2 G. 19

"TEXTO PARA

UN PRIMER CURSO DE

MATEMATICA BASICA

PARA UNA

ESCUELA DE CIENCIAS DEL MAR"

JOSE LUIS GUTIERREZ SANCHEZ
FACULTAD DE CIENCIAS,
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
MEXICO, AGOSTO DE 1984.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

P R O L O G O

Uno de los problemas más frecuentes con que se enfrentan los profesores de matemáticas en las escuelas de biología o áreas afines es el acentuado desinterés, cuando no el abierto rechazo, que alientan los estudiantes respecto a la materia. Esta actitud proviene, sin duda, de las primeras etapas de la educación y, con lamentable frecuencia, es reforzada también en la escuela superior por razones como las siguientes:

- la orientación errónea de los temarios, casi siempre ajenos a los problemas de interés prioritario para los estudiantes.
- la práctica docente: generalmente, el maestro reproduce lo que él aprendió de la matemática en su oportunidad; si tomamos en cuenta que rara vez son biólogos o personas que hayan aplicado la matemática al área de formación de los estudiantes quienes hacen de profesores de la materia, concluiremos que también será raro que dicha reproducción interese a los alumnos.
- la animadversión que los profesores de las demás materias (biología general, botánica, química y, en ocasiones, ¡hasta física!) suelen manifestar con declaraciones lapidarias del estilo "esas abstracciones de los matemáticos no sirven para nada en la carrera", etc..

En fin, éstos y muchos otros factores agudizan el problema educativo de la enseñanza de la herramienta y conceptos matemáticos que cualquier "científico natural" debe conocer y manejar.

Este libro ha sido concebido como un auxiliar didáctico de un programa de matemática básica para una escuela de ciencias del mar; en ella se intentó -nos atrevemos a decir que con éxito suficiente- combatir el desinterés del alumnado y lo primero que se hizo

fue cambiar el contenido de los temarios. Para la mejor comprensión de la línea general del texto, vale la pena indicar que la institución en la que primero se aplicó el material en él incluído (la Unidad de Ciencias Marinas (UCM) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC)) imparte la licenciatura en oceanología con cuatro áreas terminales: biología, física, química y geología marinas; el plan de estudios tiene un tronco común de asignaturas que se imparten durante los dos primeros años de los cinco en que se cursa la carrera. Los estudiantes de todas las áreas toman entonces: 3 cursos de matemática básica, 2 de estadística, uno de ecuaciones diferenciales ordinarias y uno de computación obligatoriamente; además, los del área de física deben cursar ecuaciones diferenciales parciales, métodos numéricos y análisis vectorial. Más del 60% de los estudiantes acaban en el área de biología y es reducidísimo el número de los que van a física. La diversidad de intereses y la gran variedad de aplicaciones que la matemática tiene en todas las terminales hacen naturalmente extensos los temarios pues lo mismo es necesario hablar de los modelos de crecimiento de Malthus o von Bertalanffy que de las aplicaciones del análisis de Fourier. Además, la riqueza y lo complejo de los problemas que ha de enfrentar el oceanólogo -científico interdisciplinario, si los hay- lo obligan a tener un conocimiento matemático mucho más profundo que el inmediatista. Sin embargo, es muy raro que los estudiantes inicien la carrera concientes de esto.

Posteriormente, se siguió la orientación de este trabajo también en los cursos de matemáticas generales de la carrera de biología de la Facultad de Ciencias de la UNAM que han sido impartidos por el Grupo de Biomatemáticas y, recientemente, los programas de matemáticas de la Escuela de Ciencias del Mar (ECM) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS) han sido modificados en la misma dirección. Aunque en las últimas instituciones hay diferencias significativas con respecto a las condiciones de la UCM, creemos también que la práctica ha demostrado que -en la batalla contra el desinterés de los estudiantes por la materia- es útil un cambio en esta dirección. Sin embargo, consideramos ingenuo pensar que un "buen programa" baste para vencer vicios tan arraigados como los que señalamos arriba: puede más una práctica multidisciplinaria efectiva en la que surja la necesidad de aplicación de la matemática que el más pulido de los temarios.

Para ser cubierto en 85 horas de clase, el temario de Matemáticas I* es el siguiente:

- Porcentajes: los racionales y su aritmética.
- El número e: un número que no es un racional, algunos procesos de crecimiento y la función exponencial. Los logaritmos.
- Elementos de la Teoría Clásica de las Probabilidades: el Teorema del Binomio y sus aplicaciones a la genética de las familias.
- Bases matemáticas del Método Experimental. Geometría Analítica de la Recta, las relaciones más sencillas entre dos variables; transformaciones elementales de los datos.
- Las funciones: herramienta para describir el cambio en la naturaleza. La gráfica de una función, operaciones entre dos funciones e interpretación geométrica de las mismas.
- Elementos de Algebra Lineal: el plano y el espacio euclideanos, su interpretación física, geométrica y algebraica; funciones lineales de R^2 y R^3 a R, funciones lineales de R^2 y R^3 a R^2 y R^3 respectivamente. Matrices. Aritmética de funciones lineales y aritmética de matrices. La composición de funciones lineales.
- Funciones periódicas. El seno y el coseno como funciones definidas en toda la recta real. Rotaciones en el plano. Amplitud y frecuencia variadas en funciones del tipo A sen ωt y B cos ωt.
- La noción de espacio vectorial a partir de los que ya se conocen. Concepto de base de un espacio vectorial y construcción de nuevos espacios: los polinomios, las series y las funciones armónicas de la misma frecuencia angular. Una transformación lineal en un espacio de funciones: el operador D (derivada) en el de los polinomios.

* Tanto éste como los temarios de Matemáticas II y III y de Estadística I fueron discutidos y aprobados - a propuesta de Carlos Mendoza Durán, a quien se debe en principal medida la concepción de este libro- por la Asamblea General de la UDM a fines de 1977. (Aquí presentamos una versión del programa en el que se agrupan los temas según el orden de exposición en que se dieron durante 1978, 1979 y 1980.

Con el fin de dar una idea completa de lo que se pretende con este temario parece indispensable describir, aunque sea someramente, las líneas generales de los de Matemáticas II y III:

- Matemáticas II es un curso de cálculo diferencial con énfasis en la "razón de cambio de posición" (de evidente inspiración cinemática) y en la "razón de cambio de cantidad" (en problemas de cinética química o crecimiento de poblaciones uniespecíficas). En él, el "problema de las tangentes" se plantea mejor en términos funcionales -o si se prefiere, numéricos- que geométricos: se busca la función lineal que mejor aproxima a una función relativamente arbitraria en las vecindades de un punto dado. Además del aporte conceptual se intenta conseguir que el alumno derive funciones reales de variable real con soltura.
- En Matemáticas III se discute la noción de integral a partir del cálculo de trabajo, presión hidrostática, promedios, etc., señalando en todos los casos cómo éste depende del poder encontrar el límite de cierta suma con una infinidad de sumandos. El Teorema Fundamental del Cálculo se enuncia y justifica con argumentos geométricos de plausibilidad y se usa para establecer la idea de que una ecuación diferencial puede ser tan soluble como una numérica de primer grado. En el cálculo de integrales propiamente dicho se da más atención a los métodos numéricos que a los analíticos. Una vez discutida toda la herramienta descrita, se plantean y resuelven los siguientes dos problemas: cómo construir aproximaciones "sucesivamente mejores" de funciones relativamente arbitrarias mediante las bases polinomial $(1, x, x^2, \ldots)$ o de Fourier $(1, \text{sen } \omega x, \cos \omega x, \text{sen } 2\omega x, \cos 2\omega x, \ldots)$, para lo cual se introduce la noción de producto interno en un espacio euclideano como generalización del producto punto de dos vectores de R^2 o R^3*.

* También con 85 horas de clase, este temario resultó muy ambicioso; sólo en una ocasión de las tres en que se impartió fue cubierto totalmente. Indudablemente, todo el material relativo a Análisis de Fourier está dedicado a los estudiantes del área de física (por su interés en el modelaje de olas y mareas, por ejemplo) y es poco el interés que por él se despertaba en los estudiantes de las otras áreas.

Como se ve, el grado de abstracción y formalismo que se pretende alcanzar es bastante grande; sin embargo, en los dos primeros cursos -y, sobre todo, en el de Matemáticas I- hay una intención, evidente en la forma en que se presenta el material de este libro, de rehuir (hasta donde la habilidad y la información de los expositores lo permitan) las presentaciones axiomáticas, los ejemplos arbitrarios y, en general, el formalismo; se pretende aquí que el alumno aprenda matemáticas *a través de los modelos matemáticos más usados en las ciencias naturales*: siempre que es posible se ligan los temas del curso con los de las otras materias (genética, crecimiento, cinética química, mecánica, por ejemplo) o con algún aspecto de los proyectos de investigación a los que se tenga acceso (y de los cuales la UCM era inusualmente rica)*.

Puede verse en el índice que en este volumen se cubren sólo aquellos temas de Matemáticas I que no tienen que ver con el de Algebra Lineal; esto se debe a que este trabajo está dirigido a un público más amplio que el de los estudiantes de oceanología; de cualquier modo, seguimos preparando los textos que abarquen la totalidad de los temas descritos aquí con la seguridad de que también han de ser útiles a ese público amplio. A continuación discutimos un poco más en detalle el contenido y orientación de este libro:

Tomando en cuenta que se pretende sea usado en el primer curso de una carrera con "interés biológico primordial" y que suele suceder que los conocimientos y los intereses de los alumnos al respecto sean muy heterogéneos, el material incluye conceptos matemáticos e información que usualmente han sido tratados desde la primaria hasta la preparatoria -tal es el caso de los porcentajes, la aritmética de los racionales, los logaritmos, la geometría analítica de la recta y las funciones seno y coseno- pero que rara vez son adecuadamente manejados por la mayoría de los estudiantes; repetirles las cosas de la misma manera no tiene caso (al respecto, C. Mendoza ironiza (com. personal): "... A estas alturas, cuando el estudiante medio inicia la licenciatura, presenta una disyuntiva: o bien 12 años de escuela no han podido enseñarle que sen 2π=0 o bien, ya sabe que sen 2π=0, ¡después de 12 años!).

* Cf. Plan de Desarrollo a Cinco Años de la Unidad de Ciencias Marinas de la Universidad Autónoma de Baja California. Ensenada, 1976.

Por esto, se intenta presentar estos temas en el contexto de la solución a problemas de interés biológico, físico, químico, etc., y como parte de una teoría más general y de mayores alcances. Por ejemplo, además del valor propio de la teoría clásica de las probabilidades en el establecimiento de las Leyes de Mendel y de ciertos aspectos básicos de la genética de las familias, ese material está aquí para reiterar que

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + nr}{n\,s}$$

cuando se establece el Teorema de la Suma de Probabilidades.

Por su parte, la discusión de los modelos más sencillos (Cf. capítulo III) es un magnífico pretexto para revisar que lo que se escribe como

$$Y = a + bX$$

se dibuja como una recta y viceversa y que los logaritmos son una herramienta maravillosa (usando el calificativo de Napier) para "convertir" productos y cocientes en sumas y restas.

Por lo demás, como ya se dijo, se trata de presentar los modelos más sencillos que se usan en la ciencia: jugando con los quebrados se discute la noción de proporcionalidad entre variables y esto nos lleva a descubrir las funciones en general, a definirlas y a operar con ellas.

Respecto al papel de los ejemplos en todo este desarrollo, cito nuevamente a C. Mendoza (com. personal): "... en este caso y, presumiblemente en casi todos, no hay algo peor que proceder así:

> Sean f y g dos funciones de R a R, definimos f + g como la función de R a R tal que (f + g)(t) = f(t) + g(t) Por ejemplo, si f(t) = 5t y g(t) = $3t^2$, entonces (f + g)(t) = 5t + $3t^2$.

pues, podemos imaginarlo, el alumno medio pensará: ¿para qué me sirve un ejemplo de una cosa que no me interesa? además de que el ejemplo está más arbitrario que la definición y ... ¡parece difícil encontrar algo más arbitrario que la definición!; así, el ejemplo y la definición están hechos "ad hoc" (esto es, el uno para la otra y al revés). No, de lo que se trata es de que se entienda para qué sumar dos funciones; la definición, si llegara a darse, resultará una formalización (que tal vez a los matemáticos les interese) de algo que debe ser obvio pues... ¿cómo sumar dos funciones si no es precisamente como lo establece la definición? Luego, tales formalizaciones deberán ser más bien parte de un "breviario cultural" que material propio del curso. En general, la intención es convertir Matemáticas I en una colección de ejemplos en la que las definiciones y el formalismo sólo son complementarios.. "

Las dificultades que se presentan cuando se trata de cubrir el material de este volumen merecen atención especial por lo que explicitamos las que, a juicio nuestro, son las más importantes

Si bien en la UCM hay 5 horas semanales de matemáticas (tiempo de pizarrón que contrasta con las 3 horas de matemáticas generales de la Facultad de Ciencias de la UNAM y las 4 de la ECM de la UAS), lo cierto es que el material que debe cubrirse en las 16 o 17 semanas usuales que dura un semestre es mucho y, dado que la mera exposición no garantiza que el alumno aprenda de oído, éste aprende por lo que él mismo hace y no por lo que dice el maestro., son indispensables muchas horas de asesoría -fuera del tiempo oficial de la clase- para que *los estudiantes* realicen gran número de ejercicios. Por lo tanto, una aplicación exitosa de este programa requiere de un equipo permanente de profesores de tiempo completo que estén familiarizados con él

Dado que la mayoría de los profesores de matemáticas hemos recibido una visión fragmentaria de la ciencia durante nuestra formación, es muy frecuente que en la práctica docente sólo nos limitemos a reproducirla, no son raros entonces los casos de profunda ignorancia entre el personal docente de las cuestiones fundamentales de la física, la química, la biología, así como de la historia y la filosofía del pensamiento científico. Por esto, es necesario adoptar una actitud humilde respecto a las demás ramas de la ciencia y estudiarla más allá de lo indispensable para "dar la clase".

Un ambiente académico que permita que los estudiantes, desde los primeros semestres, tengan contacto con los problemas de la investigación correspondiente al área en que se están formando es,

desde luego, el mejor auxiliar didáctico: la vinculación entre la teoría y la práctica, la mejor de las técnicas de enseñanza posibles, puede así dejar de ser un buen deseo y convertirse en el primer paso para una verdadera formación integral del científico*. Desgraciadamente, las experiencias y situaciones político académicas que puedan propiciar esto son escasas.

Finalmente, quiero señalar que este texto es producto del trabajo y la experiencia colectivos de Alberto Aldama, Pedro Miramontes, Faustino Sánchez y el autor, grupo de profesores del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM que fue comisionado para incorporarse al personal de tiempo completo de la UCM en Ensenada mediante un convenio de colaboración académica con el cogobierno de la escuela bajacaliforniana.

JOSE LUIS GUTIERREZ S.

Mazatlán, Sinaloa, a 4 de enero de 1984.

* De septiembre de 1975 a febrero de 1981, la UCM vivió bajo un régimen de cogobierno que, entre otras cosas, permitió la participación directa y masiva de los estudiantes en los proyectos de investigación (véase la nota al pie de la pág. ix); esta actitud contrasta con la característica actitud de la mayoría de las instituciones [illegible] mexicanas en las que "La Investigación" sólo está al alcance de un selecto grupo de notables, alejados casi siempre de los centros docentes y de sus problemas. Desgraciadamente, la proverbial irracionalidad del estado mexicano acabó con el riquísimo experimento educativo que se vivió durante estos años en la UCM al desmantelar la planta de profesores durante la represión subsecuente a la huelga universitaria de la UABC de 1980-81.

CAPITULO I. DIFERENTES CLASES DE NUMEROS. LOS RACIONALES Y SU ARITHMETICA.

1. Antecedentes.

La intención general de estas notas es la de familiarizar a los estudiantes de ciencias naturales con la *matemática como herramienta* para describir algunos aspectos de los fenómenos cuyo estudio les compete. Tal descripción debe servir para *hacer predicciones plausibles* referentes al "comportamiento" de dichos aspectos del fenómeno o como auxiliar para *descubrir o sugerir explicaciones* no muy claras cuando no se emplea esta herramienta.

Precisemos: cuando se estudia un fenómeno natural, es frecuente que el observador -el sujeto que estudia aquel fenómeno- fije su atención sólo en ciertos aspectos y que los *mida* es decir que les asigne un número mediante la comparación con una escala arbitraria previamente establecida.

Así, los "aspectos característicos" susceptibles de medirse o cuantificarse merecen un nombre especial: se les llama *variables*.

El siguiente paso del hipotético observador será *buscar las relaciones que existen entre las variables*. Tanto la elección de las variables como el establecimiento de las relaciones entre ellas son las etapas más difíciles de la matematización del problema: suele ocurrir que se confunden los aspectos que son "característicos" -vale decir que se eligen equivocadamente las variables- y aún superado este problema, no siempre es posible establecer con absoluta precisión las relaciones entre ellas y con frecuencia se aceptan descripciones aproximadas, incompletas o ideales; sin embargo el procedimiento general consiste en escoger algunas variables como *determinantes* de otras y buscar a continuación una regla o fórmula que permita calcular el valor de éstas cuando se conocen los valores de aquéllas. Lo que sigue es la presentación de una fórmula cuya correcta estipulación requirió de siglos, -desde la antigüedad clásica, aproximadamente en

el siglo V a.c., hasta los albores del siglo XVII- y su historia ilustra con creces las dificultades tanto más significativas como que tal fórmula es de las más sencillas en la cinemática.[1] Veamos:

Ejemplo 1.1. La Ley de la Caída Libre. La búsqueda de los "aspectos característicos" del suceso físico: un objeto que se suelta y se deja caer "libremente" llevó a la conclusión de que son *el lugar* en donde se efectúa la caída y *el tiempo transcurrido* desde que se soltó el objeto las variables que *determinan* la distancia recorrida por el objeto cadente. Así, ni la temperatura ambiente, ni la hora en que ocurre la caída ni la *masa* del objeto importan para el estudio de tal fenómeno. Por lo tanto un observador sensato hará caso omiso de estos aspectos y se preocupará sólo de medir el tiempo y la distancia y de especificar en dónde está llevando a cabo su investigación (al nivel del mar, en la cumbre del monte Everest o en La Luna por ejemplo). Luego el estudioso se ocupará de buscar la fórmula que le permita *calcular* -esto es: obtener mediante una serie de operaciones matemáticas- la distancia que recorrerá el móvil al transcurrir "tanto" tiempo.

Nótese que hemos establecido a priori que en este caso, la variable "que determina" es el tiempo en tanto que la "determinada" es la distancia.

Ha dado en llamarse *variables independientes* a las determinantes y *variables dependientes* a las determinadas y para representarlas se acostumbra usar literales relacionadas entre sí mediante una expresión del tipo:

$$d = d(t)$$
$$P = P(V,T)$$
$$\bar{x} = (x(t),\ y(t),\ z(t)) \qquad (1)$$

que significa respectivamente que:

- la variable d depende de la variable t.
- la variable P depende de las variables V y T.

- la variable $\bar{x}$ depende de las variables x, y y z quienes a su vez dependen de la variable t.

Y cuando se conoce explícitamente la regla que permite calcular los valores de las variables dependientes para cada valor o grupo de valores de las independientes, dicha regla se escribe como igual al segundo miembro de las expresiones del tipo (1). Así:

Continuación Ejem. 1.1. En el caso de la caída libre, se estableció que si se representa la distancia (en metros)[2] y el tiempo trascurrido (en segundos) desde que el cuerpo comenzó a caer, entonces:

$$d(t) = \frac{1}{2}\, g t^2 \text{ metros} \qquad (2)$$

donde g es la aceleración de la gravedad en el lugar de la caída (9.8 m/seg² al nivel del mar).[3]

Por el estilo:

Ejemplo 1.2. Si la P[mm Hg] denota la presión ejercida por un gas ideal en las paredes de un recipiente y T[°K] y V[cm³] representan respectivamente la temperatura y el volumen del mismo gas, la llamada "Ley de los Gases Ideales" señala que P está determinada por T y V según la fórmula:

$$P(V,T) = \frac{P_0 V_0}{T_0}\;\frac{T}{V} \text{ mm Hg.} \qquad (3)$$

donde P_0 es la presión que ejerce el gas cuando su volumen es V_0 y su temperatura T_0.

Reiteremos el significado preciso de las fórmulas (2) y (3):

$$\frac{1}{2}\, g t^2$$

- determina un único valor de d y
- dado un par de valores particulares de V y T

$$\frac{P_0 V_0}{T_0}\;\frac{T}{V}$$

- determina un único valor de P.

De tal modo que las igualdades:

$$d(3) = \frac{1}{2}\,(9.8)\,(3)^2$$
$$= 44.145 \text{ m.}$$
$$P(1000, 300) = \frac{P_0 V_0}{T_0}\;\frac{300}{100}$$
$$= 0.3\,\frac{P_0 V_0}{T_0} \text{ mmHg.}$$

significan respectivamente que:

- a los 3 segundos exactos de haber empezado a [illegible] cuerpo a nivel del mar, habrá recorrido 44.145 m.
- un gas ideal que satisface que $P(V_0, T_0) = P_0$ ejerce una presión de $0.3\frac{P_0 V_0}{T_0}$ cuando está a 300°K y ocupa un volumen de 1000 cm³.

Lo anterior significa que para calcular los valores de la o las variables dependientes que corresponden a ciertos valores particulares de las independientes, basta *sustituir* éstos en la fórmula. Además de cómoda, la notación que hemos introducido es sugerente: una característica fundamental de la Naturaleza es su dinamismo (el cambio permanente en todos los órdenes); el concepto matemático que se ha inventado para describir y estudiar los fenómenos naturales debe, por lo tanto, reflejar esta característica y lo hace: el cambio de unas variables -las independientes- produce el cambio de las otras. El nombre de este concepto es el de *función** y habremos de dedicar todo un capítulo a su posterior discusión. Por el momento, es suficiente el haber introducido algo de la terminología que le es propia.

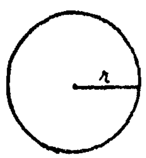
CUESTIONARIO

1.1. ¿Qué es medir?

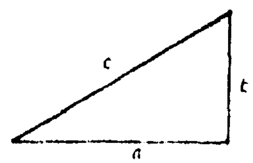
1.2. ¿Qué es una variable?

1.3. Según el texto, ¿Cuáles son las etapas más difíciles en la matematización?

1.4. Para las figuras que se muestran en seguida las fórmulas geométricas (*i*) y (*ii*) establecen relaciones entre ciertas variables



(*i*) $A = \Pi r^2$; $\Pi = 3.14$



(*ii*) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

diga, en cada caso, qué variables son independientes y cuáles son dependientes. Explique el significado geométrico de las variables

1.5. ¿Qué es calcular el valor de una variable?

1.6. Calcule con (*i*) y (*ii*): $A(7)$, $A(1)$, $c(5,4)$ y $c(1.3,2.5)$

1.7. Escriba 3 fórmulas que establezcan relaciones de dependencia entre variables. Diga cuáles de dichas variables son independientes y cuáles dependientes. Explique el significado de las variables.

1.8 Considere la ley de los gases ideales. Describa V en términos de las otras dos variables. (Sugerencia: despéjelas).

1.9. En la Ley de la Caída Libre, ¿es posible intercambiar el papel de las variables? Esto es: que d sea independiente y t dependiente? De ser posible, establezca la fórmula que exprese tal dependencia.

1.10. Al considerar "libre" la caída de un cuerpo se hace caso omiso de la resistencia del aire; discuta si en la realidad-i.e. al dejar caer un objeto en La Tierra- la resistencia del aire afecta o no la caída.

1.11. ¿Quién fué Galileo Galilei?

2. *Las "razones" entre cantidades*

Con frecuencia las variables o los parámetros (véase la nota 3) de un fenómeno no pueden medirse directamente y es necesario establecerlos de otra manera: las expresiones que describen concentraciones, porcentajes o tasas o, en general, que "*hay tantas partes de esto por tantas otras de aquello*" sirven para tales mediciones indirectas. Como objetos matemáticos, simplemente son *cocientes o razones* de dos cantidades. Algunos ejemplos ilustrarán la idea:

Ejemplo 2.1. *La salinidad* del agua se define como "los gramos de material sólido por kilogramo de agua cuando se han oxidado todos los carbonatos y la materia orgánica y los bromuros y yoduros han sido remplazados por cloruros" (Sverdrup et al, 1942).

Satisfechas todas las condiciones bioquímicas que impone la definición, podríamos concluir que la salinidad σ es *la razón* en que se presenta el material sólido por cada *1000 g.* de agua; esto es: *cuántas partes* de material sólido hay *por cada mil* partes de agua.

De esta manera, cuando se dice que "la salinidad en alta mar es prácticamente constante y aproximadamente igual a *34* partes por mil debe entenderse que en cada *Kg.* de agua en altamar, hay aproximadamente *34 gr* de material sólido. La rázon "*34* partes por mil" se expresa mediante los símbolos:

$$\frac{34}{1000}, \ 34‰ \ \text{o} \ 34 \ p.p.mil$$

que se leen como "*34* milésimos", "*34* por mil" o "*34* partes por mil" respectivamente.

Ahora, si se supone que los sólidos están perfectamente disueltos en el agua i.e. que el agua de mar es una mezcla homogénea, el símbolo

$$\sigma = \frac{34}{1000}$$

interpretado como el resultado de *dividir* 34 en mil partes iguales representa la masa de los sólidos que está disuelta en cada uno de los mil gramos que forman un Kg. de agua. Y con esta interpretación es posible *calcular* (he aquí la medición indirecta a la que nos referíamos) la cantidad de sólidos disueltos en cualquier número de gramos de agua. En efecto:

Si en 1 *gr.* hay 34 milésimos de gramo de material sólido: en dos gramos habrá el doble, i.e.:

$$2 \text{ veces } \frac{34}{1000} \; gr.$$

en 3 gramos, el triple, i.e.:

$$3 \text{ veces } \frac{34}{1000} \; gr.$$

y en general, en n gramos habrá:

$$n \text{ veces } \frac{34}{1000} \; gr.$$

(Como de costumbre, la expresión "n veces k" se abrevia mediante la simbología usual del producto; esto es:

$$n \text{ veces } k = n \times k = nk = (n) \cdot (k)$$

de manera que podemos enunciar ahora la fórmula general:

Si $S[gr]$ representa la materia sólida disuelta y $n[gr]$ mide la cantidad de agua de altamar, entonces:

$$S(n) = \frac{34}{1000} \, n \; gr.$$

de manera que por ejemplo, en 25 *gr.* hay

$$S(25) = \frac{34}{1000} \, (25) \; gr.$$

de sólidos

Ejemplo 2.2. La *tasa de natalidad* o *razón de crecimiento por unidad de tiempo* de una población se define como el número de individuos que nacen, en el lapso de una unidad de tiempo (*u.* de t), dividido entre el número de individuos inicialmente presentes. Este cociente es una medida de la capacidad reproductora de cada bicho y dentro de ciertos límites y condiciones, puede usarse para calcular cuánto crece una población en una *u.* de t. si se conoce la población inicial. Veamos:

Artemia salina es un pequeño crustáceo que se usa con frecuencia como alimento vivo en el cultivo de especies mayores, es costumbre en tal caso hacer un cultivo anexo de *A. salina* y para fines dietéticos del cultivo principal, es importante calcular o medir aproximadamente cuántos nuevos individuos nacerán durante el décimo quinto día después de que eclosionaron los huevecillos.

Sea $N(t)$ el número de individuos presentes t días después de la eclosión, si

$$N(14) = 2200 \quad \text{y} \quad N(15) = 2520$$

¿Cuál es la tasa de natalidad q de esta población durante el 15o. día? Por definición, la tasa es el cociente del número de individuos que nacieron a lo largo de esas 24 horas entre el número de "padres" inicialmente presentes; i.e.:

$$q = \frac{N(15) - N(14)}{N(14)} = \frac{2520 - 2200}{2200}$$

por lo tanto:

$$q = \frac{320}{2200}$$

Supongamos ahora que esta tasa es la misma si la población inicial no rebasa los 5 000 individuos (tal suposición estaría basada en la "evidencia experimental": esto es que luego de haber repetido "muchas veces" un cultivo semejante en todos los casos

$$\frac{N(15) - N(14)}{N(14)}$$

resultó ser aproximadamente igual a este valor q, siempre, que- $N(14)$ fuera menor que 5000).

¿Podremos ahora calcular el incremento de la población para diferentes valores de $N(14)$? Pues sí porque q puede interpretarse como el "número de hijos que tiene *cada uno* de los posibles - padres" durante el *15o.* día; de tal manera que si un individuo - tiene

$$q = \frac{320}{2200}$$

hijos, 2000 individuos tendrán 2000 veces q hijos y 4500 individuos procrearán 4500 veces q hijos y en general, N individuos - (N no mayor que 5000) darán origen a N veces q hijos durante el *15o.* día después de la eclosión. Si llamamos I al incremento de la población durante ese día, entonces $I = I(N)$ e

$$I(N) = \frac{320}{2200} \; N \text{ hijos}$$

es una fórmula general que permite calcular el incremento para cada población inicial de tamaño N (menor que 5000).

Ejemplo 2.3. Para algunos fines hidrobiológicos podemos definir la *biomasa* de un ecosistema acuático como la razón existente entre el peso húmedo de la materia viva presente y el peso total - del agua del sistema[5]. De manera que si nos informan de que la biomasa en una laguna costera es de 5 partes de materia viva por cada 100 partes de agua, podremos estimar-bajo la premisa de que los organismos vivos estan distribuídos homogéneamente en toda - la laguna-el peso húmedo de materia viva presente en cualquier - zona del sistema si estimamos el peso del agua que se encuentra en ella.

Como en los ejemplos 2.1 y 2.2, la razón que define a la biomasa β se representa mediante los símbolos

$$\beta = \frac{5}{100} \quad \text{ó} \quad \beta = 5\%$$

que se leen como "5 de cada 100", "5 centésimos" o "5 por ciento" y si P representa el peso estimado del agua y M la materia viva contenida en ese peso, entonces $M = M(P)$ y

$$M(P) = \frac{5}{100} \; P$$

porque β puede interpretarse como el peso húmedo de materia viva presente en la unidad de peso de agua.

Conviene aquí hacer una *observación básica* relacionada con los 3 ejemplos anteriores:

$$\sigma = \frac{34}{1000}, \quad q = \frac{220}{2300} \text{ y } \beta = \frac{5}{100}$$

son expresiones que comparan "qué cantidad hay de esto" (sólidos disueltos, nuevos individuos y peso húmedo respectivamente) por "tantas partes de aquello" (masa del agua, población inicial y - peso del agua) y las *premisas de "distribución homogénea"* -el - agua de mar es una mezcla homogénea, cada Artemia tiene la misma capacidad reproductora y la materia viva se distribuye por igual en toda la laguna- significan que si en lugar de tomar 1000, 2300 y 100 como *bases* para estas comparaciones, tomamos otras cantidades, las razones que se obtienen significan exactamente lo mismo que $34‰$, $\frac{220}{2300}$ y 5%. En otras palabras que σ; q y β pueden - expresarse de muchas maneras diferentes cuya interpretación es - igual, de hecho:

$$\sigma = \frac{S(n)}{n}, \quad q = \frac{I(N)}{N} \text{ y } \beta = \frac{M(P)}{P} \tag{7}$$

para cualesquiera valores "razonables" de n, N y P. De hecho es tos son ejemplos de una propiedad general de las razones que discutiremos en breve y significan p. ej. que si para calcular la salinidad tomamos una muestra de *250 gr.* de agua (en lugar de una de *1000*) y medimos en ella la masa [*gr*] de sólidos disueltos (que recordemos, hemos denotado como $S(250)$), entonces:

$$\frac{S(250)}{250} \quad \text{y} \quad \frac{34}{1000}$$

son dos formas de representar σ.

Tratemos ahora de describir las características matemáticas generales de los 3 ejemplos anteriores; en cada caso:

1. Hemos trabajado con dos variables: X y Y,
2. Hemos descrito "cuantas partes hay de Y por tantas partes de X" mediante símbolos de la forma

$$\frac{a}{b}$$

donde a y b han sido números naturales -esto es, elementos de la colección infinita

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

3. El símbolo $\frac{a}{b}$ que hemos usado, también lo hemos interpretado como "que tanto de Y le toca a cada una de las X".
4. Dado un valor n hemos encontrado fórmulas que permiten calcular Y, tales fórmulas han sido del tipo:

$$Y(n) = \frac{a}{b} \cdot n$$

donde n indica "cuántos hay de X".

Pues bien, a las razones de la forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ (8)

donde a y b son elementos del conjunto de los enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

los llamaremos *números racionales* y diremos que en el número racional (8) a es *el numerador* y b *el denominador*.

Además, la propiedad básica a la que nos referimos al final de la discusión de los ejemplos, es una consecuencia de la siguiente propiedad general de los números racionales: *cada uno tiene una infinidad de formas de representarse* pues; para cualquier natural K:

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{aK}{bK}, \quad b \neq 0$$

describen la misma razón, por consiguiente, podemos escribir sin remordimientos que

$$\frac{a}{b} = \frac{aK}{bK}; \quad K = 1, 2, 3, \ldots$$

y diremos que $\frac{a}{b}$ y $\frac{aK}{bK}$ son *equivalentes* cada vez que a y b sean enteros y $b \neq 0$. Esta gran variedad de representaciones da, como veremos en los siguientes párrafos, flexibilidad en los usos e interpretaciones de los números racionales.

CUESTIONARIO

2.1. En cada uno de los siguientes casos, exprese mediante una razón la frase entrecomillada. Luego, use la razón para expresar, mediante un producto, la respuesta a la pregunta:

a. Si "4 de cada 5" habitantes de la ciudad de México comen menos de 5 Kg. de pescado al año y la población de la misma es de 15 millones de habitantes. ¿Cuántos comen menos de 5 Kg de pescado al año?

b. "Dos de cada 3" toneladas capturadas de camarón café satisfacen la talla comercial. Si un barco captura 5 toneladas ¿cuántas tienen la talla comercial?

c. En cierta población humana, "3 de cada 25" individuos tienen tipo sanguíneo O, Rh+. Si la población está formada por 30 000 individuos. ¿Cuantos tienen tipo O, Rh+?

2.2. La concentración aproximada del oxígeno disuelto en el mar es de 4 mg por cada Kg de agua. Explique porqué se dice entonces que es de "4 partes por millón". Exprese esta cantidad mediante un número racional e indique una fórmula general para calcular la cantidad de oxígeno disuelto m [mg] en A mg de agua.

2.3. Escriba dos racionales equivalentes a cada uno de los que se muestran en seguida:

a) $\frac{22}{1}$ b) $\frac{-9}{10}$ c) $\frac{11}{-11}$ d) $\frac{-13}{-13}$ e) $\frac{4}{2}$

a ¿Porqué la expresión $\frac{5}{2-2}$ *no* es un número racional?

b ¿Lo es la expresión $\frac{2-2}{5}$? ¿porqué?

2.4. Si se sabe que los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón $\frac{3}{4}$ y el más chico mide 10 cm cuánto mide el otro cateto? ¿cuál es la razón de la hipotenusa a cada cateto? (Sugerencia: use el Teorema de Pitágoras).

3. *Operaciones con Racionales.*

Discutiremos ahora las operaciones aritméticas básicas que pueden realizarse con razones de números enteros, veremos cómo al operar con dos razones con cierto significado, obtenemos una nueva razón cuyo significado está íntimamente ligado con las que le dieron origen. Como en el parágrafo 2., mostraremos primero algunos ejemplos y sólo al final, haciendo abstracción de lo que se haya tratado en cada caso particular, daremos la discusión de lo "meramente matemático".

Ejemplo 3.1. Según la Organización para la Alimentación y la Agricultura de la ONU (FAO)[6], la captura pesquera mundial durante el año de 1968 fue aproximadamente de 5700 decenas de miles de toneladas métricas, distribuidas por zonas geográficas según la tabla No. 1.

TABLA 1

Zona Geográfica	Captura (tons.$X10^4$)	Total por océano (tons.$X10^4$)
I Atlántico Oeste	400	2100
II Atlántico Este	1700	
III Indico	200	200
IV Pacífico Oeste	1900	3400
V Pacífico Este	1500	

De la que se obtiene que los racionales

$$\frac{400x10^4}{5700x10^4},\quad \frac{1700x10^4}{5700x10^4},\quad \frac{200x10^4}{5700x10^4},\quad \frac{1900x10^4}{5700x10^4} \text{ y } \frac{1500x10^4}{5700x10^4}$$

describen la razón entre el tonelaje que aporta cada zona y el total de la pesca del globo.

Como en este ejemplo manejamos cifras muy grandes, puede ser difícil "percibir" qué tanto se obtiene de cada zona si se usa la representación de los racionales que comparan los parciales con el total que hemos dado en el párrafo inmediato anterior; conviene entonces simplificar la expresión de estas razones como

$$\frac{400x10^4}{5700x10^4} = \frac{4}{57},\quad \frac{1700x10^4}{5700x10^4} = \frac{17}{57},\quad \frac{200x10^4}{5700x10^4} = \frac{2}{57},$$

$$\frac{1900x10^4}{5700x10^4} = \frac{19}{57} \quad \text{y} \quad \frac{1500x10^4}{5700x10^4} = \frac{15}{57}$$

podemos decir que de *cada 57 tons* que se pescan en el mundo: 4 provienen del Atlántico Oeste, 17 de la ribera opuesta del mismo océano, sólo 2 del Indico, 19 del Pacífico Oeste y 15 del Pacífico Este. Expresiones que son más descriptivas-por lo menos en lo que al volumen de captura se refiere pues es más fácil decir ahora dónde se pesca más- que con las que obtuvimos primero.

Esta simplificación de momento es suficientemente buena pues permite la comparación de varias cantidades con respecto a un mismo total y los números que se manejan son relativamente pequeños; sin embargo, para los fines que nos interesan ahora- discusión de las operaciones- y para otros muchos, conviene reducir a su "*mínima expresión*" los reacionales en el siguiente sentido: escribiéndolos en la forma $\frac{a}{b}$ donde ni el númerador a ni el denominador b tienen *factores comunes*.[7] Dos ventajas vale la pena destacar: la mínima expresión es única e, intuitivamente, es la más manejable porque describe la razón entre dos números en base a las cantidades más pequeñas que pueden expresar la misma razón; diga el lector si no: en el ejemplo obtuvimos que "19 de cada 57" toneladas pescadas en el mundo, se obtienen en el Pacífico Occidental; como $57 = 19X3$ y $19 = 19X1$, entonces:

$$\frac{19}{57} = \frac{19X1}{19X3} = \frac{1}{3}$$

de modo que, equivalentemente, podemos afirmar que "1 de cada tres toneladas" se pescan en dicha zona, expresión que -por razones subjetivas que no vienen al caso- da mejor idea de lo que aporta el Pacífico Oeste a las pesquerías mundiales: aunque matemáticamente "uno de cada tres" y "diecinueve de cada 57" significan exactamente lo mismo, hay un matiz de diferencia que no debemos ignorar y que es la "unidad" que se toma en cada caso: 3 o 57.

La mínima expresión es de uso común pero en la práctica se usan otras formas de descripción de racionales que discutiremos después.

Continuación del *ejemplo 3.1.* Supongamos ahora que en un reporte pesquero basado en la tabla anterior pero en el que no aparecen explícitamente los datos, se menciona que: "en *1968*, una de cada tres toneladas pescadas en el mundo se capturó en el Pacífico Occidental y que 5 de cada 19 toneladas fueron aportadas por las pesquerías de la zona V (Pacífico Este)"; si se sabe además que el tonelaje mundial de la pesca de ese año fue de $5700X10^4$ tons. ¿Cómo saber cuántas de éstas se obutvieron en el Pacífico?

Bueno, ya sabemos que si podemos encontrar la razón entre la captura de tal océano y la captura total, bastará multiplicar esta razón por la captura total para calcular lo que se pide; luego el problema es:

Si $\frac{1}{3}$ se pesca en la zona IV y $\frac{5}{19}$ se pescan en la zona V ¿Qué razón $\frac{a}{b}$ se pesca en la dos zonas?

Como 1 de cada 3 significa 19 de cada 57 y
5 de cada 19 quiere decir 15 de cada 57, entonces:
de cada 57 en las zonas IV y V se sacan $19 + 15 = 34$ toneladas.

En otras palabras: dado que:

$$\frac{1}{3} = \frac{19}{57} \qquad y \qquad \frac{5}{19} = \frac{15}{57}$$

entonces, lo que aporta el Pacífico entero es:

$$\left(\begin{array}{c}\text{lo que proviene del}\\ \text{Pacífico Occidental}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{lo que proviene del}\\ \text{Pacífico Oriental}\end{array}\right)$$

$$19 \qquad + \qquad 15$$

tons. de cada 57 que se pescan en el mundo. Por lo tanto, la razón que buscamos es:

$$\frac{19 + 15}{57} = \frac{34}{57}$$

y el tonelaje capturado en el Pacífico es:

$$\left(\frac{34}{57}\right) \times 5700 \times 10^{4} \ \ tons.$$

Ejemplo 3.2. Según la presencia o ausencia de ciertos antígenos en la sangre de los seres humanos, los tipos sanguíneos se consideran cuatro: *A*, *B*, *AB* y *0*. Además, en cada caso, puede presentarse o no un tercer antígeno conocido como "factor *Rh*", de modo que hay en total *8* tipos sanguíneos:

Tipo	*Rh*	
A	+	-
B	+	-
AB	+	-
0	+	-

En una población de *10000* personas se obtuvieron las siguientes razones de cada tipo: $\frac{1}{3}$ tienen tipo *A*, $\frac{1}{4}$ tienen tipo *B*, $\frac{1}{6}$ *AB* y $\frac{1}{4}$ tipo *0*. Además, el factor *Rh* lo presenta el *86%* de la población.

Sin tomar en cuenta el factor *Rh* ¿cuántos tienen algún antígeno? es decir ¿cuántos pertenecen a los tipos *A*, *B* o *AB*? (el tipo O se lee como "tipo cero" precisamente por que representa la ausencia de los antígenos *A* y *B*).

Veamos: como

$$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}, \quad \frac{1}{4}=\frac{3}{12} \quad y \quad \frac{1}{6}=\frac{2}{12}$$

entonces:

4 de cada *12* tienen tipo *A*
3 de cada *12* tienen tipo *B*
2 de cada *12* tienen tipo *AB*

de manera que, de cada *12*, $4+3+2=9$ presentan algún antígeno por lo que la razón entre los que presentan antígeno (sin tomar en cuenta el factor *Rh*) y la población total es de "*9* de cada *12*" o bien "*3* de cada *4*" por que:

$$\frac{(4+3+2)}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, el número de individuos en esta pobalción que tienen tipo sanguíneo *A*, *B* o *AB* es de:

$$\left(\frac{3}{4}\right) \times 10000$$

Hasta aquí los ejemplos. En ellos se muestra que:

1. Se conocen dos o más razones que indican qué tanto hay de *X* o *Y* con respecto a otra cantidad total *Z*, v.gr. qué tanto se pesca en la zona V y qué tanto se pesca en la zona IV respecto al total mundial.

2. Se pretende conocer, a partir de tales "razones parciales" qué tanto hay "conjuntamente" de *X* o *Y* con respecto al mismo total. Para esto:

si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son las razones dadas, se buscan razones euqivalentes con denominador común; digamos que si:

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{c} \qquad y \qquad \frac{r}{s}=\frac{b}{c}$$

entonces "p de cada q" $\longleftrightarrow$ "a de cada c"
y "r de cada s" $\longleftrightarrow$ "b de cada c"

significan lo mismo pero las segundas expresiones establecen la comparación respecto a una misma "unidad" de manera que la razón que se busca es:

"$a + b$ de cada c"

3. Como en particular

$$\frac{ps}{qs} = \frac{p}{q} \qquad \text{y} \qquad \frac{rq}{sq} = \frac{r}{s}$$

entonces qs siempre puede elegirse como el denominador común y podemos *definir la suma* de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ mediante la igualdad:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs} \tag{9}$$

en donde el miembro derecho es, necesariamente, un racional (¿por qué?) y puede, si se desea, ser reducido a su mínima expresión.

Así como se suman dos racionales, como en el ejemplo 3.1, es posible sumar 3 o más mediante la aplicación repetida de la ecuación (9) o la generalización adecuada de las ideas que llevan a esa definición. El ejemplo 3.2. muestra a qué tipo de generalización nos referimos - pues en él se encuentran tres racionales equivalentes a los que se dan y se eligen con denominadores comunes - y enseguida mostramos lo que queremos decir con eso de "aplicación repetida" de la ecuación (9): ¿cómo sumar $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$? Sumemos primero

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$

y el resultado sumémoslo a $\frac{1}{6}$:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{42+12}{72} = \frac{54}{72} = \frac{18 \times 3}{18 \times 4}$$

de manera que, reducida a su mínima expresión:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

El lector puede comprobar que si primero sumara $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$ y después al resultado le sumara $\frac{1}{3}$, obtendría también $\frac{3}{4}$. Esta es una propiedad general de la suma de números racionales que nos permite asociar como se nos dé la gana; cierto número de propiedades algebraicas útiles como ésta se enlistan en el apéndice al final del capítulo. Por el momento, consideremos dos nuevos ejemplos para de ahí definir el producto de racionales.

Ejemplo 3.3. Según la FAO, en el mismo año de *1968*, la captura mundial por especies fue la de la tabla 2, en la que los primeros seis grupos se distinguen de la "otras especies" por el volumen de la pesca; sobre todo, el tonelaje correspondiente a la pesquería de *Clupeidae*[8] es, con mucho, el más alto (aproximadamente 3? de cada *100* toneladas pertenecen a este grupo)[9].

Prácticamente toda la pesquería de clupeidos se convierte en harina de pescado que luego se usa como alimento para aves de corral, a diferencia de la de los demás grupos que son consumidos directamente por los seres humanos frescos o salados, ahumados o enlatados.

Desde el punto de vista nutritivo esta diferencia tiene una importancia capital: de un eslabón de la cadena alimenticia al siguiente hay un gran desperdicio: solamente el *10%* de la materia orgánica aprovechable es aprovechada por el eslabón que come.[10]

Por otro lado, los datos de la tabla 2, registran la captura en peso húmedo y - estimado lector, amable lectora - la harina es más seca que las arenas del Sahara; de modo que de la monstruosa cantidad correspondiente al primer grupo, calculando con optimismo, sólo 3 de cada *10* tons. aproximadamente se convierten efectivamente en harina por que el resto se evapora.

Del total de harina, sólo *10* de cada *100* partes fueron asimiladas por las aves del corral alimentadas con ella y finalmente, los seres humanos aprovecharon de tales partes ya incorporadas al eslabón intermendio - a su vez sólo *10* de cada *100* partes. Podemos preguntar ahora: de aquella grandísima captura del *68* ¿cuál fué el peso de materia orgánica asimilado por los seres humanos?

TABLA 2

Especies o Grupos	Captura 10^3 tons.
Peces	
Clupeidos y similares	2210
Gadoideos	940
Escómbridos	450
Carangoideos	190
Carduminosos	130
Peces planos	120
Otras especies	310
Total de Peces	4350
Invertebrados	
Crustáceos	120
Moluscos con concha	180
Cefalópodos	120
Otros moluscos	20
Total de Invertebrados	440
Total por especies	4790
Total del que no se tienen datos por especie	910
Gran Total	5700

Veamos primero qué parte del total de harina que se obtuvo fue asimilado: supongamos que el disco que se muestra enseguida representa ese total; si lo dividimos en *10* partes iguales y to-

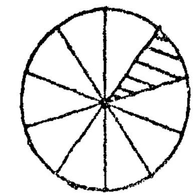


Figura 1.

La zona achurada representa el total de harina asimilado por las aves.

mamos una de ellas, podemos convenir en que cada sector que resulte sea una representación geométrica de la frase "uno de cada *10*" (de manera que "*3* de cada *10*" estará representado entonces por *3* de tales sectores). Como "*10* de cada *100*" y uno de cada *10* son equivalentes, el sector achurado representará la parte de harina que es asimilado por las aves.

Procedemos análogamente con respecto a lo que de aquí asimilan los seres humanos; esto es: dividamos el sector en *10* partes iguales y tomemos una de ellas (figura 2), obtendremos entonces

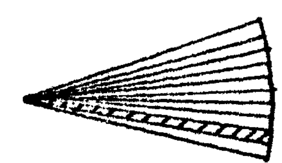


Figura 2.

El sector achurado representa el total de materia orgánica asimilada por el hombre.

la parte del total de harina que, luego de haber pasado por el eslabón de las aves, aprovechan los hombres.

Por consiguiente, los seres humanos asimilan *la décima parte del total asimilado por las aves* pero, como se muestra en el modelo geométrico que hemos elegido para representar las razones, esta décima parte es *una de cada 100 partes iguales del total de harina, es decir, una centésima parte de dicho total.* Esto es que:

$$\frac{1}{10} \text{ de } \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \tag{10}$$

Obsérvese que aquí hemos introducido un nuevo enfoque de los racionales: también pueden interpretarse como *fracciones* de un total. Así, la razón $\frac{r}{s}$ además de ser un símbolo para representar "r de cada s" significa "r s-ésimas partes del total" y geométricamente puede describirse al dividir cualquier figura (que se convenga "es el total") en s partes iguales y tomar de esas s exactamente r. Pero sobre esto insistiremos cuando discutamos la recta numérica

Continuación *Ejemplo 3.3.* Decíamos que del total de harina - representémosla mediante la literal H - sólo una centésima parte es aprovechada por los seres humanos. Pero, partiendo de que la captura total fue $T = 2210X10^4$ tons. ¿cuánto vale H? y en consecuencia, ¿qué peso fue asimilado por los hombres?

Como $H = (\frac{3}{10})$ de $2210X10^4$, dividamos el total $2210X10^4$ en diez partes iguales y quedémonos con tres (he aquí la gran utilidad de la última interpretación de las razones), como *2210 decenas de miles* de tons. dividido en *10* partes iguales da *2210 miles* de tons. entonces:

$$H = \frac{3}{10} \text{ de } (2210X10^4) \text{ tons.} = 6630X10^3$$

Finalmente, sólo la centésima parte de H es asimilada por el hombre, de modo que si ahora tomamos H y lo dividimos en 100 partes iguales y consideramos una de esas partes, obtenemos que de las $2210X10^4$ toneladas de peso húmedo de clupeidos, tan solo

$$(6630X10^3) \div 100 = 6630X10 \text{ tons.}$$

asimilan los humanos. Si comparamos ahora esta cantidad con T y reducimos a la "mínima expresión para tener una idea más clara del "aprovechamiento" de este recurso pequero, por lo demás extraordinariamente pródigo, tenemos que

$$\frac{6630X10}{2210X10^4} = \frac{3X2210X10}{2210X10X10^3} = \frac{3}{1000}$$

que quiere decir, lisa y llanamente que: ¡sólo *3* de cada *1000* partes pescadas se asimilan!

Además de los problemas sociales[11] necesariamente ligados con la información que obtuvimos en el ejemplo 3.3., lo que nos interesa resaltar y que nos va a llevar a la definición prometida, del producto de los racionales, es lo siguiente: ¿cómo interpretar en general expresiones del tipo "tomemos p q-ésimos de las r s-ésimas partes de un total donde, como decímos arriba, los p q-ésimos son otra forma de designar a la razón $\frac{p}{q}$ y r s-ésimos designa a la razón $\frac{r}{s}$? Vamos, ¿qué significa la expresión $\frac{p}{q}$ de $\frac{r}{s}$?

Antes de contestar consideremos un nuevo ejemplo.

Ejemplo 3.4. Menciona la *FAO* en el anuario pesquero del *68* que de las *440* decenas de miles de toneladas de invertebrados que se capturaron ese memorable año, aproximadamente *3* de cada *4* tons. tenía un alto valor comercial (mayor a los *750* dólares por tonelada) en el mercado internacional y, de éstas, nada más *2* de cada *5* superaban el precio de *1200* dólares por tonelada (los crustáceos y algunos moluscos con concha). Preguntemos ahora: ¿qué parte del total de la captura de invertebrados tuvo un valor comercial superior a los *1200* dólares? ¿cuántas toneladas de este tipo se pescaron?

Procedamos como en el problema anterior: supongamos que el disco que se muestra en la figura 3. representa el total de la -

captura de invertebrados. En él, la parte sombreada representa las pesquerías de alto valor comercial

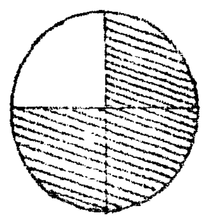


Figura 3.

El sector achurado son las 3 cuartas partes de alto valor comercial.

Ahora tomemos cada cuarta parte y dividámosla en 5 partes iguales (figura 4) tomando de éstas sólo las dos que tienen un valor superior a los $1200:

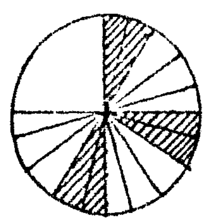


Figura 4.

En cada cuarta parte se han achurado 2 quintas partes.

Así la zona sombreada representa la parte del total que nos interesa; mas observemos que cada una de las más pequeñas divisiones de la figura 4. es la vigésima parte del disco completo y que 6 de estos sectores son los sombreados; en otras palabras: las 2 quintas partes de las 3 cuartas son las 6 vigésimas partes del total. Esto es:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

i.e. 6 de cada 20 toneladas o, si se prefiere, 3 de cada 10 tienen un valor comercial superior a los 1200.00 dólares. Además, la captura total respecto a la cual se está comparando fue de 440 decenas de miles de toneladas y las tres décimas partes de esto son:

$$3X\left[\frac{(440X10^4)}{10}\right] = 1320X10^3 \text{ tons.}$$

con lo que respondemos la segunda pregunta.

Como antes, preguntemos ahora: en la solución de los dos problemas 3.3. y 3.4. ¿qué es lo "meramente matemático"? En ambos casos:

1. Tenemos dadas un par de razones $\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q}$ que hemos interpretado como fracciones de cierto total

   a. $\frac{p}{q}$ indica que hemos dividido "el total" en q partes iguales y, de ahí, hemos tomado p.

   b. $\frac{r}{s}$ representa que "el total" lo hemos partido en s y hemos tomado r partes.

Pero el total no es el mismo en cada caso; por ejemplo: para calcular el tonelaje de harina H obtenido del total T de la captura, tomamos las $\frac{3}{10}$ partes de T; después, para calcular lo asimilado por los seres humanos calculamos $\frac{1}{100}$ de H, en el primer caso, el total era T y en el segundo, H.

2. A partir de las razones dadas, hemos tenido que obtener cuántas partes de qué tamaño (de T) tendremos si, primero: tomamos las rs-ésimas partes de T y luego, *de aquí*, tomamos las pq-ésimas partes. Y lo que se ha hecho ha sido:

3. Cada s-ésimo ha sido dividido en q partes iguales - de manera que se han obtenido qs-ésimos de T - y en cada uno de los r s-ésimos iniciales hemos tomado pq-ésimos, lo que nos ha dado $prqs$-ésimos. Así, la expresión

$$\frac{p}{q} \text{ de } \frac{r}{s} \qquad (11)$$

se ha interpretado como la fracción:

$$\frac{pr}{qs}$$

Todo esto da pie para que *definamos el producto de los racionales* $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ como el racional

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{pr}{qs}$$

y a que dicho producto lo interpretemos según la expresión (11).

Como en el caso de la suma, también es posible multiplicar tres racionales y la forma en que se asocien no altera el resultado. El ejemplo del desperdicio de la harina de pescado sirve nuevamente para ilustrar esta idea: en 3.3. obtuvimos que

$$\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{1000} \text{ de } T \text{ era aprovechado.}$$

Pero si calculáramos primero lo asimilado por las aves:

$$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{100} \text{ de } T$$

y, de aquí, lo asimilado por los humanos:

$$\left(\frac{1}{10}\right)\left[\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\right]=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{100}\right)=\frac{3}{1000} \text{ de } T$$

obtendríamos exactamente lo mismo. De manera que:

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)\frac{3}{10}$$

En general, el producto de racionales es - al igual que la suma - asociativo y también satisface otras propiedades (que están en el apéndice). Antes de terminar este parágrafo, conviene precisar cómo se definen las operaciones inversas de las que acabamos de discutir: *la diferencia y la división* de racionales.

Si $\frac{p}{q}$ es un número racional cualquiera, el número $-\frac{p}{q}$ se llama su *inverso aditivo*. Si $\frac{r}{s}$ es cualquier otro número racional, se define la diferencia en términos de la suma como:

$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{r}{s}+\left(-\frac{p}{q}\right) \qquad (12)$$

Y si $\frac{p}{q}$ es un número racional *diferente de cero*,[12] el racional $\frac{q}{p}$ se llama su *inverso multiplicativo*. En términos del producto la división del racional $\frac{r}{s}$ "entre" $\frac{p}{q}$ se define como:

$$\frac{r}{s}:\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\cdot\frac{q}{p} \qquad (13)$$

CUESTIONARIO

3.1. ¿Qué parte del total mundial se pesca en aguas americanas? (zonas I y V). Obtenga el resultado de dos maneras distintas.

3.2. Según se vió, 5 de cada 19 tons. se pescan en el Pacífico Oriental. Si las dos terceras partes de la captura en esta zona la llevó a cabo la flota peruana ¿qué parte de la captura mundial fue aportada por El Perú?

3.3. Si en 1969 se mantuvieron iguales a las del año anterior las razones que describen la parte capturada en cada zona y ese año la pesca mundial fue de 700 decenas de miles de toneladas. Exprese el tonelaje obtenido en cada zona mediante un producto.

3.4. Considere los datos del ejemplo 3.2.

a. ¿Qué parte de la población tiene tipo sanguíneo A o B?

b. ¿Qué parte de la población tiene tipo $Rh+$?

c. ¿Qué parte tiene tipo A o B y $Rh-$?

3.5. a. ¿Qué parte del total de peces corresponde a escómbridos y carangoideos?

b. ¿Qué parte del gran total está formado por peces?

c. A partir de a. y b. calcule qué parte del gran total corresponde a escómbridos y carangoideos.

d. Mediante una resta de fracciones calcule, del total de peces, qué parte no son ni escómbridos ni carangoideos.

