$ es irreducible en $k[z](y) \Rightarrow \varphi$ es irreducible en $K(z)(y) = K(f/g)(y)$.

$\therefore$ $[k(x) : k(\frac{f}{g})] = \deg \varphi = \max(\deg f, \deg g)$.

2) σ es un k-automorfismo $\Leftrightarrow$ $[k(x) : k(\frac{f}{g})] = 1$.

$\Rightarrow$) $k(\frac{f}{g})$ es precisamente la imagen de σ y por ser σ auto $\Rightarrow$ es todo $k(x)$

$\Leftarrow$) σ es siempre mono y por esto es epi ya que $\sigma(k(x)) = k(\frac{f}{g})$.

3) Por 2) $\max(\deg f, \deg g) = 1$ $\therefore$ $f = ax+b$ $g = cx+d$ pero todavía mas: $(f,g) = (1) \Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ que es facil ver.

4) Por arriba $\sigma(x) = ax+b / cx+d$ $\Rightarrow$ $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

<u>Ejemplo 3.2.</u> <u>Automorfismos de $\mathbb{P}^n_k$.</u>

Como aplicación al teorema que acabamos de demostrar, demostraremos que $\mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^n_k \cong PGL(n)$. Nuevamente como en el caso $n=1$ $T(x_0 : \ldots : x_n) =$

$(x_0' : \cdots : x_n')$ donde $x_i' = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j$, donde $\|a_{ij}\|$ es la matriz tal que su determinante $\neq 0$. Nuevamente si $\|b_{ij}\|$ es otra matriz tal que induce $T' = T$, aplicando T a los puntos $(1:0:\cdots:0)$, $(0:1:\cdots:0)$ $\cdots\cdots$, $(1:1:\cdots 1)$ se obtiene que $\|a_{ij}\| = \lambda \|b_{ij}\|$, $\lambda \in k^*$. $\therefore$ $PGL(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_k \mathbb{P}^n_k$.

Sea $\varphi : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$ automorfismo. Recordemos que un morfismo de esquemas $\varphi : X \to Y$ induce $\tilde{\varphi} : \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X$, recordando que para gavillas invertibles $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ gavillas invertibles de Y , hay un iso canonico :

$$\varphi^{-1}\mathcal{L} \otimes \varphi^{-1}\mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} \varphi^{-1}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')$$

$\therefore$ $\tilde{\varphi}(\mathcal{L}) := \varphi^*\mathcal{L} = \varphi^{-1}\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X$. Luego $\tilde{\varphi}$ es automorfismo de $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^n \to \mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^n$, por ser φ auto. $\therefore$ $\varphi(1) = 1$ o $\varphi(1) = -1$ (i.e. generador va a dar a generador) , es decir $\varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)$ o $\varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(-1)$, pero por (0.10) $\mathcal{O}(-1)$ no tiene secciones globales ; tambien por (0.10) , $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(1))$ son los polinomios homogeneos de grado 1 , y $s_i := \varphi^*(x_i)$ $\in \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(1))$ van a estar generados por los x_i, es decir $s_i = \sum a_{ij} x_i$, donde $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ ya que tenemos un iso. Por el Teorema, el morfismo tiene que coincidir con el definido por las $\{s_i\}$.

Ejemplo 3.3 Proyeccion desde un punto.

Si consideramos en $\mathbb{P}^{n+1}_A$ y en $\mathcal{O}(1)$ las secciones $x_0, \dots, x_n$ omitiendo la x_{n+1} , puesto que $\mathcal{O}(1)|_{D_+(x_{n+1})} \cong \mathcal{O}_{D_+(x_{n+1})} \cdot x_{n+1}$, las $x_0, \dots, x_n$ generan todo excepto el punto $P_0 = (0:\cdots:0:1)$ y asi tenemos que :

$$\varphi : \mathbb{P}^{n+1}_A - \{P_0\} \to \mathbb{P}^n_A$$

esta dado por $(x_0 : \cdots : x_{n+1}) \longmapsto (x_0 : \cdots : x_n : 0)$

En general , si tenemos un punto $P = (a_0 : \cdots : a_{n+1}) \in \mathbb{P}^{n+1}_A - \mathbb{P}^n$, la proyeccion de un punto Q a $\mathbb{P}^n$ es simplemente un punto del espacio generado por P y Q , que es de la forma $\mu P + \lambda Q$. Si $Q = (b_0 : \cdots : b_{n+1})$

como $\mu a_{n+1} + \lambda b_{n+1} = 0$ entonces $\varphi(Q) = \left(b_0 - \left(\frac{a_0}{a_{n+1}}\right) b_{n+1} : \dots : b_n - \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) b_{n+1} : 0\right)$
en particular si $P = (0 : \dots : 0 : 1)$, $\varphi(Q) = (b_0 : \dots : b_n : 0)$

Definicion 4. Inmersion cerrada.

Recordemos [EGA I p. 260] que $f : X \to Y$ es una inmersion cerrada, si podemos factorizar a f :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "j_Z"'] & \end{tikzcd}$$

donde g es iso y Z subesquema cerrado de Y.

Proposicion 4.1. Sea $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ inducido por secciones $s_0, \dots, s_n$ de una gavilla $\mathcal{L}$. Entonces φ es una inmersión cerrada $\Leftrightarrow$

(1) $X_i := \{ P \in X \mid s_{i,P} \notin m_P \mathcal{L}_P \}$ es afin

(2) $A[y_0, \dots, y_n] \to \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ dado por $y_j \longmapsto s_j / s_i$ es epi.

Dem. $\Rightarrow$) Por defincion de φ, $\varphi(X_i) = \varphi(X) \cap U_i$, y es un subesquema cerrado de un afin ya que $\varphi(X)$ es cerrado $\therefore$ $\varphi(X_i)$ es un subesquema cerrado afin, pero $X_i \cong \varphi(X_i)$. Luego X_i es afin. Identificando a X_i con su imagen, X_i es un subesquema cerrado de U_i y ademas $\varphi_i : X_i \to U_i$ a nivel de anillos $\varphi^* : \mathcal{O}_{U_i} \to \varphi_* \mathcal{O}_{X_i}$ es suprayectivo. Por (0.11) φ_i es suprayectivo a nivel de secciones globales.

$\Leftarrow$) Por (0.12), X_i es un subesquema cerrado de U_i, y puesto que $X_i = \varphi^{-1}(U_i)$ entonces $\varphi_i : X_i \to U_i$ es una inmersion cerrada, pero claramente $\bigcup_{i=0}^{n} U_i = \mathbb{P}^n_A$ y la propiedad de ser inmersion cerrada es una propiedad local ya que
$\varphi(X) = \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(X) \cap U_i = \bigcup_{i=0}^{n} \varphi(X_i)$ $\therefore$ $\varphi(X)$ es cerrado.

Ejemplo 4.2. La d-inmersion de Segre.

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ subesquema cerrado, entonces $X = \mathrm{Proj}\, S$, donde S es una algebra graduada finitamente generada por S_1. Sea $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X(d)$. Entonces $\mathcal{L}$ es generada por las secciones $y_0^d, y_0^{d-1}y_1, \ldots, y_n^d, \ldots, y_n^{d-1}y_0$, donde $y_0, \ldots, y_n$ son los generadores de S_1. En este caso $X_{s_i} = D_+(s_i)$ en $\mathbb{P}^n$ para $i=0, \ldots, n$ y además el mapeo de (2.3), por ejemplo para t_0 (donde $t_0, \ldots t_N$, son las variables independientes de $\mathbb{P}^N$ con $N = \binom{n+d}{n} - 1$):

$$k[t_1/t_0, \ldots, t_N/t_0] \longrightarrow k[y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0]$$

está dado por: $$t_k/t_0 \longmapsto M_k(y_0, \ldots, y_n)/y_0^d$$

donde $M_k(y_0, \ldots, y_n)$ es el k-ésimo monomio homogéneo de grado d en esas variables. Este mapeo es suprayectivo ya que:

$$y_n/y_0 = y_n y_0^{d-1}/y_0^d, \quad y_{n-1}/y_0 = y_{n-1}y_0^{d-1}/y_0^d, \ldots, \quad y_1/y_0 = y_1 y_0^{d-1}/y_0^d.$$

...

<u>Proposición 5.</u> Sea $k = \bar{k}$. X un esquema proyectivo sobre k. Sea $\varphi: X \to \mathbb{P}_k^n$ el morfismo correspondiente a $\mathcal{L}$ y secciones $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Sea V el espacio vectorial generado por las secciones que generan a $\mathcal{L}$. Entonces φ es una inmersión cerrada $\Leftrightarrow$

(1) Para cualesquiera puntos cerrados P, Q de X hay una $s \in V \ni s_P \in m_P \mathcal{L}_P$ pero $s_Q \notin m_Q \mathcal{L}_Q$

(2) Para cualquier $P \in X$ cerrado, $\{s \in V \mid s_P \in m_P \mathcal{L}_P\}$ genera a m_P/m_P^2 como espacio vectorial.

