7 G. 22

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS FORMAS DE UTILIZAR LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS COMO UN APOYO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

MARIA JUANA LINARES ALTAMIRANO

MEXICO, D. F. 1984

INDICE

INTRODUCCION. 1

POSIBILIDADES DE USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS. 4

COMENTARIOS. 6

DESCRIPCION Y ANALISIS CON CONCLUSIONES DEL MATERIAL HISTORICO REFERENTE A SISTEMAS DE NUMERACION. 15

EJEMPLIFICACION DE COMO ESTA INFORMACION PUEDE SER USADA PARA MEJORAR LOS RECURSOS DEL PROFESOR. 21

INFORMACION HISTORICA QUE SE PUEDE INCORPORAR EN UN CURSO. 34

ANEXO 1.
BIBLIOGRAFIA GENERAL DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS. 67

BIBLIOGRAFIA. 69

INTRODUCCION.

Hay inquietud en el medio por el uso de la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas, algunos trabajos en esta dirección son: El cálculo, un enfoque genético de Otto Toeplitz.

Es necesario advertir que existe una Historia de las Matemáticas que no tan sólo tiene poco que aportar a la enseñanza sino que su uso puede ser contraproducente y desorientador, se trata de la Historia tradicional en la que se hacen uso de anécdotas, datos biográficos y que tiene una tendencia a mistificar y esquematizar inconscientemente la actividad matemática, y por lo tanto puede propiciar la formación de imágenes falsas de ésta; existe otra, que es más reciente, cuya preocupación principal es reflejar más, el dinamismo y los aspectos de las matemáticas más vivos y más realistas, en esta medida ofrece una información más rica y real de las matemáticas.

Se pueden decir cosas muy generales de la Historia de las Matemáticas, por ejemplo: que muestra la evolución de las ideas, que se puede ampliar y profundizar el material de matemáticas, que se puede ver el contexto social en que se desarrollaron las ideas matemáticas, pero ¿ esto de qué manera ayuda a la Enseñanza de las Matemáticas ?

Algunas ideas que hay acerca de cómo usar la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las mismas son:

1. El orden, las dificultades y los enfoques con que aparecen los conceptos en la Historia de las Matemáticas pueden aportar elementos para la enseñanza de esos conceptos.

2. Obtener información acerca del origen, evolución y aplicación de algunas ideas para apoyar la enseñanza.

3. Formar una visión de conjunto de las matemáticas, que permita al estudiante tener una visión más amplia de las matemáticas para que en un determinado momento lo ayude en su desarrollo vocacional.

4. Enmarcar las matemáticas en un contexto social para que el estudiante vea a las matemáticas como una actividad más cercana a su vida, como una actividad más humana y real.

5. Recurrir a la Historia de las Matemáticas para dar datos biográficos, narrar hechos históricos curiosos y así dar cierta motivación a los estudiantes.

Sin embargo, yo no conozco ejemplos específicos y descriptivos de cómo instrumentar estas ideas para la práctica docente, esto es, supongamos que voy a enseñar el tema de Sistemas de Numeración, entonces ¿ qué tipo de análisis y manejo de la información histórica referente a este tema debo realizar, para obtener diferentes clases de recursos y apoyos para la enseñanza del tema mencionado?

Nuestro trabajo consiste en presentar algunos ejemplos de como usar la Historia de las Matemáticas para apoyar directamente la enseñanza y aprendizaje en el salón de clases. En este trabajo se trata de ilustrar el uso de la Historia de las Matemáticas en forma más inmediata y más útil para la Enseñanza de las Matemáticas, la intención del trabajo es tratar de orientar al profesor en cuanto a su uso y que vea como hacerlo, trata de mostrarle elementos claros y específicos para que él los use de la forma que más le convenga. Esto se hará presentando:

1. Posibilidades de uso de la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas (con los comentarios de porqué usar la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, dados por matemáticos y educadores ampliamente reconocidos).

2. Descripción y análisis con conclusiones del material histórico referente a Sistemas de Numeración que aparece en los libros: "An Introduction to the History of Mathematics" de Howard Eves, "A Survey of Mathematics. Elementary Concepts and their Historical Development" de Vivian Shaw Groza, y "Number. The Language of Science" de Tobias Dantzig.

3. Ejemplificación de como esta información puede ser usada para mejorar los recursos del profesor.

4. Información histórica que se puede incorporar en un curso.

1. POSIBILIDADES DE USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

I. La Historia de las Matemáticas como un medio para tener un conocimiento más profundo de los conceptos.

II. La Historia de las Matemáticas como un medio para tener una visión más amplia de las matemáticas (por ejemplo, su conexión con otras ciencias).

III. La Historia de las Matemáticas como fuente de información que permita o que le dé a uno, más recursos, como diversos enfoques y aplicaciones, para enriquecer la presentación de un tema.

IV. La Historia de las Matemáticas como un medio para desmistificar a las matemáticas (las Matemáticas constituyen una labor de conjunto, ardua, acumulativa, universal).

V. La Historia de las Matemáticas como un medio para ubicar a la actividad matemática en un contexto social (la actividad matemática está vinculada con otras actividades sociales, no es ajena a las ideas, problemas y necesidades de la época).

VI. La Historia de las Matemáticas como un medio para despertar o aumentar el gusto por las Matemáticas, en particular el gozo estético proveniente del análisis de cómo pensaban y resolvían los problemas generaciones anteriores.

VII. La Historia de las Matemáticas como un medio para detectar o determinar posibles momentos o situaciones difíciles para el entendimiento o manejo de algún objeto matemático.

VIII. La Historia de las Matemáticas como un elemento para evitar la excesiva esquematización en la Enseñanza de las Matemáticas.

IX. La Historia de las Matemáticas como un medio para entender mejor las características del pensamiento matemático, en la medida en que muestra los orígenes, los errores, fracasos y dificultades que se tienen al ir desarrollando el conocimiento.

COMENTARIOS

A continuación reproducimos los comentarios que sobre el papel de la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas han hecho matemáticos y educadores famosos.

Los griegos erigieron varias estructuras magistrales, la principal de las cuales es la de los Elementos de Euclides, que constituye básicamente el curso de Geometría de la enseñanza secundaria tradicional. Sin embargo, la Geometría Euclídea no apareció en forma deductiva. Hicieron falta trescientos años, el periodo que va de Tales a Euclides, de exploraciones, titubeos, argumentos vagos e incluso incorrectos, antes de que se plasmaran los Elementos. Por tanto, los Elementos constituyen el resultado final y relativamente sofisticado de un pensamiento más tosco e intuitivo.

Esta nota fué tomada del libro "El fracaso de la matemática moderna". Morris Kline. Siglo XXI. Página 43.; e ilustra los puntos III, IV y VII de la lista anterior.

Un obstáculo esencial para la difusión de tal método, natural y verdaderamente científico, es la falta de conocimientos históricos que tan a menudo se hace notar. Para combatir esto, he intentado que el texto incluya notas históricas. Al hacerlo confío haber puesto de relieve con qué lentitud se han producido todas las ideas matemáticas; como casi siempre han aparecido primero en esbozo y sólo han cristalizado después de largo tiempo en la forma definitiva que resulta familiar en la exposición sistemática"

Nota de Félix Klein tomada del libro: "El fracaso de la matemática moderna". Morris Kline. S. XXI é ilustra los puntos IV y VII.

Algunos artículos en revistas matemáticas resultaron de las actividades del Seminario de Historia de las Matemáticas de Frankfurt, pero eso no era todo, la publicación no era nuestra meta. El verdadero objetivo del Seminario descansaba en una dirección completamente diferente, a saber, incrementar el entendimiento de los estudiantes participantes por los resultados presentados en lecturas y proveer a los maestros con la satisfacción estética de examinar detalladamente los trabajos sobresalientes de tiempos pasados.

Esta nota aparece en el artículo "On the history of Frankfurt Mathematics Seminar" de la revista The Mathematical Intelligencer Vol. 1. No. 4. Página 226. 1979., e ilustra los puntos I, VI.

Popper y Polya son los padrinos del trabajo de Lakatos; fué a sugerencia de Polya que él tomó como su tema la historia de la fórmula de Euler-Descartes: $V - E + F = 2$. Pruebas y Refutaciones usa esta historia como el texto en el cual basa su sermón: "las matemáticas, también como las ciencias naturales, es falible, no indubitable; también se desarrollan por la crítica y la corrección de teorías, las cuales nunca están enteramente libres de ambigüedad o la posibilidad de error o inadvertencia. Empezando con un problema o una conjetura, existe una investigación simultánea para demostraciones y contraejemplos. Nuevas demostraciones explican viejos contraejemplos, nuevos contraejemplos socavan viejas demostraciones".

Esta nota aparece en el artículo "Introducing Imre Lakatos" de la revista the Mathematical Intelligencer. Vol. 1 No 3. Página 149 1978, e ilustra los puntos I, III, VII.

El Cálculo Diferencial e Integral y el Análisis Matemático en general, es uno de los grandes alcances de la mente humana. Su lugar entre las ciencias naturales y humanísticas lo hace un medio singularmente fructífero de educación superior. Desafortunadamente, la forma mecánica en la cual el Cálculo es algunas veces enseñado malogra presentar la materia como el resultado de un dramático esfuerzo intelectual el cual ha perdurado por dos mil quinientos años o más, el cuál está profundamente enraizado en muchas fases de empeños humanos y continuará mientras el hombre haga lo posible por entenderse a sí mismo y a la naturaleza. Maestros,

estudiantes y escolares quienes realmente quieran comprender las fuerzas y surgimiento de la ciencia deben tener algún entendimiento del presente aspecto del conocimiento como un resultado de su evolución histórica. Como un hecho positivo, la reacción en contra del dogmatismo en la enseñanza científica, ha aparecido un interés creciente en la historia de la ciencia; durante las décadas recientes grandes progresos han sido hechos al trazar las raíces históricas de la ciencia en general y matemáticas en particular.
El presente volumen, que afortunadamente puede aparecer en una segunda impresión, es una contribución importante en dirección a la clasificación de muchos pasos los cuales llevan al desarrollo de los conceptos del Cálculo desde la antigüedad hasta el presente día; más allá de esto, da una relación y una narración altamente leible de esta historia fascinante. El libro debería llegar a cada maestro de matemáticas; entonces ciertamente tendría una fuerte influencia en dirección a una reforma saludable en la enseñanza de las matemáticas.

