2 G 23

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOBRE UN TEOREMA DE ALPERIN"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

María Elena Martínez Rodríguez

MEXICO, D.F. 1984

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo está basado en un artículo de M. Luis Puig, acerca de un Teorema de Alperin.

En el Capítulo I se dan los antecedentes necesarios para el desarrollo del tema, en el que trabajaremos sobre un grupo finito denotado por G.

En el Capítulo II desarrollamos una técnica con flechas (elementos de la forma (B,x,A) donde A y B son p-subgrupos de G, $x \in G$ y $A \subset B^x$) y dobles flechas (elementos de la forma (B,x,y,A) donde A es p-subgrupo y B es Sp-grupo de G $x,y \in G$ y $A \subset B^x$, $A \subset B^y$); en este capítulo además de establecer operaciones y relaciones con flechas y dobles flechas, se obtienen importante resultados, algunos de los cuales son generalizados en el Capítulo III a clases de equivalencia por medio de una aplicación (W) del conjunto de p-subgrupos de G en el conjunto de subgrupos de G que satisface ciertas condiciones. Siendo de particular interés la aplicación (denotada por C) que asocia a cada subgrupo de G su centralizador en G.

Finalmente en el Capítulo IV se demuestra el siguiente teorema que es debido a Alperin:

Sean A y B dos subrupos de P donde P es un Sp-grupo de G y supóngase que $A^x = B$ entonces existen elementos x_i de G y Sp-grupos Q_i de G para $1 \leq i \leq n$ y un elemento y del $N_G(A)$ el cual satisface las siguientes condiciones :

i) $x = x_1 x_2 \ldots x_n y$

ii) $P \cap Q_i$ es una intersección suave para $1 \leq i \leq n$

iii) x_i es un p-elemento del $N_G(P \cap Q_i)$ para $1 \leq i \leq n$

iv) $A \subset P \cap Q_1$ $\quad A^{x_1 x_2 \ldots x_i} \subset P \cap Q_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$

Notación

Sp-grupo	Subgrupo de Sylow
$\|A\|$	orden de A
A^x	$\{x^{-1}a\,x \mid a \in A\}$
$N_G(A)$	normalizador de A en G
$C_G(A)$	centralizador de A en G
$A \triangleleft G$	A es un subgrupo normal de G

Capítulo I

Este capítulo consta de los elementos necesarios para el desarrolo del tema. El grupo G será considerado a lo largo de todo el trabajo como un grupo finito.

Proposición 1.1

Sea P un Sp-grupo de G y A un p-subgrupo de G entonces

$$N_{P^x}(A) = [N_P(A^{x^{-1}})]^x$$

Teorema 1.1 (Sylow)

Si G es de orden $n = p^m s$ donde $p \nmid s$ y p es un número primo, entonces G contiene subgrupos de ordenes p^i, para $i = 1,\ldots m$ y cada subgrupo de orden p^i, $i = 1,\ldots m-1$ es un subgrupo normal de al menos un subgrupo de orden p^{i+1}.

Teorema 1.2 (Sylow)

En un grupo finito G los Sp-grupos son conjugados.

Teorema 1.3 (sylow)

El número de p-subgrupos de Sylow de un grupo finito G es de la forma $1 + kp$ y es un divisor del orden de G.

Definición 1.1

<u>Si P y Q son Sp-grupos de G decimos que $P \cap Q$ es una intersección suave si: $N_P(P\cap Q)$ y $N_Q(P\cap Q)$ son Sp-grupos del $N_G(P\cap Q)$.</u>

Definición 1.2

Sea P un Sp-grupo de G si Q,R son Sp-grupos de G, decimos que R está relacionado con Q, respecto a P, si existen Q_i Sp-grupos de G, con $1 \leq i \leq n$ tales que:

a) $P \cap Q_i$ es una intersección suave para $1 \leq i \leq n$

b) existen p-elementos $x_i \in N_G(P \cap Q_i)$ para $1 \leq i \leq n$ tales que $R^x = Q$, $x = x_1 x_2 \ldots x_n$,

c) $P \cap R \subseteq P \cap Q_1$ y $(P \cap R)^{x_1 x_2 \ldots x_i} \subset P \cap Q_{i+1}$

Siempre que esto suceda escribimos $R \sim_p Q$

Capítulo II

Definición 2.1

Sean A, B p-subgrupos de G, x, y elementos de G; la triada (B,x,A) es una flecha (de G) si $A \subset B^x$, la tétrada (B,x,y,A) es una doble flecha (de G) si $A \subset B^x$ y $A \subset B^y$. Cuando esto suceda diremos que A es la fuente, B el blanco y $\left|\frac{B}{A}\right|$ la longitud de la flecha o de la doble flecha.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ al conjunto de flechas de G, por $\mathcal{D}$ al conjunto de dobles flechas de G donde el blanco (B) es un Sp-grupo de G y por $\mathcal{T}$ al conjunto de elementos (B,x,y,A) de $\mathcal{D}$ tales que yx^{-1} normaliza a B.

En la siguiente definición estableceremos algunas operaciones entre los elementos de los conjuntos de flechas y dobles flechas que denotaremos por P, S y L.

Definición 2.2

Si (B,x,A) y (C,y,B) son elementos de $\mathcal{F}$ se tiene

$$P: \quad (C,y,B)(B,x,A) = (C,yx,A)$$

Si (B,x,y,A) y (B,y,z,A) son elementos de $\mathcal{D}$ se tiene

$$S: \quad (B,x,y,A) + (B,y,z,A) = (B,x,z,A)$$

Si $(B,x,A),(D,u,C)$ son elementos de $\mathcal{F}$ y (C,y,z,B) es elemento de $\mathcal{D}$* se tiene

$$L: \quad (D,u,C)(C,y,z,B) = (D,uy,uz,B)$$

$$(C,y,z,B)(B,x,A) = (C,yx,zx,A)$$

Los segundos miembros de estas igualdades pertenecen respectivamente a $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$. Se puede verificar facilmente la asociatividad de P, de S, de P con L y la distributividad de L con respecto a S.

* Como C es Sp-grupo de G entonces D también lo es.

Definición 2.3

Sea (B,x,y,A) un elemento de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ un subconjunto de $\mathcal{D}$ se dice que (B,x,y,A) está generado por $\mathcal{E}$ si existe una sucesión $\{(B_i,x_i,y_i,A_i)\}$ $i=1,2,\ldots n$ de elementos de $\mathcal{E}$ y dos sucesiones $\{(A_i,u_i,A)\}$, $\{(B,v_i,B_i)\}$ con $i=1,2,\ldots n$ de elementos de $\mathcal{F}$ tales que

$$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$$

Se dirá que $\mathcal{E}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{D}$ si todo -- elemento de $\mathcal{D}$ está generado por el conjunto $\mathcal{E} \cup \mathcal{T}$.

Definición 2.4

Se dice que un elemento de $\mathcal{D}$ de longitud ℓ es reducible, si bien pertenece a $\mathcal{T}$ o es generado por elementos de $\mathcal{D}$ cuya -- longitud es estrictamente menor que ℓ.

Denotaremos por $\mathcal{R}$ al conjunto de elementos de $\mathcal{D}$ que son reducibles.

Lema 2.1

Sean (C,u,B), (A,v,D) dos elementos de $\mathcal{F}$ y sea (B,x,y,A) un elemento de $\mathcal{T}$ entonces $(C,u,B)(B,x,y,A)(A,v,D)$ está en $\mathcal{T}$

Demostración.

Como $B \subset C^u$ entonces $B=C^u$ y como $yx^{-1} \in N_G(B)$ entonces $B^x = B^y$, de donde $C^{(uyv)(uxv)^{-1}} = C^{(uyv)(v^{-1}x^{-1}u^{-1})} = C^{u(yx^{-1})u^{-1}}$

$= B^{(yx^{-1})u^{-1}} = B^{u^{-1}} = C$

$\therefore\ (uyv)(uxv)^{-1} \in N_G(C)$

$\therefore\ (C, uxv, uyv, D)$ está en $\mathcal{T}$.

Es fácil demostrar los siguientes resultados:

Lema 2.2

Si (B,x,y,A) y (B,y,z,A) pertenecen a $\mathcal{T}$ entonces $(B,x,y,A) + (B,y,z,A)$ pertenece a $\mathcal{T}$

Lema 2.3

Si $(B,x,y,A) \in \mathcal{T}$ y $(B,y,z,A) \in \mathcal{D} - \mathcal{T}$ entonces $(B,x,y,A) + (B,y,z,A) \in \mathcal{D} - \mathcal{T}$

Lema 2.4

Sea (B,x,y,A) un elemento de $\mathcal{D}$ tal que

$(B,x,y,A) = (B,x_1,y_1,A) + (B,v_2,B_2)(B_2,x_2,y_2,A_2)(A_2,u_2,A)$

donde (B,x_1,y_1,A) es un elemento de $\mathcal{T}$ y $\frac{|B_2|}{|A_2|} < \frac{|B|}{|A|}$ entonces (B,x,y,A) pertenece a $\mathcal{R}$

Demostración.

$$\begin{aligned}(B,x,y,A) &= (B,x_1,y_1,A) + (B,v_2,B_2)(B_2,x_2,y_2,A_2)(A_2,u_2,A)\\ &= (B,x_1,y_1,A) + (B,v_2x_2u_2,v_2y_2u_2,A)\\ &= (B,x_1,v_2y_2u_2,A)\end{aligned}$$

tenemos que $x = x_1$, $y = v_2 y_2 u_2$, $y_1 = v_2 x_2 u_2$, (*)

$$B^x = B^{x_1} = B^{y_1}$$

como $(B, v_2, B_2) \in F$ entonces $B_2 = B^{v_2}$ por lo que $B_2^{v_2^{-1}} = B$

de donde $(B, 1, B_2^{v_2^{-1}}) \in F$

De la doble flecha (B_2, x_2, y_2, A_2) tenemos que $A_2 \subset B_2^{x_2}$, $A_2 \subset B_2^{y_2}$

luego $A_2^{u_2} \subset B_2^{x_2 u_2}$ y $A_2^{u_2} \subset B_2^{y_2 u_2}$;

por lo que $A_2^{u_2} \subset B^{v_2^{-1} v_2 x_2 u_2}$ y $A_2^{u_2} \subset B_2^{v_2^{-1} v_2 y_2 u_2}$

y se tiene $(B_2^{v_2^{-1}}, v_2 x_2 u_2, v_2 y_2 u_2, A_2^{u_2}) \in \mathcal{D}$,

Además $\left|\dfrac{B_2^{v_2^{-1}}}{A_2^{u_2}}\right| = \left|\dfrac{B_2}{A_2}\right|$

De la flecha (A_2, u_2, A) tenemos que $A \subset A_2^{u_2}$ entonces $(A_2^{u_2}, 1, A)$ es una fl cha, con lo anterior tenemos que

$(B, v_2, B_2)(B_2, x_2, y_2, A_2)(A_2, u_2, A) =$

$(B, 1, B_2^{v_2^{-1}})(B_2^{v_2^{-1}}, v_2 x_2 u_2, v_2 y_2 u_2, A_2^{u_2})(A_2^{u_2}, 1, A)$

$= (B, 1, B)\ (B, y_1, y, A_3)\ (A_3, 1, A)$ donde $A_3 = A_2^{u_2}$ como $\left|\dfrac{B_2}{A_2}\right| < \left|\dfrac{B}{A}\right|$

y $|B| = |B_2|$ entonces $|A| < |A_3|$ de donde $\left|\dfrac{B}{A_3}\right| < \left|\dfrac{B}{A}\right|$ y como

$(B, x, y, A) = (B, xy_1^{-1}, B)(B, y_1, y_1 x^{-1} y, A_3)\ (A_3, 1, A)$

entonces $(B, x, y, A) \in \mathcal{R}$

(*) Los elementos (B,x,A) y (B',x',A') de F son iguales si $B = B'$, $x = x'$, y $A = A'$; los elementos (B,x,y,A) y (B',x',y',A') de $\mathcal{D}$ son iguales si $B = B'$, $x = x'$, $y = y'$ y $A = A'$; por lo que se tiene que si

$$(B,x,y,A) = (B,x_1,y_1,A) + (B,x_2,y_2,A)$$

entonces $x = x_1$, $y = y_2$ y $y_1 = x_2$

Análogamente se tiene:

Lema 2.5

Sea (B,x,y,A) un elemento de $\mathcal{D}$ tal que

$(B,x,y,A) = (B,v_1,B_1)(B_1,x_1,y_1,A_1)(A_1,u_1,A) + (B,x_2,y_2,A)$

donde (B,x_2,y_2,A) pertenece a $\mathcal{T}$ y $\left|\frac{B_1}{A_1}\right| < \left|\frac{B}{A}\right|$ entonces

$(B,x,y,A) \in \mathcal{R}$

Proposición 2.1

Todo elemento de $\mathcal{D}$ que sea generado por $\mathcal{R}$ está en $\mathcal{R}$. Si $(B,x,y,A) \in \mathcal{R}$ entonces $(B,y,x,A) \in \mathcal{R}$.

a) Sea $(B\ x,y,A)$ un elemento de $\mathcal{D}$ generado por $\mathcal{R}$ por demostrar que $(B,x,y,A) \in \mathcal{T}$ o es generado por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B}{A}\right|$

Por ser (B,x,y,A) generado por $\mathcal{R}$ tenemos que

$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,vi,Bi)(Bi,xi,yi,Ai)(Ai,ui,A)$ en donde

(Bi,xi,yi,Ai) pertenece a $\mathcal{R}$ para $i=1,2,\ldots n$.