3.6. Calcule:

a. $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ b. $\frac{6}{4} - \frac{2}{7}$

c. $(\frac{3}{11})(\frac{5}{12})(\frac{2}{7})$ d. $\frac{5}{8} : \frac{1}{8}$

e. $(\frac{1}{9} - \frac{2}{5}) - \frac{5}{7}$ f. $(\frac{1}{9} + \frac{7}{5}) : \frac{1}{3}$

g. $(\frac{1}{6})(\frac{2}{3} - \frac{1}{5})$ h. $\frac{1}{9} - (\frac{2}{5} - \frac{5}{7})$

4. *OTRAS FORMAS DE REPRESENTAR A LOS RACIONALES.*

Como decíamos arriba, no siempre se describe a los racionales en términos de su mínima expresión de la forma $\frac{p}{q}$; suele ocurrir - sobre todo cuando se trata de comparar entre sí dos o más racionales - que se busca la manera de que todos tengan el mismo denominador. Como vimos al discutir la suma de racionales, si tomamos fracciones equivalentes a las que tenemos dadas, forzándolas a tener como denominador común el producto de sus denominadores podremos lograr esto por ejemplo:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5} \text{ y } \frac{4}{7}$$

son respectivamente equivalentes a:

$$\frac{70}{105}, \frac{63}{105} \text{ y } \frac{60}{105}$$

Sin embargo, esto puede tener el inconveniente de que los denominadores que se obtengan sean muy grandes y, por lo tanto, muy incómodos. De esta suerte, es más común fijar el denominador con el que se quiere trabajar y buscar los denominadores que hacen que los nuevos racionales sean equivalentes a los que se nos han dado.

Precisemos: supongamos que queremos expresar el racional $\frac{p}{q}$ mediante otro equivalente *con denominador r*; esto es, que buscamos un *número entero* x que satisfaga la ecuación:

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{r} \tag{14}$$

en la que, por definición de número racional, p, q y r también son enteros.

Pero la ecuación (14) es equivalente a

$$x = \frac{pr}{q} \tag{15}$$

lo que significa que podremos encontrar tal x si y sólo si $\frac{pr}{q}$ es equivalente a un racional con denominador 1 (pues, obsérvese si no se había hecho, que precisamente estos racionales representan a los enteros) y esto, a su vez, ocurre *si y sólo si q es un factor de pr* (ver nota 7).

Por ejemplo: el racional $\frac{1}{3}$ es equivalente a una fracción con denominador *18*: en efecto:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{18} \quad \textit{implica} \quad x = \frac{18}{3} = \frac{6 \times 3}{1 \times 3} = 6$$

de modo que

$$\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$$

Desgraciadamente, esto no puede hacerse siempre: si el denominador fijo en el ejemplo anterior fuera *10* y no *18*, nuestra búsqueda de la x que satisficiera la ecuación

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{10}$$

estaría condenada al fracaso pues

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{10} \text{ si y sólo si } x = \frac{10}{3}$$

y resulta que 3 *no es factor de 10 ...*

En ocasiones, como puede verse, la vida es cruel. Pero no todo está perdido: si bien es cierto que no cualquier racional puede escribirse como equivalente a otro con denominador digamos *10* - sí es *aproximable*, con el grado de exactitud que se quiera, *en términos de una suma de racionales cuyos denominadores sean potencias*[13] *de 10* - (de hecho, mediante los cambios adecuados, cualquier racional es aproximable "tanto como se quiera" como la suma de racionales cuyos denomin dores sean potencias de cualquier entero positivo que nos interese). Y el método para encontrar tal aproximación lo provó *el algoritmo*[14] *de la división* que permite calcular los numeradores de los sucesivos sumandos del *desarrollo en potencias de 10* o expansión decimal de cualquier fracción.

Así por ejemplo: si aplicamos el algoritmo de la división -- para calcular el resultado de dividir *1* entre *3*, tendremos:

```
   0.333...
3|10
   10
    10
     1 ...
```

y escribiremos la igualdad

$$\frac{1}{3} = 0.333... \qquad (16)$$

cuyo significado preciso es éste:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

donde n es un número natural y los puntos suspensivos indican que el número de sumandos prosigue indefinidamente.

Por otro lado, toda vez que sólo es posible obtener un número finito de residuos (si q es el denominador, sólo $0, 1, 2, \ldots, q-1$ pueden ser residuos en el algoritmo), mientras que el proceso de dividir puede repetirse hasta el infinito - agregando un cero al residuo cada vez - es irremediable que en alguna de estas repeticiones, aparezca un residuo que ya habrá aparecido, de tal suerte que - una vez que ha ocurrido esto - todos los valores que se obtienen al seguir aplicando el algoritmo, se repiten cíclicamente. Por ejemplo: al dividir *22* entre *7*, sólo es posible que *0,1,2,3,4,5* y *6* sean residuos y, forzosamente, uno de ellos habrá de repetirse; veamos:

```
                              3.142857
                             ----------
                            7|22
El "1" aparece aquí ------->  10
por la vez como re-            30
siduo.                          20
                                 60
                                  40
                                   50
        y aquí se repite --------> 10
                                     3
                                      .
                                       .
                                        .
```

a partir de que se repite el "1", podemos asegurar que se van a repetir todos los demás residuos: *3,2,6,4,5*, y ... *1* nuevamente, de manera tal que la expansión decimal de la razón $\frac{22}{7}$ presenta un grupo de cifras que aparecen cíclicamente, y que se llaman *el período* de dicha expansión. Así:

$$\frac{22}{7} = 3.142857\ 142857\ 142857 \ldots \qquad (17)$$

A fin de abreviar la escritura, las expresiones del tipo -- (16) y (17) se reducen si convenimos en que se representen con - una tilde sobre el grupo de cifras que se repiten. Esto es:

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad y \quad \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

Cabe la posibilidad de que el residuo sea cero y en tal caso, a partir de ese momento, la cifra que se va a repetir será precisamente cero. Cuando esto ocurre, no se usa la tilde es más; ni siquiera se escribe la cola de ceros; por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & 1.25 \\ \hline 4 & 5 \\ & 10 \\ & \;20 \\ & \;\;0 \end{array} \qquad \text{implica que } \frac{5}{4} = 1.25$$

Resumamos la discusión previa: *los racionales tienen expansión decimal periódica y para encontrarla se usa el algoritmo de la división.*

Ahora, suele ocurrir que se presente también el problema inverso: dada una expansión decimal, encontrar - si lo hay - el racional de la forma $\frac{p}{q}$ que le es equivalente.

Si el decimal que se da es periódico siempre es posible hacerlo; si el período es 0, el desarrollo en potencias de 10 tiene sólo un número finito de sumandos significativos (porque la cola infinita es cero) y si calculamos la suma, daremos con el racional que buscamos. Por ejemplo:

$$1.6 = (1)(10^0) + \frac{6}{10} = 10 + \frac{6}{10} = \frac{16}{10}$$

$$1.01 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{1}{10^2} = \frac{(100+1)}{100} = \frac{101}{100}$$

$$0.2305 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{5}{10^4} = \frac{2305}{10000}$$

Si el período no es cero, aplicaremos la siguiente observa-

ción fundamental[16]":

$$\frac{10}{9} = 1.\overline{1}$$

$$\frac{10^2}{99} = 1.\overline{01}$$

$$\frac{10^3}{999} = 1.\overline{001}$$

y en general:

$$\frac{10^n}{10^n-1} = 1.\underbrace{\overline{00\ldots01}}_{n \text{ cifras}} \qquad (18)$$

de manera que si el período es cualquier grupo de n cifras, digamos $a_1a_2a_3 \ldots a_n$

$$(a_1a_2\ldots a_n)\ \frac{10^n}{10^n-1} = (a_1a_2\ldots a_n)\ (\underbrace{1.00\ldots01}_{n \text{ cifras}})$$

$$= a_1a_2\ldots a_n.\overline{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (19)$$

esto es: que al multiplicar cualquier grupo de n cifras por el racional de la fórmula (18), obtenemos un decimal periódico cuya - parte entera (la que aparece antes del punto) es el grupo dado y cuyo período es el mismo grupo. Por ejemplo:

$$3 \times \frac{10}{10-1} = 3.\overline{3}$$

$$142857 \times \frac{10^6}{10^6-1} = 142857.\overline{142857}$$

$$0023 \times \frac{10^4}{10^4-1} = 0023.\overline{0023}$$

Con esto y mediante la adecuada división y multiplicación -

por alguna potencia de 10 (a fin de poner el punto decimal donde convenga) es posible escribir la parte periódica de cualquier decimal como un cociente de enteros. En efecto: las partes periódicas de $0.\overline{3}$, $3.\overline{142857}$ y $5.1\overline{20023}$ se expresan como:

$$0.\overline{3} = \frac{1}{10}(3.\overline{3}) = \frac{1}{10}\left(3\times\frac{10}{9}\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0.\overline{142857} = \frac{1}{10^6}\,(142857.\overline{142857})$$

$$= \frac{1}{10^6}\left(\frac{142857\times 10^6}{999999}\right) = \frac{142857}{999999}$$

$$.00\overline{0023} = \frac{1}{10^6}\,(0023.\overline{0023})$$

$$= \frac{1}{10^6}\left(0023\left(\frac{10^4}{9999}\right)\right) = \frac{23}{999\,900}$$

Finalmente, para expresar cualquier decimal periódico como un racional, será suficiente sumar las expresiones racionales correspondientes a su parte periódica y a la que no lo es. Así:

$$3.\overline{142857} = 3 + \frac{142857}{999999} = \frac{2\,999\,997 + 142\,857}{999\,999}$$

$$= \frac{3142857}{999\,999}$$

$$5.1\overline{20023} = \frac{512}{10^2} + \frac{23}{999\,900} = \frac{5\,119\,488 + 23}{999\,900}$$

$$= \frac{5\,119\,511}{999\,900}$$

En resumen: *los decimales periódicos pueden escribirse como*

racionales de la forma $\frac{p}{q}$ *y para encontrarla, hay que explotar el hecho de que un grupo de n cifras multiplicado por el racional.*

$$\frac{10^n}{10^n-1}$$

da un decimal periódico con parte entera el grupo de cifras dado y éste mismo como período (véase la ecuación (19)).

CUESTIONARIO

4.1. En cada inciso encuentre racionales con denominador común equivalentes a los que se dan.

a. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$; b. $\frac{2}{9}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12}$ c. $\frac{12}{11}, \frac{11}{12}, \frac{1}{10}$

4.2. En cada caso, plantee y resuelva una ecuación como la (14) para encontrar el numerador del racional, equivalente al que se da, y que tiene el denominador que aparece a la derecha.

a. $\frac{2}{5}$, 15; $\frac{7}{12}$, 60; $\frac{17}{5}$, 100; $\frac{8}{3}$, 21

4.3. Dado cualquier racional de la forma $\frac{p}{q}$ y un denominador r ¿es *siempre* posible encontrar un racional equivalente a $\frac{p}{q}$ y que tenga denominador r?

4.4. ¿Tienen solución *en los enteros* las ecuaciones:

a. $\frac{2}{3} = \frac{x}{5}$; $\frac{1}{7} = \frac{x}{35}$; $\frac{2}{5} = \frac{x}{3}$ y $\frac{1}{4} = \frac{x}{7}$?

si sí la tiene, resuelva la ecuación; si no, explique porqué.

4.5. En el texto se dice que: "... si bien no cualquier racional puede escribirse como equivalente a otro con denominador - digamos 10 - sí es *aproximable con el grado de exactitud que se quiera*, en términos de una suma de racionales cuyos denominadores son potencia de 10". Explique brevemente el significado de lo que aquí hemos subrayado.

4.6. Encuentre la expansión decimal de cada uno de los siguientes racionales. Exprese el resultado (i) como una suma explícita -

de potencias de 10, (ii) como un decimal periódico. Indique, en cada caso, cuál es el periodo:

a. $\frac{1}{11}$, b. $\frac{1}{13}$; c. $\frac{2}{13}$; d. $\frac{3}{13}$; e. $\frac{1}{17}$;

f. $\frac{144}{12}$; g. $\frac{3}{4}$; h. $\frac{15}{8}$

4.7. En cada uno de los siguientes casos, encuentre el racional de la forma $\frac{p}{q}$ que es equivalente al decimal periódico que se da. Reduzca el resultado a la mínima expresión y compruébelo aplicando el algoritmo de la división.

a. 2.125; b. $0.0\overline{112T}$; c. 11.425; d. $3.\overline{1426}$; e. $1.000\overline{5}$

8. ¿Hay decimales no periódicos? Si sí los hay, describa tres de ellos.

5. *PORCENTAJES.*

Vimos en el parágrafo anterior que es común el que se trate de encontrar el equivalente a un racional dado pero con un denominador fijado de antemano; vimos también que esta búsqueda no siempre arroja resultados satisfactorios mas, si no hay una equivalencia exacta, siempre es posible aproximar con el grado de exactitud que se desee.

Es un uso muy extendido en la matemática de la vida diaria el expresar una fracción en términos de "*tantos por ciento*" y esto se encuentra siempre a partir de la expresión decimal del racional dado. En efecto: si queremos saber cuántas centésimas o partes por ciento hay en $\frac{1}{3}$, usaremos el hecho de que:

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{1}{100}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots\right) \qquad (20)$$

que significa que en $\frac{1}{3}$ hay $\frac{33}{100}$ y una fracción decimal de centésima (la suma que aparece entre paréntesis en el último miembro de la ecuación (20)) como esta fracción decimal es igual $0.333\ldots$, entonces:

$$\frac{1}{3} = \frac{33}{100} + \frac{0.333\ldots}{100} = \frac{33.\overline{3}}{100}$$

o, si usamos la notación que introdujimos en el ejemplo 2.2. y que es la que se emplea con mayor frecuencia:

$$\frac{1}{3} = 33.\overline{3}\%$$

que se lee como que $\frac{1}{3}$ es igual a $33.\overline{3}$ porciento. No debemos olvidar entonces el significado preciso de las expresiones de este tipo: *indican razones entre cantidades mediante la comparación de qué tanto hay de una cantidad respecto a 100 tantos de la otra y*, por lo tanto, los porcentajes sólo son una forma especial de denotar a los racionales. Así, en el ejemplo que hemos elegido para iniciar esta discusión llegamos a la conclusión de que tomar una de cada tres partes $(\frac{1}{3})$ es lo mismo que tomar $33.\overline{3}$ de cada 100 — $(33.\overline{3}\%)$.

De esta suerte tendremos además que:

$$\frac{22}{7} = 3.\overline{142857} = 3\overline{14.2857}\% \quad y \quad \frac{5}{4} = 1.25 = 125\%$$

Ejemplo 5.1. Consideremos de nueva cuenta los datos de la tabla 2. y la discusión del ejemplo 3.1.. Según ésta, apenas tres de cada 1000 partes de la captura de clupeidos es asimilada por los seres humanos; esto es:

$$\frac{3}{1000} = .003 = .3\%$$

Si suponemos, con bastante optimismo por cierto, que el resto de la pesca mundial se consume directamente (i.e. sin la pérdi da de peso correspondiente al preocesamiento que la convirtiera en harina y sin el eslabón intermedio de las aves de corral), tendremos que el ser humano asimila:

$$\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$

del peso total de la captura que no corresponde al primer grupo. Así, resulta que el peso total "asimilado" es:

el 0.3% de $2210 X 10^6$ tons. (clupeidos)

más el 10% de $3990 X 10^6$ tons. (no clupeidos)

Pero como

$$.003 X 2210 X 10^6 = 6.63 X 10^6 \quad y$$

$$.1 X 3490 X 10^6 = 349 X 10^6$$

entonces, el total asimilado está dado por:

$$P_A = 355.63 X 10^6 \text{ tons.}$$

y de él sólo *6.63* de cada *355.63* partes provienen del primer grupo; es decir, sólo el

$$\frac{6.63}{355.63} = 0.186 = 1.86\%$$

de manera que el *98.14%* restante corresponde a la captura de los demás grupos. Sin embargo, la pesquería mundial de clupeidos representa el

$$\frac{2210}{5700} = 0.3877 = 38.77\%$$

del total en peso húmedo y esto significa un grandísimo esfuerzo pesquero. Este ejemplo muestra cómo el uso de los porcentajes permite comparar cómodamente diferentes razones por que todas se

expresan con denominador *100*. Además, gracias a esta comodidad nos damos cuenta de que hay algún problema económico o social que produce el absurdo de pescar una gran cantidad de clupeidos para obtener de ellos un ínfimo aporte nutritivo[16].

Ejemplo 5.2. Según datos del Banco de México S.A., los precios de los artículos de consumo indispensable o de primera necesidad, aumentaron de diciembre de un año a diciembre del siguiente, a partir de 1975, en un *29%*, *26%* y *33%* consecutivamente. A la vez, el Estado mexicano impuso la política de "topes salariales" se sospecha que debido a la intervención del Fondo Monetario Internacional (FMI) - y los aumentos salariales "compensatorios" del primer trienio de gobierno lópezportillista fueron del 5.5%, *13%* y *18%* respectivamente. Para tener idea de cómo se vio afectado el poder adquisitivo de los trabajadores en este lapso, veamos en cuánto ascendió el costo de la vida de dic. de 75 a dic. del 78 y, por otro lado, cuánto creció el salario: supongamos que P_0 denota el precio de la canasta básica de familia "promedio" [illegible] conservadoramente, de 2 adultos y 3 niños), a fines de 75. Como al finalizar 1976, los precios habrían aumentado en un *29%*, la misma canasta costaría:

$$P_1 = P_0 + 0.29P_0 = 1.29P_0 \tag{21}$$

De manera que en dic. de 1977 el precio sería de (justifique el lector cuidadosamente cada paso):

$$P_2 = P_1 + 0.26P_1 = 1.26P_1 = (1.26)(1.29)P_0 = 1.6254P_0 \tag{22}$$

y al terminar 1978, de:

$$P_3 = P_2 + 0.33P_2 = 1.33P_2 = (1.33)(1.6254)P_0 = 2.161782P_0$$

En las ecuaciones (21) y (22) obsérvese que el hecho de que los porcentajes de aumento de los precios corresponde a períodos anuales y son calculados en *base* a los precios finales del ciclo anterior (así, el 26% de aumento de finales de 77 se calcula sobre los precios de dic. de 1976) produce que el efecto acumulado de los 3 aumentos anuales sea mucho mayor que la suma de los mismos. En efecto: como el incremento en los precios de dic. de -- 1975 a dic. de 1978 fue de

$$2.161785P_0 - P_0 = 1.161782P_0$$

entonces, por cada peso del precio en 75, la canasta aumentó en:

$$\frac{1.161782P_0}{P_0} = 1.161782$$

pesos. Esto es: los precios de los articulso de primera necesidad, aumentaron de fines del 75 a fines del 78 en:

$$1.161782 = 116.1782\%$$

de manera que por cada 100 pesos de precio inicial, se pagarían 3 años más tarde, 116.17 pesos *más*. (Compárese este valor con el que arroja la suma de los porcentajes).

Por otro lado, si S_0 denota el salario que devengaba un trabajador en febrero de 1977, al recibir un aumento del 5.5% ganaría:

$$S_1 = S_0 + 0.055S_0 = 1.055S_0$$

hasta febrero de 78, mes en el que su salario aumentaría en un - 13%; es decir que sería igual a:

$$S_2 = S_1 + 0.13S_1 = 1.13S_1 = (1.13)(1.055)S_0 = 1.19215S_0$$

para terminar, en febrero de 1979, por ser

$$S_3 = S_2 + 0.18S_2 = 1.18S_2 = (1.18)(1.19215)S_0 = 1.406737S_0$$

lo que significa qu el porcentaje de aumento compensatorio del de

los precios fué de:

$$\frac{S_3 - S_0}{S_0} = \frac{1.406737S_0 - S_0}{S_0} = 0.406737$$

$$= 40.67\%$$

de modo que por cada 100 pesos que recibía un trabajador en feb. de 76, en feb. de 1979 recibiría 40.67 pesos más. Saque el lector sus propias conclusiones respecto a la política económica nacional de aquel periodo.

CUESTIONARIO

5.1. ¿Qué es un porcentaje?

5.2. ¿Por qué se usan los porcentajes en lugar de otras expresiones de las razones?

5.3. Calcule qué porcentaje de la pesca mundial a. corresponde a - peces b. corresponde a invertebrados c. tiene un alto valor comercial (crustáceos y moluscos con concha).

5.4. Escriba los valores de la salinidad σ y la concentración de O_2 disuelto C_{O_2} en altamar como porcentajes si se sabe que $\sigma = 34‰$ y $C_{O_2} = 6$ por millón.

5.5. Explique por qué para calcular el % total del aumento de los precios y salarios que discutimos en el ejemplo 5.2 *no se sumaron* los porcentajes correspondientes al aumento anual.

5.6. Se sabe que al finalizar 1974, la población de México era de 58.4 millones de personas y durante 1975, cada mes nacieron 175000 mexicanos. a. Calcule el % de aumento anual de la población mexicana. b. ¿Permanece constante el % de aumento *mensual* de la población? Explique porqué. c. Si durante los siguientes cinco años México tuvo la misma tasa de natalidad anual que durante 1975 -- ¿cuál era la población en 1980? d. ¿Cuántos individuos nacieron cada año de 1975 a 1980?

5.7. Si durante un año la pesquería de cierto recurso sufriera un aumento del 20% y al año siguiente experimentara un decremento - del mismo porcentaje ¿habría aumentado o disminuido la pesquería en el bienio correspondiente? Explique su respuesta.

6. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Reza un refrán: "una imagen dice más que mil palabras" y también se aplica en el caso de los conceptos matemáticos. Por razones psicológicas que no vienen al caso, la *intuición geométrica* [illegible] supera ampliamente su *intuición aritmética*; de tal manera, toda vez que es posible "dibujar una idea" (i.e. representarla mediante un modelo gráfico) es más fácil manejarla: entender sus propiedades y aún entender o reconocer hechos que no son claros hasta que no se tiene tal modelo.

Sin embargo, este proceder tiene sus peligros: a veces ocurre que la intuición sugiere o señala cosas falsas y en la historia de las matemáticas se registran serios problemas debidos a "apreciaciones intuitivas" engañosas. No obstante, una vez advertidos de que no todo lo que intuyamos es cierto, siempre que sea posible trataremos de dibujar los conceptos que definamos.

A los números racionales se les representa geométricamente mediante *la recta numérica* que se construye así:

1ª. Se elige un punto arbitrario de cualquier recta infinita y se le asigna el racional *0* (figura 5)

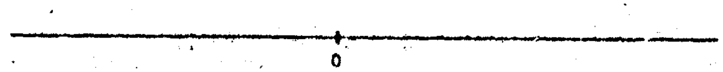
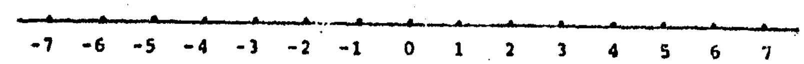


Figura 5

Primer paso: se fija el cero.

A este punto se le llama *el origen*.

2ª Se elige una longitud arbitraria a la que llamaremos "la magnitud o tamaño de la unidad"; repitiéndola sucesivamente a lo largo de la recta a partir del cero, obtenemos los puntos representantes de los enteros: los positivos en un sentido (a la derecha, por ejemplo) y los negativos en el sentido opuesto (figura 6)



Figura

2ª Paso se elige la magnitud de la unidad y se localizan los enteros.

De este modo, el tamaño de la unidad es la distancia que hay entre dos enteros consecutivos.

3ª. Ahora el punto correspondiente a cualquier racional de la forma $\frac{p}{q}$ lo encontramos así: dividimos la unidad en q partes iguales - cada una de las cuales se dice que mide un q-ésimo - tomamos el primero y lo repetimos sobre la recta, a partir del cero, p veces hacia la derecha si el racional es positivo y hacia la izquierda en caso contrario. El punto al cual se llegue al cabo de este proceso representa a $\frac{p}{q}$ (ejemplos en la figura 7).

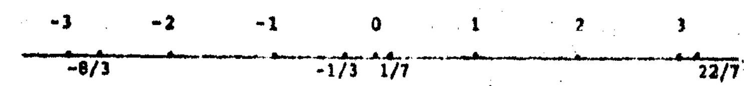


Figura 7

$\frac{-8}{3}$ y $\frac{22}{7}$ en la recta numérica.

Vale la pena discutir dos ideas cuya interpretación geométrica es mucho más descriptiva que su sola enunciación aritmética: *el orden y la densidad de los racionales*.

La primera la hemos manejado ya al comparar, en las secciones previas, diferentes racionales entre sí; en la recta numérica la comparación es sencilla pues dados dos racionales cualesquiera $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$, uno y sólo uno de los tres siguientes hechos tiene lugar:

(i) $\frac{p}{q}$ está a la derecha de $\frac{r}{s}$

(ii) $\frac{p}{q}$ está a la izquierda de $\frac{r}{s}$

(iii) $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ están en el mismo lugar.

En el caso (i) diremos que $\frac{p}{q}$ *es mayor que* $\frac{r}{s}$ y lo denotaremos así:

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$$

Si se da el caso (ii), entonces $\frac{p}{q}$ *es menor que* $\frac{r}{s}$ y la notación correspondiente es:

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

En tanto que si ocurre (iii), $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ *son iguales*:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

Esto explica, además, la forma aritmética que usamos antes para comparar racionales: recuérdese que para hacerlo había que convertir a racionales equivalentes con el mismo denominador y, dependiendo de la magnitud de los numeradores correspondiente, se comparaban. Pues

$$\frac{p}{q} = \frac{ps}{qs} \qquad \text{y} \qquad \frac{r}{s} = \frac{qr}{qs}$$

implica que:

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \text{ si y sólo si } ps > qr \tag{23}$$

Esta proposición es de gran utilidad porque tanto ps como qr son enteros fáciles de comparar.

Por otro lado, la noción de densidad tiene que ver con la forma en que se distribuyen los racionales en la recta. Precisemos: dado un entero cualquiera, siempre es posible establecer qué entero lo sigue y cuál lo precede y es que *la mínima distancia entre dos enteros* cualesquiera es una unidad; esto no ocurre con los racionales: dado un racional no es posible decir qué racional es "el inmediatamente posterior" ni cuál es el que está "justo antes" por que tampoco hay una mínima distancia entre dos racionales cualesquiera; de hecho, ya lo discutimos al hablar de la expansión decimal de un racional - cualquier racional es *aproximable* con el grado de exactitud que se desee mediante una suma de racionales cuyos denominadores sean potencias sucesivas de la base entera que se nos dé la gana; esto significa que *podemos acercarnos al racional dado tanto como queramos sin alcanzarlo*, con otros valores racionales. Así, por ejemplo: al punto que en la recta le corresponde al racional $\frac{1}{3}$, lo podemos aproximar sucesivamente con mayor precisión mediante los racionales.

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \frac{3333}{10000},$$

de tal suerte que aunque estemos cada vez más cerca del $\frac{1}{3}$, siempre habrá una distancia entre cualquiera de tales puntos y el de $\frac{1}{3}$.

Además, para acabar de tener una idea de cómo se distribuyen los racionales, considérese el siguiente hecho: si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son dos racionales cualesquiera, puede probarse entonces que *el racional*:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) \tag{24}$$

corresponde en la recta numérica al punto medio del segmento que une $\frac{p}{q}$ con $\frac{r}{s}$ de manera que si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, entonces:

$$\frac{p}{q} < \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) < \frac{r}{s}$$

lo que significa que *entre dos racionales cualesquiera siempre* -

hay otro racional.

Esta suerte de "aglomeración extrema" de los racionales a lo largo de la recta numérica se conoce con el nombre de densidad y se acostumbra decir que *los racionales son densos en la recta.* Sin embargo, y éste es el primer hecho que choca con la intuición geométrica, *los racionales no agotan la recta numérica* en el sentido de que, si bien es cierto que están tan cerca unos de otros como se desee, *hay puntos de la recta a los que no les corresponden de un racional;* y yendo de sorpresa en sorpresa, es posible demostrar que hay una infinidad de tales puntos (infinidad , para colmar nuestra capacidad de asombro, aún más grande que la infinidad de los racionales).

Magnitudes tan cercanas a nuestra experiencia matemática proveniente de la escuela elemental como la razón entre el diámetro de un círculo y su circunferencia - el famoso número *PI* - pertenecen a esta categoría. Nos explicamos: el perímetro de un círculo de diámetro 1 es una magnitud geométrica con un significado - inequívoco que determina, medida desde el cero en la recta numérica, un punto único sobre ella , cercano al racional *3.1416* (cuyo valor memorizamos como "igual a π") pero, en rigor, diferente de él y de cualquier otro racional (ver figura 8)

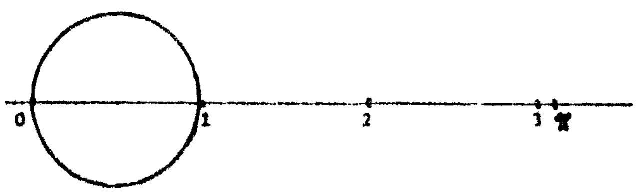


Figura 8

Un hilo de longitud π ceñiría exactamente al círculo de diámetro 1.

Por contraste, los números de tal naturaleza fueron llamados ***irracionales*** **por los griegos; en la recta numérica llenan los agujeros que no cubren los racionales y su expansión decimal es no periódica. La discusión en el capítulo IV. gira alrededor de uno de éstos bichos, tan ilustre como π e íntimamente ligado a la mate-**

mática del crecimiento: ***el número e .***

CUESTIONARIO

6.1. En una recta numérica a ¿Cómo se llama **la distancia entre** - dos enteros consecutivos? b. ¿qué es un q-ésimo? c. Represente a los racionales $\frac{-3}{5}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{-23}{4}$, -5, 3.1 y $1.\overline{001}$.

6.2. Ordene de menor a mayor los siguientes números: -5.2, 7, -3.14, 3.16, $\frac{22}{7}$, 2, $\frac{1}{4}$.

6.3. Use la proposición (23) para poner, entre cada par de racionales que se dan, el símbolo $>$, $<$ o $=$: a. $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{4}$; b. $\frac{-9}{5}$ y $\frac{-8}{5}$; c. $\frac{25}{7}$ y $\frac{125}{21}$; d. $\frac{-5}{6}$ y $\frac{-13}{17}$.

6.4. ¿Cuál es el entero que sigue del 0?

6.5. ¿Cuál es el racional que sigue al cero?

6.6. Explique brevemente qué significa que **los racionales sean** - densos en la recta numérica.

6.7. En el texto se establecieron dos tipos de números que **se re**presentan geométricamente en la recta numérica ¿cuáles **son esos** tipos de números?

6.8. En términos de su expansión decimal ¿cómo se distinguen **los racionales de los irracionales?**

6.9. ¿Puede un irracional tener expansión decimal **periódica?**

APENDICE AL PRIMER CAPITULO

Con las operaciones que se difinieron en el parágrafo 3. los racionales tienen una ***estructura algebraica*** **particularmente rica; la siguiente es una lista de las propiedades básicas elementales: Si $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ y $\frac{t}{u}$ son tres racionales cualesquiera, entonces:**

A.1. La suma es *conmutativa.* **Es decir:**

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$$

A.2. La suma es *asociativa*; esto es:

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)+\frac{t}{u}=\frac{p}{q}+\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)$$

A.3. El *cero*, que es un racional porque $0=\frac{0}{r}$, actúa como *neutro aditivo*, de manera que cualquier racional sumado con él queda -- igual:

$$\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}$$

A.4. Para cada racional existe un *inverso aditivo*. Es decir, o- tro racional que sumado con el primero, da *cero*; en efecto:

$$\frac{p}{q}+\left(\frac{-p}{q}\right)=0$$

M.1. El producto es *conmutativo*. Luego:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{r}{s}\cdot\frac{p}{q}$$

M.2. El producto es *asociativo*. Es decir:

$$\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)\cdot\frac{t}{u}=\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{r}{s}\cdot\frac{t}{u}\right)$$

M.3. El *uno*, que es un racional porque $1=\frac{q}{q}$, actúa como *neutro multiplicativo* porque

$$\frac{p}{q}\cdot 1=\frac{p}{q}$$

para cualquier racional.

M.4. Para cada racional *diferente de cero*, existe un *inverso* -- *multiplicativo*; esto es, otro racional que multiplicado por el - primero da *uno*. En efecto:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}=\frac{pq}{qp}=1$$

D. El *producto distribuye a la suma*. Es decir:

$$\frac{p}{q}\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\cdot\frac{t}{u}$$

Es conveniente tener una lista como ésta pues es en base a es tas propiedades aritméticas que se obtienen muchas de las que se deducen en los cursos básicos de álgebra; supondremos que las mis mas se manejan con soltura y sólo cuando valga la pena justificaremos con detalle alguna demostración particular. Por lo pronto para refrescar la memoria vale la pena que resuelva el siguiente cuestionario; los dos primeros ejercicios son "ortográficos".

1. Dados $a=4$, $b=5$, $c=6$, calcular $a+\frac{b}{c}$, $\frac{(a+b)}{c}$, $\frac{a}{b}+c$ y $\frac{a}{(b+c)}$.

2. Calcular $\frac{p}{q}-3$, $p-\frac{q}{3}$, $\frac{p}{(q-3)}$ y $\frac{(p-q)}{3}$ para $p=36$ y $q=6$.

3. Elimine los paréntesis y reduzca términos semejantes en las expresiones siguientes: a. $x(x+y)+y(x-y)$; b. $m(s+3)+$ $+s(m-3)$.

4. Usando las propiedades algebraicas discutidas en este apéndi ce, calcule de la manera más cómoda posible, lo siguiente:

   a. $(17\times 19)+(13\times 19)$

   b. $\left(\frac{25}{4}\right)\left(\frac{17}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)$

   c. $\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)$

5. Recuerde que la *n-ésima potencia* de un número a se define - como el producto de a *por sí mismo* n veces. Pruebe ahora que si a y b son número racionales, entonces:

$$a+ab=a(1+b)$$

y de aquí que

$$(a + a l) + b(a + ab) = a(l + b)^2$$

6. Note que el cero multiplicado por cualquier número, da siempre cero. Exprese esta propiedad algebraica de los números usando literales.

7. Use la propiedad enunciada en 6. para explicar porqué no es posible que el cero tenga inverso multiplicativo (sugerencia: revise la propiedad M.4.)

8. ¿Es asociativa la diferencia de racionales? **sugerencia**: revise los resultados de los ejercicios 6.e. y 6.h. del cuestionario de la sección 3.

NOTAS DEL CAPITULO I

[1] *Cf.* Koyré A. Estudios Galileanos. S. XXI Editores. México, 1981. pp. 73 a 148: "Ley de la Caída de los Cuerpos".

[2] Para especificar el tipo de unidades que se toman al medir cada variable, usaremos el símbolo de uso corriente para denotar tales unidades escrito entre corchetes a continuación de la variable. Aquí, por ejemplo, tendríamos

$$d[m] \text{ y } t[sg]$$

[3] Vale la pena observar que si bien g es una variable - **aspecto** cuantificable que afecta el fenómeno - su valor es constante para cada lugar particular ($9.81 \frac{m}{sg^2}$ al nivel del mar, $1.63 \frac{m}{sg^2}$ en la superficie lunar). Este tipo de variables que "se fijan" según ciertas condiciones las llamaremos *parámetros*.

[4] Algunos aspectos históricos importantes sobre el concepto de función son discutidos por Bochner S. en "The Role of Mathematics in the Rise of Science" Princeton University Press, Princ. New Jersey. 1966. pp. 216 - 224; "The significance of functions".

[5] En la práctica, una de las definiciones de biomasa que se usan es la siguiente:". el total del peso húmedo de los organismos vivos presentes por unidad de área o volumen" (Rounsfell, 1975). Sin embargo, por razones didácticas presentamos en el texto otra definición; la diferencia estriba en que en la de Rounsfell se comparan cantidades de diferente tipo (peso húmedo contra área) en tanto que en la nuestra (y en las definiciones de salinidad y tasa de natalidad) comparamos cantidades del mismo tipo.

[6] The Food and Agriculture Organization (FAO) Yearbook for Fishery Statistics for 1968.

[7] Se dice que un entero m *es un factor de otro entero* a si existe un tercer entero r tal que $a = mr$; m *es un factor común de* a *y* b si es factor de ambos y en tal caso, se dice también que a y b son múltiplos comunes de m.

[8] Anchoveta y sardina, por ejemplo.

[9] FAO, op. cit.

[10] Cf. Margalef T. Ecología. Ediciones Omega, S.A., Barcelona, 1977.

[11] Curiosamente, el país que obtuvo la más grande captura pesquera en 1968 fue Perú; valdría la pena dar en clase una discusión respecto al hecho - en cierto sentido insólito - de que así haya sido: tómese en cuenta el subdesarrollo de ese país, el hecho - nada raro - de que su captura pesquera sea prácticamente sólo de clupeidos y la presencia en Perú de la Purina (transnacional de alimentos para el ganado).

[12] La razón de estos nombres corresponde a las propiedades A.4. y M.4. del apéndice.

[13] Cf. Problema 5. del cuestionario al final del apéndice.

[14] Un *algoritmo* es un conjunto de reglas que describen el procedimiento que debe seguirse para realizar una operación o llevar a cabo un proceso.

[15] Vale la pena la siguiente aclaración: las "observaciones fundamentales" del texto no se justifican en él por razones didácticas

o porque están basadas en conceptos o herramientas matemáticas - más allá de lo que, en el momento de hacer la observación, se supone que el lector maneja. Sin embargo, es necesario evitar en lo posible que se quede la sensación de que las propiedades que se usan "salen de la manga"; para esto, si más adelante el texto da para hacerlo, se discutirán o bien se dará una referencia en la que los interesados puedan satisfacer sus dudas.

En este caso particular, recomendamos la lectura de la obra de - Courant R. y H. Robbins ¿Qué es la Matemática? Editorial Aguilar. Madrid. 1979. Números racionales y decimales periódicos, pp. 75 y 76. Y mencionamos que el resultado (18) se basa en la siguiente fórmula del análisis matemático:

$$1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}}$$

[16] Un conflicto similar se plantea en lo que se refiere a la captura de camarón en México: de las pesquerías para consumo humano, - la de este crustáceo es la mayor volumen en México. Sin embargo por razones económicas relacionadas con su precio, casi no es consumido dentro del país. Cf. Anuario Estadístico del Departamento de Pesca. 1979. pp. 132 - 133 y 407 - 408. Méx. 1979.

CAPITULO II: ELEMENTOS DE LA TEORIA CLASICA DE LAS PROBABILIDADES.

"*Alea jacta est*"

Julio César.

"*La probabilidad es como el bastón que utiliza el ciego para ir a tientas. Si pudiera ver, no necesitaría el bastón, y si yo supiera cuál caballo es el más veloz, no necesitaría la teoría de las probabilidades*".

Stanislaw Lem.[1]

1. *Antecedentes.*

La *Teoría de las Probabilidades* es una de las ramas de la matemática que más se aplica a la solución de problemas específicos en las ciencias naturales y es que la visión simplificada[2] de los fenómenos no es suficiente para muchos fines; así, si se quiere estudiar la Naturaleza con mayor profundidad, es necesario usar una herramienta que permita evaluar *la incertidumbre* respecto a una variedad de efectos contradictorios que pueden ser originados por un mismo conjunto de causas bien definidas.[3]

Así, el plantearse la búsqueda de la fórmula de la caída libre de los cuerpos:

$$d(t) = \left(\frac{1}{2}\right) gt^2 \qquad (1)$$

es una visión simplificada de un tipo de fenómenos que pueden ser extremadamente complicados. La fórmula (1) permite *determinar* la posición en función del tiempo en base a una serie de premisas simplificadoras (de las cuales la suposición de que el cuerpo cae en el vacío es la más fuerte) que, de no cumplirse, invalidan la predicción que pueda hacerse con ella. Lo que *realmente ocurre* en un medio no vacío está muy lejos de ser tan sencillo: por ejemplo, si el cuerpo cae dentro de la atmósfera terrestre o en el océano, está sujeto a influencias -algunas prácticamente impredecibles- que, desde luego, afectan el movimiento del cuerpo y que, por no estar tomadas en cuenta, pueden provocar resultados muy distintos de los que se obtendrían al aplicar (1)

Así, cuando las premisas simplificadoras hacen intrascendente la forma de ver algún fenómeno -tal sería el caso, por ejemplo de soltar una moneda a $\frac{1}{2}$ cm. del piso con la cara de "**Sol**" hacia arriba y "predecir" qué va a caer[4]- por que fuerzan el resultado e impiden que se manifiesten otros posibles y contradictorios resultados, es preferible echar mano de la herramienta matemática creada para manejar el *azar*: la Teoría de las Probabilidades. Existen diferentes construcciones de esta teoría: la clásica, la frecuentista o estadística y la axiomática. Cada una tiene sus pros y sus contras, pero por su sencillez, pues es contruída usando los racionales y sus aritmética, en este trabajo presentaremos los rudimentos del enfoque clásico y sugerimos al lector interesado revise la discusión del apéndice a este capítulo.

2. *Un problema de genética.*

Sin duda, la biología se ocupa de fenómenos naturales complejos y hemos elegido uno de este campo para orientar esta presentación; este capítulo culmina con la discusión de un problema particular de la genética de poblaciones; en el camino, sin embargo, tendremos que discutir otro tipo de fenómenos y para que no perdamos de vista el interes biológico de lo que iremos presentando, plantearemos de una vez dicho problema.

En 1866, el monje moravo Gregorio Mendel (1822-1884), estableció las bases de la genética al estudiar, en una especie de chícharos, en qué proporción se trasmitirían de generación en generación, las características hereditarias de que el fruto fuera liso o rugoso. El avance científico en la época de Mendel estaba muy lejos de la bioquímica necesaria para abordar el problema en términos de ciertas reacciones internas en las células reproductoras al formar un huevo y Mendel hubo de guiarse por el aspecto macroscópico de los chícharos: a partir de una planta de fruto liso - - (hija de "lisos" además) y de otra de frutos rugosos (de padres rugosos a su vez) al monje observaba que *en cada generación, los porcentajes de lisos y rugosos permanecían prácticamente constantes.*

A partir de esta observación fundamental, discutiremos aquí el siguiente problema:

Si de un gran número de nacimientos de la misma generación - *escogemos al azar* (i.e. sin preferencia alguna) *grupos de* n *individuos, de todos los posibles grupos ¿qué porcentaje está formado por* k *individuos "rugosos" y* n - k *"lisos"?*[5]

Por ejemplo: si de la tercera generación formamos grupos de 10 plantas, ¿qué porcentaje del total de decenas que se pueden - formar, tiene 3 chícharos rugosos y 7 lisos?

En general, se trata de responder este tipo de preguntas - para cualquier par de características hereditarias *que se excluyan mutuamente y de las que necesariamente ha de presentarse una o la otra* v.gr. las del sexo, el albinismo, la capacidad de "enrollar la lengua", etc. Para lograrlo, tendremos primero que hacernos de un lenguaje preciso y de ciertas definiciones y teoremas.

C U E S T I O N A R I O

2.1. Si en la primera generación, Mendel observó que de cada 200 plantas, 150 eran lisas ¿Cuáles eran los porcentajes correspondientes a cada tipo de fruta?

2.2. ¿En qué observación fundamental se basa, la discusión - del problema que hemos presentado y que abordaremos en este capítulo?

2.3. El *albinismo* en los ratones excluye el que sean *pigmentados* y alguna de estas dos características necesariamente es presentada por cada individuo.

En varias poblaciones de ratones que se obtuvieron de la cruza inicial de hembras albinas y machos pigmentados (de padres pigmentados) se observó que en la 1ª generación todos eran pigmentados y que, en la 2ª, lo eran 3 de cada 4.

a) ¿la observación fundamental a la que se alude en el texto permite decir cuáles serán los porcentajes en las generaciones - posteriores?

b) ¿porqué o cómo?

c) Si una de estas poblaciones constaba de 520 individuos - de la 2ª generación ¿aproximadamente cuántos eran albinos?

2.4. Describa brevemente en que consistieron los trabajos de Mendel y qué resultados arrojaron.

3. *Probabilidad, la definición clásica.*

A lo largo de este capítulo entenderemos por *realización del experimento* el que se de una colección bien definida condiciones bajo las cuales ocurra un hecho de entre varios hechos posibles, bien identificados, que llamaremos *resultados del experimento, sucesos aleatorios* o, cuando sea claro que se está hablando de ellos en el sentido probabilista, simplemente *sucesos*. Por ejemplo:

Ejemplo 3.1. *El tiro vertical y rotatorio alrededor* de *uno de sus diámetros*, de *una moneda cilíndrica de material homogéneo* - (ver figura 1) es un experimento cuyos posibles resultados son - "cae águila" o "cae sol" y cuyas condiciones hemos subrayado.

Ejemplo 3.2. En una competencia de tiro, se dispara una pistola Colt 45 mm, sobre un blanco situado a 100 m del tirador a las -- 10:00 A.M. de un día soleado, este es un experimento cuyas condiciones se refieren a la pistola, la hora, la visibilidad, etc. y - que es diferente de cualquier otro experimento que no cumpla *exactamente las mismas condiciones*; v.gr. el disparar con la misma - arma, a la misma distancia y sobre el mismo blanco pero a las -- 6:00 A.M. y con neblina; supondremos que si el tiro no da en el blanco, el experimento no se habrá realizado. Si el blanco fuese como el de la figura 2, unos posibles resultados serían: se hace impacto "en la zona III", "en la zona II", "en la zona I"; -- otros, serían: "la bala no da en la zona III", "la bala no da en la zona I", etc.

Así, en el caso del problema de genética que planteamos en el parágrafo 2, las condiciones son:

i) Los grupos de n individuos son elegidos sin preferencia alguna;

ii) Al elegir cada n-ada, se considera la generación completa; no se retiran de ella los individuos que ya fueron elegidos en otra n-ada.

iii) Dos n-adas se consideran diferentes si tienen al menos un elemento distinto.

En tanto que una colección de posibles resultados es: de los n individuos elegidos "ninguno presenta la característica A"; "la presenta uno solo"; "la presentan 2", ... ,"la presentan k, ... , "la presentan n - 1", "la presentan todos".

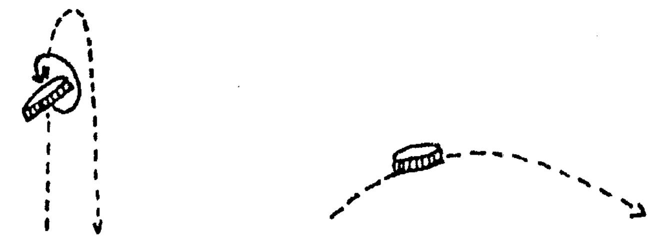


Figura 1.
Dos experimentos distintos con la misma moneda. Las líneas punteadas indican el desplazamiento de la moneda y la línea continua el giro sobre sí misma.

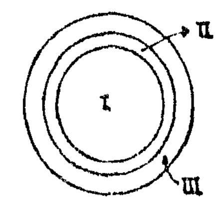


Figura 2.
El blanco del ejemplo 3.2.

Obsérvese que en los ejemplos hemos hecho hincapié en que, - dadas las mismas condiciones, el conjunto de sucesos que se consideran resultados del experimento no es único; dependen de qué aspectos nos interesen.

Denotaremos, salvo que se especifique otra cosa, a los sucesos con mayúsculas latinas y estableceremos, cuando haga falta, de qué suceso se trata en la forma que los siguientes ejemplos - exhiben:

El suceso S que consiste en que caiga sol al tirar un volado se expresa así:

S: "cae sol"

en tanto que la expresión:

M: "En una camada de 5 ratones exactamente 3 son albinos" se lee como M *es el suceso que consiste en que* en una camada etc.

Conviene clasificar y agrupar los sucesos de la siguiente manera:

Se dice que dos sucesos M y N son *mutuamente exluyentes* si la ocurrencia de uno impide que ocurra el otro. Así, cuando M sucede, es imposible que se de N y alrevés.

Ejemplo. Si tomamos algunos de los resultados que citamos en los ejemplos 3.1. y 3.2. se tiene que:

"cae águila" y "cae sol"
"da en la zona I" y "da en la zona III

Son pares de sucesos que se excluyen mutuamente y que:

"da en la zona III y "no da en la zona I"

No se excluyen mutuamente (¿porqué?)

Una colección de sucesos es un *juego completo de posibilidades* (j c p) si, dado un experimento, su resultado es uno y sólo uno de los sucesos de dicha colección.

Así:

{ "cae sol", "cae águila" } (2)[6]

es un jcp del experimento del ejemplo 3.1.

En tanto que las colecciones

{ "da en la zona I", "da en la zona II", "da en la zona III" } (3)

y

{ "da en la zona II", "no da en la zona II" } (4)

son jcp del experimento descrito en 3.2.

La definición clasica de probabilidad está basada en *la noción de equiposibilidad*; se dice que una colección de sucesos aleatorios es equiposible o que todos ellos son igualmente posibles si "estamos igualmente inseguros de la ocurrencia de cualquiera de ellos"; esta inseguridad proviene de "características objetivas" del experimento particular que se trate y sólo la "evidencia empírica" (i.e. la comprobación experimental en una larga serie de realizaciones del experimento) comprobarán si la equiposibilidad sugerida por tales características objetivas se cumple o no. Como se verá, el meollo de la definición de probabilidad consiste en "reducir todos los acontecimientos del mismo género a un cierto número de casos igualmente posibles"[7] pero antes de dar la definición examinemos los siguientes ejemplos.

(Cont) Ejem. 3.1. Las condiciones de homogeneidad y "libre tiro" del experimento en 3.1., son características objetivas que hacen razonable considerar como equiposibles a los sucesos del jcp (2)

(Cont) Ejem. 3.2. El experimento descrito en el ejemplo 3.2. se refiere a una competencia de tiro, difícilmente se podría considerar que los jcp (3) y (4) estén formados por sucesos equiposibles (¿porqué?).

Ejemplo 3.3. Si el experimento consiste en elegir a ciegas una de diez canicas, todas del mismo tamaño, no reconocibles al tacto y colocadas dentro de una tómbola pero cada una señalada con un número del 1 al 10 que las distingue entre sí, entonces: si X es el número de la canica que se elige.

$$\{ X \mid X = 1,2, \ldots ,10 \} \qquad (5)$$

es una colección de sucesos equiposibles por la indistinguibilidad a ciegas de dos canicas del mismo tamaño.

Fuera del dominio de los juegos de azar es difícil encontrar ejemplos donde las características objetivas sugieran equiposibilidad por lo que se hace necesario postularla a partir de la evidencia experimental; i.e. si en una larga serie de experimentos ocurre que varios sucesos del mismo género se presenten con igual frecuencia, es razonable suponer que tales sucesos son equiposibles.

Continuamos con las definiciones previas; dado un resultado cualquiera, puede que sea factible descomponerlo en sucesos más simples o puede que no; por ejemplo: si el experimento es el del ejemplo 3.3., el suceso:

"Se saca una canica con número par" (o más brevemente: "X es par") puede expresarse según la siguiente disyuntiva:

"$x=2$" ó "$x=4$" ó "$x=6$" ó "$x=8$" ó "$x=10$"

mientras que ninguno de estos sucesos puede describirse en términos de otros. Así, si un resultado no es expresable en términos de otros más sencillos, se llama *suceso elemental*; en caso contrario, el *suceso es compuesto*.

Ahora sí: sea S un suceso aleatorio cualquiera que puede ocurrir en un experimento; sea $\mathcal{S}$ un jcp en el que todos los sucesos son elementales y equiposibles; *la probabilidad de* S *mide la tendencia a que en una larga serie de realizaciones del experimento ocurra* S; si

m es el número de sucesos de $\mathcal{S}$ que son favorables o implican la ocurrencia de S

y

n es el número de elementos de , i.e. el total de posibles resultados.

La probabilidad de S se define y se denota como

$$\Pr(S) = \frac{m}{n} \qquad (6)$$ [8]

que es, como ya sabe el lector, la razón existente entre los casos favorables a S y los casos posibles en el experimento y que puede

expresarse entonces como % o en cualquiera de las formas de representación de números racionales que hemos discutido en el capítulo I.

(Cont.) Ejemplo 3.1. Como en el jcp (2) todos los sucesos son equiposibles, entonces:

Si S: "cae sol" y A: "cae águila"

$$\Pr(S) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \Pr(A) = \frac{1}{2}$$

(Cont.) Ejemplo 3.3. Si S:"x es par", en el contexto del experimento descrito en el ejemplo 3.3., entonces: "$x=2$", "$x=4$", "$x=6$", "$x=8$" y "$x=10$" con los casos favorables a S, mientras que el jcp equiposibles tiene 10 elementos; por lo tanto:

$$\Pr(x \text{ par}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Ejemplo 3.4. En el experimento se tiene 10 canicas del mismo tamaño en un saco: 4 rojas, 5 azules y una blanca. A ciegas, se extrae del saco una canica, cuales son las probabilidades de cada uno de los sucesos:

R: "se saca una canica roja"
A: "se saca una canica azul"
B: "se saca una canica blanca".

La discusión que hicimos en el ejemplo 3.3. para explicar la equiposibilidad de los sucesos del jcp (5) es aplicable aquí para justificar la equiposibilidad de elección de cualquiera de las 10 canicas; luego, hay 10 casos posibles, como 4 son favorables a R, 5 a A y 1 a B, entonces.

$$\Pr(R) = \frac{4}{10} = 40\%; \qquad \Pr(A) = \frac{5}{10} = 50\%$$

$$\Pr(B) = \frac{1}{10} = 10\%$$

Vale la pena establecer *las popiedades básicas de la probabilidad* que se obtienen directamente de la definición; antes: - se dice que un *suceso aleatorio* es *seguro* si siempre ocurre e *imposible* si nunca se da. Ahora sí, salen las propiedades básicas:

Proposición 3.1. Si s es un suceso seguro, entonces

$$Pr(S) = 1$$

Puesto que en este caso, coinciden el número de casos favorables y el número de casos posibles; i.e. $m = n$ en la fórmula (6) y por lo tanto

$$Pr(S) = \frac{n}{n} = 1$$

Proposición 3.2. Si S es un suceso imposible entonces:

$$Pr(S) = 0$$

en efecto: aquí se tiene que $m = 0$ y consecuentemente:

$$Pr(S) = \frac{0}{n} = 0$$

Proposición 3.3. Si S es cualquier suceso entonces Pr(S) es un número no negativo que no excede de 1, i.e.:

$$0 \leq Pr(S) \leq 1$$

esto se debe a que necesariamente, el número de casos favorables a S es menor o igual al total de casos posibles ya que, simultáneamente, es un número no negativo: esto es que

$$0 \leq m \leq n$$

de suerte tal que $\frac{m}{n} = Pr(S)$ es un racional cuyo numerador no exceda al denominador y por consiguiente, es menor que launidad; además - $\frac{m}{n}$ es no negativo pues ni m ni n lo son.

Como se ve, calcular probabilidades según la definición clásica requiere de saber contar los casos favorables y el total de los casos una vez que se ha identificado los sucesos elementales equiposibles. Parece insulso el problema de contar las cosas pero, salvo en los ejemplos más simples, suele ser un asunto complicado. Veamos,

Ejemplo 3.5. Con la intención de estimar la población de - un tanque de cultivo de *A. Salina*, un acuicultor realiza 10 lances con una probeta de 100 ml. de capacidad. La forma correcta de hacer cada lance (i.e. tomar muestras de 100 ml. de agua y registrar el número de individuos que hay en la muestra) es la siguiente: se revuelve con la mano el agua del estanque durante 5 seg., inmediatamente después se sumerge la probeta y se llena de agua hasta el borde derramando luego en un chorro el excedente de los 100 ml., se cuenta el número de artemias que quedan en la probeta y se vacía el contenido en el estanque antes de hacer el siguiente lance. Por un descuido, el acuicultor olvidó revolver el -- agua del estanque en 3 de los 7 lances pero no supo en cuáles. En la estimación que hizo, escogió al azar los resultados de 6 - lances con la esperanza de que por lo menos 4 hubieran estado -- bien hechos. ¿Cuál es la probabilidad de que así ocurra? esto es ¿Cuál es la probabilidad del suceso aleatorio "por lo menos 4 de los 6 lances se hicieron bien"?. Como la expresión "por lo menos 4 de cada 6" significa "4 ó 5 ó 6", empezaremos por responder a las preguntas un poco más simples que planteamos a continuación:

Si X es el número de lances bien hechos que se escogen en este experimento ¿Cuál es la probabilidad de que $x = 4$, $x = 5$ y $x = 6$?,

Según la definición, hemos de empezar por definir un jcp elementales y equiposibles en términos de los cuales sean expresables los sucesos cuya probabilidad queremos encontrar; en este caso, - tal jcp está formado por todas las diferentes formas en que sea - posible elegir 6 de los 10 lances, i.e.

$$\mathcal{S} = \{S \mid S \text{ es una selección de 6 de los 10 lances}\}$$

así por ejemplo: si los lances están numerados del 1 al 10, los conjuntos de 6 números entre el 1 y el 10:

$$\{1,2,3,4,5,6\}, \qquad \{1,2,3,4,5,7\}, \qquad \{2,3,4,5,6,8\}$$

Definen sendas selecciones. Como lo que interesa en nuestro experimento es que un cierto número de lances sean "buenos", las selecciones no se distinguen entre sí por el orden en que se hagan sino por los elementos que tengan ; por lo que por ejemplo:

$$\{1,2,3,4,5,6\} \quad \text{y} \quad \{3,4,2,5,1,6\}$$

son, para los fines de este problema, la misma selección.

Ahora, si queremos aplicar (6) tendremos que contar el número de elementos de $\mathcal{S}$, i.e. el número de casos posibles ... una somera inspección del problema sugiere, sin duda, que la respuesta no es evidente; además, contar los casos favorables tampoco es tan fácil (por lo menos no tanto como los ejemplos anteriores) aunque podemos decir que, por ejemplo, en el caso $x = 4$ basta calcular de cuántas formas se puede elegir 4 de 7 lances buenos y, simultáneamente, 2 de 3 lances malos.

