2 Ej.
25

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOBRE GRUPOS SUPERSOLUBLES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

ROSA MARIA MENCHACA ROCHA

C O N T E N I D O

INTRODUCCION

A FINES DEL SIGLO PASADO, BURNSIDE YA MANEJABA EL CONCEPTO DE GRUPO SUPERSOLUBLE, PERO NO ES SINO HASTA 1938 CUANDO 9 EL PROFESOR GUIDO ZAPPA, INDTRODUCE ESTE CONCEPTO EN SU TRABAJO SUI GRUPPI SUPERSOLUBILI 0 . EN ESTE TRABAJO ZAPPA DESPUES DE INTRODUCIR EL CONCEPTO DE GRUPO SUPERSOLUBLE, DEMOSTRO ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES ENTRE OTRAS, QUE EL SUBRUPO CONMUTADOR DE UN GRUPO SUPERSOLUBLE ES NILPOTENTE .

EN 1954 B. HUPPERT 7 , CARACTERIZA A LOS GRUPOS SUPERSOLUBLES DE LA SIGUIENTE MANERA: UN GRUPO FINITO G ES SUPERSOLUBLE, SI Y SOLO SI, TODO SUBGRUPO MAXIMAL ES DE INDICE PRIMO EN G.

EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO ES MOSTRAR ALGUNAS PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS GRUPOS SUPERSOLUBLES, ASI COMO DAR UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE HUPPERT, UTILIZANDO EL CONCEPTO DE FORMACIÓN DE GRUPOS, QUE AQUI TAMBIEN SE PRESENTA.

I DEFINICIONES, EJEMPLOS Y PROPIEDADES BASICAS DE LOS GRUPOS SUPERSOLUBLES.

Definicion:

Una serie $G=A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ se dice que es normal si A_i es normal en G para toda i.

Definicion:

Un grupo G es supersoluble si y solo si, tiene una serie

$$G = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = \{1\}$$ normal, tal que A_i / A_{i+1} es cíclico.

Es inmediato de la definicion que todo grupo supersoluble es soluble.

Teorema:

Todo grupo supersoluble es finitamente generado.

Demostracion:

Sea $G = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = \{1\}$ una cadena normal tal que A_{i-1} / A_i es cíclico.

Sea $\pi: A_{i-1} \longrightarrow A_{i-1}/A_i$ el homomorfismo canónico. Como A_{i-1}/A_i es ciclico, se tiene que $A_{i-1}/A_i = \langle a_{i-1} A_i \rangle$, con $a_{i-1} \in A_{i-1}$.

Sea $x \in A_{i-1}$ entonces se tiene que:

$$\pi(x) = \bar{x} = xA_i = a_{i-1}^s A_i$$

esto implica que $x = a_{i-1}^s y$, con $y \in A_i$ por lo tanto $A_{i-1} \subset \langle a_{i-1}, A_i \rangle$ con $a_{i-1} \in A_{i-1}$.

Como $A_i \subset A_{i-1}$ entonces $\langle a_{i-1}, A_i \rangle \subset A_{i-1}$ por lo tanto $A_{i-1} = \langle a_{i-1}, A_i \rangle$

Entonces $G = A_0 = \langle a_0, A_1 \rangle$ y como $A_1 = \langle a_1, A_2 \rangle$, se tiene que:

$$G = A_0 = \langle a_0, a_1, A_2 \rangle,$$

substituyendo a su vez $A_2, A_3, \ldots A_n$ nos queda $G = \langle a_0, a_1, \ldots a_n \rangle$

por lo tanto G es finitamente generado por a lo mas n+1 elementos.

EJEMPLOS DE GRUPOS SUPERSOLUBLES

1) Los grupos abelianos finitos.
2) los P grupos finitos.
3) S_3.
4) Todo grupo nilpotente finitamente generado.

Recordamos que un grupo finito G es nilpotente si y solo si G es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

S_3 es un ejemplo de grupo supersoluble no nilpotente ya que S_3 no es producto directo de sus subgrupos de Sylow.
Si consideramos la clase de los grupos finitos, se tienen las siguientes contenciones:

Grupos Cíclicos $\subset$ Grupos Abelianos $\subset$ Grupos nilpotentes $\subset$ Grupos Supersolubles $\subset$ Grupos Solubles.

Ademas los p-grupos $\subset$ nilpotentes.