La demostración la haremos por inducción sobre n :

i) Si n=1 tenemos

$(B,x,y,A) = (B,v_1,B_1)(B_1,x_1,y_1,A_1)(A_1,u_1,A)$ donde

(B_1,x_1,y_1,A_1) pertenece a $\mathcal{R}$, esto significa que

(B_1,x_1,y_1,A_1) está en $\mathcal{T}$ o es generado por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B_1}{A_1}\right|$

si $(B_1,x_1,y_1,A_1) \in \mathcal{T}$ entonces por el lema 2.1
$(B,v_1,B_1)(B_1,x_1,y_1,A_1)(A_1,u_1,A)$ pertenece a $\mathcal{T}$
$\therefore (B,x,y,A) \in \mathcal{R}$.

En el caso en que (B_1,x_1,y_1,A_1) sea generado por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B_1}{A_1}\right|$ tenemos

$$(B_1,x_1,y_1,A_1) = \sum_{j=1}^{r} (B_1,v_{1j},B_{1j})(B_{1j},x_{1j},y_{1j},A_{1j})(A_{1j},u_{1j},A_1)$$

donde $\left|\frac{B_{1j}}{A_{1j}}\right| < \left|\frac{B_1}{A_1}\right|$ para $j=1,\ldots,r$

$(B,x,y,A)=$
$$(B,v_1,B_1)\left[\sum_{j=1}^{r} (B_1,v_{1j},B_{1j})(B_{1j},x_{1j},y_{1j},A_{1j})(A_{1j},u_{1j},A_1)\right](A_1,u_1,A)$$

utilizando las propiedades distributiva y asociativa tenemos

$(B,x,y,A)=$
$$\sum_{j=1}^{r} (B,v_1,B_1)(B_1,v_{1j},B_{1j})(B_{1j},x_{1j},y_{1j},A_{1j})(A_{1j},u_{1j},A_1)(A_1,u_1,A)$$
$$=\sum_{j=1}^{r} (B,v_1v_{1j},B_{1j})(B_{1j},x_{1j},y_{1j},A_{1j})(A_{1j},u_{1j}\,u_1,A)$$

pero $\left|\frac{B}{A}\right| = \left|\frac{B}{B_1}\right| \cdot \left|\frac{B_1}{A_1}\right| \cdot \left|\frac{A_1}{A}\right|$ como B y B_1 son Sp-grupos de G

entonces $\left|\frac{B}{B_1}\right| = 1$ y como $\left|\frac{A_1}{A}\right| \geqslant 1$ se tiene que $\left|\frac{B}{A}\right| \geqslant \left|\frac{B_1}{A_1}\right| > \left|\frac{B_{1j}}{A_{1j}}\right|$

$\therefore (B,x,y,A) \in \mathcal{R}$

ii) Suponemos que la proposición es valida para n=k, esto es

si $(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{k}(B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$ con

(B_i,x_i,y_i,A_i) en R entonces (B,x,y,A) está en R .

iii) demostraremos que si n=k+1 entonces $(B,x,y,A) \in R$.

$$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n}(B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A) =$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}(B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A) +$$

$$(B,v_{k+1},B_{k+1})(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})(A_{k+1},u_{k+1},A)$$

donde $(B_i,x_i,y_i,A_i) \in R$ para $i=1,\ldots,k+1$, por hipótesis de inducción $(B,v_1x_1u_1,\ v_k\ y_k\ u_k,A) \in R$.

Además tenemos que $x=v_1x_1u_1$, $y = v_{k+1}\ y_{k+1}\ u_{k+1}$

$v_iy_iu_i= v_{i+1}x_{i+1}u_{i+1}$ para $i=1,\ldots k$ por lo tanto $v_ky_ku_k=v_{k+1}x_{k+1}u_{k+1}$

por pertenecer $(B,v_1x_1u_1,v_ky_ku_k,A)$ y $(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})$ a R puede suceder una de las siguientes posibilidades:

1) Que tanto $(B,v_1x_1u_1,v_ky_ku_k,A)$ y $(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})$ sean elementos de $\mathcal{T}$, en cuyo caso por los lemas 2.1 y 2.2 tenemos.

$$(B,v_1x_1u_1,v_ky_ku_k,A)+$$
$$(B,v_{k+1},B_{k+1})(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})(A_{k+1},u_{k+1},A)=$$
$$(B,v_1x_1u_1,v_{k+1}\ y_{k+1},u_{k+1},A)=(B,x,y,A)\ \varepsilon\ \mathcal{T}\ \therefore\ (B,x,y,A)\ \varepsilon\ \mathcal{R}.$$

2) que las dobles flechas $(B,v_1x_1u_1,v_ky_ku_k,A)$ y $(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})$ sean generadas por elementos de longitud menor, esto es $(B,v_1x_1u_1,v_ky_ku_k,A)$ es generada por elementos de longitud menor que $\frac{|B|}{|A|}$ y $(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})$ es generada por elementos de $\mathcal{D}$ de longitud menor que $\frac{|B_{k+1}|}{|A_{k+1}|}$, entonces

$$(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})=\sum_{\ell=1}^{s}(B_{k+1},v_{k+1\ell},B_{k+1\ell})$$
$$(B_{k+1\ell},x_{k+1\ell},y_{k+1\ell},A_{k+1\ell})(A_{k+1\ell},u_{k+1\ell},A_{k+1})$$ entonces

$$(B,v_{k+1},B_{k+1})(B_{k+1},x_{k+1},y_{k+1},A_{k+1})(A_{k+1},u_{k+1},A)=(B,v_{k+1},B_{k+1})$$
$$\left[\sum_{\ell=1}^{s}(B_{k+1},v_{k+1\ell},B_{k+1\ell})(B_{k+1\ell},x_{k+1\ell},y_{k+1\ell},A_{k+1\ell})(A_{k+1\ell},u_{k+1\ell},A_{k+1})\right]$$
$$(A_{k+1},u_{k+1},A)$$

$= \sum_{\ell=1}^{s} (B, v_{k+1}, B_{k+1}) (B_{k+1}, v_{k+1\ell} B_{k+1\ell}) (B_{k+1\ell}, x_{k+1\ell}, y_{k+1\ell}, A_{k+1\ell})$

$(A_{k+1\ell}, u_{k+1\ell}, A_{k+1}) (A_{k+1}, u_{k+1}, A) =$

$\sum_{\ell=1}^{s} (B, v_{k+1} v_{k+1\ell}, B_{k+1\ell}) (B_{k+1\ell}, x_{k+1\ell}, y_{k+1\ell}, A_{k+1\ell})$

$(A_{k+1\ell}, u_{k+1\ell} u_{k+1}, A)$

donde $\left|\frac{B_{k+1\ell}}{A_{k+1\ell}}\right| < \left|\frac{B_{k+1}}{A_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{B}{A}\right|$

entonces $(B, v_{k+1} x_{k+1} u_{k+1}, v_{k+1} y_{k+1} u_{k+1}, A)$ es generada por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B}{A}\right|$

$\therefore (B,x,y,A) = (B, v_1 x_1 u_1, v_k y_k u_k, A) + (B, v_{k+1} x_{k+1} u_{k+1}, v_{k+1} y_{k+1} u_{k+1}, A)$ es generada por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B}{A}\right|$

por lo tanto (B,x,y,A) pertenece a R.

3) Si $(B, v_1 x_1 u_1, v_k y_k u_k, A)$ pertenece a T y $(B_{k+1}, x_{k+1}, y_{k+1}, A_{k+1})$ está generada por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B_{k+1}}{A_{k+1}}\right|$ entonces por el lema 2.4 (B,x,y,A) pertenece a R.

4) por último si $(B_{k+1}, x_{k+1}, y_{k+1}, A_{k+1})$ pertenece a T y $(B, v_1 x_1 u_1, v_k y_k u_k, A)$ está generada por elementos de longitud menor entonces por los lemas 2.1 y 2.5 (B,x,y,A) pertenece a R.

b) para demostrar la segunda parte de la proposición considérese $(B,x,y,A) \in R$ entonces se cumple que $(B,x,y,A) \in T$ o (B,x,y,A) es generado por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B}{A}\right|$.

Si (B,x,y,A) pertenece a T entonces $yx^{-1} \in N_G(B)$ entonces $(yx^{-1})^{-1} \in N_G(B)$ pero $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1}$ esto significa que (B,y,x,A) pertenece a T

$\therefore (B,y,x,A) \in R$.

Si $(B,x,y,A)=\sum_{i=1}^{n}(B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$ donde $\left|\frac{B_i}{A_i}\right| < \left|\frac{B}{A}\right|$ para $i=1,\ldots n$, entonces tenemos

$x=v_1x_1u_1$, $y=v_ny_nu_n$, $v_iy_iu_i=v_{i+1}x_{i+1}u_{i+1}$ entonces $(B,y,x,A) =$

$\sum_{i=0}^{n-1}(B,v_{n-i},B_{n-i})(B_{n-i},y_{n-i},x_{n-i},A_{n-i})(A_{n-i},u_{n-i},A)$ y como

$\left|\frac{B_{n-i}}{A_{n-i}}\right| < \left|\frac{B}{A}\right|$ se tiene que $(B,y,x,A) \in R$.

Definición 2.5

Se dice que un elemento de D es irreducible si no pertenece a R

Definición 2.6

Sean (B,x,y,A) y (B',x',y',A') dos elementos de D irreducibles, (B,x,y,A) es intercambiable por (B',x',y',A') si existen dos flechas (A',u,A) y (B,v,B') tales que las dobles flechas $(B,x,vx'u,A)$ y $(B,vy'u,y,A)$ sean reducibles.

Demostraresmos a partir de la proposición 2.1 que esta relación es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{D}-\mathcal{R}$.

Si (B,x,y,A) y (B',x',y',A') son intercambiables lo denotaremos como $(B,x,y,A) \sim (B',x',y',A')$; en este caso existen las flechas (A',u,A) y (B,v,B') tales que las dobles flechas $(B,x,vx'u,A)$ y $(B,vy'u,y,A)$ - estan en $\mathcal{R}$, por lo que se tiene la siguiente igualdad:

$(B,x,y,A) = (B,x,vx'u,A) + (B,v,B')(B',x',y',A')(A',u,A) + (B,vy'u,y,A)$

y de aqui es fácil observar que $A = A'^{u}$ por lo que A y A' son conjugados en G.

Con éstas observaciones procedamos a demostrar que la relación ser intercambiable es una relación de equivalencia:

a) Si (B,x,y,A) es un elemento irreducible de $\mathcal{D}$, se tiene que $(A,1,A)$, $(B,1,B)$ ε $\mathcal{F}$ y (B,x,x,A), (B,y,y,A) estan en $\mathcal{T}$, por lo tanto son reducibles y entonces la relación es reflexiva.

b) Si $(B,x,y,A) \sim (B',x',y',A')$, existen (A',u,A) y (B,v,B') tales que $(B,x,vx'u,A)$ y $(B,vy'u,y,A)$ estan en R, tenemos que $A = A'^{u}$, $B' = B^{v}$ entonces (A,u^{-1},A') y (B',v^{-1},B) estan en $\mathcal{F}$. Para demostrar que $(B',x',v^{-1}xu^{-1},A')$ ε $\mathcal{R}$ observemos que como $(B,x,vx'u,A)$ ε $\mathcal{R}$ entonces

$(B',v^{-1},B)(B,x,vx'u,A)(A,u^{-1},A') = (B',v^{-1}xu^{-1},x',A)$ ε $\mathcal{R}$.