Como se ve, el cálculo de la probabilidad que se pide, a saber

$$P_r\,(x \geq 4)$$

(la probabilidad de que x sea mayor o igual a 4) depende de poder contar, dado un cierto número r de objetos, de cuántas formas se pueden elegir s de esos objetos, donde $0 < s < r$. Vale la pena entonces, abrir un paréntesis para discutir en general este tipo de problemas. Pero antes, responda al siguiente cuestionario.

C U E S T I O N A R I O

3.1. ¿Qué es un suceso aleatorio?

3.2. Explique brevemente lo que significan los párrafos; a. "dos experimentos son diferentes entre sí no cumplen exactamente las mismas condiciones, b. "el conjunto de sucesos que se consideran resultados del experimento no es único" c. "la probabilidad de A mide la tendencia de que A se presente en una larga serie de realizaciones del experimento". Acompañe sus explicaciones de un ejemplo cada una.

3.3. Considere el experimento consistente en elegir una ficha de dominó del total de fichas recién revueltas y con el puntaje hacia abajo, a. ¿cuáles son las condiciones de este experimento? b. ¿cuántos sucesos equiposibles y elementales hay? c. aplique la definición clásica y calcule las probabilidades de los siguientes sucesos: si x es la ficha que se elige A: "x es una mula"; B: "x es la ficha (3,5)"; C: "x hace juego con la ficha (3,5)"; D: "x tiene un 7", d. Diga si son mutuamente excluyentes los pares de sucesos A y B; A y C; B y C.

3.4. Un experimento consiste en arrojar libremente sobre una mesa un par de dados que se agitan previamente dentro de un cubilete, a. ¿cuáles son las condiciones del experimento? b. Enliste un jcp equiposibles y elementales ¿porqué las considera equiposibles? ¿cómo puede comprobar que son equiposibles? c. Sea (x,y) el par de resultados individuales de cada dado; si A: "x es par", B: "y es impar y $x = 5$", C: "$x = y = 6$", D: $x < 3$ y $y \geq 2$" y E: "$1 < x < 6$" calcule las probabilidades de cada suceso, d. Diga cuáles de las siguientes parejas de resultados excluyen mutuamente: A y B; A y C; A y D; D y E; C y D.

3.5. El albinismo en los ratones se debe a la presencia de un gene recesivo a, esto significa que si el genotipo tiene al menos un gene dominante p, el genotipo correspondiente será pigmentado (i.e. no albino), a. Escribe todos los posibles genotipos tomando en cuenta el gene que es aportado por cada padre, --

b. si se postula que todos estos posibles genotipos son equiposibles, calcule las probabilidades de los siguientes sucesos, - - A: "el genotipo es homocigoto", B: "el genotipo es hetorocigoto", C: "el genotipo es albino", D: "el genotipo es pigmentado", - - c. "Diga si se excluyen mutuamente los siguientes pares de sucesos: A y C; A y D; B y C; B y D; C y D.

3.6. Explique el porqué de las siguientes afirmaciones: "la probabilidad de que un ratón albino, hijo de dos pigmentados, tenga como padres un par de ratones heterocigotos es uno", "la - probabilidad de que uno de los padres de un ratón albino sea homocigoto pigmentado es cero".

3.7 a. Si es posible elegir un objeto de tres maneras y otro de dos maneras distintas, ¿de cuántas formas distintas se pueden elegir los dos objetos? b. si para ir de la ciudad A a la ciudad B hay 5 caminos y para ir de B a C hay 4. ¿Cuántos caminos distintos hay de A a C? Generalice.

4. *¿De cuántas formas?*

Antes de entrar en materia, conviene aclarar que la variedad de situaciones, en las que hay que contar sucesos en la teoría - clásica de las probabilidades es tan amplia que no es posible mostrar aquí la forma de resolver cada caso particular[9] y sólo describiremos un método o modo de razonar aplicable en gran cantidad de problemas y por lo demás, suficiente para resolver el problema de genética que planteamos en el parágrafo 2.

El problema que nos ocupa es entonces éste:

Dados "r" objetos ¿de cuántas formas pueden elegirse "s" de tres objetos?

Y para resolverlo, veremos primero ¿de cuántas formas pueden elegirse *ordenadamente* los s objetos? esto es equivalente a ver -

¿De cuántas formas es posible acomodar los "r" objetos en - "s" lugares?

Veamos, si los lugares son los que se muestran en seguida:

$$\overline{1^a}\quad \overline{2^a}\quad \overline{3^a}\quad \cdots\quad \overline{(s-1)\text{ésimo}}\quad \overline{s\text{ ésimo}}$$

el primero puede ser ocupado por cualquiera de los r objetos que se tienen a mano y - una vez elegido uno de éstos - quedarán r - 1 disponibles para ocupar la 2a. posición; así, habrá r(r - 1) formas distintas de ocupar sucesivamente ambas posiciones; ahora, - teniendo ya dos objetos fijos en la 1a. y 2a. posiciones, sólo - r - 2 son elegibles para ocupar la 3a. y por cada una de las - - r(r - 1) selecciones de las dos primeras, hay r - 2 para la tercera por lo tanto, hay r(r - 1) (r - 2) formas de ocupar sucesivamente los lugares 1ª 2ª y 3ª. Si repetimos este argumento hasta que se agoten los lugares tendremos finalmente que hay

$$\underbrace{r(r-1)(r-2)\ \ldots}_{s \text{ factores (porque hay s lugares)}}$$

es decir:

$$r(r-1)\ .\ .\ .\ (r-s+1)$$

formas de ocupar los s lugares con r objetos; este tipo de *selecciones ordenadas* se llaman *arreglos u ordenaciones de r elementos tomados de s en s*; al total de tales selecciones que se pueden - hacer, se le denota mediante el símbolo:

$$A_s^r$$

que por todo lo anterior, está dado por:

$$A_s^r = r(r-1)\ \ldots\ (r-s+1) \tag{7}$$

Ejemplo 4.1. En un saco hay 4 canicas del mismo tamaño, - una roja (r), una azul (a), una blanca (b) y una verde (v).

¿De cuántas formas pueden sacarse 3 canicas de la bolsa si se toma en cuenta el orden en que se sacan? (i.e. se consideran p. ej. diferentes selecciones "r, a, b" y "r, b, a" pues aunque se trata de las mismas canicas, se sacan en orden diferente).

Apliquemos el método que nos llevó a la fórmula (7):

La 1a. canica se puede sacar de 4 formas distintas: a saber, la selección: "r", "a", "b", "v" cada una de las cuales deja tres posibilidades distintas de selección de la 2a.:

TABLA 1.

1ª selección	2ª selección
r	a
	b
	v
a	r
	b
	v
b	r
	a
	v
v	r
	a
	b

que da (4)(3) = 12 selecciones distintas de la 1ª y 2ª canicas. – Ahora, por cada una de estas 12, hay dos selecciones distintas de la 3ª canica (tabla 2), que dan (4)(3)(2) = 24 maneras diferentes de sacar las 3 canicas.

TABLA 2

1ª selección	2ª selección	3ª selección
r	a	b
		v
	b	a
		v
	v	a
		b
a	r	v
		b
	b	r
		v
	v	r
		b
b	r	a
		v
	a	r
		v
	v	r
		a
v	r	a
		b
	a	r
		b
	b	r
		a

Esto es, que

$$A^4_3 = (4)(3)(2) = 24$$

Ahora, tanto en el problema del ejemplo 3.5. como en el problema de genética de la sección 2., el orden en que se elijan los objetos no tiene importancia.

La probabilidad de que se elijan por lo menos 4 muestras buenas no depende de cuál se elige primero y cuál después, sino de cuáles se eligen.

La probabilidad de que en una camada de n individuos, k tengan cierta característica hereditaria, tampoco tiene que ver con el orden en que, en la sucesión de n nacimientos, pudieran presentarse los individuos con tal característica sino de cuántos la - presenten.

Así, nuestro problema ahora es contar las selecciones que difieren entre sí sólo en el orden, para tomarlas a todas como una - sola selección no ordenada.

Dados r objetos, una selección no ordenada de s de estos objetos es una *combinación de r tomados de s en s*.

Cont. ejemplo 4.1. Considérese la tabla 2.; en ella aparecen todos los arreglos de 4 canicas tomadas de 3 en 3, si consideramos cualquier selección no ordenada, digamos la

r, a, b

podemos contar cuántos arreglos con las mismas canicas se pueden hacer si contamos de cuántas formas se pueden acomodar las letras r, a y b en los tres lugares;

_____ 1ª selección _____ 2ª selección _____ 3ª selección

Como hay $(3)(2)(1)=6$ arreglos de 3 objetos tomados de 3 en 3, hay 6 arreglos distintos con estas tres letras. En efecto, tales arreglos son:

r a b; r b a; a r b; a b r; b r a; b a r

Así, cada combinación de las cuatro canicas tomadas de tres en tres, aparece en 6 arreglos diferentes; luego, el número total de combinaciones será el total de arreglos entre 6; esto es:

$$\frac{A^4_3}{A^3_3} = \frac{(4)(3)(2)}{(3)(2)(1)} = \frac{24}{6} = 4$$

De modo que hay 4 maneras distintas de elegir 3 canicas, a

saber:

$$\{r,a,b\};\ \{r,a,v\};\ \{r,v,b\}\ \text{y}\ \{a,b,v\} \qquad (8)$$

En general, el problema de contar cuántas veces se repite en diferente orden cada selección de s objetos, es el de contar de - cuántas formas pueden ser ordenados s objetos, pero esto es precisamente el número de arreglos de s tomados de s en s. Por brevedad, estos arreglos de s cosas en el mismo número de lugares se llaman *permutaciones de s objetos* y A^s_s se representa preferentemente mediante el símbolo P_s que como se ha establecido, esta -- dado por:

$$P_s = s(s-1)\ .\ .\ .\ 2\ .\ 1 \qquad (9)$$

producto que recibe el nombre de *factorial de s* ó *s factorial* y que suele denotarse como:

$$s!\ \text{ó}\ \underline{s|}$$

Como la fórmula (9) indica cuántas veces se repite cada combinación en una lista de arreglos y la fórmula (7) cuantos arreglos hay, entonces: el número de formas de elegir s objetos de - entre r disponibles es:

$$\frac{A^r_s}{P_s}$$

Por consiguiente, el número de combinaciones de r tomados de s en s que denotaremos mediante

$$C^r_s\ \text{ó}\ \binom{r}{s}$$

viene dado por

$$\binom{r}{s} = C^r_s = \frac{A^r_s}{P_s} = \frac{r(r-1)\ldots(r-s\ 1)}{s!} \qquad (10)$$

Este número, además, corresponde al número de subconjuntos con s elementos que se pueden obtener a partir de un conjunto M con r elementos; v. gr. los 4 conjuntos que se exhiben en (8) son los subconjuntos de 3 elementos que se pueden formar con los elementos del conjunto {a, b, r, v}. Si s = 0 ó s = r, sólo hay en cada caso un subconjunto con tal número de elementos, a saber: el vacío y M respectivamente. Esto significa que $\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1$ y estos valores pueden calcularse mediante la fórmula (10) o su equivalente[18].

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{(r-s)!\ s!} \tag{11}$$

si se define $0! = 1$.

Ahora sí es posible calcular la probabilidad que se pide en el ejemplo 3.5. veamos.

Cont. ej.: 3.5. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir 6, por lo menos 4 hayan sido muestras bien tomadas?

Como ya dijimos, si x es el número de muestras buenas que se eligen, queremos ver cuántos casos elementales equiposibles hay - que son favorables al suceso

$$x > 4$$

que es equivalente a preguntar cuántos casos favorables hay a

$$x = 4, \quad x = 5 \quad ó \quad x = 6$$

Primero veamos cuántos hay favorables a $x = 4$: como los sucesos elementales equiposibles son todas las posibles selecciones de 6 muestras, se quiere saber cuántos hay que tengan dos muestras malas y 4 buenas: como de las 10, 7 son buenas y 3 malas, - entonces 4 buenas se pueden escoger de

$$\binom{7}{4}$$

formas distintas y 2 malas se pueden elegir de $\binom{3}{2}$ maneras. Por

lo tanto, hay

$$\binom{7}{4} \quad \binom{3}{2}$$

formas de elegir 4 muestras buenas y 2 malas.

Análogamente, podremos concluir que el número de casos favorables a $x = 5$ (5 buenas y una mala(es de

$$\binom{7}{5} \quad \binom{3}{1}$$

en tanto que hay

$$\binom{7}{6} \quad \binom{3}{0}$$

probabilidades de que las 6 sean buenas (i.e. $x = 6$).

Por lo tanto: el número de sucesos elementales equiposibles favorables a $x > 4$ es:

$$\binom{7}{4}\binom{3}{2} + \binom{7}{5}\binom{3}{1} + \binom{7}{6}\binom{3}{0}$$

Por otro lado ¿cuántos casos posibles hay?

Pues el número de combinaciones de 10 tomados de 6 en 6, i. e.:

$$\binom{10}{6}$$

Haciendo los cálculos y aplicando la definición de probabilidades, se tiene que

$$P\ (x > 4) = \frac{(35)\ (3) + (21)\ (3) + (7)\ (1)}{210}$$

$$= \frac{105 + 63 + 7}{210} = \frac{175}{210} = 83.3\%$$

valor que debe interpretarse así: *en una gran serie* de elecciones de 6 de las 10 muestras, aproximadamente 83 de cada 100 tienen al menos 4 muestras buenas.

Cuando r es un número "grande", puede ser muy engorroso calcular el número de combinaciones, que pueden hacerse con r elementos, tomandolos de s en s. Sin embargo, existen algunos artificios que permiten hacer fácilmente tales cálculos; uno de ellos es el que se conoce como *Triángulo de Pascal* y que consiste en acomodar los números de la forma $\binom{r}{s}$ en un arreglo triangular haciendo correr s, desde 0 en adelante, y r de arriba a abajo como se muestra en seguida:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

. . . .

$$\binom{0}{0} \qquad \binom{r}{1} \; . \; . \; . \; \binom{r}{i} \; . \; . \; . \; \binom{r}{r-1} \qquad \binom{r}{r}$$

En el que el r-ésimo renglón $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ posee $r+1$ términos, el primero y el último de los cuales siempre es igual a 1 (¿porqué?). Además, puede probarse[12] que si $1 < s < r$, entonces:

$$\binom{r}{s} = \binom{r-1}{s-1} + \binom{r-1}{s} \qquad (12)$$

lo que significa que cada término intermedio del triángulo puede calcularse sumando los dos términos del renglón anterior que más cerca queden.

Esto provee un algoritmo para dibujar el triángulo con facilidad: en el siguiente diagrama el sentido de las flechas indica cómo cada término intermedio es la suma de dos del renglón inmediato anterior:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

. . . .

Así por ejemplo, los números de combinaciones de 7 elementos de 0 en 0, de 1 en 1, etc., que forman el 7ª renglón se obtienen sin necesidad de usar las fórmulas (10) y (11). En efecto:

$$\binom{7}{0} = 1; \; \binom{7}{1} = 1 + 6 = 7, \; \binom{7}{2} = 6 + 15 = 21; \; \binom{7}{3} = 15 + 20 = 35;$$

$$\binom{7}{4} = 20 + 15 = 35; \; \binom{7}{5} = 15 + 6 = 21; \; \binom{7}{6} = 6 + 1 = 7; \; \binom{7}{7} = 1$$

por otro lado, el Triángulo de Pascal tiene una importante aplicación en el álgebra de los números reales: el r-ésimo renglón -- muestra los coeficientes del desarrollo del binomio.

$$(a \pm b)^n$$

En efecto, el Teorema del Binomio (de Newton) establece que si a y b son dos números reales cualesquiera y $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$(a \pm b)^r = \binom{r}{0} a^r b^0 \pm \binom{r}{1} a^{r-1} b + \binom{r}{2} a^{r-2} b^2 \pm \cdots$$

$$+ (-1)^s \binom{r}{s} a^{r-s} b^s + \cdots + (-1)^{r-1} a b^{r-1} + (-1)^r a^0 b^r \qquad (13)$$

Así por ejemplo:

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

y

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Por esta razón, los números $\binom{r}{s}$ reciben también el nombre - de coeficientes binominales y aunque podría parecer que nos salimos de tema, la solución del problema de genética que es fundamental en este capítulo está íntimamente relacionado con la fórmula (13).

C U E S T I O N A R I O

4.1. Un candado "de combinación" tiene 3 discos que giran libremente alrededor de un eje, cada disco tiene 5 posiciones distintas numeradas del 1 al 5; ¿cuántas posibles combinaciones tiene el candado? (note que en este problema usamos la palabra "combinación" en un sentido diferente del que se le da en el texto) a). Si los tres discos pueden quedar en cualquier posición, - - b). Si no se pueden repetir en cualquier posición (v. gr. no puede ocurrir que el candado se abra con el arreglo 221) c). Si el primer disco debe quedar en 3 b). Si el primer disco debe ser 5 y el 2ª debe ser un número par.

4.2. Considere una camada de 5 ratones ¿de cuántas formas puede ocurrir que nazcan 3 albinos, si se distinguen entre sí los ratones por el orden en que fueron paridos? Haga una lista de tales posibilidades.

4.3. Reconsidere el ejemplo 3.5. ¿qué significa $x < 4$? Cálcule Pr(x 4).

4.4. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar dos fichas consecutivas de dominó a). La primera sea mula y la 2ª haga - juego con la 1ª? b). Ninguna de las dos sea mula?

4.5. Escriba al triángulo de Pascal hasta el renglón correspondiente a $r = 10$. Uselo luego para desarrollar, con la fórmula (13)

$$(a+b)^9; \quad (a-b)^{10} \quad y \quad (a+b)^{'}$$

5. *OPERACIONES CON SUCESOS. CALCULO INDIRECTO DE PROBABILIDADES.*

Si bien es cierto que tenemos ahora un modo de razonar y - unas fórmulas útiles para contar casos favorables y posibles, el cálculo de probabilidades a partir de la definición clásica es difícil cuando los sucesos no son muy simples. Por esto, desarrollamos aquí un método indirecto basado en *la descomposición del suceso* cuya probabilidad se quiera calcular en *términos de sucesos más sencillos* cuyas probabilidades se tengan fácilmente.

Para ello definiremos primero un par de operaciones con sucesos a fin de establecer después cómo se relacionan las probabilidades de los "operandos" con la probabilidad del "resultado" de la operación:

Definición 5.1. Sean A y B dos sucesos aleatorios cualesquiera.

1.- **La suma de A y B** (denotada por A + B) es el suceso que - consiste en la ocurrencia de cualquiera de las siguientes posibilidades

"Sucede A y no sucede B"
"No sucede A y sucede B"
"Sucede A y sucede B"

es decir, que A + B es el suceso consistente en *la ocurrencia de al menos uno de los sucesos A y B*

2.- *El producto de A y B* (denotado por AB) es el suceso que consiste en *la ocurrencia simultánea o conjunta de A y de B.*

Aunque esta definición se establece para dos sucesos, es generalizable a cualquier cantidad finita de sumandos o factores. - Así, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n cualesquiera sucesos aleatorios:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

es el suceso que consiste en la ocurrencia de al menos uno de los n sucesos $A_1, \ldots, A_n$; en tanto que:

$$A_1 A_2 \ldots A_n$$

es el suceso que ocurre cuando se dan conjuntamente cada uno de los sucesos $A_1, \ldots, A_n$.

Ya hemos visto, sin decirlo, algún ejemplo en el que un suceso se descompone como la suma de varios sucesos más simples; en efecto: en el ejemplo 3.5. preguntamos cuál sería la probabilidad de que al elegir 6 de cada 10 muestras, al menos cuatro fueran "buenas" e hicimos notar en aquella ocasión que el suceso $x \geq 4$ consistía en:

$$x = 4 \quad ó \quad x = 5 \quad ó \quad x = 6$$

que significa, según la defincíón 5.1.1. que

$$"x \geq 4" = "x = 4" + "x = 5" + "x = 6" \tag{14}$$

a fin de cuentas, la $Pr(x \geq 4)$ la calculamos sumando las probabilidades de cada término en el 2ª miembro de la ecuación (14) en efecto:

$$Pr(x = 4) = \frac{105}{210}; \quad Pr(x = 5) = \frac{63}{210}; \quad Pr(x = 6) = \frac{7}{210}$$

(¿porqué?) y recuérdese que

$$Pr(x \geq 4) = \frac{105 + 63 + 7}{210}$$

Este hecho es un caso particular del *teorema de la suma* que enunciaremos más tarde; por lo pronto observaremos que también - los sucesos del tipo " k de n individuos tienen la característica hereditaria H" pueden ser descompuestos como suma de sucesos, en - cierto sentido, más sencillos.

Ejemplo 5.1. Si el experimento consiste en el nacimiento de una camada de 3 ratones.

M: "nacieron 2 albinos y uno pigmentado"

y distinguimos en qué orden ocurrieron los nacimientos, diciendo que:

P_1: "el pigmentado fue el primero en nacer"
P_2: "el pigmentado fue el segundo en nacer"
P_3: "el pigmentado fue el tercero en nacer"

entonces:

$$M = P_1 + P_2 + P_3 \tag{15}$$

A su vez, cada sumando en (15) puede descomponerse como - producto de los resultados de cada alumbramiento; esto es: si en un solo nacimiento

A: "nace un albino" y
P: "nace un pigmentado"

entonces:

$$P_1 = PAA; \quad P_2 = APA \quad y \quad P_3 = AAP \tag{16}$$

Como en el ejemplo 3.5., para calcular Pr(M) habrá que calcular la probabilidad de cada sumando en (15) y sumar: en tanto que para hacer esto, i.e. para calcular:

$$\Pr(P_1); \quad \Pr(P_2) \quad y \quad \Pr(P_3)$$

será necesario, como ya lo sospecharán los lectores, calcular Pr(A) y Pr(P) y luego multiplicar estas probabilidades de la siguiente manera:

$$\Pr(P_1) = \Pr(P)\Pr(A)\Pr(A); \quad \Pr(P_2) = \Pr(A)\Pr(P)\Pr(A) \quad y$$

$$\Pr(P_3) = \Pr(A)\Pr(A)\Pr(P) \tag{17}$$

que como se verá, es aplicar a (16) lo que más adelante se enunciará como el *teorema del producto*.

Conviene advertir que la probabilidad de una suma de sucesos y la probabilidad de un producto de éstos *no siempre* puede calcularse de manera tan sencilla como lo hemos sugerido en los parágrafos anteriores; de hecho, las hipótesis de los teoremas 5.1. y 5.2. son muy fuertes y para entenderlas, es necesario recordar la definición de los siguientes términos:

Definición 5.2. Sean A y B dos sucesos aleatorios cualesquiera

1.- Se dice que A y B son *mutuamente excluyentes* si y sólo si la ocurrencia de alguno de ellos impide la realización del otro.

2.- Se dice que A y B son complementarios si y sólo si la no ocurrencia de uno obliga la ocurrencia del otro; en tal caso B se designa como "no A" y se denota como $\bar{A}$ e inversamente, A se llama "no B" y se denota como $\bar{B}$.

3.- Se dice que A y B son *independientes* si y sólo si la ocurrencia de uno no cambia la probabilidad del otro.

De esta manera, los sucesos "x = 4", "x = 5" y "x = 6" en el ejemplo 3.5. son mutuamente excluyentes por parejas porque si ocurre alguna de ellas, es imposible que sucedan los demás. Así mismo los sucesos P_1, P_2 y P_3 del ejemplo 5.1. son mutuamente excluyentes por parejas pues si ocurriera digamos P_1 no podría suceder que el albino naciera en el 2º ni en el 3º alumbramiento.

Dado cualquier suceso A, su negación $\bar{A}$ es complementario de A pues si A no sucede, entonces ocurre necesariamente $\bar{A}$. Tal es el caso, por ejemplo, de los siguientes pares de sucesos complementarios:

"$x \geq 4$" y "$x < 4$" en el ejemplo 3.5.; "ninguno es albino" y "al menos uno es albino" en el ejemplo 5.1.; "nace un varón" y "nace una hembra" al nacer un ser humano.

Mayor atención que las definiciones 5.2.1. y 5.2.2. merece la noción de independencia. precisaremos ahora qué significa el que "la ocurrencia de uno no altera la probabilidad del otro" cuando dos sucesos A y B son independientes.

Ejemplo 5.2. Se sabe que el sexo en los seres humanos está determinado por un gen "x" o "y" que es aportado por el padre y que al aparearse con el gen "x" de la madre, da lugar a un varón o una hembra respectivamente. Si el experimento consiste en la fecundación de un óvulo humano y denotamos por ♂ y ♀ a los sucesos "se concibe un varón" y "se concibe una hembra", se tiene que los pares cromosómicos xy y yy son todos los resultados posibles en la fecundación y que uno es favorable a ♂ y otro lo es a ♀, de modo que:

$$\Pr(♂) = \frac{1}{2} \quad y \quad \Pr(♀) = \frac{1}{2}$$

Supongamos ahora que ocurriesen dos fecundaciones. Si $♂_1$ y $♀_1$ representan los posibles resultados de una de ellas y $♂_2$ y $♀_2$ representan los resultados de la otra, los sucesos

$$♂_1 \quad y \quad \begin{matrix} ♂_2 \\ \\ ♀_2 \end{matrix} \qquad y \qquad ♀_1 \quad y \quad \begin{matrix} ♂_2 \\ \\ ♀_2 \end{matrix}$$

son independientes por parejas pues no importa cuál de los dos primeros ocurra (si $♂_1$ ó $♀_1$), las probabilidades de los segundos no cambian, no se alteran, siguen siendo iguales a $\frac{1}{2}$ porque el número de casos posibles y favorables (pares cromosómicos xy y xx) siguen siendo exactamente los mismos.

Ejemplo 5.3. Supongamos ahora que el experimento consiste en sacar a ciegas dos canicas de una bolsa donde hay 10 del mismo tamaño: 7 azules y 3 blancas. Si

A: "la primera canica es azul" y
B: "la segunda canica es azul"

A y B son independientes o no, según si la primera canica que se saca se repone en la bolsa o no. En efecto: si es condición del experimento el que *sí* se vuelva a meter la primera canica, entonces

$$Pr\ (B) = \frac{7}{10}$$

independientemente de si sucedió A o no.

Pues esto no cambiará el número de casos favorables a B ni el número de casos posibles; sin embargo, si la primera selección *no es repuesta* en la bolsa, entonces:

$$P\ (B)$$

depende de si ocurrió A o no pues en el primer caso (la 1ª canica es azul):

de casos favorables a B = 6 (¿porqué?)

y en el 2ª (la 1ª canica, no es azul):

de casos favorables a B = 7 (¿porqué?)

y por lo tanto:

$$Pr(B) = \frac{2}{3} \quad ó \quad Pr(B) = \frac{7}{9}$$

Según si se da o no el suceso A. En este sentido se dice que la ocurrencia de A altera la probabilidad de B.

Ahora ya tenemos lo necesario para establecer las siguientes proposiciones:

Teorema de la Suma de Probabilidades. Si A y B son dos sucesos aleatorios *mutuamente excluyentes*, entoces:

$$Pr(A + B) = Pr(A) + Pr(B) \tag{18}$$

En efecto: si A y B son mutuamente excluyentes, ninguno de los casos favorables a A puede ser favorable a B y viceversa, de manera que si

m_A = número de casos favorables a A
m_B = número de casos favorables a B

y

n = total de caos posibles

entonces habrá $m_A + m_B$ casos favorables a A + B (hecho que no ocurre si A y B no son mutuamente excluyentes, véase el ejemplo 5.4.) y por consiguiente:

$$Pr(A + B) = \frac{m_A + m_B}{n}$$

pero el 2ª miembro de esta ecuación es precisamente igual a la suma de

$$Pr(A) = \frac{m_A}{n} \qquad y \qquad Pr(B) = \frac{m_B}{n}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Son consecuencia de este teorema los siguientes *corolarios*:

1.- Si "S" es un suceso aleatorio cualquiera, entonces:

$$Pr(\bar{S}) = 1 - Pr(S) \qquad (19)$$

En efecto: S y $\bar{S}$ se excluyen mutuamente, por consiguiente:

$$Pr(S + \bar{S}) = Pr(S) + Pr(\bar{S})$$

pero $S + \bar{S}$ es un suceso seguro (¿porqué?) y por lo tanto:

$$Pr(S) + Pr(\bar{S}) = 1$$

de donde un simple "despeje" de la ecuación (19) prueba el corolario.

2.- Si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son n sucesos que se excluyen mutuamente por parejas, entonces:

$$Pr(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = Pr(S_1) + Pr(S_2) + \cdots + Pr(S_n) \qquad (20)$$

con el que podemos establecer, en el ejemplo 5.1. que

$$Pr(M) = Pr(P_1 + P_2 + P_3) = Pr(P_1) + Pr(P_2) + Pr(P_3)$$

pues P_1, P_2, P_3 son indudablemente excluyentes entre sí por parejas).

Teorema del Producto de Probabilidades. Si A y B son dos sucesos aleatorios *independientes*, entonces:

$$Pr(AB) = Pr(A)Pr(B) \qquad (21)$$

En efecto: si A puede ocurrir en n casos y B puede suceder en m entonces AB puede suceder en nm casos; este es el total de casos posibles en el experimento.

Ahora, si el número de casos favorables a A es n_A y el número de casos favorables a B en m_B, entonces habrá $n_A m_B$ sucesos favorables a la realización conjunta de A y B (hecho que no ocurrirá si no se satisface la hipótesis de independencia) así:

$$Pr(AB) = \frac{n_A m_B}{nm}$$

Pero el segundo miembro de esta ecuación es igual al producto de:

$$Pr(A) = \frac{n_A}{n} \qquad y \qquad Pr(B) = \frac{n_B}{m}$$

de donde se sigue el teorema.

Si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son n sucesos independientes, entonces:

$$Pr(S_1 S_2 \ldots S_n) = Pr(S_1)Pr(S_2) \ldots Pr(S_n) \qquad (22)$$

Ahora, si se acepta que los resultados individuales de una serie de nacimientos *son independientes entre sí*, en lo que se refiere a las características hereditarias complementarias (del tipo albino-pigmentado, varón - hembra, liso - rugoso, etc.) entonces, la fórmula (22) justifica las ecuaciones (17) al aplicarse a (16).

Veamos ahora un par de ejemplos más:

Ejemplo 5.4. Si un experimento consiste en tirar un dado 2 veces, x_1 representa el resultado de la primera tirada y x_2 al de la segunda; entonces, si:

S "x_1 es par" y R: "$x_1 \geq 3$" entonces:

R + S: "x_1 es par o mayor que 3"

De manera que son favorables a R + S los sucesos en los que

$$x_1 = 2, \quad x_1 = 4, \quad x_1 = 5 \quad y \quad x_1 = 6$$

de los cuales hay 24 si se toma en cuenta qué cae el segundo dado.

Como el total de resultados posibles es 36 (¿porqué?) se tiene que:

$$Pr(R + S) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

sin embargo, hay 3x6 = 18 casos favorables a S y 3x6 = 18 casos favorables a R: aquéllos en los que $x_1 = 2$, 4 o 6 y aquéllos en que $x_1 = 4$,5 ó 6, respectivamente, por lo que:

$$Pr(R) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad y \qquad Pr(S) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

con lo que se tiene, en este caso en el que *los sumandos no se excluyen mutuamente,* que la ecuación (18) no se cumple.

Supongamos ahora que T: "x_2 es impar" y que nos interesa calcular la probabilidad de ST (donde, como ya sabemos, ST: "x_1 es par y x_2 es impar") ¿Podemos usar el teorema del producto? La respuesta es sí, si las condiciones de los dos lanzamientos de los dados son libre tiro y que el dado no esté cargado (que sea un dado honrado) pues, en tal caso, S y T serán independientes y tendremos que:

$$Pr(ST) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Como la noción de equiposibilidad, la de independencia también es reflejo de ciertas características objetivas del experi-

mento como el que se reponga o no la canica en el ejemplo 5.3. y el que los dos tiros del dado del ejemplo 5.4. se hagan efectivamente bajo las condiciones que ahí se establecen; desgraciadamente, no todo son canicas de colores o dados en la práctica científica y, con frecuencia, es difícil establecer si un par de resultados son independientes o no. Por esto, mejor se echa mano de la evidencia empírica – a final de cuentas, el mejor juez – y en muchos casos sólo se prueba si dos sucesos no son independientes usando la contrarrecíproca de la definición. Esto es:

Se dice que A y B no *son independientes* si

$$Pr(AB) \neq Pr(A)Pr(B)$$

Definición que se aplica así: calcúlense por separado los valores de:

$$Pr(AB); \qquad Pr(A) \qquad y \qquad Pr(B)$$

y luego, compárense los valores de:

$$Pr(AB) \qquad y \qquad Pr(A)Pr(B)$$

y si resultan muy distintos[13], se concluye que A y B no son independientes.

Ejemplo 5.5. Un grupo de estudiantes de Ecología estudian la posible dependencia que existe entre dos pastos que crecen en ciertas dunas, para la cual, realizan el siguiente experimento.

Un bastidor cuadrado de 1 m. de lado, se lanza 150 veces al azar. En cada lance, se registra la ausencia o presencia de las especies de interés (*Andropogon scoparius* y *Ammophila breviligulata*) y los resultados son los que se registran en la tabla 1.

Si S: "está presente *Ammophila*"

y T: "está presente *Andropogon*"

y se aplica la definición frecuentista de probabilidad (véase el apéndice al capítulo, pp. II. 42. ss)

T A B L A 1

Andropogon	Presente	Ausente	Total
Presente	8	47	55
Ausente	75	20	95
Total	83	67	150

entonces: $Pr(S) = \frac{83}{150} = 0.55\overline{3}$

y: $Pr(T) = \frac{55}{150} = 0.3\overline{6}$

de modo que si S y T fueran independientes, tendríamos que Pr(ST) debería ser aproximadamente igual a:

$$(0.55\overline{3})(0.3\overline{6}) = 0.202\overline{8}$$

i.e. que S y T deberían darse conjuntamente en aproximadamente 30 ocasiones (¿porqué?) y, sin embargo, según la tabla 1 sólo ocurren simultáneamente en 8 casos. Luego, S y T no son independientes.

C U E S T I O N A R I O

5.1. Si el experimento consiste en el nacimiento de una camada de 5 ratones, x denota el número de albinos de la camada y A_k :"x = k" (i.e. A_k es el suceso consistente en el nacimiento de exactamente k albinos), exprese como una suma de sucesos del tipo A_k los siguientes: M: "al menos 3 son albinos" N: "a lo más 2 son albinos" S: "al menos uno es albino".

5.2. Describa los sucesos complementarios de A_k (para cada $k = 0,1,2,3,4,5$) M, N y S del ejercicio anterior.

5.3. Considere el experimento del ejemplo 5.3. *con reposición* de la primera selección en la bolsa a. diga si los sucesos A (en el texto) y C: "la segunda canica es blanca" son independientes y porqué. b. cuál es el suceso complementario de AC? c. aplique el Teorema del Producto para calcular Pr(AC) y verifique su respuesta contando directamente los casos favorables y los posibles. d. use el resultado de c. y el corolario del Teorema de la Suma para calcular $Pr(\overline{AC})$; asimismo verifique su respuesta contando directamente.

5.4. Si se acepta que en dos nacimientos consecutivos, los resultados referentes al sexo son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que nazcan a. dos varones, b. dos niñas c. un varón y una niña en dos nacimientos consecutivos? (suponga que $Pr(♂) = Pr(♀) = \frac{1}{2}$ y use cuantas veces haga falta los teoremas de esta sección).

5.5. Si $Pr(S) = \frac{2}{3}$ y $Pr(T) = \frac{1}{2}$ a. Calcula $Pr(\overline{S})$ y $Pr(\overline{T})$; b. si S y T son independientes, encuentra Pr(ST) y $Pr(\overline{ST})$ c. ¿es posible que S y T sean mutuamente excluyentes? ¿porqué? (sugerencia: suponga que sí son mutuamente excluyentes y aplique el Teorema de la Suma).

5.6. Considere el ejemplo 5.5. a. describa los sucesos $\overline{S}\overline{T}$, $\overline{S}T$ y $S\overline{T}$ b. diga si es posible expresar $\overline{ST}$ como una suma de los otros tres sucesos de a.

6.- *Los experimentos de Bernoulli*[14] *y el Teorema del Binomio:*

Concluimos este capítulo con la discusión general de la solución del problema del parágrafo 2. dicha solución depende fuertemente del poder simplificador de los teoremas de la suma y el producto: note el lector, por lo pronto, que el problema de calcular Pr(M) en el ejemplo 5.1. donde

M: "nacen 2 albinos y 1 Pigmentado"

Ha sido esencialmente resuelto pues:

$$Pr(M) = Pr(P_1) + Pr(P_2) + Pr(P_3)$$

y si se acepta que los resultados de dos nacimientos consecutivos son independientes entonces:

$$Pr(P_1) = Pr(P_2) = Pr(P_3) = [Pr(P)][Pr(A)]^2 \quad \text{(¿porqué?)}$$

de manera que:

$$Pr(M) = 3[Pr(P)][Pr(A)]^2 \tag{23}$$

Lo que significa que para conocer $Pr(M)$ basta saber la probabilidad de que, *en un nacimiento simple* ocurra A (porque $Pr(P) = 1 - P(A)$).

Nótese también que éste es un caso particular del multicitado problema del parágrafo 2; en efecto aquí $n = 3$ y $k = 2$.

Si desdeñamos el que el ejemplo 5.1. se refiera al albinismo en ratones, podemos plantear lo siguiente:

a).- El experimento consiste en la repetición n veces de otro experimento sencillo en el que sólo interesan dos posibles resultados: A y su complementario $\bar{A}$.

b).- Los resultados de dos de los experimentos sencillos son independientes.

c).- Se trata de calcular la probabilidad de que, en la serie de n repeticiones, A se presente exactamente en k ocasiones.

Pues bien, cuando en un experimento sólo se atiende a si ocurre o no un suceso A (éxito o fracaso, p. ej.,) tal experimento se dice que es *simple*; la repetición de n experimentos simples,

en los que los resultados de dos sucesivos son independientes, se llaman *Experimentos de Bernoulli*.

Con estas definiciones, lo que queremos calcular es la probabilidad de que en un experimento de Bernoulli, A se presente k veces mas - como ya lo sugiere el ejemplo de los ratones - tal suceso puede descomponerse en la suma de otros más sencillos, cada uno de los cuales, a su vez, se descompone como el producto de otros. En efecto:

- Si x es el número de veces que se presenta A, entonces el suceso "$x = k$" es igual a la suma de cierto número de sucesos (S_i) en los que ocurre que $x = k$ pero que se distinguen entre sí por el orden en que se dan las k ocurrencias de A.

- A su vez, cada S_i es el producto (en distinto orden) de k factores iguales a A y $n-k$ factores iguales a $\bar{A}$, de tal suerte que:

$$Pr(S_i) = \underbrace{Pr(A) \dots Pr(A)}_{k \text{ veces}} \underbrace{Pr(\bar{A}) \dots Pr(\bar{A})}_{n-k \text{ veces}} \tag{24}$$

Y si sabemos cuántos sumandos del tipo S presenta la descomposición de "$x = k$" tendremos $Pr(x = k)$ con sólo aplicar el teorema de la suma (pues todos los sucesos S_i son mutuamente excluyentes por parejas) pero para saber cuántos S_i hay, basta contar de cuántas *formas pueden elegirse* k *lugares de un total de* n *lugares disponibles y*, si la memoria no nos falla, podemos responder sin duda que hay

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sumandos del tipo S_i y como todos tienen la misma probabilidad de la ecuación (24) entonces:

$$Pr(x = k) = \binom{n}{k} [Pr(A)]^k [Pr(\bar{A})]^{n-k} \tag{25}$$

esta fórmula se conoce como la del *Teorema del Binomio* por la

siguiente razón:

si $Pr(A) = p$ y $Pr(\bar{A}) = 1 - p = q$, entonces: el miembro derecho - es igual al $k - 1$ - ésimo termino del desarrollo del binomio

$$(p+q)^n$$

(véase la ecuación (13)).

Para terminar, vale la pena recorrer paso a paso el modo de razonar que nos llevó a la fórmula (25) con un ejemplo particular, veamos:

Ejemplo 6.1. Bajo la premisa de que los resultados de dos - nacimientos son independientes, calcular la probabilidad de que al nacer 5 niños, 3 tengan los ojos azules si se sabe que, en un solo nacimiento, la probabilidad de que tal ocurra es de $\frac{1}{6}$.

Si hacemos A: "tiene los ojos azules" y x es el número de veces que ocurre A entonces se trata de calcular $Pr(x = 3)$. Indudablemente, este es un experimento de Bernoulli.

Con $n = 5$, empecemos por descomponer "$x = 3$" en la suma de los sucesos de la tabla 2 que agotan las:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$$

formas distintas en que pueden ocurrir 3 nacimientos de niños ojiazules, así:

$$\text{"}x = 3\text{"} = S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}$$

De tal suerte que como:

$$Pr(S_1) = Pr(S_2) = \cdots = Pr(S_{10}) = (Pr(A))^3 (Pr(\bar{A}))^2$$

TABLA 2

NACIMIENTO

SUCESO		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
S_1	=	A	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
S_2	=	A	A	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$
S_3	=	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A
S_4	=	A	$\bar{A}$	A	A	$\bar{A}$
S_5	=	A	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	A
S_6	=	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$
S_7	=	$\bar{A}$	A	A	A	$\bar{A}$
S_8	=	$\bar{A}$	A	A	$\bar{A}$	A
S_9	=	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	A	A
S_{10}	=	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	A	A

(por la hipótesis de independencia), entonces:

$$Pr(x = 3) = \binom{5}{3} [Pr(A)]^3 [Pr(\bar{A})]^2$$

$$= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Que es el 4ª término del desarrollo del Binomio

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^5$$

Así: $$Pr(x = 3) = 10 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^2 \times 10}{6^5}$$

$$= \frac{250}{7776} \approx .032 = 3.2\%$$

Que significa que, en un gran número de nacimientos, aproximadamente el 3.2% de todas las quintetas que con ellos se puedan -

formar, tienen 3 niños con ojos azules y 2 con ojos oscuros.

C U E S T I O N A R I O

6.1. En el ejemplo 6.1. calcule las probabilidades de que - a. $x = 2,5$. b. ninguno tenga los ojos azules, c. al menos 3 tengan los ojos azules, d. a lo más 3 tengan ojos azules.

6.2. Un padre de familia conservador desea tener un hijo - varón ¿cuántos debe tener para que la probabilidad de que nazca niño sea mayor al 80%? se supone aquí que: $Pr(♀) = Pr(♂)$ y que los resultados de los nacimientos consecutivos son independientes.

6.3. Considere el ejemplo 5.5., de argumentos para justificar la independencia de dos lances consecutivos; si el cuadrante se lanza 10 veces, cuáles son las probabilidades de A: "al menos 5 presentan Ammophila" B: "a lo más 3 presentan Andropogon". (use los datos de la tabla 1. y la definición frecuentista de probabilidad para calcular las probabilidades en los experimentos simples en que haga falta).

APENDICE AL 2ª CAPITULO

CRITICA DE LA DEFINICION CLASICA DE LA DEFINICION FRECUENTISTA.

Digamos que la primera dificultad que se presenta con la definición clásica es la imposibilidad de aplicarla cuando el experimento tiene una infinidad de posibles resultados pues en tal caso, la expresión

$$\frac{\text{Número de sucesos favorables a A.}}{\text{Número de sucesos posibles}}$$

carece de significado; sin embargo, hay generalizaciones adecuadas de esta definición a fin de asignarles a los sucesos un número -

real que varíe entre 0 y 1: basta construir una *medida* adecuada - de los sucesos favorables y posibles y redefinir la probabilidad como la razón entre dichas medidas.

Por ejemplo: un experimento consiste en lanzar un dardo al - azar sobre un blanco como el que se muestra enseguida:

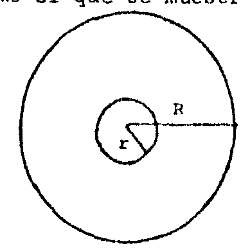


Figura 3.

(en la que $r = 1$ y $R = 3$). El número de sucesos elementales equiposibles es infinito pues es igual al número de puntos que hay en el blanco; Si A: "el dardo da en la zona sombreada de la figura - 4" ¿cómo definiríamos $Pr(A)$?

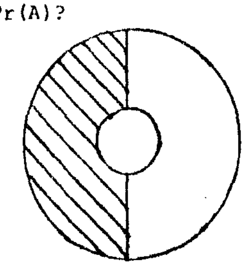


Figura 4.

Evidentemente, el número de sucesos elementales equiposibles favorables a A también es infinito; sin embargo, si hemos de medir para comparar, en este caso conviene hacerlo con las áreas - correspondientes; así definiremos:

$$Pr(A) = \frac{\text{área de la zona sombreada}}{\text{área del total del blanco}}$$

de donde:

$$Pr(A) = \frac{\frac{1}{2}\ \Pi(R^2 - r^2)}{\Pi R^2} = \frac{4\Pi}{9\Pi} = \frac{4}{9}$$

que da efectivamente un número entre 0 y 1 y cuyo significado es, de nueva cuenta, el siguiente: al realizar un gran número de veces el tiro del dardo sobre este blanco, aproximadamente 4 de cada 9 va a dar en la zona sombreada, en este sentido Pr(A) mide la regularidad con que se presenta A.

Así, de encontrarse una forma adecuada de medir casos favorables y posibles (lo que suele ser bastante complejo), se puede extender naturalmente la definición clásica.

Otra fuente de problemas es la dificultad práctica de precisar los sucesos elementales: no siempre es evidente ni sencillo, pero la desventaja más profunda es, sin duda, la que se refiere a la hipótesis de *equiposibilidad*: como mencionamos en el texto, tal hipótesis suele reflejar características objetivas del experimento que nos hacen tener la misma incertidumbre en todos los casos y por eso son equiposibles; sin embargo, en la práctica y fuera del dominio de los juegos de azar, es difícil reconocer tales características objetivas.

Ante esta dificultad, sólo queda recurrir a *la evidencia empírica*: basar nuestra definición en la repetición - un gran número de veces - del experimento y suponer que entre más grande sea el número de repeticiones, con mayor precisión podrán describirse las tendencias de cada resultado. Así mismo esperaremos que, en los casos en que sea aplicable la definición clásica, la definición basada en la evidencia empírica (que llamaremos *frecuentista* o estadística) arrojará los mismos resultados que aquélla.

Según estas ideas, conviene dar las siguientes definiciones: si A es un suceso aleatorio cualquiera en un experimento.

1.- *La n - frecuencia del suceso* A es el porcentaje de veces en que ocurre A al realizar el experimento n veces. Si denotamos por nFr(A) a este porcentaje, tenemos entonces que:

$$nFr(A) = \frac{\#\text{ de veces que ocurrió A}}{n} \qquad (1)$$

Ahora, si al aumentar n, n - Fr(A) "tiende a estabilizarse" acercándose a un número determinado, diremos que tal número es *la probabilidad de* A según la definición frecuentista. Así, se tiene que:

$$Pr(A) = \lim_{n\to\infty} n - Fr(A) \qquad (2)$$

donde el miembro derecho de la ecuación anterior, representa precisamente el número alrededor del cual se estabiliza la n - frecuencia, cuando n es muy grande.

Por ejemplo, la siguiente tabla muestra los resultados, para distintos valores de n, de una serie de volados:

T A B L A 1

n	# de veces que cayó águila (A)	# de veces que cayó sol (S)	nFr(A)	nFr(S)
10	7	3	70%	30%
15	9	6	60%	40%
50	28	22	56%	44%
100	47	53	47%	53%
1000	493	507	49.3%	50.7%
10000	5009	4991	50.09%	49.91%

En ella se observa que efectivamente, cuando n crece, las n - frecuencias de A y S se acercan cada vez más a $\frac{1}{2}$ = 50% que es el valor de Pr(A) y Pr(S) según la definición clásica.

Otro ejemplo[15] : la tabla 2. muestra las n - frecuencias correspondientes a los nacimientos de varones (♂) y hembras (♀) humanas en cierto país industrializado de cuyo nombre no quiero --

acordarme; los datos corresponden al registro de nacimientos de diferentes años desde 1950 hasta 1968:

TABLA 2

(miles de individuos)

n	♀	♂	nFr(♀)	nFr(♂)
3632	3769.232	3966.768	48.72%	51.28%
11994	5847.319	6146.681	48.75%	51.25%
16092	7843.422	8248.578	48.74%	51.26%
20119	9810.691	10308.309	48.76%	51.24%
23879	11643.943	12235.057	48.76%	51.24%
27485	13403.826	14081.174	48.77%	51.23%
31006	15121.387	15884.613	48.77%	51.23%
34508	16827.183	17680.817	48.76%	51.24%

Y en este caso se tiene que nFr(♀) tiende a estabilizarse alrededor de 0.4875, en tanto que la nFr(♂) lo hace alrededor de 0.5125; en el texto establecimos - en base a consideraciones exclusivamente genéticas y aplicando la definición clásica - que:

$$\Pr(♂) = \frac{1}{2} = \Pr(♀)$$

y aunque la diferencia entre los valores a los que se acercan las n - frecuencias cuando $n \to \infty$ difieren de las probabilidades "clásicas" en centésimas, lo cierto es que no son exactamente iguales en este caso y en muchos más. Es la naturaleza propia del problema que se trate la que señala qué valor conviene tomar como igual a la probabilidad.

Cuando el experimento ha sido realizado un número n (suficientemente grande) de veces, suele tomarse a la nFr(A) como el valor de Pr(A) (por esto, es frecuente, en el caso de los sexos, que Pr(♂) sea un poco mayor que Pr(♀).

NOTAS

[1] Lem S. Las Probabilidades en Contra. Ciencia Ficción Vol. II. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), México 1980.

[2] Es simplificada la visión que hace caso omiso, desprecia o desdeña factores relacionados con el fenómeno pero que, en una primera aproximación, no se consideran.

[3] Cf. García M. A. y B. Fernández. Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades. Com. Int. del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. México.

[4] Ibidem.

[5] Este problema se considera equivalente al de predecir antes del nacimiento, cuántas camadas de n nuevos individuos estarán formadas por k "rugosos" y n - k "lisos".

[6] Usamos aquí la notación común en la Teoría de Conjuntos para denotar colecciones. Si se pueden listar sus elementos, se escriben entre llaves; si hay alguna propiedad que los caracteriza, se describen como lo muestran los siguientes ejemplos:

$$\{X \mid X \text{ es un número natural}\}$$

representa el conjunto N y se lee como "El conjunto de las X tales que (este es el significado de la raya vertical que sigue a X) X es un número natural. Ahora, si

$$I = \{X \in Q \mid 0 \leq X \leq 1\}$$

entonces I es el conjunto de números racionales X, tales que X es mayor o igual que 0 y menor o igual que 1.

[7] M. A. García y B. Fernández op. cit.

[8] Usamos aquí la notación que se introdujo en la primera sección del capítulo I para denotar dependencia entre variables aunque en este caso lo que juega el papel de variable independiente (S)

no es un número, sino un suceso aleatorio.

[9] Una muestra mucho más grande de métodos de contar puede encontrarse en el libro de Vilenkin N.Y. ¿De cuántas formas? Editorial MIR, Moscú, 1972.

[10] Probaremos aquí la equivalencia de las fórmulas (10) y (11): como:

$$r(r-1)\ \dots\ (r-s+1) = \frac{r(r-1)\dots(r-s+1)(r-s)(r-s\;\;1)\dots 2.1}{(r-s)(r-s-1)\dots 2.1}$$

entonces:

$$A_s^n = r(r-1)\ \dots\ (r-s+1) = \frac{r!}{(r-s)!}$$

y por lo tanto:

$$\binom{n}{s} = \frac{A_s^n}{P_s} = \frac{\frac{r!}{(r-s)!}}{s!} = \frac{r!}{(r-s)!\ s!}$$

lo que concluye la prueba.

[11] Cf. El triángulo de Pascal", Lecciones populares de Matemáticas, Edit. MIR. Moscú, 197 ?

[12] En efecto: $\binom{r-1}{s-1} + \binom{r-1}{s} = \frac{(r-1)!}{(r-1-s+1)!(s-1)!} + \frac{(r-1)!}{(r-1-s)!s!} =$

$$= \frac{s(r-1)!+(r-s)(r-1)!}{(r-s)!s!}$$

$$= \frac{(r-s+s)(r-1)!}{(r-s)!s!} = \frac{r!}{(r-s)!s!}$$

[13] Qué tan grande debe ser la diferencia depende de la naturaleza del problema que se trate y se sale de las intenciones de éstas el discutirlo.

[14] Bernoulli Jacobo (1654 - 1705), eminente matemático Suizo quien, entre otros, estableció los fundamentos de la teoría clásica de las probabilidades. Su obra fundamental, Ars conjectandi, fue

publicada en 1713.

[15] Adaptado de los datos que citan Urquhart N. S. y D. J. Clow en su libro Mathematics in Biology: Calculus and Related Topics. pág. 66, Preliminary Edition. W. W. Norton Company Inc. New York.

CAPITULO III. LOS MODELOS MAS SENCILLOS: LAS FUNCIONES LINEALES Y LAS FUNCIONES POTENCIALES.

1. Antecedentes.

Hemos esbozado, en el capítulo anterior, las ideas básicas de la concepción o enfoque probabilista de los fenómenos naturales; en éste consideraremos nuevamente la búsqueda *determinista* de las relaciones funcionales entre las variables de interés del fenómeno: como lo mencionamos en la sección 1. del primer capítulo, luego de establecidas dichas variables, el problema central es el establecer *reglas de correspondencia claras y explícitas* entre ellas; desde luego que ésta no es una tarea sencilla -de hecho, la señalamos arriba junto a la selección de variables, como "el paso más difícil en la matematización"- y el esfuerzo intelectual de la Humanidad para poder establecer *un método racional para* -como decía Galileo- *interrogar a la Naturaleza* merece mayor atención que la que se le puede dar en este trabajo. Conviene entonces que el lector realice una serie de discusiones y lecturas sobre historia y filosofía del pensamiento científico, sobre todo por que recuerde o vea cómo el llamado *método experimental* -cuyos rudimentos matemáticos ocuparán nuestra atención de ahora en adelante- distingue la ciencia moderna de la de la antigüedad (en particular, en el apéndice a este capítulo hemos transcrito un fragmento de un artículo relacionado con el tema con la esperanza de motivar el interés más que por compartir el particular punto de vista que en él se expresa)[1].

A grandes rasgos, el problema fundamental que trata de resolverse aquí es el de saber qué hacer con datos experimentales correspondientes a dos variables X y Y para "descubrir" la relación funcional entre ellas; de hecho, para esto se requieren varios intentos fallidos y aproximaciones sucesivamente más certeras en las que la teoría y la confrontación práctica en el campo o en el laboratorio se combinan y alimentan mutuamente, en un ir y venir hipotético-deductivo, de lo particular a lo general y alrevés. Así, con

frecuencia, partiremos de que ya sabemos qué tipo de relación funcional andamos buscando, es decir, que tendremos razones teóricas para establecer la hipótesis de que Y varía con X según una regla de correspondencia con características particulares, dependiente de ciertos parámetros cuyos valores deberán ser determinados precisamente a partir de los mencionados datos; en otras ocasiones, el análisis de los datos sugerirá algún tipo especial de relación con regla de correspondencia típica; en cualquiera de los dos casos, un auxiliar de gran utilidad es el conocimiento de lo que se discute en la siguiente sección.

2. La Gráfica de una Función.

Supongamos que Y depende de X, la representación geométrica de las parejas ordenadas de números reales de la forma

$$(X,Y(X))$$

en el *Plano Cartesiano*, se llama la *gráfica de* Y=Y(X) o *la gráfica de la función* Y.

Para bien comprender esta definición, empecemos por recordar qué es el Plano Cartesiano:

- Considérese el conjunto de parejas ordenadas de números reales al que denotaremos con el símbolo R^2.
- Considérese ahora el conjunto de puntos del plano en el que se han trazado dos rectas o ejes numéricos -adecuadamente dirigidos[2]- perpendiculares entre sí e intersectantes en el punto correspondiente al cero de cada uno (ver la figura 2.1.) denótese con P a tal plano.
- A cada elemento de R^2, a saber, a cada pareja de reales (A,B) le asignaremos un punto de P mediante las siguientes convenciones:

1. En el eje horizontal se localiza el punto correspondiente al real A, llamado la *abscisa o primera coordenada* de la pareja

(A,B). Sobre este punto, levantemos una perpendicular al eje horizontal.

2. Ahora busquemos sobre el eje vertical el punto correspondiente al real B y tracemos sobre él una perpendicular a dicho eje; B se llama la *ordenada o segunda coordenada* de (A,B).

   El punto de intersección de las perpendiculares trazadas en 1. y 2. es el que se le asigna a la pareja (A,B) (ver figura 2.1.a.).

- Inversamente, si P es un punto en el plano, es posible asignarle una pareja ordenada (A,B) de números reales, mediante la siguiente construcción geométrica:

1. Desde P, tracemos una perpendicular sobre el eje horizontal; el número A que tiene asignado el punto de intersección de la perpendicular con el eje será la abscisa correspondiente a P.
2. Análogamente, tracemos desde P otra perpendicular sobre el eje vertical; a la intersección le corresponde un real B que será la ordenada de la pareja que buscamos (ver figura 2.1.b.).

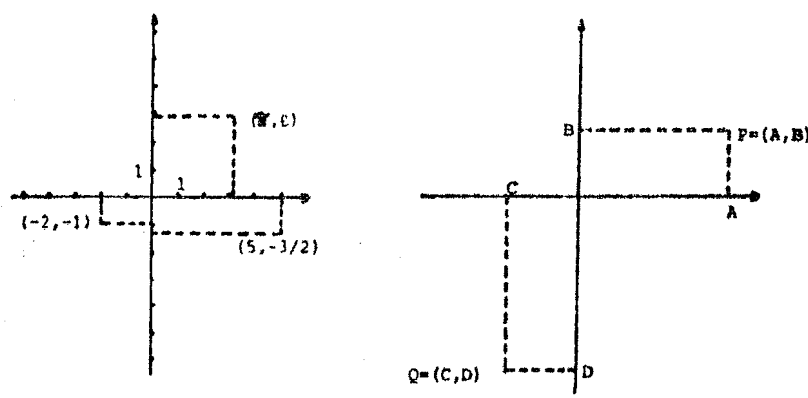


Figura 2.1.