Esta nota es de Richard Courant y constituye el Prólogo del libro "the History of the Calculus and Its Conceptual Development" de Carl B. Boyer, e ilustra los puntos I, II, IV, VIII.

Independientemente del hecho de que los centros de educación puedan ofrecer una presentación más ilustrada de las matemáticas, teniendo en cuenta el número de objetivos y obligaciones que tienen, el estudiante interesado en la búsqueda de un conocimiento profundo debe tratar de ampliar su saber. A fin de adquirir un conocimiento y apreciación claros de lo que son las matemáticas es preciso penetrar hasta las ideas subyacentes, despejándolas de detalles sofisticados y atosigantes. Es necesario conocer sus objetivos y sus usos, las motivaciones de los hombres que las crearon y la génesis de los conceptos y estructuras modernas.

Esta nota es el Prólogo del libro "Matemáticas en el mundo moderno" de Morris Kline, e ilustra el punto I.

Entre los aprendedores que mencioné, olvidé uno, el más grande, la humanidad es también un aprendedor. Observar sus procesos de aprendizaje es lo que llamamos historia. ¿Como puede el aprendedor individual beneficiarse del conocimiento de los grandes procesos de aprendizaje de la humanidad?. Más que de sus detalles, él puede beneficiarse del hecho como tal. Cada etapa en el crecimiento de las matemáticas significó: conocimiento adquirido por discernimiento intelectual transformado por esquematización y memorización (o llámelo codificación) en habilidades y discernimiento intelectual de un orden más alto. .... La Historia de las Matemáticas ha sido un proceso de aprendizaje de esquematización progresiva. Los jóvenes no necesitan repetir la historia de la humanidad pero tampoco debería esperarse que comiencen en el mero punto a donde la generación anterior llegó. En cierto sentido, los jóvenes deberían repetir la historia, aunque no la que de hecho sucedió, sino la que hubiera sucedido si nuestros antecesores hubieran sabido lo que nosotros somos suficientemente afortunados de saber.

Esta nota aparece en el artículo "Problemas Mayores de Educación Matemática" de Hans Freudenthal. Boletín de Enseñanza #5, e ilustra los puntos IV y IX.

Sin los conceptos, métodos y resultados descubiertos y desarrollados por las generaciones previas hasta la Antigua Grecia uno no puede entender las finalidades y logros de las matemáticas de los últimos cincuenta años.

Esta nota es de Hermann Weyl y aparece en "Consideraciones Históricas y Heurísticas sobre la Enseñanza del Cálculo Diferencial e

Integral de Alejandro López Yáñez, e ilustra
los puntos I y II.

Uno aprende de la historia de la termodinámica que las nociones intuitivas, por las cuales la comprensión de hechos es facilitada y transmitida, de una forma u otra son de menos importancia que el estudio preciso de los hechos en sí, en el cual las nociones llegan a ser ajustadas y desarrolladas en un punto en el que su fuerza constructiva inherente llega a ser productiva.

Esta nota es de Ernest Mach y aparece en el libro "The Role of Mathematics in the Rise of Science" de Salomon Bochner, e ilustra los puntos VIII y IX.

Una de las tendencias esenciales del curso es apuntar hacia la historia de ciertas partes elementales de la ciencia como una fuente de enseñanza eficiente en el salón de clase. Algunos detalles históricos son un poco distorsionados: algunos intencionalmente, para bajarlos al nivel de la escuela secundaria, pero unos cuantos detalles pueden ser involuntariamente distorsionados, me temo. Una cuidadosa confrontación de lo apropiado pedagógicamente con la versión históricamente correcta sería muy deseable, pero no fué posible dentro de los límites de tiempo y energía en mi disposición. Unas cuantas sutilezas no históricas son también aproximadamente tratadas, por razones de espacio y pedagogía.

Esta nota es parte del Prefacio del libro "Mathematical Metods in thy Science" de George Polya, e ilustra el punto III.

Estoy enterado de que la mayoría de los descubrimientos científicos pueden ser descritos en unas cuantas palabras y demostrados por un pequeño número de experimentos decisivos. Pero si uno trata de comprender el origen de estos descubrimientos, se queda asombrado de la lentitud con que han evolucionado. Así pues, se pueden adoptar dos métodos para presentar un descubrimiento. Un método consiste en enunciar la ley y en demostrarla en su expresión actual, sin molestarse en la manera como ha cobrado vida. El otro método, más histórico, evoca los esfuerzos individuales de los inventores más importantes, adopta de preferencia sus propios términos, indica sus procedimientos esencialmente simples y trata de transportar mentalmente a su auditorio al período en que fue hecho el descubrimiento. El primer método ve principalmente el hecho, la ley y su utilidad práctica. Esconde a la gente joven la marcha lenta y progresiva de la mente humana. Desarrolla en ellos una espectativa de revolución repentina en el pensamiento y una admisión sin fundamento de ciertas gentes y acciones. El segundo método ilumina la inteligencia. La amplía, la cultiva, la vuelve capaz de producir y la prepara para nuevas invenciones. Este segundo método muestra que nada perdurable se obtiene sin un esfuerzo múltiple. Le da a la mente el hábito de la honestidad.

Esta nota aparece en el artículo "Sobre la utilidad del Método Histórico en la Enseñanza de las Ciencias" de Luis Pasteur del Boletín de Enseñanza #6, e ilustra los puntos I, II, IV.

2. SISTEMAS DE NUMERACION.

La Historia de las Matemáticas muestra que hay diferentes niveles de entendimiento, uso y abstracción del concepto de número, por ejemplo:

1. En algunos la idea de cantidad está completamente asociada al tipo de objeto. Habrá diferentes sonidos vocales para diferentes tipos de conjuntos, aunque su número fuese el mismo.

   Un ejemplo sorprendente de particularización es el temprano concepto de número en el lenguaje timshian de una tribu de la Columbia Británica. Hay siete conjuntos de palabras para cada número que conocen. Esto es, existen siete diferentes palabras para dos, siete otras para tres, etc. Un conjunto es para animales y objetos planos, uno para tiempo y objetos redondos, uno para objetos largos y árboles, uno para canoas, uno para medidas, uno para contar hombres y uno para objetos diversos que no caigan en las otras siete categorías. El último conjunto ya indica un progreso en dirección a la abstracción.

2. En otros niveles existen tribus en las que la numeración consiste en contar uno, dos, tres y después dicen muchos.

   Un ejemplo lo constituye los bosquimanos de Sud-Africa los únicos nombres que tienen para números son uno, dos y muchos.

3. En algunas culturas de la Antigüedad, no hay sistemas numéricos eficientes pues no hay números muy grandes, el hecho de que aparezcan cantidades muy grandes está íntimamente relacionado con un mejor desarrollo de la sociedad. En estas etapas los "números" están ligados a necesidades muy básicas.

"Los hombres primitivos encontraron en su medio ambiente modelos para simbolizar números: las alas de un pájaro para simbolizar el número dos, el trébol de tres hojas el tres, las piernas de un animal el cuatro, los dedos de su propia mano el cinco."

4. En la historia de los sistemas de numeración se ve cómo empiezan a aparecer gradualmente las bases, algunos antecedentes de las operaciones se tienen en el agrupamiento de marcas, señales, piedras, nudos en un cordel, y posteriormente en los sistemas de agrupación simple

"Una variedad de métodos para llevar la cuenta, o números grabados, ha sido encontrada en diferentes civilizaciones.
Entre éstas están:
A. Marcas en barro o sobre piedra.
B. Nudos en una cuerda o cordel, usado por los Incas del Perú.

C. Colecciones de guijarros o estacas, tales como las varas de cálculo chinas.

D. Incisiones en huesos o madera, tales como los palos de conteo ingleses usados hasta 1826."

Todas estas formas de representar cantidades no son un registro escrito pero tienden a esto.

Pero, ¿ qué podríamos entender por un sistema de numeración?. Podríamos decir que un sistema de numeración es un método en el cual se puede representar cualquier número o hasta números muy grandes, que tenga alguna forma de registro escrito y que en general no tenga mucha ambigüedad al hacer la representación de un número.
Entre los elementos que se han ido desarrollando para tener un sistema de numeración, tan elaborado como es un sistema de numeración posicional, están: las formas de representación, base, representaciones cada vez más breves, el cero, la regularidad en los nombres para las cantidades y las operaciones.
Analizando los distintos sistemas numéricos que han existido antes del nuestro, como son: los sistemas de agrupación simple (por ejemplo, el egipcio jeroglífico empleado alrededor de 3400 a. C.; el babilónico encontrado en tablas que datan de 2000 a. C., el griego ático alrededor de 300 a. C., los números romanos), los sistemas de agrupación multiplicativa (como el chino-japonés), los sistemas numéricos cifrados (por ejemplo, el sistema numérico griego empleado alrededor de 4500 a. C.), nos hacen pensar que no fué trivial llegar a tener un sistema numérico tan desarrollado como el nuestro, esto es,

sin ambigüedades en la representación, representaciones más breves, facilidad en el manejo computacional, manipular el cero como otro número más.

La evolución de estos elementos ha sido lenta, los propios griegos que tanto contribuyeron al desarrollo de las matemáticas no pudieron tener representaciones posicionales de sus números.

CONCLUSIONES.

Algunas conclusiones que podemos obtener de esta parte son las siguientes:

1. El desarrollo de los sistemas de numeración ha sido lento y pasó por diferentes etapas, esto es un indicador de la dificultad que ha tenido la humanidad para desarrollar un sistema de numeración como el actual.

2. La evolución de algunos elementos que intervienen en un sistema de numeración, como son: los nombres de los números, base, formas de representación más breves, los elementos de carácter operativo, los distintos papeles del cero, la regularidad en los nombres para las cantidades y las operaciones, también constituyen un indicador del esfuerzo de abstracción y la complejidad conceptual de un sistema de numeración.

3. Los distintos sistemas de numeración que han existido, nos hacen ver cómo diferentes grupos humanos encararon el problema de contar, esto nos ayuda a afirmar que no hay una sola forma de resolver un problema.

4. El orden en que van apareciendo las ideas corresponde al orden en que el hombre va teniendo necesidades, el origen de las matemáticas está íntimamente ligado a las necesidades del hombre primitivo.