Análogamente $(B',v^{-1}yu^{-1},y',A') \ \varepsilon \ \mathcal{R}$. Por lo que la relación es simétrica.

finalmente,

c) Supongamos que $(B,x,y,A) \sim (B',x',y',A')$ y que
   $(B',x',y',A') \sim (B'',x'',y'',A'')$ -

entonces existen (A',u,A) y (B,v,B') elementos de $\mathcal{F}$ tales que $(B,x,vx'u,A)$ y $(B,vy'u,y\ A)$ pertenecen a $\mathcal{R}$ y existen (A'',u',A') y (B',v',B'') elementos de $\mathcal{F}$ tales que $(B',x',v'x''u',A')$ y $(B',v'y''u',y',A')$ pertenecen a $\mathcal{R}$ debemos encontrar (A'',u'',A) y (B,v'',B'') elementos de $\mathcal{F}$ tales que $(B,x,v''x''u'',A)$ y $(B,v''y''u'',y,A)$ esten en $\mathcal{R}$

Consideremos

$(A'',u',A')(A',u,A)=(A'',u'u,A)$, $(B,v,B')(B',v',B'')=(B,vv',B'')$

probaremos que $(B,x,vv'x''u'u,A)$ y $(B,vv'y''u'u,y,A)$ estan en $\mathcal{R}$

Como $(B,x,vx'u,A)$ y $(B',x',v'x''u',A')$ estan en $\mathcal{R}$ entonces

$(B,x,vv'x''u'u,A)=(B,x,vx'u,A)+(B,v,B')(B',x',v'x''u',A')(A',u',A)$

pertenece a $\mathcal{R}$ de igual forma tenemos que $(B,vv'y''u'u,y,A) \ \varepsilon \ \mathcal{R}$

Por lo tanto la relación ser intercambiable es una relación de equivalencia.

Lema 2.6

Sea $\mathcal{G}$ un conjunto de generadores de $\mathcal{D}$, si (B,x,y,A) pertenece a $\mathcal{D}$ entonces se puede expresar como

$\sum_{i=1}^{n}(B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$ donde (B_i,x_i,y_i,A_i) está en $\mathcal{T}$ o (B_i,x_i,y_i,A_i) ε $\mathcal{G}$ y es irreducible.

Demostración.-

Sea (B,x,y,A) ε $\mathcal{D}$ entonces

$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$ con (B_i,x_i,y_i,A_i) ε $\mathcal{G} \cup \mathcal{T}$ De esta sumatoria las dobles flechas (B_i,x_i,y_i,A_i) que pertenecen a $\mathcal{T}$ o que son irreducibles, satisfacen la condición pedida en el lema, por lo que sólo hay que considerar aquellas que pertenecen a $\mathcal{R}-\mathcal{T}$

Sup. (B_i,x_i,y_i,A_i) ε $\mathcal{R}-\mathcal{T}$ entonces (B_i,x_i,y_i,A_i) es generado por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B_i}{A_i}\right|$, es decir, se tiene

$(B_i,x_i,y_i,A_i) = \sum_{j=1}^{r}(B_i,v_{ij},B_{ij})(B_{ij},x_{ij},y_{ij},A_{ij})(A_{ij},u_{ij},A_i)$

donde $\left|\frac{B_{ij}}{A_{ij}}\right| < \left|\frac{B_i}{A_i}\right|$ para $j=1,,,r$.

como $\left|\frac{B_i}{A_i}\right| \leq \left|\frac{B}{A}\right|$ se tiene que $\left|\frac{B_{ij}}{A_{ij}}\right| < \left|\frac{B_i}{A_i}\right| \leq \left|\frac{B}{A}\right|$ para $j=1,\ldots,r$ como $(B_{ij},x_{ij},y_{ij},A_{ij})$ pertenece a $\mathcal{D}$ para $j=1,\ldots,r$

entonces cada una se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^{s_j}(B_{ij},v_{ijk},B_{ijk})(B_{ijk},x_{ijk},y_{ijk},A_{ijk})(A_{ijk},u_{ijk},A_{ij})$$ con

$$(B_{ijk},x_{ijk},y_{ijk},A_{ijk}) \in \mathcal{E} \cup T$$

y se tiene

$$(B_i,x_i,y_i,A_i) = \sum_{j=1}^{r} (B_i,v_{ij},B_{ij})$$
$$\left[\sum_{k=1}^{s_j}(B_{ij},v_{ijk},B_{ijk})(B_{ijk},x_{ijk},y_{ijk},A_{ijk})(A_{ijk},u_{ijk},A_{ij})\right](A_{ij},u_{ij},A_i)$$

esta expresión se puede substituir en la expresión original y de ella las dobles flechas que pertenecen a T o que son irreducibles satisfacen la condición pedida, se puede aplicar el mismo proceso a los que pertenecen a $R-T$, y como la longitud va disminuyendo este proceso se puede aplicar sólo un número finito de pasos, es decir, en alguna etapa se debe tener que todas las dobles flechas que aparecen pertenecen a T o son irreducibles.

Definición 2.7

Un p-subgrupo A de G es esencial en G si es la fuente de un elemento irreducible de $\mathcal{D}$.

Teorema 2.1

Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ dos subconjuntos de $\mathcal{D}$, si $\mathcal{E}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{D}$ y si todo elemento irreducible de $\mathcal{E}$ es intercambiable con al menos un elemento irreducible de $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$ es igualmente un sistema de generadores de $\mathcal{D}$.

Demostración

Sea (B,x,y,A) un elemento de $\mathcal{D}$ entonces por el lema 2.6, se puede expresar como

$(B,x,y,A)=\sum_{i=1}^{n}(B,vi,Bi)(Bi,xi,yi,Ai)(Ai,ui,A)$ ...(1) donde (B_i,x_i,y_i,A_i) ε $\mathcal{T}$ o pertenece a $\mathcal{E}$ y es irreducible. Si (B_i,x_i,y_i,A_i) está en $\mathcal{T}$ entonces (B_i,x_i,y_i,A_i) ε $\mathcal{E}'U\mathcal{T}$ si (B_i,x_i,y_i,A_i) es irreducible y pertenece a $\mathcal{E}$, entonces existe (B'_i,x'_i,y'_i,A'_i) ε $\mathcal{E}'$ que es intercambiable con (B_i,x_i,y_i,A_i),

esto significa que existen (A'_i,u_i,A_i) y (B_i,v_i,B'_i) elementos de F tales que $(B_i,x_i,v_i\,x'_i\,u_i,A_i)$ y $(B_i,v_i\,y'_i\,u_i,\,y_i,A_i)$ son reducibles.

Por lo que tenemos

$(Bi,xi,yi,Ai)=(Bi,xi,vi\,xi'\,ui,Ai)+(Bi,vi,Bi')(Bi',xi',yi',Ai')(Ai',ui,Ai)$
$+\,(Bi,vi\,yi'\,ui,yi,Ai)$ y esta expresión se puede substituir en la expresión (1)

como $(B_i', x_i', y_i', A_i') \in \mathcal{E}'$ entonces satisface la condición que se -- busca y lo que hay que considerar son las dobles flechas $(B_i, x_i, v_i\, x_i'\, u_i, A_i)$ y $(B_i, v_i\, y_i'\, u_i, y_i, A_i)$ que sabemos pertenecen a $\mathcal{R}$, trabajaremos con $(B_i, x_i, v_i\, x_i'\, u_i, A_i)$, ya que el otro caso es análogo.

Si $(B_i, x_i, v_i\, x_i'\, u_i, A_i) \in \mathcal{T}$ entonces satisface la condición pedida, por lo que supondremos que $(B_i, x_i, v_i\, x_i'\, u_i, A_i)$ $\in \mathcal{R} - \mathcal{T}$.

luego

$$(B_i, x_i, v_i\, x_i'\, u_i, A_i) = \sum_{j=1}^{r} (B_i, v_{ij}, B_{ij})(B_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, A_{ij})(A_{ij}, u_{ij}, A_i)$$

donde $\dfrac{|B_{ij}|}{|A_{ij}|} < \dfrac{|B_i|}{|A_i|}$ por el lema anterior cada $(B_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, A_{ij})$ se puede expresar como

$$\sum_{k=1}^{s_j} (B_{ij}, v_{ijk}, B_{ijk})(B_{ijk}, x_{ijk}, y_{ijk}, A_{ijk})(A_{ijk}, u_{ijk}, A_{ij})$$

donde $(B_{ijk}, x_{ijk}, y_{ijk}, A_{ijk}) \in \mathcal{T}$ o pertenece a $\mathcal{E}$ y es irreducible y se vuelve a aplicar el mismo razonamiento, este proceso debe terminar puesto que las longitudes van disminuyendo, es decir se debe llegar a una expresión donde las dobles flechas que aparecen pertenezcan a $\mathcal{E}' \cup \mathcal{T}$.

Corolario 2.1

Todo sistema minimal $\mathcal{E}$ de generadores de $\mathcal{D}$ cumple con las siguientes propiedades:

i) Todo elemento de $\mathcal{E}$ es irreducible

ii) Los elementos de $\mathcal{E}$ son dos a dos no intercambiables

iii) Todo p-subgrupo esencial de G admite un conjugado en G que es la fuente de un elemento de $\mathcal{E}$

Demostraremos primero i):

Por el lema 2.6 todo elemento de $\mathcal{D}$ está generado por elementos de $\mathcal{T}$ y elementos de $\mathcal{E}$ que son irreducibles entonces si $\mathcal{E}' = \{(B,x,y,A) \in \mathcal{E} \mid (B,x,y,A) \text{ es irreducible}\}$ entonces $\mathcal{E}'$ genera a $\mathcal{D}$, como $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ es minimal entonces $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$.

Para demostrar ii)

Supongamos que (B_1,x_1,y_1,A_1) y $(B_2,x_2,y_2,A_2) \in \mathcal{E}$ y son intercambiables, para demostrar que $\mathcal{E} - \{(B_1,x_1,y_1,A_1)\}$ genera a $\mathcal{D}$ basta demostrar que (B_1,x_1,y_1,A_1) está generado por elementos de $[\mathcal{E} - \{(B_1,x_1,y_1,A_1)\}] \cup \mathcal{T}$.

Se tiene

$(B_1,x_1,y_1,A_1)=(B_1,x_1,vx_2u,A_1)+(B_1,v,B_2)(B_2,x_2,y_2,A_2)(A_2,u,A)+(B_1,vy_2u,y_1,A_1)$ donde

(B_1,x_1,vx_2u,A_1) y (B_1,vy_2u,y_1,A_1) son reducibles.

Si $(B_1,x_1,vx_2u,A_1) \in \mathcal{T}$ no hay nada que hacer, en caso contrario, (B_1,x_1,vx_2u,A_1) está generado por elementos de longitud menor que $\left|\frac{B_1}{A_1}\right|$ entonces

$$(B_1,x_1,vx_2u,A_1)=\sum_{i=1}^{n}(B_1,v_i,B_{1i})(B_{1i},x_{1i},y_{1i},A_{1i})(A_{1i},u_i,A_1)$$

donde $\frac{|B_1 i|}{|A_1 i|} < \frac{|B_1|}{|A_1|}$ para $i=1,2,\ldots n$

cada $(B_1 i, x_{1i}, y_{1i}, A_{1i}) \in \mathcal{D}$ y por hipótesis se pueden expresar como

$$\sum_{j=1}^{ri} (B_1 i, vij, B_1 ij)(B_1 ij, x_1 ij, y_1 ij, A_1 ij)(A_1 ij, u_1 ij, A_1 i)$$

con $(B_{1ij}, x_{1ij}, y_{1ij}, A_{1ij}) \in \mathcal{E}\,UT$ por lo que

$$(B_1, x_1, vx_2u, A_1) = \sum_{i=1}^{n}(B_1, vi, Bi)\Big[\sum_{j=1}^{ri} (B_1 i, vij, B_1 ij)$$

$$(B_1 ij, x_1 ij, y_1 ij, A_1 ij)(A_1 ij, uij, A_1 i)\Big] (A_1 i, ui, A_1)$$

donde $(B_1 ij, x_1 ij, y_1 ij, A_1 ij) \in \mathcal{E}\,UT$ como

$\frac{|B_1 ij|}{|A_1 ij|} \leq \frac{|B_1 i|}{|A_1 i|} < \frac{|B_1|}{|A_1|}$ entonces

$(B_1, x_1, vx_2u, A) \nmid (B_1 ij, x_1 ij, y_1 ij, A_1 ij)$ para toda

$i=1,\ldots n$ y toda $j=1,\ldots, ri$

Por lo tanto $\mathcal{E} - \{(B_1, x_1, y_1, A)\}$ genera a $\mathcal{D}$ por lo que si $\mathcal{E}$ es minimal entoces satisface **ii)**.