2.1.a. A (A,B) se le asigna un punto del plano.

2.1.b. A P se le asigna una pareja ordenada.

Así, mediante esta "identificación" de puntos con parejas y

de parejas con puntos se ha logrado *aritmetizar el plano* o, equivalentemente, *geometrizar* R^2 al establecer una *correspondencia uno a uno* entre los elementos de estos dos conjuntos (R^2 y P); esta construcción se conoce como *Plano Cartesiano* y su invención -atribuída oficialmente al matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), de quien toma el nombre- significó un avance revolucionario en el desarrollo de la matemática. Esta construcción nos permite hablar indistintamente de "puntos del plano" o de "parejas ordenadas" como si fueran sinónimos.

Consideremos de nuevo el par de variables X y Y entre las cuales:

$$Y = Y(X)$$

como ya se dijo, la gráfica de Y es el conjunto de parejas en R^2 (o su equivalente en puntos del plano) cuyas abscisas son cualesquiera de los "posibles valores" de la variable independiente X y cuyas ordenadas son, precisamente, los correspondientes valores Y(X); esto es, si denotamos como Gr(Y) a tal conjunto, entonces:

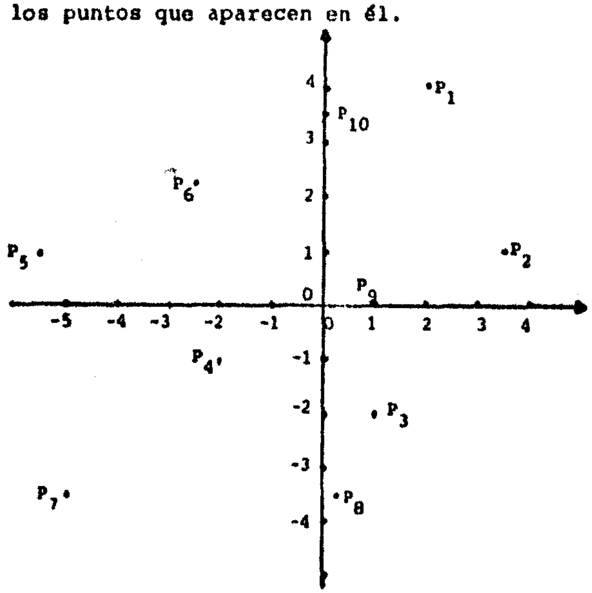
$$Gr(Y) = \left\{ (X, Y(X)) \right\}$$

que puede ser dibujado y que -al proveer un modelo geométrico de la función Y o, para decirlo con mayor propiedad, de cómo cambia Y con X- resulta de suma utilidad. Es más, en ocasiones, los valores que toma Y cuando varía X vienen dados por la propia gráfica de la función; tal es el caso, por ejemplo, del dibujo que hace la plumilla de un mareógrafo en papel milimétrico: en él se establece cómo ha cambiado el nivel del mar en función del tiempo y aunque la regla de correspondencia analítica o "numérica" de este tipo de funciones es extremadamente complicada (tanto, que inclusive no es suficiente la herramienta determinista para estudiar "al detalle" el fenómeno de las mareas), la gráfica basta para muchos fines prácticos.

Cuando se busca constatar experimentalmente la validez de un modelo teórico o cuando, inversamente, se analizan los "hechos experimentales" para sugerir un modelo o corregir el que se tiene, en una de las tantas vueltas que a veces es necesario dar en el método hipotético-deductivo es útil "vaciar" los datos observados de X y Y(X) en un plano cartesiano en el que un eje (casi siempre el horizontal) contiene todos los posibles valores de la variable independiente X -incluídos aquéllos que no han sido observados- mientras que, en el otro eje, se consideran todos los posibles valores de Y(X) incluyendo, asimismo, aquéllos que no se han registrado en las observaciones pero que "bien pudieron haber ocurrido". Este vaciado permite, cuando se conoce la gráfica de una variedad de funciones, sugerir algún tipo de dependencia entre las variables o bien, reconocer qué tan lejos de "lo que se puede observar" está el modelo que se propone. Por esto, conviene discutir qué aspecto tiene la gráfica de ciertas familias de funciones[4].

CUESTIONARIO

2.1. En el siguiente plano cartesiano determine las coordenadas de los puntos que aparecen en él.



2.2. En cada uno de los siguientes casos, dibuje los puntos de la Gr(Y) correspondientes a los valores de X que se dan a la derecha de la fórmula que establece Y = Y(X):

a. $Y(X) = 2X-3$; $X = \frac{1}{2}, 0, 1, 3, -2, -3/4$.

b. $Y(X) = (-1/3)X+7$; $X = 0, -1, -3, 5, -7/5, -1/3$.

c. $Y(X) = \pi$; (una función que, como ésta, vale lo mismo para cualquier X se llama *función constante*) $X = 6, -\pi, 1/6$.

d. $Y(X) = (\frac{1}{2})gX^2$; $X = 0, 2, \frac{1}{2}, 3/2$ (se supone que $g=9.81$)

e. $Y(X) = -2X^2+1$; $X = 0, 1, -1, 2, -2, 2.5, -2.5$

f. $Y(X) = 1-X^4$; $X = 0, -3, 3, -1, 1, 2, -2$.

g. $Y(X) = Y(X) = X^3-1$; $X = 0, 1, -1, 2, -2, 3/4, -3/4, 3/2, -3/2$.

h. $Y(X) = 2^X$; (note que aquí la variable independiente aparece como un exponente de una base fija: el 2) $X = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm 3/4, \pm 5/4$ (la notación $\pm a$ representa a los números a y -a)

i. $Y(X) = 10-3^{-X}$; $X = 0, \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm 5/3$

2.3. En cada uno de los incisos del ejercicio anterior, establezca una hipótesis respecto al *comportamiento general* de la gráfica de Y. Pruebe su hipótesis para valores intermedios a los que se daban en el ejercicio 2.2. (véase la nota 4.)

3. Geometría Analítica de la Recta.

Al considerar, en el primer capítulo, los ejemplos de salinidad, biomasa y tasa de crecimiento, establecimos que "si se aceptan ciertas *premisas de distribución homogénea*[5], entonces:

$$\sigma = \frac{S(n)}{n} \quad ; \qquad q = \frac{I(N)}{N} \quad ; \qquad \beta = \frac{M(P)}{P} \qquad (1)$$

serían constantes . De estas ecuaciones es posible inferir, además (siempre bajo aquellas premisas), que

$$S(n) = \sigma n \quad ; \qquad I(N) = qN \quad ; \qquad M(P) = \beta P \qquad (2)$$

que son fórmulas que establecen explícitamente cómo varían S,M e e I como funciones de n, P y N respectivamente.[6] Veamos ahora el

Ejemplo 3.1. Supongamos que -en las ecuaciones (1) y (2)- σ=34 partes por mil, β=5% y q=9.5%; si queremos darnos una idea de cómo podrían ser las gráficas de las funciones cuyas reglas de correspondencia se establecen en (2), procederemos de la siguiente manera:

- En cada caso, elegiremos algunos posibles valores de la variable independiente y haremos una tabla en la que, en una columna, aparezcan estos valores y en la otra, los correspondientes valores de la variable dependiente (a esto se le llama *tabular la función*). Así, para las funciones S,M e I se obtienen las

Tablas 3.1.[7]

a. $S(n)=\sigma n$		b. $M(P)=\beta P$		c. $I(N)=qN$	
n [gr]	S [gr]	P [ton]	M [ton]	N [# ind]	I [# ind]
0.5	0.017	0.3	0.015	100	9.5
2	0.068	1	0.05	200	19
5	0.17	2.5	0.125	500	47.5
9.2	0.3128	3	0.15	1000	95
10	0.34	5	0.25	3000	285

- Ahora, vaciemos las parejas de la forma (n,S(n)), (P,M(P) y (N,I(N)) en sendos planos cartesianos[8], tal hemos hecho en la figura 3.1.

  Al parecer, en los tres casos, los puntos se alinean a lo largo de una recta ¿será cierto que, para cualquier valor posible de la variable independiente, el punto de la gráfica cuya abscisa es este valor, se encuentra en la misma recta? Hagamos algunas pruebas, es decir, agreguemos algunos valores a las tablas 3.1. y localicemos después los puntos correspondientes en la figura 3.1. Se verá que la impresión de que todos los puntos de las gráficas son colineales (pertenecen a una misma recta) subsiste y aún sería este el caso si intercaláramos más posibles valores ¿será casual o siempre va a ocurrir del mismo modo?

Agregados a las tablas 3.1.

a.		b.		c.	
n [gr]	S [gr]	P [ton]	M [ton]	N [# ind]	I [# ind]
1	0.034	0.7	0.035	300	28.5
3.5	0.119	2	0.1	750	71.25
7	0.238	4	0.2	2000	190

La respuesta es que no es casual y que -aunque sería imposible agotar los valores de n, P y N para los cuales tienen sentido las fórmulas (2)- puede demostrarse que *las premisas de homogeneidad* que dan lugar a la constancia de σ, β y q *fuerzan el que las gráficas de las tres funciones sean líneas rectas*.

A despecho del ejemplo anterior, vale la pena recalcarlo, no siempre que parezca que los puntos se alínean rectilíneamente o "muy cerca de una recta", ocurre que la gráfica que se busca es, en efecto, una recta (léase la nota 4, al final del capítulo).

Pero si sucede que

la razón de cambio de la variable dependiente con respecto al cambio de la variable independiente es constante, entonces, ***seguramente****, la gráfica será una recta.*

Veamos por qué, pero antes precisemos algunos términos:

- Supongamos que Y=Y(X) es tal que, en X_0, Y toma el valor Y_0 (es decir, que $Y(X_0)=Y_0$). Si $X \neq X_0$: *el cambio o incremento de* X_0 a X, se define como la diferencia:

$$\Delta X = X-X_0$$

  el correspondiente *cambio o incremento de* Y, viene dado por:

$$\Delta Y = Y(X)-Y(X_0)$$

  en tanto que *la razón de cambio de Y con respecto al cambio de X*, es el cociente:

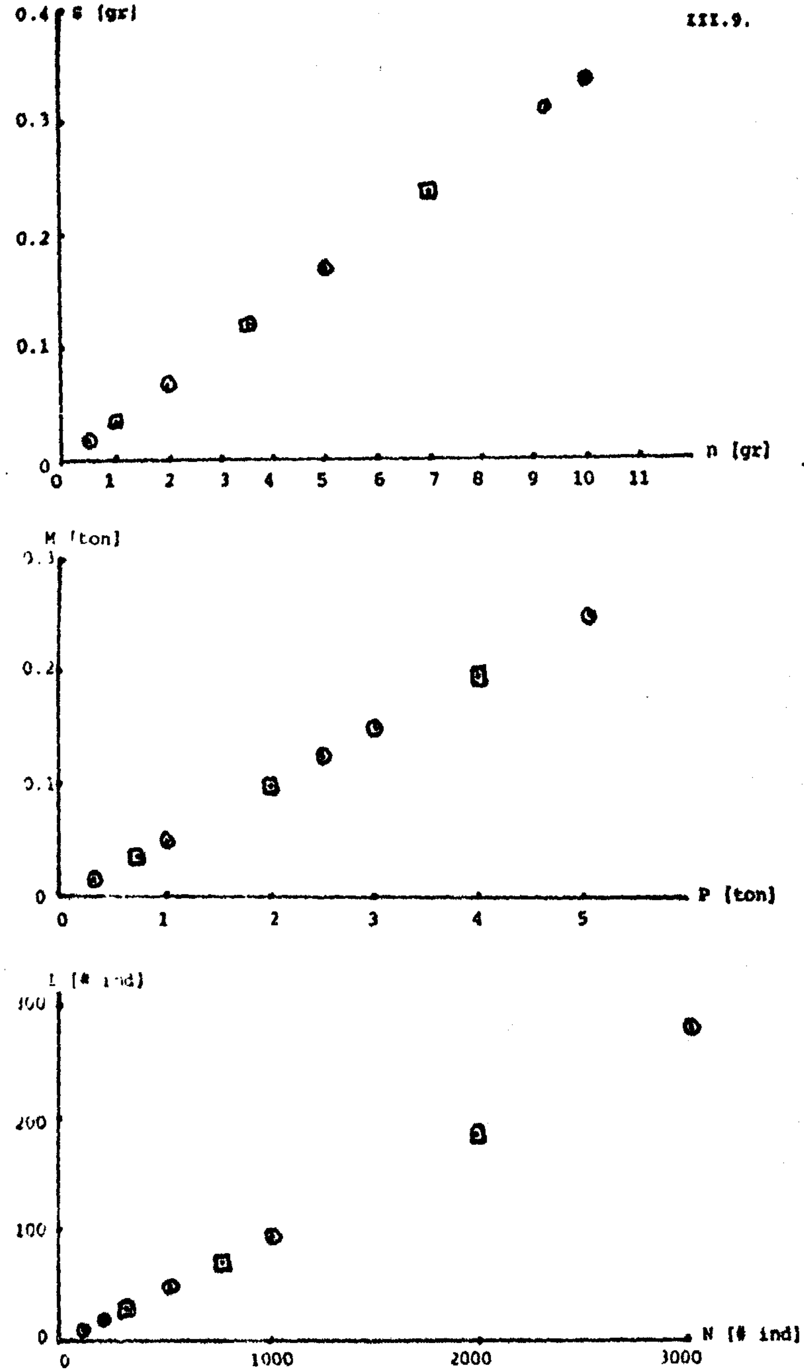


Figura 3.1. ● Vaciado de las tablas 3.1.
▣ Vaciado de los "agregados"

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y(X)-Y(X_0)}{X - X_0} \qquad (3)$$

que también recibe el nombre de *cociente diferencial*

Hagamos ahora la siguiente construcción auxiliar (figura 3.2.):

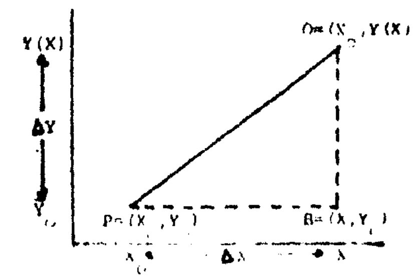


Figura 3.2 [illegible]
[illegible] ΔY ΔX

- Desde $Q=(X,Y(X))$ trazamos una perpendicular al eje horizontal
- Desde $P=(X_0,Y_0)$ trazamos ahora una paralela al mismo eje.
- De este modo, se obtiene el punto $B=(X,Y_0)$ en la intersección de estas rectas y se tiene que el triángulo PBQ es rectángulo.
- Ahora es posible interpretar geométricamente los números ΔY, ΔX y ΔY/ΔX:

ΔY y ΔX son los catetos del triángulo PBQ y la razón de cambio es precisamente la razón entre estos catetos.

De esta suerte, si ΔY/ΔX es constante -digamos que igual a b- entonces, *para cualquier par de puntos* $Q_1=(X_1,Y(X_1))$ y $Q_2=(X_2,Y(X_2))$ de la gráfica de Y, se tiene que:

$$\frac{Y(X_1)-Y_0}{X_1 - X_0} = \frac{Y(X_2)-Y_0}{X_2 - X_0} = b$$

y esto significa que los triángulos rectángulos PB_1Q_1 y PB_2Q_2, donde $B_1=(X_1,Y_0)$ y $B_2=(X_2,Y_0)$, son *semejantes*[9] y, por lo tanto, tienen sus ángulos internos iguales (ver la figura 3.3.)

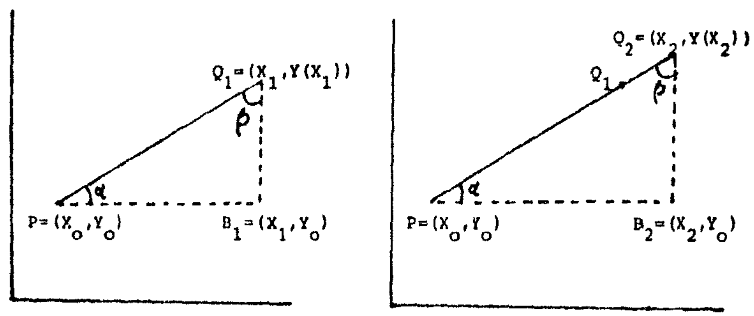


Figura 3.3. PP_1Q_1 y PB_2Q_2 son semejantes.

de manera que P, Q_1 y Q_2 están en la misma línea recta; de aquí, se sigue que *si* $\Delta Y/\Delta X$ *es constante, entonces:*

$$Gr(Y)=\{(X,Y(X))\}$$

es una recta L que pasa por $(X_o, Y(X_o))$, ***y que está determinada de manera única por el valor de***

$$b = \frac{Y(X)-Y_o}{X-X_o}$$

valor conocido como la pendiente de la recta L.

En el caso de que se use la misma escala en ambos ejes coordenados, la pendiente coincide con *la tangente trigonométrica del ángulo* α *que forma L con la dirección positiva del eje horizontal; tal ángulo recibe entonces el nombre de ángulo de inclinación de L*[10].

Por esto, al reconsiderar el ejemplo 3.1., tendremos que, en los tres casos ahí tratados, la función valuada en 0 es igual a 0 (desde el punto de vista fenomenológico, ¿qué significa esto?); en efecto:

$$S(0)=0 \quad ; \quad M(0)=0 \quad \text{e} \quad I(0)=0$$

y las razones de cambio de cada variable dependiente con respecto a un cambio en la variable independiente dado éste, son precisamente los valores de la salinidad, la biomasa y la tasa de natalidad:

$$\alpha = \frac{S(n)-S(0)}{n-0} \quad ; \quad \beta = \frac{M(P)-M(0)}{P-0} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{I(N)-I(0)}{N-0}$$

entonces, los conjuntos de puntos del plano:

$$Gr(S)=\{(n,S(n))\} \quad ; \quad Gr(M)=\{(P,M(P))\} \quad \text{y} \quad Gr(I)=\{(I,i(N))\}$$

se alinean a lo largo de sendas rectas que pasan por el origen.

En realidad, en la discusión previa hemos ido más allá de lo estrictamente necesario para poder asegurar cómo son estas gráficas: hemos *caracterizado geométricamente a las funciones con razón de cambio constante:*

Si $Y=Y(X)$ y $Y(X_o)=Y_o$ y el cociente diferencial es constante, digamos que

$$\Delta Y/\Delta X = b \qquad (4)$$

entonces, la gráfica de Y es una recta que pasa por (X_o,Y_o) y cuya inclinación respecto al eje horizontal está determinada de manera única por el valor de b.

Inversamente, es posible probar que si $L=\{(X,Y)\}$ es una recta del plano que contiene entre sus puntos a (X_o,Y_o), entonces, la razón

$$\frac{Y-Y_o}{X-X_o}, \qquad X \neq X_o$$

es constante y, si se supone que es igual a b, entonces la condición

$$\frac{Y-Y_o}{X-X_o} = b \qquad (5)$$

implica que

$$Y - Y_o = b(X - X_o) \qquad (6)$$

y, por consiguiente, que

$$Y = a + b\,X\ , \text{ con } a = Y_o - b\,X_o \qquad (7)$$

que es una ecuación que establece cómo varían las ordenadas de l en función de las abscisas correspondientes. En particular:

$$Y(0) = a$$

que significa geométricamente que la recta l cruza el eje vertical en el punto (0,a), razón que le da al parámetro a el nombre de *ordenada al origen de la recta l*, mientras que la expresión (7) recibe el nombre de *ecuación de l en su forma de pendiente* (b) *y ordenada al origen* (a); asimismo, la ecuación (6) se llama *ecuación de l en su forma de pendiente* (b) *y punto* (x_0, y_0).

Obsérvese que la condición impuesta para definir la pendiente (que X sea diferente de X_o) excluye la posibilidad de que la recta sea vertical pues, de serlo, las abscisas de todos los puntos de l serían iguales de modo que ni el cociente diferencial podría ser calculado ni l podría ser gráfica de función alguna (¿por qué?). Sin embargo, si se entiende que la ecuación de un conjunto de puntos del plano es su "retrato algebraico", independientemente de la indefinición de b y de que tal recta no pueda ser gráfica de alguna función, tendremos que

$$X = X_o \qquad (8)$$

caracterizará plenamente a l.

En resumen, hasta el momento lo que hemos hecho ha sido describir geométricamente las relaciones funcionales del tipo (7) a partir de que alguna razón teórica o alguna hipótesis simplificadora nos han sugerido que entre X y Y existe tal relación.

En la práctica, sin embargo, suele suceder que, aunque se sospeche que

$$Y(X) = a + b\,X$$

los datos experimentales -obtenidos en el campo o el laboratorio- se ajustan sólo "parcialmente" a una fórmula tal, en el sentido de que si bien al vaciarse en un plano cartesiano son aproximadamente colineales, no lo son exactamente. El problema fundamental es, entonces, ¿qué hacer para elegir los parámetros a y b si se supone que a los "puntos observados" (X,Y) se les va permitir cierta "infidelidad" al modelo? De la respuesta se enterará quien leyere lo que sigue si lo lee con atención.

Ejemplo 3.2. Se sabe que al disolver cierto sólido en agua, la cantidad C [gr] necesaria para saturar el solvente aumenta con la temperatura T [°C] del agua; Urquhart y Clow dan los siguientes datos correspondientes a la disolución de una sustancia sólida en 100 ml de agua[11]:

Tabla 3.2.

T [°C]	5	15	25	35	45	55
C [gr]	76	80	90	100	105	115

cuyo vaciado en un plano cartesiano se muestra en la figura 3.4.[12]

En un primer intento por describir explícitamente cómo varía C en función de T, el vaciado sugiere que

$$C(T) = a + b\,T \qquad (9)$$

salvo pequeñas "desviaciones" pues los puntos de la forma (T,C) se alinean aproximadamente a lo largo de una recta. Además, los parámetros a y b tienen un significado fenomenológico muy claro, a saber:

- como a = C(0), a es la cantidad soluble a 0 °C y
- la razón de cambio de C con respecto al cambio en T -que, como ya sabemos, es igual a b- mide en cuánto aumenta la "capa-

cidad de disolución del agua" cuando la temperatura se incrementa en un grado centígrado (por esto, las unidades en que se expresa b son de gr/°C).

lo que ayuda a la correcta comprensión del modelo (si no pudieran interpretarse a y b desde el punto de vista del fenómeno, la fórmula (9) sería una aportación muy pobre al estudio del mismo; las razones de esta afirmación, sin embargo, sólo serán claras más adelante Cf. Cap. V, *infra*).

Ahora bien, en rigor, los puntos de la figura 3.4. no son colineales y hay una infinidad de rectas que podrían tomarse como "buenas aproximaciones"; así, es necesario establecer un criterio para elegir sólo una de esa infinidad; en otras palabras, hace falta decir cómo elegir, de entre todos los posibles, un par de valores de a y de b, dicho criterio está normado por "lo que se quiera obtener del modelo": en nuestro caso, por ejemplo, buscaremos que la descripción del fenómeno mediante la fórmula (9) difiera de "lo observado en cada temperatura" en el mínimo posible; es decir, que el *valor calculado* de C(T) y el correspondiente *valor observado* para ese valor de T *"se parezcan lo más posible"*.[13] De este modo, la recta que se busca es aquélla para la cual *las distancias verticales entre ella y los puntos del vaciado son mínimas*.

Por el momento, a reserva de establecer un método más preciso para encontrarla, tracemos "a ojo" una recta que pase entre la nube de "puntos experimentales" y en la que se reduzcan al mínimo tales distancias; a continuación, encontremos la ecuación:

- según la elección que se muestra en la figura 3.4., la recta pasa por los puntos (15,82.5) y (40,102.5), de manera que la pendiente será:

$$b = \frac{102.5 - 82.5}{40 - 15} = 0.8$$

- en tanto que la ordenada al origen será:

$$a = 82.5 - 0.8(15)$$
$$= 102.5 - (0.8)(40) = 70.5$$

y, por consiguiente, la ecuación que se busca es:

$$C(T) = 0.8\ T + 70.5 \qquad (10)$$

con lo que se establece, en una primera aproximación, qué cantidad C [gr] de la sustancia sólida puede disolverse en 100 ml de agua a T °C cuando $0 \leq T \leq 55$; por consiguiente, la fórmula (10) sirve para calcular C en función de T para cualquier *valor intermedio de la temperatura*. Este tipo de cálculos en los que, a partir de una colección finita de datos, se obtienen predicciones para valores no observados dentro de cierto rango, se llaman *interpolaciones* y, en el caso del ejemplo que nos ocupa, hemos hecho una *interpolación lineal* que tal nombre reciben [illegible] la función que sirve para hacerla tiene como gráfica una recta

Para terminar con el ejemplo, revisemos el significado de los valores que obtuvimos para a y b:

- como a = 70.5, se tiene que cuando el agua está a 0 °C, es posible disolver esta cantidad de gramos de la sustancia (aunque tendremos que suponer que el agua no se ha congelado para que tenga sentido esta afirmación) mientras que
- cuando aumenta la temperatura en un grado Celsius, la cantidad soluble aumenta en 0.8 gramos.

Conviene advertir, sin embargo, que como el observador suele fijar "el cero" de sus escalas (tanto para una variable como para la otra) de manera más o menos arbitraria, es posible que un mismo fenómeno sea descrito por dos ecuaciones del tipo (7) que difieran en el valor de a. El ejemplo que sigue muestra un caso en el que se da tal situación y en el cuestionario, al final de esta sección, aparece otro (véase el ejercicio 3.1.).

Ejemplo 3.3. (Deformación elástica). Dos estudiantes de la materia de Física General, a los que llamaremos A y B para dis-

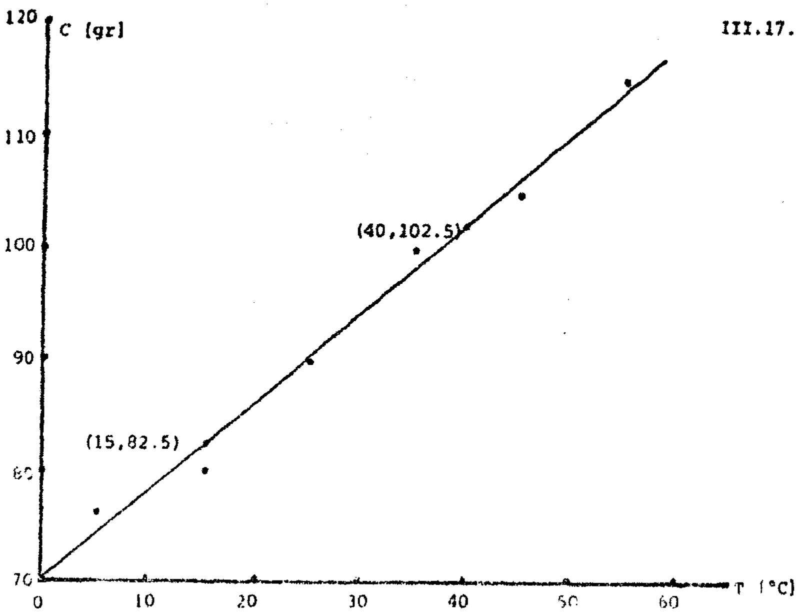


Figura 3.4. Los datos de la tabla 3.2. y la recta que "mejor los aproxima"

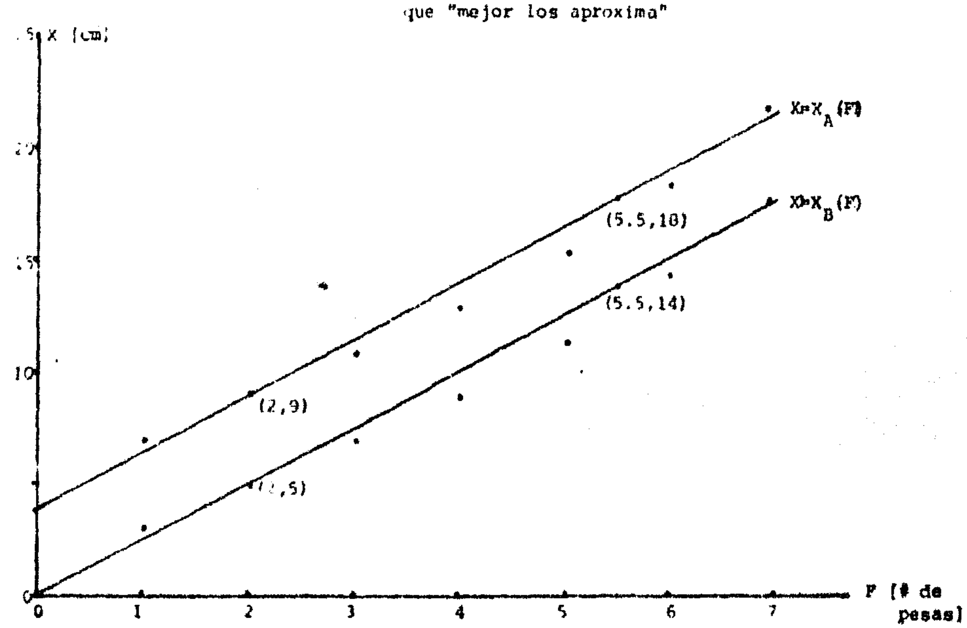


Figura 3.5. Los datos de la tabla 3.3. y las rectas que dan "las mejores interpolaciones lineales". Obsérvese que $X_A(F)-X_B(F)=4$.

tinguirlos, realizaron por separado el siguiente experimento:

- A un resorte fijo que pende verticalmente, se le cuelgan pesas iguales y se registra en una tabla el alargamiento del resorte conforme se van agregando pesas; el objetivo es establecer la mejor interpolación lineal para la dependencia funcional entre la fuerza F [# de pesas] que se aplica para la deformación y el alargamiento X (cm).

Los resultados obtenidos por ambos experimentadores se registran en las siguiente tabla (en ella, X_A representa las elongaciones medidas por el estudiante A y X_B las medidas por el otro):[14]

Tabla 3.3.

F (# de pesas)	X_A (cm)	X_B (cm)
1	7	3
2	9	5
3	11	7
4	13	9
5	15.5	11.5
6	18.5	14 5
7	22	18

y el vaciado de los puntos de la forma $(F, X_A(F))$ y $(F, X_B(F))$ se muestra en la figura 3.5.

Tanto en la tabla como en las gráficas se observa una diferencia constante de 4 cm en las ordenadas; desde luego, esto no es casual: se debe a que "el cero" de la escala de las deformaciones fue ubicado en distinto lugar por cada estudiante y quedó situado a 4 cm uno del otro; en efecto: mientras B mide el alargamiento desde el extremo libre del resorte, A lo registra desde el extremo fijo (véase la figura 3.6.). Así, la relación algebraica entre las medidas de A y de B será:

$$X_A(F) - X_B(F) = 4 \qquad (11)$$

y esto deberá reflejarse en las ecuaciones de las rectas que "ajustemos" para obtener la interpolación lineal deseada. Veamos.

- Si, de la recta de A, tomamos los puntos (2,9) y (5.5,18) se obtiene la pendiente

$$b = \frac{18 - 9}{5.5 - 2} = \frac{9}{3.5} = 2.5$$

y la ordenada al origen:

$$a = 9 - (2.5)(2) = 4$$

lo que, por cierto, era de esperarse (¿por qué?).

- Ahora, de la recta de B, calculemos ambos parámetros con los puntos (2,5) y (5.5,14); con ellos se obtienen

$$b = \frac{14 - 5}{5.5 - 2} = \frac{9}{3.5} = 2.5$$

y

$$a = 5 - (2.5)(2) = 0$$

de donde resulta que:

$$X_A(F) = 4 + 2.5\,F \qquad y \qquad X_B(F) = 2.5\,F \qquad (12)$$

que coinciden con (11) y de este modo, dondequiera que sean válidas las interpolaciones con las fórmulas (12), se obtendrá la misma diferencia de 4 cm

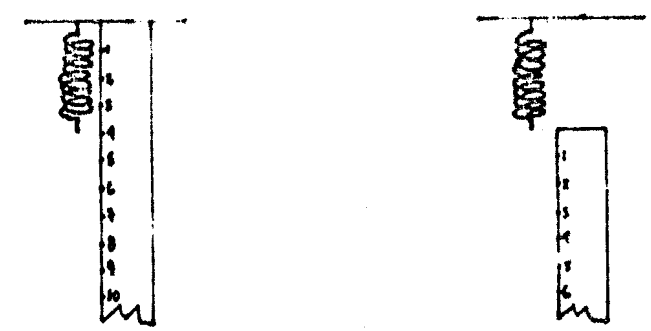
En general, el conjunto de valores para el cual tiene sentido una fórmula del tipo Y = Y(X) - llamado *dominio de definición de la función* - depende fuertemente del fenómeno que se esté modelando, del rango en que varíen los datos que se puedan observar y de la forma particular que tenga la regla de correspondencia (lo que dará lugar a restricciones analíticas o algebraicas, véase el capítulo V). Así, en el ejemplo 3.1., los datos que

se tienen nos llevaron a restringir el dominio de aplicación de la ecuación (10) a las temperaturas entre 0 y 55 °C y, aunque tal vez sea posible ampliarlo un poco, tenemos razones para suponer que la fórmula no puede ser válida para temperaturas bajo cero -pues seguramente el agua estará congelada- ni cuando T supere el punto de ebullición; por el estilo, la existencia de un "límite de deformación" del resorte del ejemplo 3.2. impide que las ecuaciones (12) sirvan para calcular el alargamiento cuando el número de pesas es muy grande y tampoco tienen sentido si la fuerza es negativa pues, en tal caso, el fenómeno considerado sería esencialmente distinto (¿por qué?).

Según esto, bien puede ocurrir, por ejemplo, que el cero no pertenezca al dominio de definición de una función de la forma

$$Y(X) = a + b\,X \qquad (13)$$

de manera que el significado fenomenológico de a no existe puesto que Y(0) no está definido; sin embargo, subsiste el significado geométrico, es decir: a es la ordenada al origen de la recta que se obtiene al prolongar indefinidamente la gráfica de Y y que, seguramente, en algún momento va a intersectar el eje vertical.



Posición de la regla de A | Posición de la regla de B.

Figura 3.6.

CUESTIONARIO

3.1. Escriba las temperaturas de la tabla 3.2. en grados Kelvin [°K]. Dibuje en un plano cartesiano los puntos de la forma (C,T) y encuentre la ecuación de la recta

$$C(T) = a + b\,T \qquad (*)$$

que "mejor aproxima" a tales puntos. Señale y discuta las semejanzas y diferencias entre la ecuación obtenida aquí y la (10). Explique, si lo tiene, el significado fenomenológico de a en la ecuación (*) (recuerde que el cero de la escala Kelvin es el "cero absoluto"). Indique el dominio de definición de la función obtenida en este ejercicio.

3.2. La *forma general* de la ecuación de una recta es:

$$AX + BY + C = 0 \qquad (**)$$

donde A,B y C son constantes. Esta forma es *equivalente* a las formas de las ecuaciones (6) y (7) del texto, es decir que mediante operaciones algebraicas es posible pasar de (**) a aquéllas y alrevés; hay otras formas equivalentes a éstas (el lector interesado puede verlas en cualquier libro de geometría analítica[15]); por lo pronto, encuentre los valores de la pendiente b y la ordenada al origen a de las rectas cuyas ecuaciones se dan enseguida:

a. $3X + 2Y = 0$; b. $5.2\,S - 3.2\,T + 1.5 = 0$; c. $\frac{m}{3} - \frac{n}{5} = 1$

d. $X = -1.5\,R + 8$

Nota. En todos los casos, se supone que la variable independiente está representada por la literal que aparece primero en el alfabeto.

3.3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar la ecuación de la recta que se describe:

a. La que pasa por los puntos (-1,2) y (2,-3).

b. La que intersecta el eje horizontal en X=-1 y el vertical en Y=5.

c. La que intersecta al eje horizontal en X=2 y pasa por el punto (-1,-5).

d. La que tiene un ángulo de inclinación de 45° y pasa por el origen.

e. La que pasa por (5,-3) y es paralela a la del ejercicio anterior.

f. La que tiene ángulo de inclinación de 120° y ordenada al origen igual a -1.

3.4. Un alambre de cobre se expande al aumentar la temperatura. Su longitud L [cm] varía casi linealmente con T [°C] para T 150. Encontrar la ecuación que relaciona a L como función de T si a 20 °C la longitud es de 76.547 cm y a 90 °C, es de 76.547 cm.

3.5. Al nivel del mar, el agua se congela a 32 grados Fahrenheit (°F) y a 0 °C mientras que hierve a 212 °F y 100 °C. La dependencia entre ambas escalas es lineal. Describa °C como función de °F y alrevés. Si la temperatura es de 68 °F, ¿cuánto es en °C?; ¿cuánto es en °F si es de 48 °C?

3.6. (Relaciones biométricas) Con el auxilio de sus profesores, planee un experimento en el que, en una especie animal, se busquen las relaciones funcionales entre diferentes variables de interés biológico; por ejemplo, con peces es posible establecer cómo varían:

a. La longitud total en función de la longitud precaudal o bien de la longitud a la horquilla.

b. El peso con la longitud total.

c. La longitud total con la edad y

d. El peso con la edad.

(Las definiciones de estos términos particulares de la biología pesquera pueden consultarse en el libro de Lozano Calvo "Oceanografía, Biología Marina y Pesca", Tomo I, 402 y ss., Editorial Paraninfo, Madrid, 1978.)

3.7. En el estudio "Algunos parámetros de la dinámica de la población de camarón blanco *Penaeus vannamei* en el sistema lagunar Chiauetla Teacapán", M. Nieves y Piña P. (profesores de la Escuela de Ciencias del Mar de la Universidad Autónoma de Sinaloa) obtuvieron, entre otras, las siguientes lecturas para la longitud total L [cm], la longitud del cefalotórax C [cm] y el peso W [gr] de 22 organismos:

L [cm]	6.1	6.8	6.7	7.1	7.3	7.7	8.5	9.5	10.1	11.0	11.4	11.5
C [cm]	2.1	2.4	2.2	2.3	2.5	3.0	3.4	3.3	3.4	3.7	4.0	3.8
W [gr]	1.4	2.1	2.5	3.8	3.5	2.7	4.9	7.0	8.2	10.7	12.3	12.9

(cont.)

L [cm]	11.9	12.2	12.4	12.7	12.8	12.9	13.3	13.7	13.8	14.9
C [cm]	4.1	4.1	4.3	4.3	4.4	4.5	4.4	4.7	4.7	5.0
W [gr]	16.0	15.6	16.5	17.5	17.2	17.6	17.8	18.8	20.2	25.2

a. Vacíe los puntos de la forma (L,C) y (L,W) en sendos planos cartesianos.
b. Encuentre la función lineal que mejor se ajuste -según el criterio que se estableció en el texto- a los puntos de la forma (L,C).
c. Haga una tabla de valores observados y valores calculados con la fórmula obtenida en b.
d. Encuentre la función lineal que mejor se ajuste a los puntos de la forma (L,W).
e. Haga una tabla de valores observados y calculados para la relación longitud total-peso.
f. Comente, si las hay, las diferencias entre las dificultades que tuvo para hacer los ajustes en b. y d. Tales dificultades ¿se reflejan de algún modo en las tablas de c. y e.?
g. En base a lo anterior, dé su opinión respecto a "qué tan bueno" resulta el modelo lineal para las relaciones longitud total-longitud del cefalotórax y peso-longitud total.

4. Funciones de Gráfica Parabólica e Hiperbólica.

Naturalmente, no todas las funciones tienen como gráfica una línea recta; un vistazo, por ejemplo, al aspecto de las grá-

ficas de las funciones que describen la caída libre o la variación de la presión con el volumen en un gas ideal a temperatura constante o, inversamente, la disposición de los puntos de un vaciado de datos de la forma longitud-peso o concentración de una sustancia reaccionante-tiempo de reacción bastarían para convencernos de que, en la Naturaleza, no todo es "lineal". Echemos el vistazo:

Ejemplo 4.1. (La Ley de la Caída Libre otra vez) Si d [m] representa la distancia recorrida por un objeto que cae libremente y t [seg] es el tiempo de caída, entonces:

$$d(t) = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (14)$$

donde g es la aceleración de la gravedad en el lugar de la caída. Si queremos darnos una idea de cómo es la Gr(d), es preciso tabular y vaciar las parejas de la forma (t,d(t)) en un plano cartesiano; hagámoslo:

Tabla 4.1.

t [seg]	0	1/4	1/2	2/3	1	3/2	2	13/5	4	3
d [cm]	0	g/32	g/8	4g/18	g/2	9g/8	2g	169g/50	8g	9g/2

(véase la figura 4.1.).

Ejemplo 4.2. (Ley de los Gases Ideales) Si P [Atm] representa la presión que un gas ideal ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene y V [m³] denota el volumen que ocupa el mismo gas a temperatura constante, entonces:

$$P(V) = \frac{k}{V} \qquad (15)$$

donde k es una constante positiva. Como en el ejemplo anterior, tabulemos y vaciemos, en la figura 4.2., las parejas de la forma (V,P(V)) para obtener una aproximación a la Gr(P):

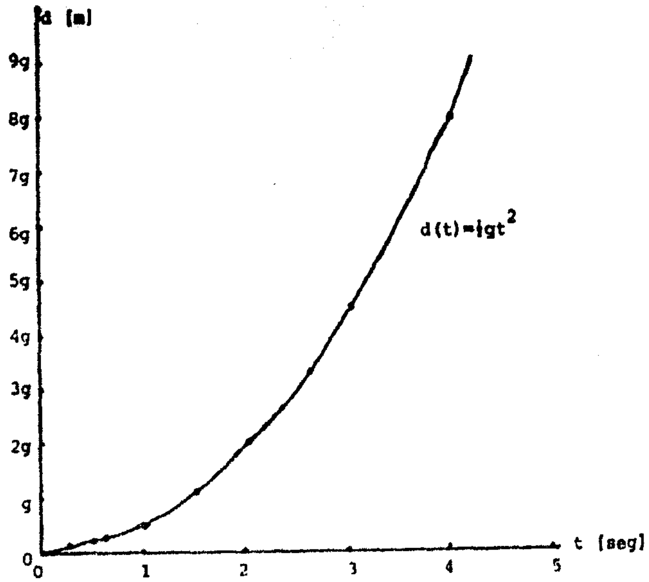


Figura 4.1. Vaciado e interpolación de la tabla 4.1.

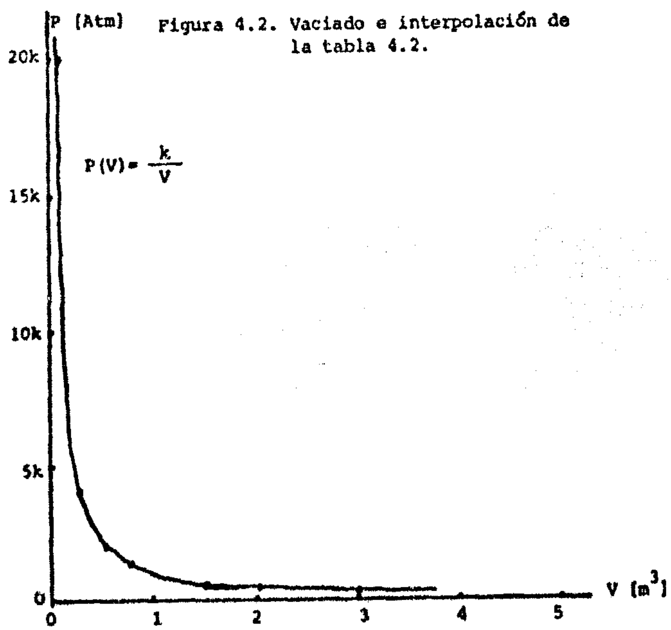


Figura 4.2. Vaciado e interpolación de la tabla 4.2.

Tabla 4.2.

V [m]	1/20	1/4	1/2	3/4	1	3/2	2	8/3	3
P [Atm]	20k	4k	2k	4k/3	k	2k/3	k/2	3k/8	k/3

Así, es evidente que las funciones cuyas reglas de correspondencia vienen dadas por las ecuaciones (14) y (15) no tienen como gráficas líneas rectas y es fácil verificar que la condición necesaria y suficiente que consiste en la constancia de la razón de cambio tampoco se satisface (véase el ejercicio 4.3. del cuestionario correspondiente a esta sección).

En los dos ejemplos anteriores, consideramos dadas las reglas de correspondencia y discutimos el aspecto de sus gráficas; en los ejemplos que siguen el problema es el inverso: tenemos a la vista el vaciado de datos de campo o laboratorio y nos preguntamos por la ecuación que relaciona las variables de interés; veremos que tampoco en estos casos se obtiene -ni siquiera "más o menos"- que los puntos se ajusten a una línea recta a lo largo de todo su dominio.

Ejemplo 4.3. (Relaciones biométricas en camarón) Considérese la tabla de datos citada en el ejercicio 3.7. del cuestionario anterior; su vaciado se ve en la figura 4.3..

Ejemplo 4.4. (Descomposición de una sustancia) Según datos de laboratorio, en la hidrólisis alcalina del nitrobenzoato de etilo con una concentración inicial de 0.05 moles por litro , la concentración "relativa" de la sustancia reaccionante respecto a la concentración inicial a_o, denotada aquí mediante $a(t)/a_o$, varía con el tiempo t [seg] según se registra en la

Tabla 4.4.

t [seg]	0	120	180	240	330	530	600
$a(t)/a_o$	1	.6705	.5825	.512	.4195	.310	.2965

misma que se vacía en la figura 4.4..

Esperamos que a estas alturas, el lector esté convencido

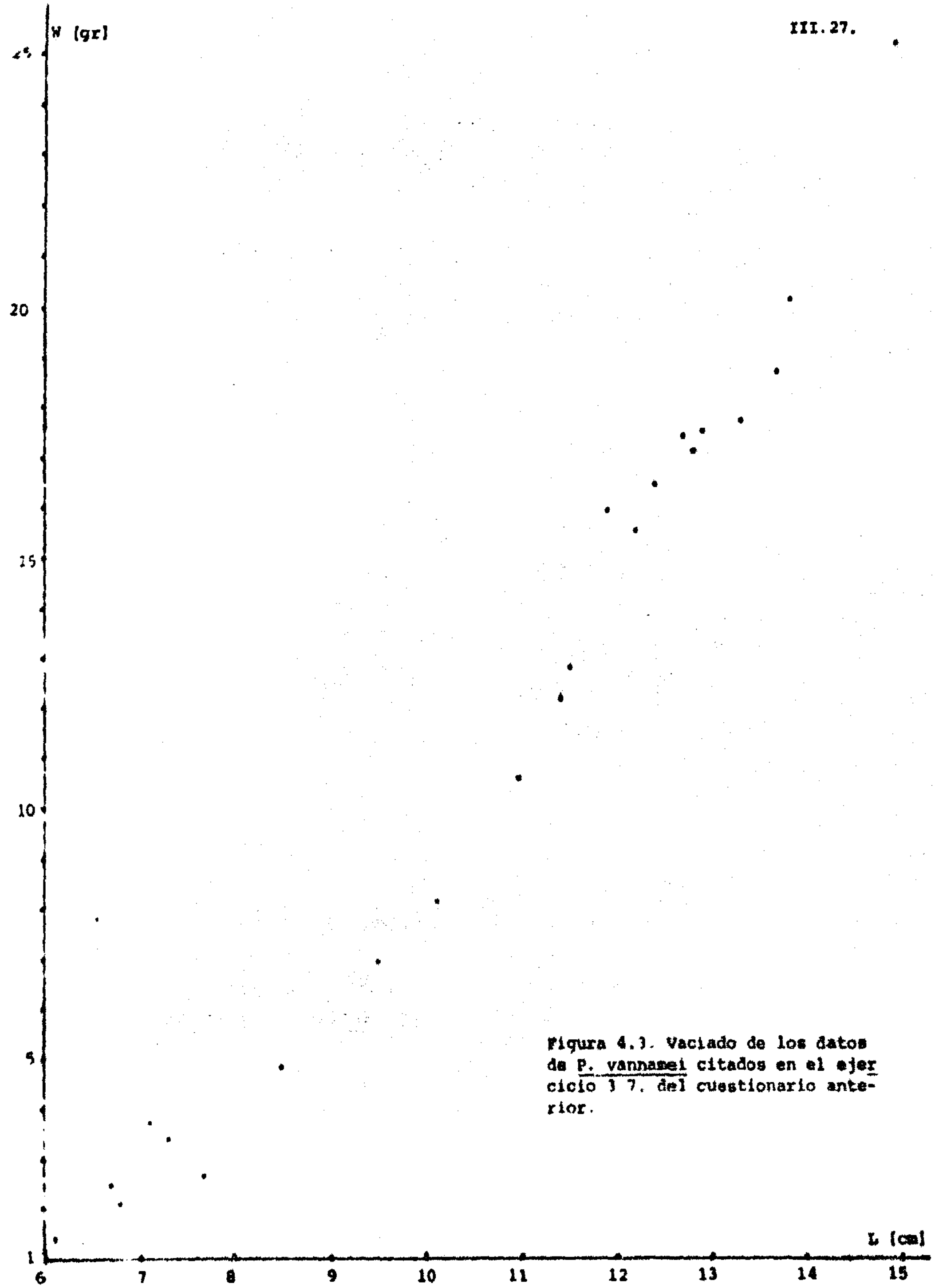


Figura 4.3. Vaciado de los datos de P. vannamei citados en el ejercicio 3 7. del cuestionario anterior.

de la necesidad de ampliar nuestro conocimiento de las gráficas. Por esto, discutiremos el comportamiento característico de las gráficas de funciones cuyas reglas de correspondencia sean del tipo:

$$Y(X) = k\ X^n\ , \tag{16}$$

donde k es un real cualquiera y n un entero. En realidad, en lo que sigue, consideraremos el caso en que $k = 1$ pues el efecto geométrico (es decir, en la gráfica) de "multiplicar" cualquier regla de correspondencia por una constante k la veremos más adelante (véase el apéndice A del capítulo V. *infra*).

Las funciones cuya regla de correspondencia se establece mediante una ecuación como la (16) reciben el nombre de *funciones potenciales*[16] y se dice que son:

- *parabólicas* si n 0 (Por ejemplo, en la ecuación (14), $k = \frac{1}{2} g$ y $n = 2$).
- *hiperbólicas* cuando n 0 (como la de la regla de correspondencia (15) en la que $n = -1$).

Y reciben estos nombres por que sus gráficas tienen gran semejanza con la *parábola* cuya ecuación es:

$$Y(X) = X^2 \tag{17}$$

y con la *hipérbola*:

$$Y(X) = \frac{1}{X}\ ,\ X \neq 0 \tag{18}$$

respectivamente (de hecho, en geometría analítica se prueba que los conjuntos de puntos (X,Y) del plano cartesiano que satisfacen ecuaciones del tipo (16) son parábolas con vértice en el origen cuando $n = 2$ e hipérbolas con centro en (0,0) si $n = -1$)[17]. Véanse las figuras 4.5.a. y 4.5.b..

Veamos, en general, qué tienen en común y en que difieren

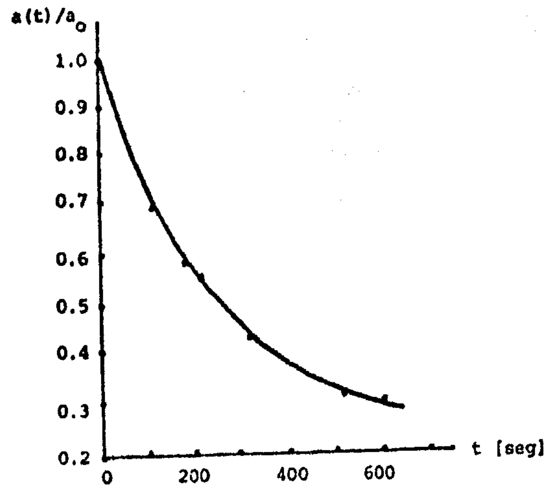
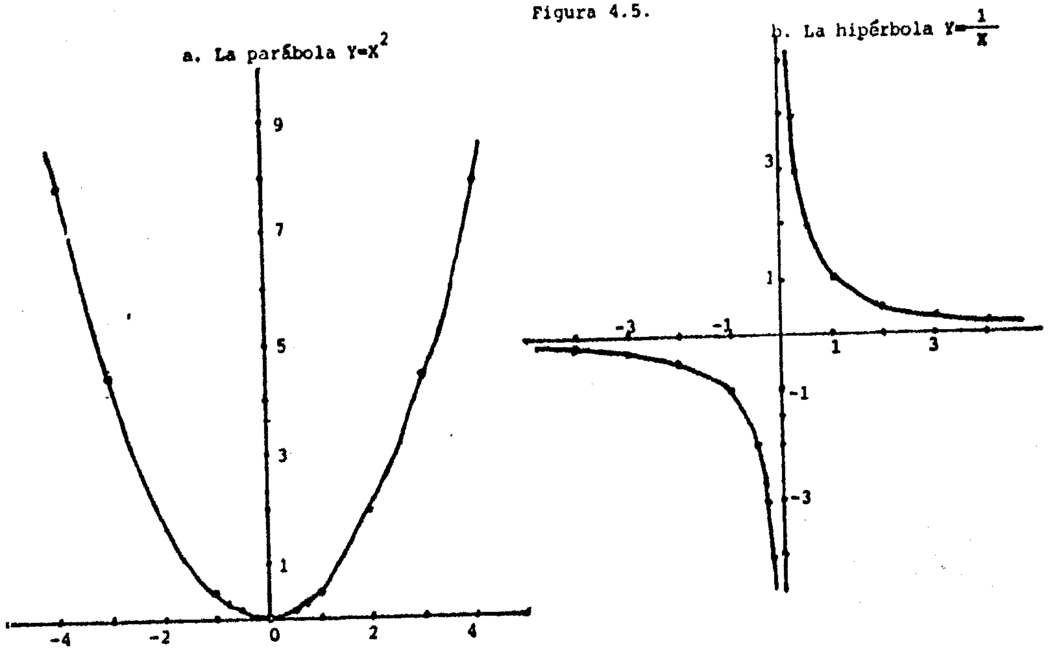


Figura 4.4. Vaciado e interpolación de los datos de la tabla 4.4.

Figura 4.5.



las gráficas de distintas funciones potenciales:

Tanto si n es positiva como si no lo es, se tiene que:

- cuando n es impar, la gráfica es una curva simétrica respecto al origen[18] puesto que:

$$Y(-X) = -X^n$$

de manera que:

$$Y(-X) = -Y(X) \qquad (19)$$

que significa que si (X,Y) está en la gráfica, entonces $(-X,-Y)$ también está (véanse las figuras 4.6.a. y 4.6.b.).

- cuando n es par, la gráfica resulta simétrica con respecal eje vertical[19] pues

$$Y(-X) = X^n$$

y, por consiguiente:

$$Y(-X) = Y(X) \qquad (20)$$

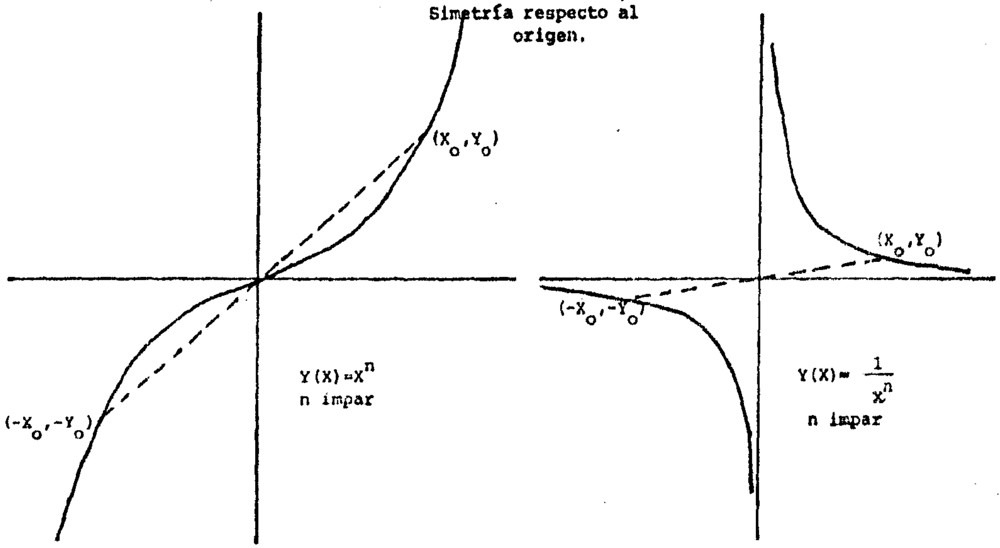
con lo que, cada vez que (X,Y) es un punto en $Gr(Y)$, el punto $(-X,Y)$ también lo es (figuras 4.7.)

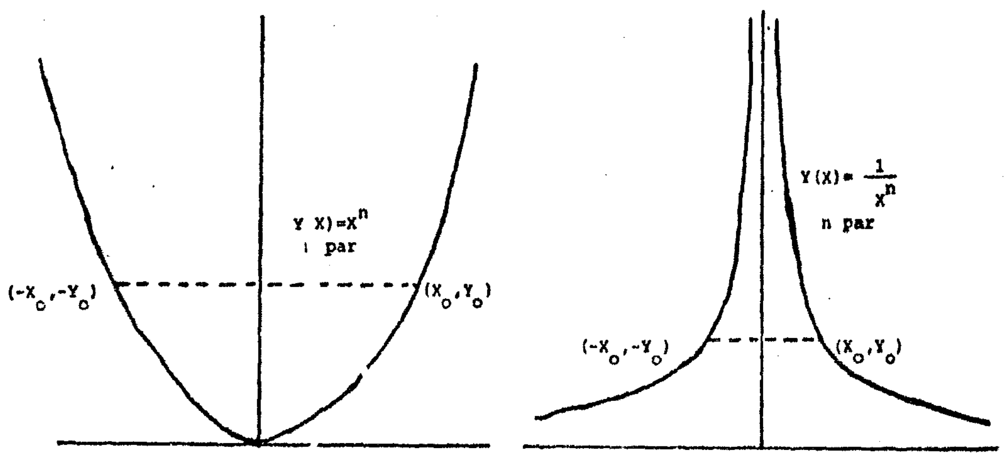
Ahora, cuando n es positiva -independientemente de su paridad- ocurre que:

- para valores de X entre -1 y 1, la curva $Y = Y(X)$ "se aplasta" más contra el eje horizontal conforme se toman valores sucesivamente mayores de n (figuras 4.8.).
- si X toma valores fuera del intervalo $[-1,1]$, al aumentar el valor de n, la gráfica se aleja "más rápidamente" del eje de las abscisas (figuras 4.9. y ejercicios al final de esta sección).

