2 G. 18

ACTIVIDADES EN GEOMETRIA PARA ALUMNOS DE SECUNDARIA.

Rodrigo González Ledezma

MÉXICO D.F. 1984.

ABREVIATURAS y símbolos.

$>$	Mayor que.	r	radio.
$<$	Menor que.	$=$	igual.
$\parallel$	paralela.	$\triangle$	triángulo.
$\perp$	Perpendicular.	$\in$	elemento.
$\sphericalangle$	Ángulo.	$/$	tal que.
$\therefore$	Por lo tanto.	$\subset$	contenido.
$\overline{AB}$	segmento.	$\Rightarrow$	implica.
$\cap$	intersección.	$\cup$	unión.

Ident. Identidad   hipót. hipótesis.

Indice.

Introducción 6

CAPÍTULO I

Definición de ángulos 9
Medida de un ángulo 11
Propiedades de ángulos 12
Ángulos formados por dos paralelas y una secante . . . 14

CAPÍTULO II

Definición de triángulo 22
Clasificación de triángulos según sus lados 23
Clasificación de triángulos según sus ángulos 24
Propiedades de triángulos 25
Condiciones para la igualdad de triángulos 28

CAPÍTULO III

Clasificación de cuadriláteros 35
Propiedades de los cuadriláteros 39
Teorema de Pitágoras 56
Proyectos 61

CAPÍTULO IV

Propiedades fundamentales de área 67
Teoremas sobre áreas 68

Proyectos 76

CAPÍTULO V

Definiciones 81
Teoremas sobre círculos 85
Proyectos 96

CAPÍTULO VI

Introducción 99
Trazos con regla y compás 100
Construcción de polígonos regulares . . . 110
Proyectos 116

Bibliografía 117

Introducción.

El objetivo fundamental de este trabajo es la enseñanza de algunos temas de la geometría a través de pequeñas actividades con el fin de que el alumno obtenga sus propios resultados matemáticos por medio de algunas observaciones y razonamientos intuitivos.

En el primer capítulo se introduce el concepto de ángulo y algunas propiedades referentes a este.

En los capítulos II y III se demuestran las propiedades básicas de triángulos y cuadriláteros.

En el capítulo IV se discute el concepto de área de triángulos y cuadriláteros y se deducen las fórmulas de área por medio del método de papel recortado.

El capítulo V trata sobre el círculo y sus propiedades fundamentales.

El último capítulo trata sobre trazos con regla y compás con la idea de desarrollar la habilidad para el manejo de estos instrumentos. Se hacen algunos trazos elementales y después construcciones de polígonos regulares.

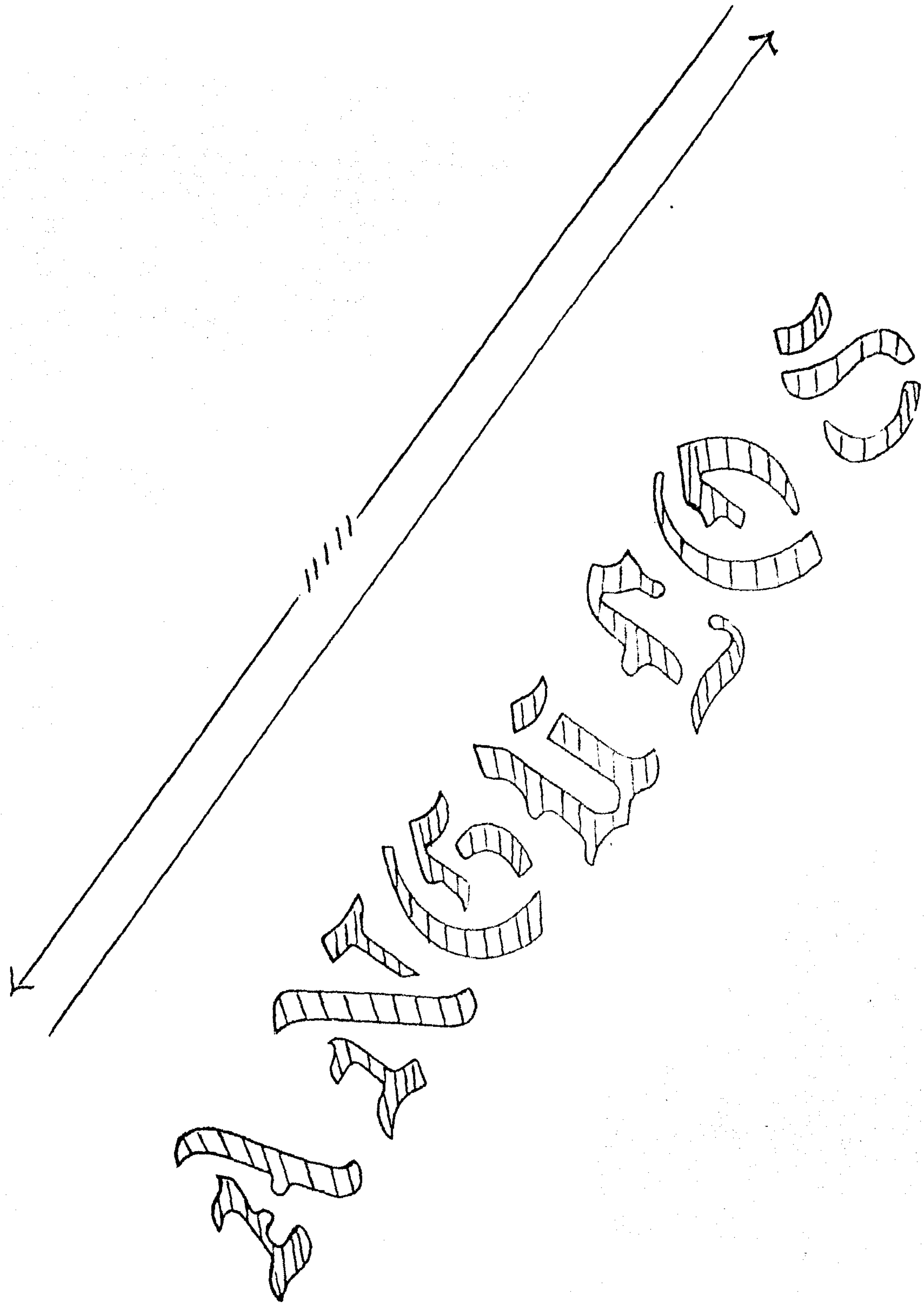
Al final de cada capítulo se deja una serie de proyectos, que estos se introducen con la idea de reafirmar conocimientos.

El material que aquí se trata aparece disperso en los textos de geometría y se ha intentado integrarlo y adecuarlo a los objetivos específicos de la enseñanza a nivel de secundaria en México.

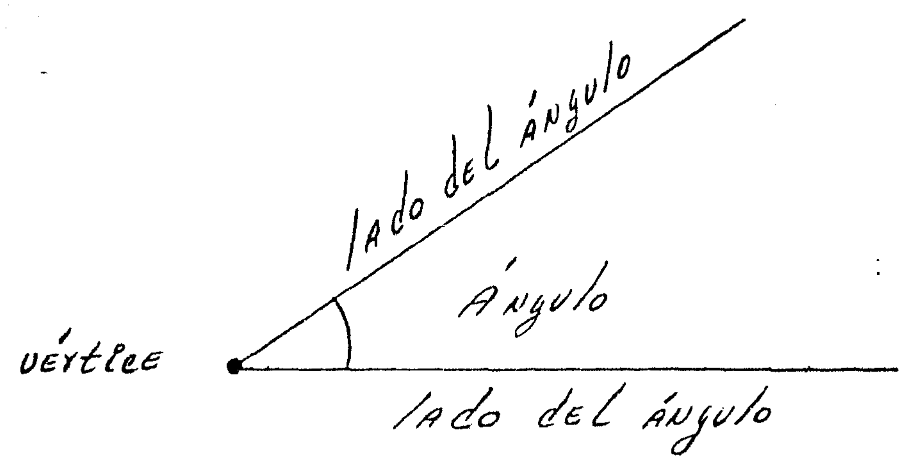
Así se ha buscado escribir cada capítulo de manera que no haya rompimientos bruscos, conduciendo al alumno de un resultado a otro de forma natural.

El criterio que se ha seguido para hacer esto está basado en la experiencia que ha tenido el autor durante los últimos seis años enseñando matemáticas en secundaria.

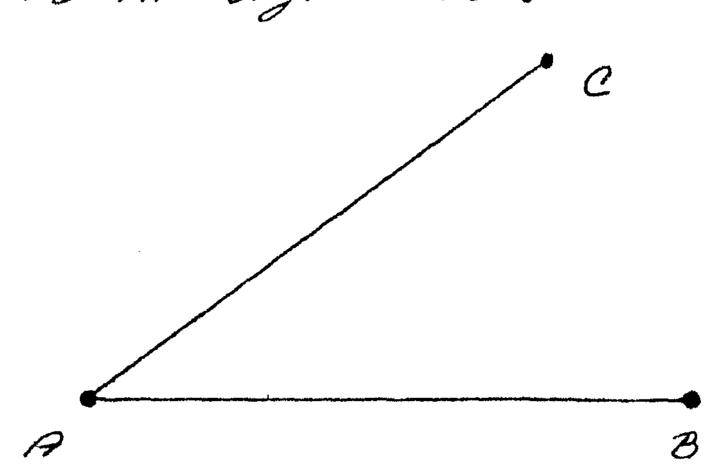
CAPÍTULO I



DEFINICIÓN. Ángulo es la abertura entre dos líneas rectas que se cortan en un punto, las líneas se llaman lados del ángulo y el punto donde se cortan dichas líneas se llama vértice.

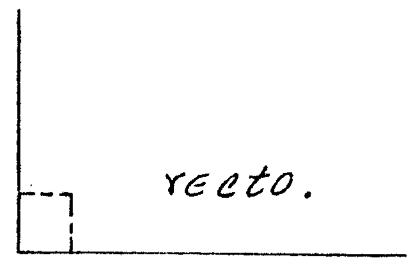


La notación que se acostumbra utilizar para ángulo formado por dos segmentos de recta es la siguiente.

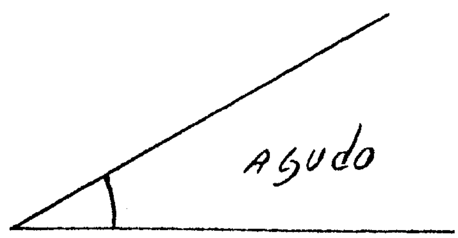


Ángulo BAC

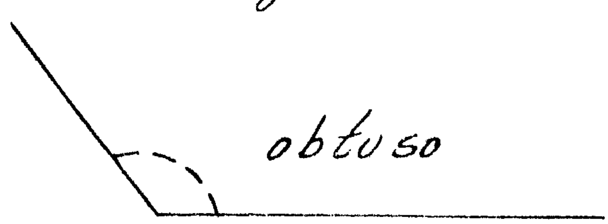
Ángulo recto. Se dice que un ángulo es recto cuando sus lados son perpendiculares.



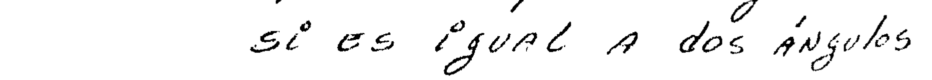
Ángulo agudo. Se dice que un ángulo es agudo cuando es menor que un ángulo recto.



Ángulo obtuso. Se dice que un ángulo es obtuso cuando es mayor que un ángulo recto.



Ángulo llano. Se dice que un ángulo es llano si es igual a dos ángulos rectos.



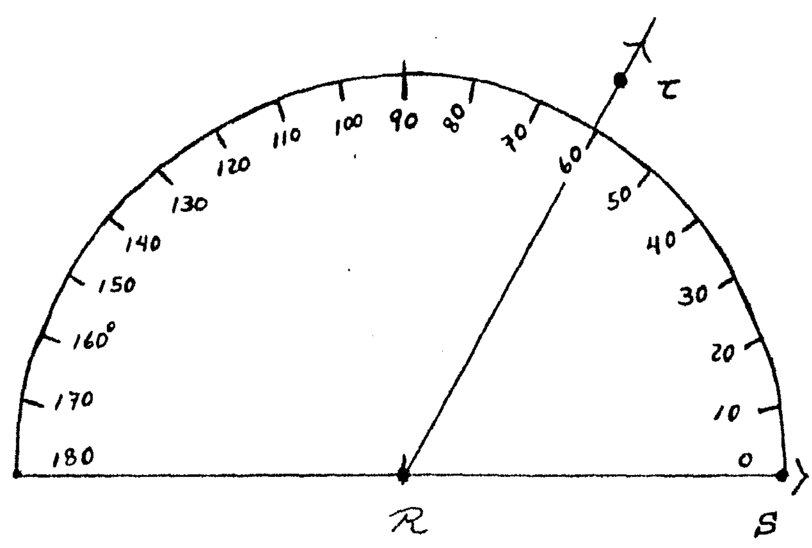
Medida de un ángulo.

Para medir un ángulo se escoge una unidad de medida convencionalmente.
La unidad que se acostumbra a usar se llama **grado** y es tal que la medida del ángulo llano sea igual a 180°.

Ángulo llano 180°

Con esta convención resulta que un ángulo recto mide 90°, un ángulo agudo mide menos de 90° y un ángulo obtuso mide más de 90°.

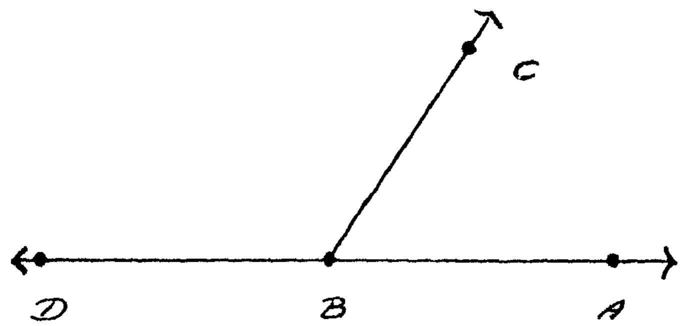
Ejemplo.



Aquí el ángulo tRS mide 60°.

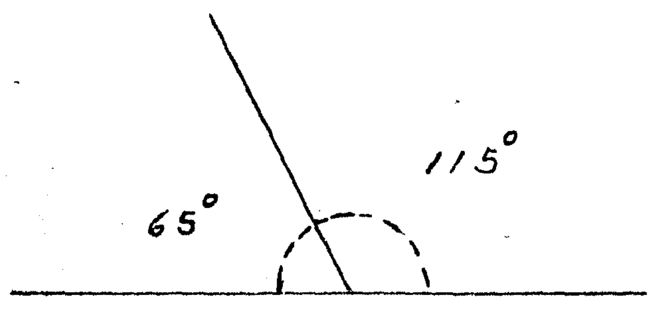
Propiedades de ángulos.

Dos ángulos son adyacentes cuando tienen un mismo vértice y un lado en común.

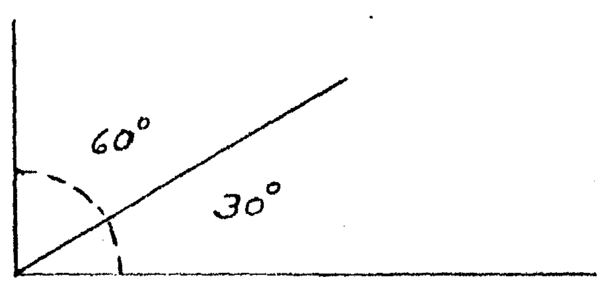


Los ángulos CBA y DBC son adyacentes.

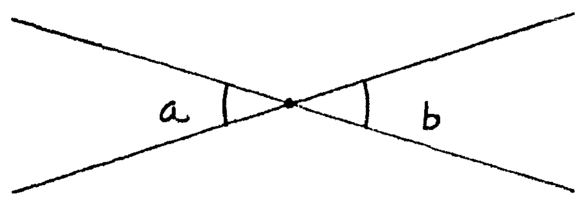
Dos ángulos son suplementarios si su suma mide 180°. Cada ángulo es llamado suplemento del otro.



Dos ángulos son complementarios si su suma mide 180°. Cada ángulo es llamado complemento del otro.

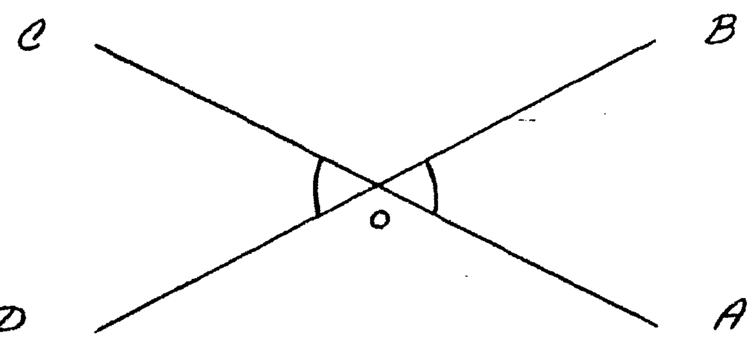


Ángulos opuestos por el vértice.



El ángulo (a) es opuesto por el vértice con el ángulo (b).

Probaremos que los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Para probar este resultado observemos en la figura que:

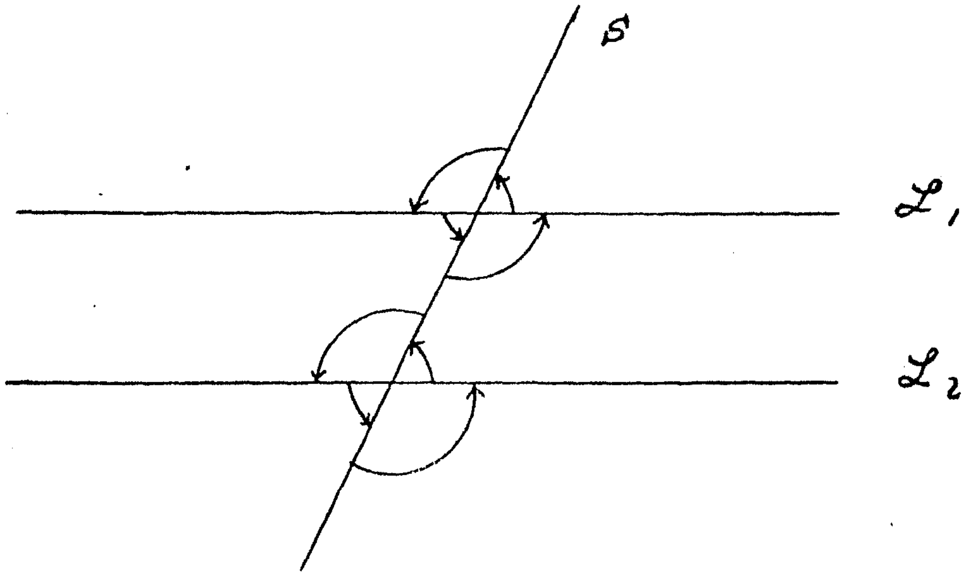


$$AOB + BOC = 180^\circ .$$
$$BOC + COD = 180^\circ .$$

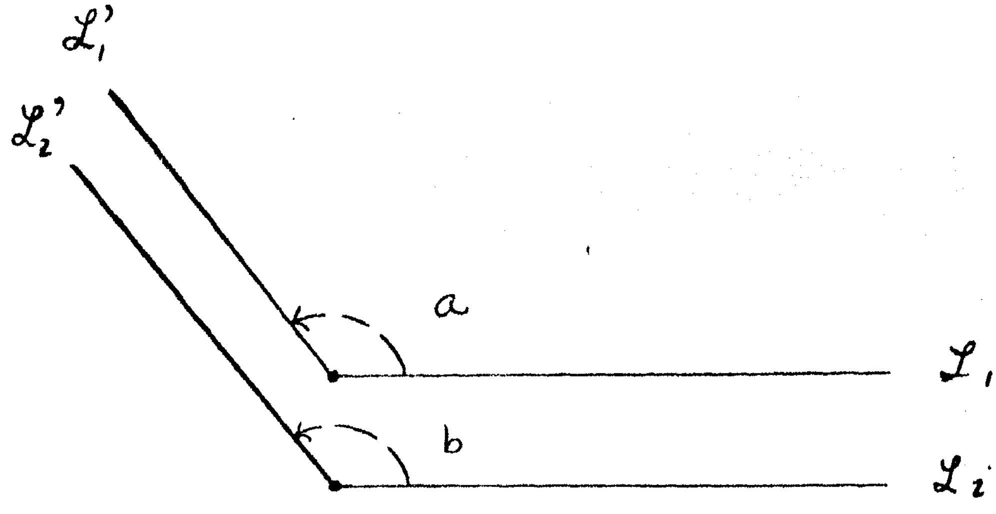
Entonces $AOB + \cancel{BOC} = \cancel{BOC} + COD$

$$\therefore \; AOB = COD .$$

Ángulos formados por dos paralelas y una secante



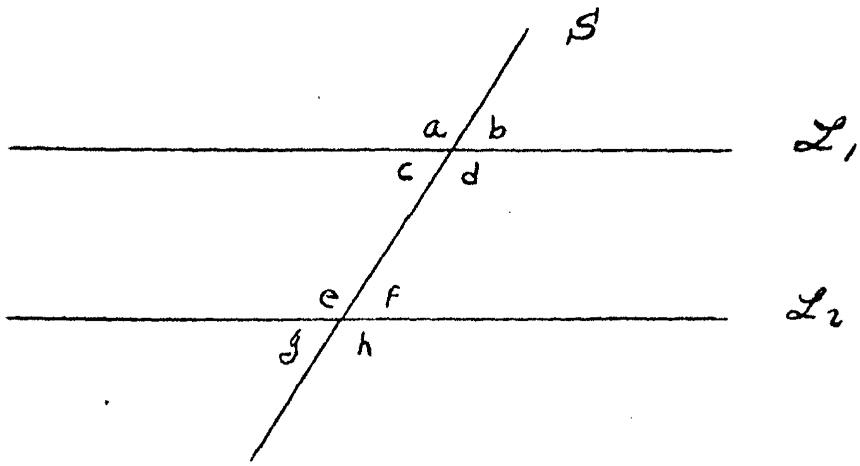
Ahora observaremos que cuando los lados de dos ángulos son paralelos entonces los ángulos son iguales.



$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \quad ; \quad \mathcal{L}_1' \parallel \mathcal{L}_2'$$

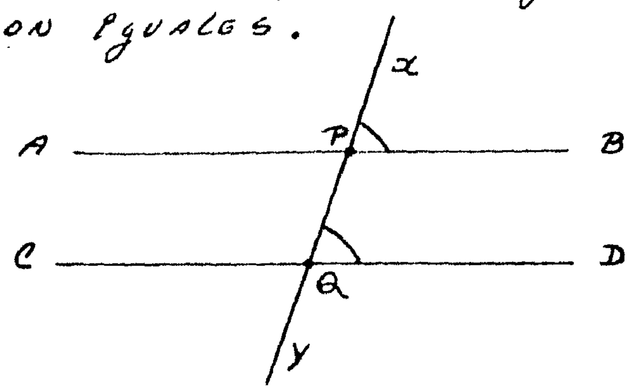
$$a = b$$

Definición. Se dice que son ángulos correspondientes los que están del mismo lado de la secante y los dos arriba o los dos abajo de las paralelas.



Son correspondientes. a y e; e y g; b y f d y h.

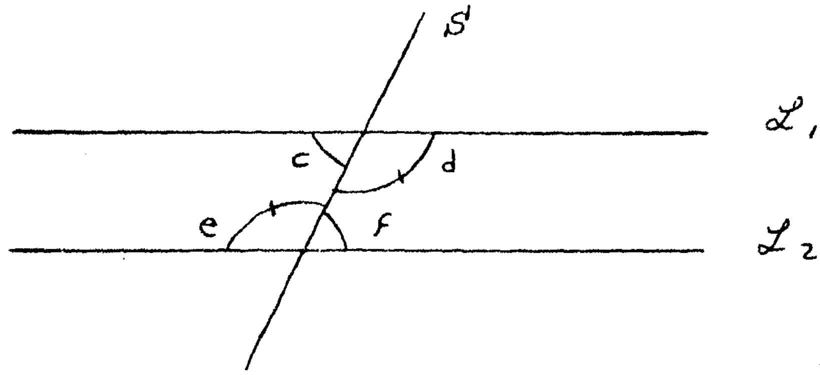
Probaremos ahora que los ángulos correspondientes son iguales.



Sean AB, CD dos paralelas cortadas por una secante xy en los puntos P y Q respectivamente

Los lados del ángulo BPX son paralelos a los lados del ángulo DQP. Por lo tanto por la obs. anterior BPX = DQP.

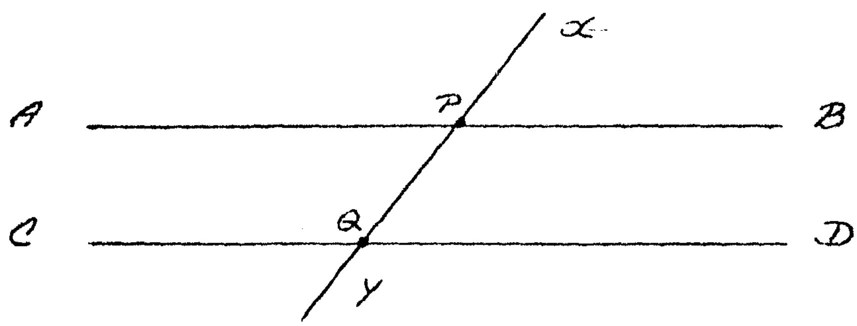
Definición. Se dice que son ángulos alternos internos los que están dentro de las paralelas y de uno y otro lado de la secante.



Son ángulos alternos internos e y f ; d y e

Observemos ahora que los ángulos alternos internos son iguales.

Sean AB y CD dos paralelas cortadas por una secante xy en los puntos P y Q .