.Z_2 es un cíclico

.$Z_2 \times Z_2$ es un abeliano no cíclico

.El grupo diédrico D_4 de simetrías del cuadrado, es un 2-grupo, por lo tanto es nilpotente y no abeliano

.S_3 es supersoluble no nilpotente

S_4 es soluble y no supersoluble

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS GRUPOS SUPERSOLUBLES.

Teorema:

Si G es supersoluble y $K \triangleleft G$ entonces G/K es supersoluble.

Demostracion:

Sea $G=A_0 \supset \ldots \supset A_n = \{1\}$ una serie normal donde A_i/A_{i+1} es cíclico para toda i.

Sea π: $G \dashrightarrow G/K$, el homomorfismo canónico y sea $T_i = \pi(A_i)$

Consideremos la serie formada por las T_i:

$$T=G/K=T_0 \supset T_1 \supset \ldots \supset T_n = \{\bar{1}\}$$

demostraremos que:

1) $T_i \triangleleft T$

2) T_i/T_{i+1} es cíclico.

Demostracion:

1) $T_i \triangleleft T$ ya que $T_i = \pi(A_i)$ y $A_i \triangleleft G$, y π es sobre.

2) Para demostrar que T_i/T_{i+1} es cíclico,

tomamos $\pi_i^* : A_i/A_{i+1} \dashrightarrow T_i/T_{i+1}$

tal que $\pi_i^* (a_i A_{i+1}) = (\pi(a_i))T_{i+1}$

π_i^* esta bien definida y es un epimorfismo; y como A_i/A_{i+1} es cíclico entonces T_i/T_{i+1} es 1, o es cíclico.

Por lo tanto si en $G/K=T_0 \supset \ldots \supset T_n = \{1\}$ quitamos los T_s que se repiten, llegamos a lo que queriamos demostrar.

Teorema:

Si G es supersoluble y H es subgrupo de G, entonces H es supersoluble.

Demostracion:

Sea $G=A_0 \supset \ldots \supset A_n = \{1\}$ una serie normal tal que A_i/A_{i+1} es cíclico.

Sea $H=(G \cap H) \supset (H \cap A_1) \supset (H \cap A_2) \supset \ldots (H \cap \{1\}) = \{1\}$,

tomando $H_0 = G \cap H$ y $H_i = H \cap A_i$,

es inmediato que cada H_i es normal en H, ademas:

$H_i/H_{i+1} = (A_i \cap H)/(A_{i+1} \cap H) = (A_i \cap H)/ (A_i \cap (A_{i+1} \cap H))$

como:

$(A_i \cap H)/(A_{i+1} \cap (A_i \cap H)) \approx (A_{i+1}(A_i \cap H))/A_{i+1} \subset A_i/A_{i+1}$

que es cíclico, se tiene que H_i/H_{i+1} es cíclico

L.Q.Q.D.

Lemma:

Sean A,B,C grupos tales que $C \triangleleft B$, entonces $AxB/AxC \simeq B/C$

Teorema

Si G_1 y G_2 son grupos supersolubles, entonces $G_1 x G_2$ es supersoluble.

Demostracion:

Sean:

$G_1 = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_r = \{1\}$

$G_2 = B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_s = \{1\}$

series normales, tales que A_i/A_{i+1} y B_i/B_{i+1} son cíclicos.

Construyamos la siguiente serie:

$G_1 \times G_2 = G_1 \times B_1 \supset G_1 \times B_2 \supset \ldots\ G_1 \times \{1\} \supset A_1 \times \{1\} \supset \ldots \supset \{1\} \times \{1\}$

Como $A_i \triangleleft G_1$ y $B_j \triangleleft G_2$ entonces $A_i \times B_j \triangleleft G_1 \times G_2$.

Por el Lemma anterior:

$(G_1 \times B_j)/(G_1 \times B_{j+1}) \simeq B_j/B_{j+1}$

$A_i \times \{1\}/A_{i+1} \times \{1\} \simeq A_i/A_{i+1}$

para toda $j=0,1,\ldots,s-1;$
$i=0,\ldots,r-1$

que son cíclicos, por lo tanto: $G_1 \times G_2$ es supersoluble.

II LA FORMACION DE LOS GRUPOS SUPERSOLUBLES.

Definicion:

Una clase F de grupos finitos se llama una formacion si:

i) $G \in F$ y $\bar{G}$ es imagen homomorfa de G, entonces $\bar{G} \in F$.

ii) $N_1, N_2 \triangleleft G$ y G/N_1, $G/N_2 \in F$

entonces: $G/(N_1 \cap N_2) \in F$

convencion: La clase vacía se considera una formación.