<u>Dem.</u> $\Rightarrow$) (1) Si $\varphi: X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ es inmersión, entonces $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$, es decir si los hiperplanos me generan a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, entonces $\mathcal{L}$ es generada por los hiperplanos restringidos a X, y dados, P, Q distintos cerrados, siempre hay en X un hiperplano que los separa. A saber, este hiperplano siempre existe en $\mathbb{P}^n$ y luego restrínjase a X.

(2) Sea $P = (a_0 : \cdots : a_n) \in U_0$ afín. $U_0 \cong \operatorname{Spec} k[y_1, \ldots, y_n]$ con $y_i = x_i/x_0$ ahí P tiene coordenadas $(a_1/a_0, \ldots, a_n/a_0)$ $\therefore m_P = (y_1 - a_1/a_0, \ldots, y_n - a_n/a_0)$

homogeneizando obtenemos que $a_0X_1 - a_1X_0 + a_0X_2 - a_1X_1 + \cdots + a_0X_n - a_nX_0$ es un hiperplano que pasa por P y ademas mod $m_P^2 \mathcal{I}_P$ genera a m_P/m_P^2.

$\Leftarrow$) φ es inyectiva a nivel de conjuntos:

Recordemos que si X es proyectivo, es de tipo finito, y luego el conjunto de puntos cerrados es denso. Por hipotesis φ es inyectiva en los puntos cerrados. Sea $P \neq Q$ y sean $Z := \varphi(\overline{\{P\}})$, $Z' := \varphi(\overline{\{Q\}})$. Consideremos 2 casos:

I. $\overline{\{P\}} \nsubseteq \overline{\{Q\}}$. El punto generico $\varphi(P)$ de Z no puede ser el de Z' que es $\varphi(Q)$ ya que $Z = Z'$, consideramos un abierto que contenga puntos cerrados de Z y su imagen inversa debe contener puntos cerrados que colapsen en la imagen.

II. $\overline{\{P\}} \subsetneq \overline{\{Q\}}$. Luego $\dim \overline{\{P\}} \lneq \dim \overline{\{Q\}}$, pero $\dim \overline{\{P\}} = \dim Z$, ya que si $\dim Z$ decreciera, habria puntos cerrados que colapsarian $\therefore \dim Z \lneq \dim Z'$, y los puntos genericos deben ser distintos.

Como $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^n_k \to k$ es propio, por ser X proyectivo y $\mathbb{P}^n_k \to k$ separado, entonces $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^n_k$ es propio $\therefore$ φ es cerrada $\therefore$ φ es inmersion cerrada a nivel topologico. Identificando a X con su imagen, basta ver que para todo P: $\varphi_P^\#: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,P} \to \mathcal{O}_{X,P}$ es suprayectiva. Por (0.13) basta ver suprayectividad en los puntos cerrados. Por otra parte tenemos:

i) $k(P) \cong k$ ii) $\mathcal{O}_{X,P}$ es un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,P}$ mod. fin. gen., ya que $\varphi_* \mathcal{O}_X$ es coherente por (0.14).

iii) Por ser $\varphi_P^\#: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,P} \to \mathcal{O}_{X,P}$ de anillos locales, esto induce por restriccion $m_{\mathbb{P}^n,P} \xrightarrow{\varphi^\#|} m_{X,P} \to m_{X,P}/m_{X,P}^2$ y por (2) este es suprayectivo. A saber, los hiperplanos que pasan por P, generan a $m_{\mathbb{P}^n,P}$, restringiendo a X obtengo por hipotesis hiperplanos cuyas imagenes mod m_P^2 me generan al cociente.

Con condiciones i) ii) y iii) por (0.15) $\varphi_P^\#: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,P} \to \mathcal{O}_{X,P}$ es suprayectiva.

CAPITULO II

1. Suposiciones generales.

En este capitulo X siempre sera una variedad entera proyectiva no singular sobre un campo algebraicamente cerrado $k=\bar{k}$. De aqui vemos que:

i) ya que toda inmersion cerrada es propia, luego es de tipo finito y $\mathbb{P}^n_k$ es Noetheriano $\therefore$ X es Noetheriano.

ii) $\mathbb{P}^n_k$ es propio sobre k y toda inmersion cerrada es propia, y composicion de propios es propio $\therefore$ X es propio sobre k

Tenemos asi un esquema X entero, separado, noetheriano cuyos anillos locales son UFD (ya que regular implica UFD). Luego $\mathrm{Div}\,X \cong \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. Es mas $\mathrm{Ca\,Cl}\,X \cong \mathrm{Pic}\,X \cong \mathrm{Cl}\,X$.

2. El divisor de zeros asociado a una seccion de una gavilla invertible $\mathcal{L}$.

Dada una gavilla invertible $\mathcal{L}$, y $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, construimos su divisor de zeros que lo denotamos por $(s)_0$. Basta hacerlo localmente. Por (0.10) $\mathcal{L}|_{U_\lambda} = \mathcal{O}_{U_\lambda} \cdot \beta_\lambda$ donde $\{U_\lambda\}$ es una cubierta abierta de X, asi si restringimos s a un abierto U_λ, $s|_{U_\lambda} = a_\lambda \cdot \beta_\lambda$ donde $a_\lambda \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O})$, y como $s \neq 0$ $a_\lambda \in \mathcal{O}^*(U_\lambda)$, luego $(s)_0$ esta representada por $\{(U_\lambda, a_\lambda)\}$.

2.1. Proposicion. Sea $D_0 \in \mathrm{Div}\,X$ y $\mathcal{L} := \mathcal{L}(D_0)$ la gavilla invertible asociada a este divisor. Si $|D_0| := \{ D \in \mathrm{Div}\,X \mid D \geq 0 \text{ y } D \sim D_0 \}$ entonces como conjuntos:

$$\Gamma(X, \mathcal{L}) - \{0\} / k^* \xrightarrow{\sim} |D_0|$$

Notese que $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}) < \infty$, ya que X es proyectiva [Ha 5.19]

Dem. A cada $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ no nula le asignamos $(s)_0$. $(s)_0 \sim D_0$, ya si $\mathcal{L}|_{U_\lambda} = \mathcal{O}_{U_\lambda} \cdot f_\lambda^{-1}$, $s|_{U_\lambda} = a_\lambda \cdot f_\lambda^{-1}$ $\therefore$ $\mathcal{O}_{U_\lambda} \cdot (s|_{U_\lambda})^{-1} = \mathcal{O}_{U_\lambda} \cdot a_\lambda^{-1} \cdot f_\lambda \cong$

$\mathcal{L}((s)_0) \otimes \mathcal{L}(D_0)^{-1}|_{U_\lambda}$. $\therefore$ $(s)_0 - D_0$ es principal.

(ii) Supravectividad. Dado $D' \sim D_0$ tal que $D \geq 0$ $\therefore$ hay una familia $\{a_i\}$ donde $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$ y $D_0|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot f_i^{-1}$ y $D'|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot a_i^{-1}$ luego $D'|_{U_i} \cdot D_0|_{U_i}^{-1} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot a_i^{-1} \cdot f_i = \mathcal{O}_{U_i} \cdot (s|_{U_i})^{-1}$ donde $s \in \Gamma(X, K^*)$, ya que $D - D_0$ es principal $\therefore$ $(s|_{U_i})^{-1} = n_i \cdot a_i^{-1} \cdot f_i$ donde $n_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$, luego $s| = n_i^{-1} \cdot a_i \cdot f_i^{-1}$ pero $(s)_0|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot n_i^{-1} \cdot a_i^{-1} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot a_i^{-1} = D'|_{U_i} \Rightarrow D' = (s)_0$

(iii) Dados $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ $s = \lambda s' \Leftrightarrow (s)_0 = (s')_0$.

$\Rightarrow$) Como $s|_{U_i} = a_i \cdot f_i^{-1}$ y $s'|_{U_i} = b_i \cdot f_i^{-1}$ entonces:

$$b_i \cdot f_i^{-1} = s'|_{U_i} = \lambda \cdot s|_{U_i} = \lambda \cdot a_i \cdot f_i^{-1} \quad \therefore \quad b_i = a_i \lambda$$

y localmente $(s')_0|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot b_i^{-1} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot a_i^{-1} \cdot \lambda_i^{-1} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot a_i^{-1} = (s)_0|_{U_i}$

$\Leftarrow$) $(s)_0|_{U_i} = (s')_0|_{U_i} \Rightarrow \mathcal{O}_{U_i} \cdot a_i^{-1} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot b_i^{-1}$ $\therefore$ $a_i^{-1} = n_i b_i^{-1}$ donde $n_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*)$ $\therefore$ $s|_{U_i} = a_i \cdot f_i^{-1} = n_i \cdot b_i^{-1} \cdot f_i^{-1} = n_i \cdot s'|_{U_i}$ y para otro abierto U_j $s|_{U_j} = n_j \cdot s'|_{U_j}$ pero $n_i| \cdot s'|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j} = n_j| \cdot s'|_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$ $\therefore$ $n_i| = n_j|$ $\therefore$ las n_i's se pegan y hay $n \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*) = k^*$ $\ni$ $s = n \cdot s'$.