Por último para probar *iii)* supongamos que A es un p-subgrupo esencial de G, entonces A es la fuente de un elemento irreducible de $\mathcal{D}$, sea (B,x,y,A) dicho elemento, entonces como $\mathcal{E}$ es un sistema de generadores

$(B, x, y, A) = \sum_{i=1}^{n} (B, vi, Bi)(Bi, xi, yi, Ai)(Ai, ui, A)$ donde $(Bi, xi, yi, Ai) \in \mathcal{E}\,UT$, como (B,x,y,A) es irreducible se debe tener para alguna i que (Bi, xi, yi, Ai) es irreducible y que $\frac{|Bi|}{|Ai|} = \frac{|B|}{|A|}$ por lo que $|A| = |Ai|$ es decir, A y Ai son conjugados y Ai es la fuente de un elemento de $\mathcal{E}$.

Proposición 2.2.-

Sea (B,x,y,A) un elemento de $\mathcal{D}-\mathcal{R}$ y C un Sp-grupo de G que contiene un Sp-grupo del $N_G(A)$.

Entonces existe un elemento z de $N_G(A)$ tal que la doble flecha $(C,1,z,A)$ es irreducible e intercambiable con (B,x,y,A).

Demostración.-

Supongamos que $(B,x,y,A) \in \mathcal{D} - \mathcal{R}$ entonces $A \subset B^x$ y $A \subset B^y$ además $B^x \neq B^y$,

Sea v un elemento de G tal que $C = B^v$, entonces (B,v,C) está en $\mathcal{F}$, como C contiene Sp-grupo del $\underline{N_G(A)}$ y $N_{B^x}(A)$ es un subgrupo del $N_G(A)$ entonces existe un elemento de u del $N_G(A)$ tal que

$N_B x(A) \subset [N_C(A)]^u = N_C{}^u(A) = N_B vu(A) \subset B^{vu}$

entonces $(B,x,vu, N_B x(A))$ está en $\mathcal{D}$,

Además como $A \subset N_B x(A)$ tenemos que $(N_B x(A),1,A) \in \mathcal{F}$

entonces $(B,x,v u,N_B x(A)) \, (N_B x(A),1, A) = (B,x,vu,A) \in \mathcal{D}$

como $A \subsetneq B^x$ entonces $A \subsetneq N_B x(A)$ entonces $|A| < |N_B x(A)|$

$$\therefore \quad \frac{|B|}{|N_B x(A)|} < \frac{|B|}{|A|}$$

$\therefore$ (B,x,vu,A) está en $\mathcal{R}$.

de igual forma, como $N_B y$ (A) es un p-subgrupo del $N_G(A)$ entonces existe $z' \in N_G(A)$ tal que

$N_B y(A) \subset [N_C(A)]^{z'} = N_C z'(A) = N_B vz'(A) \subset B^{vz'}$

sea $z = z'u^{-1}$ como z' y u^{-1} están en $N_G(A)$ entonces

$z \in N_G(A)$ y $N_B y(A) \subset B^{vz'} = B^{vzu}$

$\therefore$ $(B,vzu,y,N_B y(A)) \in \mathcal{D}$ como $(N_B y(A),1,A) \in \mathcal{F}$ entonces $(B,vzu,y,A) \in \mathcal{D}$;

como $A \subsetneq B^y$ entonces $A \subsetneq N_B y(A)$ por lo que $|A| < |N_B y(A)|$ por lo tanto $(B,vzu,y,A) \in \mathcal{R}$.

ahora $(B,x,y,A)=(B,x,vu,A)+(B,v,C)(C,1,z,A)(A,u,A)+(B,vzu,y,A)$

$\therefore (C,1,z,A)$ es irreducible e intercambiable con (B,x,y,A).

Teorema 2.2

Sea A un p-subgrupo de G, B un Sp-grupo de G que contiene un Sp-grupo del $N_G(A)$ y M el conjunto de elementos z del $N_G(A)$ tales que la doble flecha $(B,1,z,A)$ sea reducible se tiene entonces:

a) M es un subgrupo del $N_G(A)$ y si $A \subsetneq B$ entonces M es el más pequeño subgrupo del $N_G(A)$ que satisface los siguientes condiciones:

(1) $M \supset N_B(A)$

(2) para todo elemento x de $N_G(A)-M$, A es un Sp-grupo de $M \cap M^x$

b) Si z, z' son dos elementos de $N_G(A)-M$

$(B,1,z,A)$ y $(B,1,z',A)$ son intercambiables si y sólo si

$M\,z\,M = M\,z'\,M$

Demostración:

a) M no es vacio ya que $1 \in N_G(A)$ y $(B,1,1,A) \in T$, por lo - - tanto $1 \in M$, sean z,z' elementos de M entonces $(B,1,z,A)$ y $(B,1,z',A)$ estan en R por lo tanto $(B,1,z',A)+(B,1,z,A)(A,z',A)=(B,1,z\,z',A)$ esta en R, por lo que $zz' \in M$.

1) Sea $b \in N_B(A)$ como $B^b = B$ ya que $b \in B$ tenemos que $(B,1,b,A) \in R$

$\therefore N_B(A) \subset M$.

2) Sea $x \in N_G(A)-M$ como $A \subset N_B(A) \subset M$ entonces $A \subset M$, luego $A^x \subset M^x$, pero $A^x = A$ por lo que $A \subset M \cap M^x$

Supongamos que N es un Sp-grupo de $M \cap M^x$ entonces $N \subset M$ por lo que existe $g_1 \in M$ tal que $N^{g_1} \subset N_B(A)$, además $N^{x-1} \subset M$ entonces $N^{x-1 g_2} \subset N_B(A)$ con $g_2 \in M$

$\therefore (B,1,g_1^{-1},A)+(B,g_1^{-1},g_2^{-1}x,N)(N,1,A)+(B,g_2^{-1},1,A)(A,x,A)$

$= (B,1,x,A)$ y $(B,1,g_1^{-1},A),(B,g_2^{-1},1,A) \in R$, lo que implica que $(B,g_1^{-1},g_2^{-1}x,N)$ es irreducible y

$\frac{|B|}{|N|} = \frac{|B|}{|A|}$ entonces $|A| = |N|$

Por lo tanto A es un Sp-grupo de $M \cap M^x$

Para demostrar que M es el más pequeño que cumple con (1) y (2) suponemos que existe M' tal que.

(1) $M' \supset N_B(A)$

(2) Para todo elemento $x \in N_G(A)-M'$, A es un Sp-grupo $M' \cap M'^x$

Sea $x \in M$ entonces $(B,1,x,A) \in R$.

Si $(B,1,x,A) \in T$, $B=B^x$

$A \not\subseteq B \Rightarrow A \not\subseteq N_B(A) \subset M'$

$A \not\subseteq B^x \Rightarrow A \not\subseteq N_{B^x}(A) \subset M'^x$

$\therefore$ A no es Sp-grupo de $M' \cap M'^x$

$\therefore x \in M'$

Si $(B,1,x,A) \in R-T$ entonces

$$(B,1,x,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i',y_i',A_i')(A_i',u_i,A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (B,v_i x_i' u_i, v_i y_i' u_i, A_i'^{u_i})(A_i'^{u_i},1\ ,A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (B,x_{i-1},x_i,A_i)(A_i,1,A) \qquad (1)$$

donde $|A_i| > |A|$ para $i=1,\ldots,n$, $x_0=1$, $x_n = x$

Probaremos que

$$(B,1,x,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,\ x''_{i-1}\ ,\ x''_i\ ,\ N_{A_i}(A))(N_{A_i}(A),1,A)$$

donde $x''_0 = 1$, $x''_n = x$ $x''_i \in M'$ para $i=1,\ldots n$

Demostración por inducción sobre i

Para i=1 tenemos

$(B,1,x_1,A_1)(A_1,1,A)$ entonces

$A_1 \subset B \Rightarrow N_{A_1}(A) \subset N_B(A)$

$A_1 \subset B^{x_1} \Rightarrow N_{A_1}(A) \subset N_{B^{x_1}}(A)$

como $N_B(A)$ es un Sp-grupo del $N_G(A)$ entonces existe

$x_1'' \in N_G(A)$ tal que

$N_{B^{x_1}}(A) \subset [N_B(A)]^{x_1''} = N_{B^{x_1''}}(A)$ entonces

$N_B(A) \cap [N_B(A)]^{x_1''} \supset N_{A_1}(A)$ y como

$M' \cap M'^{x_1''} \supset N_B(A) \cap [N_B(A)]^{x_1''}$ entonces A no es

Sp-grupo de $M' \cap M'^{x_1''}$

$\therefore x_1'' \in M'$

Además $(B,1,x_1'', N_{A_1}(A))(N_{A_1}(A),1,A) \in \mathcal{D}$

Supongamos que se han encontrado $x_1'',\ldots,x_j'' \in M'$

con $1 \leq j < n$ tales que $(B,x_{i-1}'', x_i'', N_{A_i}(A)) \in \mathcal{D}$ para

$i=1,\ldots j$, de la doble flecha $(B,x_j,x_{j+1},A_{j+1})(A_{j+1},1,A)$

tenemos que $A \subsetneq A_{j+1}$ además

$A_{j+1} \subset B^{x_j} \Rightarrow N_{A_{j+1}}(A) \subset N_{B^{x_j}}(A) \subset [N_B(A)]^{x_j''} \subset M'$

$A_{j+1} \subset B^{x_{j+1}} \Rightarrow N_{A_{j+1}}(A) \subset N_{B^{x_{j+1}}}(A)$

Como $N_B(A)$ es un Sp-grupo del $N_G(A)$ existe $x_{j+1}'' \in N_G(A)$

tal que $N_{B^{x_{j+1}}}(A) \subset [N_B(A)]^{x_{j+1}''} \subset M'^{x_{j+1}''}$ por lo que

A no es Sp-grupo de $M' \cap M'^{x_{j+1}''}$

$\therefore x_{j+1}'' \in M'$ y $(B,x_j'', x_{j+1}'', N_{A_{j+1}}(A)) \in \mathcal{D}$

finalmente mostraremos que $(B, x''_{n-1}, x, N_{A_n}(A)) \in \mathcal{D}$;

de la expresión (1) tenemos que

$(B, x_{n-1}, x_n, A_n)(A_n, 1, A) = (B, x_{n-1}, x, A_n)(A_n, 1, A)$ por lo que

$A_n \subset B^{x_{n-1}} \Rightarrow N_{A_n}(A) \subset N_{B^{x_{n-1}}}(A) \subset [N_B(A)]^{x''_{n-1}} \subset M'$

$A_n \subset B^x \Rightarrow N_{A_n}(A) \subset N_{B^x}(A) = [N_B(A)]^x \subset M'^x$

Por lo que A no es Sp-grupo de $M' \cap M'^x$

$\therefore$ $x \in M'$, además $(B, x''_{n-1}, x, N_{A_n}(A)) \in \mathcal{D}$ de donde

$(B,1,x,A) = \sum_{i=1}^{n} (B, x''_{i-1}, x''_i, N_{A_i}(A))(N_{A_i}(A), 1, A)$

lo que nos lleva a que $M \subset M'$

Para probar la parte (b) supongamos que

$(B,1,z,A)$ es intercambiable con $(B,1,z',A)$ con

$z, z' \in N_G(A)$ entonces

$(B,1,z,A) = (B,1,vu,A) + (B,v,B)(B,1,z',A)(A,u,A) + (B,vz'u,z,A)$

donde $(B,1,vu,A), (B,vz'u,z,A) \in \mathcal{R}$

$(B,1,vu,A) + (B,vu,u,A) = (B,1,u,A)$

como $(B,vu,u,A) \in \mathcal{T}$ entonces $(B,1,u,A) \in \mathcal{R}$

por lo que $u \in M$, además

$[(B,z,vz'u,A) + (B,vz'u,z'u,A)]\ (A,z^{-1},A) =$

$(B,z,z'u,A)(A,z^{-1},A) = (B,1,z'uz^{-1},A) \in \mathcal{R}$

$\therefore$ $z'u\,z^{-1} = m$ con $m \in M$ y se tiene

$z' = mzu^{-1}$ con m, $u^{-1} \in M$

$\therefore MzʼM = MzM$

Supongamos ahora $z = m_1 z' m_2$ con m_1, $m_2 \in M$ entonces

$(B,1,z,A) = (B,1,m_2,A) + (B,1,z',A)(A,m_2,A) + (B,z'm_2,z,A)$

Como $m_2 \in M$ entonces $(B,1,m_2, A) \in R$ y además $(B,z'm_2,z,A) = (B,1,m_1,A)\ (A,z'm_2,A)$, como $m_1 \in M$ entonces $(B,1,m_1,A) \in R$ luego $(B,z'm_2,z,A)$ es reducible, por lo que
$(B,1,z,A)$ es irreducible si y sólo si $(B,1,z',A)$ lo es y en este caso son intercambiables.