Finalmente, cuando n es negativa y toma valores sucesivamente menores (es decir, más negativos), sucede lo siguien

Figuras 4.6.
Y(-X) = -Y(X)
Simetría respecto al origen.





Figuras 4.7.
Y(-X) = Y(X)
Simetría respecto al eje vertical

te:

- cuando X se aproxima a 0 y cae entre -1 y 1 (recuérdese que no es posible aplicar la definición de estas funciones exactamente cuando X = 0), la curva Y = Y(X) se alejará sucesivamente más rápido del eje horizontal al aumentar el valor absoluto de la potencia.
- si X se encuentra a la izquierda de -1 o a la derecha de 1 y n se torna más y más negativa, la gráfica de Y se aplastará más cada vez contra el eje de las X.

Baste por el momento esta somera descripción; en los próximos capítulos tendremos la oportunidad de discutir el aspecto de las gráficas de otro tipo de funciones notables y de familiarizarnos con ellas.

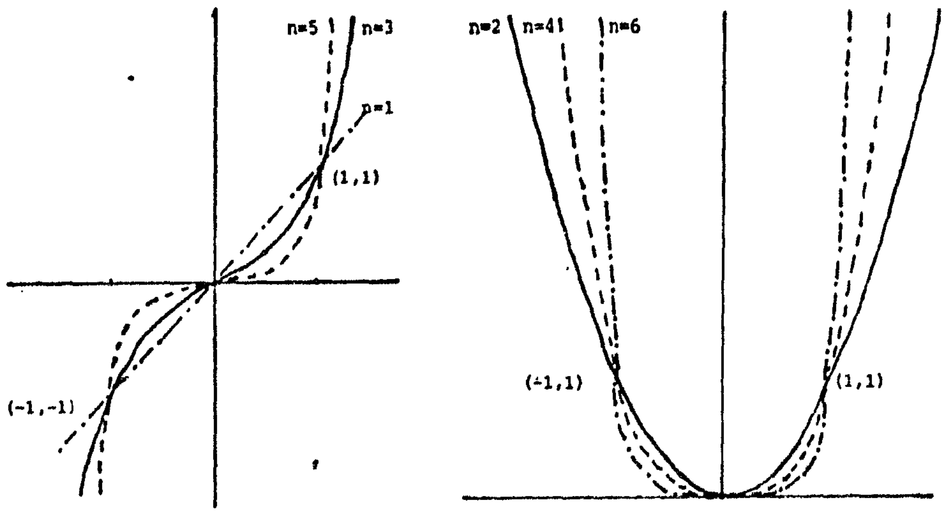
CUESTIONARIO

4.1. Si "extendemos" la fórmula (14) a valores negativos del tiempo, tendremos la ecuación del *tiro vertical*. Compruébese que d(-t) = d(t) y explíquese el significado físico de este hecho.

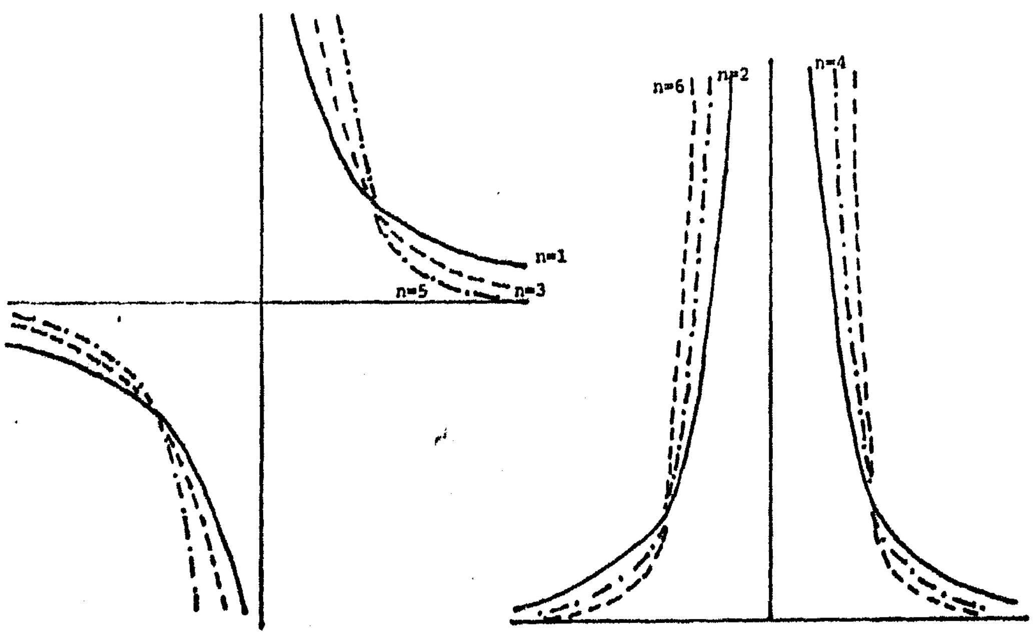
4.2. Sea $Y_n(X) = X^n$. Para cada uno de los distintos valores de n que se dan enseguida tabule X contra $Y_n(X)$, tomando los valores de X que se dan en los siguientes incisos; tome n = 1,2,3,4,5 y 6 y luego, n = -1,-2,-3,-4,-5 y -6.

a. X = 0.2,0.4,0.6,0.8,1 y después X = -0.2,-0.4,-0.6,-0.8,-1.
b. X = 1.2,1.5,2,2.4,3 y luego X = -1.2,-1.5,-2,-2.4,-3.
c. Vacíe en un mismo plano cartesiano los puntos de la forma $(X,Y_n(X))$ que obtuvo en a. Agrupe según el signo de n.
d. Haga lo mismo para los puntos obtenidos en b..

4.3. Compruebe que la razón de cambio promedio de la variable dependiente respecto a la dependiente no permanece constante en el caso de las funciones de los ejemplos 4.1. y 4.2..



Figuras 4.8.
$Y(X)=X^n$
diferentes valores de n



Figuras 4.9.
$Y(X)=\frac{1}{X^n}$ diferentes valores de n.

APENDICE. UN EXPERIMENTO DE MEDICION (fragmento).*

Cuando los historiadores de la ciencia moderna tratan de definir su esencia y su estructura, insisten la mayoría de las veces en su carácter empírico y concreto por oposición al carácter abstracto y libresco de la ciencia clásica y medieval. La observación y la experiencia llevando una ofensiva victoriosa contra la tradición y la autoridad: ésa es la imagen, igualmente tradicional, que se nos da habitualmente de la revolución intelectual en el siglo XVII, de la cual la ciencia moderna es, a la vez, la raíz y el fruto.

Este cuadro no es en absoluto erróneo. Por el contrario: es perfectamente evidente que la ciencia moderna ha ampliado más allá de cualquier posibilidad de evaluación nuestro conocimiento del mundo y acrecentado el número de "hechos" -toda clase de hechos- que ha descubierto, observado y reunido. Además, así es justamente como algunos de los fundadores de la ciencia moderna han considerado y comprendido su obra y se han comprendido a sí mismos. Gilbert y Kepler, Harvey y Galileo, todos ensalzan la admirable fecundidad de la experiencia y de la observación directa, oponiéndola a la esterilidad del pensamiento abstracto y especulativo.

Sin embargo, sea cual fuere la importancia de los nuevos "hechos" descubiertos y reunidos por los venatores**, la acumulación de un cierto número de "hechos", es decir una pura colección de datos de observación o de experiencia *no constituye una ciencia: los "hechos" deben ser ordenados, interpretados, explicados*°. Dicho de otro modo, hasta que se somete a un tratamiento teórico,

* Alexandre Koyré. Estudios de Historia del Pensamiento Científico. Siglo XXI Editores. Madrid, 1980. pp. 274 y ss..
***venatore*, que significa "cazador", se usa aquí como sinónimo de investigador.
° El subrayado es nuestro.

un conocimiento de los hechos no se convierte en una ciencia.

Por otra parte, la observación y la experiencia -es decir, la observación y la experiencia en bruto, las del sentido común- sólo desempeñaron una función poco importante en la edificación de la ciencia moderna. Incluso se podría decir que han constituído los principales obstáculos que la ciencia ha encontrado en su camino. No la *experiencia*, sino la *experimentación*, es la que desarrolló su crecimiento y propició su victoria: el empirismo de la ciencia moderna no se basa en la experiencia, sino en la experimentación.

Ciertamente, no hay necesidad de insistir aquí en la diferencia entre "experiencia" y "experimentación". No obstante, querría llamar la atención sobre el estrecho vínculo que existe entre la experimentación y la elaboración de una teoría. Lejos de oponerse, la experiencia y la teoría se encuentran vinculadas y mutuamente interdeterminadas, y con el desarrollo de la precisión y el perfeccionamiento de la teoría es como crecen la precisión y el perfeccionamiento de las experiencias científicas. En efecto, al ser una experiencia científica -como tan bien lo ha expresado Galileo- una pregunta que se plantea a la naturaleza, resulta perfectamente claro que la actividad que tiene como resultado plantear esa pregunta está en función de la elaboración del lenguaje en el cual se formula esa actividad. La experimentación es un proceso teleológico* cuyo fin está determinado por la teoría. El "activismo" de la ciencia moderna, tan bien advertido - *scientia activa, operativa* - y tan mal interpretado por Bacon, sólo es la contrapartida de su desarrollo teórico.

Por otra parte, tenemos que añadir -y esto determina los rasgos característicos de la ciencia moderna- que la investigación teórica adopta y desarrolla el modo de pensar del matemático. Esta es la razón por la cual su "empirismo" difiere *toto caelo* del de la tradición aristotélica: "El libro de la naturale

* "Teleología", dice la Encyclopaedia Britannica, proviene del griego *telos* "fin" y *logos* "razón" y es "la explicación por referencia a algún propósito o fin; también descrita como causalidad final en contraste con las explicaciones por razones de eficacia solamente..."

za está escrito en caracteres geométricos", declaraba Galileo; lo cual implica que, para alcanzar sus objetivos, la ciencia moderna se encuentra forzada a reemplazar el sistema de conceptos flexibles y semicualitativos de la ciencia aristotélica por un sistema de conceptos rígidos y estrictamente cuantitativos. Lo cual significa que la ciencia moderna se constituye sustituyendo el mundo cualitativo, o más exactamente, *mixte*, del sentido común (y de la ciencia aristotélica) por un mundo arquimedeano de geometría hecha realidad o -lo que es exactamente lo mismo- sustituyendo el mundo del más o menos, que es el de nuestra vida cotidiana, por un universo de mediciones y precisión. En efecto, esta sustitución excluye automáticamente del universo todo lo que no se puede someter a una exacta medición (véase la nota al final de este apéndice).

La búsqueda de la precisión cuantitativa, del descubrimiento de datos numéricos exactos, de estos "números, pesos, medidas" con los que Dios ha construído el mundo, es la que constituye la meta y determina, por tanto, la estructura misma de las experiencias de la ciencia moderna. Este proceso no coincide conlas investigaciones en el dominio de la experiencia en el sentido general del término: ni los alquimistas, ni Cardano, ni Giambattista Porta -ni siquiera Gilbert- buscan resultados matemáticos. Y es porque consideran el mundo como un conjunto de cualidades más que un conjunto de cantidades. En efecto, lo cualitativo es incompatible con la precisión de la medición. En este aspecto no hay nada más significativo como el hecho de que Boyle y Hooke (ambos investigadores experimentales de primera magnitud, que conocían el valor de las mediciones precisas) hagan un estudio puramente cualitativo de los colores espectrales. No hay nada que revele mejor la incomparable grandeza de Newton que su capacidad de trascender el dominio de la cualidad para penetrar en el dominio de la realidad física, es decir, en lo que se encuentra cuantitativamente determinado. Pero, además de las dificultades teóricas (conceptuales) y psicológicas que impiden la aplicación de la idea de rigor matemático al mundo de la percepción y de la acción, la realización efectiva de mudiciones correctas tropieza, en el siglo XVII con dificultades técnicas de las que sólo tenemos, me temo, viviendo en un mundo agobiado y dominado por los instrumentos de precisión, una idea muy remota. Incluso los historiadores que -como señalaba I. Bernard Cohen- nos presentan demasiado a menudo los experimentos decisivos del pasado no tal como *fueron* realizados *entonces*, sino como *son* realizados *ahora* en nuestros laboratorios y universidades, no tienen una conciencia plena de las condiciones reales, y, por tanto, del auténtico sentido de la experimentación en la época heroica de la ciencia moderna. Y con el propósito de contribuir a la historia de la constitución de los métodos experimentales de la ciencia, voy a tratar de describir la historia del primer intento consciente y seguido de una medición experimental; la medición de una constante universal: la constante de la aceleración de los cuerpos que caen libremente.

Todo el mundo sabe la importancia histórica de la ley de la caída, primera de las leyes matemáticas de la nueva dinámica desarrollada por Galileo, la ley que establecía, de una vez para siempre, que "el movimiento está sometido a la ley del número". Esta ley presupone que la pesantez, aunque en absoluto sea una propiedad esencial de los cuerpos (y cuya naturaleza, además, ignoramos), no obstante, es su propiedad universal (todos los cuerpos son "pesados" y no los hay "ligeros"); por otra parte, para cada uno de ellos constituye una propiedad invariable y constante. Sólo en esas condiciones la ley galileana es válida (en el vacío).

Sin embargo, a pesar de la elegancia matemática y de la verosimilitud física de la ley galileana, es evidente que, considerada en sí misma, *no es la única ley posible**. Además, no nos encontramos en el vacío, sino en el aire; no en el espacio abstracto, sino en la Tierra, y quizá incluso en una Tierra que se mueve. Es absolutamente evidente que es indispensable una verificación experimental de la ley, lo mismo que de su posibilidad de aplicarla a los cuerpos que caen en nuestro espacio, *in hoc*

* El subrayado es nuestro.

*vero aere**. Como es indispensable la determinación del valor concreto de la aceleración (g).

Sabemos la extremada ingeniosidad con la que Galileo, incapaz de realizar mediciones directas, sustituye la caída libre por el movimiento en el plano inclinado, por un lado, y por el del péndulo, por otro. Es justo reconocer su inmenso mérito y su genial intuición, y el hecho de que estén basados en suposiciones erróneas no los menoscaba en absoluto*. Pero es igualmente justo revelar la asombrosa y lamentable pobreza de los medios experimentales que se encontraban a su disposición...

Nota. Al pié, Koyré hace aquí la siguiente aclaración que nosotros reproducimos por considerar que puede ser de particular interés para los estudiantes de ciencias naturales a quienes, esencialmente, va dirigido este trabajo; asimismo, agregamos al final un pequeño comentario.

En realidad, esto no se aplica más que a las ciencias denominadas "exactas" (fisicoquímicas), por oposición a la "ciencia" o historia calificada como "natural" (a las ciencias que tratan del mundo "natural" de nuestra percepción y de nuestra vida), que no rechazan -ni podrían hacerlo- la cualidad, para sustituir por un mundo de mediciones exactas el mundo del "más o me-

* "dentro del verdadero aire"

* Los experimentos de Galileo se fundan en las siguientes suposiciones: a) que el movimiento de una bola rodando a lo largo de un plano inclinado es equivalente a un cuerpo deslizándose (sin fricción) sobre el mismo plano; b) que el movimiento pendular es perfectamente isócrono. Al ser este isocronismo una consecuencia de su ley de la caída, una confirmación experimental del primero confirmaba esta última. Desgraciadamente no es posible ninguna medición directa de los períodos consecutivos de oscilación: sencillamente, porque no hay relojes con qué medirlos. Por lo tanto, Galileo -y hay que admirar su genio experimentador- sustituye la medición directa por la comparación del movimiento de dos péndulos diferentes (de igual longitud) cuyas péndolas, aunque tengan oscilaciones que se realicen con diferentes amplitudes, no dejan de llegar en el mismo momento a su posición de equilibrio (el punto más bajo de la curva). La misma experiencia, realizada con péndulos cuyas péndolas están constituídas por cuerpos de pesos diferentes, demuestra que los cuerpos pesados y ligeros (tanto individual como específicamente) caen a la misma velocidad. Cf. Discorsi, pp. 128 ss. (Nota de A. Koyré).

nos". De todos modos, ni en botánica, ni en zoología, ni siquiera en fisiología y en biología, las mediciones exactas han desempeñado papel alguno; sus conceptos siguen siendo los conceptos no matemáticos de la lógica aristotélica.

Ahora el comentario: a despecho de lo categórico de la afirmación citada inmediatamente arriba, creemos que, en el dominio de las "ciencias naturales", se han venido haciendo serios intentos por matematizar el mundo del "más o menos" desde mediados del siglo pasado y aún desde antes; las aplicaciones de la teoría de las probabilidades a la genética de poblaciones y a la teoría de la evolución biológica constituyen ejemplos exitosos de tales intentos; además -como el propio Koyré reconoce renglones adelante al citar la teoría del color desarrollada por Newton- ramas completas del conocimiento "natural" que "escapaban a la ley del número" han sido establecidas de manera rigurosamente matemática. De hecho, el proceso de adaptación del "modo de pensar del matemático" a la biología es ya viejo de cincuenta años: en efecto, en los años 30, Ludwig von Bertalanffy comenzó a desarrollar la teoría general de los sistemas como forma inicial de biología teórica; sus aplicaciones al estudio de la dinámica de poblaciones o el crecimiento de los organismos son de uso corriente en, por ejemplo, la biología pesquera. Sin embargo, también somos partidarios de una actitud humilde respecto a los alcances de la matemática actual en la solución de los grandes problemas de las ciencias naturales: si bien es cierto que en no pocas ocasiones las auxilia y aún les sugiere líneas de investigación o desarrollo, es posible que la extraordinaria complejidad de los procesos vitales no sea matematizable; en cualquier caso, los intentos no deben abandonarse.

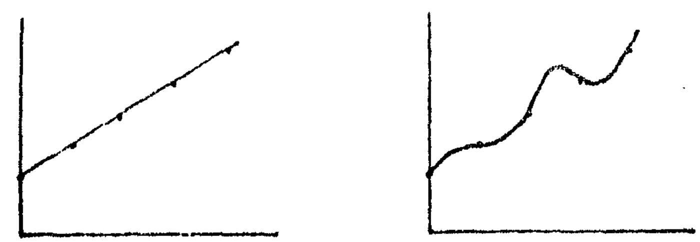
N O T A S

1 Pueden consultarse, por ejemplo, los siguientes: 1) Instituto de Filosofía, Academia de Ciencias de la URSS. Metodología del Conocimiento Científico. Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 1978. 2) Koyré A. Estudios de Historia del Pensamiento Científico. Siglo XXI Editores. Madrid, 1980. 3) Koyré A.. Estudios Galileanos. S. XXI Editores. Madrid, 1980. 4) Koestler A. Los Sonámbulos. CONACYT, México, 1981. 5) Bernal J. D. La Ciencia en la Historia. Editorial Nueva Imagen-UNAM, México, 1979.

2 Aunque no hay razón alguna para preferir cierta dirección, la costumbre es dibujar un eje horizontal -en el que los números positivos se encuentran a la derecha del cero- y otro vertical en el que el sentido positivo es hacia arriba.

3 Usamos aquí la notación común en la teoría de conjuntos: lo que está entre llaves describe los elementos del conjunto, a través de su explicitación o bien mediante la enunciación de una propiedad característica que permite decidir, sin lugar a dudas, qué y qué no es un elemento del conjunto.

4 Conviene aquí llamar la atención de los lectores sobre el siguiente hecho: cuando la variable independiente X toma valores de *manera continua*, hay una limitación física evidente: sólo es posible tener un número *finito* de mediciones que da lugar a una incertidumbre inevitable en lo que se refiere al comportamiento general (más allá de los datos observados que son, necesariamente, muy pocos) del fenómeno. Así, aunque pueda parecer que una colección finita de puntos se "ajusten" a la forma de cierta curva, *nada garantiza* que, efectivamente, sea éste el comportamiento *para todos los posibles valores de* X. Por ejemplo, los puntos que se muestran en las siguientes figuras pueden pertenecer a diferentes tipos de curva y, para cierto rango de valores de X, alguna de ellas puede corresponder a un "buen modelo" del comportamiento de Y = Y(X); sin embargo, ¿será posible establecer categóricamente *cuál de los dos modelos es el que "en verdad" describe* Y = Y(X)?



Dos curvas que se ajustan a los mismos "puntos experimentales" ¿qué decide cuál de los dos modelos es mejor?

La respuesta es que *no*. Sin embargo, como dice Owen Gingerich (Cf. Gingerich O., The Galileo Affair, Scientific American, Vol 247 No. 2, pp 119 ss., New York, 1982): "... La *inducción* es el proceso de obtener conclusiones generales a partir de ejemplos particulares; es, creo, el proceso básico mediante el cual tiene lugar el aprendizaje. Considérese, por ejem

plo, la reproducción de las aves: las gallinas ponen huevos, los avestruces ponen huevos, los petirrojos también y así por el estilo y de aquí, generalizamos a que todas las aves se reproducen poniendo huevos. Sin embargo, no hemos probado nuestra conclusión pues existe la posibilidad de encontrar un ejemplo que demuestre lo contrario. Por esta razón, como sabían los filósofos escolásticos de la época de Galileo, el razonamiento inductivo *no puede conducir a la verdad indudable.*"
"... El proceso del razonamiento de Galileo era similar a la inducción pero más elaborado. Era, en estado embrionario, lo que ahora se llama *método hipotético-deductivo en el que un modelo hipotético se somete a pruebas y se torna cada vez más verosímil conforme pasa con éxito cada una de ellas...*" (subrayados nuestros).

5 Revísese la discusión antecedente a las ecuaciones (7) del capítulo I, pág. I.10. *supra.*

6 En general, se dice que la variable Y *es proporcional a* X si y sólo si existe una constante k -llamada *constante de proporcionalidad*- tal que

$$Y = k\ X$$

Así, resulta que las ecuaciones (2) establecen que S, I y M son, respectivamente proporcionales a n, N y P con la salinidad, la tasa de natalidad y la biomasa como constantes de proporcionalidad para cada caso.
Nótese que si Y es proporcional a X, entonces X es proporcional a Y con constante de proporcionalidad igual a 1/k cuando $k \neq 0$. Por esta razón, es frecuente decir que dos variables *son proporcionales.*

7 Obsérvense las diferencias entre los valores que pueden ser tomados por las variables de las dos primeras funciones - $S=S(n)$ y $M=M(P)$ - y los que se le pueden asignar a I y a N en la tercera función: para que tengan sentido desde el punto de vista biológico, éstas sólo pueden ser enteras en tanto que aquéllas varían continuamente a lo largo de los números reales. Así, al aplicar la fórmula $I(N)=qN$, obtenemos valores fraccionarios sin significado para el fenómeno (crecimiento de una población) que, para todo fin práctico, *redondearemos* al entero más próximo cuando la parte decimal sea distinta de .5 y al mayor entero más próximo si esta parte decimal vale .5 Por ejemplo: $I(500)=47.5$ se redondea a 48; $I(250)=23.75$ se toma como 24 e $I(750)=71.25$ como 71.

8 Nótese que en estas gráficas no se usan las mismas escalas en ambos ejes, a pesar de que las variables se miden en las mismas unidades; la razón es ésta: los órdenes de magnitud de cada par de variables difieren entre sí bastante; por ejemplo, en tanto que la masa de sólidos en suspensión S no llega a 1 gr, la masa del agua varía entre 0 y 10 gr.

9 Dos triángulos ABC y A'B'C' son *semejantes* si y sólo si

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \qquad (*)$$

ecuación en la que la testa se lee como "el segmento". Es posible probar que esta condición es equivalente a que los ángulos internos de ambos

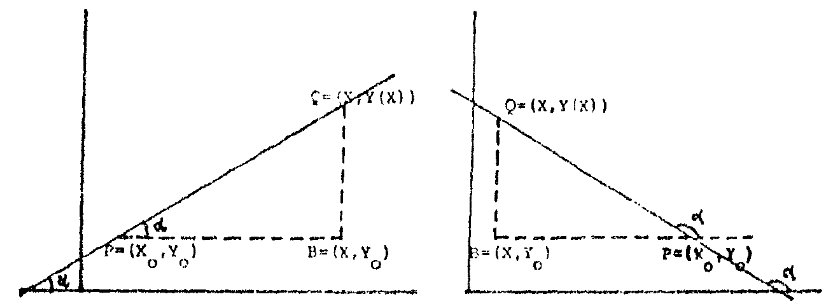
triángulos sean iguales, es decir que ABC es semejante a A'B'C' si y sólo si $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$ y $\angle CAB = \angle C'A'B'$.
Además, (*) implica que los lados de dos triángulos semejantes son proporcionales entre sí; en efecto: sea k el valor numérico de caulquiera de las razones que aparecen en la ecuación (*), entonces:

$$\overline{AB} = k\ \overline{A'B'} \ ; \quad \overline{BC} = k\ \overline{B'C'} \quad y \quad \overline{CA} = k\ \overline{A'B'} \qquad (**)$$

10 Si se usa la misma escala en ambos ejes, la razón de cambio de Y con respecto a X:

$$\frac{Y(X) - Y_0}{X - X_0} \ , \qquad X \neq X_0$$

es igual al cateto opuesto al ángulo α dividido entre el cateto adyacente en el triángulo PBQ (ver figura); como el eje horizontal y la recta PB son paralelas, α es igual al ángulo que forma la recta L con la dirección positiva de dicho eje que, como se menciona en el texto, se llama *ángulo de inclinación de L.*



(a) (b)

así, resulta que:

$$\frac{Y(X) - Y_0}{X - X_0} = \tan \alpha$$

y un par de consecuencias de este hecho son que:

$0 \leq \alpha < 90°$ si y sólo si la pendiente de L es no negativa
y $90° < \alpha < 180°$ si y sólo si la pendiente de L es negativa.

(¿por qué?).

11 Urquhart N.S. y D.J. Clow Op. Cit. Ejercicio 14, pág. 109.

12 Obsérvese que, por comodidad, en la figura 3.4. hemos dibujado la intersección de lo ejes en (0,70) por ser de interés los valores de C que rebasan el valor C = 70 o, cuando mucho, que le son cercanos.

13 Esta expresión puede ser interpretada de diferentes maneras y conviene precisar de una vez en qué sentido la usaremos en este texto; sean

$$X_1, \ldots, X_n$$

valores de la variable independiente para los cuales *se observaron los valores*

$$Y(X_1), \ldots, Y(X_n)$$

respectivamente. Si

$$Y_c(X_1), \ldots, Y_c(X_n)$$

denotan los correspondientes *valores calculados*, *la suma de cuadrados:*

$$(Y_c(X_1) - Y(X_1))^2 + \ldots + (Y_c(X_n) - Y(X_n))^2 \qquad (*)$$

es un estimador de "qué tanto se parecen los valores calculados a los observados". Cuando esta suma es *mínima*, se obtiene la mejor aproximación posible de acuerdo a este estimador. Hay un método numérico mediante el cual, a partir de las parejas de la forma $(X_i, Y(X_i))$, se determinan los únicos valores de a y b que dan esta mejor aproximación (véase el formulario del Método de Mínimos Cuadrados que se da en el Apéndice C del capítulo V.).

14 Adaptado del Manual de Introducción al Método Experimental (IME) de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

15 Véase, por ejemplo, el de Lehmann Ch. H. Geometría Analítica. UTEHA, México, 1965.

16 De hecho, son potenciales las funciones tales que

$$Y(X) = k\,X^n$$

para cualesquiera k y n reales (no necesariamente n debe ser entera). Pero la discusión general de éstas, también se diefiere para el capítulo V (Cf. Apéndice B del capítulo V, pp V. 49 ss. *infra*).

17 Cf. Lehmann Ch. H. Op. cit.

18 Se dice que una curva *es simétrica con respecto a un punto O* -llamado entonces *centro de simetría*- si y sólo si, para cada punto A de la curva, existe otro punto A' también contenido en ella y llamado *el simétrico de A con respeto a O*, tal que *O* es el punto medio del segmento que une A con A'.

19 Se dice que una curva es *simétrica con respecto a una recta L* -llamada *eje de simetría de la curva*- si y sólo si, dado un punto A cualquiera de la curva, existe otro punto A'-igualmente contenido en la curva y llamado *el simétrico de A con respecto a L*- tal que *L* es perpendicular al segmento que une A con A' en su punto medio.

representa el grosor, entonces:

$$I(g) = I_0 e^{-kq} \qquad (*)$$

donde I_0 es la intensidad luminosa incidente en la superficie del material y -k es el exponente que hay que ponerle a e para obtener 1-q, siendo q el porcentaje de luz absorbido por una u. de g.

En el mar, se ha observado que la luz incidente del Sol reduce su intensidad original a la mitad a los 10 pies de profundidad. Si se toma este valor como u. de g., calcule el valor de k en la ecuación (*) y úsela para responder a las siguientes preguntas:

- ¿A qué profundidad se tiene una intensidad luminosa igual a 1/32 de I_0?
- ¿Cuál es la intensidad luminosa a los 25 pies de profundidad?
- Según el modelo, ¿llega a suceder que I vale 0? ¿Contrasta esto con lo que ocurre en realidad?

4.4. Suponga que la presión atmosférica P [mm Hg] decrece exponencialmente con la altitud h [miles de m] según la ecuación:

$$P(h) = P_0 e^{-rh} \qquad (**)$$

si se sabe que la presión al nivel del mar es de 760 mm Hg y en la ciudad de México -a 2240 m sobre el nivel del mar- es de 540 mm Hg, calcule el valor de -r en la ecuación (**) y úsela para calcular la presión en la cima del Monte Everest (8848 m de altitud) y en el valle de Mexicali (4 metros por debajo del nivel del mar); asimismo, encuentre la altitud para la cual la presión es ½ de la presión al nivel del mar.

4.5. Según la *Ley de Enfriamiento de Newton*, la temperatura T de un cuerpo que se enfría depende del tiempo t y de la temperatura ambiente T_a y viene dada por la fórmula:

$$T(t) = T_a + C e^{-kt} \qquad (***)$$

donde las constantes C y k se determinan usando los datos particulares de cada caso.

Un cuerpo se calienta a 110 °C y se pone en aire a 10 °C. Al

cabo de una hora su temperatura es de 60 °C. Considere la ecuación (***):

a. Muestre que C = 100. Sugerencia: observe que T(0)=110 °C.
b. Use el resultado del inciso a. y el hecho de que T(1)=60 °C para probar que $k=\ln 2$.
c. Calcule los porcentajes de enfriamiento durante la primera y la segunda horas. ¿Es la temperatura una variable que decrezca de manera porcentualmente constante por u. de t.?
d. Considere la nueva variable $\bar{T} = T - T_a$. Diga si ésta sí disminuye de manera porcentualmente constante por u. de t.
e. Dibuje aproximadamente la gráfica de la función T=T(t) para este caso particular; en base a ella diga ¿cuál es el límite de T cuando t tiende a infinito? Interprete físicamente su respuesta. Sugerencia: observe que, en el modelo, se supone que la temperatura del medio es constante (¿qué tan cierta es esta hipótesis?).

$$(\exp_b x)^n = \exp_b nx \qquad ; \; \log_b A^n = n \log_b A$$

$$\sqrt[n]{\exp_b x} = \exp_b \frac{x}{n} \qquad ; \; \log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}$$

Terminamos la sección y el capítulo con la descripción somera del aspecto general de las gráficas de las funciones exponenciales; puesto que son modelos de crecimiento o disminución permanentes, las curvas del tipo

$$Y(X) = b^{\pm X} \quad ; \quad b > 1$$

son *monótonamente crecientes o decrecientes*, según el signo del exponente; la ordenada al origen de todas ellas es $b^0 = 1$ y, cuando el exponente es muy grande y negativo, la curva se acerca asintóticamente a cero *por arriba*; vale decir, que

$$\lim_{X \to -\infty} b^X = 0 \qquad y \qquad \lim_{X \to \infty} b^{-X} = 0$$

todo lo cual da como gráficas típicas, curvas como las que se exhiben en la siguiente

a. Exponencial creciente   b. Exponencial decreciente

Figura

Gráficas de funciones exp.

CUESTIONARIO

4.1. A partir de las ecuaciones (30) a (32), obtenga las ecuaciones (33) y (34) del texto.

4.2. Los datos que se dan en las siguientes tablas corresponden a reacciones de primer orden; en ambos casos, las sustancias reaccionantes son gaseosas y su concentración en el tiempo t se mide en unidades de presión [mm Hg]. La tabla a. corresponde a la descomposición del cloroformato del triclorometilo en fosgeno a 280 °C; la tabla b. es la descomposición, a 500 °C, de la etilamina en etileno y amonia[14].

Tabla a.

t [sg]	0	51	206	454	751	1132	1575	2215
A(t) [mm Hg]	15.03	14.58	13.32	11.49	9.73	7.79	6.08	4.17

Tabla b.

t [min]	0	1	4	10	30	40
A(t) [mm Hg]	55	50	38	21	3	1.5

Para cada una de estas reacciones, vacíe los datos en sendos planos cartesianos y trace una curva monótonamente decreciente, suave y continua, que pase "lo más cerca que sea posible" de los puntos experimentales. Luego, use dicha curva para estimar la tasa de descomposición por u. de t.; finalmente, encuentre la ecuación exponencial del tipo de la (35) que corresponda a cada reacción; haga tablas de valores observados y calculados.

4.3. De acuerdo a la *Ley de Absorción de Lambert*, el porcentaje de luz incidente absorbida por una delgada capa de material translúcido, es proporcional al grosor de la capa: esto significa, en particular, que por cada unidad de grosor (u. de g.) el porcentaje absorbido es constante; de esta suerte, si I [unidades de luminosidad] denota la intensidad luminosa y g [unidades de distancia], general.

Sea b un número positivo cualquiera. Si A es mayor que cero, el exponente que hay que ponerle a b para obtener A se llama el *logaritmo base* b *de* A y se denota mediante el símbolo:

$$\log_b A$$

En otras palabras:

$$x = \log_b A \iff b^x = A \qquad (36)$$

En el caso de que la base sea el número e, los logaritmos se llaman *logaritmos naturales* y se denotan mediante alguno de los siguientes símbolos:

$$\ell n\ x, \quad \mathrm{Log}\ x, \text{ o } \log_e x$$

Así, tendríamos que como

$$e^Q = 1.2 \quad \text{y} \quad e^{-P} = 0.9$$

entonces:

$$Q = \ell n\ 1.2 = 0.182322$$

y

$$-P = \ell n\ 0.9 = -0.105360$$

Además, el tiempo necesario para que se duplicara la población del ejemplo de la sección 3. sería

$$t = \frac{\ell n\ 2}{\ell n\ 1.2}$$

y el que se requeriría para que A se redujera al 50% en el ejemplo de la sección anterior, vendría dado por

$$t = \frac{\ell n\ \frac{1}{2}}{\ell n\ 0.9}$$

Ahora bien, es posible definir, en general *la función exponencial de base* b para cualquier real positivo, de la siguiente manera:

$$\exp_b x = b^x \qquad (37)$$

para cualquier real x.

En caso de que la base sea el número e se obtiene *la función exponencial natural* y en la expresión (37), se prescinde del subíndice para denotarla, de modo que:

$$\exp x = e^x$$

Por el estilo, la expresión (36) sirve para definir las *funciones logarítmicas de base* b para cualquier real positivo A.

Como se verá en el capítulo V., las logarítmicas son las *funciones inversas* de las exponenciales y, por esto, las propiedades algebraicas de unas pueden establecerse equivalentemente en términos de las otras; este es el caso de las llamadas *leyes de los logaritmos o leyes de los exponentes* que enunciamos por pares en la siguiente proposición. Su uso, descubierto por el matemático escocés John Napier (1550-1617), simplificó enormemente los cálculos aritméticos y fue un agente revolucionario tanto de la matemática como de la astronomía, rama a la que se aplicaron preferentemente.[13]

Proposición. Sean x,y y n números reales cualesquiera. Sean A, B y b números reales positivos cualesquiera, entonces:

$$(\exp_b x)(\exp_b y) = \exp_b(x+y) \quad ; \quad \log_b AB = \log_b A + \log_b B$$

$$\frac{\exp_b x}{\exp_b y} = \exp_b(x-y) \quad ; \quad \log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

$$A(t) \approx A_0 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{(1+m)Pt} \tag{33}$$

de tal suerte que, luego de varias aplicaciones de las leyes de los exponentes, puede probarse que:

$$A(t) \approx A_0 \left[\frac{1}{1+\frac{1}{m}} \; \frac{1}{(1+\frac{1}{m})^m} \right]^{Pt} \tag{34}$$

cuya aproximación al valor exacto de A(t) mejora conforme m crece más allá de toda cota; luego, conviene saber adónde va la expresión entre corchetes de la ecuación (34) cuando m tiende a infinito. Pero es claro que el primer factor tiende a 1 (¿por qué?), mientras que el segundo lo hace al recién presentado número e y, por lo tanto:

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{e}\right)^{Pt}$$

pero como $\frac{1}{e} = e^{-1}$, tendremos, finalmente, que:

$$A(t) = A_0 \; e^{-Pt} \tag{35}$$

es la fórmula que busacamos en donde $-P$ es el exponente que hay que ponerle a e para obtener $1 - p$.

Así, por ejemplo, en el hipotético caso de que en un segundo, el 10% de las moléculas de una sustancia reaccionaran, una "tabla de potencias del número e" indicaría que el valor de $-P$ es:

$$-P = -0.105360$$

de manera que la concentración A de una tal sustancia en el tiempo t, después de que la concentración fue A_0, viene dada por:

$$A(t) = A_0 \; e^{-0.105360t}$$

o, equivalentemente, por:

$$A(t) = A_0 \; (0.9)^t$$

Una reacción química cuyo mecanismo implica un comportamiento como el descrito por la ecuación (35), recibe el nombre de *reacción de primer orden*; y a mayor parte de las reacciones que involucran una sola sustancia reaccionante son de este tipo; en particular, aquéllas que se deben al decaimiento radioactivo.

Otros fenómenos se comportan de manera similar y cumplen la hipótesis fundamental aunque la variable independiente no es el tiempo; tal es el caso, por ejemplo de cómo varía la intensidad luminosa I de un haz de luz que atraviesa una capa de material translúcido -como el agua de mar, por ejemplo- en función del grosor de la capa; asimismo, si se hace caso omiso del efecto de la temperatura, la humedad y los movimientos de las masas de aire, en una aproximación elemental, la presión atmosférica disminuye de manera porcentualmente constante por unidad de altitud.

Antes de plantear el cuestionario de esta sección, es preferible presentar la siguiente, al final de la cual enunciaremos las preguntas concernientes a ambas.

4. Los Logaritmos.

La necesidad de resolver ecuaciones del tipo (26) o (25) en las que "la incógnita" es un exponente o "parte de" un exponente, es común; por ejemplo:

- ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población se duplique si su tasa de crecimiento por u. de t. es de 0.2?
- ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que la concentración de una sustancia reaccionante que disminuye en un 10% cada u. de t., se reduzca a la mitad?

son un par de problemas cuya solución depende de que seamos capaces de despejar t en las siguientes ecuaciones:

$$2\,N_0 = N_0\; e^{0.182322t} \qquad \text{y} \qquad \tfrac{1}{2} A_0 = A_0\; e^{-0.105360t}$$

respectivamente. De hecho, la propia búsqueda de los coeficientes de t en base a las tasas de cambio por u. de t., nos llevó a preguntarnos por "el exponente que hay que ponerle a e para obtener tal o cual valor". Conviene entonces, tratar el problema en

Lo que significa, por ejemplo, que si cada molécula tiene una probabilidad del 10% de descomponerse durante cada seg. que dure la reacción, entonces aproximadamente la décima parte de las moléculas presentes se descompondrán efectivamente durante cada lapso con esta duración.[12]

Supongamos entonces que denotamos con la literal A a la concentración de la sustancia reaccionante y que, cuando $t=0$, hay una concentración inicial de A_0. (Nótese que A es una medida del número de moléculas de la sustancia *que no han reaccionado*).

Nuestra intención ahora es encontrar una fórmula explícita para la función

$$A = A(t)$$

para cualquier valor de t posterior al momento en que la concentración era A_0.

Supongamos que, por cada u. de t. transcurrida, A disminuye en una tasa p; es decir, que

$$\frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)} = -p$$

que significa, en particular, que:

$$A(1) = A_0 (1 - p)$$

de donde se sigue que si k es cualquier entero positivo, entonces:

$$A(k) = A_0(1 - p)^k \tag{28}$$

y que si p_s denota la tasa en que disminuye A durante un s-ésimo de la u. de t., entonces:

$$A(\frac{r}{s}) = A_0(1 - p_s)^r \tag{29}$$

para cualquier par de enteros positivos r y s.

Desde luego, el argumento algebraico detallado que justifica ls ecuaciones (28) y (29) es completamente análogo al que nos llevó, en la sección anterior, a establecer las fórmulas (13) y (16); de hecho, las semejanzas van más allá: es posible probar que cuando s tiende a infinito, si bien p_s tiende a cero, la sucesión de productos sp_s se aproxima a un número diferente de cero, que denotaremos en lo sucesivo mediante la literal P. Así,

$$P = \lim_{s \to \infty} sp_s$$

de modo que, para valores muy grandes de s,

$$\frac{P}{s} \approx p_s$$

y, por consiguiente, cuando t es aproximadamente igual al racional r/s (aunque la propia t no sea racional), se tiene que

$$A(t) \approx A_0(1 - \frac{P}{s})^r \tag{30}$$

siendo mejor esta aproximación cuando s es muy grande.

Introduzcamos ahora la nueva variable m que satisfaga que

$$\frac{P}{s} = \frac{1}{1 + m}$$

m crece con s, de hecho:

$$m = \frac{s}{P} - 1 \tag{31}$$

Como $t \approx r/s$, entonces

$$r \approx st$$

y

$$r \approx (1+m)Pt$$

de donde, al sustituir en la ecuación (30), tenemos que:

$$A(t) \approx A_0(1 - \frac{1}{1+m})^{(1+m)Pt} \tag{32}$$

y, de aquí, que:

$$e^{Qt} = (e^{Q})^{t}$$

de manera que, finalmente, la regla de correspondencia de la relación funcional entre el tamaño de la población N y el tiempo t es una en la que la variable independiente aparece como exponente de una cierta base fija (1+q o, equivalentemente, e^{Q}); tal tipo de funciones reciben, por razones obvias, el nombre genérico de *funciones exponenciales*.

CUESTIONARIO

2.1. Describa las hipótesis biológicas fundamentales del modelo de crecimiento ilimitado de una población (modelo de Malthus) y diga si tales suposiciones son concebibles en condiciones "naturales", en general.
2.2. ¿Cuál es la hipótesis aritmética fundamental del modelo?
2.3. Consiga una tabla de las poblaciones de México desde 1900 a la fecha según los censos decenales que se han realizado desde el inicio del siglo . Considere una década como u. de t.[12]
a. Calcule las tasas de crecimiento de la población por u. de t. durante cada una de las 8 décadas que van de 1900 a 1980. ¿Obtuvo alguna tasa negativa? Si sí, explique la razón. b. ¿Existe alguna diferencia notable entre las tasas de crecimiento antes y después del descubrimiento de la penicilina (alrededor de 1940)? c. Suponga que durante las últimas cuatro décadas, la tasa de crecimiento ha permanecido constante e iguálela al promedio de las correspondientes a estas cuatro u. de t. Con este valor de q, determine el parámetro Q del modelo de Malthus si se supone que t=0 en 1940. Con la fórmula (26) y los valores adecuados, haga una tabla de valores observados y valores calculados para las poblaciones de México.
2.4. Construya paso a paso, un modelo malthusiano para el crecimiento del peso W de un animal con la edad t. Haga una crítica, para este caso, de la hipótesis sobre la constancia de la tasa de crecimiento por u. de t. Suponga que q = 12% y calcule las correspondientes a las tablas 2.1. y 2.2..

2.5. Se dice que una sucesión numérica es *una progresión aritmética* si y sólo si cada término se puede obtener del anterior, mediante *la suma de una cantidad constante llamada "razón de la progresión"*; análogamente, se dice que una sucesión numérica es *una progresión geométrica* si y sólo si cada término se obtiene del anterior mediante *el producto por una cantidad constante llamada*, asimismo, *razón de la progresión*. Según estas definiciones, explique el sentido de las afirmaciones de Malthus copiadas en el epígrafe.
2.6. Obsérvese que las reglas de correspondencia del tipo (26) o (27) están bien definidas para valores negativos del argumento t. ¿Cómo se interpretarían fenomenológicamente los valores de N(t), si t es menor que cero? Dibuje la gráfica de la fórmula (27) en el intervalo que va de -5 a 5 cuando q = 20%. ¿Cuánto vale la ordenada al origen de la curva N = N(t)?

3. Reacciones de Primer Orden.

Consideraremos aquí una reacción química de tipo muy simple, en la que sólo reacciona una sustancia irreversiblemente hasta agotarse. Según el mecanismo (fisicoquímico) de la reacción, la concentración de la sustancia reaccionante variará con el tiempo de reacción de diferente manera. Así, por ejemplo, no es lo mismo cuando la sustancia se descompone merced al efecto de un agente externo como la luz o un catalizador que cuando es el choque intermolecular lo que produce el cambio; en el caso que interesa a nuestra discusión, supondremos *que el proceso de la reacción consiste en la descomposición espontánea y azarosa de las moléculas de la sustancia*; esto es, que cada molécula inicialmente presente tiene *la misma probabilidad de reaccionar que cualquier otra molécula durante una u. de t.* Como en el caso del modelo malthusiano, esto se traduce en la siguiente

Hipótesis fundamental: el porcentaje en que disminuye la concentración de la sustancia reaccionante en una u. de t. permanece constante.

$$(1 + \frac{1}{w})^w$$

cuando w (y, consecuentemente s) tiende a infinito. Veamos lo que ocurre en la siguiente

Tabla 2.2.

s	$w = \frac{s}{Q}$	$(1 + \frac{1}{w})^w$
1	5.484802	2.505770
10	54.84802	2.693909
10^2	548.4802	2.715808
10^3	5484.802	2.718034
10^4	58488.02	2.718227

Así, ocurre que cuando $w \longrightarrow \infty$, $(1 + \frac{1}{w})^w$ tiende a un valor cercano a

2.718...

y es posible probar que esto es *independiente del valor de Q*; de hecho, este límite es uno de los más importantes de la matemática y se denota de manera especial mediante la literal e [11]. Así, *por definición*,

$$e = \lim_{w \to \infty} (1 + \frac{1}{w})^w \qquad (24)$$

como el famoso π, el ilustre *e es un número irracional* cuya expansión decimal no obedece regla alguna de periodicidad y que, para gran cantidad de fines prácticos, puede considerarse como aproximadamente igual a 2.718 de manera similar a como π se toma igual a 3.1416

Terminemos ahora con el trabajo de simplificación de la fórmula (23): puesto que en ella la exactitud es mayor cuando w es muy grande, *convendremos* en que

$$N(t) = N_o[\lim_{w \to \infty} (1 + \frac{1}{w})^w]^{Qt} \qquad (25)$$

de modo que, al sustituir finalmente la definición (24) en la última ecuación, se tiene:

$$N(t) = N_o e^{Qt} \qquad (26)$$

para cualquier t.

Indudablemente, la fórmula (26) es mucho más práctica y general que sus antecesoras: no hace falta, para aplicarla, calcular tasas a cada paso, es suficiente con poder calcular *las potencias de e* y, afortunadamente este bicho es tan importante que se han elaborado tablas muy precisas de sus potencias y casi cualquier calculadora puede hacerlo. Además, tal facilidad de cálculo permite determinar Q sin necesidad de aproximarla mediante las q_s; veamos.

$$N(1) = N_o(1+q) = N_o e^Q$$

en donde se suponen conocidos los valores de la población inicial y de la tasa de crecimiento por u. de t..

Por consiguiente, *Q es el exponente que hay que ponerle al número e para obtener* 1+q; de manera que, en el caso particular que desarrollamos aquí,

$$Q = 0.182322$$

porque ése es el valor que señalan las tablas para el cual

$$e^Q = 1.2$$

Por consiguiente, la fórmula que modela el crecimiento de una población con tasa de crecimiento del 20% por u. de t. será:

$$N(t) = N_o e^{0.182322\,t}$$

En realidad, la ecuación (26) es una forma equivalente de la generalización que "era de esperarse" tuviera la ecuación (19), a saber:

$$N(t) = N_o(1 + q)^t \qquad (27)$$

puesto que e^Q y 1+q son dos formas distintas de escribir el mismo número y, según las leyes de los exponentes:

Es más, basta considerar que s toma valores iguales a las sucesivas potencias de 10. Como lo que nos interesa es el *comportamiento numérico* de las q_s cuando cambia s, supondremos que la tasa de crecimiento por una u. de t. completa es del 20% (esto es, que $q = 0.2$).

Sea t cualquier valor del tiempo para el cual es válido el modelo. Aún en el caso de que t no fuera racional, siempre sería posible aproximarlo mediante una razón de enteros, de manera que supondremos también que

$$t \approx \frac{r}{s}$$

Veamos cómo se comporta la sucesión de las q_s cuando s tiende a infinito:

Tabla 2.1.

s	$q_s = \sqrt[s]{1 + 0.2} - 1$
10	0.018399376
10^2	0.001824879
10^3	0.000182338
10^4	0.000018232
10^5	0.000001823
10^6	0.000000182
10^7	0.000000018

Como era de esperarse (¿por qué?), q_s tiende a cero cuando s crece mucho; sin embargo, lo hace de manera singular: de modo tal que *los productos de la forma* sq_s se acercan a un valor aproximadamente igual a 0.1823 que llamaremos Q; abreviadamente, esto lo denotaremos de la siguiente manera:

$$Q = \lim_{s \to \infty} sq_s \qquad (21)$$

y diremos que Q *es el límite de la sucesión* sq_s para denotar la idea

de que cuando s *crece más allá de cualquier cota,* sq_s *se acerca a* Q *tanto como se quiera.* En particular, para valores de s mayores que, digamos, 10^4,

$$sq_s \approx Q$$

y, por lo tanto,

$$q_s \approx \frac{Q}{s}$$

de manera que, si conocemos Q [10], podemos obtener buenas aproximaciones de q_s para s grande, con sólo dividir Q entre s. Sin embargo, tampoco es ésta la mayor utilidad de las q_s. Para llegar a ella, hace falta hacer algunos *cambios de variable* -esto es, llamar a ciertos términos con nuevos nombres- y reacomodar ciertas cosas en la fórmula:

$$N(t) \approx N_o(1 + q_s)^r, \quad t \approx \frac{r}{s} \qquad (22)$$

en donde, ya lo dijimos, el grado de aproximación es mayor entre más grande es la s.

Sea

$$w = \frac{s}{Q}, \quad Q \neq 0$$

entonces

$$\frac{1}{w} \approx q_s$$

Para empezar, nótese que la nueva variable w crece con s. Ahora, sustituyamos r por su equivalente en términos de w y t, como

$$t \approx \frac{r}{s} \quad y \quad s = wQ$$

se sigue que

$$r \approx wQt$$

que al ser sustituído en la ecuación (22), da

$$N(t) \approx N_o(1 + \frac{1}{w})^{wQt} \qquad (23)$$

Pero como N_o y Q son constantes y el valor de t es único y no depende de la eventual aproximación racional que de él se esté utilizando, *el comportamiento de* N(t) *cuando* $s \to \infty$ *depende sólo de qué ocurra con la expresión*

$$N(\frac{r}{s}) = N_0(1 + q)^{r/s} \tag{19}$$

que es una fórmula *"algebráicamente" del mismo tipo que la* (13) pues, en ambas, *la variable independiente aparece como exponente de una misma base.*

Habiendo llegado a este punto bien podríamos sepultar en el olvido a las q_s, sin embargo, en esta presentación, están llamadas a jugar un papel mucho más importante que el que hasta el momento han tenido. Veamos.

Reconsideremos la ecuación (16) y supongamos que la expansión decimal del racional r/s viene dada por

$$\frac{r}{s} = a_n a_{n-1} \ldots a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots \tag{20}$$

donde las a_i son dígitos y los subíndices señalan la potencia de diez por la que se multiplican en el desarrollo de la expansión (cf. pp. I.29, ss *supra*).

Como (20) es una mejor aproximación entre más términos de la expansión se consideren, tendremos que $N(\frac{r}{s})$ puede aproximarse asimismo con mayor precisión si se usa (16) con valores de q_s iguales a las potencias sucesivas de diez (de hecho, esto es una consecuencia de la convención de continuidad que establecimos al principio, en lo que insistiremos en breve); esto es, como

$$\frac{r}{s} \approx a_n a_{n-1} \ldots a_0$$

entonces

$$N(\frac{r}{s}) \approx N_0(1 + q)^{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$$

y dado que

$$\frac{r}{s} \approx a_n a_{n-1} \ldots a_0 a_{-1}$$

con mayor exactitud, se tiene que

$$N(\frac{r}{s}) \approx N_0(1 + q_{10})^{a_n a_{n-1} \ldots a_0 a_{-1}}$$

es decir, que basta agregar tantos dígitos como sean necesarios

y sustituir en (16) la tasa adecuada para obtener con la precisión que se desee, el tamaño de la población en el tiempo r/s.

Por ejemplo, si r/s = 1/3, la siguiente sucesión de valores de N está "cada vez más cerca" del valor "real" de $N(\frac{r}{s})$:

$$N_0(1 + q)^0, N_0(1 + q_{10})^3, N_0(1 + q_{100})^{33} \ldots$$

por que la sucesión

$$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \ldots$$

se aproxima o "tiende" al valor exacto de 1/3.

En general, se tiene que la variable N se comporta así: al tomar valores sucesivamente más cercanos al tiempo t_0, el tamaño de la población se aproxima cada vez más a $N(t_0)$ (por cierto que una conducta distinta sería difícilmente interpretada desde el punto de vista biológico); para que así suceda, vuelve a ser indispensable el que N pueda tomar cualquier valor real suficientemente cercano a $N(t_0)$. Otros procesos de crecimiento que satisfacen aproximadamente la hipótesis fundamental de este modelo, pueden prestarse mejor para la adecuada interpretación de la *continuidad de la variable dependiente* (considere el lector, por ejemplo, cómo aumenta el peso de un niño durante los primeros meses de su vida); en cualquier caso, esta idea está basada en el *concepto matemático de límite*, noción central de la matemática moderna que deberá discutirse con cuidado en los cursos de cálculo pero que, por el momento, manejaremos informal e intuitivamente.

La solución general.

Como se vió, el grado de exactitud con que se calcula $N(\frac{r}{s})$, es mayor cuando el denominador del racional decimal que se usa para aproximar r/s es muy grande; conviene entonces analizar el comportamiento de *los términos que dependen de* s en la fórmula

$$N(\frac{r}{s}) = N_0(1 + q_s)^r$$

cuando s crece más y más.

ción al iniciarse este lapso, es decir, la tasa de crecimiento correspondiente a dos u. de t. cualesquiera es:

$$\frac{N(k) - N(k-2)}{N(k-2)} = \frac{N_o(1+q)^{k-2}(2q+q^2)}{N_o(1+q)^{k-2}}$$

$$= 2q + q^2 \qquad (15)$$

No es difícil, asimismo, mostrar que el porcentaje en que aumenta N cada determinado tiempo *permanece constante para cada lapso de la misma duración;* en otras palabras, que podemos elegir como unidad de tiempo el intervalo que mejor nos acomode que, en cualquier caso, la hipótesis fundamental se seguirá cumpliendo. Veamos ahora qué sucede si

"el tiempo es racional"

Si bien la fórmula (13) es un avance, no olvidemos que andamos en busca de una que permita calcular N(t) para cualquier t, supongamos entonces que ha transcurrido *una cantidad racional de u. de t.* designada mediante la razón de enteros r/s; si pudiéramos encontrar la *tasa de crecimiento correspondiente a un s-ésimo de u. de t.*, tendríamos a la mano la solución del problema, puesto que -y he aquí el valor de la generalidad de la ecuación (13)- hay una forma general de calcular el tamaño de la población al cabo de un número entero de lapsos cuando se conoce la tasa de crecimiento correspondiente a uno de ellos. Efectivamente:

Si q_s denota la tasa de cercimiento de un s-ésimo de la u. de t., entonces:

$$N\left(\frac{r}{s}\right) = N_o(1 + q_s)^r \qquad (16)$$

toda vez que

$$\frac{r}{s} = r \text{ veces un s-ésimo} = (r)\left(\frac{1}{s}\right)$$

de modo que el problema que debemos resolver es *¿cómo determinar*

q_s?