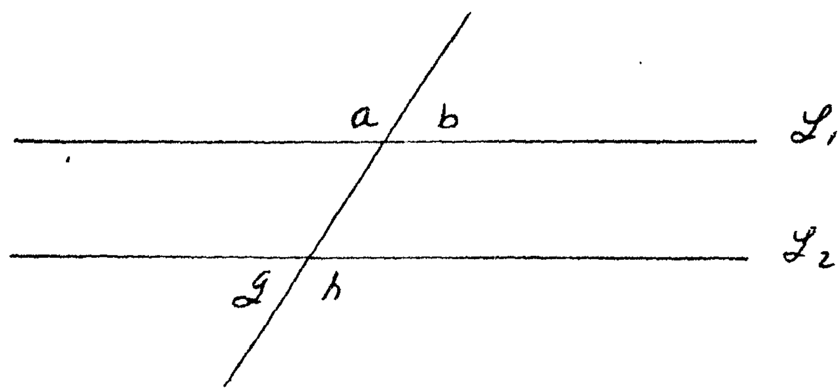


El ángulo $QPB = xPA$ por ser opuestos al vértice.

$xPA = PQC$ por ser correspondientes.

$$\therefore PQC = QPB .$$

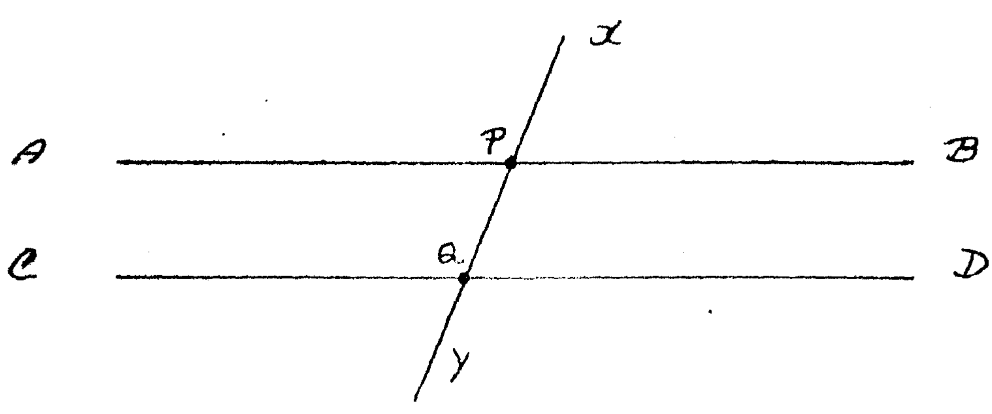
Definición. Se dice que los ángulos alternos externos son los que quedan fuera de las paralelas y de uno y otro lado de la transversal o secante.



Son alternos externos a y h; b y g.

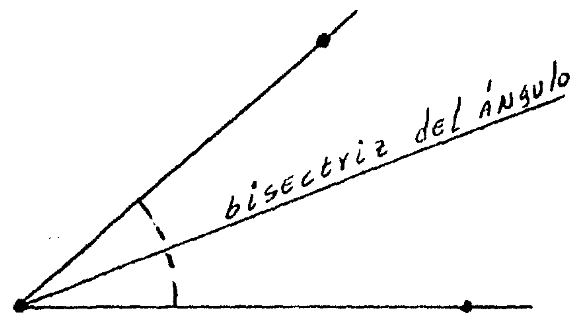
Probaremos que los ángulos alternos externos son iguales.

Sean AB, CD dos paralelas cortadas por una secante xy en los puntos P y Q respectivamente.

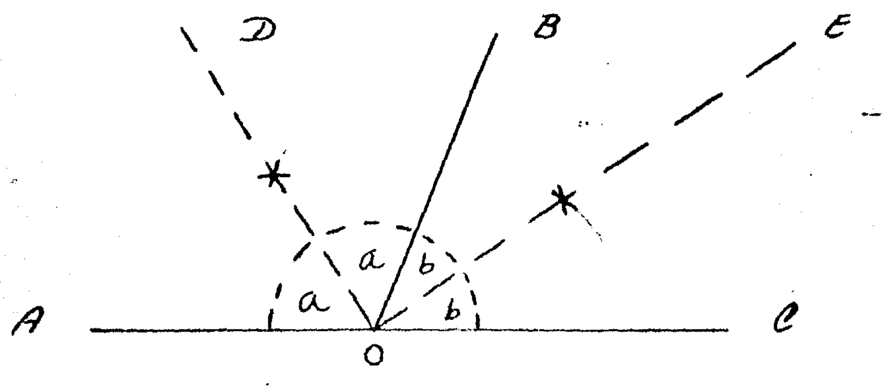


$BPX = DQP$, Por ser correspondientes
$DQP = CQY$, Por opuestos al vértice
$\therefore\ BPX = CQY$.

Bisectriz de un ángulo. Es una línea que divide el ángulo en dos partes iguales.



Obsérvese que siempre las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares. Para probar esto estudiemos la siguiente figura.



$AOB + BOC = 180°$

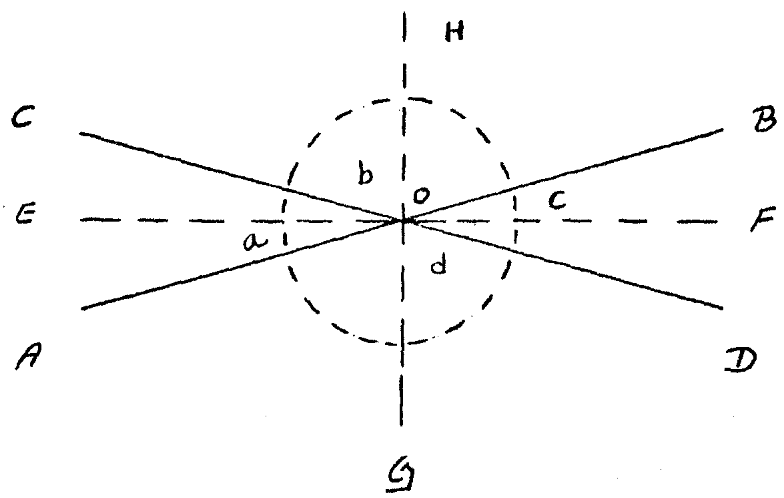
OD y OE bisectrices

$2a + 2b = 2(90°)$

dividiendo entre dos $a + b = 90°$

$\therefore \; OD \perp OE.$

Las bisectrices de los cuatro ángulos opuestos por el vértice, formados por dos rectas, estan en línea recta dos a dos y son perpendiculares entre sí, observe la siguiente figura.

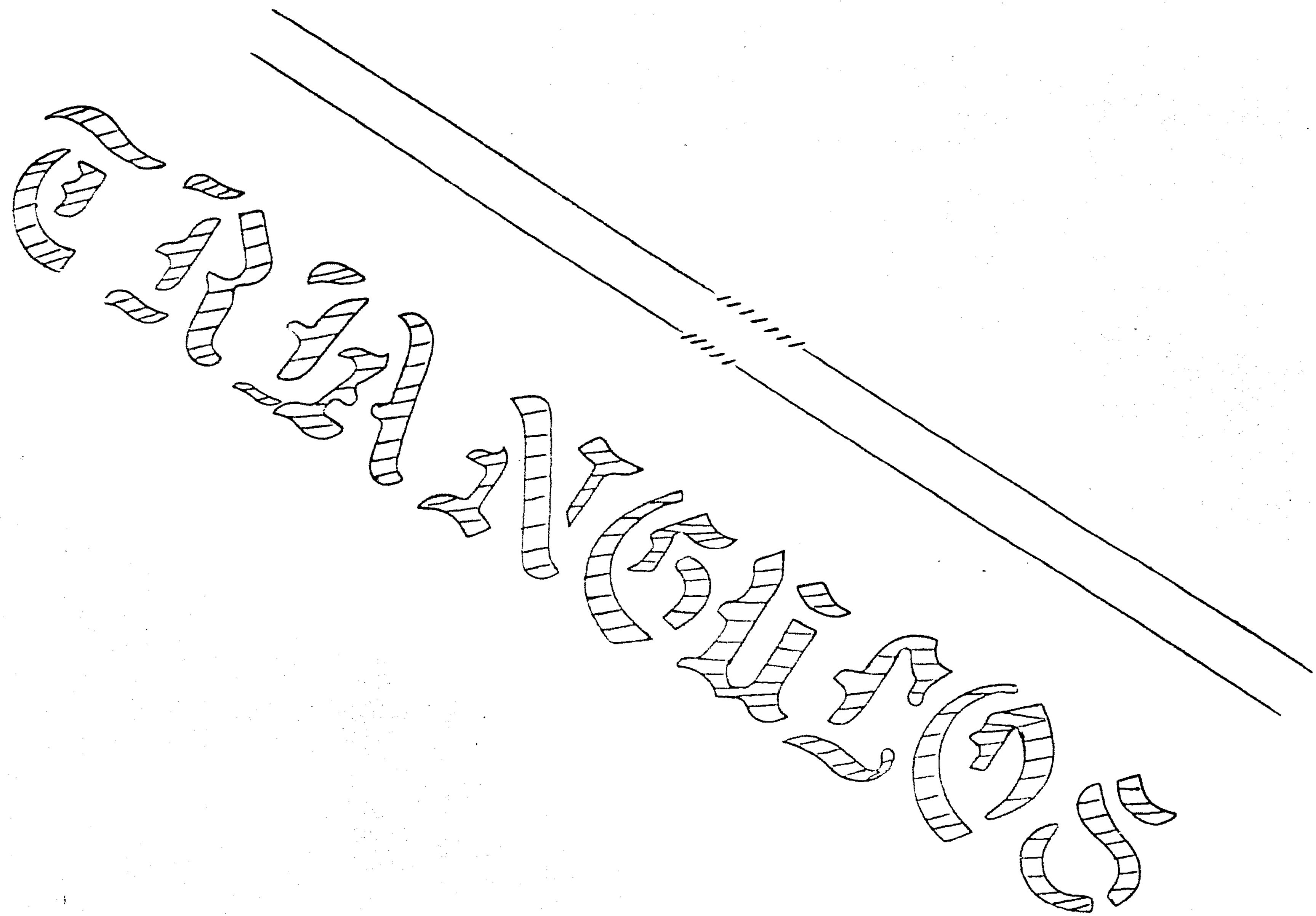


Los ángulos a y c, b y d opuestos por el vértice. OE, OF, OH, OG bisectrices.

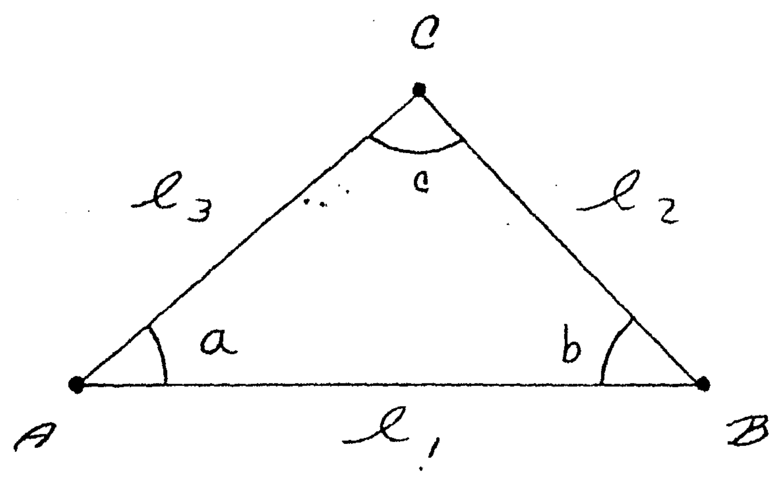
Según la observación anterior se tiene.

$$\frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{2} = \frac{c+d}{2} = \frac{d+a}{2} = 90^\circ$$

CAPÍTULO 2º



Triángulos. La unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales forman la figura llamada triángulo.



En cualquier triángulo se determinan:

i) Tres lados (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3)

ii) Tres vértices (A, B, C)

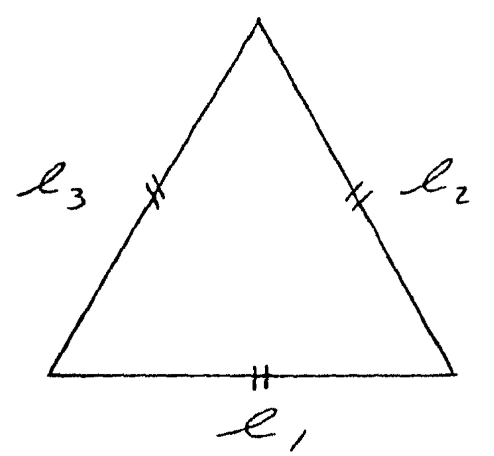
iii) Tres ángulos (a, b, c)

El símbolo $\triangle ABC$ denota el triángulo cuyos vértices son A, B, C.

Clasificación de Triángulos según sus lados.

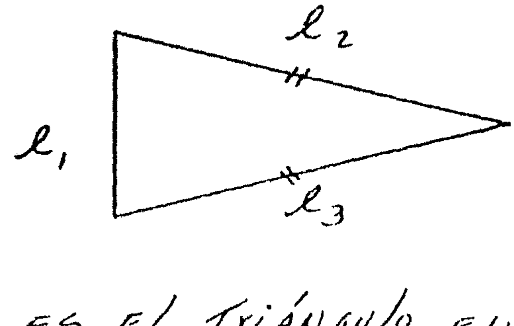
Los Triángulos según sus lados se clasifican en.

Equilátero, es el triángulo que tiene sus tres lados iguales.



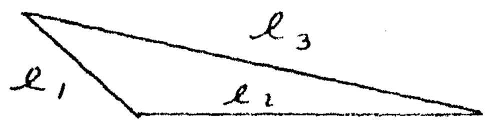
$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$

Isósceles, es el triángulo que tiene dos lados iguales.



$\ell_2 = \ell_3$

Escaleno, es el triángulo en el que todos sus lados son desiguales.

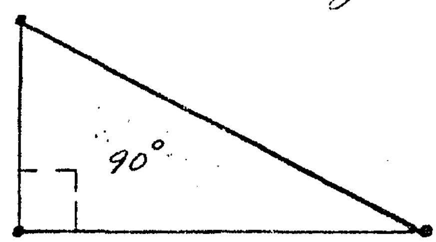


$\ell_1 \neq \ell_2 \neq \ell_3$
$\ell_1 \neq \ell_3$.

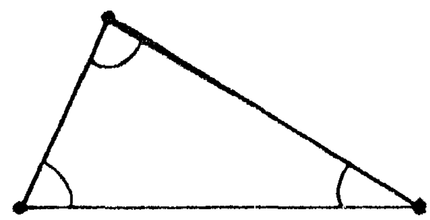
Clasificación de triángulos según sus ángulos.

Los triángulos según sus ángulos se clasifican en

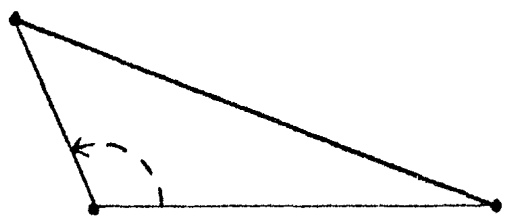
Triángulo rectángulo. Es el triángulo que tiene un ángulo recto.



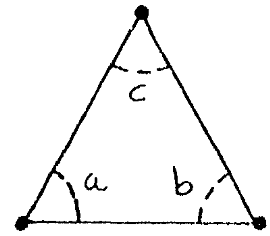
Triángulo acutángulo. Es el triángulo que tiene todos sus ángulos agudos.



Triángulo obtusángulo. Es el triángulo que tiene un ángulo obtuso.



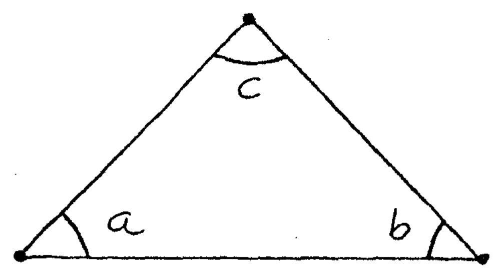
Triángulo Equiángulo. Es el triángulo que tiene todos sus ángulos iguales.



$a = b = c$

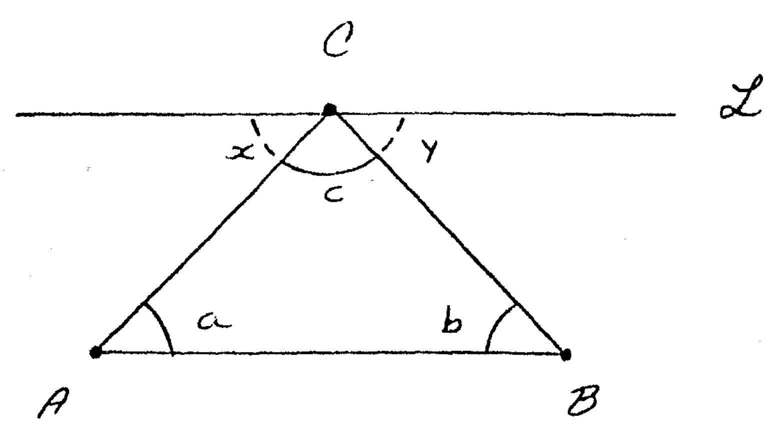
PROPIEDADES DE TRIÁNGULOS.

Una propiedad interesante en los triángulos es que la suma de sus ángulos interiores es de $180°$.



$$a + b + c = 180°$$

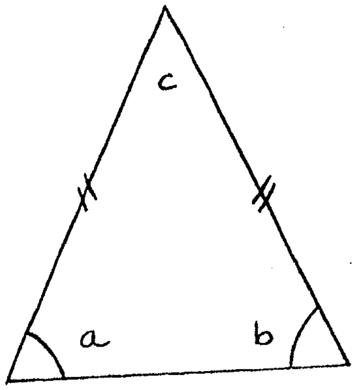
Para probar esto, dibuje un triángulo ABC cualquiera y trace una recta paralela al lado AB como se indica en la figura siguiente.



Al trazar la recta paralela, se han formado dos nuevos ángulos x, y.

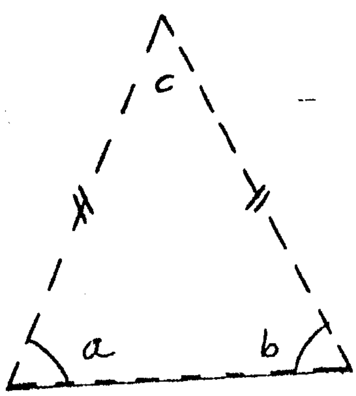
Ahora bien $x = a$, $y = b$ por ser ángulos alternos internos, pero $x + c + y = 180°$. Substituyendo tenemos $a + c + b = 180°$.

Una observación interesante en el triángulo isósceles es que tiene dos ángulos iguales.

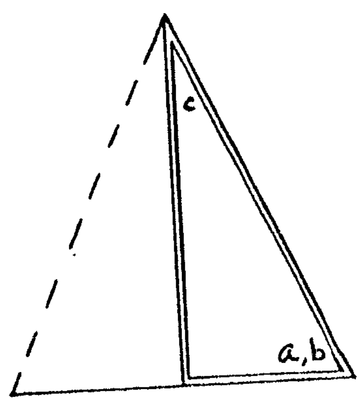


Triángulo isósceles.

Para probar esta observación, dibuje un triángulo isósceles, recórtelo y dóblelo como se indica en las siguientes figuras.



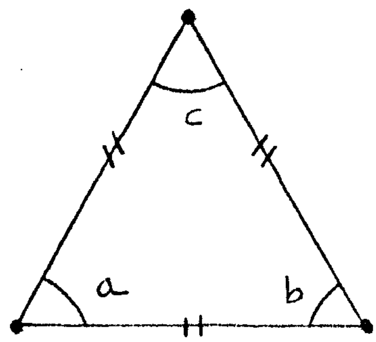
Triángulo recortado



Triángulo doblado

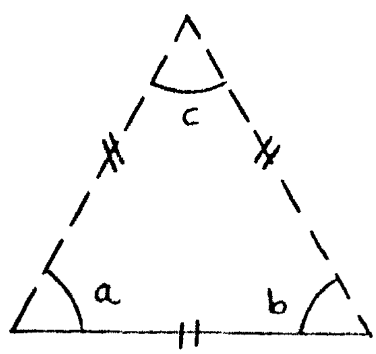
Al doblar el triángulo se concluye que el ángulo (a) es igual al ángulo (b), por lo tanto todo triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.

Una propiedad interesante en el triángulo equilátero es que tiene sus tres ángulos iguales.

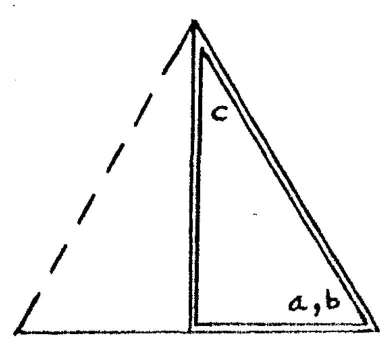


triángulo equilátero.

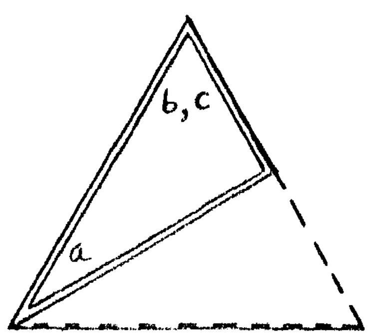
Para probar esta propiedad, dibuje un triángulo equilátero, posteriormente recórtelo y dóblelo como se indica en la figura:



Triángulo recortado



1er doblez $a = b$

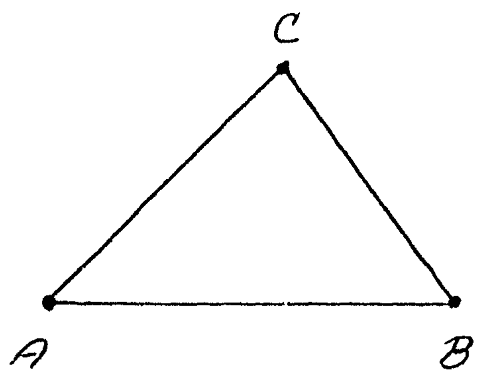


2º doblez $b = c$

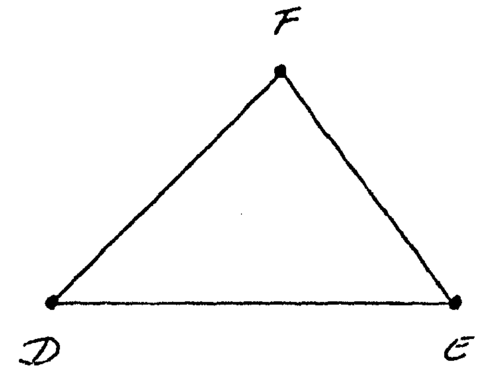
$\therefore a = b = c$.

Condiciones para la igualdad de Triángulos

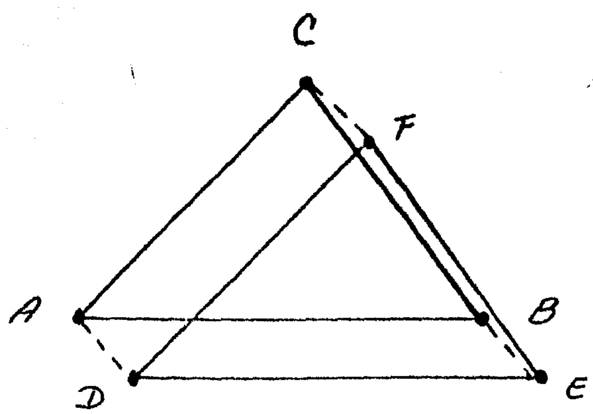
Definición. Dos triángulos son iguales si al superponerlos coinciden en todas sus partes.



triángulo ABC.



Triángulo DEF.



Triángulos superpuestos

$$\boxed{\triangle ABC = \triangle DEF}$$

En lo que sigue vamos a ver que para saber que dos triángulos sean iguales no se requiere verificar que todos los lados y ángulos sean iguales. Veremos que basta con que:

i) Un lado y sus dos ángulos adyacentes sean respectivamente iguales.

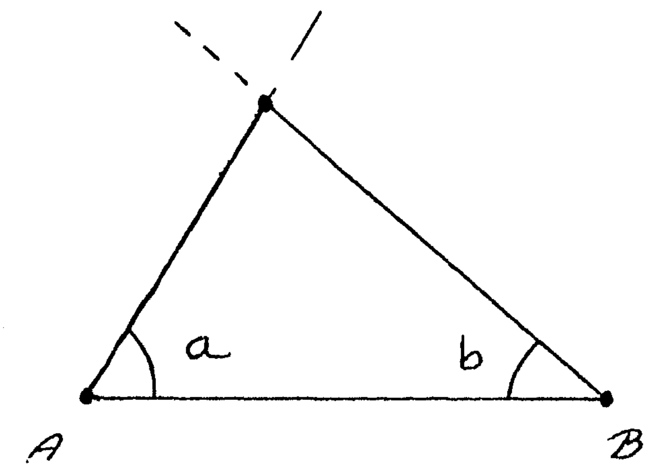
ii) Dos de sus lados y el ángulo que forman sean respectivamente iguales.

iii) Tres de sus lados sean iguales.

Para convencernos de estas tres condiciones de igualdad de triángulos observemos los siguientes trazos.

i) Trazar un segmento de recta cualquiera con extremos A y B, en el extremo A trazar un ángulo (a) de cualquier medida, en el extremo B trazar un ángulo (b) con cualquier medida (esta medida puede ser igual o diferente a la del ángulo (a)).

Posteriormente prolongue los lados de dichos ángulos hasta que se corten formando así un triángulo.