Ejemplos:

1.- La clase A de todos los grupos abelianos finitos.

Prueba:

i) Es inmediato que si G es abeliano, entonces G/N es abeliano para cualquier subgrupo N.

ii) Sean $N_1, N_2 \triangleleft G$ tales que $G/N_1 \in A$ y $G/N_2 \in A$.

se tiene que $N \triangleleft G$ y G/N es abeliano si y solo si

$G' \subset N$ donde G' es el conmutador de G.

Por lo tanto $G' \subset N_1$, $G' \subset N_2$, entonces $G' \subset N_1 \cap N_2$ esto implica que

$G/(N_1 \cap N_2)$ es abeliano

L.Q.Q.D.

2.- La clase R de grupos solubles es uńa formacion.

o) Es conocido que la clase de grupos solubles es cerrado bajo subgrupos, bajo cocientes y bajo productos

i) Se sigue de o)

ii) Sean G/N_1, $G/N_2 \in R$

Debemos demostrar que $G/(N_1 \cap N_2) \in R$.

Sabemos que $N_1/(N_1 \cap N_2) \simeq N_1N_2/N_2 \subset G/N_2$

Por lo tanto $N_1/(N_1 \cap N_2) \in R$

Ahora $G/N_1 \simeq (G/(N_1 \cap N_2))/(N_1/(N_1 \cap N_2))$

y como G/N_1 y $N_1/(N_1 \cap N_2) \in R$

se sigue que $G/(N_1 \cap N_2) \in R$

L.Q.Q.D.

3.- La clase de los grupos supersolubles es una formacion.

4.- La clase N de los grupos nilpotentes es una formacion.

En efecto, cualquier clase X que sea cerrada bajo subgrupos, cocientes y productos directos es una formacion.
Es suficiente demostrar que si:

G/N_1, $G/N_2 \in X$, entonces:

$G/N_1 \cap N_2 \in X$

Demostracion:

Sea $\varphi : G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$ definido como $\varphi(g) = (gN_1, gN_2)$;

φ es homomorfismo, ya que:

$$\varphi(g\,g') = (g\,g'\,N_1, g\,g'\,N_2) = (g\,N_1\,g'\,N_1, g\,N_2\,g'\,N_2)$$

$$= (g\,N_1, g\,N_2)(g'\,N_1, g'\,N_2) = \varphi(g)\,\varphi(g').$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G \mid (g\,N_1, g\,N_2) = (N_1, N_2)\} = N_1 \cap N_2$$

Por el primer teorema de isomorfismo, se tiene que:

$G/(N_1 \cap N_2) \simeq \mathrm{Im}\,\varphi \subset G/N_1 \times G/N_2$

por lo tanto $G/N_1 \cap N_2 \in X$.

Como la clase de grupos supersolubles y la clase de grupos nilpotentes son cerrados bajo subgrupos, cocientes y productos directos, entonces las afirmaciones 3 y 4 son ciertas.

Todos los ejemplos de formaciones que hemos dado son clases cerradas bajo subgrupos, cocientes y productos directos pero en el caso de grupos abelianos y en el de los solubles, para mayor ilustracion preferimos probar caso por caso que cada una de ellas es una formacion. Sin embargo, existen formaciones que no son cerradas bajo subgrupos.

5.- Sea $n \in \mathbb{N}$ y $F(n)$ la clase de los grupos finitos cuyo exponente divide a $n-1$.

Entonces $F(n)$ es una formacion.

En efecto:

a).- $F(n)$ es cerrado bajo cocientes.

Si $G \in F(n)$ y $N \triangleleft G$, entonces hay que demostrar que:

$G/N \in F(n)$.

Sea $gN \in G/N$, entonces:

$(gN)^{n-1} = g^{n-1}N = eN$ ya que el exponente de G divide a n-1. Como el orden de gN divide a n-1 para toda $gN \in G/N$, esto implica que el exponente de G/N divide a n-1

L.Q.Q.D.

b)-. F(n) es cerrado bajo subgrupos.

Es inmediato, ya que si H es subgrupo de G, entonces el exponente de H divide al exponente de G quo divide a su vez a n-1.

L.Q.Q.D.

c).- F(n) es cerrado bajo productos directos.

Sean G_1, $G_2 \in F(n)$, por demostrar que $G_1 \times G_2 \in F(n)$.