Si conocemos la tasa de crecimiento de una u. de t. completa -de hecho, sería bastante tener la tasa correspondiente a cualquier lapso conocido- tendremos que:

$$N(1) = N_o(1 + q)$$

pero también

$$N(1) = N\left(\frac{s}{s}\right) = N_o(1 + q_s)^s$$

de manera que, por transitividad:

$$N_o(1 + q) = N_o(1 + q_s)^s \qquad (17)$$

ecuación en la que desconocemos q_s pero en la que está toda la información necesaria para despejarla; en efecto, (17) implica que:

$$1 + q = (1 + q_s)^s$$

de donde

$$1 + q_s = \sqrt[s]{1 + q}$$

y, finalmente:

$$q_s = \sqrt[s]{1 + q} - 1 \qquad (18)$$

De este modo, el par de ecuaciones (16) y (18) son suficientes para calcular $N\left(\frac{r}{s}\right)$ para cualquier par de enteros r y s pero adolecen de un grave defecto: son poco prácticas porque, habiendo una infinidad de valores factibles para s, q_s tendría que calcularse cada vez que el racional r/s con el que se está representando el tiempo, tenga un denominador diferente. Sin embargo, un renglón más en nuestro argumento proveerá una fórmula sencilla sin dicho inconveniente: sustituyamos (18) en (16) y simplifiquemos:

$$N\left(\frac{r}{s}\right) = N_o\left(1 + \left(\sqrt[s]{1+q} - 1\right)\right)^r$$

$$= N_o\left(\sqrt[s]{1 + q}\right)^r$$

De esta suerte, al aplicar las *"leyes de los exponentes"* [9], tendremos

(5), entonces:

$$N(2) = N(1) + q\,N(1) \tag{6}$$

Y, de seguir así, para conocer $N(k)$, tendríamos que calcular todas las poblaciones intermedias, desde $N(0)$ hasta $N(k-1)$ lo que, desde luego, es poco práctico. Para evitarlo, sigamos la siguiente deducción algebraica: tanto en la ecuación (6) como en la (5) aparece lo que se llama un *factor común* en el segundo miembro; luego, aplicando la propiedad distributiva del producto sobre la suma de números reales (es decir, factorizando) en ambas ecuaciones, tenemos:

$$N(1) = N_o(1 + q) \tag{7}$$

y

$$N(2) = N(1)(1 + q) \tag{8}$$

Si además sustituímos la ecuación (7) en la (8), tendremos que:

$$N(2) = [N_o(1+q)](1+q) \tag{9}$$

dado que lo que aparece entre corchetes es precisamente $N(1)$.

Pero

$$(1+q)(1+q) = (1+q)^2$$

y, por lo tanto:

$$N(2) = N_o\,(1 + q)^2 \tag{10}$$

Si seguimos esta línea de razonamiento para encontrar expresiones adecuadas para $N(3)$ y $N(4)$, veremos que:

$$\begin{aligned} N(3) &= N(2) + q\,N(2) \\ &= N(2)\,(1 + q) \\ &= [N_o(1+q)^2](1+q) \\ &= N_o(1 + q)^3 \end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned} N(4) &= N(3)\,(1 + q) \\ &= N_o\,(1 + q)^4 \end{aligned} \tag{12}$$

lo que sugiere, si ya nos convencimos de que para obtener la fórmula general de $N(k)$ bastaría repetir este argumento k veces, que:

$$N(k) = N_o\,(1 + q)^k \tag{13}$$

Por razones que serán claras enseguida, conviene llamar la atención de los lectores sobre el siguiente hecho: con frecuencia, se comete el error de creer que la tasa de crecimiento es proporcional al tiempo, esto es, que si en una u. de t. N crece en un porcentaje q, entonces N aumentará en $2q$ si transcurren dos u. de t. En realidad, de la ecuación (10) se obtiene que:

$$\begin{aligned} N(2) - N(0) &= N_o(1+q)^2 - N_o \\ &= N_o[(1+q)^2 - 1] \\ &= N_o(1 + 2q + q^2 - 1) \\ &= N_o(2q + q^2) \end{aligned}$$

de manera que la tasa de cercimiento correspondiente a dos u. de t. será:

$$\frac{N(2) - N(0)}{N(0)} = 2q + q^2 \tag{14}$$

que es un porcentaje *estrictamente mayor* que el doble de q.

Sin embargo, no importa qué par de u. de t. sean las que pasen -no necesariamente las dos primeras- siempre se obtiene la misma tasa de crecimiento para este lapso; en efecto:

$$\begin{aligned} N(k) - N(k-2) &= N_o(1+q)^k - N_o(1+q)^{k-2} \\ &= N_o(1+q)^{k-2}\,[(1+q)^2 - 1] \\ &= N_o(1+q)^{k-2}\,(2q + q^2) \end{aligned}$$

de donde, la razón entre el incremento de la población durante el lapso que va de la k-2 ésima u. de t. a la k-ésima y la pobla-

Por consiguiente:

$$\frac{\text{Incremento de la población el k-ésimo día}}{\text{Población al iniciarse el k-ésimo día}}$$

$$= \frac{N(k) - N(k-1)}{N(k)} = \frac{N(1) - N(0)}{N(0)} \qquad (3)$$

para cualquier $k = 1,\ldots,21$.

Esta forma de crecer es aproximadamente cierta en gran cantidad de poblaciones humanas durante las etapas de asentamiento o colonización; por ejemplo, en el "Ensayo sobre el Principio de la Población", Malthus considera la población de las llamadas "trece colonias" que dieron origen a los Estados Unidos[5] y la misma población de México ha aumentado así desde 1940, por lo menos[6] También hay períodos en que se observa un comportamiento de este tipo en cultivos de laboratorio y más allá de los ejemplos particulares que cumplen tal hipótesis, nos interesará generalizar el método que describimos aquí para estudiar procesos en los que una variable aumente o disminuya de manera porcentualmente constante al cambiar otra variable en una unidad.

Por el momento, buscaremos la fórmula explícita que nos permita calcular $N(k)$ para los valores factibles de k, cuando k es un entero. Más tarde, usaremos un razonamiento similar al que nos conduzca a tal fórmula para dar con la correspondiente a

$$N(\tfrac{r}{s})$$

donde $\frac{r}{s}$ es un racional. Finalmente, mediante el uso intuitivo del concepto de *Límite*, encontraremos una fórmula general para el cálculo de

$$N(t)$$

donde t representa cualquier valor del tiempo, independientemente de si es un racional o no.

Antes, sin embargo, conviene establecer la siguiente "convención de continuidad": precisamente con el fin de poder usar

la noción de límite y, con ella, la herramienta clásica del cálculo infinitesimal, es necesario suponer que la variable N (el tamaño de la población, en # de individuos) se comporta como si variara *continuamente* en los números reales y que es capaz de tomar cualquier valor, entero o fraccionario mayor o igual que el valor N_0 de la población inicial. Respecto a esto, en "An Introduction to Ecology", G. Evelyn Hutchinson dice: "... Aunque en rigor es falsa, la convención es más inocua si se está trabajando con una población suficientemente grande de organismos que no tienen temporadas definidas de nacimiento o muerte, en la cual la reproducción ocurre azarosamente entre todos los miembros de la clase de edad adecuada y la muerte sucede de acuerdo a algún patrón estadísticamente definido que no varía con el tiempo..."[7]

Cuando "el tiempo es entero".

Empecemos por llamar q a la tasa de crecimiento por u. de t., esto es, sea:

$$q = \frac{N(1) - N(0)}{N(0)} = \frac{N(k) - N(k-1)}{N(k)} \qquad (4)$$

De aquí y de la ecuación (3) se infiere que el incremento de la población durante el primer día es:

$$N(1) - N(0) = q\, N_0$$

(es decir, que por cada individuo inicialmente presente nacen q nuevos individuos). De aquí, se tiene que

$$N(1) = N_0 + q\, N_0 \qquad (5)$$

ecuación que puede leerse así: "al cabo de una u. de t., la población consta de los individuos que ya estaban en ella más los que la acrecentaron durante esa primera u. de t."

Como también ocurre que, durante la segunda u. de t., hay un aumento de q individuos por cada uno de los presentes al final de la primera, es decir por cada uno de los $N(1)$ de la ecuación de el punto de vista de sus dueños extranjeros y de nuestra burguesía de comisionistas, que ha vendido su alma al Diablo a un precio que hubiera avergonzado a Fausto. Pero el sistema es tan irracional para todos los demás que cuanto más se desarrolla más agudiza sus desequilibrios y sus tensiones, sus contradicciones ardientes. "... se extiende la pobreza y se concentra la riqueza en esta región que cuenta con inmensas legiones de brazos caídos que se multiplican sin descanso. Nuevas fábricas se instalan en los polos privilegiados de desarrollo - São Paulo, Buenos Aires, la Ciudad de México- pero menos mano de obra se necesita cada vez. El sistema no ha previsto esta pequeña molestia: lo que sobra es gente. Y la gente se reproduce. Se hace el amor con entusiasmo y sin precauciones. Cada vez queda más gente a la vera del camino, sin trabajo en el campo, donde el latifundio reina con sus gigantescos eriales, y sin trabajo en la ciudad, donde reinan las máquinas: el sistema vomita hombres. Las misiones norteamericanas esterilizan masivamente mujeres y siembran píldoras, diafragmas, espirales, preservativos y almanaques marcados, pero cosechan niños; porfiadamente, los niños latinoamericanos continúan naciendo, reivindicando su derecho natural a obtener un sitio bajo el sol en estas tierras espléndidas que podrían brindar a todos lo que a casi todos niegan..."[4].

Como se ve, el tema es harto polémico; invitamos al lector interesado a profundizar en él y a considerar cuidadosamente los argumentos que, tras una aparente neutralidad técnica o científica, son usados con frecuencia para justificar ideológicamente la explotación o la injusticia.

2. El Modelo de Malthus.

Salvo una pequeña diferencia, los dos modelos que discutiremos aquí, siguen el mismo razonamiento; por esto -y para no distraer al lector- desarrollamos primero el de Malthus y, más adelante, sin tanto detalle, el otro.

Supongamos que venimos observando una población en la que el número de individuos N aumenta con el tiempo t; que, al iniciar el estudio (es decir, cuando $t=0$), hay N_0 individuos y que *no existen limitaciones ni de espacio ni de comida* para el crecimiento de la población; ésta es la hipótesis biológica fundamental. Supondremos también que, durante el período que nos interesa, no hay muertes. Así, el único freno al nacimiento de nuevos bichos es su propia capacidad reproductora.

¿En qué se traducen cuantitativamente las condiciones anteriores? Una respuesta adecuada nos permitirá plantear adecuadamente el modelo. Veamos.

Como no hay competencia entre los individuos ni razón que impida su libre reproducción, bien podemos suponer que -por unidad de tiempo (u. de t.)- *cada bicho va a tener el mismo número de hijos* y esto significa, usando la simbología de las funciones que ya conocemos, que:

$$\frac{N(t) - N(t-1)}{N(t)} \qquad (1)$$

no cambia para ninguna t dentro del lapso de validez de nuestras premisas. En otras palabras, lo ilimitado del medio se traduce, matemáticamente, a la siguiente

Hipótesis fundamental: la tasa de crecimiento de la población, representada por la razón (1) *permanece constante en el tiempo.*

Así, si se sabe que la u. de t. es un día y que el crecimiento porcentualmente constante se mantiene durante 3 semanas, entonces, la razón en que aumenta el número de individuos el primer día, esto es:

$$\frac{\text{Incremento de la población el primer día}}{\text{Población inicial}} = \frac{N(1) - N(0)}{N(0)} \qquad (2)$$

es igual a la razón en que aumenta la población cualquiera otro de los 21 días de las tres primeras semanas.

CAPITULO IV. MODELOS ELEMENTALES DE CRECIMIENTO: LAS FUNCIONES EXPONENCIALES.

> Si se supone que los siguientes postulados se cumplen: primero, que la comida es necesaria para la existencia del hombre; segundo, que la pasión entre los sexos es necesaria y permanecerá aproximadamente en su estado actual, digo que el poder de la población es indefinidamente mayor que el poder de la tierra para abastecer de medios de subsistencia al hombre. La población, cuando no se limita, *aumenta en una razón geométrica*. Los medios de subsistencia crecen sólo *en una razón aritmética*. Una leve familiaridad con los números bastará para convencernos de la inmensidad del primer poder comparado con el segundo.
> ... Hay una lucha constante por la existencia entre las plantas y los animales. El hombre no puede escapar de esto. Entre aquéllos, los efectos son el desperdicio de semilla, las enfermedades y la muerte prematura. Entre los seres humanos, la miseria y el vicio... Esta desigualdad natural de los dos poderes -el de la población y el de la producción de la tierra- aparece insuperable en el camino de la perfectibilidad de la sociedad... Consecuentemente, si las premisas son correctas, el argumento es concluyente en contra de la perfectibilidad de la masa humana...
>
> Thomas R. Malthus [1]

1. Antecedentes.

En este capítulo se construyen modelos. En base a ciertas premisas simplificadoras -apoyadas sólidamente en la evidencia empírica- se postula una hipótesis fundamental y, sobre ella, se busca el tipo de relación funcional existente entre un par de variables. Nos interesa discutir cómo crece o disminuye una cantidad al cambiar otra cuando se conoce cierto aspecto básico del fenómeno que se estudia.

En efecto, vamos a discutir el *crecimiento de una población en un medio ilimitado y el decaimiento de la concentración de una sustancia reaccionante cuyas moléculas reaccionan "espontánea y azarosamente"*. Pero antes de hacerlo, solicitamos la atención de los amables lectores sobre los siguientes comentarios que, a modo de advertencia contra el uso acrítico o malintencionado de los "argumentos científicos", hemos incluído en esta sección.

El modelo de crecimiento ilimitado de una población fue planteado, en los albores del siglo XIX cuando Inglaterra era el primer imperio industrial que conocía la historia, por el economista británico Thomas R. Malthus (1766-1834) en "Un Ensayo sobre el Principio de la Población y cómo Afecta el Futuro Mejoramiento de la Sociedad"[2] del cual copiamos el epígrafe de este capítulo. Una y otra vez, los economistas, demógrafos y sociólogos burgueses han echado mano de los argumentos y las apocalípticas conclusiones del ensayo para culpar a la sobrepoblación de la miseria y el hambre que padecen las grandes masas en el mundo; las intensas campañas en favor del control natal en los países subdesarrollados son, ni duda cabe, "malthusianas"; los grandes dirigentes capitalistas están empeñados en acabar con la pobreza "matando a los mendigos"; Dwight Eisenhower pronosticó que si los habitantes de la tierra seguían multiplicándose al mismo ritmo no sólo se agudizaría el peligro de la revolución sino que, además, se produciría "una degradación del nivel de vida de todos los pueblos, *el nuestro inclusive*", en tanto que Lyndon Johnson declaró: "Cinco dólares invertidos contra el crecimiento de la población, son más eficaces que cien dólares invertidos en el crecimiento económico".[3]

Pero, ¿qué hay detrás de esta extremada preocupación? Dejemos la palabra al periodista uruguayo Eduardo Galeano que, refiriéndose a la América Latina, dice lo siguiente:

> "... Ciento veinte millones de niños se agitan en el centro de la tormenta. La población crece como ninguna otra; en medio siglo se triplicó con creces. Cada minuto muere un niño de enfermedad o de hambre, pero en el año 2000 habrá seiscientos cincuenta millones de latinoamericanos, y la mitad tendrá menos de quince años de edad: *una bomba de tiempo*. "... El sistema es muy racional des-

N O T A S

1 Malthus T.R. An essay on the principle of population, as it affect the future improvement of siciety, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet and other writers. London, J. Johnson, 1798.
Una magnífica crónica de la polémica que dio origen al "Ensayo sobre la Población" -como suele abreviarse el larguísimo título del trabajo fundamental de Malthus- puede leerse en las notas que, al pie del primer capítulo de "An Introduction to Population Ecology", pone G. Evelyn Hutchinson, New Haven and London, Yale University Press, 1978.

2 Ibidem.

3 Citado por Galeano E. en "Las Venas Abiertas de América Latina", S. XXI Editores, México, 1971. pág. 8.

4 Galeano E. Op. cit. pp 1-12.

5 Hutchinson G. E. Op. cit. Nota 12 al pie de las pp 12 y 13.

6 Cf. Pulido J. La Función Exponencial y las Poblaciones de México. Com. Internas del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, en prensa.

7 Hutchinson G. E. Op. cit. pág. 2.

8 Como es usual, el símbolo $\sqrt[s]{A}$ representa al número, racional o no, que "elevado a la s" es igual a A. Tal número se llama *la raíz s-ésima* de A.

9 Cf. la Proposición al final de la sección 4. de este mismo capítulo. Tal vez cueste un poco reconocer en ella lo que, en la escuela elemental, llamábamos "leyes de los exponentes" y que se enunciaban así:

Sea a un número cualquiera diferente de cero, sean m y n otros dos reales cualesquiera, entonces:

1ª ley $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$

2ª ley $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3ª ley $(a^m)^n = a^{mn}$

4ª ley $\sqrt[m]{a^n} = a^{m/n}$

10 En este punto, podría objetarse, con razón, que para encontrar Q necesitamos conocer las q_s; lo que puede hacernos pensar que hemos caído en un círculo vicioso. Sin embargo, en el texto se ve enseguida cómo encontrar Q sin calcular primero las q_s.

11 Llamado así en honor del matemático prusiano *Leonhard Euler* (1707-1783).

12 Cf. Horelick B. y S. Koont. Kinetics of Single Reactant Reactions. UMAP, Newton, Mass. 1977.

13 Las contribuciones de Napier a esta poderosa invención matemática están contenidas en dos tratados: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* que fue publicado en 1614 (*Descripción de la Maravillosa Regla de los logaritmos*), y *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* que sólo fue publicado en 1619 -dos años después de la muerte del autor- (*Construcción de la Maravillosa Regla de los logaritmos*).

14 Cf. Horelick B. y S. Koont. Op. cit.

CAPITULO V. MAS FUNCIONES. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE LOS DATOS.

> Las funciones son atributos distintivos de la matemática moderna, quizá los que la distinguen más profundamente... En su estructura interna, la matemática griega fue completamente ajena a las funciones y sin orientación alguna hacia ellas...
> ... se ha hecho énfasis, y con razón, en que la presencia de las funciones en la matemática significa algo así como "todo en movimiento" y su ausencia algo como "todo quieto" como es evidente en alguno de los aspectos esenciales que contrastan las civilizaciones griega y moderna...
>
> S. Bochner [1]

1. Antecedentes.

En el primer capítulo prometimos, luego de haber introducido la simbología y el lenguaje que le es propio, que daríamos una discusión más profunda del *concepto de función* y el propósito de esta sección y de los apéndices a este capítulo es ése.

En "El Papel de la Matemática en el Nacimiento de la Ciencia", Salomon Bochner dice que "... las funciones matemáticas de la física" - y de las ramas de la biología en las que se ha empleado con éxito esta herramienta, agregamos nosotros- "revelan causas, mecanismos de control, subordinación y otras relaciones, miden y tasan lo complejo o lo simple que pudieran ser los sucesos; su comportamiento indica el equilibrio o la inestabilidad del estado de un sistema y sugiere generalizaciones, especializaciones y particularidades..."[2]. En la presentación básica que de las funciones hicimos, las describimos *grosso modo* como instrumentos que se usan para "*hacer predicciones*": dados los valores de la o las variables independientes, se calculan el o los correspondientes valores de las dependientes mediante la sustitución de aquéllos en "la fórmula" o "regla de correspondencia" que, además, es lo suficientemente clara para no dar lugar a ambigüedades: *a cada posible valor de la variable independiente se le hace corresponder uno y sólo un valor de la dependiente*. Dicha sustitución, sin embargo, no puede hacerse indiscriminadamente: ya en el capítulo III discutíamos sobre esto al señalar que "el conjunto de valores para los cuales tiene sentido una fórmula del tipo $y = y(x)$ depende fuertemente del fenómeno que se esté modelando, del rango en que varíen los datos que se pueden observar y de la forma particular que tome la regla de correspondencia..." En efecto, los ejemplos 3.1. y 3.2. de aquel capítulo mostraban algo respecto a las restricciones "naturales" del *dominio de definición* de una función; retomamos aquí el tema, mostramos un par de ejemplos más y aclaramos qué tipo de restricciones provienen de la regla de correspondencia:

Ejemplo 1.1. En el capítulo anterior se dedujo que si el *peso de un animal aumenta de manera porcentualmente constante por unidad de t*, la fórmula:

$$W(t) = W_o e^{kt}$$

describe su peso W, luego de que han transcurrido t unidades de tiempo desde que pesaba W_o. Así, tal expresión matemática es un modelo del crecimiento de dicho animal; sin embargo, es evidente que no es posible sustituir en $W = W(t)$ cualquier valor de t: es seguro que después de cierta edad *b*, el organismo dejará de crecer de manera porcentualmente constante (en el más extremo de los casos esto ocurrirá con la muerte aunque en la mayoría de los animales superiores, sucede en los estadios juveniles). Por esto, el dominio de definición de W será el conjunto de edades entre 0 y *b*. Es costumbre especificar el dominio a la derecha de la fórmula como se muestra enseguida:

$$W(t) = W_o e^{kt} \qquad 0 \leq t \leq b$$

Ejemplo 1.2. El Teorema del Binomio, con el que culminamos el segundo capítulo, establece que *si un experimento simple se repite n veces y los resultados de dos experimentos sucesivos son independientes*, la probabilidad de que el suceso A se presente exactamente k veces viene dada por la fórmula

$$Pr(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

donde p es la probabilidad de que -en una sola realización del experimento- se presente A. En este caso, no es posible considerar valores no enteros de la variable independiente k (no tendría sentido, por ejemplo, decir que A se presente 0.75 veces) es más, es claro que k no puede ser negativa ni puede exceder n (¿por qué?), de modo que -usando la notación recién introducida en el ejemplo anterior:

$$Pr(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

Estos dos ejemplos han sido puestos aquí para exhibir cómo *las hipótesis simplificadoras sobre las que se construye el modelo* imponen restricciones al dominio de definición; además de éstas y de las del tipo discutido en el tercer capítulo, las hay de tipo algebráico o analítico: si se desea que los valores de la variable dependiente sean números reales (que es el caso de la inmensa mayoría de las que pudieren interesar a todo tipo de biólogos), es indispensable cuidar el que efectivamente la fórmula defina, para cada x, un valor real de y cuando y = y(x). Algunos ejemplos aclararán esta idea:

Ejemplo 1.3. Supongamos que las variables s y t están relacionadas entre sí mediante la fórmula

$$s(t) = \frac{2}{3 - t}$$

Independientemente de su significado fenomenológico, esta expresión *no permite calcular* s *cuando* t =3 por que si se sustituyera 3 en lugar de t, se obtendría:

$$s(3) = \frac{2}{3 - 3} = \frac{2}{0}$$

que *no es un número real* puesto que la división entre cero no está definida en ese sistema numérico. Por lo tanto:

$$s(t) = \frac{2}{3 - t} \qquad t \neq 3$$

Ejemplo 1.4. Si

$$f(a) = (1 - a)^{1/2}$$

para que f tome valores reales, será necesario que 1-a no sea negativo pues, si lo fuera, *sería imposible encontrar entre los números reales alguno que -elevado al cuadrado- fuera negativo* (¿por qué?). Así, en el dominio de f sólo estarán aquellos reales que -restados de 1- den un número mayor o igual que 0. De aquí que:

$$f(a) = (1 - a)^{1/2} \qquad a \leq 1$$

Ejemplo 1.5. Consideremos ahora

$$z(m) = \log(m^2 - 1)$$

Recuérdese que la definición de logaritmo que dimos en el capítulo IV, es válida sólo para los reales mayores que 0; es decir, únicamente los reales positivos tienen logaritmos reales definidos. Sin embargo, m^2-1 bien puede ser negativo (tal sería el caso, por ejemplo, si m = ½), de modo que la fórmula anterior *no podrá aplicarse para calcular* z(½). Luego, es necesario que m^2-1 sea positivo y esto sólo ocurre cuando el cuadrado de m no excede 1. Esto es:

$$z(m) = \log(m^2 - 1) \qquad m > 1 \text{ ó } m < -1$$

Cuando, como en los tres ejemplos anteriores, sólo se toman en cuenta las restricciones de origen numérico sobre la regla de correspondencia, se dice que se obtiene *el dominio máximo de definición de la función.*

CUESTIONARIO

1.1. En cada uno de los siguientes casos determínese el dominio

máximo de definición de la regla de correspondencia que se da:

1. $y(x) = x^2$ 2. $r(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$ 3. $z(m) = \log(8 - m^3)$

4. $s(t) = t - \dfrac{1}{t}$ 5. $V(T) = \left(\dfrac{T}{T+6}\right)^{1/2}$

1.2. En cada uno de los siguientes textos, escoja y represente mediante sendas literales, una variable dependiente y otra dependiente. Luego, "traduzca" la relación descrita por el texto a una fórmula que establezca cómo varía una variable en función de la otra. Finalmente, discuta qué restricciones "naturales" tiene el dominio de definición de esta función y cuál sería el dominio máximo:

1. "La presión que un gas ideal ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene, es proporcional al producto de la densidad del gas por su temperatura" (Ley de los Gases Ideales).

2. "La presión hidrostática ejercida por un líquido en equilibrio es proporcional a la profundidad más la presión en la superficie" (Principio de Pascal).

3. "La razón de la velocidad de absorción en un tiempo t respecto a la velocidad de absorción máxima, es igual a la razón del sustrato respecto a la suma de una concentración crítica más el sustrato" (Ley de Michaelis-Menten).

4. "La longitud de ciertos organismos es proporcional a una potencia positiva y no mayor que la unidad de su peso" (Ley de Alometría).

5. "La velocidad de crecimiento de una población es proporcional al producto del tamaño de la población en un momento t y lo que le falte para alcanzar una cierta población máxima llamada capacidad de carga del medio" (Ley del Crecimiento Logístico).

6. "La velocidad con que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del cuerpo" (Ley del Enfriamiento de Newton).

1.3. Describa qué tipo de restricciones se consideran en el texto para determinar el dominio de definición de una función.

1.4. Con una pieza cuadrada de hojalata, de lado a, se construye

una caja de altura x mediante el corte de un cuadradito de lado x en cada esquina de la pieza (ver figura 1.1.). El volumen V de esta caja depende del corte x. Encuentre una expresión algebraica para V=V(x). ¿Cuál es el dominio máximo de definición de esta expresión? ¿cuál el dominio de la función V? Explique las diferencias.

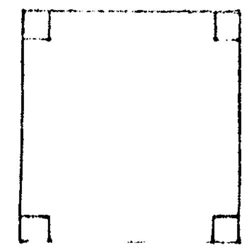


Figura 1.1.

1.5. Se bombea agua en un tanque cilíndrico de 5 m de diámetro y 10 m de altura. Exprese el volumen de agua en el tanque en términos de la profundidad. Determinar el dominio máximo de definición de la fórmula que obtenga y el dominio de la función volumen.

2. Las Transformaciones log-log y semilog.

Al final de los dos capítulos anteriores presentamos a los lectores un par de familias de funciones: las potenciales y las exponenciales. En el Apéndice A de este capítulo, además, ampliamos nuestro conocimiento de este tipo de funciones y agregamos unas nuevas. Sin embargo, hasta el momento, si tenemos una colección de datos observados, sólo podemos ajustarlos (es decir, proponer para ellos una relación funcional) a funciones cuya gráfica es una recta; esto es: a partir de parejas de la forma (x_i, y_i) determinamos un par de parámetros m, b tales que la recta de ecuación

$$y = m x + b$$

es la que, en cierto sentido, pasa más cerca de los puntos (x_i, y_i)

y que, con fines de interpolación, tomamos como la regla de correspondencia $y=y(x)$.

En esta sección discutiremos cómo trabajar los datos para determinar los parámetros c y n, si la relación funcional entre las variables es potencial:

$$y(x) = c\, x^{n}$$

y veremos también qué hacer cuando la dependencia es exponencial, esto es, si

$$y(x) = c\, e^{kx}$$

para escoger -entre la infinidad de valores posibles- los parámetros c y k. El criterio de selección en ambos casos será el mismo que se aplicaba en el caso de los ajustes lineales: que la diferencia entre los valores observados y los calculados sea la menor posible[3].

Dicho de otra manera: *si tenemos razones teóricas o empíricas para proponer un modelo potencial o exponencial*, el problema fundamental es elegir los parámetros que definen una sola función del tipo propuesto y que dicha función se aproxime lo más que se pueda a lo que se ha observado. Como veremos, la solución del problema depende de que seamos capaces de *transformar los datos y obtener un par de nuevas variables entre las cuales haya una relación lineal*, con las cuales ya sabemos qué hacer para encontrar la dependencia funcional y que -al proveer una relación entre las transformadas- indirectamente la dan para las variables sin transformar. Veamos.

Ejemplo 2.1. (El Principio de Alometría) Según el biólogo teórico austrocanadiense Ludwig von Bertalanffy:

"... muchos fenómenos del metabolismo y de la bioquímica, la morfogénesis, la evolución, etc., siguen una ecuación sencilla:

$$y = b\, x^{a}$$

que se conoce como *ecuación alométrica* y que es, de hecho, la ley más sencilla posible de crecimiento relativo, tomando el término en el más amplio sentido

o sea, el incremento de una variable con respecto a otra variable x..."

"... Tenemos que convenir en que la ecuación alométrica es, cuando mucho, una aproximación simplificada. *Pero es algo más que un modo conveniente de representar datos*. A pesar de su carácter simplificado y de sus limitaciones matemáticas, el principio de la alometría es *una expresión de la interdependencia, organización y armonización de procesos fisiológicos*..." (los subrayados son nuestros)[4].

De manera que si quisiéramos, por ejemplo, determinar cómo cambia el peso W de un organismo como función de su longitud L, una buena candidata sería la ecuación potencial:

$$W(L) = c\, L^{n} \qquad (1)$$

en donde los parámetros c y n se obtienen del procesamiento de los datos disponibles. Consideremos, para fijar ideas, este ejemplo: Chávez E.[5] (1973) reportó los siguientes datos de camarón blanco sin discriminación de sexos para doce clases de edad:

Tabla 2.1.

Edad [meses]	Longitud [cm]	Peso [gr]
1	5.8	0.6
2	9.2	2.4
3	11.7	5.0
4	13.7	8.1
5	15.1	11.2
6	16.3	14.0
7	17.2	16.5
8	17.8	18.6
9	18.4	20.3
10	18.8	21.6
11	19.1	22.7
12	19.2	23.6

(de hecho, la talla se reporta en mm pero aquí hemos redondeado a cm para facilitar los cálculos). El vaciado de las doce parejas con primera coordenada L y segunda W en papel milimétrico (véase la figura 2.1.) permite ratificar "a ojo" que la ecuación (1) es un "modelo aceptable" para estos datos. Dejemos aquí el ejemplo olvidemos por un momento el significado particular de L y W y veamos, en general, lo que habría que hacer con los datos de la forma (L_i, W_i) para obtener c y n.

Si tomamos el logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación (1) (no es indispensable que sea precisamente el logaritmo de base e el que tomemos, cualquiera otra base sirve igual), se tiene que:

$$\ln W = \ln (c L^n) \qquad (2)$$

de donde, al aplicar las llamadas "leyes de los logaritmos", tenemos:

$$\ln W = \ln c + n \ln L \qquad (3)$$

ahora, si convenimos en *introducir las nuevas variables*

$$\mathcal{W} = \ln W \qquad \text{y} \qquad \ell = \ln L$$

y escribimos

$$\beta = \ln c \qquad (4)$$

la ecuación (3) deviene:

$$\mathcal{W} = n\ell + \beta \qquad (5)$$

que establece que entre las nuevas variables (o variables transformadas) hay una dependencia lineal. Ahora bien, las ecuaciones (1), (2), (3) y (5) son formas distintas de describir la relación funcional entre las variables L y W. De aquí que esta cadena de equivalencias signifique que:

> W *es proporcional a una potencia de* L, *si y sólo si* $\mathcal{W} = \ln W$ *varía linealmente con* $\ell = \ln L$

Además, esto da la clave para resolver nuestro problema fundamental, es decir, para encontrar -con los datos- los valores de c y de n puesto que:

> *Si las parejas de la forma* (L_i, W_i) *se ajustan a una curva de tipo potencial, los puntos cuyas coordenadas son las transformadas* ℓ_i *y* $\mathcal{W}_i$, *esto es, las parejas* $(\ln L_i, \ln W_i)$ *se ajustarán a una recta de pendiente* n *y ordenada al origen* $\beta = \ln c$.

Por lo tanto, lo que hay que hacer es encontrar la recta que pase más cerca (en el sentido discutido en el capítulo III) de los puntos $(\ell_i, \mathcal{W}_i)$ pues su ecuación proverá n -que es la pendiente de esta recta- y c que está dada por la ecuación:

$$c = e^{\beta} \qquad (6)$$

en la que β es la ordenada al origen de la misma recta. Volvamos al

Ejemplo 2.1. (Continuación) Según la discusión anterior, lo que corresponde hacer ahora es transformar los datos de la tabla 2.1., vaciarlos en papel milimétrico y ajustarles la recta que más les cuadre. Hagámoslo. La

Tabla 2.2.

ln L	ln W
1.76	-0.51
2.22	0.88
2.46	1.61
2.62	2.09
2.71	2.42
2.79	2.64
2.84	2.80
2.88	2.92
2.91	3.01
2.93	3.07
2.95	3.12
2.95	3.16

muestra las variables transformadas, en tanto que la figura 2.2. exhibe el vaciado de los puntos $(\ell_i, \mathcal{W}_i)$.

Ahora bien, hasta el momento hemos ajustado las rectas a ojo, de ahora en adelante lo haremos con el *método de mínimos cuadrados* (que abreviaremos m.m.c.) que se presenta en el Apéndice C de este capítulo y que evita los errores de "apreciación personal" que se dan con el trazado a ojo. Es más, con el m.m.c., ni siquiera es necesario vaciar los datos a un plano cartesiano puesto que la pendiente y la ordenada al origen que se buscan están determinadas directamente por los datos según las fórmulas C.1. y C.2. del citado apéndice. No obstante, conviene conservar la práctica del vaciado por que provee -cuando no son demasiados los puntos- una forma relativamente fácil de comprobar que no se han cometido errores numéricos en la aplicación del m.m.c..

En el presente caso, tenemos que

L juega el papel de la X

W juega el de la Y

y

$$N = 12$$

en las fórmulas que tenemos que aplicar. De hecho:

$$\Sigma L = 32.02 \ , \ \Sigma L^2 = 86.89$$

$$\Sigma W = 27.21 \ , \ \Sigma LW = 77.06$$

de modo que la pendiente será:

$$n = \frac{(12)(77.06) - (32.02)(27.21)}{(12)(86.89) - (32.02)^2} = \frac{53.46}{17.40} = 3.07$$

y la ordenada al origen:

$$\beta = \frac{(27.21)(86.89) - (32.02)(77.06)}{(12)(86.89) - (32.02)^2} = \frac{-103.18}{17.40} = -5.93$$

con lo que se tiene que la recta de mínimos cuadrados de los puntos de la tabla 2.2. es:

$$W = 3.07\ L - 5.93$$

de donde, al aplicar la ecuación (6), se tiene que

$$c = e^{-5.93} = 2.66 \times 10^{-3}$$

y, al sustituir los valores de c y n que hemos obtenido en la ecuación (1), tenemos que el peso W [gr] varía con la talla L [cm] según la ecuación alométrica

$$W(L) = 0.00266\ L^{3.07} \qquad (7)$$

Conviene aquí que el lector trace, en la figura 2.1., la gráfica de la ecuación (7) por que se convenza -al observar las pequeñas diferencias entre los valores observados y los calculados- de lo acertado del modelo (al menos en lo que a su precisión descriptiva toca).

Ejemplo 2.2. (Distribución espacial de una especie forestal). Un problema ecológico importante es el de describir cómo se acomodan los individuos de determinada especie en el nicho en el que habitan y cuáles son las causas que los hacen adoptar esa distribución en el espacio. En el caso de las poblaciones vegetales, es razonable suponer que la competencia por el alimento contenido en el suelo afectará la configuración espacial de la población. Así, si los individuos tienen una gran capacidad de absorción de materia nutritiva habrá pocos en un área relativamente grande, en tanto que si los individuos consumen poco, habrá más por unidad de área. Los siguientes datos, citados por Urquhart y Flow [6], parecen -según se verá - corroborar esta hipótesis. Veamos: si P denota el número de pinos blancos por unidad de área [acre] y d representa el grosor promedio del tronco [in] (d es una medida de la capacidad de absorción de materia nutritiva que tiene el individuo), la tabla 2.3. muestra cuántos pinos hay en un acre que tienen tronco de grosor d (se tomaron 11 "clases de tronco"). Como el vaciado de las dos primeras columnas de esta tabla muestra (ver figura 2.3.), bien podríamos sugerir como relación funcional entre P y d una ecuación potencial de tipo hiperbólico

$$P(d) = c\ d^{-n} \qquad (8)$$

que, ciertamente, tiene un comportamiento como el que previmos en la discusión precedente, a saber: cuando d es muy pequeño, P es muy grande y cuando d es muy grande, P es pequeño. Como ya tenemos una buena candidata y - como en el ejemplo 2.1. - es también una función potencial, agregamos a la tabla 2.3. las nuevas variables entre las que *necesariamente habrá una relación lineal*. Esto es, que las columnas tercera y cuarta muestran $D_i = \ln d_i$ y $P_i = \ln P_i$ respectivamente:

Tabla 2.3.

d [m]	P [individuos]	$D = \ln d$	$P = \ln P$
1	4000	0	8.29
1.4	2700	0.34	7.90
2	1300	0.69	7.17
3	710	1.10	6.57
4	450	1.39	6.11
5	310	1.61	5.74
6	230	1.79	5.44
7	185	1.95	5.22
8	150	2.08	5.01
9	120	2.20	4.79
10	100	2.30	4.61

Las estadísticas necesarias en este caso para aplicar las fórmulas del método de mínimos cuadrados son:

$$\Sigma D = 15.45 \qquad \Sigma D^2 = 27.79$$

$$\Sigma P = 66.85 \qquad \Sigma DP = 84.07$$

de tal suerte que, como N = 11, la pendiente -n que **buscamos es:**

$$-n = \frac{(11)(84.07) - (15.45)(66.85)}{(11)(27.79) - (15.45)^2} = \frac{-108.06}{66.99} = -1.61$$

en tanto que la ordenada al origen, igual al ln c, **será:**

$$\ln c = \frac{(66.85)(27.79) - (15.45)(84.07)}{(11)(27.79) - (15.45)^2} = \frac{558.88}{66.99} = 8.34$$

de modo que la ecuación de la recta de m.c. de los datos transformados es:

$$P = -1.61\ D + 8.34$$

por lo que, al aplicar nuevamente la ecuación (6), tendremos que:

$$\begin{aligned} P &= e^{8.34}\ d^{-1.61} \\ &= 4188.09\ d^{-1.61} \end{aligned} \qquad (9)$$

Aquí también recomendamos que compare los valores observados con los que se calculan con la fórmula (9) (ver fig. 2.3.).

Veamos ahora qué hacer para calcular c y k cuando entre dos variables y y x existe una dependencia exponencial (esto es, recuérdese el capítulo IV, cuando y cambia de manera porcentualmente constante por cada unidad de x).

Como antes, el problema fundamental es encontrar un par de variables -que podamos obtener transformando las originales- entre las cuales haya una dependencia lineal. La equivalencia de las siguientes ecuaciones indica cuáles son:

Si

$$y(x) = c\ e^{kx} \qquad (10)$$

al tomar el logaritmo natural en ambos miembros (en este caso sí es necesario que sea precisamente el natural), tenemos:

$$\ln y = \ln (ce^{kx}) \qquad (11)$$

de donde:

$$\ln y = \ln c + \ln e^{kx} \qquad (12)$$

pero como el logaritmo y la exponencial son inversas (véase el apéndice B de este capítulo), el segundo término del miembro derecho en la ecuación (12), es igual a kx; de manera que si *introducimos la nueva variable*

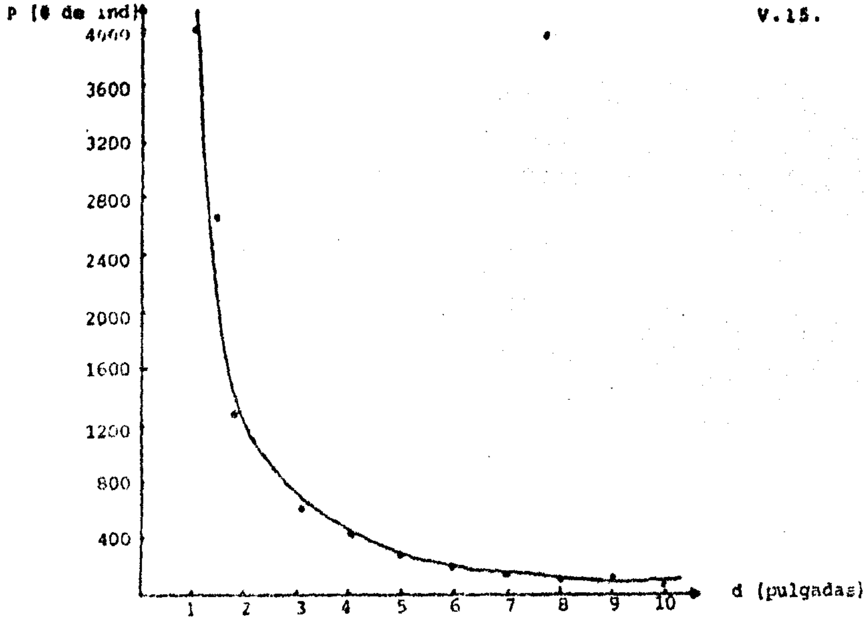
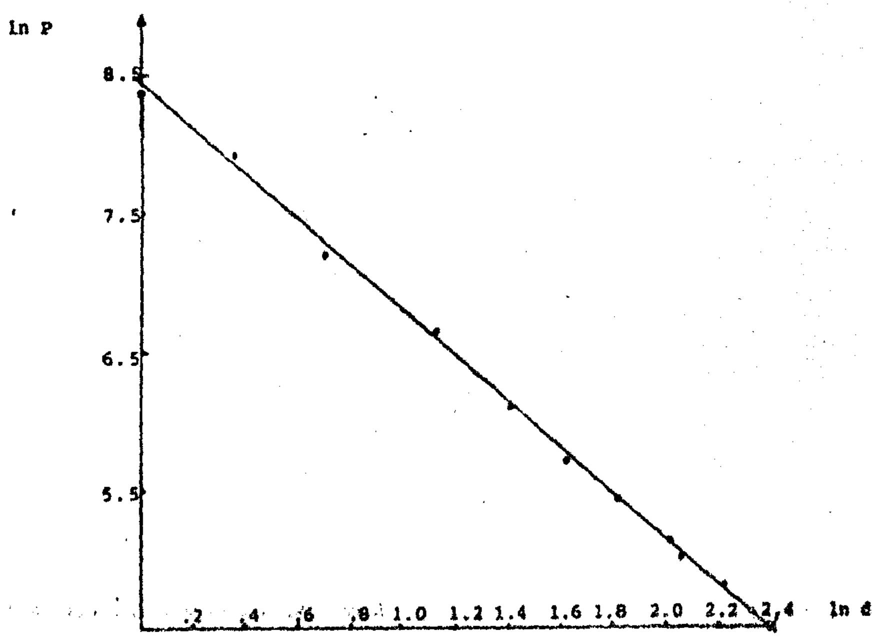


Figura 2.3.



$$Y = \ln y$$

y llamamos

$$B = \ln c$$

tendremos que la ecuación (12) puede ser reescrita como

$$Y = kx + B \qquad (13)$$

que es la ecuación de una recta de pendiente k y ordenada al origen igual al ln c. De modo que c viene dada nuevamente por la ecuación (6). Por consiguiente:

> *y es una función exponencial de x si y sólo si $Y = \ln y$ varía linealmente con x.*

De manera que si se quiere encontrar cuánto valen k y c para una colección particular de datos (x_i, y_i), basta encontrar la recta "más cercana" a los puntos de la forma $(x_i, \ln y_i)$ puesto que:

> *Si los puntos (x_i, y_i) se ajustan a una curva exponencial, los puntos de coordenadas transformadas $(x_i, \ln y_i)$ se ajustarán a una recta de pendiente k y ordenada al origen $B = \ln c$.*

En general, el procedimiento de sustituir unas variables por otras entre las que haya una relación lineal se llama -por razones obvias- *linealización de las variables*. Los cambios sugeridos aquí para linealizar las relaciones (1) y (10) reciben, respectivamente, los nombres de transformación *log-log* (pues las nuevas variables son logaritmos de las originales) y transformación *semi-log* (pues aquí, sólo una de las variables se cambia por su logaritmo mientras que la otra queda igual). La frecuencia con que se usan estos cambios de variables es tan grande que existen dos tipos de papel de uso común en los laboratorios de investigación, que tienen la propiedad de transformar los datos al tiempo que se vacían como si se hiciera en papel milimétrico; así, al localizar en los planos del papel logarítmico o semilogarítmico (que tales nombres reciben), los puntos de coordenadas (x_i, y_i), lo que en un plano con escalas normales se vería chueco, en uno con las escalas transformadas, se endereza. Esto es: lo que en papel milimétrico semeja una curva potencial, en logarítmico parece una recta y aquello que en papel milimétrico pudiera ser una curva exponencial, en semilogarítmico será también rectilíneo[7].

Para terminar esta sección consideremos un par de ejemplos en los que se haga uso de la transformación semilog. Ambos se basan en la consideración teórica de que la variable dependiente disminuye en un porcentaje constante por cada unidad de la otra variable, de manera que entre ellas hay una relación exponencial *decreciente*, por esto, el coeficiente de la variable independiente aparece antecedido por un signo -.

Ejemplo 2.3. La concentración C [μg por c.c.] de una sustancia de la cual se deposita una cantidad inicial en agua circulante, disminuye con el tiempo t [min] según se reporta[8] en la

Tabla 2.4.

t tiempo [min]	C concentración [μg por c.c.]	C = ln C
0	20.1	3.00
10	10.3	2.33
20	6.5	1.87
30	4.7	1.55
40	2.6	0.96
50	1.8	0.59
60	1.2	0.18

en la que, además, se han incluido los valores de la variable transformada C. Según la discusión anterior, lo que tenemos que hacer es encontrar la recta de mínimos cuadrados de los puntos (t_i, C_i). Como puede verificar el lector:

$$\Sigma\, t = 210 \qquad \Sigma\, t^2 = 9100$$

$$\Sigma\, C = 10.48 \qquad \Sigma\, tC = 185.90$$

y como N = 7, las fórmulas C.1 y C.2. nos dan:

$$-k = \frac{(7)(185.90) - (210)(10.48)}{(7)(9100) - (210)^2} = \frac{-899.50}{19600} = -0.046$$

en tanto que la ordenada al origen está dada por

$$B = \frac{(10.48)(9100) - (210)(185.90)}{(7)(9100) - (210)^2} = \frac{56329}{19600} = 2.874$$

de tal suerte que la recta de mínimos cuadrados de los puntos de la forma $(t_i, \ln C_i)$ es:

$$C = -0.046\ t + 2.874$$

de donde, al aplicar la ecuación (6), tenemos:

$$C = e^{2.874}\ e^{-0.046\ t}$$

$$= 17.71 e^{-.046\ t}$$

Por lo tanto, *según el modelo*, la concentración inicial es de 17.71 g por c.c. y la tasa instantánea de dispersión es -.046 (véase el capítulo IV para recordar el porqué de estos significados para los parámetros).

Ejemplo 2.4. La intensidad de radiación I [señales por min] de un haz de rayos X, disminuye al atravesar placas de plomo de diferente grosor g [in] según la ecuación exponencial:

$$I = I_o e^{-kg}$$

donde I_o es la intensidad inicial del haz y -k es la tasa infinitesimal de "absorción radioactiva" del plomo (Cf. Capítulo IV). Clow y Urquhart[9] dan los siguientes datos en los que I se registra con un contador Geiger. Nosotros agregamos, en la tabla 2.5., los valores de la transformada I = ln I con los cuales, al encontrar la recta de mínimos cuadrados de los puntos (g_i, I_i), determinaremos los parámetros:

Tabla 2.5.

grosor [in]	Intensidad [señales/min]	$\mathcal{I} = \ln I$
.125	774	6.65
.250	688	6.53
.500	462	6.14
.750	272	5.61
1.000	168	5.12

Apliquemos ahora el m.m.c. con las siguientes estadísticas y $N = 5$:

$$\sum g = 2.63 \qquad \sum \mathcal{I} = 30.05$$

$$\sum g^2 = 1.89 \qquad \sum g\mathcal{I} = 14.86$$

se tiene:

$$-k = \frac{(5)(14.86) - (2.63)(30.05)}{(5)(1.89) - (2.63)^2} = \frac{-4.73}{2.53} = -1.87$$

y

$$\beta = \frac{(30.05)(1.89) - (2.63)(14.86)}{(5)(1.89) - (2.63)^2} = \frac{17.71}{2.53} = 7$$

De donde la recta de m.c. de $(g_i, \mathcal{I}_i)$ es

$$\mathcal{I} = -1.87\, g + 7$$

y, por consiguiente:

$$I = e^7\, e^{-1.87}$$

$$= 1096.63\, e^{-1.87}$$

de manera que *la intensidad inicial del modelo es de* 1097 señales por min., en tanto que *la tasa infinitesimal de decrecimiento de* I es -1.87

Hasta aquí los ejemplos; como vimos, en todos ellos *la teoría* orienta y determina el qué hacer con los datos; esto es, no basta

recopilar una gran cantidad de información sobre los fenómenos o los procesos naturales, sin la teoría no sirven de mucho e inclusive, suelen ser engañosos, resbaladizos. La siguiente cita de Bertalanffy es, según nosotros, particularmente reveladora de los peligros de recopilar y procesar datos sin ton ni son, veámosla.

"... hay en el mercado numerosas fórmulas que pretenden representar satisfactoriamente los datos y curvas... que se observan. El procedimiento general ha consistido en proponer una ecuación más o menos compleja y más o menos plausible; entonces el experimentador se ha dedicado a calcular una serie de curvas... con la fórmula y ha quedado satisfecho si se obtiene aproximación suficiente a los datos empíricos.

"Aquí está la primera ilusión que hay que destruir. Matemáticamente es de sobra sabido que es posible aproximarse a casi cualquier curva si se permiten tres o más parámetros libres -es decir, si una ecuación contiene tres o más constantes que no pueden verificarse de otro modo. Esto es cierto sin que importe nada la forma particular de ecuación que se elija; la ecuación más sencilla aplicable es una serie de potencias ($y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$) llevada, digamos, hasta el término cúbico. Un cálculo así no pasa de ejercicio matemático. Siempre se puede obtener aproximación mayor introduciendo más términos.

"La consecuencia es que *el ajuste de curvas llega a [illegible] un deporte de gabinete*, útil para propósitos de interpolación y extrapolación. Sin embargo, la aproximación de datos empíricos *no significa verificación de las particulares expresiones matemáticas usadas*. Sólo se puede hablar de verificación y de ecuaciones que representan una teoría si (1) *los parámetros presentes son confirmables por experimentación independiente* y si (2) *de la teoría pueden derivarse predicciones de hechos aún no observados*..."[10] (los subrayados son nuestros).

CUESTIONARIO

1.1. En los ejemplos 2.1. a 2.4. discuta sobre qué consideraciones teóricas se proponen las relaciones funcionales cuyos parámetros se determinan en los propios ejemplos.

1.2. Reconsidere los datos de Peso contra Longitud total de camarón blanco que se dan en el ejercicio 3.7. del capítulo III, aplique el procedimiento discutido en esta sección para encontrar la ecuación de alometría de esos datos.

1.3. Según la "Ley de Rubner" [11], el consumo de energía por unidad de tiempo de los organismos es proporcional a una potencia de su masa corporal. Así, entre estas variables habrá una relación alométrica con exponente aproximadamente igual a 2/3 en el caso de los mamíferos según Bertalanffy[12]. Rubner llegó a esta conclusión al experimentar con perros de diferente tamaño. La siguiente tabla muestra los resultados originales de este fisiólogo de fines del siglo pasado. Sea Q [calorías por día] el consumo de energía y sea W [kg] la masa corporal. Compruebe la Ley en el caso de estos datos:

Metabolismo en perros (Según Rubner, hacia 1880)

peso en Kg	producción de cal por Kg por día	producción de cal/m^2 de superficie corporal/día
3.1	85.8	1 909
6.5	61.2	1 073
11.0	57.3	1 191
17.7	45.3	1 047
19.2	44.6	1 141
23.7	40.2	1 082
30.4	34.8	984

Asimismo, verifique la llamada "Ley de Superficie": Q es proporcional a la superficie corporal S.

1.4. El costo de energía al correr fue medido por Schmidt-Nielsen en 1972[13] para varios animales. Si E es el costo de energía que se usa para transportar 1 gramo de peso corporal una distancia de 1 Km [cal por g por Km] y M [g] es la masa corporal, encuentre la ecuación potencial que mejor se ajusta a los datos de dichos investigadores que se dan en la siguiente tabla:

Animal	masa [gramos]	E [cal/g/Km]
Ratón blanco	21	13
Ardilla	236	3.7
Rata blanca	384	4.4
Perro (pequeño)	2.6×10^3	1.7
Perro (grande)	1.8×10^4	0.92
Cordero	3.9×10^4	0.58
Caballo	$5{,}8\times10^5$	0.15

1.5. Una droga es eliminada del sistema circulatorio por órganos como el hígado y por el consumo que otros órganos hacen de ella. Este tipo de decaimiento sigue frecuentemente una curva exponencial. Considere el siguiente conjunto de datos (adaptados de Urquhart y Clow, 1974)[14], en los que A [mg por 10 ml] es la concentración de la droga en el torrente sanguíneo y t [horas] es el tiempo. Calcule, a partir de ellos, el valor de la concentración inicial A_0 y la tasa instantánea de eliminación de la droga.

t [hrs]	.1	.3	.6	.8	1.4	1.6	2.3	3.0	3.5	4.2	4.8	5.3	5.9
A [mg/10 ml]	.97	.90	.83	.77	.69	.60	.48	.41	.34	.32	.24	.19	.17

1.6. La actividad enzimática de la catalasa se pierde durante la exhibición a la luz solar en presencia de oxígeno. Si y [μg por 10 ml] denota la concentración de catalasa y t es el tiempo de exposición, entonces y decrece exponencialmente con t. Use los siguientes datos de Mitchell y Anderson (1965)[15] para determinar la tasa instantánea de decaimiento y la concentración inicial "del modelo".

t [min]	0	10	30	50	60	70	80
y [μg/10 ml]	121	74	30	12	6.7	3.7	2.0

1.7. 1. Si la relación entre dos variables s y t es potencial, a.¿qué transformación es necesario aplicar a los datos para linealizarlos? b.¿qué signo tendrá la pendiente de la recta de m.c. de las transformadas si la relación es hiperbólica? c.¿qué información puede obtenerse de la ordenada al origen de dicha recta?

2. Suponga que R = ln R y q son dos variables entre las cuales existe una relación lineal con ecuación R = a + b q a.¿qué tipo de relación funcional existe entonces entre las variables R y q? b.si la pendiente de esta recta es negativa ¿qué pasa con R al aumentar q? c.¿qué significado fenomenológico tienen los parámetros e^a y b?

1.8. Reconsidere los ejercicios 1.2.1. y 1.2.2. del cuestionario anterior. En cada caso, proponga un cambio de variables (no necesariamente discutido en esta sección) para linealizar las funciones.

3. Presentación Elemental de los Modelos de Crecimiento de L. von Bertalanffy.

"Todos los seres vivos nacen, crecen, se reproducen y mueren" dicen muchos libros elementales de biología y el segundo de estos procesos básicos -el crecimiento- se puede medir: todos los organismos aumentan su tamaño conforme envejecen o dicho en palabras de R. Margalef:

"Cada individuo de una población unispecífica se puede caracterizar por una biomasa. Y con ella contribuye a la biomasa total del ecosistema. Dos propiedades del individuo se refieren a la forma como realiza tal contribución: 1) Dura un tiempo limitado, hasta que sobreviene la muerte. 2) Mientras vive, su biomasa no permanece constante sino que, generalmente, aumenta." [16]

En efecto: con el tiempo, los animales y las plantas se alargan, engruesan, aumentan de peso y volumen y todos estos cambios pueden medirse -con mayor o menor dificultad práctica- pero todas las variables recién enunciadas pueden evaluarse cuantitativamente, de manera que la pregunta *¿qué relación funcional existe entre, digamos, la longitud o el peso y la edad?* puede ser respondida. Esto es:

Si L representa la talla (o longitud) y W el peso de cierto organismo ¿qué fórmulas explícitas permiten calcular *L* y P como funciones de la edad *t*? ¿cómo son $L = L(t)$ y $W = W(t)$?

De suyo, es este un problema complicado y es difícil establecer un modelo matemático generalizable pues, sin duda, el crecimiento reflejará "las complejas interacciones del ecosistema"[17]; sin embargo, con un enfoque sistémico, Ludwig von Bertalanffy ha propuesto - "en base a cierto razonamiento biológico convincente" - un modelo sencillo y útil "en el estudio de poblaciones de peces y otros animales"[18].

Grosso modo, este modelo se basa en las siguientes observaciones fundamentales:

- Según la especie, las condiciones ambientales, el sexo, etc. "el promedio de los organismos" mantiene -durante toda su existencia- sus dimensiones corporales (como el peso y la longitud) por debajo de ciertos "topes" o dimensiones máximas; al ir envejeciendo el organismo "tiende" a alcanzar esos topes.
- En general, se observa una "mayor capacidad de crecer" durante las etapas tempranas del desarrollo corporal; dicha capacidad disminuye después de cierta edad hasta casi desaparecer.

En la presentación elemental que aquí se hace, partimos de este par de premisas básicas que - como se puede comprobar fácilmente - se cumplen en la inmensa mayoría de las especies animales. Por ejemplo, si los datos de la tabla 2.1. se vacían a papel milimétrico por darnos una idea de cómo varían L y W con t (ver figura 2.4.) se observa que cuando t es muy grande, L se acerca a un tope que, estimado a ojo, podría tomarse como igual a 19.5 cm; por su parte, de esta gráfica es difícil decir cuál es la dimensión máxima correspondiente al peso pues con los datos disponibles sólo podemos darnos una idea del período de crecimiento en el que la capacidad de aumentar de tamaño aún no disminuye[19].

Nuestra intención es - usando una herramienta matemática elemental - obtener las fórmulas del llamado modelo de von Bertalanffy para las relaciones talla-edad y peso-edad de los animales que, como los perros de Rubner (véase el ejercicio 1.3. del cuestionario anterior), tienen respiración proporcional a la superficie corporal[20].