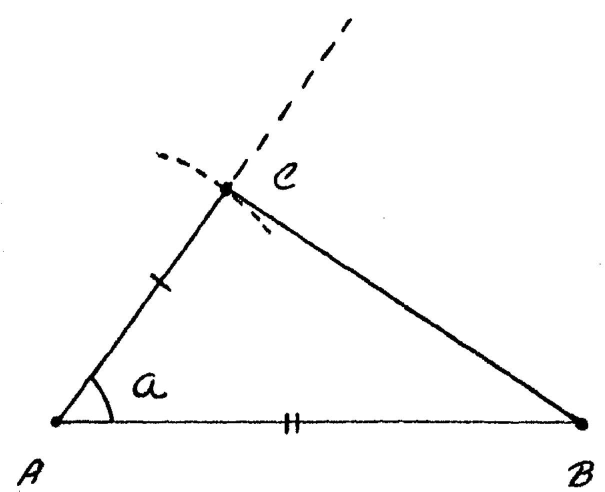
Ahora bien, por este procedimiento queda determinado un único triángulo.

Es decir dos triángulos que tienen un lado y sus dos ángulos adyacentes respectivamente iguales son iguales.

Esta condición de igualdad de triángulos se abrevia de la siguiente forma.

A L A (ángulo, lado, ángulo).

ii) Trazar un segmento de recta $\overline{AB}$, en el extremo A trazar un ángulo (a) de cualquier medida y prolongar el lado de este ángulo, nuevamente en el extremo A trazar con el compás otro segmento de recta $\overline{AC}$. Posteriormente unir el extremo B con el extremo C formando así un triángulo como se observa en la siguiente figura:



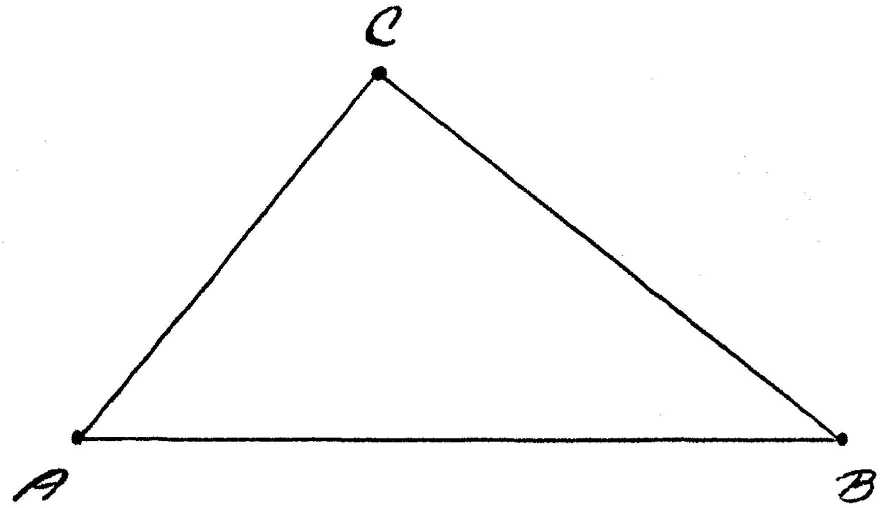
Ahora bien, los triángulos que cumplan con las mismas características anteriores son iguales. es decir, dos triángulos son iguales si tienen dos de sus lados y el ángulo que forman respectivamente iguales.

Esta condición de igualdad de triángulos se abrevia de la siguiente forma:

L A L.

lado, ángulo, lado.

iii) Trazar un segmento de recta $\overline{AB}$ de cualquier tamaño.
En el extremo A, trazamos otro segmento de recta no colineal al segmento anterior.
Uniendo este último extremo con el extremo B, tenemos determinado un único triángulo.
Observe el siguiente dibujo.



Todos los triángulos que cumplan con estas condiciones son iguales

Esta condición de igualdad de triángulos se abrevia de la siguiente forma.

(L, L, L) lado, lado, lado.

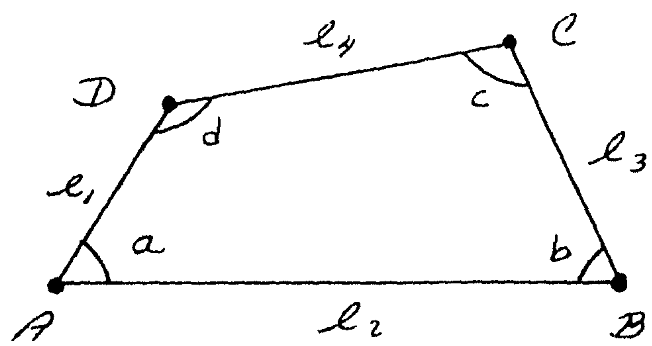
CAPÍTULO III

CUADRILÁTEROS.

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS.

DEFINICIONES.

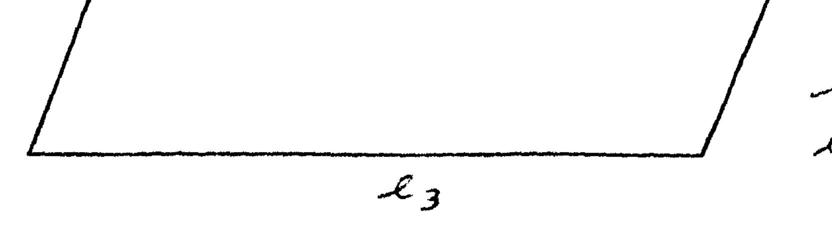
Cuadrilátero. Se llama a la figura cerrada que tiene cuatro lados.



En cualquier cuadrilátero se determinan:

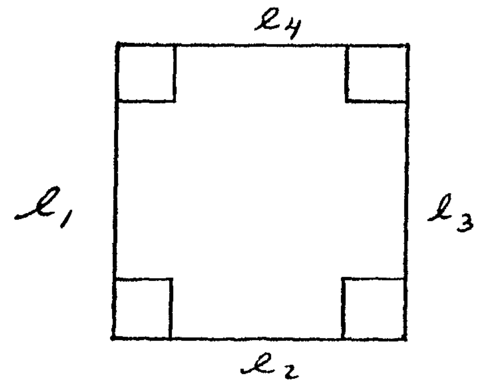
i) cuatro lados (l_1, l_2, l_3, l_4)
ii) cuatro vértices (A, B, C, D)
iii) cuatro ángulos (a, b, c, d)

Paralelogramo. Se llama al cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.



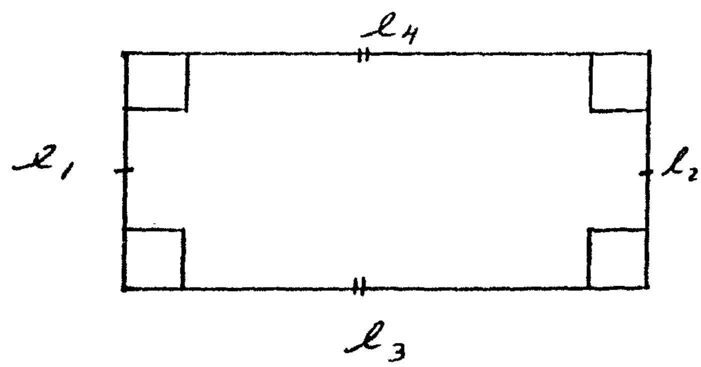
$l_1 \parallel l_2$
$l_3 \parallel l_4$

Cuadrado. Se llama cuadrado al cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos rectos.



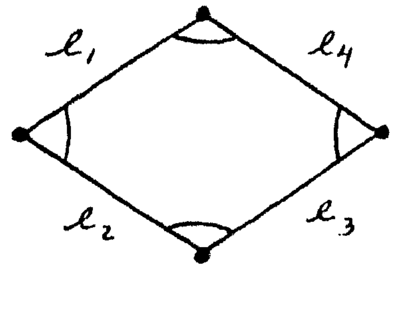
$l_1 = l_2 = l_3 = l_4$

Rectángulo. Se llama rectángulo al cuadrilátero que tiene lados opuestos iguales y sus ángulos rectos.



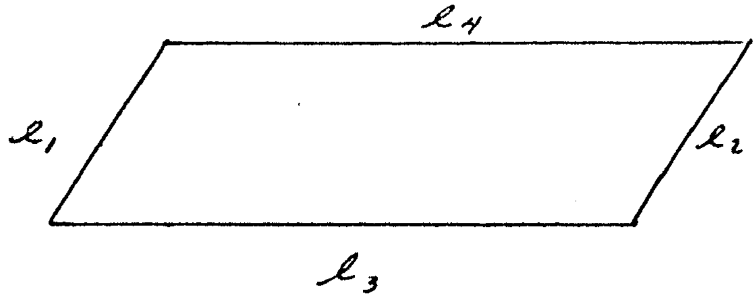
$l_1 \parallel l_2$
$l_3 \parallel l_4$

Rombo. Se llama rombo al cuadrilátero que tiene cuatro lados iguales y sus ángulos no son rectos.



$l_1 = l_2 = l_3 = l_4$

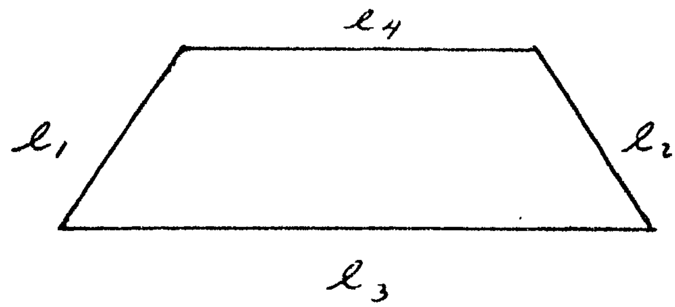
Romboide. Se llama romboide al cuadrilátero que tiene lados opuestos iguales y dos ángulos agudos y dos obtusos.



$l_1 = l_2$
$l_3 = l_4$

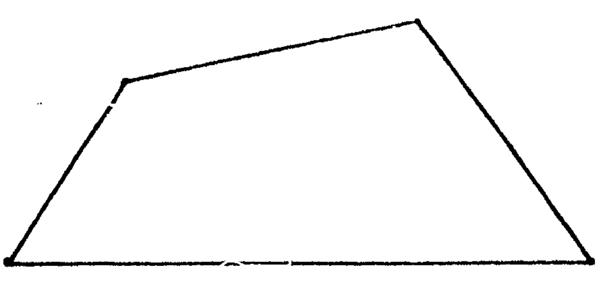
Son paralelogramos. El cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.

Trapecio. Se llama trapecio al cuadrilátero que sólo tiene dos lados paralelos.

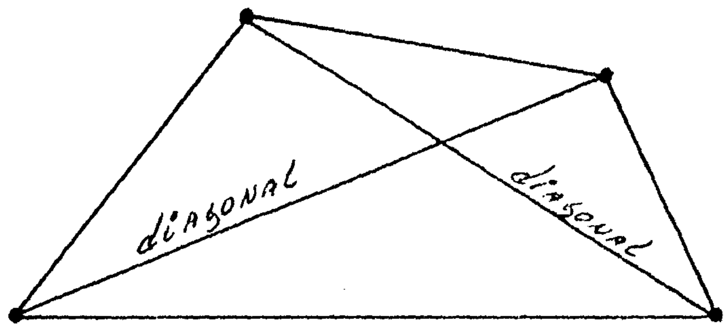


$l_3 \parallel l_4$

Trapezoide. Se llama trapezoide, al cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

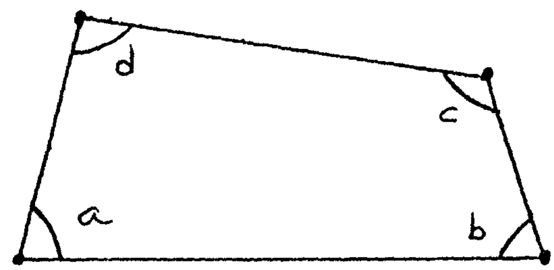


Diagonal. Se llama diagonal de un cuadrilátero, a la recta que une dos vértices no consecutivos.



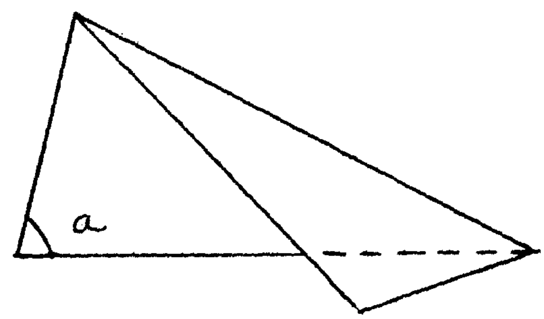
Propiedades de los cuadriláteros.

Investigaremos cuanto mide la suma de los ángulos interiores de todo cuadrilátero.

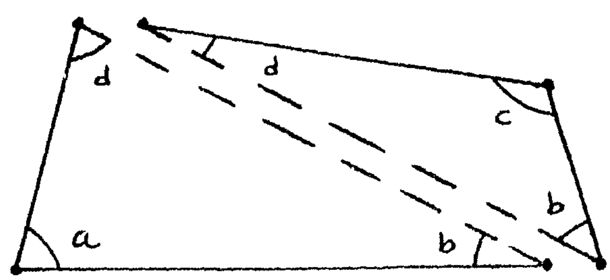


¿Cuanto mide la suma de los ángulos $(a+b+c+d)$?

Doblemos el cuadrilátero por la diagonal **bd** como se indica en la figura siguiente.

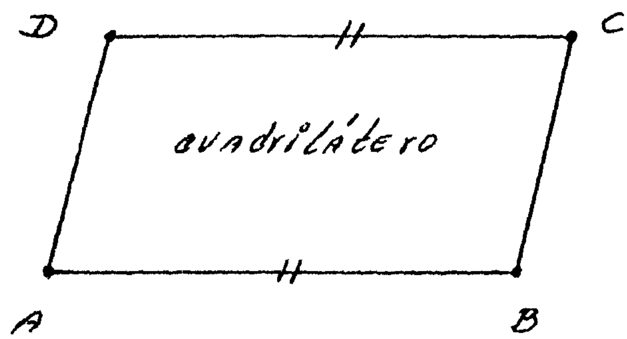


Al desdoblar la figura obtenemos dos triángulos.

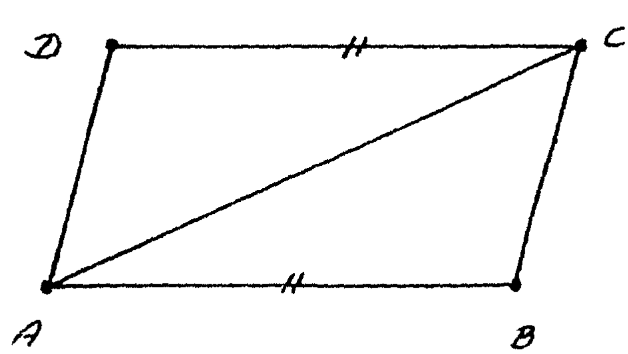


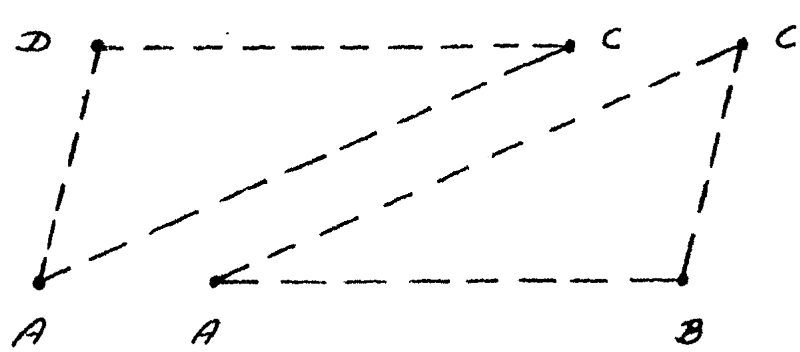
Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, por lo tanto en un cuadrilátero hay 360°.

Investigaremos que clase de cuadrilátero es aquel que tiene dos lados paralelos y iguales.

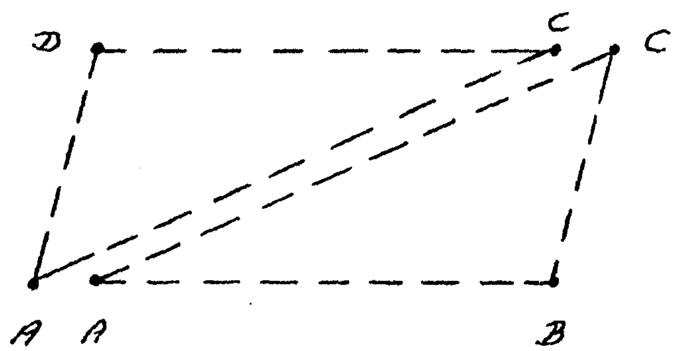


Dibuje un cuadrilátero (A, B, C, D) en que el lado (AB) es igual y paralelo al lado (DC), posteriormente trácese la diagonal (AC), recorte este cuadrilátero por la diagonal para obtener dos triángulos, observe las figuras siguientes:





En los triángulos; (ABC), (CDA)



$AC = AC$ Identidad

$AB = DC$ por hipótesis.

$\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$

(si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales)

$\therefore \triangle ABC = \triangle CDA$

(si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, los dos triángulos son iguales).

$\therefore BC = AD$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$

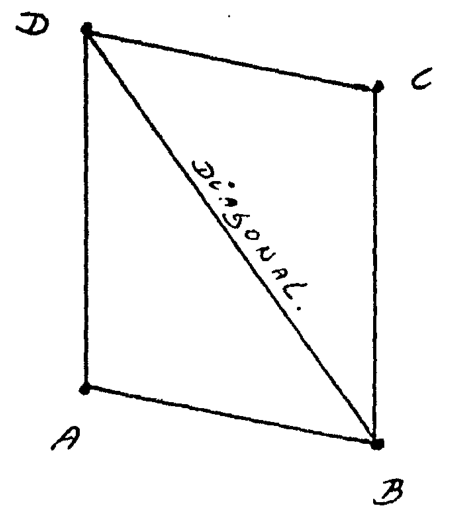
$\therefore$ (BC) es paralelo a (AD)

(Si dos rectas situadas en un mismo plano forman con una secante ángulos alternos-internos iguales, esas dos rectas son paralelas).

Ahora bien, (AB) es paralela a (DC) por hipótesis.

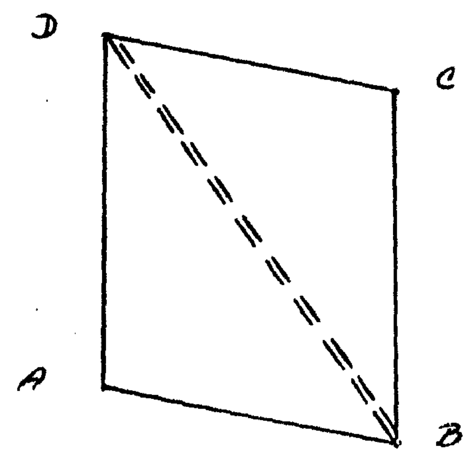
$\boxed{\therefore \text{ ABCD es un paralelogramo}}$

Investigaremos si la diagonal y los lados de un paralelogramo forman dos triángulos iguales.



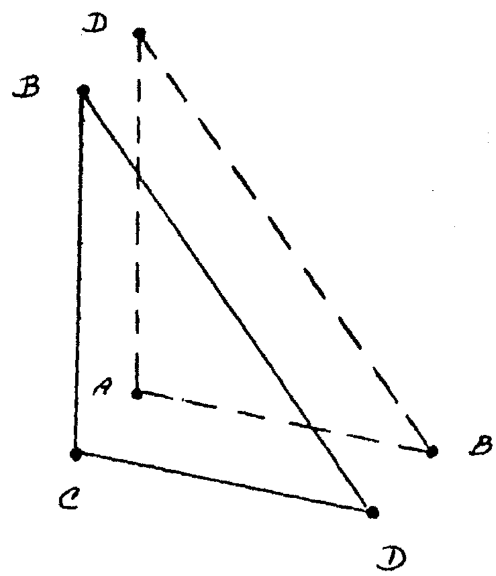
¿ El triángulo ABD es igual al triángulo BCD ?

Dibuje un paralelogramo de cualquier tamaño de tal manera que éste tenga su diagonal pintada.



Si recortamos la figura de arriba por la diagonal obtenemos dos triángulos ABD y BCD.

Superponiendo los triángulos (ABD) y (BCD) como se observa en la figura siguiente obtenemos una serie de observaciones las cuales nos determinan la solución.

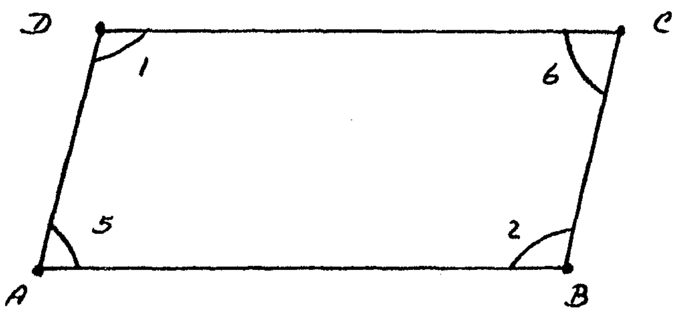


1.- El lado AB es igual al lado CD
2.- El lado AD es igual al lado CB
3.- El lado BD es igual al lado DB

Sabemos que si los tres lados de un triangulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro triángulo, los dos triángulos son iguales.

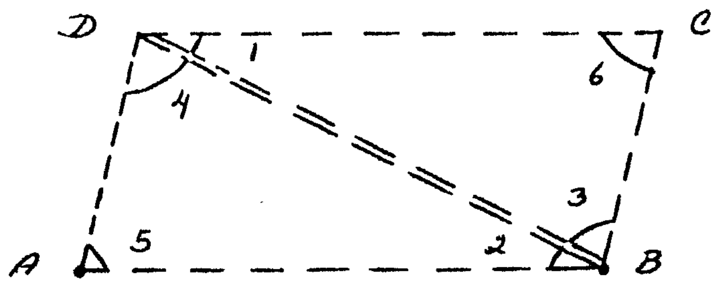
Por lo tanto la diagonal y los lados de un paralelogramo forman dos triángulos iguales.

Investigaremos como son los ángulos opuestos de un paralelogramo.

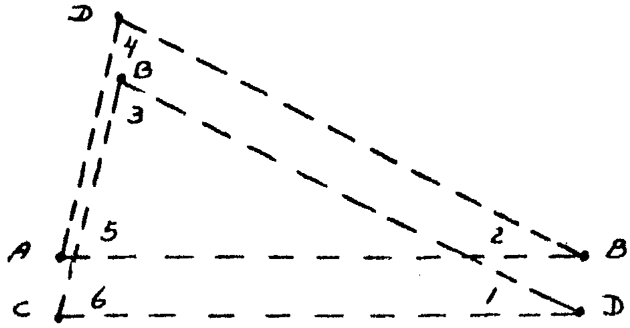


¿Como es el ángulo (1) con el ángulo (2) y el ángulo 5 con respecto al ángulo (6)?

Dibuje la diagonal BD a este paralelogramo, posteriormente recorte dicho paralelogramo por la diagonal y obtendrá dos triángulos.

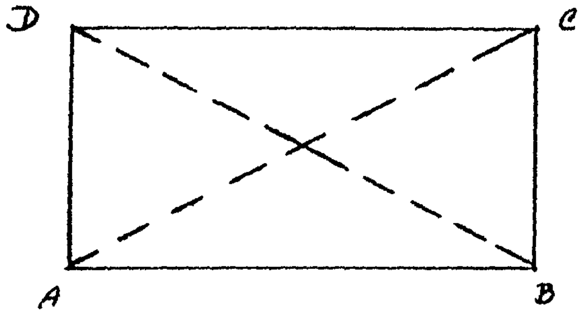


Superponga los triángulos.



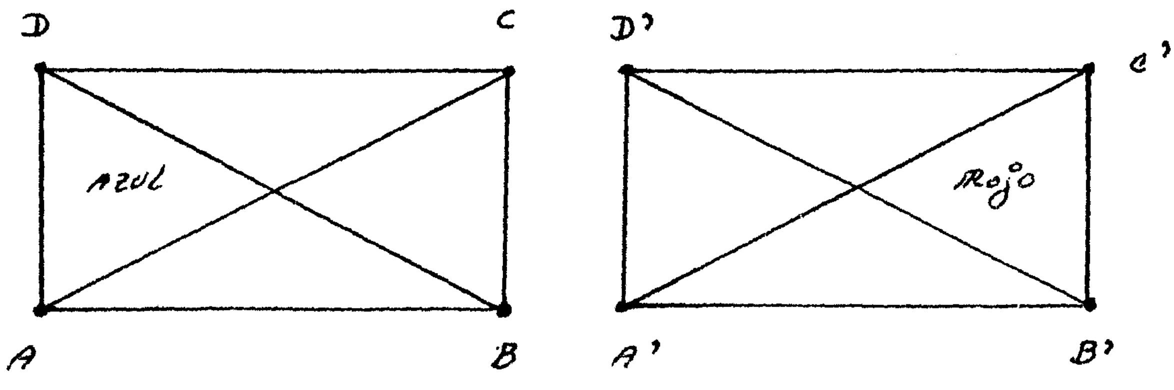
El ángulo (5) es igual al ángulo (6) y los ángulos 1 y 2 ; 3 y 4 son iguales entre ellos ∴ los ángulos opuestos de ABCD son iguales.

Investigar como son las diagonales de un rectángulo.