Corolario 2.2

Un elemento (B,x,y,A) de $\mathcal{D}$ es irreducible si y sólo si existe un subgrupo M del $N_G(A)$ que satisface las siguientes condiciones :

1° M contiene $B^x \cap N_G(A)$ y no contiene $B^y \cap N_G(A)$.

2° para todo elemento z de $N_G(A) - M$, A es un Sp-grupo de $M \cap M^z$.

Demostración.-

Como $N_{B^x}(A)$ es un p-subgrupo del $N_G(A)$ existe D Sp-grupo del $N_G(A)$ tal que $D \supset N_{B^x}(A)$ y existe C Sp-grupo de G tal que $C \supset D$.

Sea $M = \{z' \in N_G(A) \mid (C,1,z',A) \in R\}$

Por el terorema 2.2 se tiene que $M \supset N_C(A) = D \supset N_{B^x}(A) = B^x \cap N_G(A)$ y que para toda $z \in N_G(A) - M$ A es Sp-grupo de $M \cap M^z$.

ahora, si $M \supset N_{B^y}(A)$ como $D = N_C(A)$ es un Sp-grupo del $N_G(A)$ y $N_C(A) \subset M$ existe $z' \in M$ tal que $N_{C^{z'}}(A) \supset N_{B^y}(A)$

Por lo que $(C,1,z',A) \in \mathcal{R}$

Sea $v \in G$ tal que $B^v = C$ entonces

$$N_B x(A) \subset B^x$$

$$N_B x(A) \subset N_C(A) \subset C = B^v$$

$\therefore (B,x,v,N_B x(A)) \in \mathcal{D}$

$(B,x,v,A) = (B,x,v,N_B x(A))(N_B x(A),1,A)$ y como $A \subsetneq B^x$ se tiene que $A \subsetneq N_B x(A)$ por lo que $|N_B x(A)| > |A|$ y entonces $(B,x,v,A) \in \mathcal{R}$, también $(B,vz',y,A) \in \mathcal{R}$ ya que $N_B y(A) \subset N_C z(A) \subset C^{z'} = B^{vz'}$, $N_B y(A) \subset B^y$ y $A \subsetneq N_B y(A)$ y tenemos que $(B,vz',y,N_B y(A))(N_B y(A),1,A) = (B,vz',y,A)$.

Como $(B,x,y,A) = (B,x,v,A) + (B,v,C)(C,1,z',A) + (B,vz',y,A)$ tenemos que $(B,x,y,A) \in \mathcal{R}$ $\natural$ por lo que M no contiene a $N_B y(A)$.

Para probar la otra implicación observemos que si $(B,x,y,A) \in \mathcal{T}$ entonces $N_B x(A) = N_B y(A)$ por lo que no existiría tal M, se tiene entonces $A \not\subseteq B^x$ y que $(B,x,y,A) \notin \mathcal{T}$

Sea D un Sp-grupo de M Tal que $D \supset N_B x(A)$

Si D no es Sp-grupo del $N_G(A)$ entonces existe D' Sp-grupo del $N_G(A)$ tal que $D \subsetneq D'$ como D es p-subgrupo del p-grupo D' entonces $N_{D'}(D) \supsetneq D$, de donde existe $u \in D' - D$ tal que $D^u = D$ entonces $A \subsetneq N_B x(A) \subset D = D \cap D^u \subset M \cap M^u$ y $u \notin M$ $\natural$

$\therefore$ D es Sp-grupo del $N_G(A)$

Sea C un Sp-grupo de G tal que $N_C(A) = D$

y $\bar{M} = \{z \in N_G(A) \mid (C,1,z,A) \in R\}$ entonces $\bar{M}$ es el mínimo subgrupo del $N_G(A)$ tal que $\bar{M} \supset N_G(A)$ y si $u \in N_G(A) - \bar{M}$ entonces A es un Sp-grupo de $\bar{M} \cap \bar{M}^u$, como $M \supset D = N_C(A)$, si $u \in N_G(A) - M$ entonces A es un Sp-grupo de $M \cap M^u$,

$\therefore \bar{M} \subset M$

Además existe $z_1 \in N_G(A)$ y $v \in G$ tal que

$(B,x,y,A) = (B,x,v,N_B{}^x(A))(N_B{}^x(A),1,A) + (B,v,C)(C,1,z_1,A) + (B,vz_1,y,N_B{}^y(A))(N_B{}^y(A),1,A)$

Por lo que $(B,x,y,A) \in R$ si y sólo si $(C,1,z_1,A) \in R$ lo que ocurre si y sólo si $z_1 \in \bar{M}$,

entonces si $(B,x,y,A) \in R$, $N_B{}^y(A) \subset B^{vz_1} \subset C^{z_1}$

$\therefore N_B{}^y(A) \subset C^{z_1} \cap N_G(A) = N_{C^{z_1}}(A) = [N_C(A)]^{z_1} \subset \bar{M} \subset M$ y

$\therefore (B,x,y,A)$ es irreducible.

Corolario 2.3

Un p-subgrupo A de G es esencial en G si y sólo si el cociente $H = \frac{N_G(A)}{A}$ admite un subgrupo propio N cuyo orden es divisible por p y tal que para todo elemento x de $H-N$ la intersección $N \cap N^x$ es un p'-grupo.

Demostración

$\Rightarrow$ Sup. A es esencial entonces por la proposición 2.2 existe $(C,1,z_1,A) \in \mathcal{D}\text{-}\mathcal{R}$ con $z_1 \in N_G(A)$ dónde $N_C(A)$ es un Sp-grupo del $N_G(A)$, por el teorema 2.2

$M = \{z \in N_G(A) \mid (C,1,z,A) \in \mathcal{R}\}$ es un subgrupo del $N_G(A)$ tal que $N_C(A) \subset M$ y si $x \in N_G(A) - M$ entonces A es un Sp-Subgrupo de $M \cap M^x$

Sea $J: N_G(A) \to \frac{N_G(A)}{A} = H$ el homomorfismo canónico y $N = J(M)$.

i) $M \subsetneq N_G(A)$ ya que $z_1 \not\in M$ y como $A \subset M$ entonces $N \subsetneq H$

$M \supset N_C(A) \supsetneq A$ entonces $p \mid |\frac{M}{A}| = |N|$,

si $x \in H-N$ entonces existe $x' \in N_G(A)$ tal que $J(x') = x$ y $x' \not\in M$

$\therefore$ A es un Sp-grupo de $M \cap M^{x'}$

$\therefore P \nmid |\frac{M}{A} \cap \frac{M^{x'}}{A}| = |N \cap N^x|$

$\Leftarrow$ sea $M = J^{-1}(N)$

Sea D un Sp-grupo de M entonces J(D) es un Sp-grupo de N como $P \mid |N|$ entonces $D \supsetneq A$

Sea D' un Sp-grupo del $N_G(A)$ tal que $D' \supset D$ si $D' \supsetneq D$ entonces $N_{D'}(D) \supsetneq D$ entonces existe $u \in D' - D$ tal que $D^u = D$

$A \subsetneq D = D \cap D^u \subset M \cap M^u$

$J(D) \subset J(M) \cap J(M)^{J(u)} = N \cap N^{J(u)}$

Además $u \not\in M$. $J(u) \not\in N$ y $P \mid |J(D)|$ $\boldsymbol{\gamma}$

$\therefore D' = D$

Además si $u \in N_G(A) - M$ entonces $M \cap M^u \supset A$ y como $J(u) \in H-N$ entonces $N \cap N^{J(u)}$ es p'-grupo por lo que para toda $g \in M \cap M^u$, g p-elemento se tiene que $J(g) = A$, es decir $g \in A$

$\therefore$ A es Sp-grupo de $M \cap M^u$

Sea C un Sp-grupo de G tal que $N_C(A) = D$ y

$\bar{M} = \{z \in N_G(A) \mid (C,1,z,A) \in R\}$ por el teorema **2.2**

$\bar{M} \subset M$ pero $N \subsetneq H$ entonces $M \subsetneq N_G(A)$ entonces existe $z_1 \in N_G(A) - M$

$\therefore$ $z_1 \notin \bar{M}$ es decir $(C,1,z_1,A) \in \mathcal{D} - \mathcal{R}$

$\therefore$ A es esencial

Proposición 2.3

Un p-subgrupo A de G es no esencial en G si y sólo si para todo par P, P' de Sp-grupos de G distintos, que contienen a A, existen Sp-grupos $P_0, \ldots, P_n$ de G tales que :

(1) $P_0 = P$ y $P_n = P'$

(2) Si $1 \leq i \leq n$ A es subgrupo propio de $P_{i-1} \cap P_i$

Demostración:

Sea A un p- subgrupo no esencial de G, y P, P' dos Sp-grupos de G tales que $A \subset P$, $A \subset P'$ y $P \neq P'$ entonces existe $x \in G$ tal que $P^x = P'$ de donde tenemos $(P,1,x,A) \in \mathcal{D}$ y es reducible pero $(P,1,x,A) \notin \mathcal{T}$, por lo que

$(P,1,x,A) = \sum_{i=0}^{n} (P,x_i,y_i,A_i)(A_i,u_i,A)$ donde

$|A| < |A_i|$ para $i = 0, \ldots, n$, de esta expresión tenemos que $x_0 u_0 = 1$, $x = y_n u_n$, $y_{i-1}\, u_{i-1} = x_i u_i$ y que $A \subsetneq A_i^{u_i}$ para $i = 0, \ldots, n$, como $A_i \subset P^{x_i}$ y $A_i \subset P^{y_i}$ tenemos que $A_i \subset P^{x_i} \cap P^{y_i}$ por lo que $A_i^{u_i} \subset P^{x_i u_i} \cap P^{y_i u_i} = P^{y_{i-1}\, u_{i-1}} \cap P^{y_i u_i}$

$\therefore\ A \subsetneq P^{y_{i-1} u_{i-1}} \cap P^{y_i u_i}$ para $i = 1, \ldots, n$,

haciendo $P_i = P^{y_i u_i}$ para $i = 1, \ldots, n$ tenemos que se cumplen las condiciones (1) y (2).

Supongámos ahora que para todo par de Sp-grupos de G, distintos P y P' existen Sp-grupos $P_0, \ldots, P_n$ que cumplen las condiciones pedidas, demostraremos que A es no esencial.

Sea $(B, x, y, A) \in \mathcal{D}$ entonces

si $B^x = B^y$, $(B, x, y, A) \in \mathcal{T}$,

si $B^x \neq B^y$ por hipotesis existen $P_0, \ldots, P_n$ Sp-grupos tales que

$P_0 = P = B^x$, $P_n = P' = B^y$ y A es subgrupo propio de $P_{i-1} \cap P_i$ para $i = 1, \ldots, n$, sabemos que existen y_i elementos de G tales que $P = P^{y_i}_{i-1}$ por lo que tenemos que

$$(B, x, y, A) = \sum_{i=1}^{n} (B, xy_1 \ldots y_{i-1}, xy_1 \ldots y_i, P_{i-1} \cap P_i)(P_{i-1} \cap P_i, 1, A)$$

$$+ (B, xy_1 \ldots y_n, y, A)$$

como $A \nsubseteq P_{i-1} \cap P_i$ para toda $i=1\ldots n$ entonces

$|A| < |P_{i-1} \cap P_i|$, por lo que (B,x,y,A) está generado por elementos de longitud menor que $\frac{|B|}{|A|}$

$\therefore$ $(B,x,y,A) \in \mathcal{R}$

Corolario 2.4

Todo elemento maximal del conjunto de intersecciones de dos Sp-grupos diferentes de G es un p-subgrupo esencial de G.