Veamos la matemática que necesitamos para esto:

a. Si $y = y(x)$ es tal que *la tasa de crecimiento por cada unidad de* x *(u. de x.) es constante*, entonces y *es una función exponencial de* x. Esto es, si

$$\frac{y(x+1) - y(x)}{y(x)} = q \quad , \text{ entonces} \qquad y(x) = c\, e^{\pm kx} \, , \; k > 0$$

equivalentemente, si y cambia de manera porcentualmente constante por u. de x., existen c y k tales que

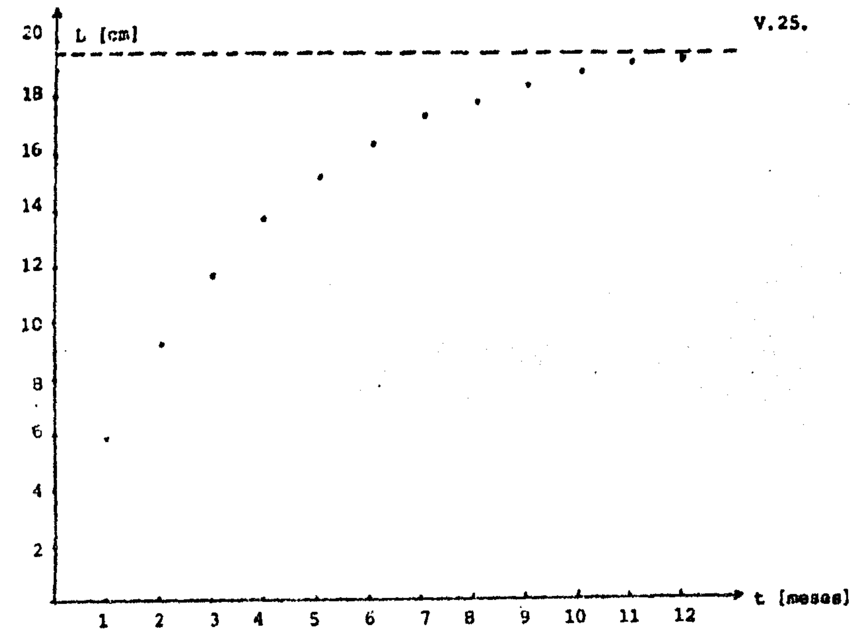
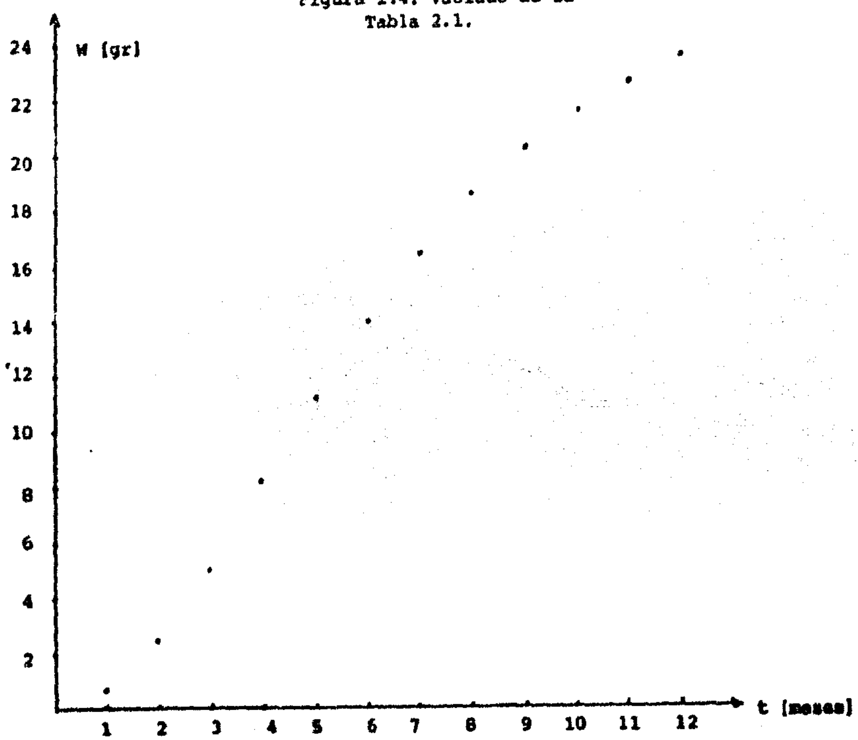


Figura 2.4. Vaciado de la Tabla 2.1.



$$y(x) = c\, e^{\pm kx}$$

de hecho,

$$c = y(0) \qquad y \qquad \pm k = \ln (1 + q)$$

de manera que si q es positiva, el signo que antecede a k es + y si $-1 < q < 0$, entonces dicho signo será −.

Ejemplo de este tipo de funciones son las del modelo de Malthus[20] para el crecimiento de una población N en el tiempo t y la llamada Ley de Lambert para el decrecimiento de la intensidad luminosa I de un haz de luz que atraviesa una capa de material translúcido como función de la distancia d que es atravesada por el haz.[21] En ellas se tiene que:

- Si N_o es la población inicial y $k > 0$ es la tasa de crecimiento instantáneo de la población, entonces:

$$N(t) = N_o\, e^{kt}$$

- Si I_o es la intensidad inicial y $-r$ $(r > 0)$ es la tasa de decrecimiento "infinitesimal" de la intensidad luminosa, entonces:

$$I(d) = I_o\, e^{-rd}$$

b. El comportamiento típico de las gráficas de las funciones exponenciales que se muestra enseguida (figura 2.5.)

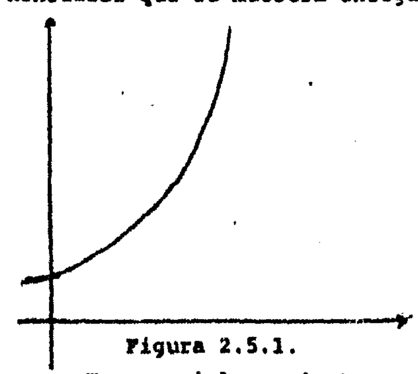


Figura 2.5.1.
Exponencial creciente

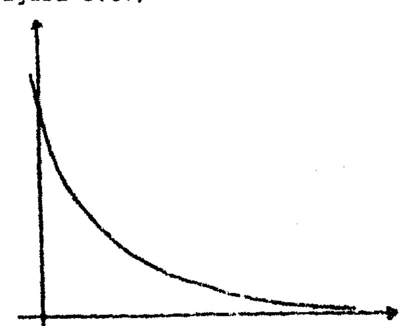


Figura 2.5.2.
Exponencial decreciente

c. Dada la gráfica de una función $y = y(x)$ puede obtenerse la gráfica de $Y = b - y(x)$ si se siguen estos pasos:
- reflÉjese la gráfica de $y = y(x)$ respecto al eje horizontal; esto da la gráfica de $-y(x)$.
- desplácese la gráfica de $-y(x)$, b unidades hacia arriba si $b > 0$ y $-b$ unidades hacia abajo si $b < 0$. Con esto se obtiene la gráfica de $Y(x) = b - y(x)$ (ver figura 2.6.).

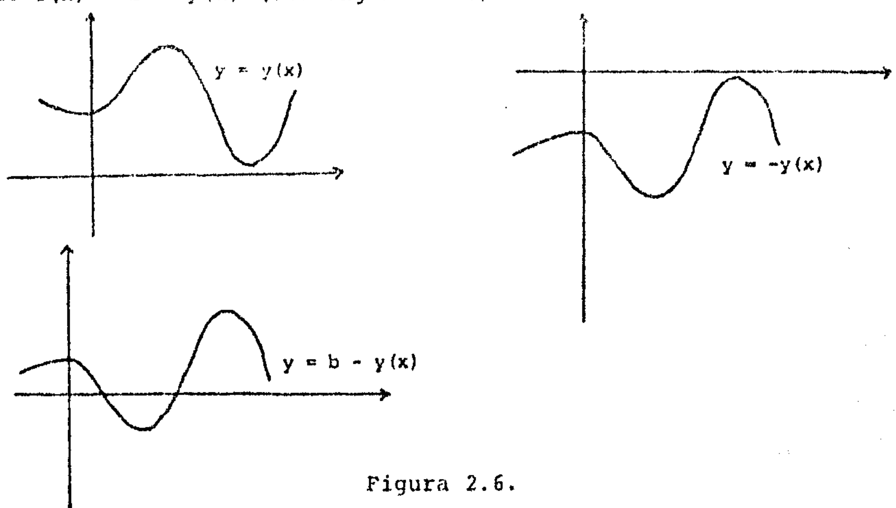


Figura 2.6.
La gráfica de $Y = b - y(x)$ a partir de la gráfica de $y(x)$

d. Finalmente, necesitaremos la herramienta básica para ajustar rectas de m.c. a datos experimentales o a sus linealizaciones.

La relación talla-edad.

Originalmente, von Bertalanffy estableció su modelo en base a consideraciones metabólicas y planteó una ecuación diferencial en la que las variables son el peso W y la edad t, de manera que obtuvo una fórmula explícita de $W = W(t)$. Después dedujo la correspondiente a $L = L(t)$ usando el hecho -más o menos fácil de establecer- de que L como función de W está dada por

$$L(W) = c\, W^a \qquad a \approx 1/3$$

Aquí procederemos alrevés; esto es, encontraremos explícitamente cómo cambia L con t y, de aquí y de cómo varía W con L, veremos cómo W es función de t.

En el caso particular de la talla, las premisas básicas significan que existe una *talla máxima* a la cual "se aproxima cada vez más" la talla de los individuos conforme envejecen. En lo sucesivo denotaremos con el símbolo L_∞ a dicha talla máxima.

Como decíamos arriba (véase la figura 2.4.), en muchos casos, los datos de t vs L corresponden - en una primera aproximación - a una curva como la que se muestra en la figura 2.7.. Examinémosla por ver si es posible obtener de ella una relación funcional con una interpretación biológica convincente[22].

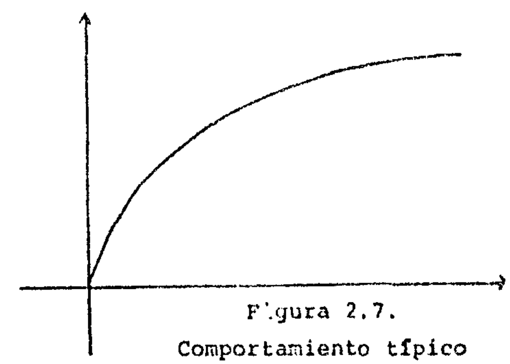


Figura 2.7.
Comportamiento típico
de los datos talla-edad.

Consideremos la nueva variable

$$S(t) = L_\infty - L(t)$$

$S(t)$ es, por así decirlo, *lo que le queda al bicho por crecer cuando alcanza la edad* t. Naturalmente -por la segunda premisa básica- S decrece cuando t aumenta y, además, la gráfica de S tiene una forma muy conocida (véase la figura 2.8.).

En efecto, la gráfica de S tiene cara de ser *una exponencial decreciente*, ¿será?. Por que si sí lo es, podremos proponer una buena candidata para la función $L = L(t)$. Veamos cómo:

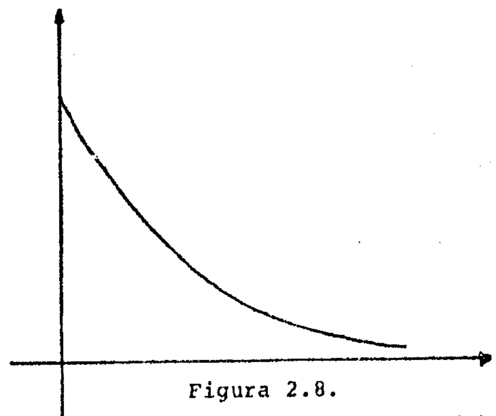


Figura 2.8.
La gráfica de $S(t) = L_\infty - L(t)$

si hubiera alguna evidencia experimental de que S decrece de manera porcentualmente constante por u. de t, tendríamos:

$$S(t) = S_0 \, e^{-kt}$$

donde $S = S(0) = L_\infty - L(0)$ y $-k$ es la tasa instantánea de decrecimiento de S. De este modo,

$$L_\infty - L(t) = [L_\infty - L(0)] \, e^{-kt}$$

y, por lo tanto,

$$L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)] \, e^{-kt} \qquad (14)$$

con lo que quedaría respondida la pregunta de qué tipo de dependencia funcional existe entre L y t.

Así, en vista de que S tiene un comportamiento exponencial decreciente sólo en caso de que disminuya de manera porcentualmente constante por u. de t., elegiremos la ecuación (14) para modelar la relación talla-edad sólo si se cumple otra premisa básica:

- que *la tasa de decrecimiento por u. de t. de la variable S sea constante.*

En caso de que tal no ocurriera (i.e. si los puntos de la for-

ma (t_i, L_i) no describieran una curva del tipo de la de la fig. 2.7.), mejor sería buscar otro modelo.

Sin embargo, de cumplirse esta premisa, se tendría entonces que

$$q = \frac{S(t+1) - S(t)}{S(t)} \qquad (15)$$

es una constante negativa mayor que -1 (¿por qué?). Ahora bien, si en la ecuación anterior sustituimos S por lo que es en términos de L, tendremos que:

$$q = \frac{L(t) - L(t+1)}{L_\infty - L(t)} \qquad (16)$$

de donde:

$$q[L_\infty - L(t)] = L(t) - L(t+1) \qquad (17)$$

y, por lo tanto, que la premisa se satisfaga es equivalente a que se cumplan las ecuaciones (15) a (17); esto es, que entre $L(t+1)$ y $L(t)$ haya la siguiente relación (que se infiere de la última igualdad):

$$L(t+1) = (1+q) \, L(t) - q \, L_\infty \qquad (18)$$

Es decir que S *decrece de manera porcentualmente constante por unidad de tiempo si y sólo si* $L(t+1)$ *varía linealmente con* $L(t)$. Esto es, si y sólo si existen un par de constantes m y b tales que

$$L(t+1) = m \, L(t) + b \qquad (19)$$

donde, necesariamente, m es positiva y menor que la unidad en tanto que b es mayor que cero puesto que:

$$m = 1+q \quad , \quad b = -q \, L_\infty \quad \text{y} \quad -1 < q < 0$$

de manera que la tercera premisa fundamental se satisface cuándo y sólo cuando los puntos $(L(t), L(t+1))$ se alinean (o casi) a lo largo de una línea recta cuyas características geométricas se exhiben en la figura 2.9.

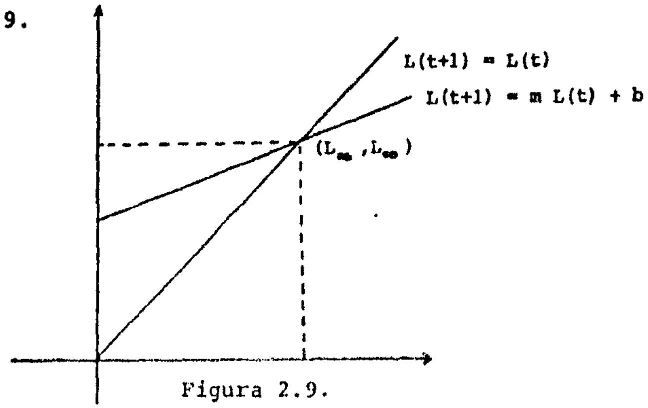


Figura 2.9.
La gráfica de $L(t + 1) = m\,L(t) + b$

Además, la equivalencia de las ecuaciones (18) y (19) provee un método directo para evaluar los parámetros L_∞ y k de la ecuación (14). En efecto:

Como $m = 1 + q$ y, a su vez, $-k = \ln(1 + q)$ entonces:

$$-k = \ln m \qquad (20)$$

En tanto que como $b = -q\,L_\infty$, entonces $L_\infty = \frac{b}{-q}$, de manera que

$$L_\infty = \frac{b}{1 - m} \qquad (21)$$

Por otro lado, esta forma de encontrar L_∞ y k fue planteada por Ford-Walford (el método recibe su nombre) con un enfoque que - más allá de la frialdad de las ecuaciones - está basado en una interpretación biológica consistente con lo que se está modelando, a saber: la ecuación (19) dice cómo cambia $L(t + 1)$ [la talla *una unidad de tiempo después del tiempo* t] al variar $L(t)$ [la talla en t]; hay una sola posibilidad de que $L(t + 1)$ y $L(t)$ sean iguales y es *que el organismo ya no crezca* y esto, según las premisas del modelo, ocurriría *cuando se hubiere alcanzado la talla máxima*. Es decir que:

$$L(t + 1) = L(t) \qquad (22)$$

si y sólo si ambas variables son iguales a L_∞. De modo que, sustituyendo este valor en la ecuación (19) se tiene[23]:

$$L_\infty = m\,L_\infty + b$$

de donde, al despejar L_∞, se obtiene nuevamente la ecuación (21) que, geométricamente, tiene la siguiente interpretación: el punto de coordenadas (L_∞, L_∞) es el único punto que puede estar simultáneamente en la recta de la ecuación (19) y en la de ecuación (22) de manera que viene a ser *el punto de intersección de la primera con la recta a 45°* (que es la segunda, véase la figura 2.9.).

Con lo anterior se tendrían dos parámetros de la ecuación (14) y en la sección anterior discutimos el método para determinar el tercero: efectivamente, como $L_\infty - L(0) = S_o$ y ya conocemos L_∞, basta encontrar "S inicial" para encontrar $L(0)$ [S_o sale al aplicar la transformación semilog a los datos de la forma $(t_i, \ln S_i)$] sin embargo, en lugar de buscar $L(0)$, es preferible encontrar otro parámetro pues en mucha de la literatura en la que aparece este modelo, la ecuación (14) se presenta preferentemente en la forma que von Bertalanffy le dió en 1936:

$$L(t) = L_\infty\,[1 - e^{-k(t-t_o)}] \qquad (23)$$

en la que t_o *representa el tiempo hipotético (o del modelo) en el que la talla era 0*, es decir que t_o satisface la condición:

$$L(t_o) = 0$$

La siguiente manipulación algebráica nos permitirá, primero, ver que (14) y (23) son efectivamente equivalentes y luego, calcular t_o:

Empecemos por factorizar L_∞ en la ecuación (14):

$$L(t) = L_\infty\,[1 - \frac{S_o}{L_\infty}\,e^{-kt}] \qquad (24,$$

Ahora, calculemos $L(t_o)$ con esta fórmula y apliquemos la condición que define t_o:

$$L_\infty - S_o\, e^{-kt_o} = 0$$

entonces:

$$e^{-kt_o} = \frac{L_\infty}{S_o} \quad \text{ó, equivalentemente:} \quad e^{kt_o} = \frac{S_o}{L_\infty} \qquad (25)$$

de manera que al sustituir esta última expresión en (24) tenemos:

$$L(t) = L_\infty [1 - e^{kt_o} e^{-kt}] \qquad (26)$$

que es efectivamente equivalente a (23) (¿por qué?). Además, (25) implica que

$$t_o = \frac{\ln S_o - \ln L_\infty}{k} \qquad (27)$$

de modo que t_o también se obtiene calculando la "S inicial" pues ya conocemos k y L_∞. Recordemos ahora que

$$S(t) = S_o\, e^{-kt} \quad \text{implica} \quad \ln S = -k\,t + \ln S_o \qquad (28)$$

de modo que basta encontrar la ordenada al origen de la relación lineal entre $\ln S(t)$ y t para, finalmente, conocer t_o.

Así, lo anterior podemos resumirlo y aplicarlo de la siguiente manera: dada una colección de datos de edad t [unidades de tiempo] contra talla $L(t)$ [unidades de longitud] cuyo vaciado en un plano cartesiano presenta una disposición típica como la de la figura 2.7., para ajustar a tales datos una *ecuación de Bertalanffy* de la forma

$$L(t) = L_\infty [1 - e^{-k(t-t_o)}]$$

es necesario calcular los parámetros

L_∞ = talla o longitud máxima
$-k$ = tasa instantánea de decrecimiento de $S(t) = L_\infty - L(t)$
t_o = edad del modelo en la que la longitud es cero.

Cálculo que se lleva a cabo según el siguiente procedimiento:

- Se encuentra la recta de mínimos cuadrados de los puntos de la forma $(L(t), L(t+1))$. Que tan bueno sea este ajuste es un indicador de lo acertado de elegir este modelo para nuestros datos. Si el ajuste de m.c. da que

$$L(t+1) = m\, L(t) + b$$

debe satisfacerse que $0 < m < 1$ y que $b > 0$.
- De lo anterior se obtiene que:

$$L_\infty = \frac{b}{1-m} \qquad \text{y} \qquad -k = \ln m$$

- Se busca ahora la ecuación de m. c. de las parejas de la forma $(t, \ln S(t))$ donde $S(t) = L_\infty - L(t)$. De hecho, de tal ecuación ya se conoce la pendiente $-k$ por lo que sólo es necesario calcular la ordenada al origen que, según la ecuación (28), es igual a $\ln S_o$.
- Se obtiene el valor de t_o con la fórmula

$$t_o = \frac{\ln S_o - \ln L_\infty}{k}$$

Apliquemos esto a los datos de la tabla 2.1. en el siguiente

Ejemplo 3.1. Encontrar la Ecuación de Bertalanffy de los datos de camarón blanco que se citaron en el ejemplo 2.1. de este mismo capítulo.

Según la discusión precedente tenemos que empezar por encontrar la recta de m.c. de $L(t)$ vs $L(t+1)$; en la tabla 3.1. están los datos que necesitamos para el ajuste; además, incluimos en ella los valores de $\ln S(t)$ que también vamos a emplear (para ello usamos el valor de L_∞ que aquí calcularemos)

Tabla 3.1.

Camarón blanco (*Penaeus vannamei*)

t	L(t)	L(t+1)	ln S(t)
1	5.8	9.2	2.6493
2	9.2	11.7	2.3744
3	11.7	13.7	2.1096
4	13.7	15.1	1.8318
5	15.1	16.3	1.5779
6	16.3	17.2	1.2933
7	17.2	17.8	1.0097
8	17.8	18.4	0.7630
9	18.4	18.8	0.4349
10	18.8	19.1	0.1352
11	19.1	19.2	-0.1686
12	19.2	----	-0.2946

Como puede verificar el lector, la mencionada recta de m.c. tiene ecuación:

$$L(t+1) = 0.7620\ L(t) + 4.7477$$

de donde, aplicando las ecuaciones (20) y (21) tenemos:

$$L_\infty = \frac{4.7477}{1 - 0.7620} \qquad y \qquad -k = \ln 0.7620$$

por lo que $\quad L_\infty = 19.9448 \qquad y \qquad -k = -0.2719$

Por otro lado, como se menciona en el apéndice C, en una recta de m.c. siempre está el punto cuya primera coordenada es la media aritmética de "las x_i" y cuya ordenada es la media correspondiente de "las y_i", de manera que para calcular la ordenada al origen de la recta de mínimos cuadrados de t vs ln S(t), basta calcular las medias correspondientes a estas variables y sustituir en la fórmula:

$$\ln S_o = \overline{\ln S(t)} - (-k)\ \overline{t}$$

donde la testa (o gorrito) sobre las literales denota la mencionada media; así:

$$\ln S_o = 1.1430 - (-0.2719)(6.5)$$
$$= 2.9104$$

y como

$$\ln L_\infty = \ln 19.9448$$
$$= 2.9930$$

entonces, al sustituir lo que corresponde en la fórmula (27), se tiene:

$$t_o = \frac{2.9104 - 2.9930}{0.2719}$$
$$= -0.3038$$

de suerte tal que la ecuación de Bertalanffy que se busca es:

$$L(t) = 19.94\ [1 - e^{-0.27(t+0.3)}] \qquad (29)$$

La precisión descriptiva del modelo es sorprendente. Juzgue el lector si no con la siguiente tabla de valores calculados en la que, para mayor comodidad hemos incluido los observados:

Tabla 3.2.

t	L(t) observada	L(t) calculada
1	5.8	5.90
2	9.2	9.23
3	11.7	11.76
4	13.7	13.70
5	15.1	15.18
6	16.3	16.30
7	17.2	17.17
8	17.8	17.82
9	18.4	18.33
10	18.8	18.71
11	19.1	19.00
12	19.2	19.22

Recordemos que, en este caso, t está dada en meses y L en cm

La relación peso-edad.

Antes de describir lo que propiamente es el modelo de Bertalanffy para esta función biométrica conviene hacer la siguiente aclaración: la segunda premisa básica respecto al crecimiento, se refiere a cierta "capacidad de crecer" que disminuye a partir de cierta edad; en el caso de la variación del peso, sucede que - para un buen número de organismos - se registra un crecimiento exponencial temprano en el que la mencionada "capacidad" aumenta progresivamente a razón constante por u. de t.; sin embargo, para que se cumpla la primera premisa (la de las dimensiones "tope"), es imprescindible que este modo de crecer cese y dé lugar a un aumento progresivamente más lento; en términos generales, diremos que el modelo exponencial de crecimiento será válido hasta el momento en que se produzca el cambio. Por esto, el modelo construido en el capítulo anterior y el que ahora discutiremos no son contradictorios. Ahora sí, sale el modelo de Bertalanffy:

En el caso de las especies de "respiración proporcional a la superficie" (peces, mamíferos y lamelibranquios según la clasificación del padre del modelo), suele suceder, como lo hemos dicho ya varias veces, que W varía alométricamente con la longitud L de manera aproximadamente cúbica de suerte que:

$$W(L) = c\,L^{a} \qquad \text{donde } a \approx 3 \qquad (30)$$

De esta forma, si sustituimos (23) en (30) -esto es, si *componemos* la función $L = L(t)$ con la función $W = W(L)$ (Cf. apéndice B de este capítulo)- obtendremos el peso como función de la edad. Veamos cómo:

$$W(t) = W[L(t)] = c\,[L(t)]^{a} \quad \text{con} \quad a \approx 3$$

y, por lo tanto:

$$W(t) = c\{L_{\infty}[1 - e^{-k(t-t_0)}]\}^{a}, \qquad a \approx 3$$

Finalmente, si denotamos con W_{∞} al tope del peso o peso máximo, se tiene:

$$W(t) = W_{\infty}\,[1 - e^{-k(t-t_0)}]^{a} \qquad (31)$$

donde $\qquad W_{\infty} = c\,L_{\infty}^{\;a} \qquad$ y $\qquad a \approx 3$

Bajo estas condiciones, invariablemente se tiene que la gráfica de $W = W(t)$ es una curva en forma de "S", razón por la cual se dice que es una *curva sigmoidea* con tres zonas bien diferenciadas:

- la del principio, de lento pero cada vez más rápido crecimiento,
- la intermedia, de "inflexión" o de máxima velocidad de crecimiento y
- la final, de crecimiento lento y progresivamente menos rápido.

(véase la figura 2.10.)

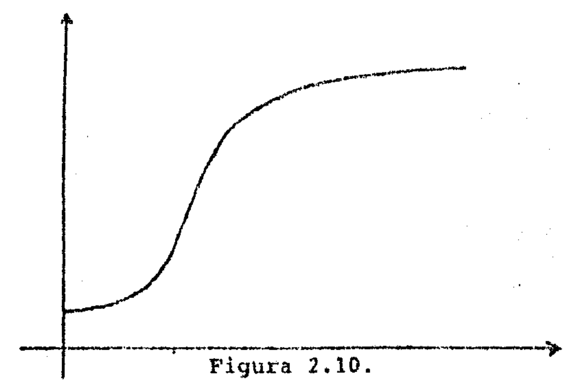


Figura 2.10.

Comportamiento típico de la curva $W = W(t)$ con ecuación (31); "animales de respiración proporcional a la superficie"

El conocimiento de este comportamiento tiene consecuencias útiles en pesquerías (más generalmente, en estrategias de explotación de recursos renovables que casen con el modelo): no es aconsejable capturar durante las dos primeras etapas - los bichos, o están muy chicos o , en poco tiempo, tienen la posibilidad de crecer mucho de modo tal que si se quiere aprovechar el recurso de la mejor manera (al menos desde el punto de vista de *la máxima biomasa que puede obtenerse por individuo*), conviene capturarlo al final de la segunda etapa. Calcular el momento de la máxima rapidez de crecimiento sólo puede hacerse con precisión si se usa un poco de cálculo diferencial básico. Aquí solamente diremos que cuando $a = 3$, el punto donde la "S" cambia de concavidad tiene como ordenada el valor 8/27 de W_∞. Con esto es relativamente sencillo dar con la edad en la que el organismo deja de crecer cada veás rápido para empezar a hacerlo cada vez más despacio (Cf. ejercicio 3.1. del cuestionario al final de esta sección). Por lo pronto, podemos concluir el

Ejemplo 3.1. (continuación) Según lo anterior, la ecuación de crecimiento de los datos de camarón blanco que enlistamos en la tabla 2.1., correspondiente a la relación peso-edad, se obtiene sustituyendo (29) en (7), con lo que:

$$W(t) = 26\,[1 - e^{-.27(t+.3)}]^{3.07} \qquad (31)$$

y se tiene un valor de 26 gramos para el peso máximo del modelo. Terminamos la sección y el capítulo con la siguiente tabla de valores observados y calculados con (31). De nueva cuenta llamamos la atención del lector sobre lo certero del modelo:

Tabla 3.3.

t [meses]	W observado [g]	W calculado [g]
1	0.6	0.62
2	2.4	2.44
3	5.0	5.14
4	8.1	8.21
5	11.2	11.24
6	14.0	14.01
7	16.5	16.40
8	18.6	18.41
9	20.3	20.05
10	21.6	21.36
11	22.7	22.41
12	23.6	23.22

CUESTIONARIO

3.1. En las ecuaciones (23) y (31) despeje el tiempo t como función de L y W respectivamente. A continuación, use estas relaciones para determinar las edades a las que un individuo "promedio" de la población estudiada por Chávez a. mide 13 cm de longitud; b. pesa 13 gramos y c. su peso alcanza la máxima velocidad de crecimiento (suponga aquí que W es proporcional a una potencia cúbica de la longitud y tome como peso máximo el de (31)).

3.2. Kitasama-Hitoshy (1955), dan los siguientes datos de longitudes y edades del arenque del Pacífico *Clupea pallasii* pescado en aguas da costo occidental de Hokkaido entre 1910 y 1954. Las longitudes son promedios de un período de 45 años y las edades fueron determinadas en base a los anillos de las escamas.

Edad [años]	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Long. [cm]	25.70	28.40	30.15	31.65	32.85	33.65	34.44	34.97	35.56	36.03

Edad [años]	13	14	15
Long. [cm]	35.93	37.04	37.70

Determine la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy de estos datos. Luego, exprese la edad como función de la longitud y determine a los cuántos años el arenque del Pacífico alcanza la mitad de su longitud máxima. Finalmente, haga una tabla de valores observados vs. valores calculados de la longitud.

3.3. Según von Bertalanffy (1942), el crecimiento de *Acipenser stellatus* viene dado por la ecuación $L(t) = 201.1-(201.1-21.1)\,e^{-0.06t}$. Escriba esta fórmula en la forma de la ecuación (23) y diga, a partir de esto, cuánto valen la talla máxima y el tiempo en el que la longitud era cero. Luego, con los datos que se enlistan a continuación, revise el ajuste de Bertalanffy.

Edad [años]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Long. [cm]	21.0	32.0	42.3	51.4	60.1	68.0	75.3	82.3	89.0	95.3	101.6	107.6

(continuación)

Edad	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Long.	112.7	117.7	122.2	126.5	130.9	135.3	140.2	145.0	148.6	152.0

3.4. En 1976, Galicia R. encontró las siguientes relaciones biométricas y los siguientes parámetros Bertalanffyanos para dos poblaciones de camarón del Golfo de California (*Penaeus stylirostris y P. californiensis*, azul y café respectivamente) sin discriminación de sexos:

Azul: $W(L) = 3.628 \times 10^{-7} L^{3.6}$; $L_\infty = 229.77$, $k = 0.2147$ y $t_0 = -0.5075$

Café: $W(L) = 3.272 \times 10^{-6} L^{3.18}$; $L_\infty = 233.67$, $k = 0.1358$ y $t_0 = -0.7599$

Con ellos, arme las ecuaciones de crecimiento $L = L(t)$ y $W = W(t)$; luego, exprese t como función de L y W respectivamente.

3.5. (Linealización de la logística) Sea $N = N(t)$ el número de individuos que forman una población en el tiempo t. Si el medio es limitado, puede postularse que existe una población máxima o "capacidad de carga" a la que se aproximará la población cuando el tiempo transcurra indefinidamente. Si, además, ocurre que la variable $R(t) = (N_\infty - N)/N$ donde N_∞ denota la dicha capacidad de carga, disminuye de manera porcentualmente constante por u. de t., entonces puede probarse que[24]

$$N(t) = \frac{N_\infty}{1 + Ae^{-kt}} \qquad (*)$$

donde $A = (N_\infty - N_0)/N_0$, con N_0 = población inicial, y k la llamada "tasa de crecimiento a bajas densidades". Muestre que si se cumple la ecuación (*), entonces, hay una relación lineal entre t y ln R; ¿Cómo puede explotarse este hecho para determinar los parámetros A y k de dicha ecuación? Muestre que entre $R(t+1)$ y $R(t)$ también hay una dependencia lineal. ¿Cómo puede utilizarse esto en la determinación de N_∞? Finalmente, interprete fenomenológicamente a la función $R = R(t)$.

APENDICE A. MODIFICADORES SIMPLES DE LA GRAFICA DE UNA FUNCION.

Supondremos aquí que se conoce la gráfica de una función arbitraria f definida en un intervalo de la recta real (i.e. que el dominio de definición de f es todo un segmento de recta numérica). Discutiremos ahora qué relación existe entre la gráfica de f y las de las siguientes funciones:

i. $g(x) = f(x) + b$ donde f y g difieren por la suma de una constante b.

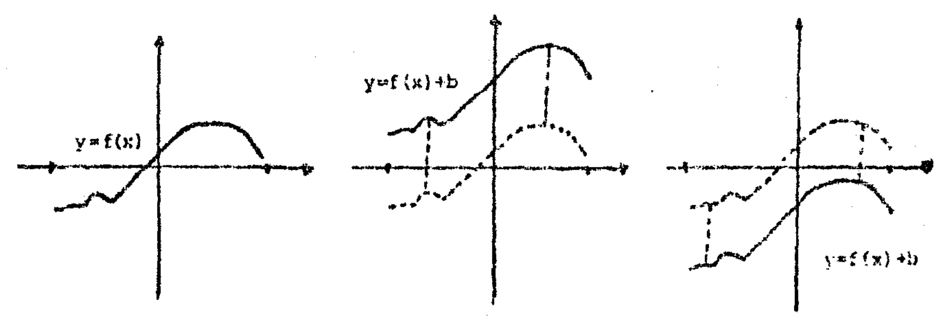
ii. $h(x) = c\, f(x)$ donde h se llama "el producto de f por la constante c"

iii. $T_a(x) = f(x-a)$ en la que f se aplica en el argumento más la constante a y que recibe el nombre de "a-traslación de f".

iv. $z(x) = f(kx)$ en la que f se aplica en el argumento magnificado por el factor constante k; tal función z recibe el nombre de "cambio de escala".

Esto es: ¿cómo se modifica la gráfica de f en cada uno de los casos i. a iv.? Veamos.

i. Si $g(x) = f(x) + b$, la gráfica de g es un "desplazamiento" de la de f, b unidades hacia arriba si b es positiva y $-b = |b|$ unidades hacia abajo si b es negativa[25] (véase la figura A.1.), por que la ordenada sobre cada x del dominio aumenta o disminuye "uniformemente" en una constante.



b >0 b <0

Figura A.1.

ii. Si $h(x)= c\ f(x)$, los cambios en la gráfica de f dependen, como en el caso anterior, tanto de si c es positiva o no como del "tamaño" de c. Nos explicamos:

Si $c>0$, $c\ f(x)$ "alarga" o "encoge" la ordenada de cada punto de la gráfica de f (esto es, que se deforma la gráfica verticalmente) por un factor igual a c: alarga cuando $c>1$ y encoge si $0<c<1$.

Ahora, si $c<0$, además de magnificar la ordenada por un factor igual a c , la gráfica se refleja con respecto al eje horizontal o, equivalentemente, la reflexión de la gráfica de f con respecto al eje de las abscisas se alarga o se encoge con respecto al mismo eje según si $|c|>1$ o $|c|<1$. (ver las figuras A.2. y A.3.).

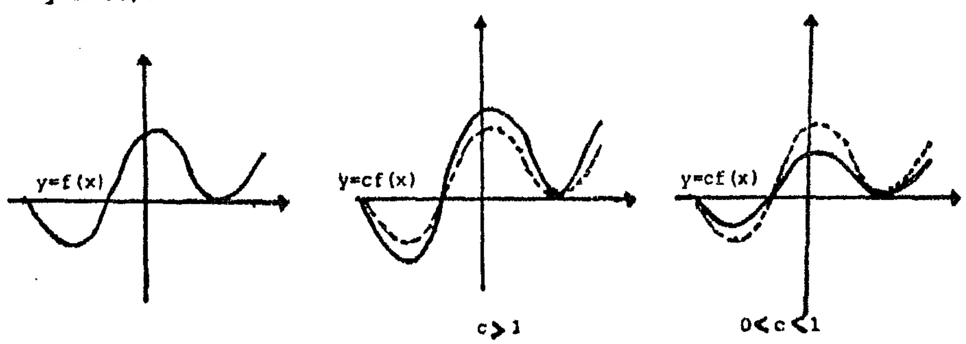


Figura A.2. $c>0$

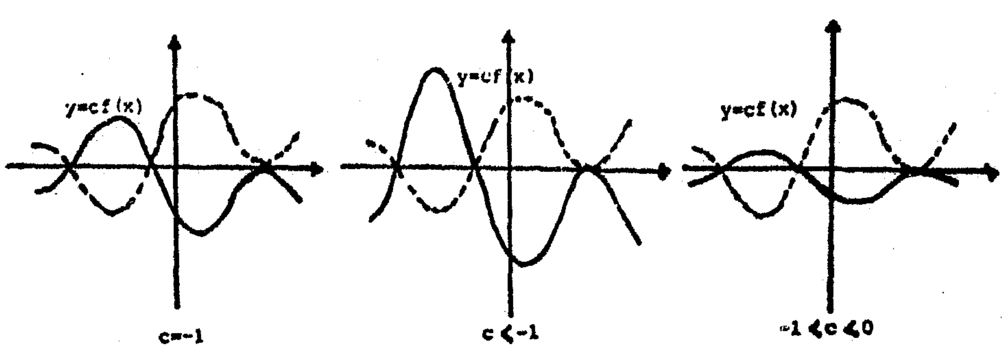


Figura A.3. $c<0$

iii. Para describir cómo obtener la gráfica de

$$T_a(x)= f(x-a)$$

a partir de la de la función f, conviene observar primero que si f está definida en un intervalo de extremos r y s (donde $r<s$) será necesario, para que T_a esté definida, que el argumento x-a pertenezca precisamente al segmento de recta comprendido entre r y s; por lo tanto, $T_a(x)$ define efectivamente un número real sólo si x es un punto del intervalo con extremos r+a y s+a pues de este modo, al restar a de cada elemento, obtendremos un número entre r y s.

Esto tiene las siguientes consecuencias geométricas:

- Si la gráfica de f "se levanta" sobre $[r,s]$[26], la de T_a se levantará sobre $[r+a,s+a]$.

- Cada punto de la gráfica de T_a - esto es, cada pareja de la forma $(x,T_a(x))$ - tiene la misma ordenada que el punto de la gráfica de f con abscisa x-a; es decir, que

- Si desplazamos "punto por punto" la gráfica de f desde el intervalo $[r,s]$ hasta el intervalo $[r+a,s+a]$, obtendremos la gráfica de T_a. Así, si $a>0$, el desplazamiento se hará hacia la derecha, en tanto que si $a<0$, la gráfica de f deberá moverse $|a|$ unidades hacia la izquierda (¿porqué?) (véase la figura A.4.).

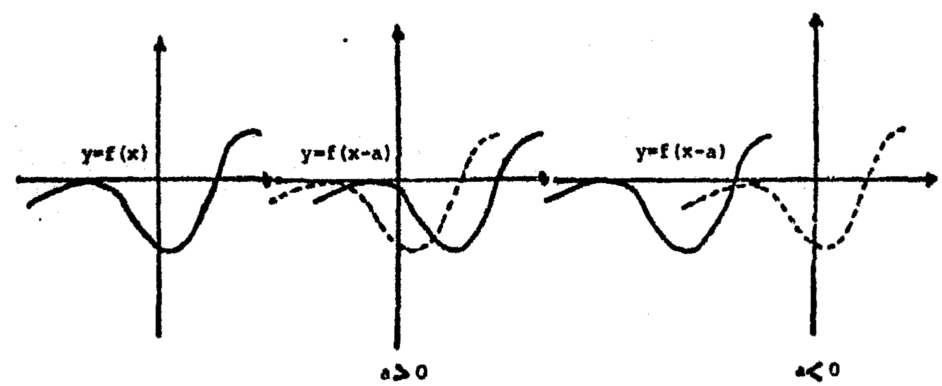


Figura A.4.

Debido a esta característica de correr la gráfica de f hacia la derecha o hacia la izquierda, las funciones del tipo T_a se llaman a-traslaciones sobre el eje horizontal y, cuando la variable independiente representa al tiempo, reciben el nombre de traslaciones en el tiempo.[27]

iv. Finalmente, veamos qué relación existe entre la gráfica de f y la de $z(x)= f(kx)$.

Como en iii., empecemos por considerar dónde deben estar las x para que kx caiga en el dominio de f: supongamos entonces que tal dominio es, otra vez, el intervalo $[r,s]$; así, se requiere que x esté entre r/k y s/k pues, de este modo, es seguro que -al multiplicar el argumento por k- obtendremos un número en el dominio de definición de f. Vale la pena observar, sin embargo, que si k es negativa, $r/k > s/k$.

Por lo demás, la ordenada de cada punto de la gráfica de z de la forma $(x,z(x))$ es igual a la ordenada del correspondiente punto de la gráfica de f $(kx, f(kx))$, lo que significa que z se comporta sobre su dominio variando igual que f sobre el suyo sólo que más o menos lentamente, según el valor de k. En efecto:

- Si $k > 1$, la gráfica de f es un "encogimiento" horizontal de la de f. Véase la figura A.5.1.
- Si $0 < k < 1$, la gráfica de z es un "estiramiento" horizontal de la de f. Véase la figura A.5.2.
- Si $k < 0$, también se obtiene la gráfica de z estirando o encogiendo la de f pero, además, reflejándola respecto al eje vertical. Equivalentemente: si k 0, refléjese la gráfica de f respecto al eje vertical y luego encójasele o estíresele según si $|k| > 1$ o si $|k| < 1$ respectivamente, para obtener la gráfica de z. Véanse las figuras A.5.3 y A.5.4..

Debido a la propiedad de cambiar "la velocidad" con que se recorre el dominio, este tipo de funciones reciben el nombre especial de cambios de escala.

La discusión anterior abre la posibilidad de obtener la gráfica de una gran variedad de funciones a partir de aquellas familias de gráfica "notable" y de los modificadores simples.

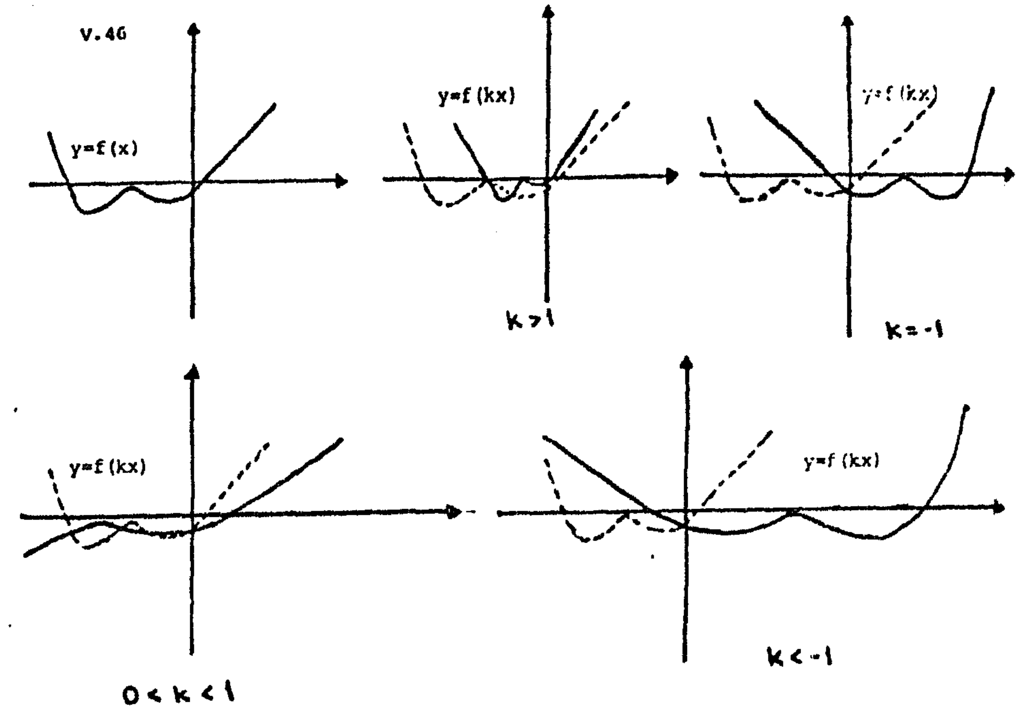


Figura A.5.

Veamos, por ejemplo, cómo trazar la gráfica de

$$g(x)= -\tfrac{1}{2}(2x-3)^3+1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

mediante aplicaciones sucesivas de tales modificadores:

- Primero, conviene notar que si hacemos $f(x)= x^3$, entonces

$$g(x)= -\tfrac{1}{2}f(2x-3)+1$$

- Ahora, $f(2x-3)$ implica que hay que hacer un cambio de escala y una traslación horizontal de la gráfica de f que, ciertamente, es notable. Luego consideraremos los cambios, en cierto sentido más sencillos, que provienen del factor $-\tfrac{1}{2}$ y del sumando 1.

Veamos ahora de qué traslación y de qué cambio de escala se trata. Si

$$h(x)= f(2x)$$

$f(2x-3)$ puede escribirse como $h(x-3/2)$ toda vez que $2x-3$ es el doble de $x-3/2$.

De este modo, luego de cambiarle la escala a f - según explicamos más arriba - hay que hacer una traslación de 3/2 de unidad hacia la derecha. En efecto:

$$h(x) = f(2x) = (2x)^3 \qquad \text{es un cambio de escala,}$$

$$h(x-3/2) = f[2(x-3/2)] = (2x-3)^3 \qquad \text{es una traslación.}$$

- Sólo falta ver a qué parte de la gráfica de f (que es una función definida sobre toda la recta real) le vamos a aplicar los modificadores que acabamos de mencionar. Ya sabemos que g está definida para $1 \leq x \leq 2$ y tenemos que averiguar en dónde andan los valores de $2x-3$ que son los que, finalmente, elevaremos al cubo. Veamos:

si $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq 2x \leq 4$ y, por lo tanto, $-1 \leq 2x-3 \leq 2$

de manera que sólo necesitamos conocer la gráfica de f entre -1 y 1 para obtener la de g sobre el intervalo $[1,2]$.

- Finalmente, el producto por el escalar $-\frac{1}{2}$ y la suma de la constante 1 producen los cambios - explicados por las propias gráficas - que se muestran en las últimas dos imágenes de la figura A.6.

Lo anterior provee, como decíamos arriba, una forma sencilla de trazar o esbozar la gráfica de funciones bastante más complicadas que las que llamamos "notables" (lineales, potenciales enteras y exponenciales) y es lo suficientemente general para ser aplicado a cualquier función cuya gráfica se conozca. En particular, aplicamos esto en el capítulo VI para obtener las gráficas de la familia de funciones circulares conocidas como funciones armónicas.

En este capítulo usamos los resultados de este apéndice en otro sentido, asaber: dada una gráfica "típica", identificamos una función que modificada "adecuadamente" tiene como gráfica la que se ha dado.

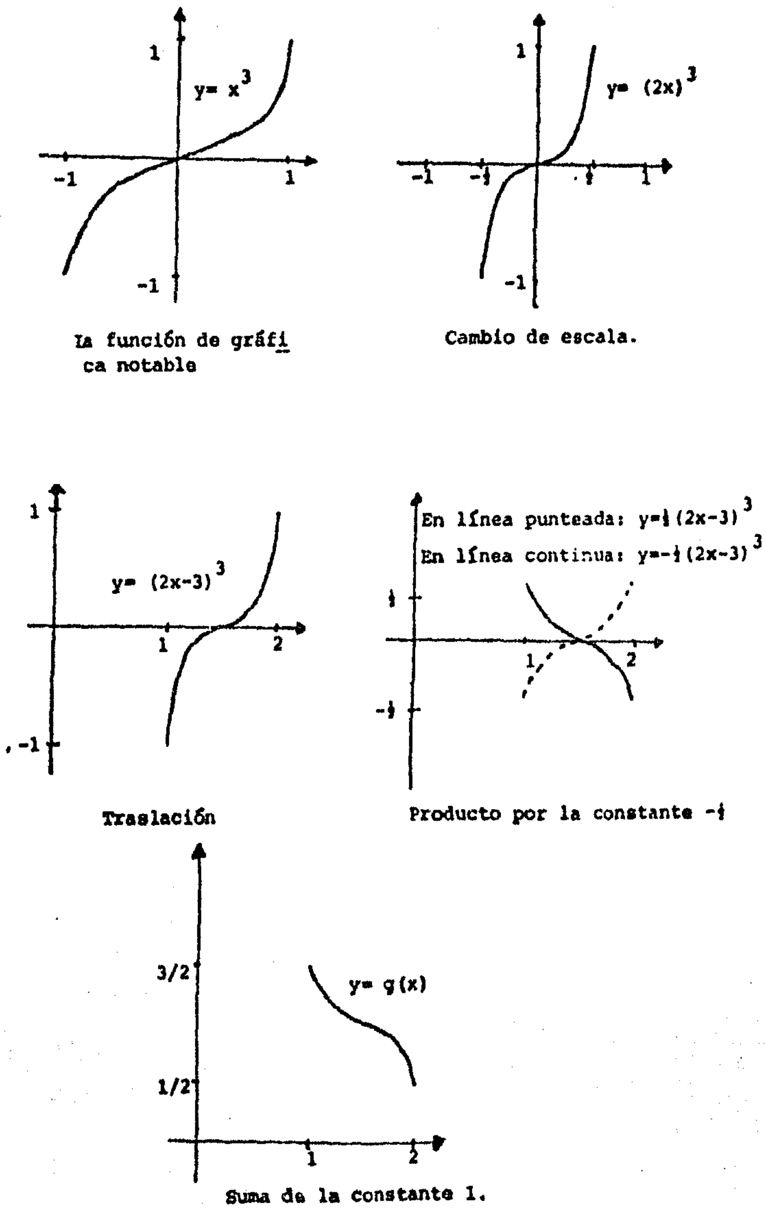


Figura A.6. Cómo obtener la gráfica de $g(x)=-\frac{1}{2}(2x-3)^3+1$

APENDICE B. COMPOSICION E INVERSA DE FUNCIONES.

En la matemática es frecuente, cuando se trata de analizar un objeto, descomponerlo en objetos más sencillos de la misma naturaleza; ya hemos visto un ejemplo de este procedimiento cuando se discutió - en el capítulo II - cómo era posible escribir un suceso aleatorio como sumas y productos de otros sucesos; en el apéndice anterior, por otro lado, hicimos algo semejante al reconocer en la regla de correspondencia de una función, una serie de funciones más sencillas - modificadores les llamamos allí - con efectos típicos sobre la gráfica que nos permitieron encontrar gráficas de funciones relativamente complicadas. En general, aunque tal hecho no tenga consecuencias tan inmediatas para el trazo de la gráfica y más bien su utilidad máxima se aprecie en el proceso de derivación[28], es posible *descomponer las funciones* de manera que se vean como la aplicación sucesiva de varias funciones más sencillas. Así por ejemplo, la función

$$r(x) = -\tfrac{1}{2}(2x-3)^3+1$$

fue presentada en el apéndice A. como el resultado de aplicar sucesivamente las siguientes reglas de correspondencia:

$$T_{3/2}(x) = x-3/2 \;;\; z(x) = 2x \;;\; f(x) = x^3 \;;\; h(x) = -\tfrac{1}{2}x \quad y \quad g(x) = x+1$$

En efecto:

- z, aplicada en el resultado de $T_{3/2}(x)$ es

$$z(x-3/2) = 2(x-3/2) = 2x-3$$

- f, aplicada en el resultado anterior, da:

$$f(2x-3) = (2x-3)^3$$

- h, aplicada en el resultado de arriba es

$$h[(2x-3)^3] = -\tfrac{1}{2}(2x-3)^3$$

- y, finalmente, g aplicada en este último número es:

$$g[-\tfrac{1}{2}(2x-3)^3] = -\tfrac{1}{2}(2x-3)^3+1$$

De manera que:

$$r(x) = g[h[f[z[T_{3/2}(x)]]]]$$

Inversamente, si u y v son dos funciones cualesquiera y u(x) está en el dominio de v, podemos definir la *función compuesta* "*u seguida de v*" (que denotaremos con el símbolo $v \circ u$) mediante la regla de correspondencia:

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] \qquad (B.1.)$$

$v \circ u$ suele llamarse también "u composición v" o "v aplicada en u" y permite, dadas las funciones u y v -cada una con su significado particular desde el punto de vista fenomenológico - construir una nueva función (interesante en sí misma por alguna razón) en la que se describe cómo cambia la variable v con la variable x siendo que inicialmente se sabía cómo variaban v con u y u con x. Tal es el caso, por ejemplo de las funciones biométricas mediante las cuales llegamos, en el parágrafo 3. de este capítulo, a expresar el peso W como función de la edad t a partir de que sabíamos cómo variaban el peso con la longitud L y ésta con la edad (véanse las ecuaciones (30) y (31)).

En ocasiones, cuando es posible saber cómo una variable y es función de x, lo que importa para fines prácticos es conocer cómo cambia x cuando y varía. Tal es el caso, por ejemplo, cuando -conocida la longitud L de un organismo - calculamos su edad mediante el "despeje" de t en la ecuación de von Bertalanffy correspondiente a la relación talla-edad (Cf. ecuación (23) de este capítulo).

Resulta que existe la necesidad de "invertir" el papel de las variables y conviene recordar aquí que cuando introdujimos el lenguaje de las funciones en el capítulo I, mencionamos que la elección de cuál de las variables es dependiente y cuál independiente es bastante arbitraria pues si al observar un fenómeno se decide, por ejemplo, que s varía según cambia t, también es posible decidir que t es la que cambia según las variaciones de s... en realidad, no es éste un problema muy grave ya que bajo ciertas condiciones - suficientemente flexibles por cierto, por lo menos para el tipo de funciones que consideraremos por ahora - es posible establecer que si

$$s = s(t)$$

entonces

$$t = t(s)$$

Por ejemplo, la fórmula de la caída libre:

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad t \geq 0$$

es equivalente a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{2s}{g} = t^2 \qquad y \quad t = \left(\frac{2s}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad s \geq 0$$

de las cuales la última establece cómo varía t cuando cambia s; es decir, informa de cuánto tiempo debe transcurrir para que el móvil que cae libremente recorra s unidades de distancia.

Asimismo, la ecuación que establece cómo varía la presión atmosférica P con la altitud h:

$$P = P_o\, e^{-kh}$$

es equivalente a:

$$\frac{P}{P_o} = e^{-kh}$$

de donde:

$$\ln\left(\frac{P}{P_o}\right) = -kh$$

y, finalmente:

$$h = -\frac{1}{k}\,(\ln P - \ln P_o)$$

fórmula que nos dice, según la construcción que nos llevó en el capítulo IV a que P varía exponencialmente con h, a qué altitud h se tiene una presión P.

Pues bien, resulta que las funciones $t = t(s)$ y $h = h(P)$ a las que llegamos en los dos ejemplos anteriores son - toda vez que "invierten" el papel de las variables s y t y P y h, respectivamente - las *funciones inversas* de aquéllas cuyas reglas de correspondencia se establecen en la forma $s = s(t)$ y $P = P(h)$[29].

Este concepto de la función inversa tiene qué ver con el de la composición de funciones y he aquí la relación: supongamos que f y g son inversas; si construimos las funciones compuestas

$$g \circ f \qquad y \qquad f \circ g$$

tendremos un par de funciones "inocuas" en el sentido de que:

$(g \circ f)(x) = x$ para cualquier x y
$(f \circ g)(y) = y$ para cualquier y

es decir, que - aplicadas en un elemento de sus correspondientes dominios - dan el mismo elemento, lo dejan idéntico, igualito... Por esta razón, se dice que $g \circ f$ es la *función identidad* en su dominio, en tanto que $f \circ g$ lo es en el suyo[30].

Veamos, por ejemplo, los casos de las fórmulas de la caída libre y la presión atmosférica: ¿es cierto que $t \circ s$, $s \circ t$, $h \circ P$ y $P \circ h$ son iguales a sendas funciones identidad?

Como

$$(t \circ s)(x) = t[s(x)] = t(\tfrac{1}{2}gx^2)\ , \qquad x \geq 0$$

se tiene que:

$$(t \circ s)(x) = \frac{2(\tfrac{1}{2}gx^2)}{g} = x^2 = x$$

Por otro lado, si $y \geq 0$:

Por otro lado, si $y \geq 0$:

$$(s \circ t)(y) = s[t(y)] = s\left(\sqrt{\frac{2y}{g}}\right) = \tfrac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2y}{g}}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{2gy}{g} = y$$

de manera que, en efecto:

$$(t \circ s)(x) = x \qquad y \qquad (s \circ t)(y) = y$$

Por su parte:

$$(P \circ h)(x) = P[h(x)] = P\left[-\frac{1}{k}\ln\frac{x}{P_o}\right] = P_o\, e^{-k\left(-\frac{1}{k}\ln\frac{x}{P_o}\right)}$$

$$= P_o\, e^{\ln\frac{x}{P_o}} = P_o\,\frac{x}{P_o} = x$$

y, para toda y:

$$(h \circ P)(y) = h[P(y)] = h[P_o\, e^{-ky}] = -\frac{1}{k}\ln\frac{P_o\, e^{-ky}}{P_o}$$

$$= -\frac{1}{k}(-ky) = y$$

lo que muestra que, efectivamente:

$$(h \circ P)(x) = x \qquad y \qquad (P \circ h)(y) = y$$

La propiedad expresada mediante las ecuaciones (B.2.) se usa para definir las funciones inversas: se dice que g es *la inversa de f* si y sólo si se satisfacen tales ecuaciones[31]. Y la inversa de f puede también interpretarse como la función que "deshace lo que hace f".