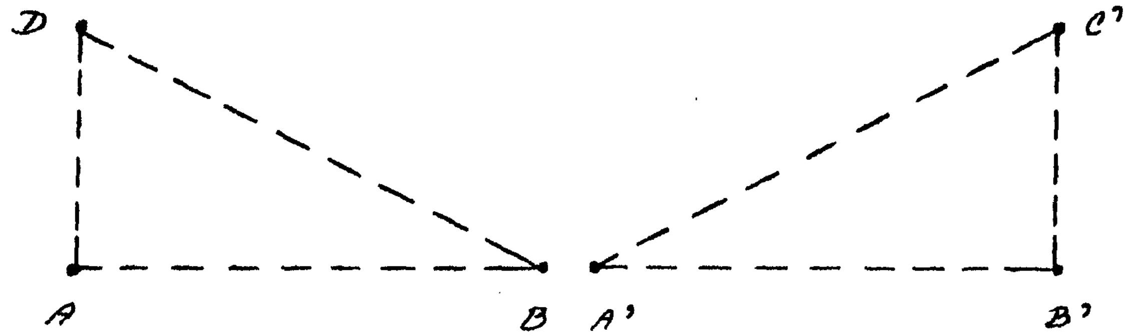
¿Como es la diagonal (AC) con respecto a la diagonal (DB)?

Dibuje dos rectángulos de tal manera que ambos rectángulos tengan las mismas medidas. Posteriormente dibuje sus respectivas diagonales de cada uno de ellos e ilumínelos como se indica en las figuras siguientes:

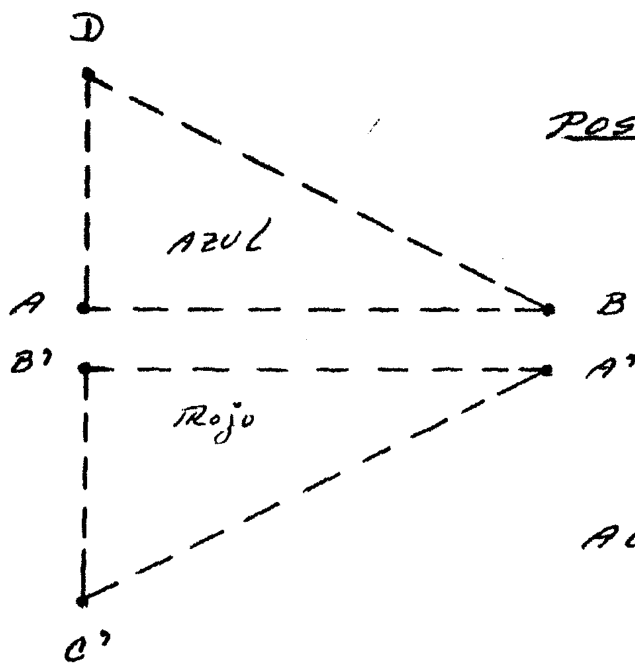


Nota; Recuerde que estamos pensando en que estos dos rectángulos (ABCD) y (A'B'C'D') son el mismo o sea sólo tenemos un rectángulo el cual estamos analizando como son sus diagonales.

Observando los dos triángulos anteriores tenemos uno iluminado de azul y otro iluminado de rojo, si recortamos dichos triángulos obtenemos las figuras siguientes.



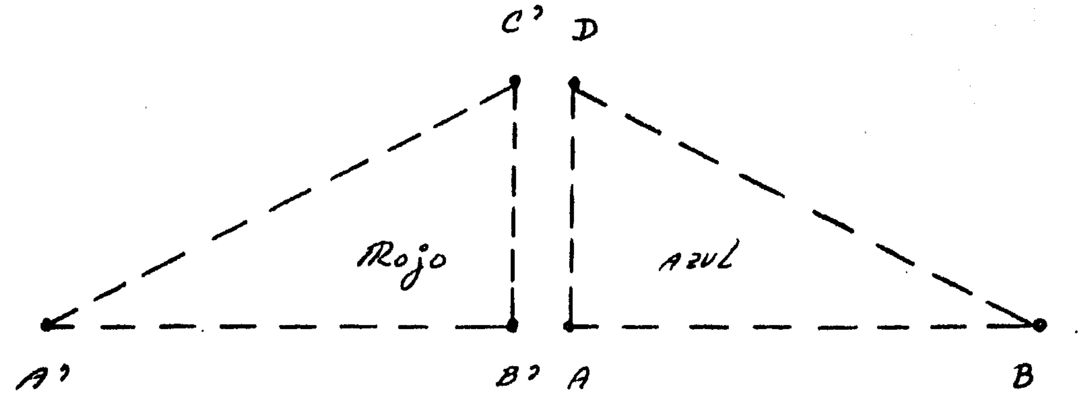
Coloque los triángulos en algunas posiciones y cada una de ellas nos llevan a la solución de como son las diagonales de un rectángulo. Observe las figuras siguientes.



POSICIÓN UNO.

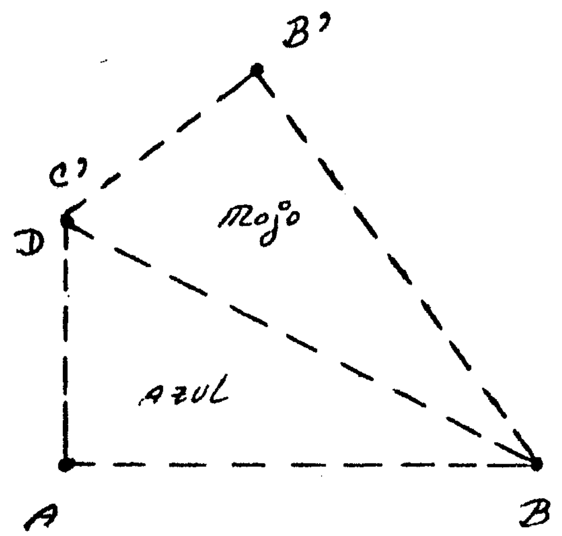
$AB = A'B'$

Posición dos.



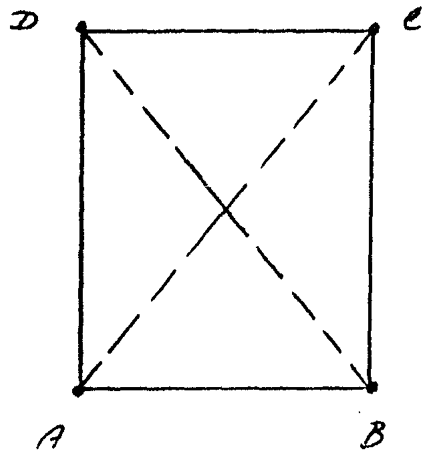
$$B'C' = AD.$$

Observando las posiciones anteriores y colocando los triángulos en la siguiente forma concluimos que las diagonales de un rectángulo siempre son iguales.

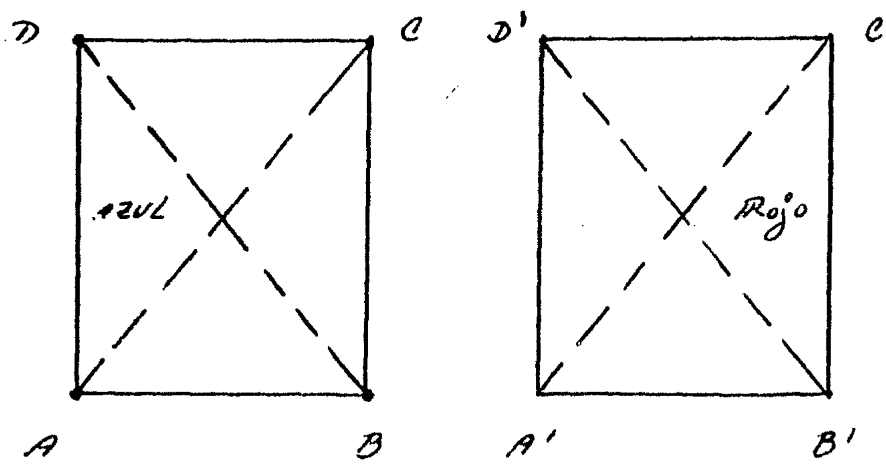


$$(A'C') = (DB)$$

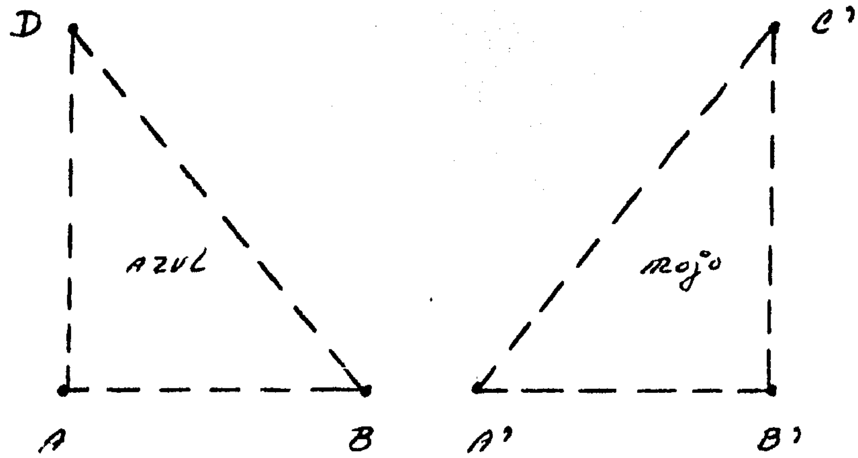
Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, entonces el paralelogramo es un rectángulo.



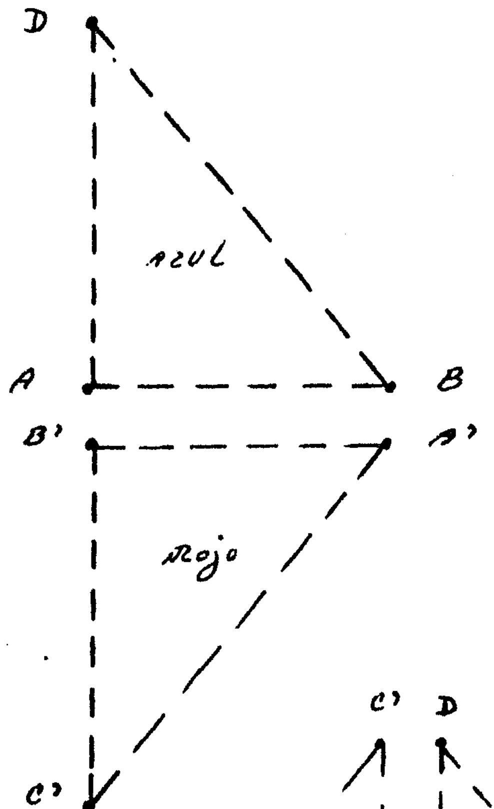
Dibuje dos paralelogramos con la idea que sus diagonales sean iguales o sea que $AC = DB$. Teniendo estos dibujos ilumine de algún color que le agrade cada uno de ellos, como se indica en la gráfica siguente.



Recorte con mucha precisión el triángulo azul y el triángulo rojo y obtiene las siguientes figuras:



Coloque los triángulos en algunas posiciones las cuales nos llevarán directamente a la solución :

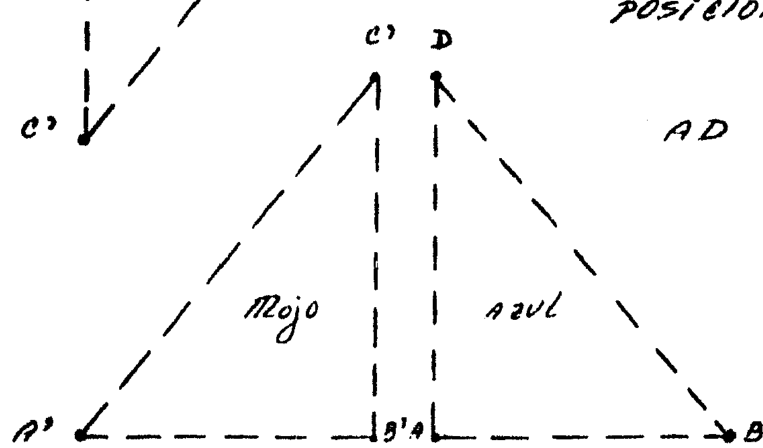


posición uno

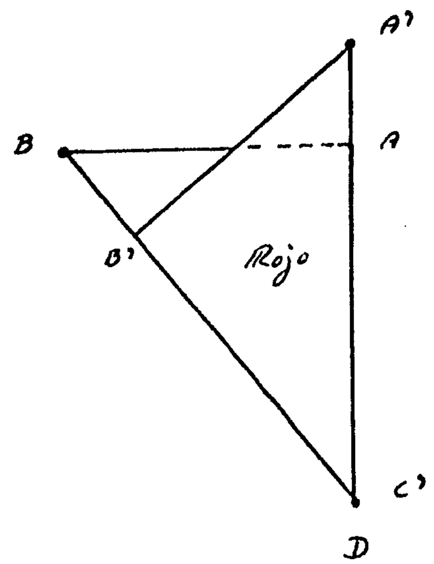
$AB = A'B'$

posición dos

$AD = B'C'$

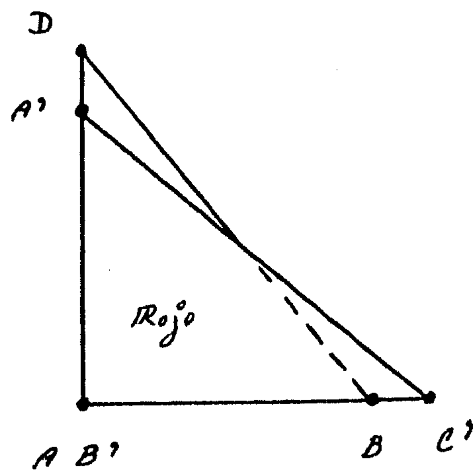


Posición tres.



En la posición anterior observamos que el ángulo (C') es igual con el ángulo (D).

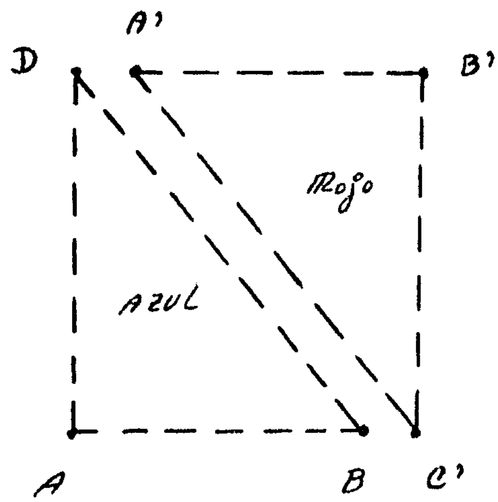
Posición cuatro.



En la posición cuatro observamos que el ángulo (A) es igual con el ángulo (B')

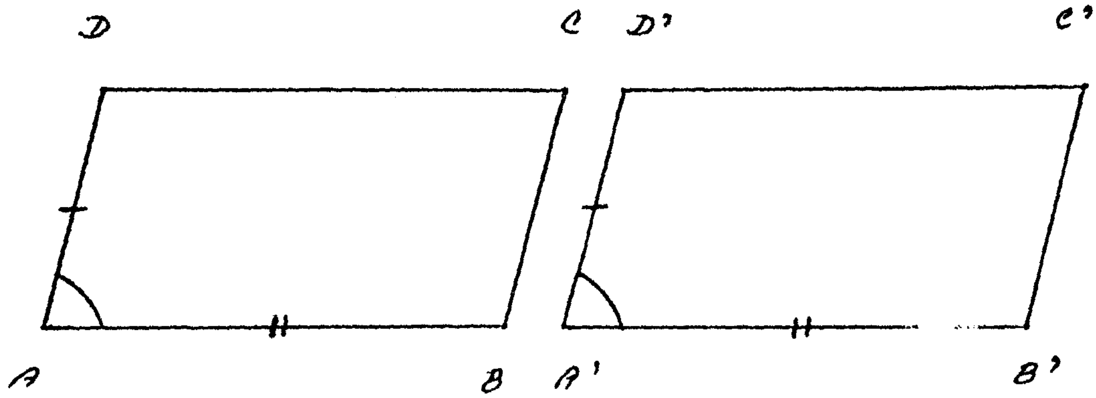
Posición cinco.

Voltear el triángulo rojo y posteriormente superponer los triángulos.



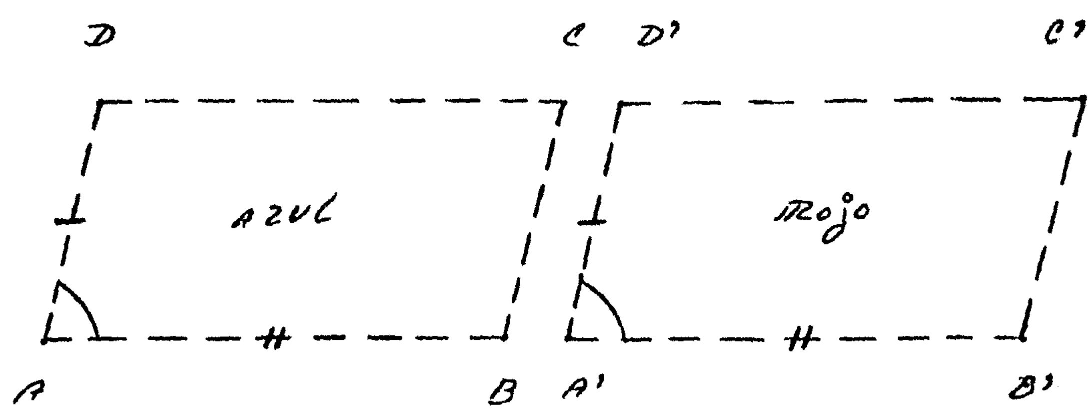
Analizando todas las posiciones anteriores y observando el dibujo anterior, concluimos que si las diagonales de un paralelogramo son iguales entonces el paralelogramo es un rectángulo.

Investigaremos como son dos paralelogramos si tienen dos lados contiguos respectivamente iguales y el ángulo que forman tambien igual.

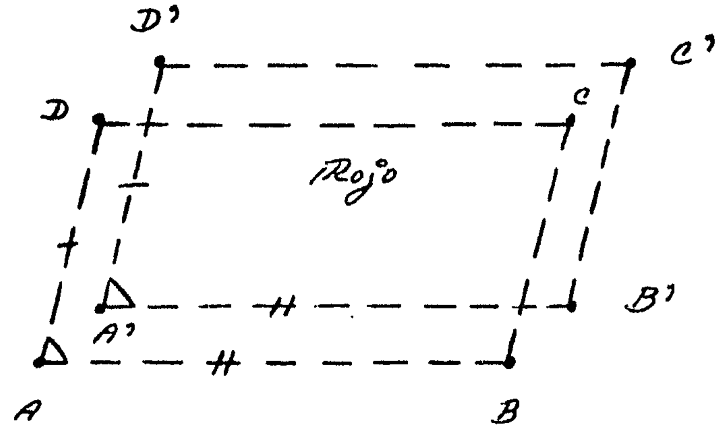


¿Como es el paralelogramo ABCD con respecto al paralelogramo A'B'C'D' ?

Dibuje dos paralelogramos de tal manera que dos lados contiguos respectivamente sean iguales y igual el ángulo que forman dichos lados. recorta ambos paralelogramos e ilumina de algún color que te agrade cada uno de ellos.



Coloca el paralelogramo rojo sobre el paralelogramo azul de modo que el ángulo (A') coincida con el ángulo (A)

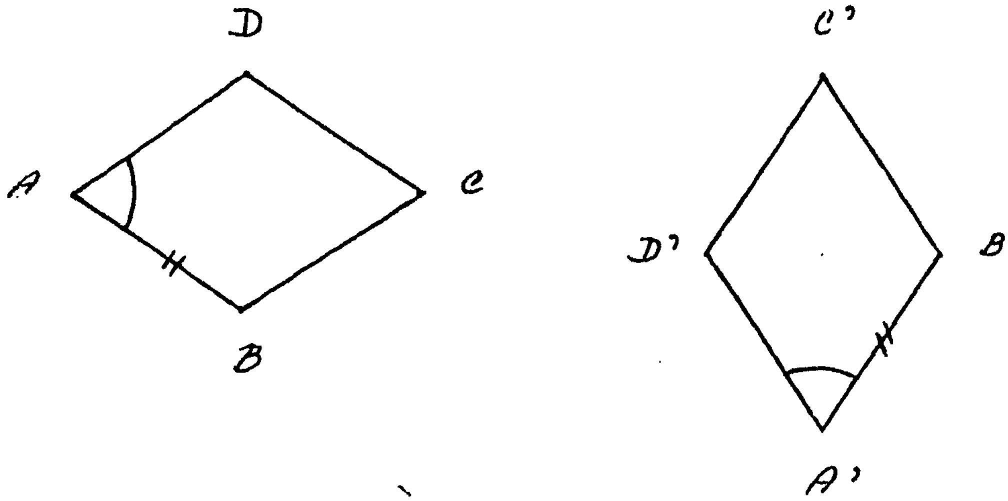


1.- A'B' coincide con AB por ser lados iguales
2.- A'D' coincide con AD por ser lados iguales
3.- D'C' toma la dirección de DC por ser ambos paralelos a AB y trazados desde el mismo punto D, B'C' toma la dirección de BC, por ser ambos paralelos a AD y trazados desde el mismo punto B.

4.- El punto C' cae en C y los dos paralelogramos coinciden.

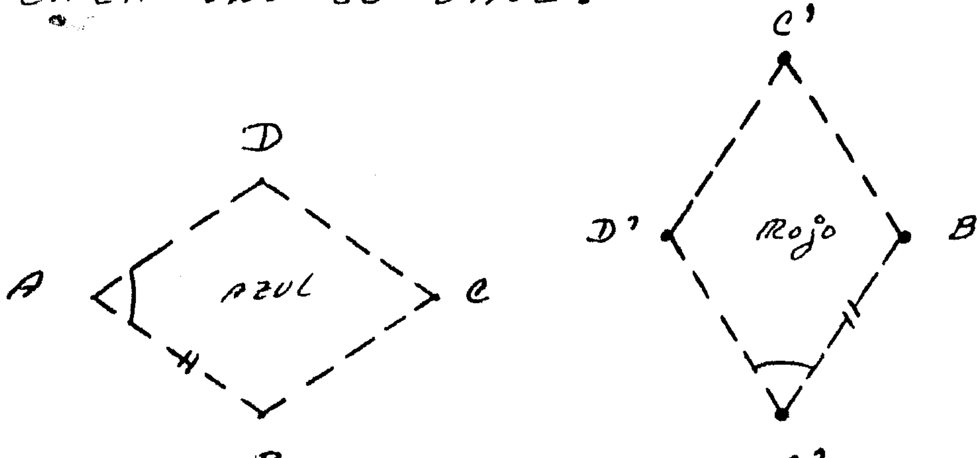
Por lo tanto el paralelogramo ABCD es <u>igual</u> al paralelogramo A'B'C'D'.

Investigaremos como son dos rombos cuando tienen un lado y un ángulo respectivamente iguales.

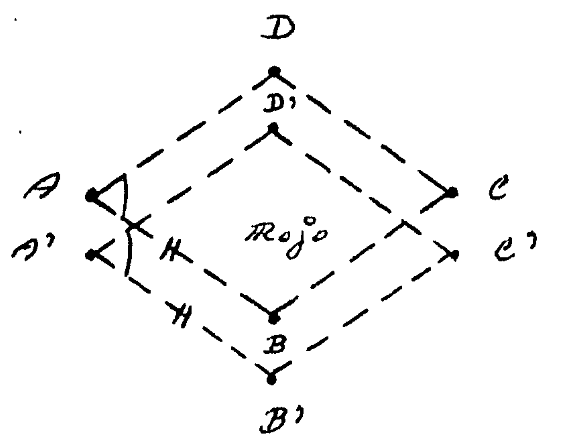


¿Como es el rombo ABCD con respecto al rombo A'B'C'D'?

Dibuje dos rombos de tal manera que un lado sea igual al lado del otro y igual en uno de sus ángulos como se indica en la figura de arriba; recorta ambos rombos e ilumina de algún color que te agrade cada uno de ellos.



Coloca el rombo de color rojo sobre el rombo de color azul de modo que el ángulo (A') coincida con el ángulo (A)



Afirmaciones las cuales demuestran bajo la observación y comprobación la solución de la investigación.

1.- A' B' coinciden con AB, por ser lados iguales.

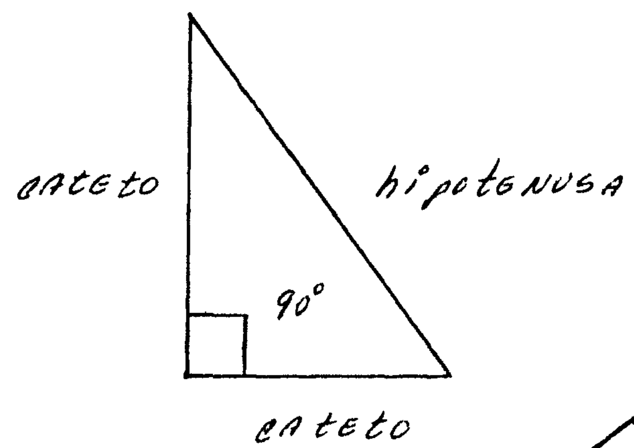
2.- D' C' toma la dirección de DC por ser ambos paralelos a AB y trazados desde el mismo punto D; B' C' toma la dirección de BC, por ser ambos paralelos a AD y trazados desde el mismo punto B.