<u>2.2 Definición.</u> $|D_0|$ es un sistema lineal completo.

Observación. $|D_0|$ por la proposición anterior esta en uno-uno correspondencia con los puntos cerrados del proyectivo que resulta de proyectivizar sus secciones globales.

<u>Observación.</u> Clasicamente no se trabaja con las secciones globales sino, dado el divisor D_0, definimos $L(D_0) := \{ \varphi \in K^* \mid \varphi = 0 \text{ ó } \operatorname{div}(\varphi) + D_0 \geq 0 \}$ como veremos en un ejemplo esto es lo mismo que $\Gamma(X, \mathcal{L})$.

Con esta definición es muy claro porque $|D_0| \cong L(D_0) - 0/k^*$.

ya que podemos dar una función de $L(D_0) \to |D_0|$ como sigue, dado $\varphi \in L(D_0)$ le asignamos el divisor $D_0 + \mathrm{div}(\varphi)$. Afirmo que $L(D_0) - 0 / k^* \xrightarrow{\sim} |D_0|$ es biyectiva. Si $(\mathrm{div}(\varphi/\varphi')) = 0$ entonces $\varphi/\varphi' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$. Dado $D \sim D_0$ $\Rightarrow D \geq 0$, luego hay $\varphi \in \Gamma(X, K^*)$ tal que $D - D_0 = \mathrm{div}(\varphi)$ $\therefore$ $D = D_0 + \mathrm{div}(\varphi) \geq 0$ $\therefore$ $\varphi \in L(D_0)$.

<u>Ejemplo 2.2.1.</u> Veamos que quieren decir estas definiciones en $X = \mathbb{P}^n_k$.
Primeramente, es claro que en general $D \sim D' \Rightarrow L(D) \cong L(D')$, a saber si $D - D' = (\psi)$, el isomorfismo esta dado por $\varphi \mapsto \psi \cdot \varphi$.
Sea D un divisor de grado $d > 0$. Sabemos que $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}(d)$, ya que si $H = \{P \mid x_1 = 0\}$, $D \sim dH$ y $\mathcal{L}(dH) = \mathcal{O}(d)$. Por (0,10) tambien $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) = \{ f \in k[x_0, \ldots, x_n] \mid f$ homogeneo de grado $d \}$. Ademas $L(D) \cong L(dH)$, calculemos $L(dH)$. Si $\varphi \in L(dH)$ en particular $\varphi \in K^* = k[x_0, \ldots, x_n]_{(0)}^*$ es decir, φ es un cociente de polinomios homogeneos y del mismo grado. Ademas $0 \leq dH + \mathrm{div}(\varphi) = (x_0^d) + \mathrm{div}(\varphi) = \mathrm{div}(x_0^d \varphi)$ $\therefore$ $\varphi = f/x_0^d$, donde f es homogeneo de grado d. Luego:

$$L(D) = \{ f/x_0^d \mid f \text{ homogeneo de grado } d \}.$$

Ahora si es muy claro como pasamos de $\Gamma(X, \mathcal{L}(D))$ a $L(D)$, en nuestro ejemplo, simplemente tomamos un polinomio de grado d homogeneo y lo dividimos entre x_0^d. En nuestro lenguaje esta es la demostracion de II.2.1
Claramente $|D| = \{ D' \mid \deg D' = d \}$.

<u>3 Definicion.</u> Un sistema lineal consiste de una pareja $(\mathcal{L}, V)$; donde $\mathcal{L}$ es una gavilla invertible y V, es un subespacio vectorial $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$. $(\mathcal{L}, V)$ es un sistema lineal completo si $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$.

Observación. Podíamos haber definido un sistema lineal como un subconjunto $\mathfrak{D}$ de un completo $|D|$. Es lo mismo, ya que dado el subconjunto $\mathfrak{D}$ y el completo $|D|$, nos fijamos en $V := \{ s \in \Gamma(X,\mathcal{L}) \mid (s)_0 \in \mathfrak{D} \} \cup \{0\}$, y $\mathcal{L}(D)$.
Conversamente, dado $(V,\mathcal{L})$, definimos $\mathfrak{D} := \{ (s)_0 \mid s \in V \}$.

3.1. Definición. Dado un sistema lineal $\mathfrak{D}$, su dimensión $\dim \mathfrak{D} := \dim V - 1$

3.2 Definición. Dado un sistema lineal $\mathfrak{D}$ y $P \in X$, P es punto base del sistema si $P \in \operatorname{Supp} D$ para todo $D \in \mathfrak{D}$.

Ejemplo 3.2.1. En la proyección desde un punto, el sistema lineal que consiste de los hiperplanos que pasan por el punto a partir del cual se proyecta, tiene como punto base ese punto.

Lema 3.2.2. Sea $(\mathcal{L}, V)$ un sistema lineal. Entonces $P \in X$ es un punto base de $\mathfrak{D} \Leftrightarrow s_P \in m_P \mathcal{L}_P$ para todo $s \in V$.
Dem. $\Rightarrow)$ Para algún Y divisor de $(s)_0$, se tiene $v_Y(a_P) > 0$ donde por un lado $P \in U$ afín y $(s)_0|_U = \mathcal{O}_U \cdot a^{-1}$; puesto que $P \in Y \cap U = \overline{\{q\}}^{(U)}$, donde q es el punto genérico de Y, entonces $P \supset q$ $\therefore$ $m_P \supset m_q$ pero $v_Y(a_P) > 0$ $\therefore a_P \in m_q$ $\therefore$ $a_P \in m_P$ $\therefore$ $s_P = a_P \cdot f_P^{-1} \in m_P \mathcal{L}_P$.
$\Leftarrow)$ Sea $D \in \mathfrak{D}$ entonces $D = (s)_0$ para alguna $s \in V$, además localmente para un U afín $s|_U = a \cdot f^{-1}$ pero $s_P \in m_P \mathcal{L}_P$ $\therefore$ $a_P \in m_P$. Por ser X noetheriano, lo es U también. $\therefore$ hay un primo mínimo q del zero tal que $0 \subseteq q \subseteq P$ $\therefore$ $\overline{\{q\}}$ es un divisor primo y $m_q \subseteq m_P$, pero si $a_q \notin m_q$ entonces $a_q^{-1} a$ $m_q \subseteq m_P$ y ya que $a_q = a_P$ $\therefore$ $1 \in m_P$ ↯. Luego $a_q \in m_q$ y $\therefore$ $v_{\overline{\{q\}}}(a_q) > 0$ $\therefore$ $\overline{\{q\}}$ es un divisor primo incluido en la suma de $(s)_0$

y $P \in \operatorname{Supp}(s)_0$.

Corolario 3.2.3. $\mathcal{L}$ es generado por las secciones globales de $V \Leftrightarrow \mathfrak{D}$ no tiene puntos base.

Dem. $\Rightarrow$) Sea $P \in X$ y sup. sin perdida de gener. que $\mathcal{L}_P \neq 0$, se tiene la proyeccion natural $\mathcal{L}_P \to \mathcal{L}_P / m_P \mathcal{L}_P \neq 0$, ya que codominio es $k(P) \otimes \mathcal{L}_P \neq 0$ ya que ambos son no zero. Si hay una familia $\{s_i\}$ de secciones globales de $\mathcal{L}$ que la generan entonces, ya que $\mathcal{L}_P / m_P \mathcal{L}_P \neq 0$, alguna i, se debe tener $s_{i,P} \notin m_P \mathcal{L}_P$, luego P no es punto base.

$\Leftarrow$) Dado $P \in X$, hay $s \in V \ni s_P \notin m_P \mathcal{L}_P$, pero ya que $s_P = a_P \cdot f_P^{-1} \therefore a_P \notin m_P$ entonces a_P es una unidad, pero $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P \cdot f_P^{-1} = \mathcal{O}_P \cdot a_P^{-1} \cdot s_P = \mathcal{O}_P \cdot s_P$. Luego $\mathcal{L}_P$ es generado por s_P como un $\mathcal{O}_P$-modulo.

Ejemplo 3.2.3. Con el corolario anterior podemos dar un ejemplo de una gavilla amplia que no es muy amplia. Sea X la cubica no-singular $y^2z = x^3 - xz^2$ en $\mathbb{P}^2_k$. Sea $P_0 = (0:1:0)$, usando Bezout $\mathcal{L}(3P_0) \cong \mathcal{O}_X(1) \therefore \mathcal{L}(P_0)$ es amplia. Sin embargo, $\mathcal{L}(P_0)$ no es muy amplia, ya que de lo contrario $|P_0|$ no tendria puntos base. A saber habria $Q \neq P_0$, con $Q \sim P_0$, que es imposible ya que X no es racional.