5. Diversos sistemas de numeración con fuertes analogías fueron desarrollados por diferentes grupos humanos establecidos en regiones incomunicadas, este es un hecho que caracteriza a las matemáticas, el parecido en la solución a los problemas hace resaltar la universalidad del pensamiento matemático.

6. En matemáticas el desarrollo de unas ideas sirve de base para el desarrollo de otras, no se desecha la información, se van haciendo cosas a partir de otras, esta es otra característica de las matemáticas, su acumulatividad. En términos de los sistemas de numeración esto se hace patente, porque a partir del uso de marcas para facilitar el conteo surge la idea de base, posteriormente su uso será fundamental tanto en los sistemas de agrupación simple y de agrupación multiplicativa como en los sistemas numéricos posicionales, es decir, gran parte del esfuerzo inicial sirve como peldaño para ideas posteriores.

3. ¿POR QUE ESTO AYUDA A MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS?

Porque al contar con diferentes ejemplos históricos de sistemas de numeración, nos permite por medio de la comparación y contrastación delimitar y ampliar más el significado de los elementos inherentes a los mismos, como son: principio de agrupamiento, bases, operaciones, posición, brevedad de la escritura y los distintos papeles del cero.

Algunas situaciones que ejemplifican esta idea son las siguientes:

El sistema numérico griego, llamado Jónico o alfabético, es un sistema numérico cifrado, es decir, se elige una base b y posteriormente conjuntos de símbolos son adoptados para $1, 2, 3, \ldots, b-1$; $b, 2b, 3b, \ldots, (b-1)b$; $b^2, 2b^2, 3b^2, \ldots, (b-1)b^2$; y así sucesivamente. En este caso, el sistema de numeración griega tiene base diez y emplea 27 símbolos (las 24 letras del alfabeto griego junto con los símbolos para los obsoletos digamma, kappa y sampi) y por lo tanto las siguientes equivalencias debían ser memorizadas.

1	α	alpha	6	obsoleta	digamma	20	κ	kappa
2	β	beta	7	ζ	zeta	30	λ	lambda
3	γ	gamma	8	η	eta	40	μ	mu
4	δ	delta	9	θ	theta	50	ν	nu
5	ε	epsilón	10	ι	iota	60	ξ	xi

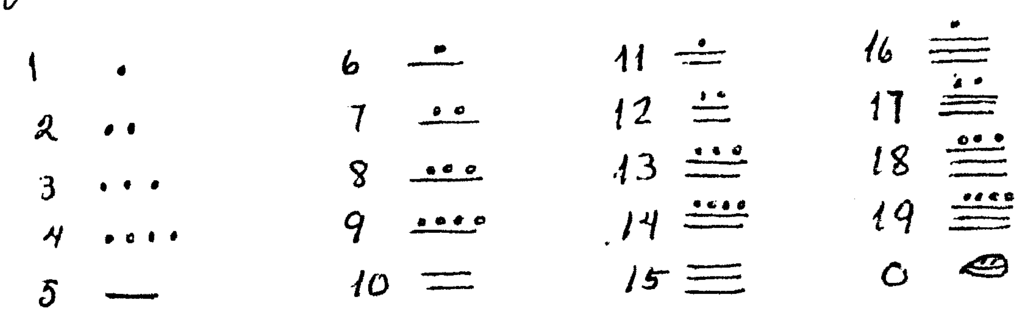
70	o	omicron	200	σ	sigma	600	χ	chi
80	π	pi	300	τ	tau	700	ψ	psi
90	obsoleta	koppa	400	υ	upsilon	800	ω	omega
100	ρ	rho	500	φ	phi	900	obsolete	sampi

Como ejemplo del uso de estos símbolos, tenemos que:

$12 = \iota\beta$, $21 = \kappa\alpha$, $247 = \sigma\mu\zeta$

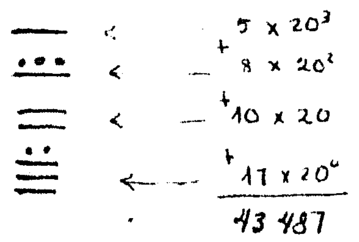
Ahora consideremos el siguiente sistema de numeración.

El sistema numérico maya cuya base es 20 y tiene 3 símbolos (•, —, ⬭) para representar sus dígitos



Como ejemplo del uso de estos símbolos, tenemos que

$$43,487 = 5(20^3) + 8(20^2) + 10(20) + 17(20^0)$$



¿Qué ventajas o desventajas tiene el sistema numérico griego con respecto del maya y viceversa?

Vemos que una posible ventaja del sistema numérico griego con respecto del sistema numérico maya podría ser que su escritura es más compacta y una posible desventaja del sistema numérico griego con respecto del maya podría ser que para escribir los números hace uso de 27 símbolos, mientras que el maya sólo tiene 3, esos 27 símbolos se debían memorizar. Si uno se pone a pensar sobre el problema de memorizar 27 símbolos, uno duda si realmente esto podría constituir una desventaja del sistema numérico griego, pues en la antigüedad gran parte del conocimiento se transmitía en forma oral y la capacidad de memorización de cierta gente era más desarrollada. En particular, podemos concluir que <u>la cantidad de símbolos que usemos en un determinado sistema numérico es variable</u> y <u>puede depender de las necesidades específicas que se tengan.</u>

Una posible aplicación de esta conclusión en nuestro salón de clase puede ser la siguiente:

Podría suceder que nuestros estudiantes pensaran que el sistema decimal es el mejor sistema numérico posicional, sin embargo uno podría mostrarles que la elección de una base es arbitraria y que en este caso diez, no es un caso especial sino porque tenemos diez dedos, y que de hecho, todos los días estamos usando otras bases, por ejemplo, usamos la base 60 para medir el tiempo (1 hora = 60 minutos, 1 minuto = 60 segundos), otra base muy usada en computación es la base dos, porque los dígitos 0 y 1 pueden representar las posiciones encendido-apagado de un interruptor, es decir, recurrimos a otros sistemas posicionales dependiendo de las necesidades que tengamos.

En los sistemas de numeración va apareciendo la necesidad de un símbolo que denote la ausencia de unidades de un cierto orden, en este momento el cero es un artificio que se usa para evitar ambigüedades en la representación de ciertos números posteriormente el cero empieza a sumarse, restarse, multiplicarse con los otros números; así el cero de un mero símbolo pasa a ser tratado como otro número más, y el poder hacer la diferencia entre la idea de cero que hoy manejamos y la que se tenía en la antigüedad nos permite comprender la evolución del concepto de número, en particular, la del cero, por lo tanto podemos concluir que: por medio de los sistemas numéricos podemos entender mejor el concepto de cero.

Como profesor de matemáticas nuestra intención debería ser la de mejorar el entendimiento de los estudiantes del concepto de número, y en particular del cero, de forma más viva y rica, mostrando los distintos aspectos de la evolución del concepto de número.

Supongamos que nos enfrentamos (como profesores) a las siguientes situaciones

Un estudiante no entiende porqué cualquier base queda expresada por 10 (uno-cero) en el sistema posicional con dígitos 0, 1, 2, 3, ..., b-1 y de base b

Trataremos de explicar este problema tomando algunos ejemplos de sistemas posicionales.

Consideremos el sistema posicional maya.

Recordemos que la base del sistema posicional maya es el veinte y los símbolos usados, para representar los números, son tres:

•, —,

El dígito correspondiente a cero es

El dígito correspondiente a uno es •

El dígito correspondiente a dos es ••

El dígito correspondiente a tres es •••

El dígito correspondiente a cuatro es ••••

El dígito correspondiente a cinco es —

El dígito correspondiente a seis es $\overset{\bullet}{—}$

El dígito correspondiente a siete es

El dégito correspondiente a ocho es

El dégito correspondiente a nueve es

El dégito correspondiente a diez es

El dégito correspondiente a once es

El dégito correspondiente a doce es

El dégito correspondiente a trece es

El dégito correspondiente a catorce es

El dégito correspondiente a quince es

El dégito correspondiente a dieciséis es

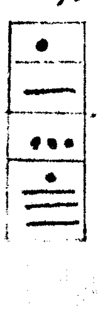
El dégito correspondiente a diecisiete es

El dégito correspondiente a dieciocho es

El dégito correspondiente a diecinueve es

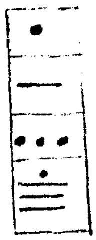
Los mayas escribían los números en forma vertical, y el orden en que aparecen los dígitos en la representación de un número era de abajo hacia arriba, es decir, primero se escribían las unidades, arriba de ellas, las veintenas, etc.

Ejemplo:



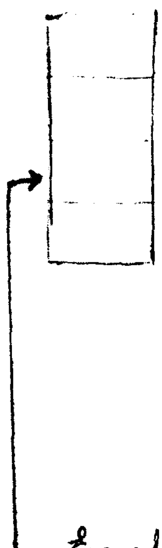
Este número maya es el resultado de tomar dieciséis unidades, después tres veces veinte, después cinco veces veinte por veinte, después una vez veinte por veinte por veinte.

Este número en nuestro sistema numérico es el número 10076



1×20^3	=	8000
5×20^2	=	2000
3×20	=	60
16×20^0	=	16
		10076

Veamos qué está pasando cuando escribimos un número en el sistema posicional maya.

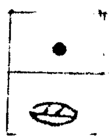


← En este primer espacio sólo podemos escribir los símbolos de los veinte dígitos, es decir, aquí podemos escribir el , ó el •, ó el ••, así hasta el

En el segundo espacio podemos escribir los símbolos de los veinte dígitos, desde hasta , pero esto significará el número de veces que estamos tomando veinte. Si, por ejemplo, escribimos el esto significará que estamos tomando quince veces el veinte.

En el tercer espacio también podemos escribir el , •, ••, así hasta el , pero esto significará el número de veces que estamos tomando veinte por veinte. Por ejemplo, si escribimos el , esto significará que estamos tomando ocho veces veinte por veinte.

Con los demás espacios procedemos de forma análoga.
De esta manera para representar el veinte, base de este sistema posicional, vemos que el veinte cabe en el veinte una sola vez, por lo expuesto anteriormente, aparecerá el uno maya en el segundo espacio, que corresponde a tomar una veintena y en la casilla inferior deberá aparecer el cero maya, que corresponde a tomar cero unidades.
Por lo tanto, la representación en el sistema posicional maya del número veinte es:

1 ⟶  $1 \times 20 = 20$

0 ⟶ $0 \times 20^0 = 0$

$$\underline{0}$$
$$20$$

Por lo tanto, veinte en el sistema posicional maya queda representado por el uno y por el cero.