Sea $(x,y) \in G_1 \times G_2$, $(x,y)^{n-1} = (x^{n-1}, y^{n-1}) = (1,1)$;

por lo tanto el orden de (x,y) divide a n-1 lo que implica, que el exponente de $G_1 \times G_2$ divide a n-1

L.Q.Q.D.

6).- A cada primo p se le asocia una formacion F(P), la cual puede ser vacia.

Sea F la clase definida como sigue:

$G \in F$ si y solo si para cada factor principal H/K de G y cada primo p que divide al orden de H/K implica que el grupo de automorfismos inducidos por G en H/K pertenecen a F(P), es decir $G/C_G(H/K) \in F(p)$

F es una formacion y se llama la formacion definida localmente

por las F(P)'s ....[1]

EJEMPLOS:

1) Si a cada primo p se le asocia $F(P) = \{1\}$, entonces F es la formacion de los grupos finitos nilpotentes, en efecto si $G \in F$, entonces para cada factor principal H/K de G y para todo primo p que divide al orden de H/K se tiene que

$G/C_G(H/K) = \{1\}$, por lo tanto $C_G(H/K) = G$, lo que implica que G sea nilpotente.

(Se recuerda que un grupo finito es nilpotente si y solo si existe

una cadena normal $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_r = \{1\}$ tal que $[G, H_{i-1}] \subset H_i$)

Inversamente, si G es nilpotente, es claro que $C_G(H/K) = G$ para cada factor principal de G, por lo tanto $G \in F$.

2) Si para cada primo p, F(p) es la formacion de los grupos abelianos finitos cuyo exponente divide a p-1, entonces la formacion F definida localmente por las F(P)'s es la formacion de los grupos supersolubles.

Demostracion:

Sea G un grupo supersoluble, y H/K un factor principal de G, entonces el orden de H/K es igual a p con p primo.

Por lo tanto el orden de aut(H/K) es p-1 lo que implica que los automorfismos de H/K inducidos por G tendran un exponente que divide a $p-1$, por lo tanto pertenecen a $F(P)$, es decir

$G/C_G(H/K) \in F(P)$

Inversamente sea $G \in F$, por demostrar que G es supersoluble.

Sea H/K un factor principal de G, y p un primo que divida al orden de H/K, si demostramos que H/K es de orden p, se tendra que G es supersoluble

Sea S/K un p-subgrupo de Sylow de H/K y p^t el orden de S/K, entonces $G/C_G(H/K) \in F(P)$ (por definicion de F), esto es $G/C_G(H/K)$ es abeliano de exponente que divide a $p-1$ lo que implica que $G/C_G(H/K)$ no tiene elementos de orden p, por lo tanto $C_G(H/K)$ contiene a todos los p-elementos de G, por lo tanto

$S \subset C_G(H/K)$, esto implica que $S/K \subset Z(H/K)$

de donde se sigue que $S/K \triangleleft H/K$ y como es un p-subgrupo de Sylow, entonces S/K es caracteristico en H/K, pero H/K no puede tener subgrupos caracteristicos propios porque es un factor principal, de donde se sigue que:

$V = H/K = S/K$ por lo tanto el orden de V es p^t.

Ahora bien V es caracteristicamente simple (es decir no tiene subgrupos caracteristicos propios) por lo tanto V es producto directo de grupos simples isomorfos ....[4]

pero como V es un p grupo, tales subgrupos deben ser isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ lo que implica que V es abeliano elemental de orden p^t y V resulta un $\mathbb{Z}_p$ espacio vectorial de dimension t.

Se tiene que $\bar{G} = G/C_G(H/K)$ es isomorfo a un subgrupo de $aut(H/K) = GL(V)$ donde $GL(V)$ es el grupo de las transformaciones lineales de V.

Sea $\alpha \in \bar{G}$ y $m(x)$ el polinomio minimal de α, como $\alpha^{p-1} - 1 = 0$ (por que $\bar{G} \in F(p)$) esto implica que $m(x)/x^{p-1} - 1$ y como $x^{p-1} - 1$ se factoriza como producto de factores lineales distintos en $Z_p[x]$, esto implica que $m(x)$ es tambien producto de factores lineales distintos, por consiguiente α es diagonalizable.............[5]

Como G es abeliano (porque $G \in F(p)$), y cada $\alpha \in \bar{G}$ es diagonalizable, entonces $\bar{G}$ es diagonalizable simultaneamente.