Proposicion 3.2.4. Sea $\mathfrak{D}$ un sistema lineal sin puntos base y sea $\varphi: X \to \mathbb{P}^n_k$ el morfismo correspondiente. Entonces φ es una inmersion cerrada $\Leftrightarrow$

(1) $\mathfrak{D}$ separa puntos. Dados $P \neq Q$ cerrados de X hay un $D \in \mathfrak{D}$ tal que $P \in \operatorname{Supp} D$ pero $Q \notin \operatorname{Supp} D$

(2) $\mathfrak{D}$ separa vectores tangentes. Dado $P \in X$ cerrado y un vector tangente $t \in T_P(X)$ hay un $D \in \mathfrak{D} \ni P \in \operatorname{Supp} D$ pero $t \notin T_P(D)$.

Observacion. Recordemos que $T_P(X) := \mathrm{Hom}_{k(P)}(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2, k(P))$. Dado $D \in \mathrm{Div}X$ queremos ver que sentido tiene $T_P(D)$, con $P \in \mathrm{Supp}D$. Por esto ultimo $s_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P$. donde $D=(s)_0$. Ademas $(s)_0$ esta representado por $\{(U_\lambda, a_\lambda)\}$ donde $a_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$. Si localmente definimos $\mathcal{J}|_{U_\lambda} = \mathcal{O}_{U_\lambda}\cdot a_\lambda$ obtenemos una gavilla de ideales $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}$. Esta a su vez define un sub-esquema cerrado de X : $(\mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}), \mathcal{O}/\mathcal{J})$. Es a este subesquema al que se refiere la proposicion. Es tambien claro que el campo residual de D y X son los mismos:

$$k_D(P) = (\mathcal{O}_P/\mathcal{J}_P)/(\mathfrak{m}_P/\mathcal{J}_P) = \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P = k(P)$$

y ademas que $T_P(D) \hookrightarrow T_P(X)$ ya que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}_P \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \arrow[d, dashed, two heads] \\
\mathfrak{m}_P/\mathcal{J}_P \arrow[r, two heads] & (\mathfrak{m}_P/\mathcal{J}_P)/(\mathfrak{m}_P/\mathcal{J}_P)^2
\end{tikzcd}$$

todas las flechas son epis, luego tambien la punteada. Apliquese el funtor Hom.

Dem 3.2.4. La condicion (1) es clara por Lema 3.2.2 y I.5(1), por I.5 basta demostrar:

Dado $P \in X$ cerrado, $\{s \in V \mid s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P\}$ generan a $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ como espacio vectorial $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{S}$ separa vectores tangentes.

$\Rightarrow$) Sea $P \in X$ cerrado, y sea $t \in T_P(X) - \{0\}$. Hay $\xi \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P - \mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$ tal que $t(\bar{\xi}) \neq 0$, por hipotesis hay $\{\lambda_i\}$, $\{s_i\} \ni s_{i,P} \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P$ y $\bar{\xi} = \sum \lambda_i \bar{s}_{i,P}$, $\therefore$ $t(\bar{\xi}) \neq 0$, por hipotesis se tiene asi $\sum \lambda_i t(\bar{s}_{i,P}) \neq 0$, luego para algun i, $t(\bar{s}_{i,P}) \neq 0$. Si nos fijamos en $D_i := (s_i)_0$ $\therefore$ $t \notin T_P(D_i)$ y ademas $P \in \mathrm{Supp}D_i$.

$\Leftarrow$) Denotemos por $W := \langle \bar{s}_P \mid s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P \rangle$ donde $\bar{s}_P$ es s_P mod $\mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$ y realmente W es el subespacio de $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ generado por las secciones que se anulan en el punto P. Asi $W \subseteq \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Por ser X en particular, entero y de tipo finito $\dim X = \dim \mathcal{O}_P$, y por ser X no-singular $\dim \mathcal{O}_P = \dim_k \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Ya que $\dim X < \infty$ $\therefore$ $\dim_k \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 < \infty$ luego $\dim W < \infty$. Si demostramos que $W = \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ habremos terminado. Supongamos $W \subsetneq \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$, aplicando el funtor Hom obtenemos que $T_P(X) \to W^*$ es epi. Este morfismo que no es otra cosa que una restricción, no puede ser mono por la hipotesis inicial. Luego hay un vector $t \neq 0 \in T_P(X)$ tal que $t|_W = 0$. Por hipotesis tambien, para el punto P y este vector $t \in T_P(X)$ hay un divisor $D \in \mathfrak{D} \ni P \in \operatorname{Supp} D$ pero $t \notin T_P(D)$. Pero si $t \notin T_P(D)$ en particular $t(s_P) \neq 0$ donde $s \in V$ es tal que $D = (s)_0$. Esto es una contradicción ya que $s_P \in \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P$.

Observacion. Si pensamos en 2 morfismos $\varphi, \varphi' : X \to \mathbb{P}^n_k$ siendo equivalentes si difieren por un automorfismo de $\mathbb{P}^n_k$, y a los sistemas lineales sin puntos bases como $n+2$-adas $(\mathcal{L}, s_0, \ldots, s_n)$ donde $s_0, \ldots, s_n$ son secciones globales de $\mathcal{L}$ que la generan. Entonces decimos que $(\mathcal{L}, s_0, \ldots, s_n)$, $(\mathcal{L}', s_0', \ldots, s_n')$ son equivalentes si $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$ y bajo este iso $s_i \longmapsto s_i'$. De aqui el:

Corolario 3.2.5. Se tiene una biyección de conjuntos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{clases de morfismos} \\ \text{de } X \to \mathbb{P}^n_k \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{clases de sistemas} \\ \text{lineales sin puntos base} \end{array} \right\}$$

Dem. La asignación $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_k \longmapsto (\varphi^*\mathcal{O}(1), \varphi^* x_0, \ldots, \varphi^* x_n)$ es mono y epi por (I. 2, 3).

Definicion 3.3 EL PULLBACK DE UN DIVISOR

Sean V, Z variedades normales. Para un morfismo $f : V \to Z$ y un divisor $D = \sum m_i \Gamma_i$, queremos ver cual es el pullback de D por f. Consideremos el caso $D = \Gamma$. En los siguientes casos, no se puede definir $f^*(\Gamma)$:

i) Si $f(V) \subseteq \Gamma$, ent. $f^{-1}(\Gamma) = V$

ii) Si $f(V) \cap \Gamma = \phi$ ent. $f^{-1}(\Gamma) = \phi$.

iii) El siguiente ejemplo muestra incluso que si $f(V) \not\subseteq \Gamma$ y $f(V) \cap \Gamma \neq \phi$ entonces, puede incluso $f^{-1}(\Gamma)$ no ser equidimensional.

<u>Ejemplo 3.3.1.</u> Sea $B := k[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $\alpha := x_1x_3$, $\beta := x_1x_4$, $\gamma := x_2x_3$, $\delta := x_2x_4$. Entonces $\alpha\delta = \beta\gamma$ y $A := k[\alpha, \beta, \gamma, \delta] \subseteq B$. Ademas $A \cong k[t_1, t_2, t_3, t_4] / (t_1t_4 - t_2t_3)$ que es normal. Si $p := (\alpha, \beta)$ entonces p es primo y ht $p = 1$ y $pB = (Bx_1) \cap (Bx_3 + Bx_4)$. Si $i: A \hookrightarrow B$ es la inclusion entonces a nivel de Spec $f: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ y $f^{-1}(V(p)) = V(pB)$ que es la union de un divisor primo $V(x_1)$ y la superficie $V(x_3) \cap V(x_4)$.

<u>Discurso.</u> Para dar una definicion formal del Pullback de un divisor, estamos guiados por la nocion geometrica como en [Ha p. 135]: "En el caso de la quadrica $Q \subseteq \mathbb{P}^3$, sea Y un divisor primo de $\mathbb{P}^3$ con $Y \not\supseteq Q$, entonces podemos asignar multiplicidades a las componentes irreducibles de $Y \cap Q$ para obtener un divisor $Y \cdot Q$. A saber, en cada afin U_i de $\mathbb{P}^3$, Y esta definida localmente por una funcion f. Podemos tomar el valor de esta funcion (restringida a Q) para cada valuacion de un divisor primo de Q, para definir el divisor $Y \cdot Q$"

Sea asi, V una variedad normal y Z localmente factorial. Definamos el Pullback de un divisor primo Γ de la manera siguiente para $f: V \to Z$, si $f(V) \cap \Gamma \neq \phi$ y $f(V) \not\subseteq \Gamma$. Por (0.16) $f^{-1}(\Gamma) = \bigcup_{i}^{r} W_i$ de divisores primos. Si denotamos por w_i el punto generico de W_i, podemos por (0.17) escoger un abierto afin U_λ de $p_i = f(w_i)$ tal que $\Gamma \cap U_\lambda = V(\varphi_\lambda)$ para algun $\varphi_\lambda \in \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O})$. Tenemos: $\theta(f)^{\#}_{w_i} : \mathcal{O}_{Z, p_i} \to \mathcal{O}_{V, w_i}$, y denotamos por $f^{\#}(\varphi_\lambda)$

a $\theta(f)^{\#}_{w_i}(\varphi_\lambda)$.