Sean P, Q dos Sp-grupos de G diferentes tales que $P \cap Q$ es maximal, y $x \in G$ tal que $P^x = Q$, tomemos $M = P \cap Q$ entonces $(P,1,x,M) \in \mathcal{D} - \mathcal{T}$, si M es no esencial entonces por la proposición 2.3 existen $P_0, \ldots, P_n$ Sp-grupos de G tales que $M \nsubseteq P_{i-1} \cap P_i$ para $i = 1,\ldots n$, entoces M no es maximal.

Capítulo III

Sea W una aplicación de los p-subgrupos de G en el conjunto de subgrupos de G que satisface las siguientes condiciones:

1º Si A es un p-subgrupo de G, $W(A) \subset C_G(A)$

2º Para todo p-subgrupo A de G y para todo elemento x de G

$$W(A^x) = W(A)^x$$

3º Si A y B son dos p-subgrupos de G tales que $A \subset B$ entonces

$$W(B) \subset W(A).$$

Con W se definen en F y en D las relaciones siguientes.

a) Si (B,x,A) y (B',x',A') estan en F se tiene $(B,x,A) \sim (B',x',A')$ si $A=A'$, $B=B'$ y si el elemento $x^{-1}x' \in W(A)$.

b) Si (B,x,y,A) y (B',x',y',A') son elementos de D se tiene que $(B,x,y,A) \sim (B',x',y',A')$ si $A=A'$, $B=B'$ y los elementos $x^{-1}x'$, $y^{-1}y'$ pertenecen a $W(A)$.

Estas relaciones son de equivalencia.

Denotaremos respectivamente Fw y Dw al conjunto de clases de equivalencia de F y D, por Tw al conjunto de clases de Dw que tienen un elemento en T.

Las operaciones de la definición 2.2 son compatibles en Fw y Dw

Demostración.-

Sean $(C,y,B)\sim(C',y',B')$ *y* $(B\ x\ A)\sim(B',x',A')$ *por demostrar que* $(C,yx,A)\sim(C',y'x',A')$; *como* $(B,x,A)\sim(B',x',A')$ *tenemos* $B=B'$, $A=A'$, $x^{-1}x' \in W(A)$ *ademas* $W(B^x)\subset W(A)$ *ya que* $A\subset B^x$, *como* $(C,y,B)\sim(C',y',B')$ *tenemos* $C=C'$, $B=B'$, $y^{-1}y'\in W(B)$, *entonces* $x^{-1}\ (y^{-1}y')x \in W(B)^x = W\ (B^x)\subset W(A)$ *entonces* $(x^{-1}y^{-1})(y'x)(x^{-1}x') = (yx)^{-1}\ y'x' \in W(A)$

$\therefore\ (C,yx,A)\sim(C',y'x',A')$.

Analogamente se puede verificar que las operaciones S *y* L *son compatible en Dw.*

Denotaremos por $(B,x,y,A)w$ *a la clase a la cual la doble flecha* (B,x,y,A) *pertenece, se tiene entonces,*

$Tw = \{(B,x,y,A)w \in Dw \mid \exists\ (B,x_1,y_1,A)\in(B,x,y,A)w$ *con* $(B,x_1,y_1,A)\in T\}$

Definimos Rw como el conjunto de $(B,x,y,A)w \in Dw$ *tales que existe* $(B,x_1,y_1,A)\in(B,x,y,A)w \cap R$.

Sean $(B,x,y,A)w$, $(B',x',y',A')w$ *elementos de Dw-Rw decimos que* $(B,x,y,A)w$ *es intercambiable con* $(B',x',y',A')w$ *si existen* $(B,x_1,y_1,A)\in(B,x,y,A)w$ y $(B',x_1',y_1',A')\in(B',x',y',A')w$ *tales que* (B,x_1,y_1,A) *es intercambiable con* (B',x_1',y_1',A').

Proposición 3.1

Todo elemento de D_W *que sea generado por* R_W *está en* R_W,

si $(B,x,y,A)_W \in R_W$ *entonces* $(B,y,x,A)_W \in R_W$.

Demostración:

Supongamos que $(B,x,y,A)_W$ *está generado por elementos de* R_W, *sin perder generalidad se puede suponer que,*

$$(B,x,\_,A)=\sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x''_i,y''_i,A''_i)(A''_i,u_i,A) \quad \text{donde}$$

$(B_i, x''_i, y''_i, A_i)_W \in R_W$, *entonces,*

$$(B,x,y\ A)=\sum_{i=1}^{n} (B,v_i x''_i u_i, v_i y''_i u_i, A''^{u_i^{-1}}_i)(A''^{u_i^{-1}}_i, 1, A)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} (B,x_i,y_i,A_i)(A_i,1,A) \quad \text{y se tiene que}$$

$(B,x_i,y_i,A_i)_W \in R_W$ *y* $(B,x,y,A) = (B,x_1,y_n,A)$ *entonces*

$$(B,x,y,A)_W=\sum_{i=1}^{n} (B,x_i,y_i,A_i)_W\,(A_i,1,A)_W$$

Sea $(B,x'_i,y'_i,A_i) \in R\cap(B,x_i,y_i,A_i)_W$ *para* $i=1,\dots,n$,

entonces $\sum_{i=1}^{n} (B,x'_i,y'_i,A_i)(A_i,x'^{-1}_i x_i y^{-1}_{i-1} y'_{i-1} x'_{i-1} x_{i-1} \cdots y_1^{-1} y'_1 x'^{-1}_1 x_1, A)$

$$= (B,x_1,y'_n x'^{-1}_n x_n y^{-1}_{n-1} y'_{n-1} x'_{n-1} x_{n-1} \cdots y_1^{-1} y'_1 x'^{-1}_1 x_1, A)$$

como $(B,x'_i,y'_i,A_i) \in (B,x_i,y_i,A_i)_W$ *para* $i=1,\dots,n$ *tenemos que*

$x_i^{-1}x_i'$, $y_i^{-1}y_i' \in W(A_i)$ pero $A \subset A_i$ para $i=1,\ldots,n$, por lo tanto $W(A_i) \subset W(A)$, esto significa que $x_i^{-1}x_i'$, $y_i^{-1}y_i' \in W(A)$ $i=1,\ldots,n$, entonces $y_n^{-1}(y_n'x_n'^{-1}x_n\ldots x_1'^{-1}x_1) \in W(A)$, $x_1^{-1}x_1=1 \in W(A)$.

$\therefore$ $(B,x_1,y_n'x_n'^{-1}x_n\ldots x_1'^{-1}x_1, A) \in (B,x,y,A)w$

$\therefore$ $(B,x,y,A)w \in Rw$

Sea $(B,x,y,A)w \in Rw$ entonces existe $(B,x_1,y_1,A) \in R \cap (B,x,y,A)w$ por la proposición 2.1 $(B,y_1,x_1,A) \in R$, pero $(B,y_1,x_1,A) \in (B,y,x,A)w$

$\therefore$ $(B,y,x,A)w \in Rw$

El siguiente resultado es trivial.

Lema 3.1

Si E genera a D entonces $Ew = \{(B,x,y,A)w \in Dw \mid (B,x,y,A) \in E\}$ genera a Dw.

Lema 3.2

Supongase que $(B,x,y,A)w$ y $(B',x',y',A')w$ son elementos de $Dw - Rw$ y que $(B,x,y,A)w = (B,x_1,x_2,A)w + (B,v,B')w\ (B',x',y',A')w\ (A',u,A)w + (B,y_1,y_2,A)w$ con (B,x_1,x_2,A) y (B,y_1,y_2,A) elementos de R, entonces existe $(B,\bar{x},\bar{y},A) \in (B,x,y,A)w$ que es intercambiable con (B',x',y',A').

Demostración:

Como puede efectuarse la suma significa que existen dobles flechas con la siguiente forma:

$(B, x_1', x_2', A) \in (B, x_1, x_2, A)w$, $(B, x_2', y_1', A) \in (B, vx'u, vy'u, A)w$.

$(B, y_1', y_2', A) \in (B, y_1, y_2, A)w$.

tenemos $x_2'^{-1} vx'u, y_1'^{-1} vy'u \in W(A)$ *entonces*

$(B, x_1', x_2', A)\,(A, x_2'^{-1} vx'u, A) + (B, v, B')\,(B', x', y', A')\,(A', u, A) +$

$(B, y_1', y_2', A)\,(A, y_1'^{-1} vy'u, A) = (B, x_1'', x_2'', A) + (B, v, B')\,(B', x', y', A')\,(A', u, A) + (B, y_1'', y_2'', A$

donde $x_1'' = x_1'\, x_2'^{-1} vx'u, x_2'' = vx'u, y_1'' = vy'u, y_2'' = y_2' y_1'^{-1} vy'u$ *y en consecuencia* $(B, x_1, x_2, A)\ (A, x_2^{-1} x_2'', A) + (B, v, B')\ (B', x', y', A')\,(A', u, A) +$

$(B, y_1, y_2, A)\,(A, y_1^{-1} y_1'', A) = (B, x, x_2^{-1} x_2'', y_2 y_1^{-1} y_1'' A) = (B, \bar{x}, \bar{y}, A)$ *donde*

$(B, \bar{x}, \bar{y}, A) \in (B, x, y, A)w$.

De igual forma existe $(B', \bar{x}', \bar{y}', A') \in (B', x', y', A')w$ *intercambiable por* (B, x, y, A);

$(B, x, y, A) = (B, \bar{x}, vx'u, A)\,(A, \bar{x}^{-1} x, A) +$

$(B, v, B')\ \ (B', x'u\, \bar{x}^{-1} x\, u^{-1}, y'u\, \bar{y}^{-1} y\, u^{-1}, A')\ \ (A', u, A) +$

$(B, vy'u, \bar{y}, A)\,(A, \bar{y}^{-1} y, A)$

$A = A'^{u}$ *entonces* $W(A) = W(A')^{u}$

$\bar{x}^{-1} x \in W(A')^{u}$ *entonces* $u\bar{x}^{-1} x\, u^{-1} \in W(A')$

Lema 3.3

Sup. $(B,x,y,A)_w = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)_w (B_i,x_i,y_i,A_i)_w (A_i,u_i,A)_w$ *entonces existen* $(A_i,\bar{u}_i,A)$ *elementos de* F *y existe* $(B,z,y,A) \in (B,y,y,A)w$ *tales que* $(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,\bar{u}_i,A) + (B,z,y,A)$

Demostración.-

Sea $(B,x',y',A) \in (B,x,y,A)_W$ *tal que* $(B,x',y',A) = \sum_{i=1}^{n} (B,x''_i,y''_i,A)$ *donde*

$(B,x''_i,y''_i,A) \in (B,v_i,B_i)w(B_i,x_i,y_i,A_i)w(A_i,u_i,A)w$ *entonces* $(v_i x_i u_i)^{-1} x''_i$, $(v_i y_i u_i)^{-1} y''_i \in W(A)$ *entonces* $(B,\bar{x},\bar{y},A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,x_i,y_i,A_i)(A_i,\bar{u}_i,A)$ *donde*

$$\bar{u}_i = u_i (v_i x_i u_i)^{-1} x''_i y''^{-1}_i (v_{i-1} y_{i-1} u_{i-1})(v_{i-1} x_{i-1} u_{i-1})^{-1} x''_{i-1} y''^{-1}_{i-2}$$

$$(v_{i-2} y_{i-2} u_{i-2}) \ldots (v_2 x_2 u_2)^{-1} x''_2 y''^{-1}_1 (v_1 y_1 u_1)(v_1 x_1 u_1)^{-1} x''_1$$

de aqui tenemos que $\bar{x} = x''_1$ *de donde*

$$(B,x,y,A) = (B,\bar{x},\bar{y},A)(A,\bar{x}^{-1}x,A) + (B,\bar{y}\bar{x}^{-1}x,y,A)$$

y tomando $z = \bar{y}\bar{x}^{-1}x$ *el lema se sigue.*

Definición 3.1

Sea E_W *un subconjunto de* D_W, E_W *es un sistema de generadores si todo elemento* $(B,x,y,A)w$ *de* D_W *es generado por elementos de* $E_W \cup T_W$

Lema 3.4

Si E_W *es un sistema de generadores de* D_W *entonces para todo elemento* $(B,x,y,A)w$ *de* D_W *tenemos que*

$(B,x,y,A)w = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)w\,(B_i,x_i,y_i,A_i)w\,(A_i,u_i,A)w$ *donde*

$(B_i,x_i,y_i,A_i)w \in T_W$ *o* $(B_i,x_i,y_i,A_i)w \in E_W$ *y es irreducible.*

La demostración de este lema así como la del siguiente Teorema y su corolario resultan de un proceso similar al utilizado en el lema 2.6, Teorema 2.1 y corolario 2.1 respectivamente.