Esto implica que dim V = 1 ya que de otra forma V seria suma directa de subespacios de dimension 1, invariantes bajo $\bar{G}$ y V = H/K tendria

subespacios propios invariantes bajo G, esto es H/K no seria principal. Con esto se ha demostrado que la dim V = 1, es decir $|V| = |H/K| = p$.

L.Q.Q.D.

Definicion:

Una formacion se dice saturada, si para todo grupo finito G tal que $G/\phi(G) \in F$, esto implica que $G \in F$, donde $\phi(G)$ es el subgrupo de

Frattini de G y es igual a la interseccion de todos los subgrupos maximales de G.

Ejemplos:

1) La formacion de grupos finitos, la de los grupos solubles, la de los nilpotentes, y la de los supersolubles son ejemplos de formaciones saturadas, mientras que la formacion de los grupos finitos abelianos no es saturada.

Proposicion(W. Gaschutz):

Las formaciones definidas localmente son saturadas........[1]

Recientemente P. Schmid ...[6], demostro que toda formacion saturada es localmente definida y por lo tanto se tiene el siguiente:

Teorema:

Una formacion es saturada si y solo si es localmente definida.

III.- TEOREMA DE HUPPERT PARA GRUPOS FINITOS SUPERSOLUBLES.

Teorema:

Si G es supersoluble y finito, y M es un subgrupo maximal de G entonces $[G:M] = p$, donde p es primo.

Demostracion:

Induccion sobre r; donde r es el numero de divisores primos de $|G|$, (posiblemente iguales).

Si $r = 1$, la demostracion es trivial.

Supongamos que $r > 1$.

Sea P un subgrupo normal minimal de G, entonces $|P| = p$ primo, porque G es supersoluble.

Consideremos dos casos:

a) $P \subset M$

Entonces $M/P \subset G/P$, es maximal (por el teorema de la correspondencia), entonces por hipotesis de induccion

$p = [G/P : M/P] = |G/P|/|M/P| = |G|/|M| = [G:M]$

con p primo.

L.Q.Q.D.

b) $P \not\subset M$.

Entonces $M \subsetneq MP = G$ ya que M es maximal y $P \triangleleft G$.

$$[G:M] = [MP:M] = |MP|/|M| = (|M|.|P|/|M \cap P|)/|M|$$

pero $M \cap P \subset P$ es un subgrupo, lo que implica que $M \cap P = \{1\}$ ya que $|P| = p$ y $P \not\subset M$.

Por lo tanto $[G:M] = (|M|.|P|)/|M| = |P| = p$ primo.

L.Q.Q.D.

Teorema:

Sea G un grupo supersoluble y sea p, un primo tal que p divide al orden de G, entonces existe $M \subset G$ subgrupo tal que $[G:M] = p$.

Demostracion:

Como G es supersoluble, entonces G es soluble.

Sea S el p-complemento de Sylow de G, entonces el $[G:S] = p^s$ y sea M un subgrupo maximal de G que contenga a S, entonces: $[G:S] = [G:M][M:S]$ lo que implica que $[G:M] = p^t$, donde se sigue que $t = 1$ por el teorema anterior y M resulta ser el subgrupo buscado.

Teorema:

En los grupos finitos supersolubles, es válido el inverso del teorema de Lagrange, es decir si G es finito supersoluble y m es divisor del orden de G, entonces existe un subgrupo H de G tal que $|H| = m$.

Demostracion:

Induccion sobre n, donde h es el orden de G.

m divide a n entonces $n = mh$, sea p primo tal que p divida a h, entonces $n = mh'p$. Por el teorema anterior G tiene un subgrupo M tal que $[G:M] = p$, es decir $|M| = mh'$.

Por hipotesis de induccion M tiene un subgrupo H de orden m, por lo tanto G tiene un subgrupo de orden m.

L.Q.Q.D.

Teorema (P. Hall):

Sea G un grupo finito tal que $[G:M] = p$ o p^2 con p primo para todo M subgrupo maximal de G, entonces G es soluble.

Demostracion:

Induccion sobre el orden de G.

Sea p el primo mayor que divida al orden de G y sea S un p-subgrupo de Sylow de G y $N = N_G(S)$.

Si $N = G$ entonces $S \triangleleft G$ y G/S es soluble, por hipotesis de induccion.

Ahora, como S es un p-grupo, S es soluble de aqui se sigue que G es soluble.