Definición 3.3.1. $f^*\Gamma := \sum_{i}^{r} m_i W_i$ donde $m_i := \mathrm{ord}_{W_i}(f^*(\varphi_\lambda))$ y en general si $D = \sum m_i \Gamma_i$ con $f(V) \nsubseteq \Gamma_j$ para toda j, $f^*(D) := \sum m_i f^*(\Gamma_i)$.

Definición 3.3.2. Sea $i : Y \hookrightarrow X$ una inmersión cerrada de variedades proyectivas sobre k, no singulares. Sea $(\mathcal{L}, V)$ un sistema lineal en X, definimos la traza de $(\mathcal{L}, V)$ en Y como sigue: la gavilla invertible en Y será $i^*\mathcal{L}$ y por otra parte se tiene un morfismo:

$$\mathcal{L} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{L}$$

a nivel de secciones globales: $\Gamma(X, \mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(Y, i^*\mathcal{L})$

Si denotamos por $W \subseteq \Gamma(Y, i^*\mathcal{L})$ la imagen de V bajo este mapeo restricción entonces $(i^*\mathcal{L}, W)$ define un sistema lineal, que es la traza.

Observación. Geométricamente, la traza consiste de todos los divisores $D \cdot Y$ (definido en 3.3.1) donde $D \in \mathfrak{D}$ y $Y \nsubseteq \mathrm{Supp}\, D$.

3.4 EJEMPLOS

3.4.1. En $X = \mathbb{P}^n_k$, $|\mathcal{O}_X(d)|$ para $d > 0$, que consiste de todos los divisores efectivos de grado d, es un sistema lineal completo de dimensión $\binom{n+d}{d} - 1$.

3.4.2. Toda curva X abstractamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$, inmersa en $\mathbb{P}^3$, no-singular, de grado 3, que no está contenida en ningún hiperplano es esencialmente la cúbica enrollada en $\mathbb{P}^3$.

Dem. El sistema lineal que define la inmersión corresponde a la traza de los hiperplanos de $\mathbb{P}^3$ en X. En efecto, la inmersión está definida por $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ y el subespacio de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$ generado por $i^*x_0, \dots, i^*x_3$, que es por definición la imagen de $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ bajo el mapeo restricción $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$. Denotemos por W a esta imagen. Afirmo que este mapeo restricción es inyectivo:

Primeramente, recordemos que si tenemos 2 variedades Y y Z de dimensiones r y s en $\mathbb{P}^n$ y si $r+s-n \geq 0 \Rightarrow Y \cap Z \neq \phi$.

Consideremos un divisor en $\mathbb{P}^3$, es decir un hiperplano Γ, como $2+1-3 \geq 0$ entonces nuestro divisor siempre corta a la curva. Ademas por hipotesis $X \not\subset \Gamma$. Asi que $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_X = \{D \cdot X \mid D \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\}$. Por otro lado si $D \cdot X = 0 \Rightarrow D = 0$ ya que todos los divisores primos son distintos y para cada Γ_j hay un punto en $\Gamma_j \cap X$ que no es comun a cualquier otro punto de los otros divisores. Puesto que dim $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = 4$ $\therefore$ dim $W = 4$. Pero X es isomorfo a $\mathbb{P}^1$, y ademas $\deg D \cdot X = \deg D \cdot \deg X = 1 \cdot 3 = 3$, entonces de hecho $D \cdot X \sim 3H_0$ y por tanto $W \subseteq \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$ pero dim $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = 4$ $\therefore$ $W = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$.

En conclusion, la inmersion de X en $\mathbb{P}^3$ esta dada de hecho por $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)|$, pero precisamente la cubica enrollada de $\mathbb{P}^3$ esta dada por $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)|$ mediante la 3-ple inmersion de $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$. Luego, los espacios vectoriales pueden diferir solo en un cambio de base, que corresponde a un automorfismo de $\mathbb{P}^3$.

3.4.3 No cualesquiera 2 quarticas no singulares racionales en $\mathbb{P}^3$ difieren por un automorfismo de $\mathbb{P}^3$.

Una quartica racional no singular en $\mathbb{P}^3$ es una curva no singular de grado 4 que no esta contenida en ningun hiperplano y abstractamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Si consideramos los morfismos de $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ dados por los espacios vectoriales $V = (t^4, t^3u, tu^3, u^4)$, $V' = (t^4, t^3u + at^2u^2, tu^3, u^4)$ con $a \in k^*$, ambos V y $V' \subseteq \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(4))$, este ultimo tiene dimension 5, y los anteriores dim $= 4$.

Claramente V, y V' no difieren por una transf. fraccionaria. (I.3.2)

3.4.4. VARIEDADES PROYECTIVAMENTE NORMALES.

Una variedad $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ es proyectivamente normal si su anillo de coordenadas homogeneo es enteramente cerrado.

Discurso. Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad. Recordemos el concepto de cerradura proyectiva. Puesto que $\overline{Y \cap U_i} = Y$ y el diagrama : (donde Y_i es la imagen bajo φ_i de $Y \cap U_i$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \supseteq U_i & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}^n \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ Y \cap U_i & \xrightarrow{\varphi_i|} & Y_i \end{array}$$

y si ademas $\quad \beta : k[y_1, \dots, y_n] \longrightarrow S^h \quad$ donde $\quad S = k[x_0, \dots, x_n]$

$$g \longmapsto x_i^e \, g\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \qquad e = \deg g.$$

entonces $\beta(I(Y_i)) = I(Y)$. Usando esto y el iso canonico

$$\varphi_i : k[y_1, \dots, y_n] \to k[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)}$$
$$y_k \longmapsto x_k / x_i$$

se tiene que $\varphi_i(I(Y_i)) = I(Y) \cdot S_{(x_i)}$ y la φ_i^* en el diagrama de abajo es iso

$$\begin{array}{ccc} k[y_1, \dots, y_n] & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & A(Y_i) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \cong \\ k[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)} & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & S(Y)_{(x_i)} \end{array}$$

Ademas si $P \in U_i \subseteq \mathbb{P}^n$: $\quad A(Y_i)_{m_{\varphi_i(P)}} \underset{\varphi_i^* \, loc}{\xrightarrow{\sim}} \left(S(Y)_{(x_i)} \right)_{m_P \cdot S(Y)_{(x_i)}} \xrightarrow{\sim} S(Y)_{(m_P)}$

donde el primer iso es el inducido por localización y el segundo por transitividad locales.

Pero $\mathcal{O}_P \simeq A(Y_i)_{m_{\varphi_i(P)}}$. Asi calcular $\mathcal{O}_P$ es hacerlo en su modelo afin.

Como $K(Y) = K(Y \cap U_i) \cong K(Y_i) = \operatorname{coc} A(Y_i) \xrightarrow[\sim]{\varphi_i^* \, loc} S(Y)_{((0))}$.

(a) <u>Si $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ es proyectivamente normal $\Rightarrow$ normal.</u>

Dem. Sea $P \in Y \cap U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Afirmo $A(Y_i)$ es enteramente cerrado. Sea $f \in$ coc $A(Y_i) = S(Y)_{((0))}$ entero sobre $A(Y_i)$. $\therefore \exists\ g_1, \dots, g_m \in S(Y)_{(x_i)}$ tal que:

$$f^m + g_1 f^{m-1} + \cdots + g_m = 0$$

donde $g_j = h_j / x_i^{n_j}$. Sea $N := \max\{n_1, \dots, n_m\}$

multiplicando por $(x_i^N)^{m-1}$:

$$x_i^{Nm} f^m + (\quad) x_i^{N(m-1)} f^{m-1} + \cdots + (\quad) = 0$$

donde los parentesis indican terminos en $S(Y)$. $\therefore x_i^N f \in S(Y)$, ya que $\deg f = 0$

$\therefore f \in S(Y)_{(x_i)}$ $\therefore f \in A(Y_i)$.

(b) <u>Normalidad $\not\Rightarrow$ Proyectivamente normal.</u> Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^3$ la quartica dada por la imagen de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^3$: $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $(t:u) \longmapsto (t^4 : t^3u : tu^3 : u^4)$.

Por definicion, suprayectiva en su imagen y $\mathbb{P}^1$ irreducible, luego Y irreducible.