Ahora consideremos un sistema posicional cuya base es cinco.
El dígito correspondiente a cero es ⊖
El dígito correspondiente a uno es •
El dígito correspondiente a dos es •—•
El dígito correspondiente a tres es △
El dígito correspondiente a cuatro es □

Para representar un número en esta base, haremos las siguientes consideraciones: escribimos la representación de nuestro número de derecha a izquierda.

_ _ _ _ _

En este primer espacio podemos escribir cualquiera de los cinco dígitos

En este segundo espacio también podemos escribir cualquiera de los cinco dígitos, pero aquí el dígito nos está indicando las veces que cabe el cinco en nuestro número.

En el tercer espacio también podemos escribir cualquiera de los dígitos, pero aquí el dígito nos estará indicando el número de veces que cabe veinticinco en nuestro número.

Con los demás espacios procedemos de manera análoga.

Así, el número • △ • en nuestro sistema numérico es el 41.

• △ •

$1 \times 5^0 = 1$

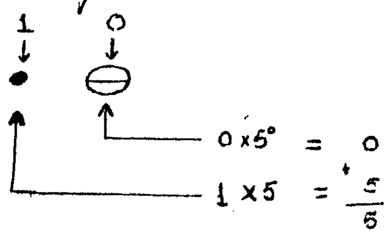
$3 \times 5 = 15$

$1 \times 5^2 = 25$

41

Ahora, el cinco en este sistema numérico posicional quedará representado de la siguiente forma:

Debido a que el cinco cabe en el cinco una sola vez, entonces en el segundo espacio escribimos el dígito uno, y en el primer espacio escribimos el dígito correspondiente a cero. Por lo tanto, la representación del número cinco en este sistema posicional de base cinco es:



Hemos visto dos ejemplos de sistemas posicionales, en donde la base queda representada por 10, es de esperarse que en cualquier sistema posicional de base b, también b quede representado por 10.

Un estudiante pregunta a su profesor. ¿de dónde proviene el concepto de base? ¿Porqué usar bases?
Analicemos algunos sistemas de conteo de las tribus australianas:

Darling River	Belgando River	Murray River
1. Neecha	1. Wogin	1. Enea
2 Boolla	2 Booleroo	2. Petcheval
3 Boolla Neecha	3 Booleroo Wogin	3. Petcheval Enea
4 Boolla Boolla	4 Booleroo Booleroo	4. Petcheval Petcheval

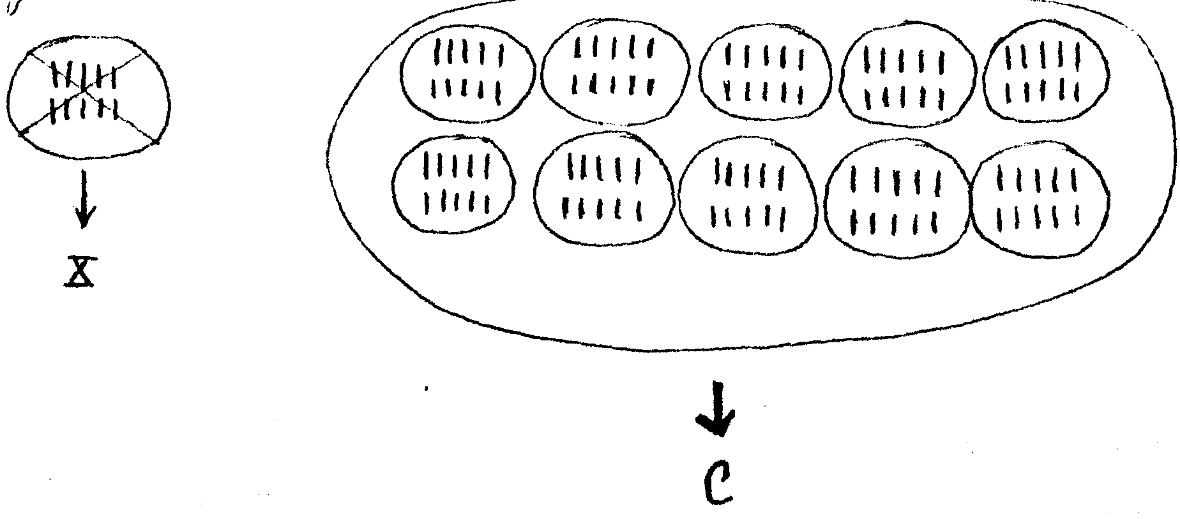
Torres Straits	Kamilaroi
1. Urapun	1. Mal
2. Okosa	2. Bulan
3. Okosa Urapun	3. Guliba
4. Okosa Okosa	4. Bulan Bulan
5. Okosa Okosa Urapun	5. Bulan Guliba
6. Okosa Okosa Okosa	6. Guliba Guliba.
Ras (muchos)	

Observamos que para obtener números más grandes, estos sistemas de conteo hacen referencia a un número y a un principio de agrupamiento.

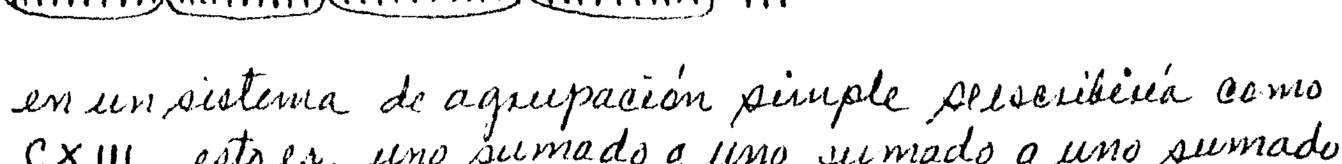
Por ejemplo, en el Darling River el tres es Boolla Neecha (dos y uno), el cuatro es Boolla Boolla (dos y dos); en el Torres Straits el tres es Okosa Urapun (dos y uno) el cuatro es Okosa Okosa (dos y dos), el seis es Okosa Okosa Okosa (dos y dos y dos).
Se puede pensar que empiezan a utilizar la idea de base.
El ir usando números más grandes y tratar de simplificar su escritura nos muestra que los antecedentes de la idea de base y de las operaciones se encuentran en las agrupaciones: el ir tachando de cinco en cinco, luego cinco montones de esos, luego cinco montones de esos montones, etc; esto no es independiente de la adición ya que subyace un principio de agrupamiento y esto empieza a darnos la idea de base.
Probablemente los sistemas numéricos se desarrollaron por la necesidad de registrar números cada vez más

grandes y porque era más difícil para el hombre recordar cien mil nombres diferentes de números, el arreglar sus números en grupos le ayudó a resolver esos problemas, así, tuvo que determinar la medida de esos grupos, de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco, de diez en diez, de veinte en veinte,...

Por ejemplo, si su base era el diez, él debería agrupar diez objetos y crear un símbolo para diez, digamos X, el siguiente grupo debería tener, por lo menos en una segunda etapa, diez de esos diez grupos y crear un símbolo para este grupo, digamos C.



Así para escribir el número representado por:



en un sistema de agrupación simple se escribiría como C X III, esto es, uno sumado a uno sumado a uno sumado a diez sumado a cien.

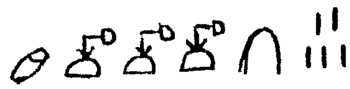
En un sistema de agrupación simple se selecciona un número b como base y se adoptan símbolos para $1, b, b^2, b^3, \ldots$; y cualquier número se expresa usando estos símbolos en forma aditiva, cada símbolo es repetido el número de veces que sea necesario.

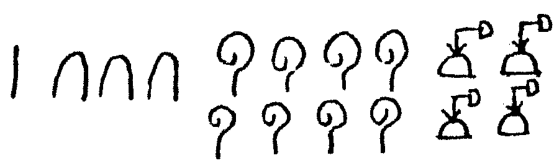
Un ejemplo de este sistema lo constituye el sistema numérico jeroglífico egipcio (usado alrededor de 3000 a. de C.) cuya base es diez.

Los símbolos para uno y las primeras potencias de diez son:

$1 =$
$10 =$
$10^2 =$
$10^3 =$
$10^4 =$
$10^5 =$
$10^6 =$

Ejemplos:

$13015 = 10000 + 3000 + 10 + 5 =$ 

$1831 = 1000 + 800 + 30 + 1 =$ 

4. INFORMACION HISTORICA QUE SE PUEDE INCORPORAR EN UN CURSO.

Durante los cursos de Cálculo Diferencial e Integral I que he impartido, he observado que uno de los conceptos más difíciles para el estudiante lo constituye el concepto de límite, siendo éste fundamental para el entendimiento y aprovechamiento del curso. Históricamente podemos ver que este concepto en verdad ha sido difícil de manejar y entender por las personas que han estudiado matemáticas, ya en la época de los griegos se hace evidente esta dificultad, como se muestra en las siguientes observaciones que hace Edwards en su libro "The Historical Development of the Calculus":

> Ciertamente los griegos estudiosamente evitaron explícitamente "tomar el límite" y este virtual "horror al infinito" es probablemente responsable de la claridad lógica del método de exhaución.
>
> Si bien es verdad que el trabajo de Arquímedes finalmente (en el siglo XVII) dió origen al Cálculo, tres ingredientes del Cálculo están ausentes de sus métodos, uno de ellos es:
>
> La introducción explícita de conceptos límite.
>
> Arquímedes, al menos en sus demostraciones formales, si no en sus análisis informales, compartió el "horror al infinito" griego. El concepto de rigor griego demandó el engorroso doble argumento de reducción al

absurdo en lugar de un simple paso al límite.

Posteriormente, en el siglo XVII, la dificultad de trabajar con el infinito es superada al empezar a calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas por medio de métodos infinitesimales

El horror al infinito griego ha impedido el desarrollo de una teoría utilizable de límites que reemplace las demostraciones ubicuas de reducción al absurdo. Pero, como un resultado de las especulaciones escolásticas medievales sobre el infinito y el continuo, los matemáticos del siglo XVII no fueron muy renuentes a introducir técnicas infinitesimales

Esta rica amalgama de ingredientes matemáticos — problemas de Arquímedes, técnicas computacionales algebraicas, y el uso libre de conceptos intuitivos del infinito — produjo una proliferación de métodos infinitesimales poderosos (aunque vagamente basados) para la solución de problemas de área y volumen durante el "siglo de anticipación" precedente al tiempo de Newton y Leibniz". Algunos de esos métodos son: el método de los indivisibles de Kepler (1571 - 1630) y el método de los indivisibles de Cavalieri (1598 - 1647).