Supongamos que $N \subsetneq G$.

Sea $N \subset H \subset G$, H maximal como $N = N_G(S)$, se tiene que $N = N_H(S)$;

ahora $[G:N] = 1 + K_1 p$, $[H:N] = 1 + K_2 p$, (por el tercer Teorema de Sylow).

Ahora $[G:H][H:N] = [G:N]$, por lo tanto $[G:N] = 1 + kp$, pero como H es maximal, se sigue que $[G:H] = q$ o q^2, con q-primo. Si $[G:H] = q$ implica que q divide al orden de G, entonces por hipotesis $q < p$ pero $q = 1 + kp$ lo cual es absurdo, por lo tanto $[G:H] = q^2$.

Ahora $q^2 = 1 + kp$, por lo tanto $q^2 - 1 = kp$, es decir $p/(q-1)(q+1)$ lo que implica que $p/(q-1)$ o $p/(q+1)$ de donde se sigue que $p/(q+1)$ ya que q era menor que p.

Ahora $p \leq q+1$ pero como $q < p$ esto implica que $q+1 = p$ y esto solo es posible si $q = 2$ y $p = 3$.

Por lo tanto el orden de G es de la forma $2^a.3^b$

y por el Teorema Burnside, G es soluble.

Teorema de Huppert:

Si G es un grupo finito tal que para todo subgrupo M maximal en G, $[G:M] = p$, con p primo, entonces G es supersoluble.

Demostracion:

Por induccion sobre el orden de G.

Por el Teorema anterior G es soluble. Sea N subgrupo normal minimal de G. Si $N \subset M$ para toda M subgrupo maximal de G, entonces $N \subset \phi(G)$ lo que implica que $|G/\phi(G)| < |G|$ y por hipotesis de induccion $G/\phi(G)$ es supersoluble y como la clase de grupos supersolubles es saturada puesto que es localmente definida se tendra que G es supersoluble.

Supongamos entonces que existe M subgrupo maximal de G tal que $N \not\subset M$, por lo tanto $G = NM$ ya que M es maximal. Como N es normal minimal y G es soluble, entonces N es abeliano elemental.

Ahora $M \cap N = \{1\}$ por que $N \cap M \triangleleft M$, $N \cap M \triangleleft N$ y $G = MN$ resulta que $M \cap N \triangleleft G$ y como N es normal minimal se sigue que $M \cap N = \{1\}$

$$p = [G:M] = |G|/|M| = |MN|/|M| = (|M||N|)/(|M \cap N||M|) = |N|$$

ya que M es maximal.

Hemos demostrado que si N es subgrupo normal minimal de G y existe Un subgrupo M maximal de G tal que $N \not\subseteq M$ entonces $|N| = p$ primo.

Sea M_1/N un subgrupo maximal de G/N, esto implica que M_1 es maximal en G por lo tanto $[G/N:M_1/N] = [G:M_1] = p$ primo y por hipotesis de induccion se tendra que G/N es supersoluble.

Sea $G/N = A_0/N \supset A_1/N \supset \ldots \supset A_n/N = \{1\}/N$ una serie normal tal que cada factor sea de orden primo, entonces la serie

$G = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = N \quad \{1\}$ es normal y cada factor tiene orden primo lo que implica que G es supersoluble.

L.Q.Q.D.

REFERENCIAS

[0] GUIDO ZAPPA, "Sui Gruppi Supersolubili", Rend Sem Math. UNIV. ROMA (4), 2 (1938) 323-330.

[1] GUIDO ZAPPA. "Topics of finite soluble Groups", Instituto Nazionale di Alta Matematica. Roma 1982.

[2] GUIDO ZAPPA "Fondamenti di Teoria dei Gruppi" Vol. II, Cremunesse, Roma 1970.

[3] MARSHALL HALL "Teoria de los Grupos". Editorial F. Trillas, S.A. Mexico 1969.

[4] GORENSTEIN "Finite groups". Harper and Row Publishers. U.S.A. 1968.

[5] K. HOFFMAN / R/ KUNZE "Algebra Lineal" Editorial Prentice Hall Madrid 1981.

[6] P. SCHMID "Every Saturated Formation is a Local Formation", J. Algebra 51(1978) 144-148.

[7] B. HUPPERT. NORMAL TEILER AND MAXIMALE UNTERGRUPPEN ENDLICHER GRUPPEN MATH. Z.60, 409 - 434 (1954)