<u>Y es normal.</u> $S(Y) = k[x, y, z, w] / \sqrt{(xw - yz,\ z^2x - y^2w,\ y^3 - x^2z)}$

Por ejemplo si $P \in Y \cap U_0$. El mapeo $\psi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^3$, $U_0 \subseteq \mathbb{P}^3$, en $Y \cap U_0$ se ve asi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 \supseteq U_0 & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbb{A}^3 \\ \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ P \in Y \cap U_0 & \xrightarrow[\cong]{\psi_0} & Y_0 \end{array} \qquad (t_0^4 : t_0^3 u_0 : t_0 u_0^3 : u_0^4) \longmapsto \left(\frac{u_0}{t_0}, \frac{u_0^3}{t_0^3}, \left(\frac{u_0}{t_0}\right)^4\right)$$

$\therefore Y_0 = \{(n, n^3, n^4) \mid n \in k\}$ y ademas irreducible, por ser $Y \cap U_0$ irreducible.

ya que $Y_0 = Z(y_1 y_2 - y_3,\ y_1^3 - y_2,\ y_3 - y_1^4)$, $I(Y_0) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ donde $\mathfrak{a} := (y_1 y_2 - y_3,\ y_1^3 - y_2,\ y_3 - y_1^4)$.

Sea $\phi : k[y_1, y_2, y_3] \longrightarrow k[t]$ $\begin{cases} y_1 \longmapsto t \\ y_2 \longmapsto t^3 \\ y_3 \longmapsto t^4 \end{cases}$ puesto que $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}\phi$ $\therefore$ $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \operatorname{Ker}\phi$

Si $f \in \operatorname{Ker}\phi$ y $P := (n_0, n_0^3, n_0^4)$ $\therefore f(P) = f(n_0, n_0^3, n_0^4) = 0$ $\therefore \operatorname{Ker}\phi = \sqrt{\mathfrak{a}}$

$\therefore$ $A(Y_0) \cong k[t]$ que es UFD $\therefore$ enteramente cerrado.

Si $P \in Y \cap U_1$, $\psi_1 : U_1 \to \mathbb{A}^3$ actua $\psi_1(t_0^4 : t_0^3 u_0 : t_0 u_0^3 : u_0^4) = \left(\frac{t_0}{u_0}, \frac{u_0^2}{t_0^2}, \left(\frac{u_0}{t_0}\right)^3\right)$

$\therefore\ Y_1 = \{ (x, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}) \mid x \in k-0 \}$ y ademas $Y_1 = Z\,(x^2y-1,\ x^3z-1)$

$$\text{Sea } \phi : k[y_1,y_2,y_3] \to k[t]_t \quad \begin{cases} y_1 \mapsto t \\ y_2 \mapsto 1/t^2 \\ y_3 \mapsto 1/t^3 \end{cases}$$

y ademas $\ker\phi = \sqrt{\mathfrak{a}}$ $\therefore\ A(Y_1) \cong k[t]_t$ que es UFD.

Si $P \in Y \cap U_2$, $\psi_2 : U_2 \to \mathbb{A}^3$ actua $(t_0^4 : t_0^3u_0 : t_0u_0^3 : u_0^4) \longmapsto \left(\left(\frac{t_0}{u_0}\right)^3, \left(\frac{t_0}{u_0}\right)^2, \frac{u_0}{t_0} \right)$

$\therefore\ Y_2 = \{ (1/x^3, 1/x^2, x) \mid x \in k-0 \}$ $\quad\therefore\ Y_2 = Z\,(xz^3-1,\ yz^2-1)$

$$\text{Sea } \phi : k[y_1,y_2,y_3] \to k[t]_t \quad \begin{cases} y_1 \longmapsto 1/t^3 \\ y_2 \longmapsto 1/t^2 \\ y_3 \longmapsto t \end{cases}$$

ϕ es epi y ademas $\ker\phi = \sqrt{\mathfrak{a}}$

$\therefore\ A(Y_2) \cong k[t]_t$ UFD.

Si $P \in Y \cap U_3$, $\psi_3 : U_3 \to \mathbb{A}^3$ actua $(t_0^4 : t_0^3u_0 : t_0u_0^3 : u_0^4) \longmapsto \left(\left(\frac{t_0}{u_0}\right)^4, \left(\frac{t_0}{u_0}\right)^3, \frac{t_0}{u_0} \right)$

$\therefore\ Y_3 = \{ (x^4, x^3, x) \mid x \in k \}$ $\quad\therefore\ Y_3 = Z\,(x - z^4,\ y - z^3)$

$$\text{Sea } \phi : k[y_1,y_2,y_3] \to k[t] \quad \begin{cases} y_1 \longmapsto t^4 \\ y_2 \longmapsto t^3 \\ y_3 \longmapsto t \end{cases}$$

ϕ epi y $\ker\phi = \sqrt{\mathfrak{a}}$

$\therefore\ A(Y_3) \cong k[t]$

<u>Y no es proyectivamente normal</u>. Sea $\phi : k[x,z,y,w] \to k[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$

$$\begin{cases} x \longmapsto t^4 \\ y \longmapsto t^3u \\ z \longmapsto tu^3 \\ w \longmapsto u^4 \end{cases}$$

Si $\mathfrak{a} := (xw - yz,\ z^2x - y^2w,\ y^3 - x^2z)$ $\therefore\ \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \ker\phi$

Si $f \in \ker\phi$ y $P \in Y$ $\therefore\ P = (t_0^4 : t_0^3u_0 : t_0u_0^3 : u_0^4)$ $\therefore\ f(P) = 0$

$\therefore\ f \in I(Y) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ $\quad\therefore\ S(Y) \cong k[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$.

$S(Y)$ no es normal ya que $t^2u^2 = (t^3u)^2/t^4 \in \operatorname{Coc} S(Y)$ pero $t^2u^2 \notin S(Y)$

y ademas t^2u^2 satisface la ecuacion monica : $X^2 - (t^3u)(tu^3) = 0$.

<u>$Y \cong \mathbb{P}^1$</u> Por ejemplo $Y \cap U_0$ es un abierto de Y isomorfo a un abierto de $\mathbb{A}^1$

Y es normal $\therefore$ sus anillos locales $\mathcal{O}_p$ son enteramente cerrados y de dim $\mathcal{O}_p$ = dim Y = 1 $\therefore$ regulares $\therefore$ Y es una curva biracional no singular a $\mathbb{P}^1$ $\therefore$ Y es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

3.4.5. PROYECTIVAMENTE NORMAL (VERSION ESQUEMATICA).

Vease tambien [La p.139], [Sa p.25, 26, 27], [Za p.288]

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^r_k$ un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^r_k$. Sea $k = \bar{k}$, supongase ademas que X es conexo y normal, es decir, si sus anillos locales son dominios enteros enteramente cerrados. Si el anillo de coordenadas de X es denotado por $S(X)$, donde $S(X) := k[x_0, \ldots, x_r] / \Gamma_*(\mathcal{I}_X)$, decimos que X es proyectivamente normal si $S(X)$ es enteramente cerrado. (Veremos que con estas hipotesis resulta ser que X es entero y luego que $S(X)$ sea dominio)

Lema 3.4.5.a) $X \subseteq \mathbb{P}^r_k$ como arriba: conexo y sus anillos locales dominios $\Rightarrow$ X es entero y $S(X)$ es dominio

Dem. X es entero. Supongamos que X tiene por lo menos 2 componentes $X_1 \neq X_2$ por ser X conexo $X_1 \cap X_2 \neq \phi$. Sea $\mathfrak{p}$ un primo en la interseccion. X_1 y X_2 estan definidas localmente por 2 primos $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ de altura 1, $\mathcal{O}_p \simeq A_{\mathfrak{p}}$ en un afin, es dominio y en $A_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = 0$, ya que el 0 es primo $\therefore$ $X_1 = X_2$. Contradiccion.

$S(X)$ es dominio, vease tambien [EGA II p.48 (2.9.4)]

Sea $\mathcal{I}_X$ la gavilla ideal de X, se tiene la sucesion exacta:

$$0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X \to 0$$

y Γ_* es exacto por la izquierda:

$$0 \to \Gamma_*(\mathcal{I}_X) \to \Gamma_* \mathcal{O}_X \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X)$$

nuestro problema es: dados f y g homogeneos de grado m y n resp. en $\Gamma_* \mathcal{O}_X$ tal que su producto se anula en $\Gamma_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X)$, hay que ver que alguno de los dos se anula ahí mismo. Es decir $f\otimes g=0$ en $\Gamma(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X(\overset{n+}{m}))$, en particular en el punto genérico de X, ξ, $f_\xi \otimes g_\xi = 0$ $\therefore f_\xi = 0$ ó $g_\xi = 0$, pero si una sección global de un irreducible se anula en un abierto, debe ser identicamente zero.

Proposicion 3.4.5. La Inmersion d-uple de X es proyectivamente normal para una d suf. grande

Dem. De ahora en adelante $S := S(X)$.