Creo que un tema que puede ayudarnos a introducir y familiarizar al estudiante con el concepto de límite puede ser el encontrar el área del círculo utilizando el Método de Exhaución de Eudoxo (408? – 385? a. de C), porque involucra elementos y conceptos más cercanos al estudiante, como son: el cálculo de áreas de polígonos regulares, algunas propiedades de los números naturales, algunas nociones de Geometría, es decir, este tema constituye un puente entre los conocimientos que tiene el estudiante y el concepto de límite como se usa en Cálculo.
Además, la idea intuitiva de límite se ve fuertemente apoyada por elementos de carácter geométrico, "al ir viendo" cómo se va agotando el área del círculo cuando se inscriben en él, polígonos regulares cada vez con un mayor número de lados.
De esta forma la Historia de las Matemáticas nos aporta información que al ser incorporada directamente al curso de Cálculo propicia el aprendizaje del estudiante y le brinda una bella introducción al concepto de límite.

La presentación que doy de este tema, está basada en las notas del Dr. Alejandro López Yáñez, "Consideraciones Históricas y Heurísticas sobre la Enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral", que a continuación desarrollo.

El siguiente teorema es la Proposición 2 del Libro XII de los Elementos de Euclides ($\pm 330, \pm 275$ a. de C.).

Teorema 1. Las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros. Esto es, si tenemos un círculo con área C_1 y otro con área C_2 y con diámetros d_1 y d_2 respectivamente, entonces

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

Obsérvese que esto equivale a dar la fórmula del área del círculo, porque si $C_2 = 1$ y r_1 es el radio del círculo de área C_1, entonces

$$\frac{C_1}{1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{2r_1}{d_2}\right)^2$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{4}{d_2^2}\, r_1^2$$

$$\therefore \quad C_1 = k\, r_1^2$$, en donde sólo queda determinar el valor de la constante k.

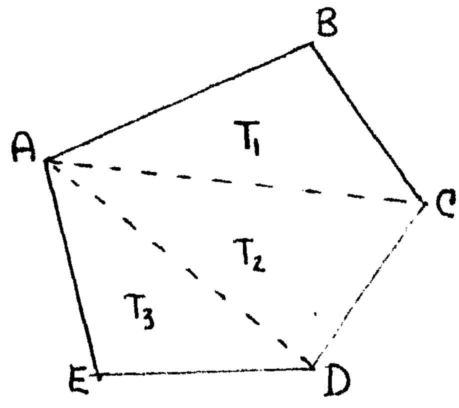
La idea de la demostración, y posiblemente un origen del teorema, es concebir a la circunferencia como un polígono con un número infinito de lados, o podríamos decir, como el límite de polígonos regulares inscritos en ella con un número creciente de lados. Como para los polígonos inscritos el teorema es válido, es una posibilidad viable que también para el caso límite sea cierto. Esa forma de concebir la circunferencia fué, en la antigüedad, fuente de descubrimientos matemáticos importantes y fué tomando diferentes formas y generalizaciones siendo las más conocidas las de Nicolás de Cusa, Kepler y Leibniz, esta última conocida como El Principio de Continuidad de

Leibniz, que dice: "En cualquier proceso o transición que finaliza en algún término, es permisible establecer un razonamiento en el cual el término final puede ser incluido."

Demostración. La demostración del Teorema 1 puede ser considerada en tres pasos. En el primero, se demuestra el teorema análogo para polígonos. En el segundo, se demuestra que el área del círculo puede ser exhaustada o aproximada, con el grado de precisión necesario, por medio de las áreas de polígonos regulares inscritos de 2^n lados. En el tercero, se usa el método de reducción al absurdo, o método indirecto, para derivar el resultado buscado.

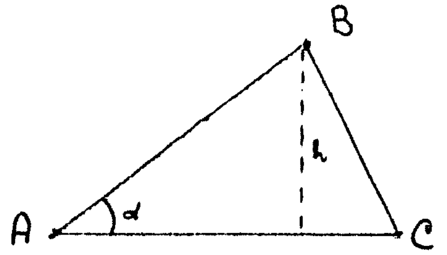
Algunas nociones preliminares a la demostración del primer paso son las siguientes:

Si tenemos un polígono convexo, su área se puede calcular triangulándolo.



Area del Polígono ABCDE = área del triángulo T_1 + área del triángulo T_2 + área del triángulo T_3.

Y el área de un triángulo puede ser calculada como el producto de una constante por el producto de dos de sus lados, esa constante depende únicamente del ángulo comprendido entre los lados escogidos.



$$\text{área del triángulo } ABC = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$= \frac{AC \times h}{2}$$

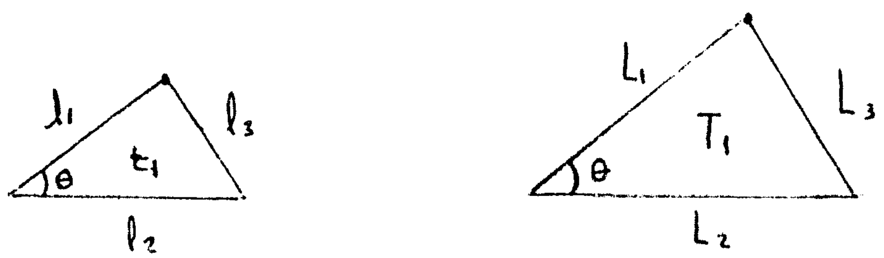
$$= \frac{AC \times AB \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} (AC)(AB)$$

$$= k \ (AC)(AB)$$

$\therefore$ area del triángulo $ABC = k \ (AC)(AB)$

Consideremos dos triángulos semejantes



Por ser semejantes estos triángulos, sus ángulos son iguales y $L_1 = c\,l_1$, $L_2 = c\,l_2$, $L_3 = c\,l_3$ donde c es la constante de proporcionalidad.

Calculando las áreas de estos triángulos tenemos que:

área de $t_1 = k\, l_1 l_2$, área de $T_1 = k\, L_1 L_2$

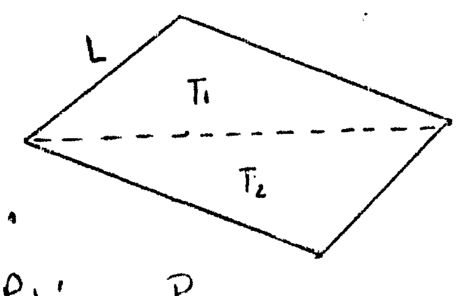
Entonces $\dfrac{\text{área de } T_1}{\text{área de } t_1} = \dfrac{k L_1 L_2}{k\, l_1 l_2} = \dfrac{k\,(c l_1)(c l_2)}{k\, l_1 l_2} = c^2$

$$\therefore\ \frac{\text{área de } T_1}{\text{área de } t_1} = c^2 = \left(\frac{L_1}{l_1}\right)^2 = \left(\frac{L_2}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{L_3}{l_3}\right)^2$$

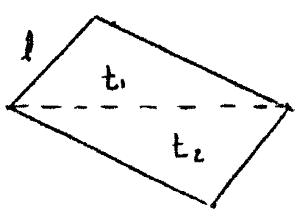
Es decir, la relación entre las áreas de los triángulos semejantes es c^2, donde c es la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos

$$\therefore\ \frac{\text{área de } T_1}{\text{área de } t_1} = c^2$$

Ahora, pasemos al caso de polígonos semejantes, triangulando ambos polígonos encontramos que sus áreas son proporcionales a los cuadrados de cualesquiera par de lados homólogos.



Polígono P_1



Polígono P_2

$$\begin{aligned}\text{Area de polígono } P_1 &= \text{área de } T_1 + \text{área de } T_2\\ &= c^2\,\text{área de } t_1 + c^2\,\text{área de } t_2\\ &= c^2\,(\text{área de } t_1 + \text{área de } t_2)\\ &= c^2\,(\text{área del polígono } P_2)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{área del polígono } P_1}{\text{área del polígono } P_2} = c^2 = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2$$

donde c es la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos de los polígonos, esto es, las áreas de polígonos semejantes están en la misma razón que los cuadrados de dos cualesquiera lados correspondientes.

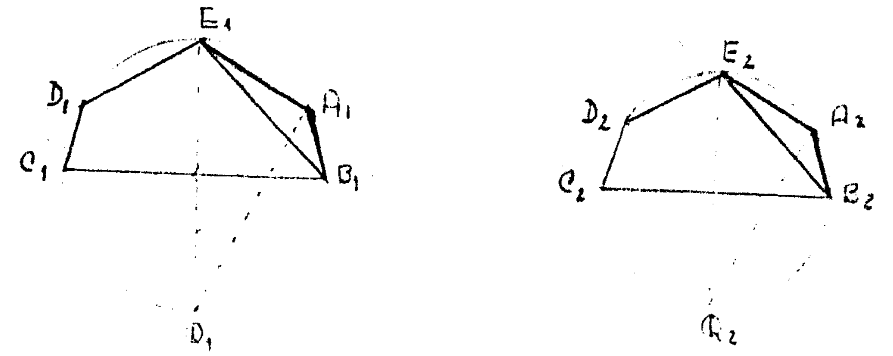
Ahora sí veamos la <u>demostración</u> del primer paso.

<u>Teorema</u>. (Proposición 1 del Libro XII de los Elementos de Euclides). Las áreas de polígonos semejantes inscritos en círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros.

Como hemos visto las áreas de polígonos semejantes están en la misma razón que los cuadrados de dos cualesquiera lados correspondientes, por lo tanto <u>es suficiente demostrar</u> que una pareja de lados correspondientes están en la misma razón que los diámetros correspondientes

Consideremos los polígonos semejantes $A_1B_1C_1D_1E_1$ y $A_2B_2C_2D_2E_2$ inscritos en los círculos correspondientes C_1 y C_2.

Sean Q_1 y Q_2 tales que E_1Q_1 y E_2Q_2 son diámetros.