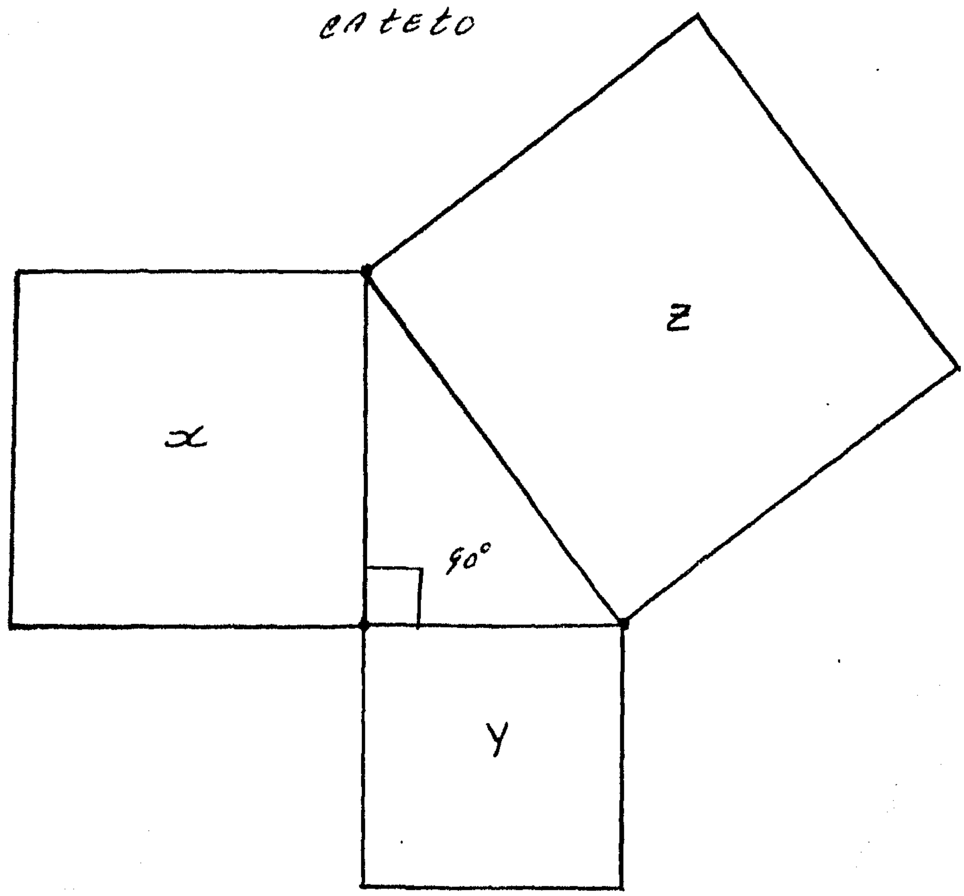
3.- El punto C' cae en C y los dos rombos coinciden punto con punto y lados con lados.

Por lo tanto el rombo ABCD es igual con el rombo A'B'C'D'.

Teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras nos dice que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos de dicho triángulo.
Observemos las figuras siguientes.

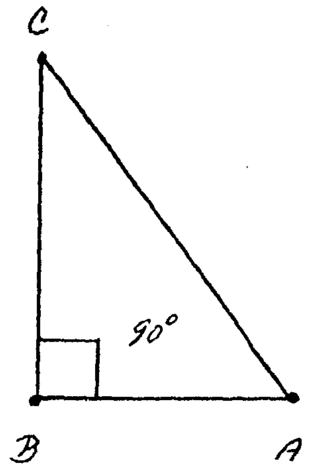




Para verificar esto hacemos lo siguiente.

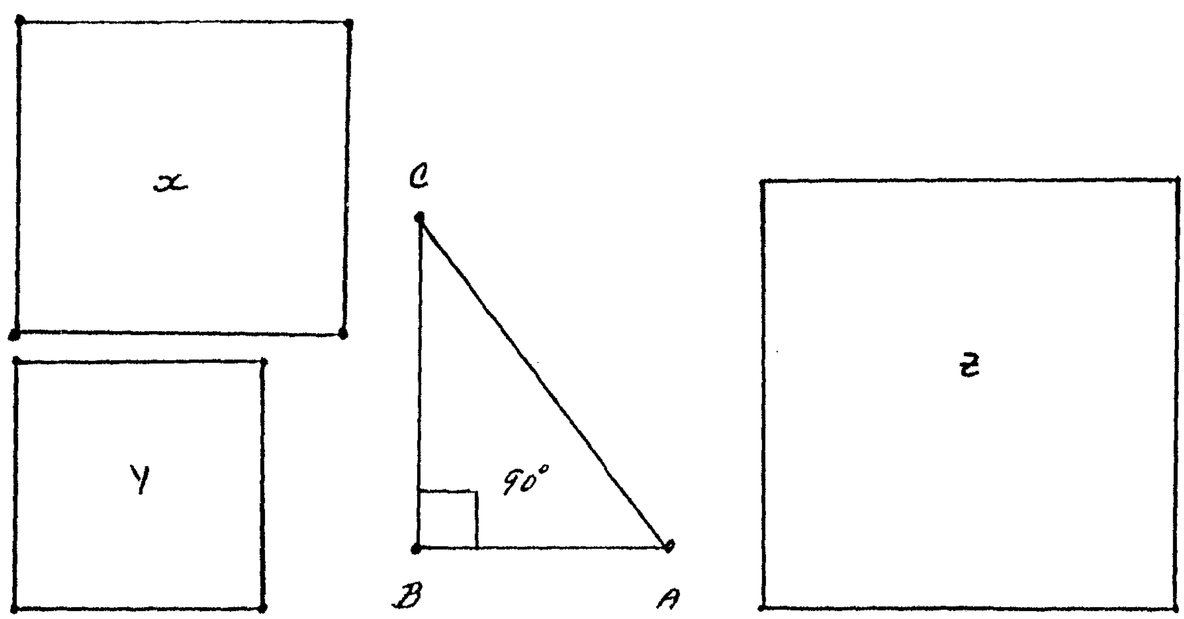
CONSTRUCCIÓN.

1.- Trazamos un triángulo rectángulo.

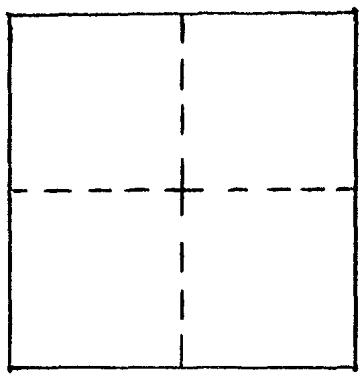


2.- Construimos cuadrados correspondientes a cada uno de los lados del triángulo ABC, de tal manera que estos cuadrados sean muy bien trazados.

Recortamos las piezas y obtenemos:

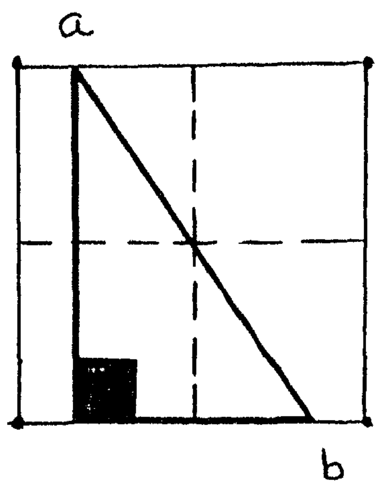


3.- El cuadrado (x) lo doblamos en dos partes iguales y al desdoblar obtenemos el centro de este cuadrado como se tiene en la figura siguiente.



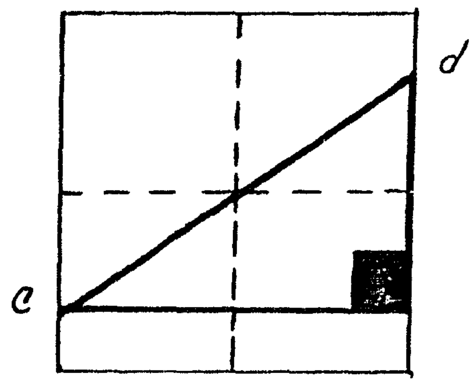
cuadrado (x)

4.- Sobre este cuadrado (x) colocamos el triángulo ABC en la misma posición en que esta dicho triángulo, de tal manera que la hipotenusa pase por el centro del cuadrado y obtenemos el segmento ab como se indica en la figura siguiente.

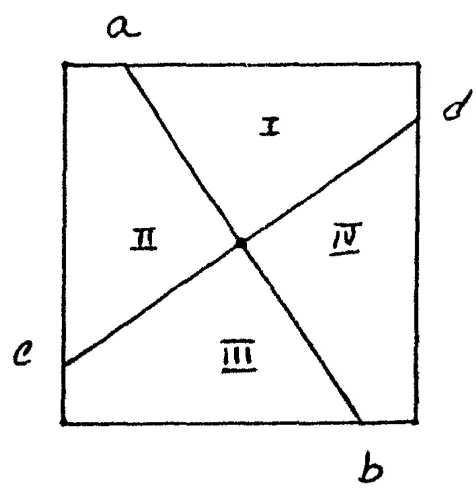


cuadrado (x)

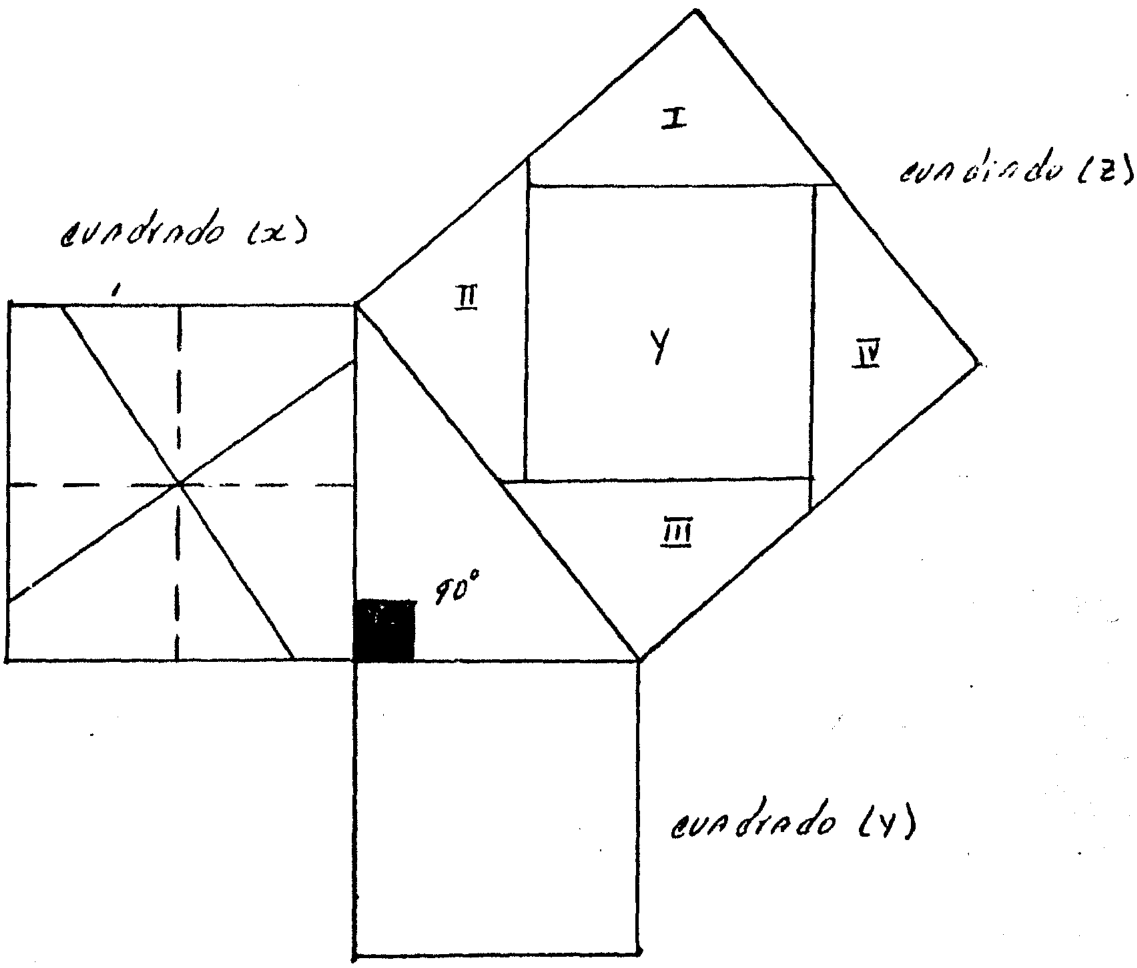
5.- Rotando el cuadrado o el triángulo obtenemos un nuevo trazo cd.



Observando estos dos trazos anteriores en el cuadrado (x) obtenemos la figura.



6.- Recortando estas cuatro porciones (I, II, III, IV) y el cuadrado (Y). Los colocamos en el cuadrado (Z) en forma de rompecabezas para obtener:

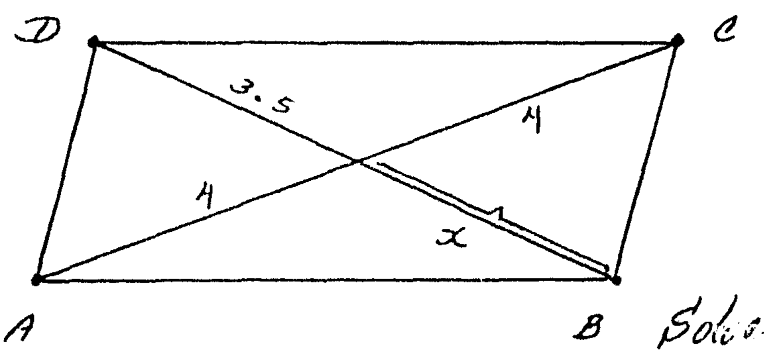


Así queda verificado el teorema de Pitágoras para este ejemplo.

Proyectos.

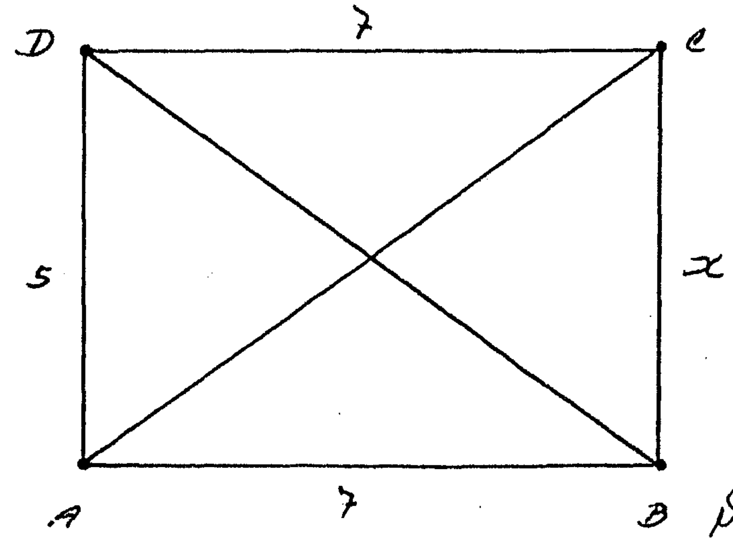
En cada uno de los ejercicios siguientes encuentra el valor de (x) y trata de justificar tu contestación utilizando todos los conocimientos anteriores.

1.-



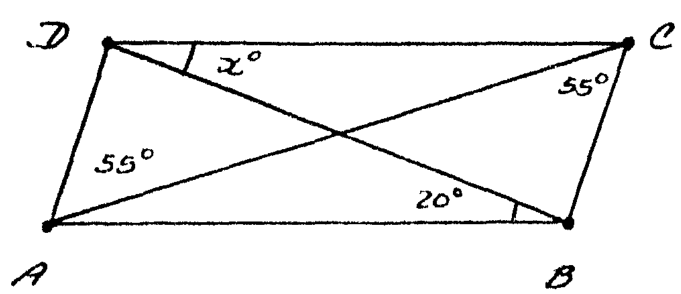
Solución____

2.-



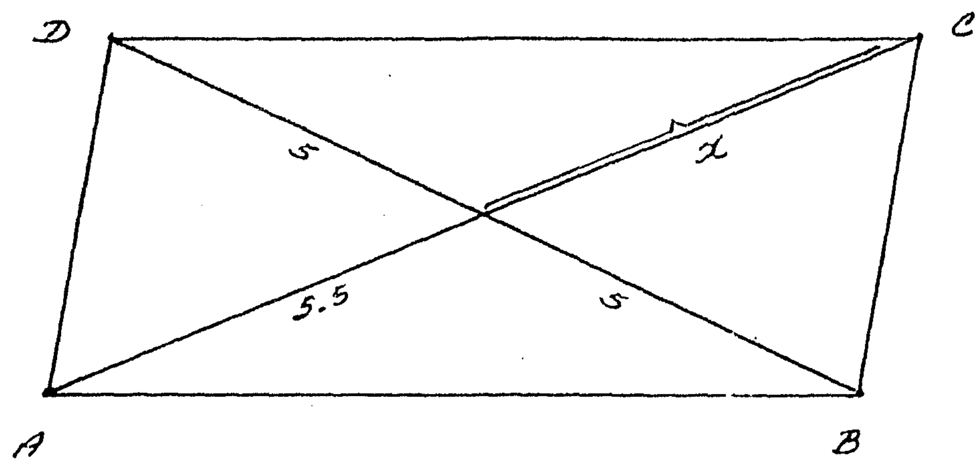
Solución____

3.-



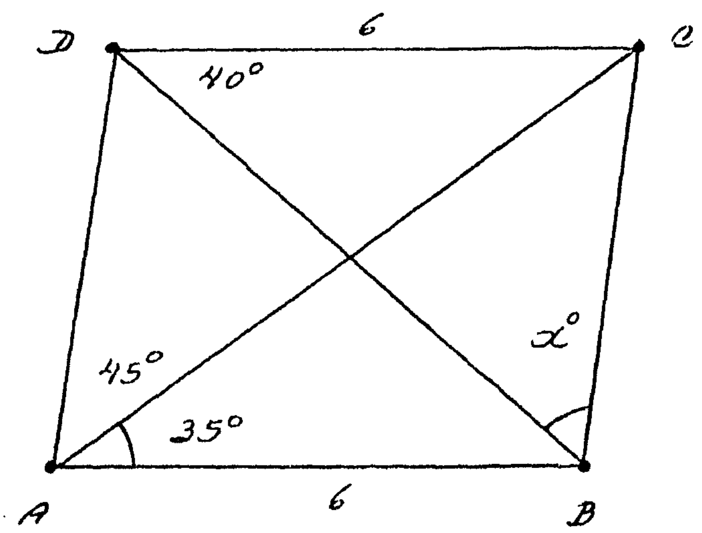
Solución____

4.-



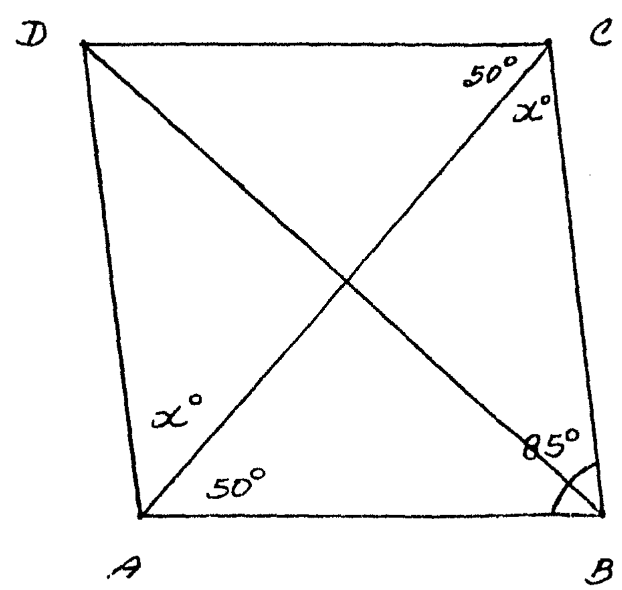
Solución ____

5.-



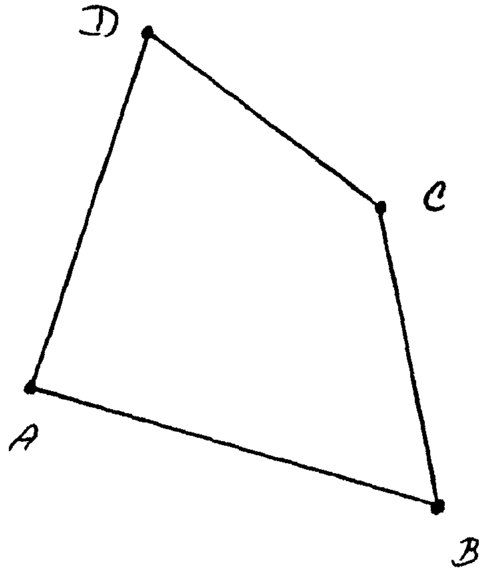
Solución ____

6.-



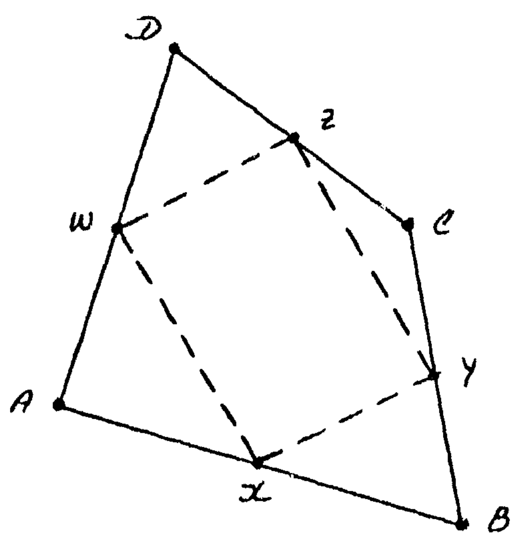
Solución ____

7.- Dibuje un cuadrilátero, si conectamos los puntos medios de cada uno de sus lados obtenemos una nueva figura. ¿Que tipo de figura obtendremos?



cuadrilátero

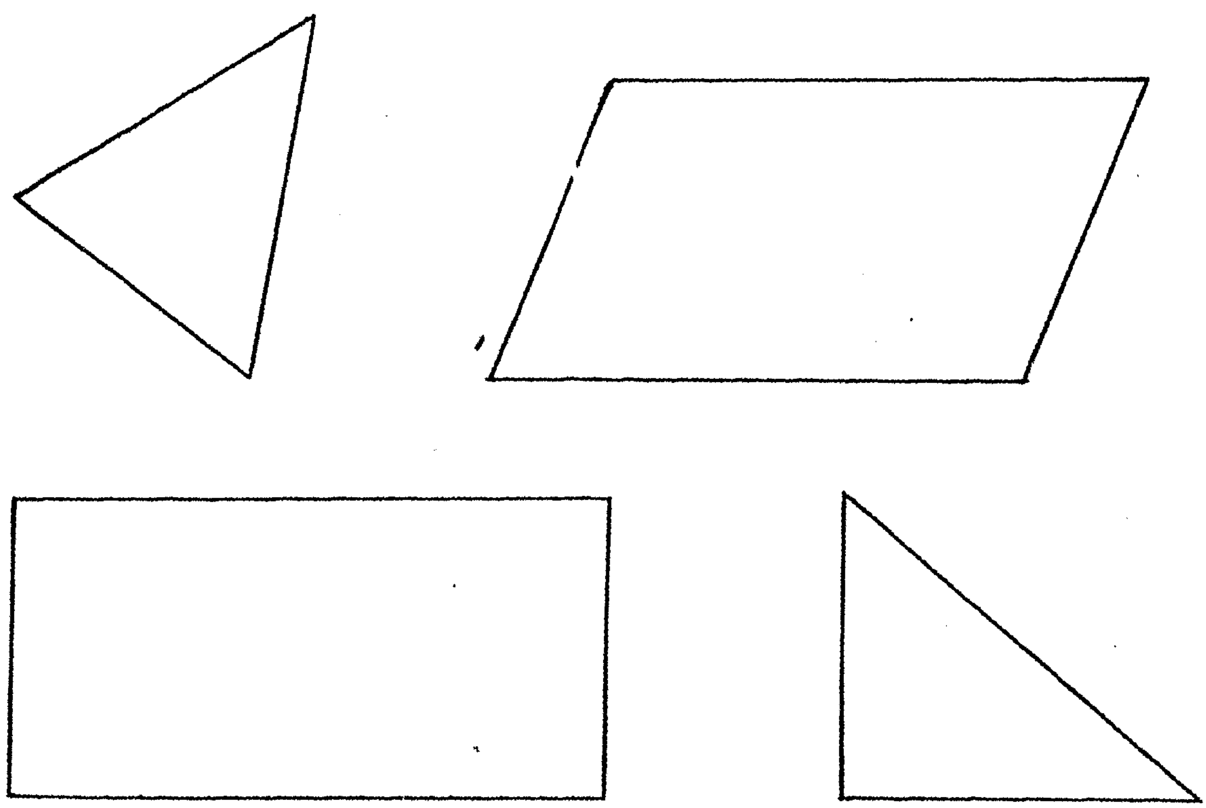
Trazar los puntos medios de cada uno de sus lados y conecte dichos puntos xyzw en orden.



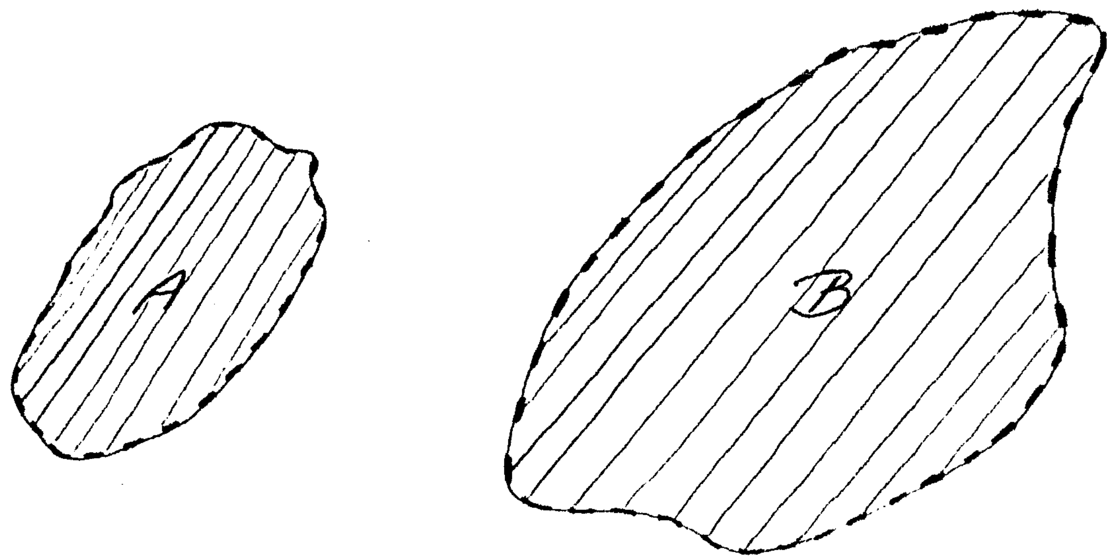
Solución, la figura obtenida es un paralelogramo.