El anillo de coordenadas de la inmersion d-uple es $S^{(d)} := \bigoplus S_m^{(d)}$ con $S_m^{(d)} := S_{md}$ si $(S^{(d)})'$ denota la cerradura entera de $S^{(d)}$, nuestro problema es: $S^{(d)} = (S^{(d)})'$ para una d grande. Se trata de traducir el problema a uno de S y su cerradura entera S', de la manera siguiente:

Se demuestra primero que $S' = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$, por otra parte, los homogeneos de grado m en S, pueden ser metidos como secciones globales en S', de manera que se preserve el grado, de esta manera siempre tenemos para cualquier $d\geq 0$ $S_{md} \subseteq S'_{md}$. Por otra parte, $S^{(d)}$ es generada como k-algebra por $S_1^{(d)} = S_d$, así que analogamente como en S, $(S^{(d)})' = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(n))$, donde $\bar{X} = \mathrm{Proj}\, S^{(d)}$. Pero de hecho $(S^{(d)})' = S'^{(d)}$. Esto es claro, ya que la inmersion d-upla nos da un isomorfismo φ:

$$X = \mathrm{Proj}\, S \underset{\varphi}{\xleftarrow{\sim}} \bar{X} = \mathrm{Proj}\, S^{(d)} \quad , \quad \varphi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1) = \mathcal{O}_X(d)$$

es decir los homogeneos de grado m en $\bar{X}$ van a dar en los homogeneos de grado md en X, y de aquí:

$$(S^{(d)})' = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(n)) \cong \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nd)) = S'^{(d)}$$

Si demostramos que $S'_m \subseteq S_m$ para $m \gg 0$ ya esta. Formalmente:

Lema 3.4.5 b. Sea $X = \mathrm{Proj}\, S$, con S dominio y S finitamente generada como k-algebra por S_1, entonces existe un monomorfismo $\alpha: S \to \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ y es un homomorfismo que preserva grado.

Dem. $\alpha: S \to \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X)$ la definimos a partir de $\alpha_m: S_m \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$ para $m \geq 0$. Dado $s \in S_m$, si $x_0, \dots x_r$, denotan los generadores de S_1, se tiene $\Gamma(D_+(x_r), \mathcal{O}_X(m)) \simeq S_{(x_r)} \cdot x_r^m$ como $S_{(x_r)}$-modulos. Asi $\alpha_m: S_m \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$ dado por $s \longmapsto \left\{ \frac{s}{x_i^m} \cdot x_i^m \right\}_{i=0,\dots r}$ donde $\{ \quad \}$ denota la seccion global definida en la cubierta afin. Como S es dominio, sus localizaciones siguen siendo dominios, de ahi $\{\alpha_m\}$ monos $\therefore$ α mono.

<u>Lema 3.4.5 c.</u> Sea X como en el lema anterior y ademas X normal, entonces $S' := \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ es la cerradura entera de S en $\operatorname{coc} S$.

Dem. S' es dominio ya que la asignación de $S' \to \bigcap_{i=0}^{r} S_{x_i}$ (en $S_{x_0 \cdots x_r}$) que a $f = \sum f_i$ donde $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d_i))$ le asigna una de las $\{ f|_{D_+(x_j)} \}_{j=0,\dots r}$. donde $f|_{D_+(x_j)} := \sum f_i|_{D_+(x_j)}$ es monomorfismo, y ademas en efecto esta en la interseccion, ya que $f|_{D_+(x_i)}\big|_{D_+(x_i x_j)} = f|_{D_+(x_j)}\big|_{D_+(x_i x_j)}$ $\forall i \neq j$.

Ya que la interseccion de dominios es dominio y como:

$$S \subseteq \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} S_{x_i}$$

S' tambien lo es. Ademas, ya que $\operatorname{coc} S_{x_i} = \operatorname{coc} S$ $\therefore$ $\operatorname{coc} S = \operatorname{coc} S'$.

$S' \subseteq \bar{S}^{\operatorname{coc} S}$. Para esto basta ver que S' es entero sobre S.

Sea $s' \in S'$ homogeneo, ya que $s' \in S_{x_i}$ $i=0,\dots r$, hay una n $\ni$ $x_i^n s' \in S$, incluso si $y \in S_{\geq n} := \bigoplus_{e \geq n} S_e$ para una n mas grande $y s' \in S$ e inductivamente $\forall q \geq 1$ $y (s')^q \in S$. Si $y = x_0$ $s'^q \in S\langle \frac{1}{x_0} \rangle \subseteq \operatorname{Coc} S'$. $S\langle \frac{1}{x_0} \rangle$ es un subanillo de $\operatorname{coc} S'$ y ademas $S[s'] \subseteq S\langle \frac{1}{x_0} \rangle$, este ultimo f.g. como S-modulo $\therefore$ s' es entero sobre S.

$\bar{S}^{\text{cocs}} \subseteq S'$. Para esto, basta ver que S' es enteramente cerrado. Sea $\alpha \in S_1$

y sea $D := \operatorname{div}(\alpha_1(\alpha))$, tenemos un iso:

$$\begin{aligned} \eta_m : \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m)) &\longrightarrow L_X(mD) \\ s &\longmapsto s/\alpha^m \end{aligned}$$

Sea T una indeterminada, así se tiene $S' = \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} L_X(mD)\, T^m \subseteq K(X)[T]$

donde $K(X)$ es el campo de funciones de X.

Sea $R(X,D) := \sum_{m=0}^{\infty} L_X(mD)\, T^m$.

Puesto que $K(X)[T]$ es enteramente cerrado, basta ver que si $\varphi(T) \in K(X)[T]$ es entero sobre $R(X,D)$ entonces $\varphi(T) \in R(X,D)$. Por otra parte, $D = \sum e_j \Gamma_j$ donde Γ_j son divisores primos. Sea ord_j la valuación asociada a Γ_j, D_j el anillo local asociado al punto genérico de Γ_j, así si $\varphi(T) = \sum_{m=0}^{r} a_m T^m \in K(X)[T]$,

$\varphi(T) \in R(X,D) \Leftrightarrow \operatorname{div}(a_m) + mD \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{ord}_j(a_m) + me_j \geq 0 \quad \forall_j,\ m = 0, \ldots r.$

pero $\operatorname{ord}_j(a_m) + me_j \geq 0 \Leftrightarrow a_m \Pi_j^{e_j m} \in D_j \ \forall j$, donde Π_j es el generador del ideal maximal de D_j. Así si se demuestra $\varphi(\Pi_j^{e_j} T) \in D_j[T] \ \forall j \Rightarrow \varphi(T) \in R(X,D)$. Así supongase $\varphi(T)$ entero sobre $R(X,D)$ $\therefore$ hay $\alpha_1(T), \ldots\ldots, \alpha_r(T) \in R(X,D)$ tales que:

$$\varphi(T)^r + \alpha_1(T)\varphi(T)^{r-1} + \cdots\cdots + \alpha_r(T) = 0$$

Supongase $\alpha_i(T) = \sum b_{im} T^m \quad \therefore \quad b_{im} \Pi_j^{e_j m} \in D_j \ \forall j \quad \therefore \quad \alpha_i(\Pi_j^{e_j} T) \in D_j[T]$

En particular, la ecuación arriba se satisface con $\Pi_j^{e_j} T$, i.e.:

$$\varphi(\Pi_j^{e_j} T)^r + \alpha_1(\Pi_j^{e_j} T)\varphi(\Pi_j^{e_j} T)^{r-1} + \cdots + \alpha_r(\Pi_j^{e_j} T) = 0$$

$\therefore$ $\varphi(\Pi_j^{e_j} T)$ es entero sobre $D_j[T]$. D_j es enteramente cerrado de $\dim = 1$ $\Rightarrow$ Regular $\dim = 1$ $\Rightarrow$ de ideales principales $\Rightarrow$ UFD $\therefore$ $D_j[T]$ UFD $\therefore$ ent. cerrado.

<u>Lema 3.4.5 d</u>. Con las hipotesis de arriba: S una k-algebra f.g por S_1, se tiene:

$$S_m = S'_m \qquad \text{para } m \gg 0.$$

__Dem.__ Por el teorema de finitud de la cerradura entera, S' es un S-modulo finitamente generado. Por tanto existen elementos $f_1,\dots,f_r$ con $f_i \in S'_{d_i}$, tales que si por ejemplo $m \geq \max d_i$ $i=0,\dots r$:

$$S'_m = S_{m-d_1}\langle f_1\rangle + \dots + S_{m-d_r}\langle f_r\rangle$$

Por otra parte, $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d_i)) \subseteq \bigcap_0^r S(d_i)_{(x_i)}$, así $f \in S(d)_{(x_0)}$ en particular y hay una $n_0 \ni x_0^{n_0} f_1 \in S_{n_0+d_1}$, escogiendo una N que sirva para $i=0,\dots r$ se tiene $S_N\langle f_i\rangle \subseteq S_{N+d_i}$. Por otra parte, para enteros a, b, positivos, $S_a \cdot S_b = S_{a+b}$, donde aquí el lado izquierdo se debe interpretar como la suma de productos de 2 monomios de grados a y b. Escogiendo m suficientemente grande tal que $m \geq d_i - N$ $\forall i=1,\dots r$ se tiene:

$$S_{m-d_i}\langle f_i\rangle = S_{m-d_i-N}\cdot S_N\langle f_i\rangle \subseteq S_m$$

$$\therefore\ S'_m \subseteq S_m$$

__Teorema 3.4.5.1.__ Sea $X \subseteq \mathbb{P}^r_k$ subesquema cerrado conexo. X es proyectivamente normal $\Leftrightarrow$ X es normal y $\Gamma(\mathbb{P}^r_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ es epi $\forall n \geq 0$

El mapeo del teorema lo podemos describir así: dado $s : \mathbb{P}^r_k \to \coprod_{p} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k,p}(n)$ le asociamos $s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ como lo indica el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^r_k \arrow[r, "s"] & \coprod_{q\in\mathbb{P}^r_k} R(n)_{(q)} \arrow[r, "\pi"] & \coprod_{\pi_q} (R/I)(n)_{(q)} \\
\cup\!\!| & & \\
X \arrow[urr, dashed, "s'"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $R := k[T_0,\dots,T_n]$, I el ideal que define el subesquema X, $R(n)$ es el R-modulo graduado dado por $R(n) := \bigoplus_{l\geq 0} R(n)_l$ con $R(n)_l := R_{n+l}$ y analog. con $(R/I)(n)$. Además s' es la sección inducida en $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ por $s \in \Gamma(\cdot\mathbb{P}^r_k, \mathcal{O}_X(n))$ mediante la restricción modulo I.