Por demostrar que $\dfrac{E_1Q_1}{E_2Q_2} = \dfrac{E_1A_1}{E_2A_2}$

El ángulo $E_1A_1B_1$ es igual al ángulo $E_2A_2B_2$ y los lados que los determinan son proporcionales, ya que, por hipótesis los polígonos son semejantes. Por lo tanto, los triángulos $E_1A_1B_1$ y $E_2A_2B_2$ son equiangulares, y por lo tanto semejantes.

$$\therefore\ \triangle E_1A_1B_1 \sim \triangle E_2A_2B_2$$

De aquí obtenemos que ángulo $A_1B_1E_1$ = ángulo $A_2B_2E_2$, además los ángulos $A_1B_1E_1$ y $A_1Q_1E_1$ son inscritos y subtienden el mismo arco y por lo tanto son iguales, lo mismo sucede con los ángulos $A_2B_2E_2$ y $A_2Q_2E_2$,

de aquí se obtiene que: ángulo $A_1 Q_1 E_1$ = ángulo $A_2 Q_2 E_2$
ya que, ángulo $A_1 B_1 E_1$ = ángulo $A_1 Q_1 E_1$
y ángulo $A_2 B_2 E_2$ = ángulo $A_2 Q_2 E_2$
y ya sabíamos que ángulo $A_1 B_1 E_1$ = ángulo $A_2 B_2 E_2$.

Ahora, como los ángulos $E_1 A_1 Q_1$ y $E_2 A_2 Q_2$ son rectos, tenemos que los triángulos $A_1 Q_1 E_1$ y $A_2 Q_2 E_2$ son equiángulares, y por lo tanto semejantes

$$\therefore \ \triangle A_1 Q_1 E_1 \sim \triangle A_2 Q_2 E_2$$

$\therefore \ \dfrac{E_1 Q_1}{E_2 Q_2} = \dfrac{E_1 A_1}{E_2 A_2}$, es decir, una pareja de lados correspondientes está en la misma razón que los diámetros correspondientes, que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto,

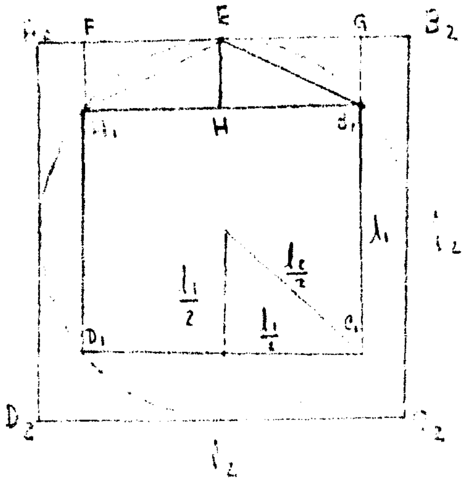
$$\frac{\text{área del polígono } A_1 B_1 C_1 D_1 E_1}{\text{área del polígono } A_2 B_2 C_2 D_2 E_2} = \left(\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right)^2 = \left(\frac{E_1 Q_1}{E_2 Q_2}\right)^2.$$

con lo que terminamos el primer paso.

Demostración del 2º paso.

Demostraremos ahora que las áreas de polígonos regulares de 2^n lados exhaustan el área del círculo.

Inscribamos un cuadrado $A_1B_1C_1D_1$ en el círculo; demostraremos que el área de este cuadrado es mayor que la mitad del área del círculo.



Consideremos el cuadrado excrito $A_2B_2C_2D_2$, con lados paralelos al cuadrado inscrito.
Si llamamos l_1 a la longitud del lado del cuadrado inscrito y l_2 a la del cuadrado excrito, tenemos, por el Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_2}{2}\right)^2$$

y en consecuencia

$$2\, l_1^2 = l_2^2$$

$$l_1^2 = \frac{l_2^2}{2}$$

Entonces, el área del cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado excrito y como ésta es mayor que la del círculo, tenemos demostrado lo que nos propusimos. Por lo tanto, la mitad del área del círculo es menor que el área del cuadrado inscrito.

Ahora, consideremos el octágono regular obtenido al bisectar el arco superior A_1B_1 en el punto E.
Demostraremos que del exceso del área del círculo con respecto al cuadrado inscrito, el octágono incluye más de la mitad.
Claramente, el octágono incluye exactamente las áreas de los triángulos A_1EH y HEB_1, cuya suma es exactamente la mitad del área del rectángulo A_1FGB_1, esto es, área del triángulo A_1EB_1 es mayor que la mitad del segmento circular A_1B_1, ya que:

área del triángulo $A_1EB_1 = \frac{1}{2}$ del área del rectángulo $A_1FGB_1 > \frac{1}{2}$ del área

del segmento circular A_1B_1.

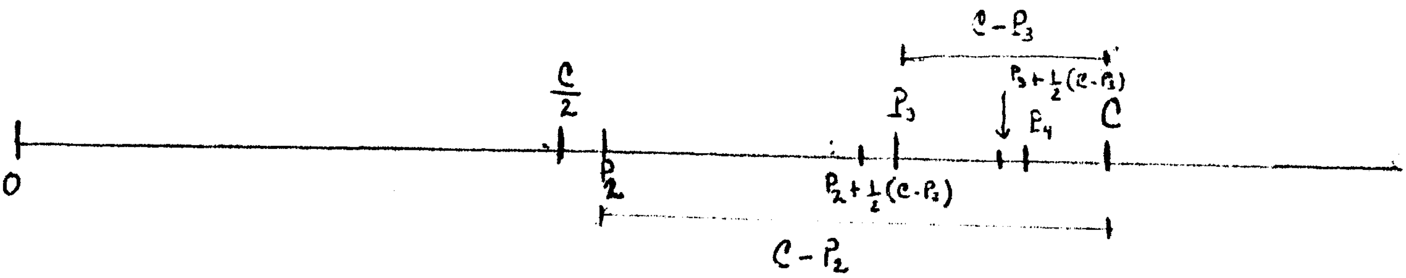
Y por lo tanto el octágono incluye más de la mitad del segmento circular

Si C es el área del círculo y P_i es el área del polígono regular de 2^i lados inscrito en el círculo, entonces podemos formar la siguiente tabla.

Número de lados del Polígono	Relación entre las áreas del Polígono y del Círculo.	Exceso del área de Círculo respecto al Políg
$2^2 = 4$	$P_2 > \frac{C}{2}$	$C - P_2$
$2^3 = 8$	$P_3 > P_2 + \frac{1}{2}(C - P_2)$	$C - P_3$
$2^4 = 16$	$P_4 > P_3 + \frac{1}{2}(C - P_3)$	$C - P_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^i	$P_i > P_{i-1} + \frac{1}{2}(C - P_{i-1})$	$C - P_i$

En general, tenemos que $P_i > P_{i-1} + \frac{1}{2}(C - P_{i-1})$

Representando este proceso en la recta numérica, tenemos:



De aquí, usando básicamente una consecuencia del principio obvio para los matemáticos de la época, de que dadas dos cantidades podemos sumar la pequeña consigo misma un número suficientemente grande de veces hasta exceder la grande (lo que ahora es conocido como el Axioma de Arquímedes), Eudoxo afirma que la diferencia del área del círculo y la del polígono regular de 2^n lados, con n suficientemente grande puede ser hecha menor que una cantidad asignada de antemano.

Ahora, sólo resta demostrar el tercer paso.
Si C_1 es el área de un círculo y C_2 es el área de otro círculo y d_1 y d_2 son respectivamente los diámetros de esos círculos, entonces

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

(Las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros).

La demostración de este paso se hace por Reducción al Absurdo.
Supongamos que: $\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{d_1^2}{d_2^2}$

Entonces (i) $\frac{C_1}{C_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$ o (ii) $\frac{C_1}{C_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$

Si $\frac{C_1}{C_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$ entonces para tener una igualdad entre estos cocientes necesitamos dividir C_1 entre algo más chico que C_2 para que el cociente crezca.

Sea $C_3 < C_2$, donde C_3 es el área de un círculo contenido dentro del círculo de área C_2, tal que

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Debido al resultado del 2º paso, existe un polígono regular de área P_n, inscrito en el círculo de área C_2, tal que

$$C_2 - P_n < C_2 - C_3$$

esto implica que $C_3 < P_n < C_2$

Ahora, consideremos un polígono de área P semejante al polígono de área P_n, inscrito en C_1, por el resultado del primer paso, tenemos que

$$\frac{P}{P_n} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $\frac{C_1}{C_3} = \frac{P}{P_n}$, es decir que

$C_1 P_n = C_3 P$, también sabemos que $P < C_1$ y por lo tanto necesariamente $C_3 > P_n$

Pero si $C_3 > P_n$ esto contradice que $C_3 < P_n < C_2$. Por lo tanto, si suponemos que $\frac{C_1}{C_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$ nos conduce a una contradicción.

$$\therefore \quad \frac{C_1}{C_2} \not< \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad ------ \quad (*)$$

Ahora, vamos a demostrar que $\frac{C_1}{C_2} \not> \frac{d_1^2}{d_2^2}$

(*) Dada $\frac{C_1}{C_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$ para poder llegar a una igualdad, también se podría considerar el caso en que C_1 aumentara, esto es, existe un círculo de área C_3 con $C_3 > C_1$ tal que $\frac{C_3}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$

Si $\frac{C_1}{C_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$ para tener una igualdad entre estos cocientes necesitamos disminuir C_1.

Sea C_3 el área de un círculo tal que $C_3 < C_1$ y de tal forma que $\frac{C_3}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$ .... (3)

Existe un polígono regular de área P_n, inscrito en el círculo de área C_1, tal que

$$C_1 - P_n < C_1 - C_3$$

esto implica que $C_3 < P_n < C_1$

Ahora, consideremos un polígono de área P, semejante al polígono de área P_n, inscrito en C_2, entonces

$$\frac{P_n}{P} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

De (3) y (4) obtenemos que $\frac{C_3}{C_2} = \frac{P_n}{P}$, esto implica que $P C_3 = C_2 P_n$, por lo tanto debido a que $P < C_2$ necesariamente $C_3 > P_n$, pero esto último contradice que $C_3 < P_n < C_1$.

Por lo tanto si suponemos que $\frac{C_1}{C_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$ nos conduce a una contradicción.