Teorema 3.1

Sean Ew y E'w dos subconjuntos de Dw si Ew es un sistema de generadores de Dw y si todo elemento irreducible de Ew es intecambiable con al menos un elemento de E'w, entonces E'w es un sistema de ge eradores.

Def nición 3.2

Un p-subgrupo A es W-esencial si existe $(B,x,y,A)_W \in D_W$ irreducible.

Corolario 3.1

Todo sistema Ew de generadores minimal de Dw cumple las siguientes propiedades:

a) Todo elemento de Ew es irreducible
b) Los elementos de Ew son dos a dos no intecambiables.
c) Todo p-subgrupo W-esencial de G admite un conjugado en G que es la fuente de un elemento de Ew.

Proposición 3.2

Sea $(B,x,y,A)w$ *un elemento de* $Dw-Rw$ *y* C *un Sp-grupo de* G *que contiene un Sp-grupo del* $N_G(A)$, *existe un elemento* z *del* $N_G(A)$ *tal que* $(C,1,z,A)w$ *es irreducible e intecambiable con* $(B,x,y,A)w$.

Por la proposición 2.2 tenemos que

$(B,x,y,A)=(B,x,vu,A) + (B,v,C)\ (C,1,z,A)(A,u,A) + (B,vzu,y,A)$

donde $v \in G$, $B^v=C$, $uz \in N_G(A)$ *y las dobles flechas* (B,x,vu,A), $(B,vzu,y,A) \in R$

$\therefore\ (B,x,y,A)w = (B,x,vu,A)w + (B,v,C)w\ (C,1,z,A)w\ (A,u,A)w$
$+ (B,vzu,y,A)w$ *entonces por la proposición 3.1* $(B,x,y,A)w \in Dw-Rw$ *si y sólo si* $(C,1,z,A)w \in Dw - Rw$

Teorema 3.2

Sea A *un p-subgrupo de* G, B *un Sp-grupo de* G *que contiene un Sp-grupo del* $N_G(A)$ *y* Mw *el conjunto de elementos* z *del* $N_G(A)$ *tales que* $(B,1,z,A)w \in Rw$ *se tiene:*

a) Mw *es un subgrupo del* $N_G(A)$ *y es el más pequeño que cumple las siguientes condiciones:*

(1) Mw *contiene a* $N_B(A)$

(2) *Para todo elemento* x *de* $N_G(A)-Mw$ A *es un Sp-grupo de* $Mw \cap M_w^x$

(3) $Mw \supset W(A)$

b) *Si* z, z' *son elementos de* $N_G(A) - M_W$, $(B,1,z,A)w$ *y* $(B,1,z',A)w$ *son intercambiables si y sólo si* $M_W z M_W = M_W z' M_W$

Demostración.

a) *Sean* $z_1, z_2 \in M_W$ *entonces* $(B,1,z_1,A)w$ *y* $(B,1,z_2,A)w \in R_W$ *entonces* $(B,1,z_1,A)w \ (A,z_2,A)w \in R_W$

Por lo que $(B,z_2, z_1z_2, A)w \in R_W$.

$\therefore (B,1,z_2,A)w + (B,z_2,z_1z_2, A)w = (B,1,z_1z_2,A)w \in R_W$

(1) $N_B(A)$ *es Sp-grupo del* $N_G(A)$

$M = \{z \in N_G(A) \mid (B,1,z,A) \in R\}$

M *es un subgrupo del* $N_G(A)$ *y es el más pequeño que cumple* (1) *y* (2) *del teorema 2.2*

Si $z \in M$ *entonces* $(B,1,z,A) \in R$ *entonces* $(B,1,z,A)w \in R_W$ *entonces* $z \in M_W$ $\therefore M \subset M_W$, $N_B(A) \subset M$ *por el teorema 2.2, entonces* $N_B(A) \subset M_W$

(2) *Si* $x \notin M_W$ *entonces* $x \notin M$ *entonces* A *es Sp-grupo de* $M \cap M^x$ *pero* $M \cap M^x \subset M_W \cap M_W^x$

$\therefore A \subset M_W \cap M_W^x$;

Sea D *un Sp-grupo de* $M_W \cap M_W^x$ *entonces* $D \subset M_W \Rightarrow$ *existe* $y \in M_W$ *tal que* $N_B y(A) \supset D$, $D \subset M_W^x \Rightarrow D^{x^{-1}} \subset M_W \Rightarrow$ *existe* $z \in M_W$ *tal que* $N_B z(A) \supset D^{x^{-1}}$

$(B,1,x,A)w = (B,1,y,A)w + (B,y,zx,D)w \ (D,1,A)w + (B,z,1,A) \ (A,x,A)$

$\therefore |D| = |A|$

$\therefore A = D$

(3) *Sea* $z \in W(A)$ *entonces* $(B,1,z,A) \in (B,1,1,A)_W \in T_W$

$\therefore (B,1,z,A)w \in R_W$

$\therefore z \in M_W$

$\therefore W(A) \subset M_W$

(b) ¿ *Supongamos* $(B,1,z,A)w \sim (B,1,z',A)w$ *entonces existe*

$(B,x,y,A) \in (B,1,z,A)_W$ *tal que* $(B,x,y,A) \sim (B,1,z',A)$ *de donde* $x, y^{-1}z \in W(A) \subsetneq M_W$, *en consecuencia* $y \in N_G(A)$ *y se tiene*

$$(B,x,x,A) + (B,1,yx^{-1},A)(A,x,A) + (B,y,y,A) = (B,x,y,A)$$

$\therefore (B,1,yx^{-1},A) \sim (B,1,z',A)$

Por el Teorema 2.2 (b) tenemos

$Myx^{-1} = Mz'M$ *entonces*

$yx^{-1} = m_1 z' m_2$ *con* $m_1, m_2 \in M \subset M_W$

$$z = zy^{-1}(yx^{-1})x$$
$$= zy^{-1} m_1 z' m_2 x$$

pero $zy^{-1}m_1,\ m_2 x \in M_W$

$\therefore M_W z M_W = M_W z' M_W$

Ahora supongamos $M_W z M_W = M_W z' M_W$ *tenemos que* $z = m_1 z' m_2$ *con* m_1 *y* m_2 *en* M_W *esto significa que* $(B,1,m_1,A)w$ *y* $(B,1,m_2,A)w$ *pertenecen a* R_W *por lo que* $(B,1,z,A)w = (B,1,m_2,A)w + (B,1,z',A)w\,(A,m_2,A)w + (B,z'm_2,z,A)w$, *donde* $(B,z'm_2,z,A)w \in R_W$ *ya que* $(B,z'm_2,z,A)w = (B,1,m_1,A)w(A,z'm_2,A)w$, *de donde* $(B,1,z,A)w$ *es irreducible si y sólo si* $(B,1,z,A)w$ *lo es y en este caso son intercambiables. Lo que termina la demostración.*

Consideraremos el caso especial en que la función W asocia a cada p-subgrupo de G su centralizador en G la denotaremos por C.

Definición 3.3

Un p-subgrupo A de G es C-normal en G si existe un Sp-grupo P de G que satisface las siguientes condiciones:

1- A es un subgrupo normal de P.

2- Si H es un subgrupo de P y si x es un elemento de G tal que $P \supset H^{x-1}$ se tiene que x=nz donde n normaliza a A y z centraliza a H

Proposición 3.3

Un p-subgrupo A de G es C-normal en G si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

1° si x es un elemento de G tal que A y A^x generan un p-grupo - entonces $A = A^x$,

2° todo p-subgrupo C-esencial de G tiene un conjugado en G que contiene a A .

Demostración.-

Primero supongamos que A es un p-subgrupo de G C-normal, demostraremos que se se cumple el inciso 1°) de la proposición:

Supongamos que para alguna $x \in G$ el subgrupo H generado por A y A^x es p-subgrupo de G . Por ser A C-normal existe P Sp-grupo de G tal que $A \subset P$. Existe $v \in G$ tal que $H \subset P^v$, por lo que $A^{v^{-1}} \subset P$ y entonces de la definición 3.3 se tiene que $v = nz$ con $n \in N_G(A)$ y - $z \in C_G(A)$.

Análogamente como $A^x \subset H \subset P^v$ entonces $vx^{-1} = n_1 z_1$ con $n_1 \in N_G(A)$ y $z_1 \in C_G(A)$ por lo que $x = z_1^{-1}n_1^{-1}v = z_1^{-1}n_1^{-1}nz \in N_G(A)$ y entonces $A = A^x$ como se quería probar.

Para demostar el 2°) inciso de la proposición supongamos A' C-esencial, entonces existen B Sp-grupo de G y $x_1, x_2 \in G$ tales que $(B, x_1, x_2, A')c$ pertenece a $Dc - Rc$, como A es C-normal entonces existe P Sp-grupo de G tal que $A \subset P$. Existe $v \in G$ tal que $P^v = B$ y entonces se tiene que $(P^v, x_1, x_2, A')c \in Dc - Rc$ por lo que

$(P, v, P^v)c(P^v, x_1, x_2, A')c(A', x_1^{-1}v^{-1}, A'^{x^{-1}v^{-1}})c \in Dc - Rc$

Sea $A'' = A'^{x_1^{-1}v^{-1}}$ entonces se tiene que $(P, 1, x, A'')c \in Dc - Rc$ donde $x = vx_2x_1^{-1}v^{-1}$ luego $A'' \subset P$ y $A''^{x^{-1}} \subset P$, ya que A es C-normal entonces $x = nz$ con $n \in N_G(A)$ y $z \in C_G(A'')$.

Como $A \lhd P$ y $A'' \subset P$ entonces AA'' es un subgrupo de P y se tiene $(P, 1, nz, A'')c = (P, 1, n, A'')c = (P, 1, n, AA'')c(AA'', 1, A'')c$ y como es C-irreducible entonces $|AA''| = |A''|$ es decir $AA'' = A''$ por lo que $A \subset A''$ que es lo que se quería probar.

Para demostrar el regreso de la proposición supongamos que A es un p-subgrupo de G que satisface las condiciones 1°) y 2°) de la proposición. Como A es un p-subgrupo de G existe P Sp-grupo de G tal que $A \subset P$, si $x \in P$ entonces $A^x \subset P^x = P$ por lo que A y A^x generan un p-subgrupo de G, de donde $A = A^x$ y entonces se tiene que $A \lhd P$ y se satisface la condición 1 de la definición 3.3 .

Para demostrar la condición 2) supongamos H un subgrupo de P y que $P \supset H^{x^{-1}}$ para algún $x \in G$ lo que tenemos que demostrar es que $x = nz$ con $n \in N_G(A)$ y $z \in C_G(H)$.

Por nuestra hipótesis podemos considerar la doble flecha $(P,1,x,H)$, está se puede expresar como:

$$(P,1,x,H)c = \sum_{i=1}^{m} (P,v_i,P^{v_i})c(P^{v_i},x_i,y_i,A_i)c(A_i,1,H)c \quad \text{con}$$

$(P^{v_i},x_i,y_i,A_i)c \in (Dc - Rc) \cup Tc$.

Para probar lo que queremos, demostraremos primero los siguientes hechos :

i) para $1 \leq i \leq n$, si $v_i x_i = n_i z_i$ con $n_i \in N_G(A)$ y $z_i \in C_G(H)$ entonces $v_i y_i = n'_i z'_i$ con $n'_i \in N_G(A)$ y $z'_i \in C_G(H)$.

ii) Para $1 \leq i \leq n$, si $v_i y_i = n'_i z'_i$ con $n'_i \in N_G(A)$ y $z'_i \in C_G(H)$ entonces $v_{i+1} x_{i+1} = n_{i+1} z_{i+1}$ con $n_{i+1} \in N_G(A)$ y $z_{i+1} \in C_G(H)$.

Para probar i) lo dividimos en dos casos :

a) Supongamos que $(P^{v_i},x_i,y_i,A_i)_c \in D_c - R_c$ entonces por la condición 2° existe $u_i \in G$ tal que $A \subset A_i^{u_i}$ como $A_i \subset P^{v_i x_i}$, $A_i \subset P^{v_i y_i}$ se tiene que $A \subset P^{v_i x_i u_i}$, $A \subset P^{v_i y_i u_i}$ de aquí que $A^{u_i^{-1} x_i^{-1} v_i^{-1}} \subset P$ $A^{u_i^{-1} y_i^{-1} v_i^{-1}} \subset P$ de donde el subgrupo generado por A y $A^{u_i^{-1} x_i^{-1} v_i^{-1}}$ está contenido en P y por la condición 1° de la proposición se tiene $A = A^{u_i^{-1} x_i^{-1} v_i^{-1}}$ por lo que $u_i^{-1} x_i^{-1} v_i^{-1} \in N_G(A)$.