CAPÍTULO IV

ÁREA DE TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS



Propiedades Fundamentales de Área.



i) Si una figura (A) cabe dentro de una figura (B), entonces el área de (A) es menor o igual que el area de (B).

ii) Si una figura (C) se obtiene juntando sin encimarse dos figuras (A) y (B) entonces

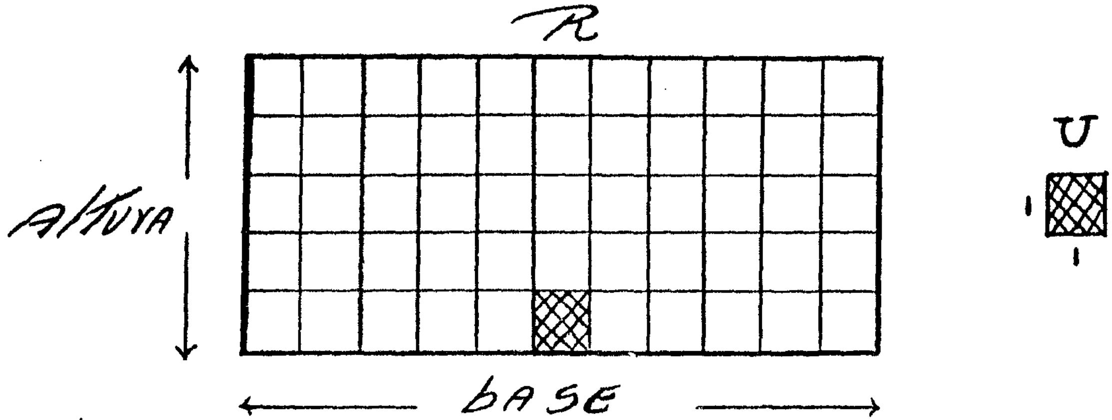
$$\text{Área } (C) = \text{Área } (A) + \text{Área } (B)$$

Se pueden reducir a una sola propiedad las dos anteriores.

iii) Si es posible recortar una figura (A) en pedazos que caben sin encimarse en una figura (B). Entonces el área de (A) es a lo más igual al área de (B).

TEOREMAS SOBRE ÁREA

TEOREMA. El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.



Sea R un rectángulo en que la base y la altura están numéricamente expresadas por a y b respectivamente.

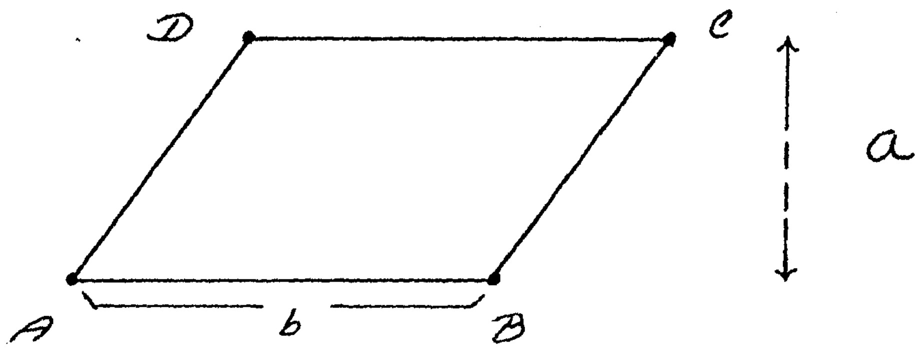
Sea U la unidad de superficie. Entonces se tiene.

$$\frac{R}{U} = \frac{ab}{1 \times 1} = ab.$$

Ahora bien, $\frac{R}{U}$ expresa el número de unidades superficiales contenidas en R, o sea el área de R.

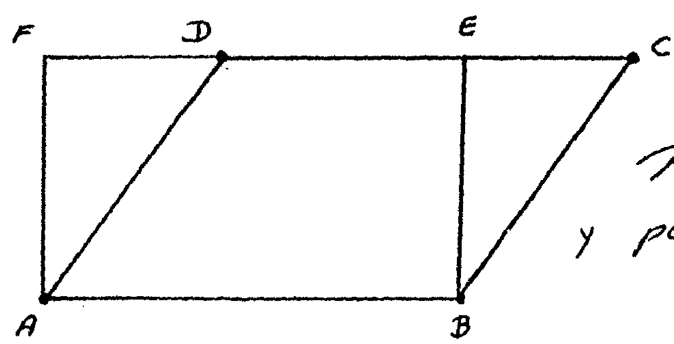
$\therefore$ Área de $R = ab$.

TEOREMA. El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

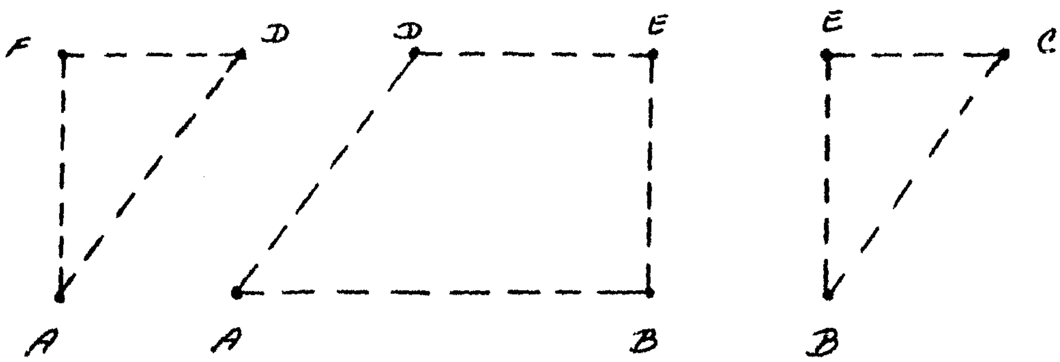


Plan para la demostración.

Dibuje un paralelogramo ABCD de cualquier medida, trace las perpendiculares (AF) y BE a las bases, posteriormente recórtele las piezas del paralelogramo como se indica en las siguientes figuras.

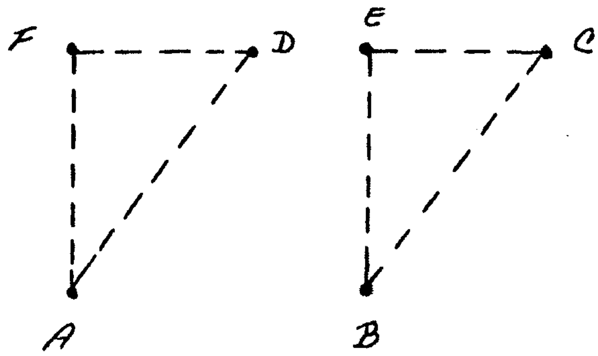


Paralelogramo ABCD y perpendiculares AF y BE

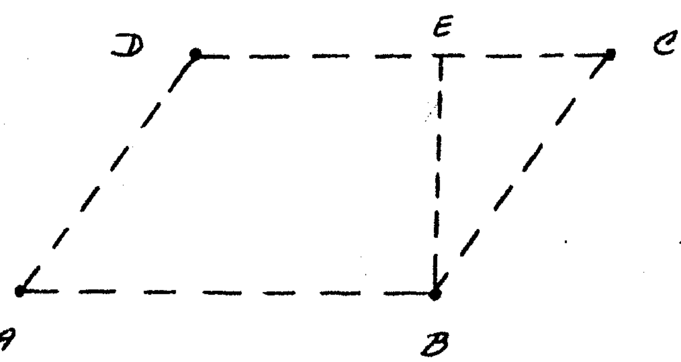


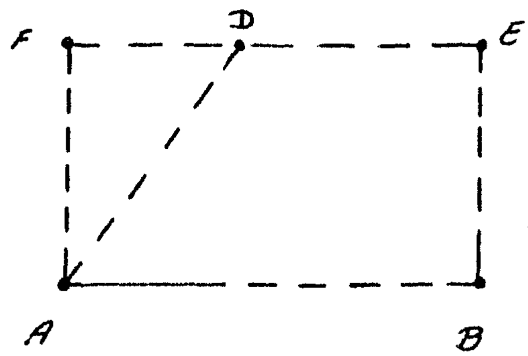
Demostración del teorema.

Los triángulos rectángulos (AFD) y (BEC) son iguales, por tener las hipotenusas AD y BC iguales, los catetos (AF) y (BE) también iguales, se puede verificar superponiendo dichos triángulos.



Luego, el paralelogramo (ABCD) es igual al rectángulo (ABEF).



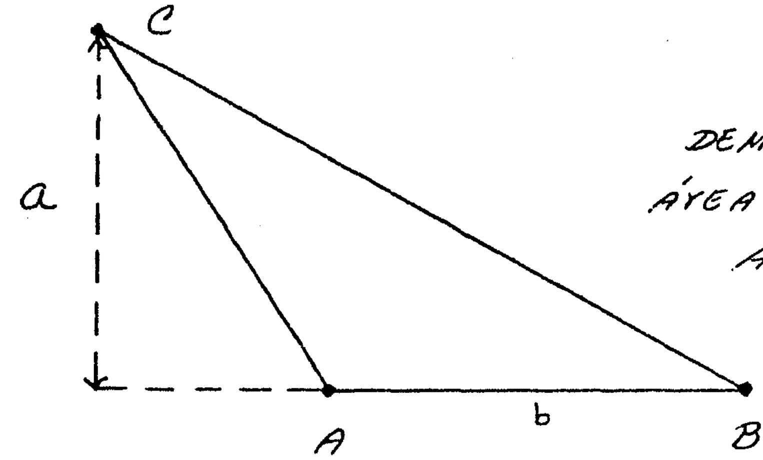


Por tanto, su área es igual a la del rectángulo o sea

Área = (AB) (BE) = b·a

Área del paralelogramo = base · altura.

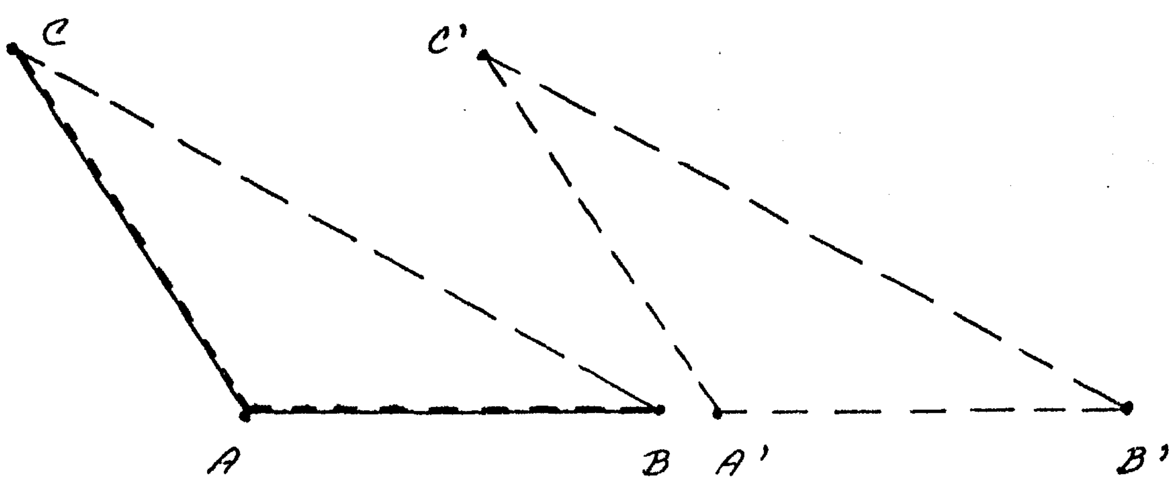
TEOREMA. El área de un triángulo es igual al semi-producto de su base por su altura.



DEMOSTRAREMOS QUE EL ÁREA del triángulo ABC $= \dfrac{b \cdot a}{2}$

Plan para la demostración.

Dibuje un triángulo cualquiera y trace su altura luego, cálquese dicho triángulo y recórtelos

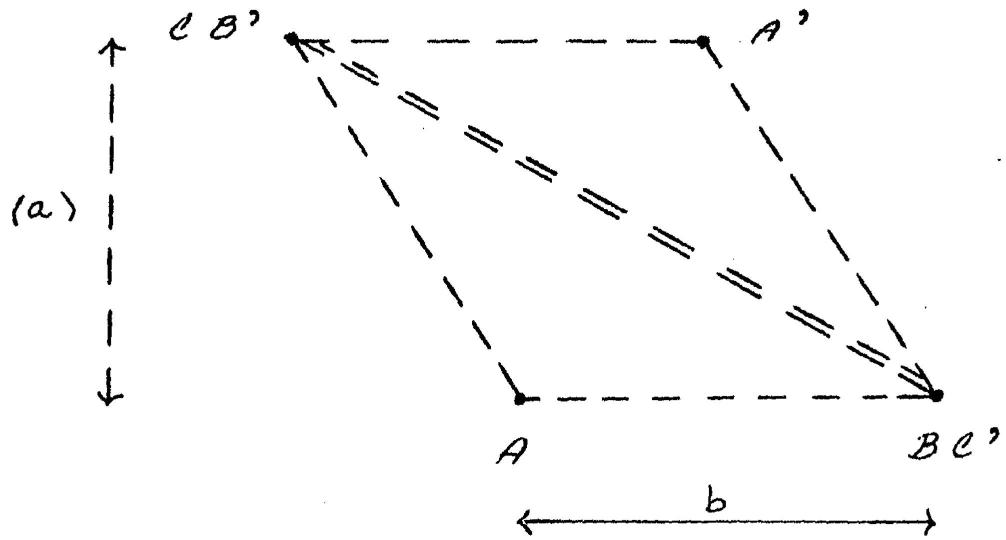


triángulos recortados.

ABC y A'B'C'

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA.

Coloque los triángulos de la siguiente forma.



Se obtiene el paralelogramo ABA'B' compuesto de dos triángulos (ABC) y (A'B'C') iguales, por tener sus lados iguales, luego el área del triángulo (ABC) es igual a la mitad del área del paralelogramo (ABA'B').

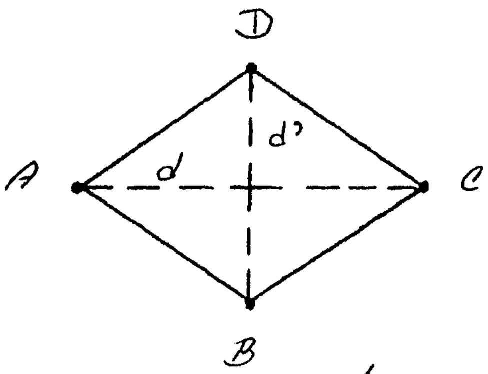
Recordando que el área del paralelogramo es igual a base por altura.

Tenemos que el área del triángulo es.

$$\text{ÁREA} = \frac{AB \cdot (a)}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$\boxed{\text{ÁREA DEL TRIÁNGULO} = \frac{\text{BASE} \cdot \text{ALTURA}}{2}}$$

TEOREMA. El área de un rombo es igual al semi-producto de sus diagonales.



DEMOSTRAREMOS QUE.

$$\boxed{\text{El área del rombo} = \frac{d\,d'}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA.

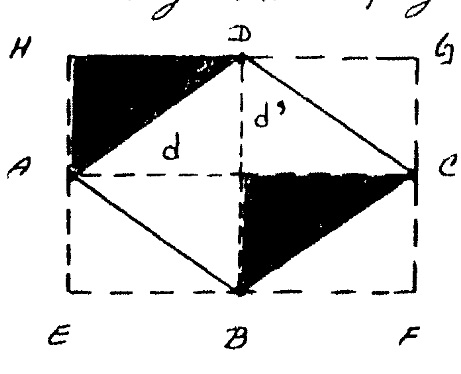
El rombo es un paralelogramo, por tanto, se puede calcular su área como la de esta figura, generalmente se calcula por medio de sus diagonales.

Sea el rombo (ABCD) y sus diagonales d y d' por los vértices del rombo, trácense perpendiculares a las diagonales, se forma así el paralelogramo (EFGH).

Si se recortan los triángulos formados fuera del rombo y los colocamos dentro del rombo vemos que es la misma área la de afuera como la de adentro del rombo respectivamente.

Por lo cual se multiplican las diagonales y se divide entre dos para obtener el área del rombo.

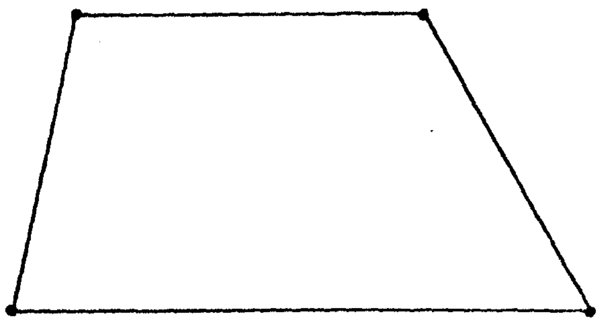
Observe la siguiente figura.



$$\text{Área} = \frac{EF \cdot BD}{2} = \frac{d\,d'}{2}$$

$$\boxed{\text{Área del rombo} = \frac{d\,d'}{2}}$$

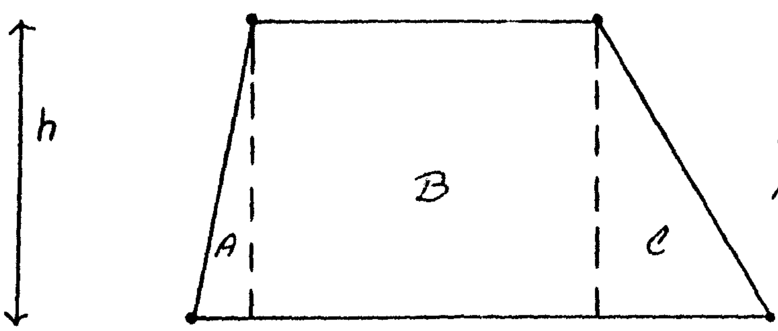
TEOREMA. El área de un trapecio es igual al producto de la semi-suma de sus bases por su altura.



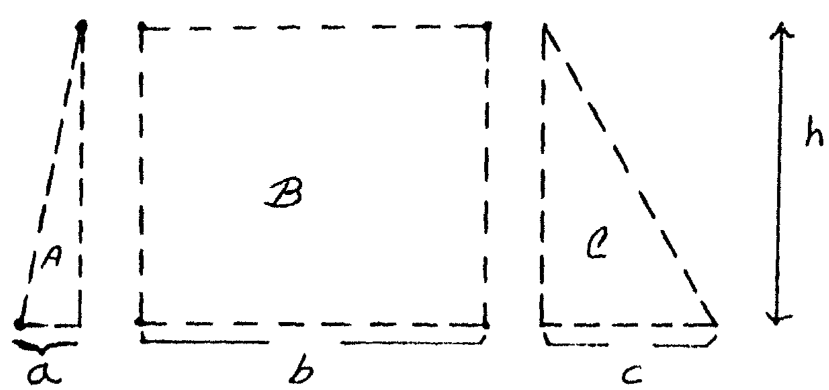
trapecio.

Plan para la demostración.

Trace un trapecio de cualquier tamaño, posteriormente trace dos perpendiculares como se indica en la figura, recorte el área A, B, C. Ilumine cada área de algún color que le agrade.

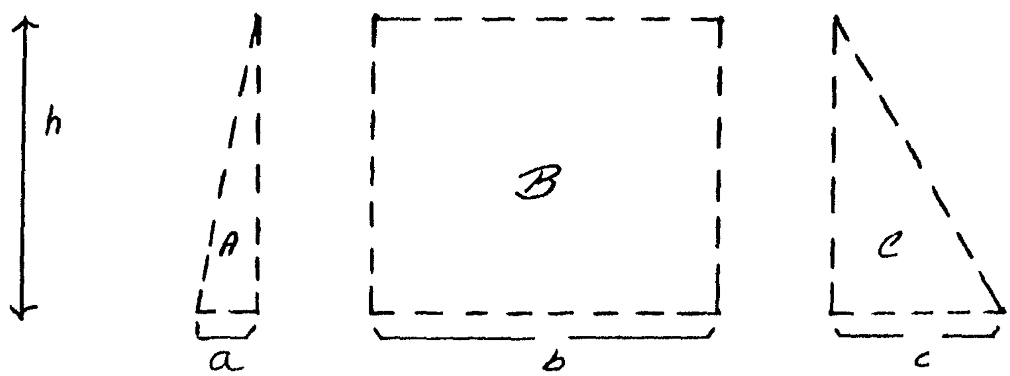


longitud base menor = b
longitud base mayor = a+b+c



DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA.

Área del trapecio = área de A + área de B + área de C



Área de (A) $= \dfrac{a \cdot h}{2}$

Área de (B) $= b \cdot h$

Área de (C) $= \dfrac{c \cdot h}{2}$

Área del trapecio $= \dfrac{a \cdot h}{2} + b \cdot h + \dfrac{c \cdot h}{2}$

Sumando; área del trapecio $= \dfrac{a \cdot h + 2b \cdot h + c \cdot h}{2}$

Factorizando (h). $= \dfrac{a + 2b + c}{2} \cdot h$

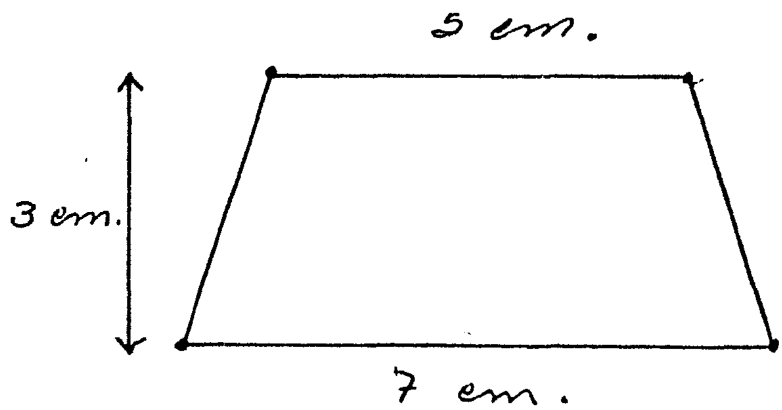
Pero $a + 2b + c = \underbrace{(a + b + c)}_{\text{base mayor}} + \underbrace{b}_{\text{base menor}}$

Entonces $\dfrac{a + 2b + c}{2}$ = semi-suma de las bases

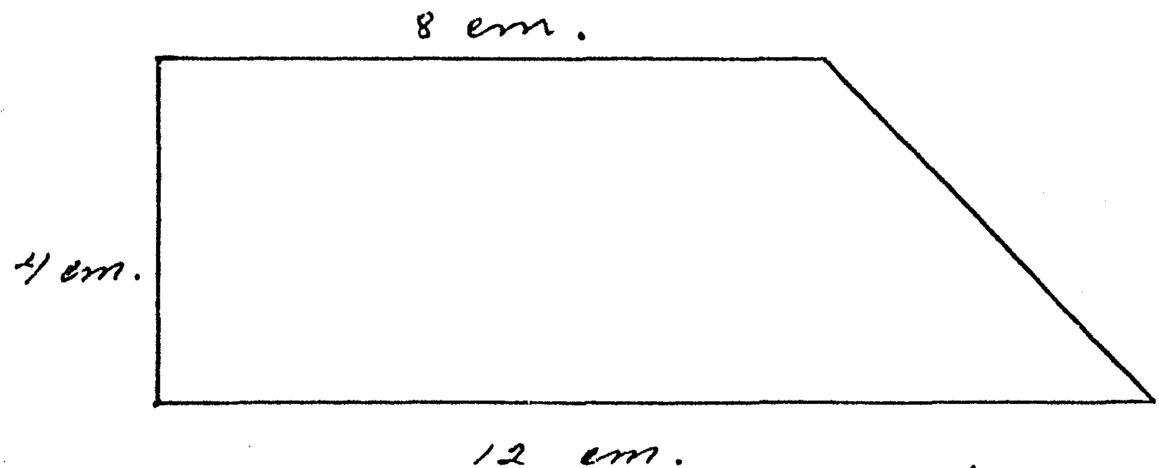
$\therefore$ Área del trapecio $= \left(\dfrac{a + 2b + c}{2}\right) \cdot h$.

PROYECTOS.

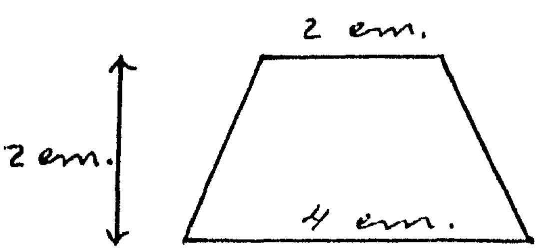
i) Encuentre el área de cada uno de los trapecios.