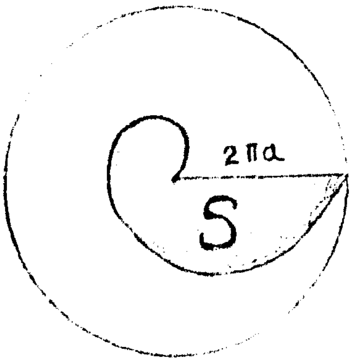
$$\therefore \quad \frac{C_1}{C_2} \not> \frac{d_1^2}{d_2^2} \quad \ldots \quad **$$

Como $\frac{C_1}{C_2} \not< \frac{d_1^2}{d_2^2}$ y $\frac{C_1}{C_2} \not> \frac{d_1^2}{d_2^2}$

necesariamente $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$ y así concluimos la prueba del Teorema de Eudoxo.

** Dada $\frac{C_1}{C_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$ para poder llegar a una igualdad, también se podía considerar el caso en que C_2 aumentara, es decir, existe un círculo de área C_3 con $C_3 > C_2$ tal que $\frac{C_1}{C_3} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$

Otro tema que puede servir como puente entre los conocimientos del estudiante y el concepto de Integral Definida también lo encontramos en la Historia de las Matemáticas, este tema consiste en demostrar que el área de la región acotada por una vuelta de la espiral de Arquímedes (287 - 212 A. de C.) y el segmento de línea que une los puntos inicial y final de la espiral es $\frac{1}{3}$ del área del círculo centrado en el punto inicial de la espiral y que pasa por el punto final de la espiral



Area de $S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$

La exposición de este tema está basada en el libro "The Historical Development of the Calculus" de C.H. Edwards Jr. Creo que este problema es un tema de apoyo para esta parte de un curso de Cálculo porque involucra nociones conocidas por el estudiante o plenamente a su alcance, como son:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$$

Este problema puede resolverse realizando la construcción geométrica que hizo Arquímedes para la demostración de este hecho.
Arquímedes define su famosa espiral como la composición de un movimiento lineal uniforme y un movimiento circular uniforme.

"Si una línea recta dibujada en un plano gira con una velocidad uniforme alrededor de un extremo que permanece fijo y regresa a la posición de la cual empezó, y si, al mismo tiempo que la línea gira, un punto se mueve con una velocidad uniforme sobre la línea recta empezando desde el extremo que permanece fijo, el punto describirá una espiral en el plano. (Definición 1 de Sobre las Espirales)."

Para escribir esta curva en coordenadas polares, sea w (en radianes) la velocidad angular constante de rotación de la recta y v la velocidad constante con la que el punto se mueve sobre la recta, empezando en el origen.

Así, las coordenadas polares del punto en un tiempo t, son:

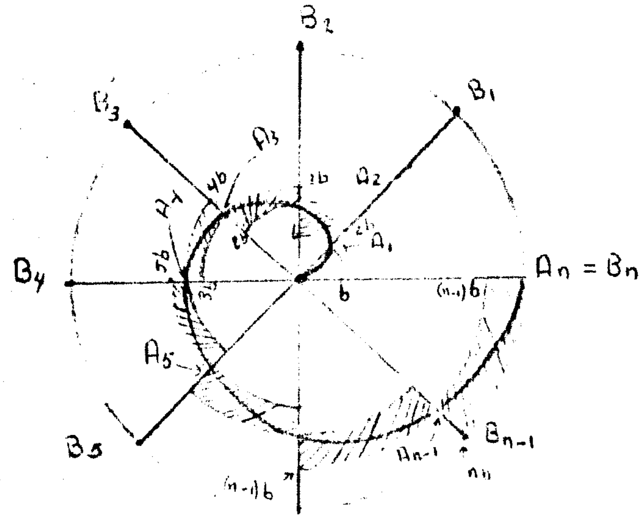
$$r = vt \qquad y \qquad \theta = wt$$

Por lo tanto, eliminando t de ambas ecuaciones obtenemos la ecuación en coordenadas polares de la espiral:

$$\boxed{r = a\theta \quad , \text{ donde } a = \frac{v}{\omega}}$$

Deseamos demostrar que $A(S) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$

La construcción geométrica de Arquímedes para la demostración de este hecho, es la siguiente:



Dividimos el círculo en n sectores iguales, de tal forma que los radios que acotan los sectores intersecten a la espiral en los puntos:

$O, A_1, A_2, \ldots, A_n.$

Si escribimos $OA_1 = b$ entonces $b = a\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

De aquí, se sigue que $OA_2 = a \cdot 2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2a\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2b$

$$OA_3 = a \times 3\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 3a\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 3b$$

$$OA_4 = a \times 4\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 4a\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 4b$$

$$\vdots$$

$$OA_n = a \times n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = na\left(\frac{2\pi}{n}\right) = nb$$

Esto es, $OA_1 = b$, $OA_2 = 2b$, $OA_3 = 3b, \ldots, OA_n = nb$

Podemos ver que la región S determinada por la espiral, contiene a la región P, que está determinada por n sectores circulares de radios

$$0, b, 2b, 3b, \ldots, (n-1)b$$

Y está contenida en la región Q determinada por n sectores circulares de radios

$$b, 2b, 3b, \ldots, nb.$$

Luego, el área de un sector circular $= \dfrac{\text{área del círculo}}{n}$

$$= \frac{\pi r^2}{n}$$

$$= \frac{\pi (2\pi a)^2}{n}$$

$\therefore$ área de un sector circular $= \dfrac{4\pi^3 a^2}{n}$

Por otro lado, si denotamos por $A(Q)$ el área de la región Q y por $A(P)$ el área de la región P, tenemos que:

$$A(P) = 0 + \frac{\pi b^2}{n} + \frac{\pi (2b)^2}{n} + \dots + \frac{\pi [(n-1)b]^2}{n}$$
$$= \frac{\pi b^2}{n}\left[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right]$$
$$= \frac{\pi b^2}{n}\left[\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)}{6}\right]$$

$$A(Q) = \frac{\pi b^2}{n} + \frac{\pi (2b)^2}{n} + \dots + \frac{\pi (nb)^2}{n}$$
$$= \frac{\pi b^2}{n}\left[1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right]$$
$$= \frac{\pi b^2}{n}\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right]$$

Por lo tanto,

$$A(Q) - A(P) = \frac{\pi b^2}{n}\left\{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \left[\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)}{6}\right]\right\}$$
$$= \pi b^2 n.$$

Como $b = OA_1 = a\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, entonces

$$A(Q) - A(P) = \pi b^2 n = \pi\left[a\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 n = \frac{4\pi^3 a^2}{n^2}\cdot n = \frac{4\pi^3 a^2}{n}$$

Es decir, $A(Q) - A(P)$ es igual al área de uno de los sectores circulares del círculo, que puede hacerse tan pequeña como se desee, escogiendo n suficientemente grande.

Ahora, pasaremos a demostrar que $A(S) = \frac{1}{3} A(C)$.

La demostración se hará por Reducción al absurdo.

Supongamos que $A(S) \neq \frac{1}{3} A(C)$, entonces

$$A(S) < \frac{1}{3} A(C) \quad \text{ó} \quad A(S) > \frac{1}{3} A(C).$$

Si suponemos que $A(S) < \frac{1}{3} A(C)$

Como $0 < \frac{1}{3} A(C) - A(S)$ escogemos n suficientemente grande tal que.

$$A(Q) - A(P) < \frac{1}{3} A(C) - A(S)$$

y ya que $A(P) < A(S)$, entonces necesariamente debe suceder que $A(Q) < \frac{1}{3} A(C)$

Por otro lado, como el cociente de áreas de sectores circulares similares es igual al cociente de los cuadrados de sus radios, encontramos que si S_i es el área del sector i en Q, entonces

$$\frac{S_1}{S_n} = \frac{b^2}{(2\pi a)^2} = \frac{b^2}{(nb)^2}$$

$$\frac{S_2}{S_n} = \frac{(2b)^2}{(nb)^2}$$

$$\frac{S_3}{S_n} = \frac{(3b)^2}{(nb)^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{S_n}{S_n} = \frac{(nb)^2}{(nb)^2}$$

Por lo tanto, $$\frac{A(Q)}{A(C)} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{S_n + S_n + \dots + S_n}$$

$$= \frac{b^2 + (2b)^2 + \dots + (nb)^2}{(nb)^2 + (nb)^2 + \dots + (nb)^2}$$

$$= \frac{b^2 + (2b)^2 + \dots + (nb)^2}{n(nb)^2}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$\therefore \quad \frac{A(Q)}{A(C)} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

Y como $\frac{n^3}{3} < 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ se tiene que

$\frac{A(Q)}{A(C)} > \frac{1}{3}$, esto implica que $A(Q) > \frac{1}{3} A(C)$

pero esto es un absurdo, pues no puede suceder que
$$A(Q) < \frac{1}{3} A(C) \quad y \quad A(Q) > \frac{1}{3} A(C)$$

$$\therefore \quad A(S) \not< \frac{1}{3} A(C).$$

Si suponemos que $A(S) > \frac{1}{3} A(C)$, esto implica

que $A(S) - \frac{1}{3} A(C) > 0$.

Así, escogiendo n suficientemente grande tendremos que
$$A(Q) - A(P) < A(S) - \frac{1}{3} A(C)$$

y ya que $A(Q) > A(S)$, necesariamente

$-A(P) < -\frac{1}{3} A(C)$, y esto implica que

$$A(P) > \frac{1}{3} A(C)$$

Como en el caso anterior, tenemos :

$$\frac{A(P)}{A(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + [(n-1)b]^2}{n(nb)^2}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}$$

y como $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ se tiene que

$\frac{A(P)}{A(C)} < \frac{1}{3}$ y esto implica que $A(P) < \frac{1}{3} A(C)$,

pero esto es un absurdo, pues no puede suceder que: $A(P) > \frac{1}{3} A(C)$ y $A(P) < \frac{1}{3} A(C)$

$$\therefore \quad A(S) \not> \frac{1}{3} A(C)$$

Como $A(S) \not< \frac{1}{3} A(C)$ y $A(S) \not> \frac{1}{3} A(C)$,

concluimos que $A(S) = \frac{1}{3} A(C) = \frac{1}{3} \pi (2\pi a)^2$

$$= \frac{1}{3} (4\pi^3 a^2) = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

Por lo tanto, el área de la región S determinada por la espiral es $\frac{4}{3} \pi^3 a^2$.