Como ya vimos, cuando se conoce explícitamente la regla de correspondencia de f, la de su inversa g se encuentra despejando la variable independiente de f en términos de su variable dependiente.

Veamos ahora cómo obtener la gráfica de la inversa de f a partir de la propia gráfica de f: si (x,y) es un punto de ésta, (y,x) lo será de la gráfica de f^{-1} (véase la nota 31) (¿por qué?) de modo que cada punto de la primera gráfica da información respecto a la localización de exactamente un punto de la otra, ¿dónde está ese punto?

Un argumento geométrico simple muestra que (x,y) y (y,x) son simétricos con respecto a la recta y = x [32] que bisecta el primer cuadrante del plano. Por lo tanto, para trazar la gráfica de f^{-1}, basta reflejar la de f respecto a esta recta.

Conviene aclarar, sin embargo, que *no cualquier función tiene una inversa* y echaremos mano de la discusión inmediatamente anterior para exhibir el porqué de este hecho y las condiciones bajo las cuales sí existe la inversa. Sale:

Empecemos por observar que *no cualquier curva* del Plano Cartesiano es la gráfica de una función: si dos puntos distintos de la curva tienen la misma abscisa, tal no es gráfica de función alguna porque a un mismo elemento del dominio se le estarían asignando dos valores distintos de la variable dependiente y esto, recuérdese (véase el parágrafo 1. de este capítulo), está prohibido pues "la regla de correspondencia de una función asigna a cada valor de la variable independiente, uno y sólo un valor de la dependiente".

Por consiguiente, la inversa de f existe si y sólo si la reflexión de la curva y = f(x) respecto a la recta y = x, es la gráfica de alguna función.

Según esto, por ejemplo, la función potencial cuadrática

$$f(x) = x^2$$

definida para cualquier número real, no tiene inversa por que la reflexión de la parábola $y = x^2$ respecto a la recta que bisecta el primer cuadrante, no puede ser gráfica de función alguna (ver la figura B.1.).

Este hecho geométrico, por cierto, puede también describirse en términos de la propia regla de correspondencia: si f es una fun ción que le asigna el mismo valor a dos elementos distintos de su dominio (en este caso, por ejemplo, $f(2)=f(-2)=4$), entonces f no tiene inversa; en tanto que si cualesquiera dos elementos distintos del dominio de f tienen imágenes diferentes, f sí puede invertirse.

Véanse, como ejemplos de funciones cuyas inversas hemos encontrado: la de la ley de la caída libre y la de la presión cuyas gráficas y las de sus inversas se muestran en la figura B.2.

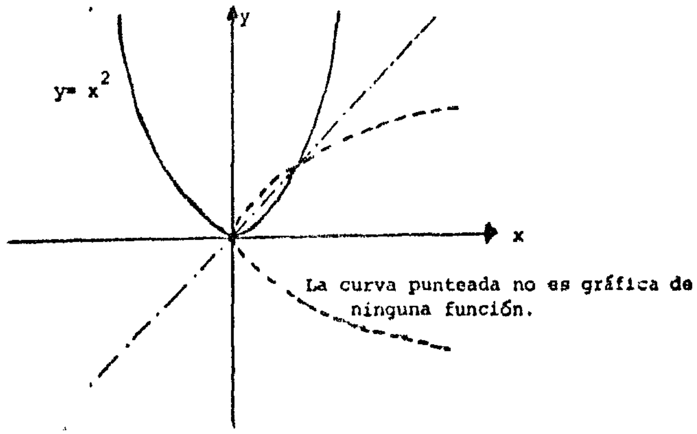


Figura B.1.

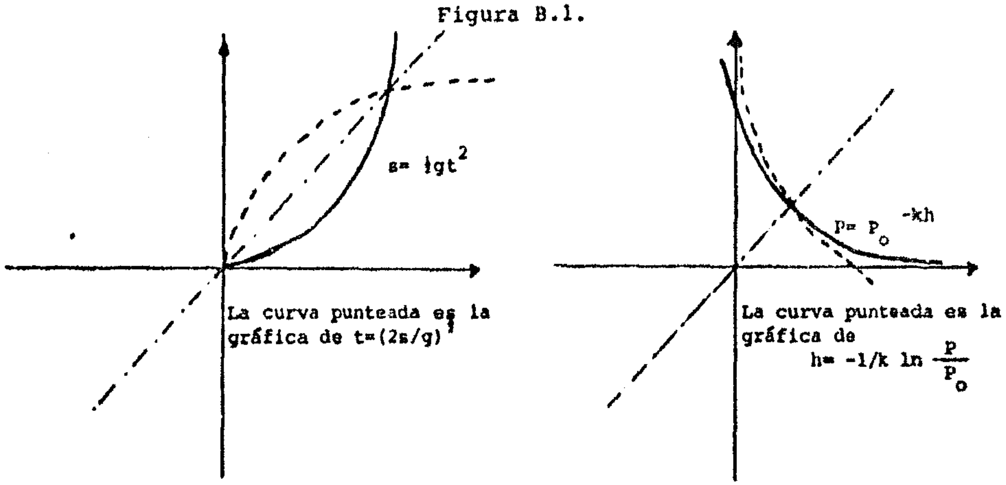


Figura B.2.
Cómo obtener la gráfica de la inversa de una función.

Vamos a terminar este apéndice aplicando la discusión anterior a la obtención de la gráfica de las funciones potenciales fraccionarias definidas en el semieje real no negativo (i.e. para valores de x mayores o iguales que 0). Veamos primero cómo obtener la gráfica de

$$g(x)=x^{1/m} \qquad m \text{ un natural y } x\geq 0$$

Como la regla de correspondencia de g establece que hay que tomar la m-ésima raíz de x, y ésta es precisamente la operación inversa de "elevar a la m", es fácil ver que g es la inversa de

$$f(x)=x^m \qquad x\geq 0$$

En efecto:

$$(f\circ g)(x)=f(x^{1/m})=(\sqrt[m]{x})^m=x$$

$$(g\circ f)(y)=g(y^m)=(y^m)^{1/m}=\sqrt[m]{y^m}=y$$

y, como ya conocemos la gráfica de f (véase la discusión sobre la familia de las funciones potanciales que se da al final del capítulo III), podemos obtener fácilmente la de g. En la figura B.3. se muestran las correspondientes a $m=2$ y 3.

Ahora bien, las funciones del tipo

$$g(x)=x^{k/m} \qquad k\neq 1, \text{ k entero}$$

tienen gráficas que, esencialmente, poseen las mismas características que las anteriores, y como pueden verse como la composición de una de éstas con una potencial entera, el método que se describe en la nota 33 - válido para obtener la gráfica de una función compuesta a partir de sus componentes - es aplicable y justifica nuestra afirmación. Recomendamos al lector interesado lo verifique y mostramos - también en la figura B.3. - las gráficas de

$$g(x)=x^{2/5} \quad \text{y} \quad g(x)=x^{5/2}$$

en donde una de ellas puede obtenerse con el método citado en tanto que la otra se traza reflejando la primera respecto a la recta que bisecta el primer cuadrante (¿porqué?).

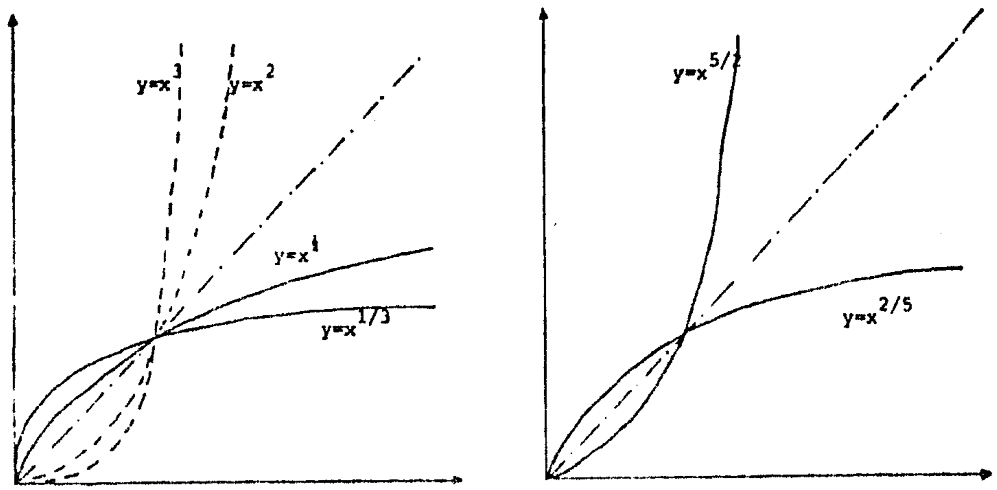


Figura B.3.
Gráficas de funciones potenciales.

APENDICE C. EL METODO PARA OBTENER UNA RECTA DE MINIMOS CUADRADOS.[14]

La Notación.

Supongamos que tenemos dada una lista de números

$$a_1, a_2, \ldots, a_N$$

en donde el subíndice que acompaña a cada literal señala el lugar que le corresponde al número en la lista. Denotemos con i a tal subíndice (desde luego que cualquier otra literal, excepto la misma a, es igualmente buena).

La suma

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_m$$

de los números consecutivos de la lista que van desde que i vale k hasta que i vale m, se representa abreviadamente con el símbolo:

$$\sum_{i=k}^{m} a_i$$

en él, Σ es la letra griega sigma mayúscula, a_i recibe el nombre de "sumando o término general", k es el "límite inferior" de la suma y m el "límite superior". Este símbolo suele leerse como "la suma desde k hasta m de las a_i".

Cuando se suman todos los elementos de la lista (i.e. cuando k=1 y m=N), es frecuente el uso de cualesquiera de los siguientes símbolos para denotarla:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \qquad \sum_{i} a_i \qquad \text{o} \qquad \sum a$$

que, por no representar ambigüedad alguna, puede leerse simplemente como "la suma de las a".

El ajuste de la recta de mínimos cuadrados.

Dada una lista de N puntos del Plano Cartesiano de la forma

$$(x_i, y_i) \qquad i=1,\ldots,N$$

la recta

$$y(x) = a + b\,x$$

que satisfaga que la suma de cuadrados

$$\sum \left(y(x_i) - y_i\right)^2$$

sea mínima, se llama la *recta de mínimos cuadrados* de tales puntos.

Si dicha recta no es vertical, los valores de a (la ordenada al origen) y de b (la pendiente) vienen dados por las fórmulas:

$$b = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad \text{(C.1.)}$$

$$a = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{N\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad \text{(C.2.)}$$

Ahora, denotemos con $\bar{x}$ y $\bar{y}$ las respectivas medias aritméticas de las x_i y las y_i, esto es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y}{N}$$

es posible probar que el punto del plano $(\bar{x}, \bar{y})$ siempre está en la recta de mínimos cuadrados y por lo tanto, la ordenada al origen también puede calcularse con:

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

(¿porqué?).

N O T A S

1 Bochner S. The Role of Mathematics in the Rise of Science. Princeton University Press. Princeton, N.J. 1966. pág. 217.

2 Ibidem. pág. 218.

3 Véase, sin embargo, la cita de Bertalanffy que se hace al final de la sección 2. de este mismo capítulo: el criterio de "la menor diferencia posible entre valores calculados y observados" sólo se aplica para fines descriptivos de interpolación y -siempre que es posible- se ajustan los datos a modelos preestablecidos.

4 Bertalanffy L. von. Teoría General de los Sistemas. Fondo de Cultura Económica. México, 1980. pp. 177 y ss.

5 Chávez E. A. Estudio sobre la Tasa de Crecimiento del Camarón Blanco (Penaeus *vannamei* Boone) de la Región Sur del Golfo de California. Ciencia, Méx. XXVIII (2) 79-85. 1973

6 Urquhart y Clow. Mathematics in Biology, Calculus and Related Topics. Preliminary Edition. W.W. Norton & Company, Inc. New York, 1974. pág. 153

7 Cf. Introducción al Método Experimental (IME), Apuntes 1983. Laboratorio de Física General, Facultad de Ciencias de la UNAM. México, 1983. O bien, consúltese: Crowe y Crowe. Mathematics for Biologists. Academic Press. London, New York, 1969. Secciones 4.2 y 4.8

8 Crowe y Crowe, Op. cit. pág. 104

9 Urquhart y Clow, Op. cit. pág. 149

10 Bertalanffy L. von, Op. cit. pp. 179 y ss.

11 Scheer B. J. Fisiología Animal. Ediciones Omega S.A. Barcelona, 1969. pp. 266 y ss.

12 Bertalanffy L. von, Op. cit. pp. 171.

13 Batschelet E. Introduction to Mathematics for Life Scientists. Second Ed. Springer-Verlag. New York, 1976 pág. 199

14 Urquhart y Clow, Op. cit. pág. 126

15 Batschelet E., Op. cit. pág. 198.

16 Margalef R. Ecología, pág. 575. Ediciones Omega S.A. Barcelona, 1977.

17 "El crecimiento se suele representar por una curva que corresponde a dimen-

siones medidas es tiempos sucesivos sobre un individuo, o más frecuentemente, medias obtenidas sobre toda la población en estudio o sobre una muestra de ella. La curva de crecimiento, estrictamente, no es una característica de la especie sino de la población... Cf. Margalef R. Op. cit. pág. 583.

18 Ibidem.

19 De hecho, la mayoría de estas especies de camarón son bianuales -esto es, si no se les depredara, vivirían dos años- por lo que la tendencia al peso máximo no es fácilmente observable si sólo se tienen datos de los primeros doce meses; sin embargo, no es éste el caso de la longitud pues es usual que el desarrollo longitudinal termine temprano en tanto que el correspondiente a la masa corporal dura mucho más.

20 En efecto, von Bertalanffy clasifica a los organismos animales en tres tipos metabólicos según tengan la respiración; además de los de la discusión en el texto, considera los de respiración proporcional al peso (larvas de insectos, ortópteros, *Helicidae*) y los de respiración de proporcionalidad intermedia a la superficie y al peso (*Planorbidae*) cuyas ecuaciones de crecimiento no son compatibles con las premisas simplificadoras sobre las que se construye el modelo que aquí se discute. Conviene que el lector interesado consulte la discusión original en: Bertalanffy L. von. Op. cit. pp. 179 y ss.

21 Sobre el modelo de Malthus para el crecimiento de una población sugiero se consulte el artículo de Pulido J. La función exponencial y las poblaciones de México, Com. Internas del Depto de Matemáticas de la Fac. de Ciencias de la UNAM, en prensa. Respecto a la Ley de Lambert puede verse el Simmons F. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. McGraw-Hill, México, 1972. pág. 37.

22 Recordamos al lector el párrafo al final de la segunda sección de este capítulo y agregamos esto: lo de la "interpretación biológica convincente" depende fuertemente de que "interroguemos a la Naturaleza" con un buen plan para poder interpretar adecuadamente sus respuestas; i.e. buscamos que los parámetros que aparezcan en el modelo tengan un significado fenomenológico claro.

23 Visto de otro modo, diremos que lo que se hace es resolver el sistema de ecuaciones simultáneas (19) y (22).

24 Cf. Esteva L. Dos Modelos de Crecimiento de Poblaciones. Com. Internas del Depto. de Matemáticas de la Fac. de Ciencias de la UNAM. En prensa.

25 El símbolo $|b|$ denota el valor absoluto de b, donde b es un número real. $|b|$ es igual a b si $b > 0$ y vale -b si $b < 0$. Por ejemplo: $|-3| = 3$ y $|e| = e$.

26 Usamos aquí y en otras partes de este trabajo, la siguiente simbología:
$[a,b]$ denota el conjunto de números reales t tales que $a \leq t \leq b$.
$]a,b[$ denota el conjunto de números reales t tales que $a < t < b$.
$]a,b]$ denota el conjunto de números reales t tales que $a < t \leq b$.
$[a,b[$ denota el conjunto de números reales t tales que $a \leq t < b$.
Así, el paréntesis "abierto" indica que el extremo contiguo no pertenece al conjunto, en tanto si junto a algún extremo aparece un paréntesis "cerrado", dicho extremo sí se incluye en el conjunto. Por razones más o menos claras, los segmentos rectilíneos enlistados arriba se llaman, respectivamente intervalo cerrado, abierto, abierto por la izquierda y cerrado por la derecha e intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.

27 Las funciones f que, definidas en toda la recta, son invariantes bajo traslaciones (i.e. son tales que $T_a f = f$ para alguna a real), juegan un papel teórico muy importante. La invariancia se refleja en que - cada a unidades - estas funciones se reflejan a sí mismas. ¿Cómo será su gráfica?

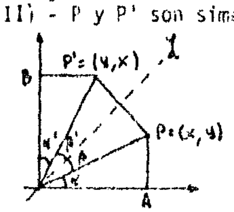
28 La derivación es una operación propia del cálculo diferencial que, según nuestro plan, debe discutirse en un segundo curso de matemáticas.

29 Obsérvese que si $s=s(t)$ es la inversa de $t=t(s)$, ésta será - recíprocamente - la inversa de aquélla.

30 Hay distintas formas de denotar a la función identidad en un conjunto A: suelen usarse I_A, 1_A o, simplemente, I o 1 cuando es claro del contexto que se trata de la identidad en tal conjunto y no en otro. De este modo:
$I_A(x) = 1_A(x) = I(x) = 1(x) = x$ para cualquier x que sea elemento de A.

31 Es frecuente el uso del símbolo f^{-1} para denotar a la inversa de f por analogía con los símbolos algebráicos que se usan para denotar al inverso multiplicativo de un número.

32 En efecto, considérense en la figura los triángulos semejantes OAP y OBP', dado que OP = P'O, el triángulo OPP' es isósceles y la bisectriz $\mathcal{I}$ del ángulo POP' es perpendicular al lado PP' y coincide con la mediatriz sobre ese lado de manera que - según la definición de simetría respecto a una recta (vése el capítulo III) - P y P' son simétricos con respecto a $\mathcal{I}$.



Ahora, la ecuación de $\mathcal{I}$ es $y = x$ pues los ángulos α y α', β y β' son, por parejas, iguales de manera que $\alpha + \beta = 45°$ es el ángulo de inclinación de $\mathcal{I}$ y esta recta bisecta el primer cuadrante.

33 Si conocemos las gráficas de las funciones componentes f y g, seguiremos este procedimiento para obtener la gráfica de la función compuesta $F = f \circ g$: Del punto A (ver figura), que se levanta sobre un valor dado de la variable independiente x, y cuya ordenada es g(x), trácese una recta horizontal que corte a la recta $\mathcal{I}$ en el punto B ($\mathcal{I}$ es la gráfica de la función identidad en los reales); desde B, levántese una vertical hasta cortar la gráfica de f en C y, de aquí, una nueva horizontal hasta cortar a la perpendicular que se levante sobre x en el punto D. Este es el punto de la gráfica de la composición F que corresponde a x, i.e. $D=(x,F(x))$.

34 Como se ve, la intención de este apéndice sólo es dar un "recetario" para hacer ajustes de rectas de mínimos cuadrados. La discusión sobre la teoría subyacente a la solución que aquí presentamos se difiere a un curso de estadística. Sin embargo, el lector interesado puede consultar desde ahora cual-

quier libro básico de esta rama de la matemática. Otra posibilidad es esperar a tener un conocimiento elemental de Algebra Lineal y consultar después la excelente presentación que hace del tema Howard Anton en: Anton H y Ch. Rorres. Aplicaciones de Algebra Lineal. Editorial Limusa. México 1979. Cap. 11, págs. 155 y ss.

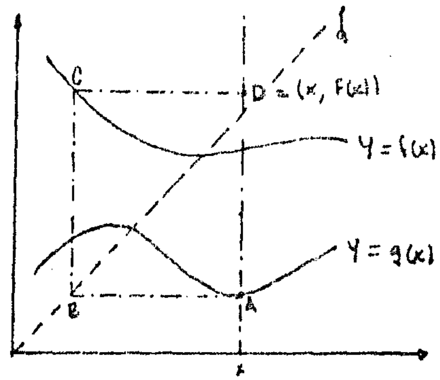


Figura de la nota 33.

CAPITULO VI. FUNCIONES PERIODICAS.

> *Armonía:...era, también, el nombre dado a la personificación griega del orden y la simetría. Según Eurípides, era hija de las nueve musas.* *

1. Antecedentes.

Hay muchos fenómenos en la Naturaleza que se repiten a intervalos iguales en el tiempo o el espacio. De hecho, esto permite que se pueda predecir con alguna confianza lo que ha de ocurrir en el futuro. Sucesos tan comunes como el día y la noche, la repetición anual de las estaciones o la configuración de una onda producida al alterar el sistema en equilibrio de un líquido en reposo, son ejemplos de este tipo de fenómenos cíclicos.

Por su parte, a pesar de que suelen ser extremadamente complejos, los ritmos biológicos también se caracterizan porque, luego de un cierto tiempo, se repiten a sí mismos; tal es el caso, por ejemplo, de la menstruación en las hembras humanas o, mejor dicho, de las reacciones hormonales que la regulan, de las explosiones demográficas del fitoplancton, de los ciclos reproductivos de los organismos o de sus temporadas de celo (recuérdense, sin ir más lejos, los burros en primavera), de las reacciones bioquímicas que regulan el sueño, etc.

Este capítulo trata de los modelos matemáticos, vale decir las funciones, idóneos para tratar este tipo de fenómenos; desde luego que deberán reflejar la característica fundamental: *tomar el mismo valor a intervalos regulares de su dominio*. Y ésta es la razón por la que empezamos por establecer la siguiente

* *Encyclopaedia Britannica.*

Definición 1.1. Sea f una función definida para cualquier número real. Se dice que f *es periódica de período* P, para algún real positivo P, si y sólo si

$$f(t + P) = f(t) \qquad (1)$$

para cualquier t.

Nótese que esta definición implica que una función de período P lo sea también de período 2P, 3P, ... y, en general, de período cualquier múltiplo entero de P (¿por qué?).

Por ejemplo, si suponemos que el período de un ciclo menstrual humano es de 28 días, también puede considerarse como de período 56 u 84, mas por razones de precisión, será conveniente distinguir el valor del mínimo período de entre todos los demás.

Diremos entonces que f *es periódica de período fundamental* P, si éste es el mínimo valor para el cual se satisface la ecuación (1).

Consecuentemente, la gráfica de cualquier función periódica presentará el mismo aspecto sobre cada intervalo de longitud igual a su período y, para todo fin práctico, es suficiente dibujarla sobre uno de tales intervalos para -en caso necesario- extenderla después a todo el dominio (ver figura 1.1.).

Otro importantísimo fenómeno modelable mediante funciones periódicas o combinaciones más o menos complicadas de éstas, es el de las mareas: se sabe que el efecto gravitacional de la Luna, el Sol y los planetas más masivos cercanos a la Tierra -Júpiter, Venus y Marte, fundamentalmente- producen este subir y bajar casi rítmico del nivel de las aguas del mar. Aunque es cierto que en él aparecen rasgos azarosos que hacen que, en realidad, el fenómeno no sea periódico, en un primer acercamiento a su estudio, es aconsejable considerar sólo aquellos aspectos que son consecuencia de la acción de los astros sobre la Tierra.

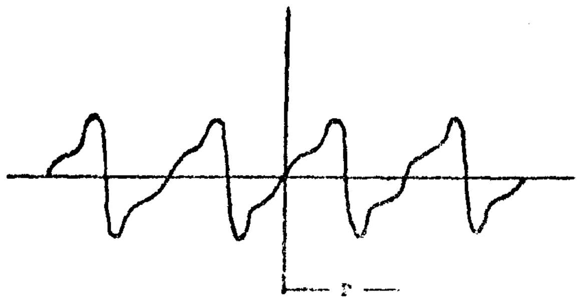


Figura 1.1. Gráfica de una Función Periódica de Período fundamental igual a P

La herramienta fundamental para hacer esto –y, de hecho, para iniciar el estudio de casi cualquier fenómeno periódico– son un par de funciones, conocidas desde la escuela secundaria, cuya definición ahora deberá extenderse a todos los números reales.

CUESTIONARIO

1.1. Dé tres ejemplos que no se hayan mencionado en el texto, de fenómenos periódicos o aproximadamente periódicos; en cada caso, establezca el valor del período fundamental.

1.2. Sea $Y=Y(X)$ una función definida en el intervalo $[a,b]$; *la extensión periódica de Y* es la función periódica de período fundamental $b-a$ que toma exactamente los mismos valores que Y sobre el intervalo $[a,b]$. Construya la extensión periódica de las siguientes funciones y dibuje la gráfica en, por lo menos, tres períodos consecutivos:

a. $Y(X) = X^2$ en $[-1,1)$ b. $Y(X) = e^X$ en $[0,1)$ Observe que se ha dejado abierto por la derecha el intervalo de definición en este ejercicio para evitar ambigüedad en la extensión.

2. Las funciones seno y coseno.

Sea S^1 el círculo de radio uno o *círculo unitario* del plano cartesiano R^2. Supongamos que la recta real R es un hilo infinito

sin grosor; enredemos este hilo alrededor de S^1 siguiendo las siguientes convenciones:

1. El cero real deberá fijarse en el punto $(1,0)$ de S^1.
2. La parte positiva de R se enredará, a partir de $(1,0)$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (llamado por esto *sentido trigonométrico positivo*) o, como suele abreviarse, *contrarreloj*.
3. La parte negativa, a su vez, será enredada en el sentido contrario o *a reloj* (figura 2.1.)

Dado que la circunferencia de S^1 es igual a 2π (recuérdese que la circunferencia es el perímetro del círculo), se tiene que, con cada segmento de esta longitud del hilo real, le daremos una vuelta completa a S^1 de tal suerte que, por ejemplo:

a. $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi$, y $-2\pi, -4\pi, \ldots, -2k\pi, \ldots$ "caen en $(1,0)$" para cualquier k entera positiva.

b. $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots, (2k-1)\pi, \ldots, -\pi, -3\pi, -5\pi, \ldots, -(2k-1)\pi$ "caen" en $(-1,0)$ para cualquier valor entero positivo de k. Nótese que π es la longitud de media vuelta sobre S^1.

c. $\pi/2$ "cae" sobre $(0,1)$ (¿por qué?) y lo mismo sucede con todos los números reales de la forma $\pi/2 + 2n\pi$, donde n puede tomar cualquier valor entero.

d. $-3\pi/4$ viene a dar sobre $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ pues este número ocupa 3/8 de vuelta a reloj en S^1 (véase la nota 1.), además, aquí caen también todos los reales que disten de $-3\pi/4$ en un múltiplo entero de 2π; a saber, todos aquéllos que puedan escribirse en la forma $-3\pi/4 + 2n\pi$, con n entera. (Véase la figura 2.2.).

A estas alturas debe ser evidente que el famoso enredijo recién descrito permite *asignarle, a cada real* t, *un elemento* $I(t)$ *del círculo unitario* y que, para cualquier valor del argumento t,

$$I(t) = I(t + 2\pi) \qquad (2)$$

La función I recibe el nombre de *identificación de* R *con* S^1 y, puesto que $I(t)$ es un elemento de R^2, I *define dos funciones reales de variable real:*

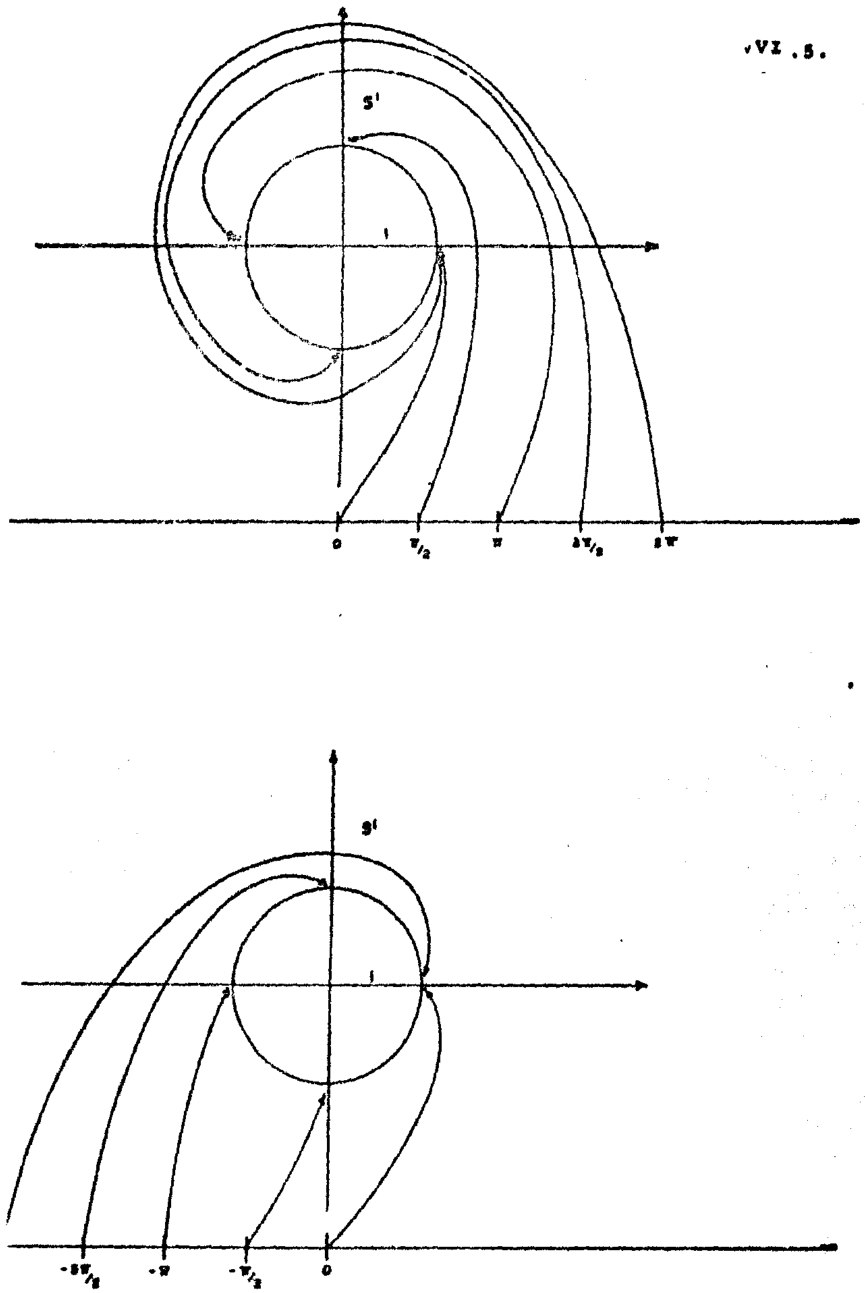


FIG. 2.1. EL ENREDIJO

1ª La que a cada t real le asigna la primera coordenada de $I(t)$ y

2ª La que, a la misma t, le asigna la segunda coordenada del mismo punto.

En otros términos:

$$I(t) = (X(t), Y(t)) \tag{3}$$

donde X y Y son funciones reales de variable real que satisfacen que

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t + 2\pi) \\ Y(t) &= Y(t + 2\pi) \end{aligned} \tag{4}$$

para toda t; es decir, que ambas funciones son periódicas de período 2π. Bueno, pues tenemos la mesa puesta para dar nuestra definición de las funciones seno y coseno *de cualquier número real*.

Definición 2.1. Sea I la identificación de R con S^1 que acabamos de construír, cuyas funciones coordenadas están dadas por la ecuación (3); la función X recibe el nombre de *función coseno* y la función Y se llama *función seno*. En lo sucesivo, usaremos la siguiente notación para describirlas:

$$\begin{aligned} X(t) &= \cos t \\ Y(t) &= \operatorname{sen} t \end{aligned} \tag{5}$$

Son consecuencias inmediatas de la definición 2.1. o requieren de un argumento geométrico más o menos sencillo, las afirmaciones que se hacen en la siguiente

Proposición 2.2.
1. $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$; $-1 \leq \cos t \leq 1$ para toda t.
2. El seno y el coseno son *periódicas de período fundamental* 2 .
3. El coseno es una función *par*.
4. El seno es una función *impar* (figura 2.3.)
5. $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

6. $\operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t$

$\cos(t+\pi) = -\cos t$

7. $\operatorname{sen}(t+\pi/2) = \cos t$

$\cos(t+\pi/2) = -\operatorname{sen} t$

En 2.2.5., el símbolo $\operatorname{sen}^2 t$ denota al número $(\operatorname{sen} t)^2$; análogamente, $\cos^2 t = (\cos t)^2$, de manera que

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

es sólo otra forma de enunciar el conocido Teorema de Pitágoras: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

La proposición anterior facilita el dibujo de las gráficas del seno y el coseno, de hecho, es suficiente saber cómo varían ambas funciones entre 0 y $\pi/2$ para, aplicando las ecuaciones 2.2.6. y 2.2.7., determinar cómo varían a lo largo de todo un intervalo de tamaño 2π.

Así, de la

Tabla 2.1.
El seno y el coseno de argumentos notables entre 0 y $\pi/2$.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos t$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\operatorname{sen} t$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1

se pueden obtener los valores de la

Tabla 2.2.
El seno y el coseno de argumentos notables entre $\pi/2$ y 2π.

t	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$
$\cos t$	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$
$\operatorname{sen} t$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$

por que todos los argumentos que en ella aparecen difieren de los

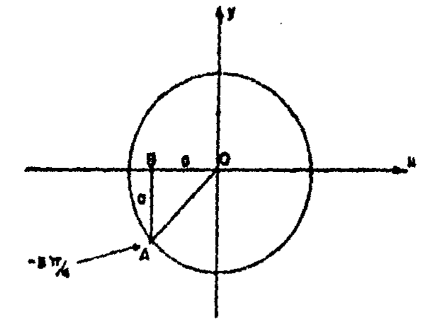


FIG. 2.2. $\frac{-3\pi}{4} \longmapsto (-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$

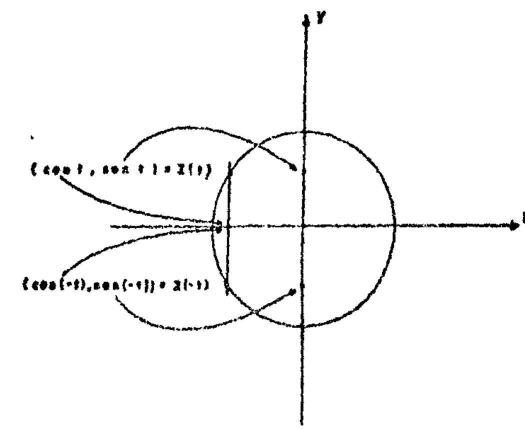


FIG. 2.3. LA PARIDAD DEL SENO Y EL COSENO.

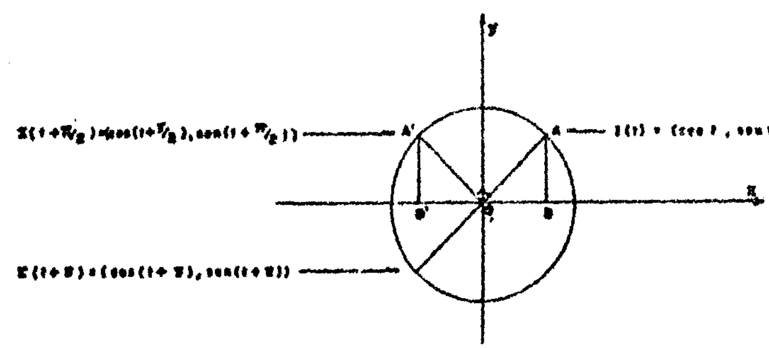


FIG. . .

de la tabla 2.1. en múltiplos enteros de $\pi/2$. En la figura 2.4. se exhiben las gráficas de las fuciones seno y coseno aunque, conviene aclararlo, se han utilizado escalas distintas en cada eje de coordenadas.

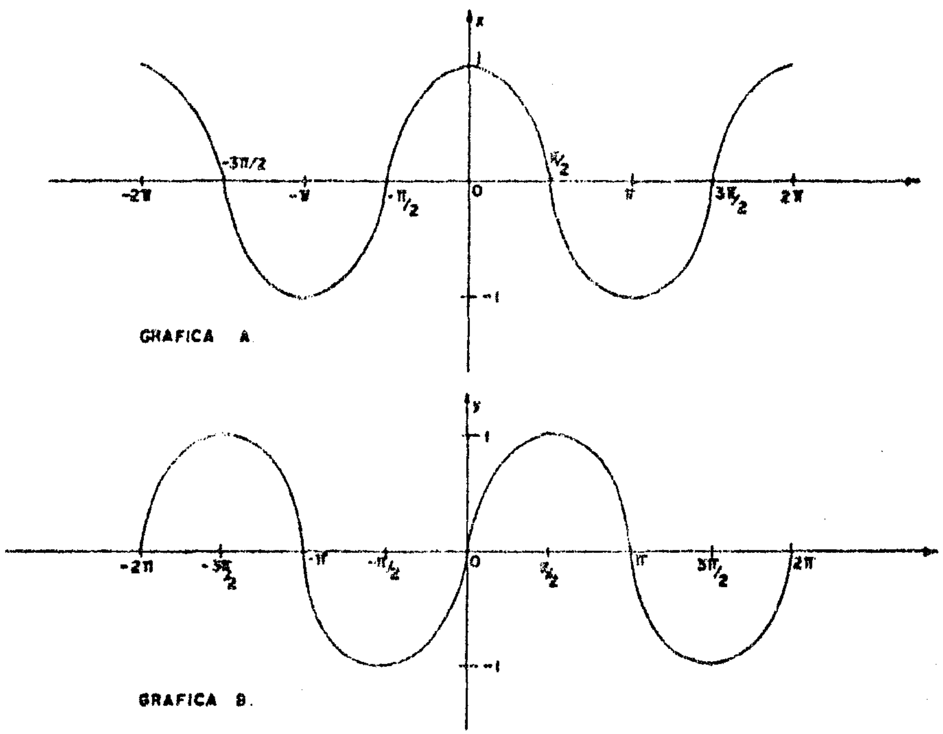


Figura 2.4.

A- LA GRAFICA DE $f(t) = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

B- LA GRAFICA DE $f(t) = \text{sen}\, t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Las funciones armónicas.

Decíamos arriba que las que construímos en la sección anterior, eran las herramientas fundamentales para modelar, entre otros fenómenos, el comportamiento periódico de las mareas; en realidad, los efectos gravitacionales de los cuerpos celestes cercanos a la Tierra sobre las masas de agua son descritos, *grosso modo* y cada uno por separado, por una función del tipo:

$$f(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \phi) \qquad (6)$$

Funciones que reciben el nombre de *funciones armónicas de frecuencia angular* ω. Cada terna de valores distintos de A, ω y ϕ determinan una armónica diferente; estos parámetros reciben los nombres -de claro origen físico- que se dan enseguida:

A se llama la amplitud
ω es la frecuencia angular y
ϕ es la fase.

La suma de las armónicas "producidas" por la Luna, el Sol y los planetas grandes en su paso por las cercanías del nuestro, sirve para construir un modelo aproximado del subir y bajar del nivel del mar que es más preciso entre más sumandos se tengan.

Veamos ahora el efecto geométrico de la variación de los parámetros que definen a las funciones armónicas (Cf. Apéndice A. del capítulo V. "Modificadores simples de la gráfica de una función" pp V.42. ss *supra*):

Notemos primero que el argumento sobre el cual se aplica la función sen en la ecuación (6), puede verse como la composición de una traslación con un cambio de escala; en efecto:

Sea

$$g(s) = \omega s$$

y sea

$$h(t) = t + \frac{\phi}{\omega}$$

entonces

$$(g_\circ h)(t) = g[h(t)] = g(t + \frac{\phi}{\omega})$$
$$= \omega(t + \frac{\phi}{\omega}) = \omega t + \phi$$

Por lo tanto, es posible obtener la gráfica de la función (6) a partir de la gráfica del seno, de la siguiente manera:

1° Dibujemos la gráfica de sen ωs sobre el intervalo $[0, 2\pi/\omega]$

Esto va a dar como resultado una onda senoidal completa pues, no es difícil probarlo, con el cambio de escala se obtiene una función periódica de período $2\pi/\omega$. (ver figura 2.5.).

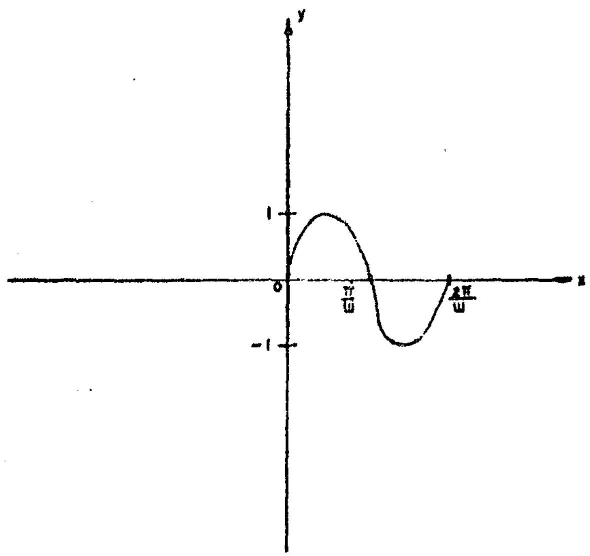


FIG. 2.5. LA GRAFICA DEL SENO (ωs).

2° Apliquemos ahora la traslación

$$h(t) = t + \frac{\phi}{\omega}$$

a la curva de la figura anterior. Si la fase es positiva, sabemos que dicha gráfica deberá recorrerse ϕ/ω unidades hacia la izquierda y que si la fase es negativa, haremos lo mismo hacia la derecha. (figura 2.6.)

3° Finalmente, alarguemos o encojamos esta última curva por un factor igual al valor absoluto de la amplitud y reflejemos la curva que obtengamos respecto al eje horizontal en caso de que A sea negativa. (figura 2.7.).

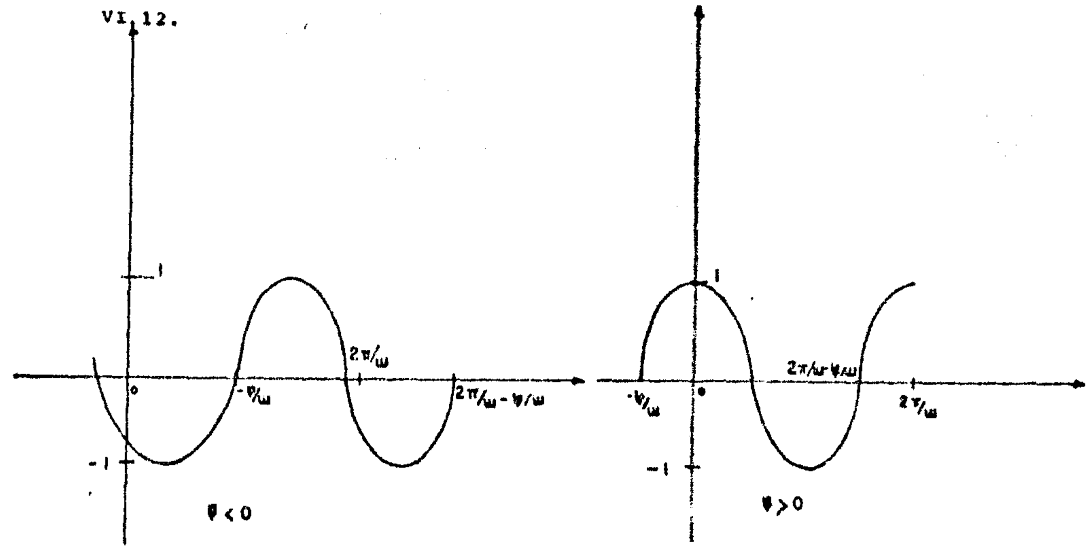


FIG.2.6 .LA GRAFICA DE Sen(ωt + ψ)

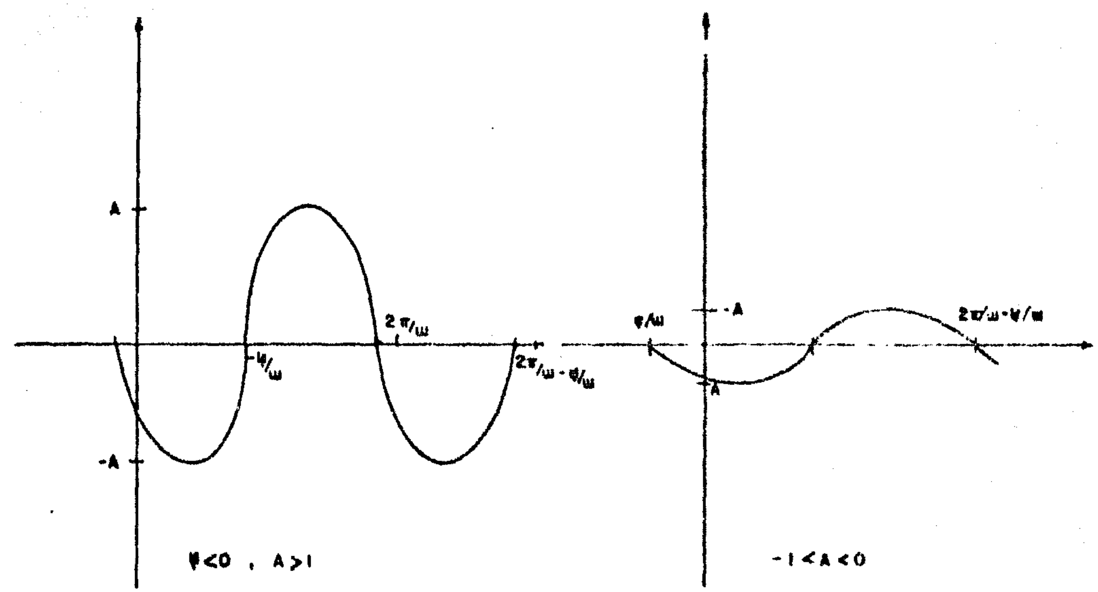


FIG.2.7..LA GRAFICA DE A sen (ωt + φ)

CUESTIONARIO

3.1. Indicar la amplitud, el período, la frecuencia angular y la fase de las armónicas (las definiciones necesarias para las armónicas cosenoidales son las obvias);

a. $Y = 2\operatorname{sen}(3X + 5)$; b. $Y = -\cos \frac{X-1}{2}$; c. $Y = \frac{2t+3}{6}$

d. $Y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2 \left(w - \frac{1}{6}\right)$

3.2. Construya las gráficas de las funciones:

a. $Y = \operatorname{sen} 2X$; b. $Y = 2\operatorname{sen}(X - \frac{\pi}{3})$; c. $Y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi X - 1.2)$

d. $Y = 2 + 2\operatorname{sen}(\frac{\pi X}{2} + \frac{\pi}{6})$; e. $Y = 2\cos \frac{X - \pi}{3}$.

3.3. Un punto efectúa un movimiento uniform a lo largo de una circunferencia de radio R, con velocidad lineal de v cm/s, tenien do por centro el origen de coordenadas y e el sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el momento inicial, la abscisa de dicho punto era a. Formar la ecuación de la oscilación armónica de la absci a del punto.

3.4. La siguiente figura mustra un mecanismo de manivela. El volante es de radio R, la biela es de longitud a. El volante gira uniformemente en el sentido de las agujas del reloj dando n vueltas en un segundo. En el momento t=0 en el que la biela y la manivela formaron una misma recta (posición del punto muerto), la cruceta (A) ocupó el punto O. Hallar la dependencia entre el desplazamiento x de la cruceta (A) y el tiempo t.

4. Descomposición de una armónica.

Proposición 4.1. Considérese la función armónica de frecuencia angular w

$$f(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi) \qquad (7)$$

Existen reales a y b tales que

$$f(t) = a \operatorname{sen} wt + b \cos wt \qquad (8)$$

Es decir que cualquier función armónica del tipo (7) puede descomponerse en una suma de armónicas de la misma frecuencia angular y *fase cero*. Geométricamente, que cualquier onda armónica es la suma de una senoidal y otra cosenoidal de la misma frecuencia angular.

Cómo encontrar la citada descomposición, es decir, cómo determinar los valores de a y de b depende de que recordemos o demos por sentada la fórmula de la trigonometría elemental para el seno de la suma de dos reales:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \qquad (9)$$

pues aplicándola a la expresión (7) se tiene de inmediato que, en (8), basta hacer

$$a = \cos \phi \qquad y \qquad b = \operatorname{sen} \phi$$

Tanto la proposición anterior como la 4.4 . que se enuncia más adelante, poseen una importancia teórica difícil de justificar por el momento; sin embargo, por su sencillez, las hemos incluído en este capítulo. De hecho, la 4.4. es la inversa de la 4.1. a saber, que cualquier suma de una onda senoidal con una cosenoidal de la misma frecuencia angular, es una armónica. Y, aunque es verdadera, es menos evidente. Para probarla necesitamos definir un nuevo par de funciones. Sale.

Definición 4.2. Las funciones cociente

$$\frac{\text{sen}}{\text{cos}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\text{cos}}{\text{sen}}$$

reciben, respectivamente, los nombres de *tangente y cotangente* y se denotan mediante cualquiera de los siguientes símbolos:

tan, tag o tg y cot o ctg

De esta manera, se tiene que

$$\tan t = \frac{\text{sen } t}{\cos t} \qquad \text{si } \cos t \neq 0 \qquad (10)$$

y que

$$\cot t = \frac{\cos t}{\text{sen } t} \qquad \text{si sen } t \neq 0 \qquad (11)$$

y como $\cos t = 0$ si y sólo si t es un múltiplo impar de $\pi/2$ y sen $t = 0$ cuando y sólo cuando t es cualquier múltiplo entero de π, entonces:

tan t está definida si $t \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$, k entera

y cot t está definida si $t \neq k\pi$, k entera.

De esta manera se obtienen dos funciones periódicas de periodo fundamental π (¿por qué?) que no están definidas en ciertos puntos de R que señalan, además, los extremos de cada uno de los intervalos en donde cada una de estas funciones "puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel". En la figura 4.1. se muestran las gráficas de ambas funciones. A continuación, discutiremos con algún detalle el comportamiento de la tangente e invitamos al lector a hacer lo propio con la cotangente.

Veamos cómo se porta la tangente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$; - a la restricción de tan a este intervalo le llamaremos *la rama principal de la tangente* - estaremos de acuerdo, para empezar, que esto debe ser suficiente para darse una idea general del comportamiento *en todo el dominio*:

1ª Cuando t recorre dicho intervalo, sen t va, monótonamente,

de -1 a 1, anulándose cuando $t = 0$.

Al "mismo tiempo", cos t va, de valores muy cercanos a 0 cuando t anda cerca de $-\pi/2$, a 1 cuando $t = 0$ para luego decrecer nuevamente y tomar, cerca del otro extremo, valores cada vez más próximos a 0.

Por lo anterior, al considerar el cociente $\frac{\text{sen } t}{\cos t}$, se tiene que:

- cerca de $-\pi/2$, la tangente toma valores negativos de valor absoluto muy grande.
- la tangente se anula en $t = 0$.
- cerca de $\pi/2$, la tangente toma valores positivos muy grandes.

Si, además, aceptamos la continuidad de la variación de la tangente, entonces *dado cualquier número real* Y *siempre es posible encontrar un argumento* t *en el intervalo entre* $-\pi/2$ y $\pi/2$ *cuya tangente valga* Y.

Es decir, que la ecuación en t:

$$Y = \tan t$$

tiene solución, en la rama principal, para cualquier Y.

Por otro lado, el siguiente argumento prueba que -para cualquier par de valores distintos de la variable independiente, digamos t_1 y t_2 en la rama principal, se satisface que

$$\tan t_1 \neq \tan t_2 \qquad (12)$$

En efecto: $\tan t_1 = \tan t_2$

si y sólo si

$$\frac{\text{sen } t_1}{\cos t_1} = \frac{\text{sen } t_2}{\cos t_2}$$

que es equivalente a:

$$(\text{sen } t_1)(\cos t_2) - (\text{sen } t_2)(\cos t_1) = 0$$

pero el primer miembro de esta ecuación es el seno de la diferencia de los argumentos; de lo que se infiere que

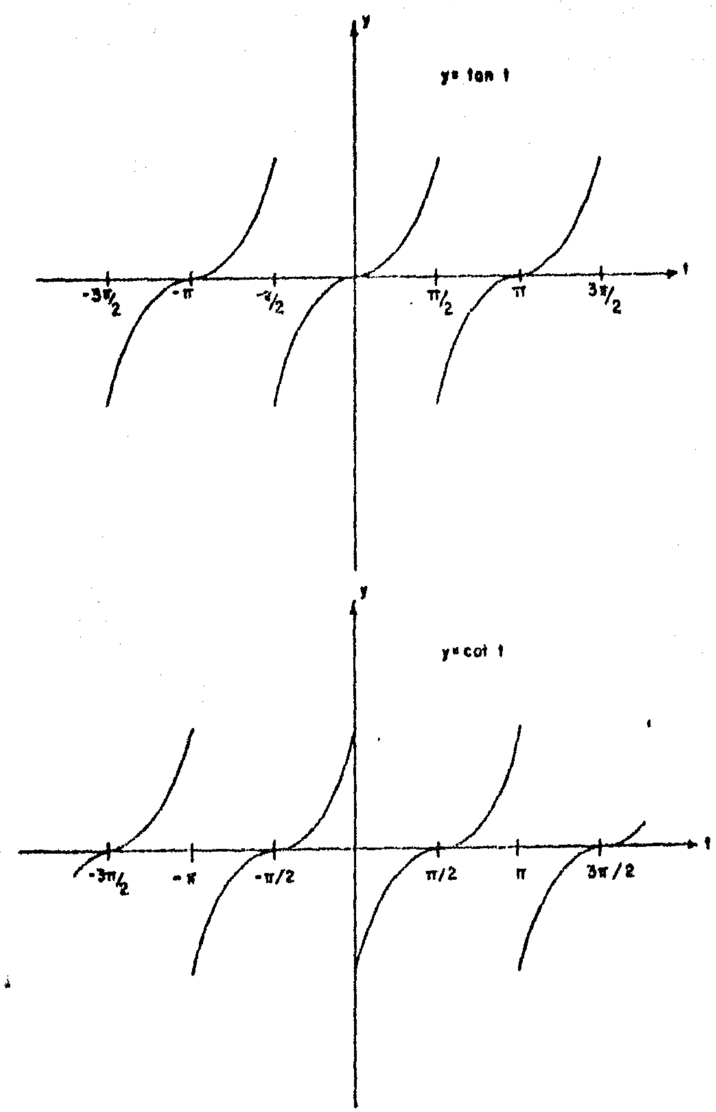


FIG.4.1.LAS GRAFICAS DE $y=\tan t$ y $y=\cot t$.

$$\operatorname{sen}(t_1-t_2)=0$$

Ahora, como todas las consideraciones anteriores se refieren a a valores del argumento entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y como en este intervalo, el seno sólo se anula cuando $t=0$, entonces:

$$\operatorname{sen}(t_1-t_2)=0 \text{ implica que } t_1-t_2=0$$

lo que, a su vez, significa que

$$t_1=t_2$$

lo que prueba la desigualdad (12) y nos permite definir, para cada intervalo de la forma $](2k-1)\pi/2,(2k+1)\pi/2[$, una función inversa de la tangente. Precisamos esta afirmación en la

Definición 4.3. Sea f la función, definida para cualquier número real y mediante la condición:

$$f(y)=t \iff \tan t = y \qquad (13)$$

f está bien definida gracias a que la tangente, en la rama principal, es una función uno a uno de modo que hay un único valor de t que satisface (13) y la ecuación $\tan t=y$ siempre tiene solución.

f recibe el nombre, por lo demás descriptivo de "arco cuya tangente es" y se denota usualmente mediante el símbolo

$$\text{arc tan}$$

de modo que

$$f(y) = \text{arc tan } y$$

se leerá como f(y) es igual al arco cuya tangente es y.

Podemos ahora enunciar y probar la anunciada

Proposición 4.4. Considérese la función

$$F(t) = a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t$$

donde a y b son dos números reales cualesquiera, entonces existen dos constantes A y φ tales que:

$$F(t) = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$$

es decir, que cualquier combinación lineal de sen t y cos t es una función armónica de la misma frecuencia angular y que, consecuentemente, la gráfica de $F=F(t)$ es sólo un defasamiento de la senoidal sen t, magnificado por una costante A conveniente.

En efecto: basta observar que si hacemos

$$a = A \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{y} \qquad b = A \cos \varphi$$

entonces:

$$a^2+b^2 = A(\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

de modo que

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \tag{14}$$

y que si $a \neq 0$, entonces:

$$\frac{b}{a} = \frac{A \operatorname{sen} \varphi}{A \cos \varphi} = \tan \varphi$$

de donde, necesariamente, se tiene que

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \tag{15}$$

Con las ecuaciones (14) y (15) y la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos, es muy sencillo demostrar que, efectivamente:

$$F(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Los dos resultados importantes de esta sección -las proposiciones 4.1. y 4.4.- son la razón por la que las funciones armónicas son tan cómodas para describir fenómenos periódicos (mediante las sumas de armónicas de frecuencias angulares adecuadas). En realidad, funciones periódicas más sencillas que el seno y el coseno hay muchas, sin embargo, ninguna de ellas, al sumarse, dan una función del mismo tipo.

CUESTIONARIO

4.1. Presentar en forma de armónica y dibujar las gráficas de las funciones:

a. $Y = \operatorname{sen} x + \cos x$; b. $Y = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(x+ \ /6)$

4.2. Dibujar la gráfica de la función arc tan.

4.3. Considere la restricción del seno y el coseno a sendos intervalos donde sean uno a uno. A partir de esto, construya las funciones inversas de sen y cos; denótelas mediante los símbolos "arc sen" y "arc cos" respectivamente y dibuje sus gráficas.

4.4. Determine el dominio máximo de definición de las siguientes funciones:

a. ln(sen x) b. ln(sen x) c. ln(arc tan y)