Dem. $\Rightarrow$) Proy. normal es normal es de 3.4.5. Por otra parte $\alpha_m: S_m \to S'_m$ como en el Lema 3.4.5 b es por hipotesis supraayectiva, esto quiere decir que dado $s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$, esta se puede ver como la composición de una sección global de $\Gamma(\mathbb{P}^r_k, \mathcal{O}(m))$ seguido de la proyección natural, pero esta es precisamente la conmutatividad del diagrama arriba.

$\Leftarrow$) Por un Lema ya demostrado, Normal + Conexo $\Rightarrow$ Entero $\therefore$ R/I es dominio

El problema es demostrar que:

$$\alpha_m : S_m \to S'_m \text{ es supraayectiva}$$

Sea $s' \in S'_m = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$ $\therefore$ $\exists\, s \in \Gamma(\mathbb{P}^r_k, \mathcal{O}(m))$ tal que conmuta el diagrama arriba, pero una sección global de $\Gamma(\mathbb{P}^r_k, \mathcal{O}(m))$ es un polinomio de grado m en $R := k[T_0, \dots, T_r]$ y por la conmutatividad del diagrama, proyectando este polinomio en los homogeneos de grado m en el cociente, resulta α_m epi.

Corolario 3.4.5. i) Sea X una curva lisa proyectiva en $\mathbb{P}^N$ que no esta contenida en ningun hiperplano. Si X es proyectivamente normal entonces X no se puede obtener como la proyección de una curva $X' \subseteq \mathbb{P}^{N'}$ con $N' > N$, que no esté contenida en ningun hiperplano.

Corolario 3.4.5 ii) La quartica racional de 3.4.4 no es proyectivamente normal.

CAPITULO III

En este capítulo X será una variedad proyectiva lisa de dimensión r en $\mathbb{P}^N$

Def. 1. Si P, Q son 2 puntos distintos de X, definimos la recta secante determinada por P y Q como la recta en $\mathbb{P}^N$ que une a P y Q.

Def. 2. La Variedad Secante de X

Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^N \times X \times X$ el conjunto $\Gamma := \{ (a,b,c) \mid a \in \mathbb{P}^N, \ b,c \in X, \ a,b,c$ son colineales $\}$. Este es un conjunto cerrado de $\mathbb{P}^N \times X \times X$ ya que si denotamos las coordenadas de a,b,c por $(x_i^{(j)})$ $j=1,2,3$ $i=0,\dots,N$, la condición para que $(a,b,c) \in \Gamma$ es que todas las submatrices de 3×3 de $(x_i^{(j)})$ tengan determinante zero.

La proyección en el primer factor $\mathbb{P}^N \times X \times X \to \mathbb{P}^N$ induce por restricción a Γ una aplicación $\varphi : \Gamma \to \mathbb{P}^N$. Si denotamos por Δ la diagonal en $X \times X$, definimos la variedad Secante de X como:

$$\operatorname{Sec} X := \varphi(\mathbb{P}^N \times (X \times X - \Delta))$$

Def. 3. La Variedad Tangente de X

Consideremos ahora en $\mathbb{P}^N \times X$ el conjunto $TX := \{ (a,b) \mid {b \in X \atop a \in T_b X} \}$ aquí T_bX denota el espacio tangente a b en X. TX es un conjunto cerrado de $\mathbb{P}^N \times X$, ya que si X está definida por polinomios $F_j \in k[T_0, \dots, T_N]$ $j=1,\dots m$, y si $b = (b_0, \dots, b_N)$, los puntos de T_bX satisfacen las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial F_j}{\partial T_i} \right)(b) \, (T_i - b_i) = 0 \qquad j=1,\dots m.$$

La proyección en el primer factor $\mathbb{P}^N \times X \to \mathbb{P}^N$ induce por restricción a TX una aplicación $\varphi : TX \to \mathbb{P}^N$. Definimos la variedad Tangente de X como:

$$\operatorname{Tan} X := \varphi(TX)$$

Observación. Como $\mathbb{P}^N \times (X\times X - \Delta)$ es localmente cerrado, $\operatorname{Sec}X$ es construible. Como X es proyectiva, la proyección es cerrada y luego $\operatorname{Tan}X$ es cerrada.

Proposicion 4. Sea X una variedad lisa de dimensión r en $\mathbb{P}^N$, y sea O un punto en $\mathbb{P}^N - X$. Si $\varphi: X \to \mathbb{P}^{N-1}$ es la proyeccion desde O, entonces φ es una inm. cerrada $\Leftrightarrow$

i) $O \notin \operatorname{Sec}X$ ii) $O \notin \operatorname{Tan}X$

Dem. El morfismo φ corresponde al sistema lineal dado por los hiperplanos en $\mathbb{P}^N$ que cortan a X y que pasan por O. Por II (3.2.4) esto es una inmersion cerrada si separa puntos y vectores tangentes. Si P y Q son 2 puntos de X, φ los separa ssi hay un H hiperplano que pasa por P y no por Q ssi O no esta en la recta PQ. Si $P \in X$, φ separa vectores tangentes ssi hay un H que pasa por P sin ser tangente a este ssi $O \notin T_P X$.

Prop. 5. Sea X una variedad proyectiva lisa de dimension r en $\mathbb{P}^N$. Si $N > 2r+1$ entonces hay un punto $O \notin X$ tal que la proyección desde O da una inmersion cerrada de X a $\mathbb{P}^{N-1}$.

Dem. La proyección en el segundo y tercer factor $\mathbb{P}^N \times X \times X \to X \times X$ induce por restriccion a Γ una aplicación $\psi: \Gamma \to X\times X$. Dado un punto $(b,c) \in X \times X$, la fibra sobre este punto consiste de (a,b,c) donde a es cualquier punto que esta sobre la recta que pasa por b y c, luego $\dim \psi^{-1}(b,c) = 1$, pero ademas $\dim X\times X = 2r$, luego por (0,18 2) $\dim \Gamma = 2r+1$, pero por (0,18 1) $\dim \operatorname{Sec}X \leq \dim \mathbb{P}^N \times (X \times X - \Delta) \leq \dim \Gamma = 2r+1$ $\therefore$ $\dim \operatorname{Sec}X \leq 2r+1$

Analogamente la restricción a la proyección en el segundo factor $\mathbb{P}^N \times X \to X$ induce en TX $\psi: TX \to X$. $\therefore$ $\dim \psi^{-1}(P) = r$, nuevamente $\dim TX = 2r$ $\therefore$ $\dim \operatorname{Tan}X \leq 2r$.

Como $N > 2r+1$ $\therefore$ $\operatorname{Tan}X \cup \operatorname{Sec}X \neq \mathbb{P}^N$ y hay un O que satisface Prop. 4.

Corolario 5.1. Toda curva lisa proyectiva puede ser encajada en $\mathbb{P}^3$.

REFERENCIAS

Atiyah, M. Commutative Algebra. Addison Wesley, 1969.

Fulton. Lectures on Algebraic Curves. Benjamin, 1979.

Hartshorne, R. 1) Algebraic Geometry. Springer Verlag, 1977.

2) Ample Subvarieties of Algebraic Geometry. Lect. Notes in Math. 156.

3) Hartshorne Course on curves. 1967.

Lang, S. Introduction to Algebraic Geometry. Interscience 1958.

Litaka Algebraic Geometry. Springer Verlag 1981.

Lluis, E. Sur L'immersion des Variétés Algebriques, Ann. of. Math. Vol 62, 1955

Samuel, P. Méthodes d'Algebre Abstraite en Géometrie Algébrique. Springer 1967.

Shafarevich, I.R. Basic Algebraic Geometry, Springer 1974.

Zariski, O. Some Recent Results in the Arithmetic theory of Algebraic Varieties, Amer. J. Math. Vol. 61 (1939)