Otro hecho que puede estimular y llamar la atención del estudiante es el que matemáticos griegos de hace más de veinte siglos razonaban y manejaban las Matemáticas de una manera tan ingeniosa y tan semejante a como lo hacemos hoy en día, esto constituye o genera sensaciones de seguridad y universalidad internas en nuestros estudiantes con respecto a su forma de pensar y ver las cosas.

En relación al punto IX de la lista de "Posibilidades de uso de la Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas", que aparece al principio del trabajo, podemos decir que otra ejemplificación del uso de la Historia para entender mejor las características del pensamiento matemático y que ha conducido a algunas hipótesis acerca de la Enseñanza de las Matemáticas, es el trabajo que se desarrolla en el curso Enseñanza e Historia (materia de la Opción en Educación Matemática de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla) del cual presento el programa:

ENSEÑANZA E HISTORIA DE LAS MATEMATICAS.

Supuestamente uno de los fines de la educación en general, y en particular la científica, es desarrollar capacidades de pensamiento científico en los estudiantes. La educación no solo está lejos de lograr esto, sino que más bien gran parte de sus finalidades tienen una dirección opuesta, como son:

• Enmarcar al estudiante en el patrón emisor-receptor de la verdad.
• Presentar el conocimiento como un producto mágico de unas cuantas mentes privilegiadas.
• La verdad presentada por el profesor es definitiva y más vale aceptarla. La duda y enfoques diferentes del asunto son malvenidos por el profesor.

Con estas observaciones obtenemos elementos que bosquejan un conflicto frontal entre algunas de las funciones de la educación actual y la generación de habilidades y hábitos de pensamiento científico. Esto hace ver también que no solo es indeseable, sino imposible, reformar la enseñanza en el renglón mencionado, sin modificar substancialmente algunas de las finalidades del sistema educativo.

Particularicemos ahora el área de matemáticas. El abordaje de la cuestión, ¿cómo desarrollar habilidades de pensamiento matemático durante la enseñanza escolar de las matemáticas?, conduce al planteamiento de al menos los dos problemas siguientes, el entender en que consiste, y cómo se puede propiciar durante la enseñanza escolar el desarrollo del pensamiento científico. Hacemos énfasis en la enseñanza escolar por dos razones, primero porque consideramos que el proceso educativo escolar es una actividad social potencialmente muy rica, segundo porque en la actualidad gran parte de la educación se da por medio del proceso escolar y no hay visos de que algún otro medio lo substituya a corto plazo, y menos en países como el nuestro.

Para entender en que consiste el pensamiento matemático hay que determinar algunos de sus componentes básicos, que pueden ser clasificados en varios tipos:

a) Componentes de carácter psicológico (procesos de pensamiento)
b) Componentes de carácter metodológico (hábitos de estudio, observación, experimentación, organización del trabajo, etc).
c) Componentes de carácter sociológico a corto plazo (colaboraciones, escuelas, controversias, acumulatividad, determinación de problemas, etc.).

d) Componentes de carácter sociológico a largo plazo, históricos y filosóficos (construcción y desplazamiento de teorías, relaciones con otras ciencias y tecnologías, relación teoría-práctica, simultaneidad de invenciones, etc..).

Para entender como se puede propiciar durante la enseñanza el desarrollo del pensamiento matemático, se debe incorporar los elementos referentes al trabajo escolar.
Puede afirmarse que hasta muy recientemente se ha comenzado a trabajar de manera sistemática en estos campos, por ejemplo en el aspecto psicológico tenemos:

a) El estudio de los procesos de aprendizaje de matemáticas en el salón de clase, v.gr. Soviet Studies in the Psichology of Learning and Teaching Mathematics.

b) El estudio de procesos mentales matemáticos por medio de la generación de procesos con productos análogos en Inteligencia Artificial, v. gr. Human Problem Solving, Newell and Simon.

c) El estudio de procesos mentales matemáticos por medio de la reflexión e introspección de los mismos matemáticos, v. gr. varios trabajos de G. Polya.

En el aspecto histórico filosófico tenemos:

a) El estudio de la dinámica autónoma de las matemáticas, v. gr. Pruebas y Refutaciones, I. Lakatos.

b) El estudio del transfondo o base de conceptualización, v. gr. Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra, Jacob Klein.

c) El estudio de las relaciones del pensamiento matemático con otros pensamientos científicos, v. gr. trabajos de Weyl, Bochner, Manin, etc..

Todos estos estudios han empezado a acumular materia prima valiosísima para explorar nuestro problema original, esto es, el desarrollo del pensamiento científico durante la enseñanza de las matemáticas.
Una de las épocas y figuras acerca de las cuales hay una buena cantidad de estudios históricos finos es la de Galileo. Tanto por la riqueza del material histórico como por la importancia que tiene ese período para el pensamiento científico físico matemático, constituirá el el tema de estudio de la relación enseñanza - historia de las matemáticas para este curso. Aquí debemos aclarar que aunque los temas de estudio pertenecen propiamente a la Física y no a las Matemáticas, en ellos se encuentran elementos del pensamiento científico de tipo psicológico y sociológico que son comunes (algunos de ellos) al pensamiento de ambas ciencias, podemos mencionar de manera muy general los siguientes: abstracción, simplificación, confrotación, conjeturación, experimentación, inducción, análisis, aproximación, analogía, observación,

deducción, generalización, equivocación, integración, paso al límite, etc..

FINALIDAD DEL CURSO

La finalidad principal del curso puede ser resumida en, buscar respuestas específicas a la pregunta: ¿Qué puede aportar la Historia de las Matemáticas a la enseñanza de las mismas en el renglón del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes durante la enseñanza de las matemáticas?

Algunos de los elementos que serán estudiados en este curso son:

1. Diferentes enfoques y concepciones de objetos matemáticos.
2. El proceso de abstracción, tipos y niveles, en particular la matematización de los fenómenos físicos.
3. La evolución de las ideas matemáticas.

CONTENIDO DEL CURSO

El problema de la caída de los cuerpos en la época de Galileo.

FORMA DE TRABAJO

1. Exposición introductoria al tema.
2. Presentación y análisis de una lectura como ejemplo del trabajo a desarrollar.
3. Distribución de lecturas.
4. Realización y registro del experimento rudimentario.

5. Análisis de las lecturas.
6. Establecimiento de conclusiones para la enseñanza de las matemáticas.

BIBLIOGRAFIA.

1. From the History of Dynamics. En "Mathematical Methods in Science". G. Polya. Editorial The Mathematical Association of America.

2. La Ley de la Caida de los Cuerpos, y Descartes y Galileo. En "Estudios Galileanos". Alexandre Koyré. Editorial Siglo XXI.

3. Estudios de Historia del Pensamiento Científico. Alexandre Koyré. Editorial Siglo XXI.

4. An Experiment in the History of Science. Thomas B. Settle. Science 133 (1961) : 19-23

5. A Test of an "Imaginary" Experiment of Galileo. James. Mc Lachlan. Isis 64 (1973) : 374-379.

6. Galileo at Work. Stillman Drake. Editorial The University of Chicago Press.

ANEXO 1

BIBLIOGRAFIA GENERAL DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS.

1. Historia Concisa de las Matemáticas.
   Dirk J. Struik
   Ed. I.P.N.

2. Mathematical thought from Ancient to Modern Times.
   Morris Kline.
   Ed. Oxford Press.

3. Científicos Griegos. Vols 1 y 2.
   Traducción, recopilación y notas de Francisco Vera.
   Ed. Aguilar

4. Elementos de Historia de las Matemáticas.
   Nicolás Bourbaki.
   Alianza Editorial

5. A History of Mathematics
   Carl Boyer.
   Ed. Wiley.

6. Greek Mathematics
   Gow.
   Ed Chelsea

7. The Exact Sciences in Antiquity.
   O. Neugebauer.
   Ed. Dover.

8. A Short Account of the History of Mathematics.
Ball.
Ed. Dover

9. Development of Mathematics
Bell.
Ed. Mc. Graw Hill.

10. Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.
Klein.
Ed. M. I. T. Press.

11. De la Ciencia y la Tecnología Chinas.
Needham.
Ed. Siglo XXI.

12. La matemática: su contenido, métodos y significado.
Aleksandrov, Kolmogorov y otros.
Madrid, Alianza Editorial, 1973.

13. Euclid's Elements. Vols 1, 2, 3.
Euclides
Dover Publications Inc. 1956.

14. La Matemática en la Vida del Hombre.
Lancelot Hogben.
Cía. Editorial Continental. 1957.

15. Pruebas y Refutaciones, la lógica del descubrimiento matemático.
Imre Lakatos.
Madrid, Alianza Editorial. 1978.

BIBLIOGRAFIA

1. Bochner Salomon. The Rise of Science. Editorial Princeton. 1981.

2. Boyer. The History of the Calculus and Its Conceptual Development. Dover Publications Inc. 1959

3. Dantzig Tobias. Number, The Language of Science. The Free Press.

4. Edwards. The Conceptual Development of the Calculus. Editorial Springer - Verlag. 1979.

5. Eves. An Introduction to the History of Mathematics. Holt - Rinehart - Winston. 1953.

6. Freudenthal Hans. Problemas Mayores de la Educación Matemática. Boletín de Enseñanza #5. Centro de Enseñanza de la Física. Departamento de Física de la Facultad de Ciencias UNAH. 1983.

7. Hersh. Introducing Imre Lakatos. The Mathematical Intelligencer. Vol 1. No 3. 1978

8. Kline Morris. El fracaso de la matemática moderna. Editorial Siglo XXI. 1979.

9. López Yánez Alejandro. Consideraciones Históricas y Heurísticas sobre la Enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral.

10. López Yáñez Alejandro. Programa del curso "Enseñanza e Historia de las Matemáticas.

11. Pasteur Louis. Sobre la utilidad del método histórico en la Enseñanza de las Ciencias.
Boletín de Enseñanza #6. Centro de Enseñanza de la Física. Departamento de Física. Facultad de Ciencias. UNAH. 1983.

12. Polya. G. Mathematical Methods in Science.
Editorial The Mathematical Association of America. 1977.

13. Selecciones de Scientific American. Matemáticas en el Mundo Moderno.
Con introducciones de Morris Kline.
Editorial Blume. 1974.

14. Shaw Vivian. Survey of Mathematics.
Holt- Renehart- Winston. 1968.

15. Siegel. On the History of Frankfurt Mathematics Seminar.
The Mathematical