Análogamente se tiene que $u_i^{-1} y_i^{-1} v_i^{-1} \in N_G(A)$ y como $v_i y_i = (v_i y_i u_i)\ (u_i^{-1} x_i^{-1} v_i^{-1})\ (v_i x_i)$ y por hipótesis $v_i x_i = n_i z_i$ con $n_i \in N_G(A)$ y $z_i \in C_G(H)$ entonces se tiene que $v_i y_i = n'_i z'_i$ con $n'_i = (v_i y_i u_i)(u_i^{-1} x_i^{-1} v_i^{-1})\ n_i \in N_G(A)$ y $z'_i = z_i \in C_G(A)$ como se quería demostrar

b) Suponemos ahora que $(P^{v_i}, x_i, y_i, A_i)_c \in T_c$, existe $(P^{v_i}, x_i', y_i', A_i) \in T \cap (P^{v_i}, x_i, y_i, A_i)_c$ entonces $(P, v_i x_i', v_i y_i', H) \in T \cap (P, v_i x_i, v_i y_i, H)_c$ de donde $(v_i x_i)^{-1} (v_i x_i') = g_i \in C_G(H)$ y como $v_i x_i = n_i z_i$ con $n_i \in N_G(A)$, $z_i \in C_G(H)$ entonces $v_i x_i' = v_i x_i g_i = n_i z_i g_i$, además

$A^{v_i x_i' y_i'^{-1} v_i^{-1}} \subset P^{v_i x_i' y_i'^{-1} v_i^{-1}} = P$ por lo que $v_i x_i' y_i'^{-1} v_i^{-1} = h_i \in N_G(A)$ de donde $v_i y_i' = h_i^{-1} v_i x_i' = h_i^{-1} n_i z_i g_i$ como $(v_i y_i')^{-1} (v_i y_i) = g_i' \in C_G(A)$ entonces $v_i y_i = v_i y_i' g_i' = (h_i^{-1} n_i)(z_i g_i g_i') = n_i' z_i'$ con $n_i' \in N_G(A)$, $z_i' \in C_G(A)$ como se quería demostrar.

Para probar ii) supongamos $v_i y_i = n_i' z_i'$ con $n_i' \in N_G(A)$ y $z_i' \in C_G(H)$.

Se tiene que $(v_i y_i)^{-1} (v_{i+1} x_{i+1}) = k_i \in C_G(H)$

Por lo que $v_{i+1} x_{i+1} = (v_i y_i) k_i = n_i' z_i' k_i = n_{i+1} z_{i+1}$

donde $n_{i+1} = n_i' \in N_G(A)$ y $z_{i+1} = z_i' k_i \in C_G(H)$

Como $v_1 x_1 = z_1 \in C_G(H)$ entonces de i) y ii) se tiene que $v_m y_m = n_m' z_m'$ con $n_m' \in N_G(A)$ y $z_m' \in C_G(H)$ y como $(v_m y_m)^{-1} x = z' \in C_G(H)$. entonces $x = n_m' z_m' z' = nz$ con $n = n_m' \in N_G(A)$ y $z = z_m' z' \in C_G(H)$, lo que prueba la condición 2 de la definición.

Capitulo IV

Lema 4.1

Si A es un p-subgrupo esencial de G, A es una intersección suave

Demostración.-

Por ser A esencial en G existe $(B,x,y,A) \in D\text{-}R$ por lo que, por la proposición 2.2 existe C Sp-grupo de G tal que $N_C(A)$ es un - Sp-grupo del $N_G(A)$ y $z \in N_G(A)$ tal que (B,x,y,A) es intercambiable con $(C,1,z,A)$, por lo que $A=C\cap C^z$ ahora $N_C(A)=N_C(C\cap C^z)$ es - Sp-grupo del $N_G(A)$ además $N_C{}^z(A) = [N_C(A^{z^{-1}})]^z = [N_C(A)]^z$ es un Sp-grupo del $N_G(A)$

$\therefore$ $A=C\cap C^z$ es una intersección suave.

Teorema 4.1

Si $H \lhd G$ y P es un Sp-grupo de H entonces $G=N_G(P)\cdot H$

Demostración.-

Sea $x \in G$ entonces $P^x \subset H^x = H \Rightarrow \exists$ $h \in H$ tal que $P^x = P^h$

$\Rightarrow$ $xh^{-1} = y \in N_G(P)$ $\therefore$ $x = yh$

Corolario 4.1

Sea A un p-subgrupo de G tal que A no es Sp-grupo en $N_G(A)$, Sea P un Sp-grupo del $N_G(A)$ y M un subgrupo del $N_G(A)$ tal que *i)* $M \supset P$

ii) *si* $x \in N_G(A)-M$ *entonces* A *es Sp-grupo de* $M \cap M^x$, *sea* $Wp(N_G(A))$ *el subgrupo generado por los p elementos de* $N_G(A)$ *entonces*

$N_G(A)=\omega_p(N_G(A)).M$

Demostración.

$\omega_p(N_G(A)) \lhd N_G(A)$ *además* P *es un Sp-grupo de* $\omega_p(N_G(A))$

$\therefore N_G(A)=\omega_p(N_G(A)).N_{N_{G(A)}}(P)$

si $x \in N_{N_{G(A)}}(P) \Rightarrow P^x = P \subset M \cap M^x$

$\therefore$ *A no es Sp-grupo de* $M \cap M^x$

$\therefore x \in M$

$\therefore N_{N_{G(A)}}(P) \subset M$

$\therefore N_G(A) = \omega_p(N_G(A)).M$

Teorema 4.2

Sea $\bar{E} = \{(C,1,z,A) \in D-R \mid z$ *es p-elemento de* $N_G(A)$, $N_C(A)$ *es un Sp-grupo del* $N_G(A)\}$ *entonces*

$\bar{E}$ *genera a* D,

Este teorema es consecuencia del lema 2.6, del teorema 2.1, de la proposición 2.2 y del Corolario 4.1.

Lema 4.2

Sea $(C,1,z,A') \in \bar{E}$ *y sean* (B,v,C), $(A',u,A) \in F$, *entonces* $(C^{v^{-1}},1,vzv^{-1},A'^{v^{-1}}) \in \bar{E}$

Lema 4.3

Si $(B,u,v,A) \in \mathcal{D}$ *y si* $n \in N_G(B)$ *entonces*

$(B,nu,u,A) + (B,u,v,A) = (B,n,B)(B,u,v,A) + (B,nv,v,A)$. *De aquí resulta el siguiente corolario.*

Corolario 4.2

Todo elemento (B,x,y,A) *de* $\mathcal{D}$ *se puede expresar como*

$$(B,x,y,A) = \sum_{i=1}^{n} (B,v_i,B_i)(B_i,1,z_i,A_i)(A_i,u_i,A) + (B,g,y,A) \quad \text{con}$$

$$(B_i,1,z_i,A_i) \in \bar{E} \ \ y \ \ (B,g,y,A) \in T.$$

Teorema 4.3 (Alperin)

Sea A *y* B *dos subgrupos de* P *donde* P *es un Sp-grupo de* G *y supóngase que* $A^x = B$, *entonces existen elementos* x_i *y Sp-grupos* Q_i *de* G *para* $1 \leq i \leq n$ *y un elemento* y *del* $N_G(P)$ *el cual satisface las siguientes condiciones:*

i) $x = x_1 x_2 \ldots x_n y$

ii) $P \cap Q_i$ *es una intersección suave para* $1 \leq i \leq n$

iii) x_i *es un p-elemento del* $N_G(P \cap Q_i)$ *para* $1 \leq i \leq n$

iv) $A \subset P \cap Q_1$, $A^{x_1 x_2 \ldots x_i} \subset P \cap Q_{i+1}$ *para* $1 \leq i \leq n-1$

Demostración.

Por estar $A, B \subset P$ *tenemos que* $(P,1,x^{-1},A) \in \mathcal{D}$ *por lo que se puede - expresar como*

$$(P,1,x^{-1},A)=\sum_{i=1}^{n}(P,v_i,P_i)(P_i,1,z_i,A_i)(A_i,u_i,A)+(P,yx^{-1},x^{-1},A)$$

con $(P_i,1,z_i,A_i)\in \bar{E}$, $y\in N_G(P)$

de aqui que

$$(P,1,x^{-1},A)=\sum_{i=1}^{n}(P,1,P_i^{v^{-1}})(P_i^{v_i^{-1}},1,v_iz_iv_i^{-1},A_i^{v_i^{-1}})$$

$$(A_i^{v_i^{-1}},v_iu_i,A)+(P,yx^{-1},x^{-1},A)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(P,1,v_iz_iv_i^{-1},A_i^{v_i^{-1}})(A_i^{v_i^{-1}},v_iu_i,A)+$$

$$(P,y\,x^{-1},x^{-1},A)\;\ldots\;(1);$$

Sean $Q_i=P^{v_iz_iv_i^{-1}}$ *y* $x_i=(v_iz_iv_i^{-1})^{-1}$

para $i=1,\ldots,n$ *entonces.*

i) De la expresión (1) tenemos que

$v_1u_1=1$, $v_iz_iu_i=v_{i+1}u_{i+1}$ *para* $1\le i\le n-1$

por lo que $z_i=v_i^{-1}v_{i+1}u_{i+1}u_i^{-1}$ *para* $1\le i\le n-1$

y $v_nz_nu_n=yx^{-1}$

$$\therefore\ x=(v_nz_nu_n)^{-1}y=u_n^{-1}z_n^{-1}v_n^{-1}y$$

ahora

$x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n\,y=$

$(v_1z_1^{-1}v_1^{-1})(v_2z_2^{-1}v_2^{-1})(v_3z_3^{-1}v_3^{-1})\ldots(v_{n-1}z_{n-1}^{-1}v_{n-1}^{-1})(v_nz_n^{-1}v_n^{-1})\,y=$

$v_1(u_1u_2^{-1}v_2^{-1}v_1)v_1^{-1}v_2(u_2u_3^{-1}v_3^{-1}v_2)v_2^{-1}v_3(u_3u_4^{-1}v_4^{-1}v_3)v_3^{-1}\ldots v_{n-1}$

$(u_{n-1}u_n^{-1}v_n^{-1}v_{n-1})v_{n-1}^{-1}(v_nz_n^{-1}v_n^{-1})\,y=$

$u_n^{-1}z_n^{-1}v_n^{-1}\,y=x$

ii) $P\cap\Omega_i = A_i^{v_i^{-1}}$ es una intersección suave para $1\le i\le n$

iii) x_i es un p-elemento del $N_G(A_i^{v_i^{-1}}) = N_G(P\cap\Omega_i)$ para $1\le i\le n$

iv) $A\subset A_1^{u_1} = A_1^{v_1^{-1}v_1u_1} = A_1^{v_1^{-1}} \subset P_1^{v_1z_1v_1^{-1}} = Q_1$

$\therefore A \subset P\cap Q_1$

además tenemos que $x_1x_2\ldots x_i = u_{i+1}^{-1}v_{i+1}^{-1}$ para $i > 1$;

supongamos que $A^{x_1x_2\ldots x_{i-1}}\subset P\cap\Omega_i$;

Demostraremos que $A^{x_1x_2\ldots x_i}\subset P\cap\Omega_{i+1}$

$A^{x_1x_2\ldots x_i} = A^{u_{i+1}^{-1}v_{i+1}^{-1}}$

$A\subset A_{i+1}^{u_{i+1}} \Rightarrow \quad A^{u_{i+1}^{-1}v_{i+1}^{-1}}\subset A_{i+1}^{v_{i+1}^{-1}} = P\cap Q_{i+1}$

$\therefore A^{x_1x_2\ldots x_i} \subset P\cap Q_{i+1}$

B I B L I O G R A F I A

Gorenstein, D. Finite Groups - Ed. Harper & Row 1968.

Hall, M. - Teoría de los grupos - Ed. Trillas, 1973.

J. L. Alperin, J. Algebra, 6, 1967, pp. 222-241.

Puig. L., - Sur un Théorème d' Alperin, C.R. Acad. Sc. Paris, 278, Serie A, 1974, pp. 1013-1016.

Puig, L., - Sur le contrôle de fusión des p-sous-groupes. C.R. Acad. Sc. Paris, 278, Serie A, 1974, p. 231.