Solución______



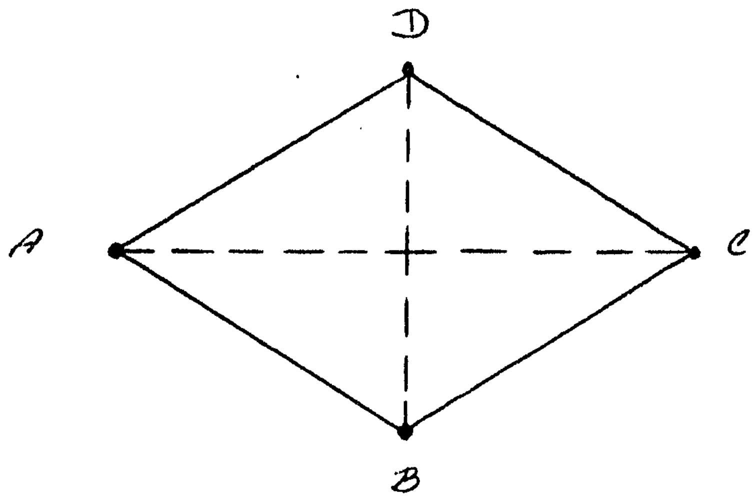
Solución______



Solución______

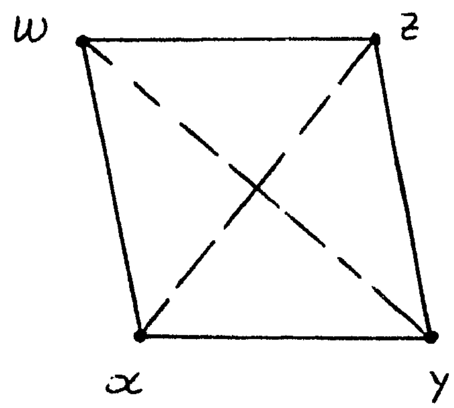
PROYECTOS.

Encontrar el área de cada uno de los siguientes rombos.



$AC = 7$ cm.
$BD = 4$ cm.

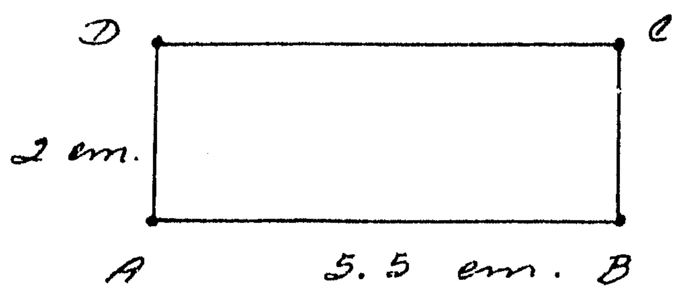
Solución______



$XZ = 4.5$ cm.
$YW = 5.5$ cm.

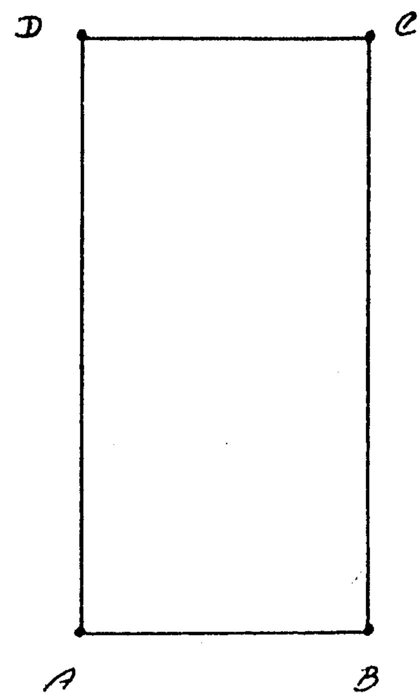
Solución______

Encuentre el área de los siguientes rectángulos.



$AB = 5.5$ cm.
$AD = 2$ cm.

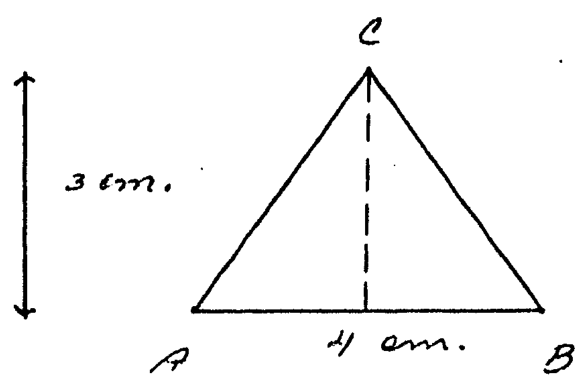
Solución______



AB = 3.5 cm.
BC = 7 cm.

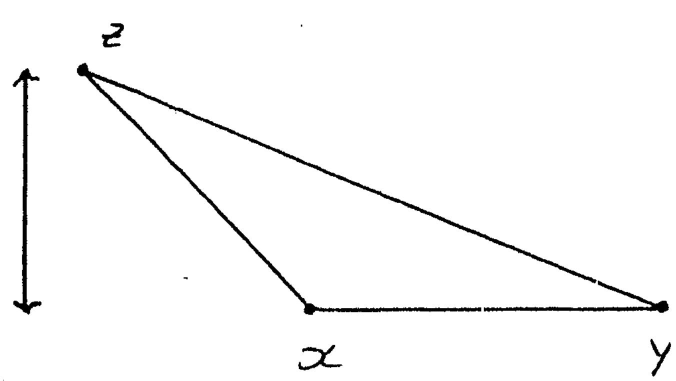
Solución____

Encontrar el área de los siguientes triángulos.



AB = 4 cm.
altura = 3 cm.

Solución____



XY = 4 cm.
altura = 2.5 cm.

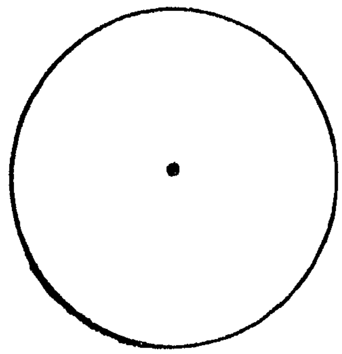
Solución____

CAPÍTULO 5º

Círculo.

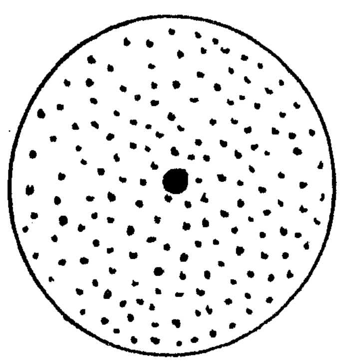
Definiciones.

Circunferencia. Es una curva plana y cerrada cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.



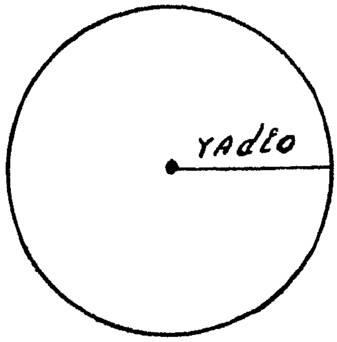
circunferencia.

Círculo. Es una figura plana limitada por una curva cerrada cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

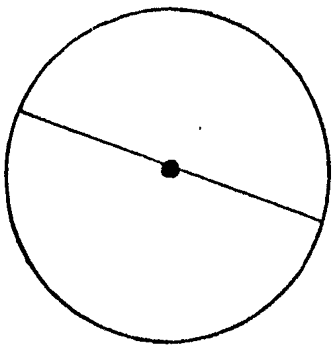


círculo.

Radio. Es la recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la circunferencia.

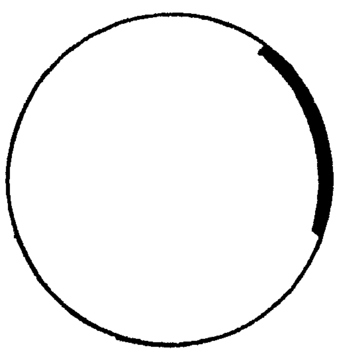


Diámetro. Es la recta que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro.



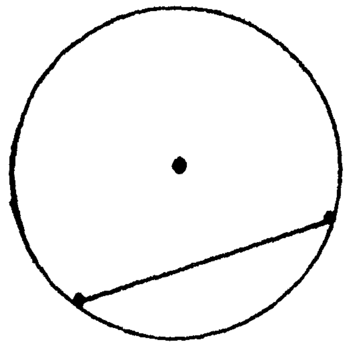
Diámetro

Arco. Es cualquier parte de la circunferencia.



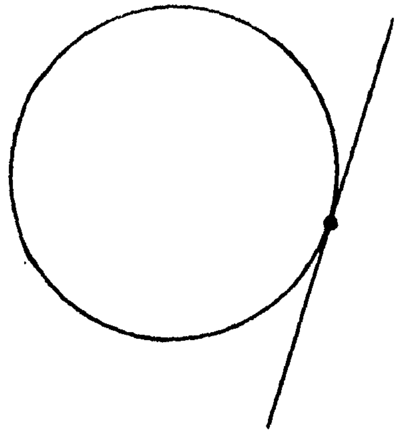
Arco.

Cuerda. Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.



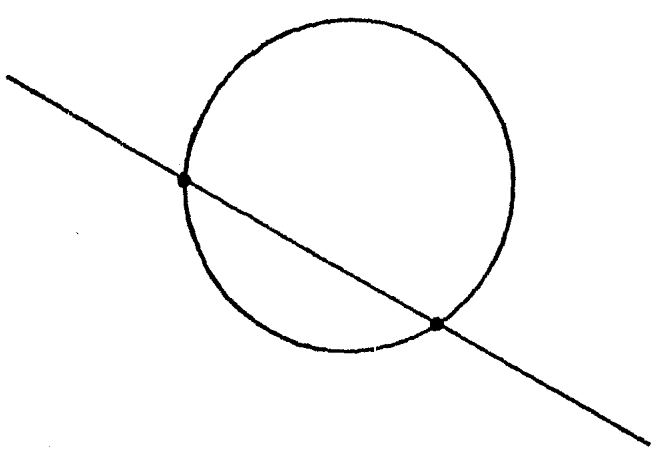
cuerda.

Tangente. Es la recta que toca a la circunferencia en un solo punto.



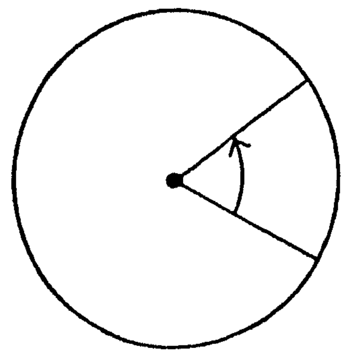
tangente

Secante. Es la recta que corta la circunferencia en dos puntos.

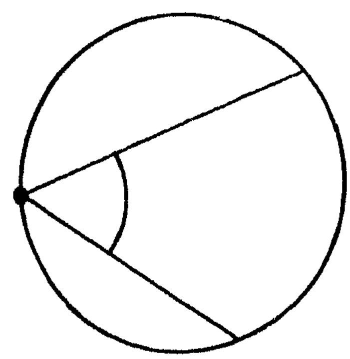


secante.

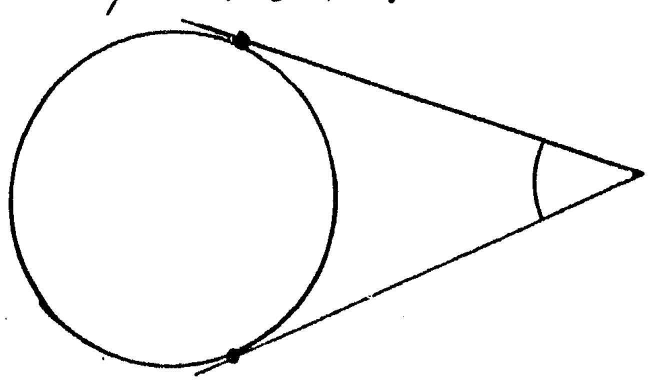
Ángulo central. Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son radios.



Ángulo inscrito. Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.



Ángulo circunscrito. Es el ángulo que tiene como lados dos tangentes a la circunferencia.

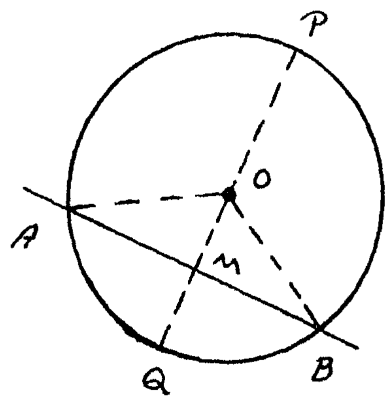


Teoremas sobre círculos.

Sea C un círculo, (O) su centro y AB una cuerda.

1.- Una recta que pasa por el centro del círculo (diámetro), perpendicular a una cuerda, la biseca.

Sea PQ un diámetro perpendicular a la cuerda AB. Sea M el pie de la perpendicular.



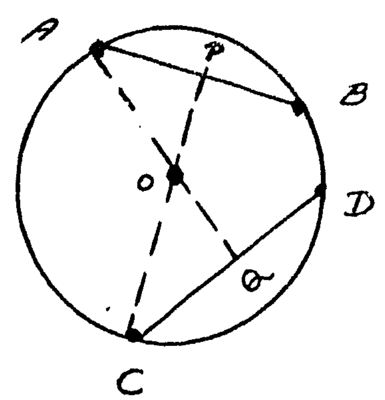
Consideremos los triángulos AMO y BMO.

$OA = OB$ por ser radios de C.
$OM = OM$

$\measuredangle AMO = \measuredangle OMB = 90^\circ = 1$ recto

$\therefore \ \Delta AMO = \Delta BMO$ y
$AM = MB$.

2.- En el mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales son equidistantes del centro del círculo.



Sean AB y CD dos cuerdas iguales.

$AB = CD$.

Tracemos por O perpendiculares a estas cuerdas, sean P y Q los puntos determinados en AB y CD respectivamente.

Por 1.-) sabemos que OP biseca a AB y OQ biseca a CD.

$AB = 2AP$

$CD = 2CQ$

Por lo tanto $AP = CQ$.

Consideremos los triángulos OAP y OCQ

$OA = OC$ por ser radios

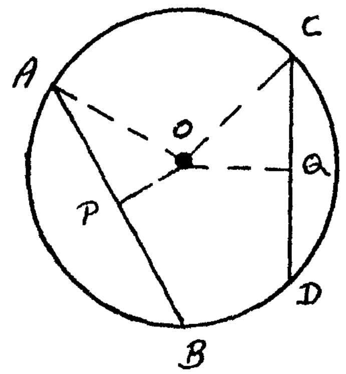
$AP = CQ$

$\measuredangle APO = \measuredangle CQO = 1$ recto

Por lo tanto $\Delta OAP = \Delta OCQ$ y $OP = OQ$.

3.- En el mismo círculo o en círculos iguales si dos cuerdas son distintas y están a diferente distancia del centro, la mayor está a menor distancia.

Sean AB y CD dos cuerdas tales que $AB > CD$.



Trazamos perpendiculares OP y OQ a ellas. Trazamos OA y OC. Consideremos ΔAPO y ΔCQO Por 1.-) sabemos que.

$$AB = 2AP, \quad CD = 2CQ$$

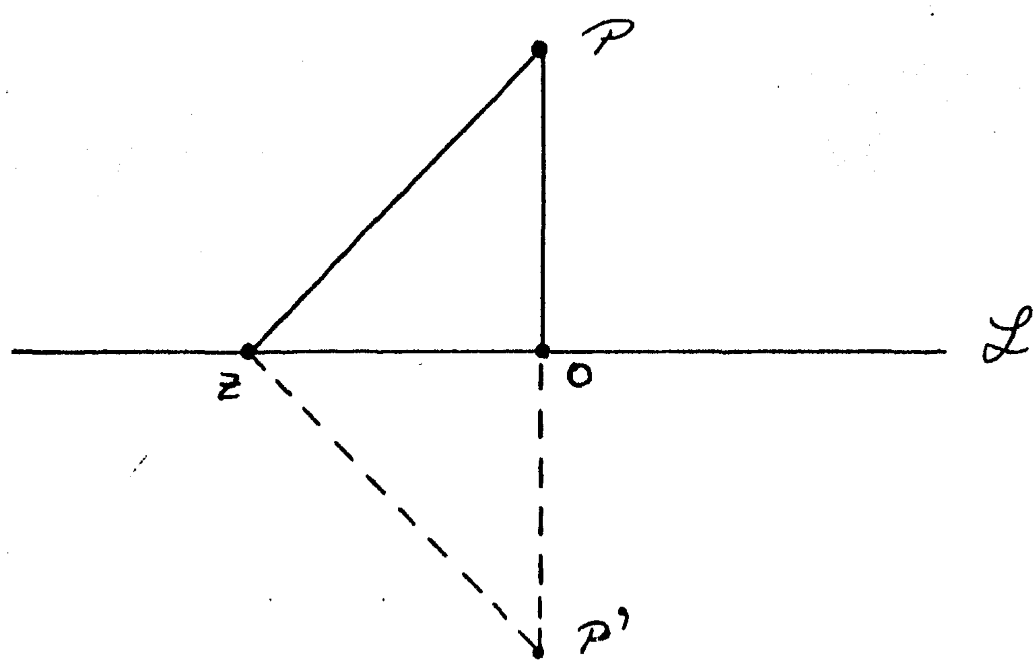
por hipótesis $AB > CD$ y entonces $AP > CQ$ Además $OA = OC$ por ser radios. Ya que los triángulos APO y CQO son rectángulos, aplicando el teorema de Pitágoras.

en ΔAPO, $OA^2 = AP^2 + OP^2$
en ΔCQO, $OC^2 = CQ^2 + QO^2$
por lo tanto $AP^2 + OP^2 = CQ^2 + QO^2$
pero vimos que $AP > CQ$, entonces $AP^2 > CQ^2$ y $OP^2 < OQ^2$, por lo tanto.

$$OP < OQ.$$

TEOREMA. La línea perpendicular es la más corta de las rectas que puede trazarse a una recta $\mathcal{L}$ de un punto situado fuera de ella.

Sea P un punto situado fuera de la recta $\mathcal{L}$. Sean PO la perpendicular bajada de P a $\mathcal{L}$, PZ una línea cualquiera.



Prolónguese PO hasta P' tal que $OP' = PO$ y trácese $P'Z$.

$$PZ = P'Z$$

$$\therefore PZ + P'Z = 2PZ$$

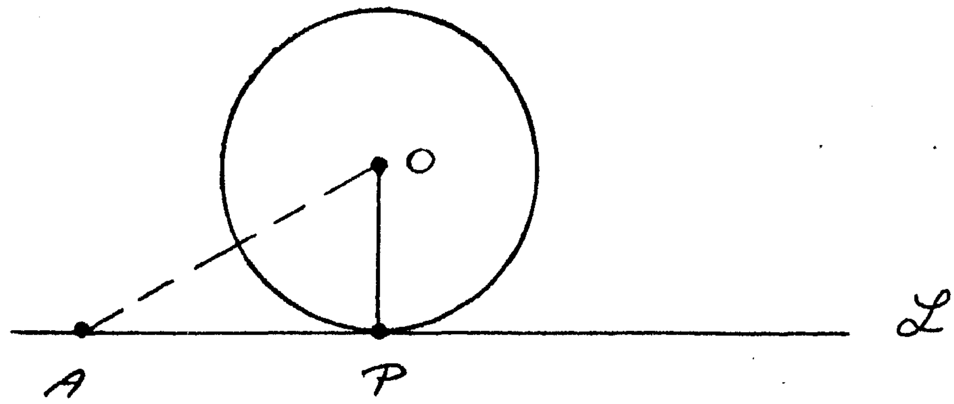
$$PO + P'O = PP'$$

Por la desigualdad del triángulo $PP' < PZ + P'Z$.

$$\therefore 2PO < 2PZ$$

$$\therefore PO < PZ.$$

Si una recta es perpendicular a un radio en el punto donde esta corta a la circunferencia, la recta es tangente al círculo.



Sea $\mathcal{L}$ una recta perpendicular al radio OP en P.

Sea A un punto cualquiera de $\mathcal{L}$ distinto de P.

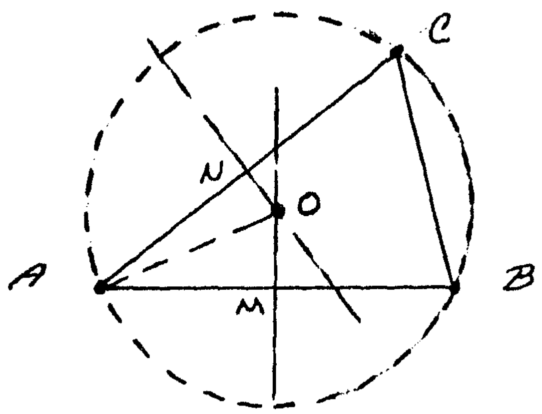
Trácese la recta OA.

$OA > OP$ por el teorema anterior y OP es un radio de la circunferencia entonces A esta fuera del círculo.

Así, P es el único punto común a $\mathcal{L}$ y el círculo

$\therefore$ $\mathcal{L}$ es tangente al círculo.

Circunscribir un círculo a un triángulo dadó.



círculo circunscrito.

Sea ABC el triángulo dado.

<u>Construcción</u>. Trácense las bisectrices perpendiculares de AB y AC.

Como A, B, C no están en una recta, estas perpendiculares se intersectan en un punto (O).

Con centro en (O) y radio OA trácese un círculo.

Este círculo pasa por los vértices A, B y C.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

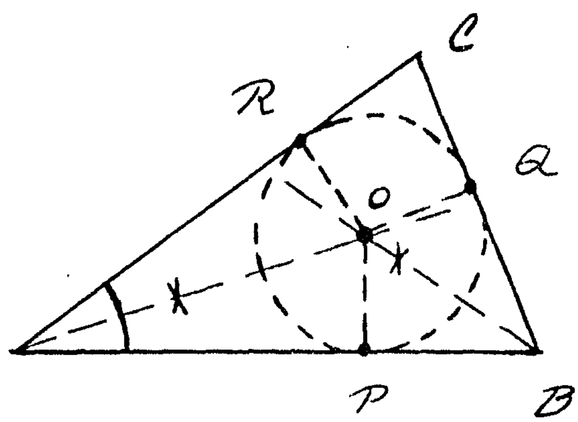
El punto (O) equidista de A y B, también de A y C

$\therefore$ (O) equidista de A, B, C.

Luego el círculo de centro (O) y radio OA pasa por A, B, C.

Inscribir un círculo en un triángulo dado.

Sea ABC el triángulo dado.
Se desea inscribir un círculo en el triángulo ABC.



Construcción.

Biséctense los ángulos BAC y CBA. Por O, intersección de las bisectrices trácese OP perpendicular al lado AB. Trácese el círculo con centro en O y radio OP. Este círculo es tangente a AB, BC y CA.

Demostración

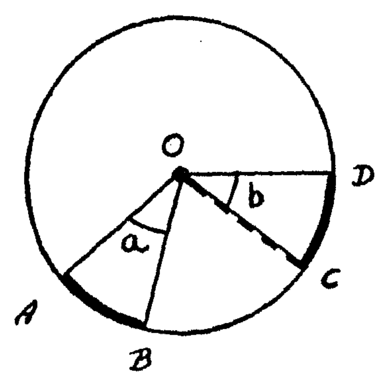
El punto O equidista de AB, AC, BC por estar en las bisectrices de los ángulos BAC y CBA luego el círculo de centro O y radio AP es tangente a los tres lados del triángulo.

Algunas propiedades de los ángulos inscritos en relación con los arcos y cuerdas que abarcan. Para esto veremos primero algunas propiedades de ángulos centrales.

1) En círculos iguales, ángulos centrales iguales abarcan arcos iguales.

Sean a, b dos ángulos centrales iguales.

Sean $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ los arcos que abarcan.



Hagamos coincidir el ángulo (a) y el ángulo (b). (esto puede hacerse porque son iguales)

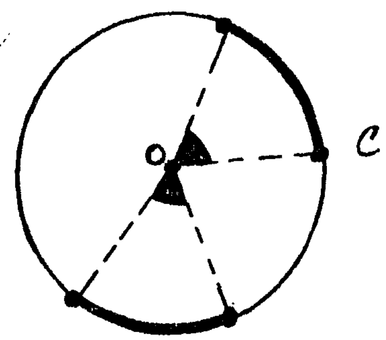
$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \text{Por ser radios}$$

Por lo tanto OA coincide con OC y OB con OD.

Esto es, el arco $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

1°) En el mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales subtienden ángulos centrales iguales.

Sean $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ dos arcos iguales. Sean AOB y COD los ángulos que subtienden.



Hagamos coincidir el arco $\overset{\frown}{AB}$ y el arco $\overset{\frown}{CD}$
(esto se puede llevar acabo por que son iguales)

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ BO = OD \end{array}\right\} \text{por ser radios}$$

Por lo tanto OA coincide con OC y OB coincide con OD.

Esto es, el ángulo AOB coincide con el ángulo COD y

$$\measuredangle\, AOB = \measuredangle\, COD.$$

2) En el mismo círculo o en círculos iguales, el arco mayor abarca un ángulo central mayor.

Sean $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ dos arcos tales que $\widehat{AB} > \widehat{CD}$.

Por ser $\widehat{AB} > \widehat{CD}$, se puede encontrar un punto P en el interior del arco $\widehat{AB}$ tal que.

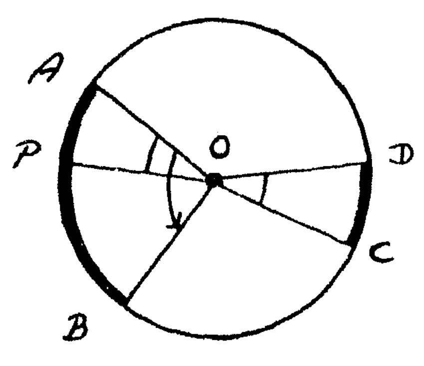
$$\widehat{AP} = \widehat{CD}$$

Ahora, ya que $\widehat{AP} = \widehat{CD}$, entonces

$$\measuredangle AOP = \measuredangle COD \quad (\text{por } 1^{\circ})$$

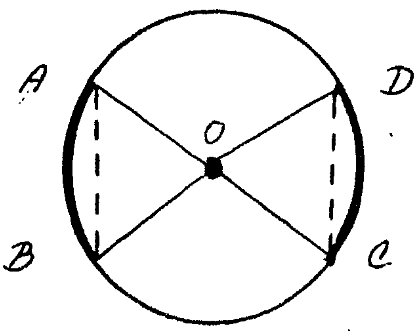
Pero $\measuredangle AOB = \measuredangle AOP + \measuredangle POB$ porque OP es interior a $\measuredangle AOB$. Por lo tanto

$$\boxed{\measuredangle COD < \measuredangle AOB}$$



3) En el mismo círculo o en círculos iguales, dos arcos iguales subtienden cuerdas iguales.

Sean $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ dos arcos tales que $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



$\measuredangle AOB = \measuredangle COD$. por que arcos iguales subtienden ángulos centrales iguales.

Consideremos los triángulos AOB y COD.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right| \text{ Por ser radios.}$$

$$\measuredangle AOB = \measuredangle COD.$$

Por lo tanto $\Delta AOB = \Delta COD$ y

$$AB = CD.$$

PROYECTOS.

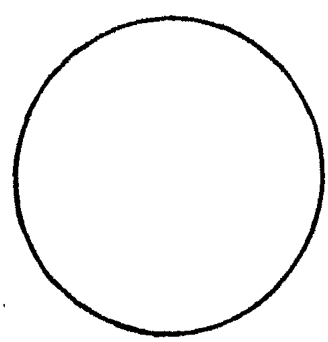
1.- En un círculo si dos cuerdas equidistan del centro, son iguales.

2.- Toda tangente a un círculo es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

3.- Todo ángulo inscrito que [illegible] un semi-círculo es un ángulo recto.

4.- Trazar una circunferencia por tres puntos no-alineados.

5.- Encontrar el centro de la siguiente circunferencia.



6.- En un mismo círculo o en círculos iguales, si el ángulo central $\measuredangle AOB$ es mayor que el ángulo central $\measuredangle COD$, entonces $\widehat{AB} > \widehat{CD}$.

CAPÍTULO VI

TRAZOS CON REGLA Y COMPAS

Introducción.

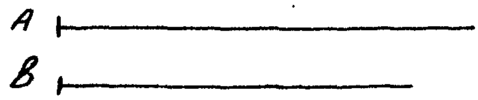
El problema de construir figuras es uno de los más antiguos de las matemáticas y ha sido de gran importancia en geometría, para el estudio de esta disciplina es interesante sin duda alguna saber utilizar instrumentos como la regla y el compás que nos permiten hacer desde trazos elementales hasta construcciones más elaboradas.

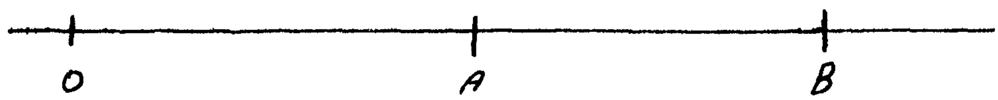
En este tema de trazos con regla y compás se hacen algunas construcciones básicas que permiten posteriormente el mejor entendimiento del estudio de la geometría, se desarrollan también paso a paso los trazos de los polígonos anteriormente estudiados, como lo son: los triángulos, cuadriláteros, pentágonos, exágonos, decágonos etc..

Se elabora una lista de proyectos que el lector puede ir desarrollando poco a poco y se tiene cuidado que estos proyectos se basen fundamentalmente en la teoría de este trabajo.

TRAZOS CON REGLA Y COMPÁS

I.- Dados dos segmentos A y B construir el segmento A + B



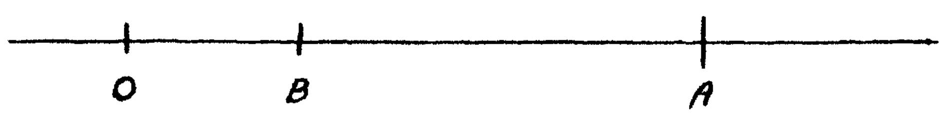


CONSTRUCCIÓN:

1.- Trazamos una recta y tomamos un punto O en ella.

2.- Llevamos con el compás las distancias $OA = A$ y $AB = B$.
Entonces $OB = OA + AB = A + B$

II.- Dados dos segmentos a y b, construir el segmento $a - b$



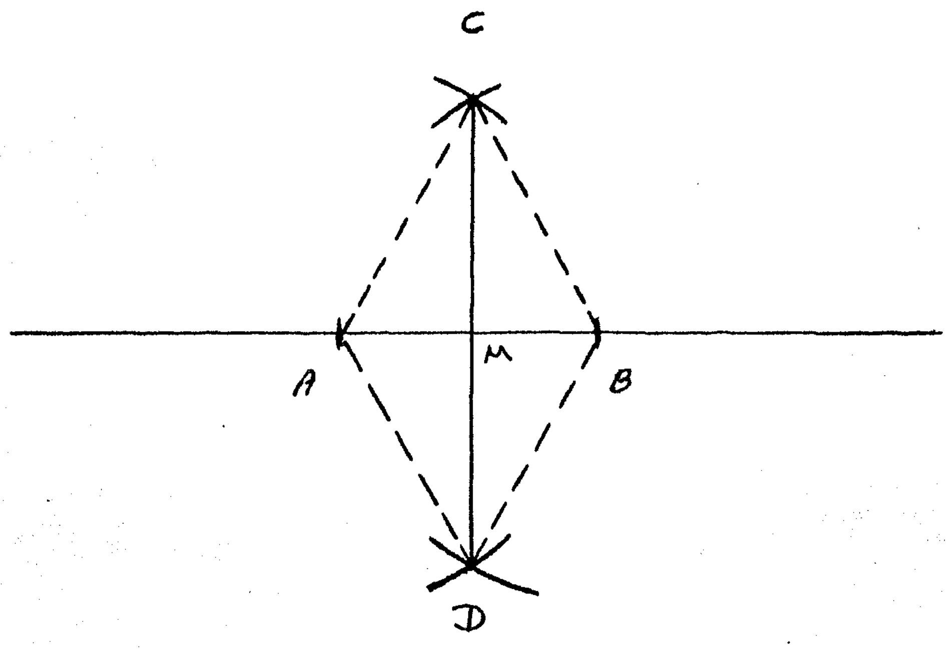
CONSTRUCCIÓN

1.- TRAZAMOS UNA RECTA Y TOMAMOS UN PUNTO EN ELLA.

2.- LLEVAMOS CON EL COMPÁS LA DISTANCIA $OA = a$ Y DESDE A EN SENTIDO OPUESTO, LA DISTANCIA $AB = b$.

ENTONCES $OB = a - b$

III) BISECTAR UN SEGMENTO DADO $\overline{AB}$



CONSTRUCCIÓN:

1.- TRAZAMOS CON CENTRO EN A, RADIO r Y CON CENTRO EN B, RADIO r DOS CIRCUNFERENCIAS QUE SE INTERSECTAN EN DOS PUNTOS. SEAN C Y D.

2.- TRAZAMOS LA RECTA CD. SEA M EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE CD Y AB. $AM = MB$

DEMOSTRACIÓN:

Los triángulos ACD y CBD son congruentes por construcción.

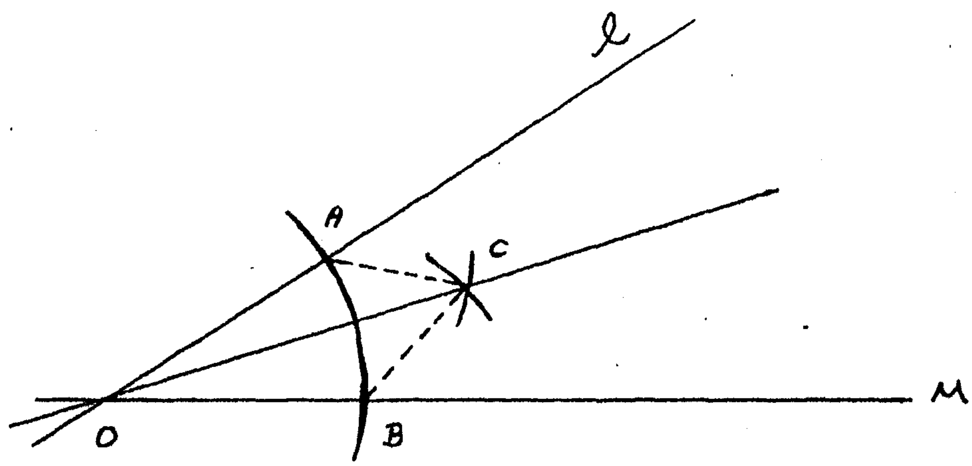
$\therefore \measuredangle ACM = \measuredangle MCB$ y $AC = CB$

entonces el triángulo ACB y el triángulo ADB son congruentes e isósceles.

$\therefore$ CM es bisectriz del ángulo ACB, y como el triángulo es isósceles, CM es mediatriz del $\measuredangle$ ACB.

$\therefore AM = MB.$

$\widetilde{10}$ Bisectar un ángulo dado con vértice O.



CONSTRUCCIÓN:

1.- Con centro en O trazamos un arco de círculo que intersecte los lados del ángulo. Sean A y B estas intersecciones.

2.- Trazamos dos circunferencias de radio $r = \overline{AB}$

UNA CON CENTRO EN A Y OTRA CON CENTRO EN B. SEA C EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE ÉSTAS.

3.- TRAZAMOS OC.

$$\measuredangle AOC = \measuredangle COB$$

DEMOSTRACIÓN:

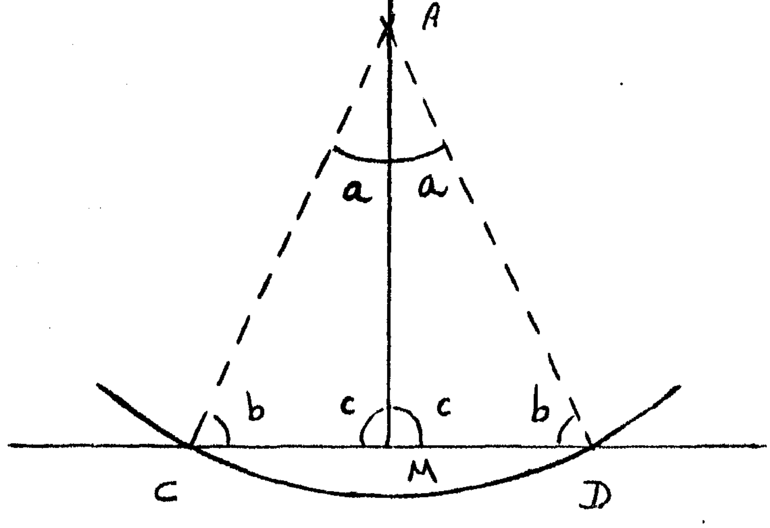
Los triángulos AOC y BOC son congruentes por que

$AO = BO$
$CA = CB$
CO en común

entonces $\measuredangle AOC = \measuredangle BOC$.

2.- Trazar, por un punto dado, la perpendicular a una recta dada.

CASO a) si el punto dado (A) está fuera de la recta.



CONSTRUCCIÓN

1.- CON CENTRO EN A, TRAZAMOS UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA QUE CORTE A LA RECTA EN DOS PUNTOS.

SEAN C y D ESTOS PUNTOS.

2.- BISECTAMOS EL SEGMENTO CD. SEA M TAL QUE $CM = MD$.

3.- TRAZAMOS AM.

$$AM \perp CD$$

DEMOSTRACIÓN:

Los triángulos ACM y ADM son congruentes por que:

$$AC = AD$$
$$CM = DM$$
AM EN COMÚN

ENTONCES:

$$\measuredangle CMA = \measuredangle DMA$$

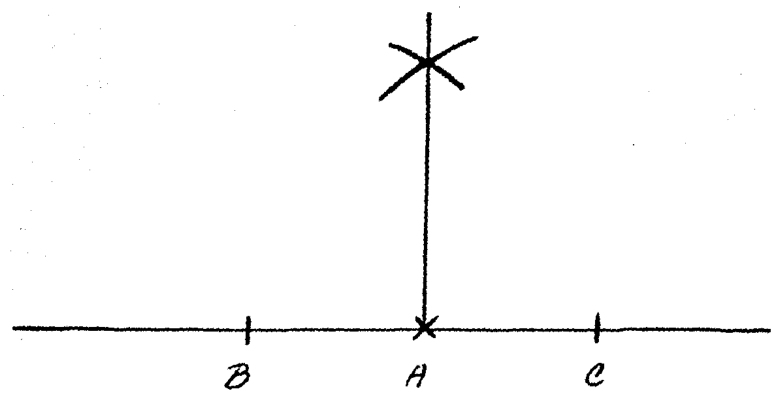
$\measuredangle CMD = 2$ rectos $= \measuredangle CMA + \measuredangle DMA$ y $\measuredangle CMA = \measuredangle DMA \Rightarrow \measuredangle CMA =$

$$= \frac{2 \text{ rectos}}{2} = 1 \text{ recto}$$

$$\measuredangle DMA = \frac{2 \text{ rectos}}{2} = 1 \text{ recto}$$

$$\therefore AM \perp CD$$

CASO b) SI EL PUNTO ESTÁ EN LA RECTA.



CONSTRUCCIÓN:

1.- CON CENTRO EN A TOMAMOS A LOS DOS LADOS DE LA RECTA, PUNTOS B Y C TALES QUE BA=AC.

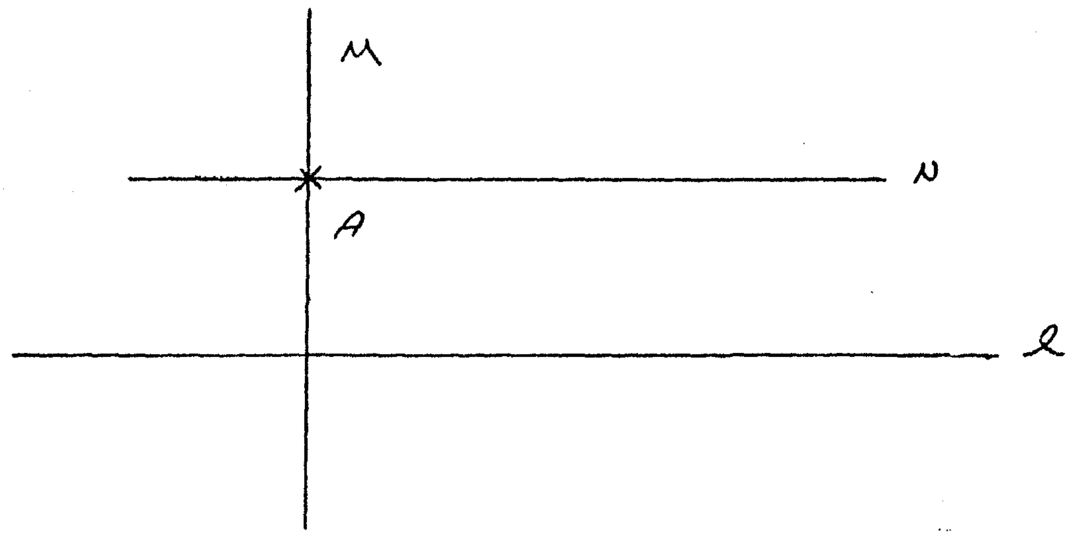
2.- TRAZAMOS DOS CIRCUNFERENCIAS DE RADIO r, UNA CON CENTRO EN C Y OTRA CON CENTRO B QUE SE INTERSECTEN. SEA D UNO DE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN.

3.- TRAZAMOS AD

$AD \perp BC$

LA DEMOSTRACIÓN ES ANÁLOGA A LA DEL INCISO a).

ÑVIÑ Trazar una paralela a una recta dada l, por un punto dado A.



CONSTRUCCIÓN

1.- Trazamos la perpendicular a l por el punto A. Sea M esta perpendicular.

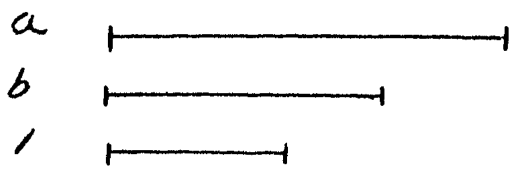
2.- Trazamos la perpendicular a M por el punto A. Sea N esta perpendicular.

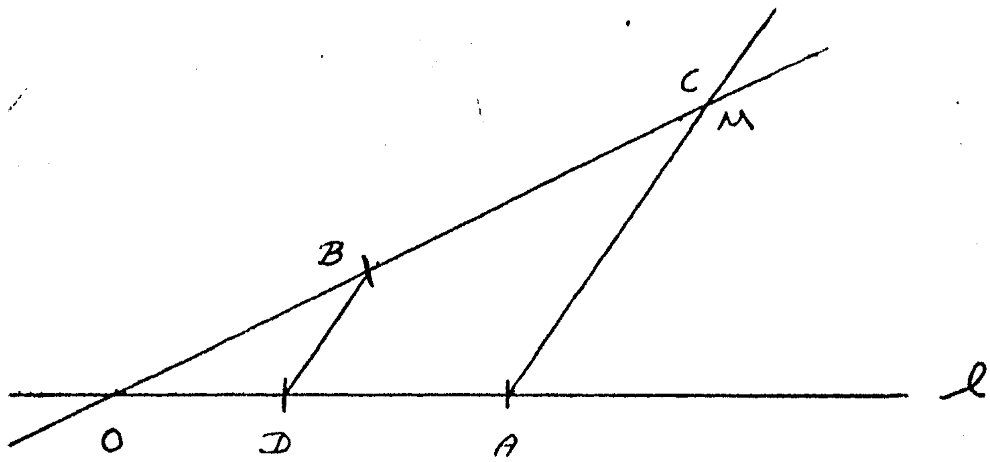
N es paralela a l y pasa por A.

DEMOSTRACIÓN

Por construcción los ángulos alternos internos formados por M y las rectas N y l son iguales. Luego, l y N son paralelas.

VII Dados los segmentos a, b, y el segmento unidad, construir el segmento ab.





CONSTRUCCIÓN:

1.- Trazamos una recta ℓ y tomamos un punto O en ella.

2.- Llevamos con el compás $OD = 1$ y $OA = a$

3.- Trazamos otra recta M distinta de ℓ que pase por el punto O. Sobre ella tomamos $OB = b$

4.- Trazamos DB

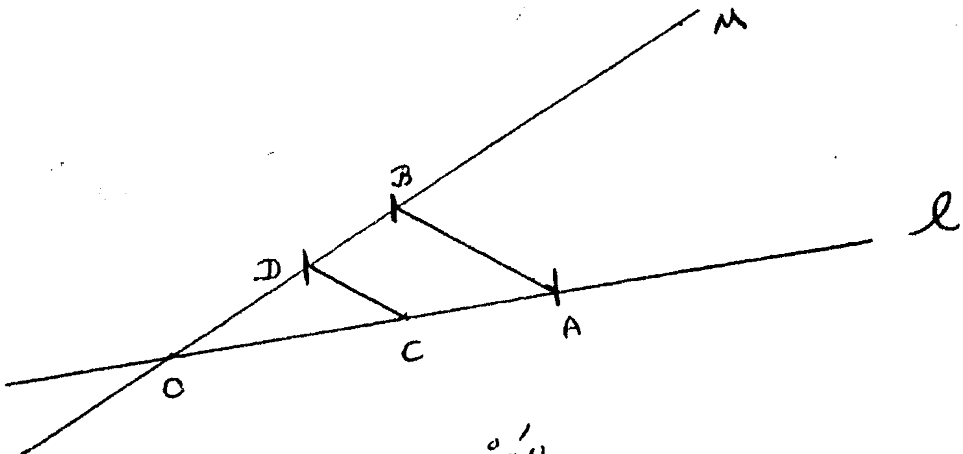
5.- Trazamos por A una paralela a DB; sea C la intersección de ésta con M, $OC = ab$.

DEMOSTRACIÓN:

Los Triángulos OBD y OCA son semejantes, entonces:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OD} \Rightarrow \frac{OC}{b} = a \Rightarrow OC = ab$$

VIII Dados los segmentos a, b, y el segmento unidad, construir el segmento a/b



CONSTRUCCIÓN

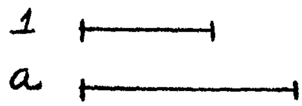
1. Trazamos una recta l y tomamos un punto O en ella.
2.- Llevamos OD = 1 y OB = b
3.- Trazamos otra recta M que pase por O distinta de l
4.- Llevamos OA = a sobre M.
5.- Trazamos AB.
6.- Por el punto D, trazamos una paralela a AB, sea C la intersección de ésta con OA; OC = a/b

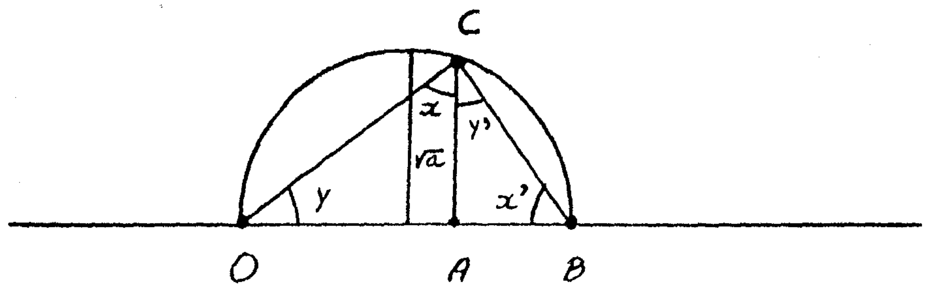
DEMOSTRACIÓN:

Los Triángulos ODC y OBA son semejantes, entonces:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{a}{b} = OC$$

ñ) Dados un segmento (a) y el segmento unidad, construir el segmento $\sqrt{a}$.





Construcción.

1.- Trazamos una recta y tomamos un punto (O) en ella.
2.- Llevamos con el compás $OA = a$ y $AB = 1$.
3.- Trazamos una circunferencia con diámetro (OB).
4.- Trazamos una perpendicular a (OB) por el punto A. Sea (C) la intersección de ésta con la circunferencia $AC = \sqrt{a}$.

Demostración.

En el triángulo COB, el ángulo en (C) es recto. Los triángulos OAC y CAB son semejantes porque:

$$x + y = 1 \text{ recto}; \quad x + y' = 1 \text{ recto}.$$
$$\therefore \quad y = y'$$

$$1 \text{ recto} = x' + y' = x' + y = x + y \Rightarrow x = x'$$

Entonces: $\frac{OA}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{a}{AC} = \frac{AC}{1} \Rightarrow \overline{AC}^2 = a \Rightarrow AC = \sqrt{a}$.

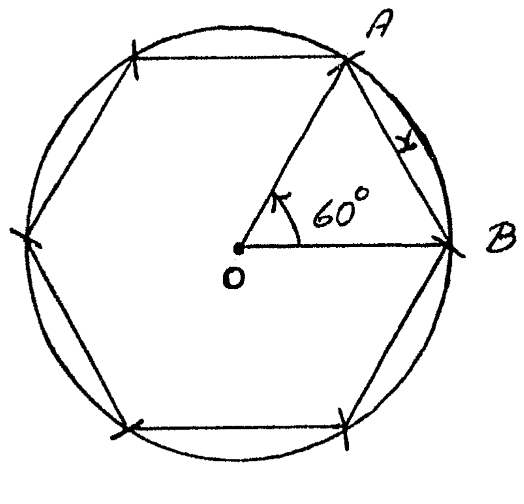
CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES.

CONSTRUCCIÓN del EXÁGONO REGULAR.

De todos los polígonos regulares, el más sencillo de construir es el exágono.

Para calcular la longitud del lado del exágono regular, supongamos que tenemos el problema resuelto. Esto es, un exágono regular inscrito en una circunferencia de radio (r) y centro (O). Debemos encontrar la longitud x del lado de este exágono.

El lado $x = \overline{AB}$ del exágono, subtiende un ángulo central igual a $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



Si consideramos el triángulo OAB formado por los extremos del lado x y el centro del círculo, este triángulo es isósceles ya que $OA = OB = r$ por lo tanto el ángulo A es igual al ángulo B.

Ahora bién, como $\measuredangle O = 60°$ y además

$$\measuredangle O + \measuredangle A + \measuredangle B = 180°$$

entonces, $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle O = 60°$

por lo tanto, el triángulo OAB es equilátero y

$$OA = OB = AB = r$$

Luego, el lado del exágono regular inscrito en una circunferencia de radio r, es igual a r.

Para construir un exágono regular procedemos de la siguiente manera:

1.- Trazamos una circunferencia

2.- tomamos un punto de la circunferencia y con una abertura del compás igual al radio marcamos los seis vértices.

Utilizando como base la construcción del hexágono regular, podemos construir el triángulo equilátero, trazando los segmentos que unen de dos en dos los vértices del exágono.

También podemos construir los polígonos de 12, 24, 48 lados etc., bisectando sucesivamente los arcos subtendidos en la circunferencia por los lados del hexágono; esto es, podemos construir los polígonos cuyo número de lados sean $6(2^n)$, donde n es cualquier número entero positivo.

Construcción del decágono regular.

Supongámos que tenemos un decágono regular inscrito en un círculo de radio 1. Sea x el lado del decágono.

El lado x del decágono subtiende un ángulo central de $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Si consideramos el triángulo determinado por el centro O del círculo y los extremos A, B del lado x del decágono, el triángulo OAB es isóceles, ya que

$$OA = OB = 1$$

entonces,

$$\measuredangle A = \measuredangle B$$

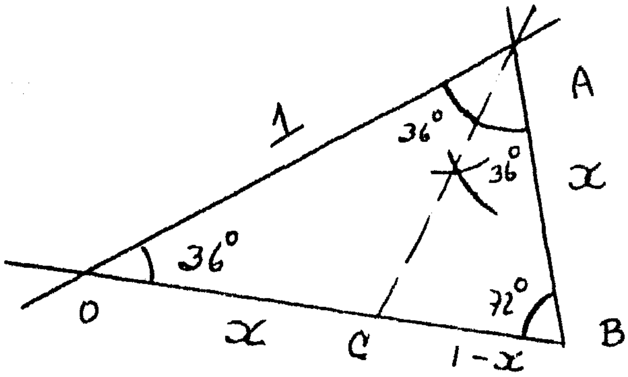
y además

$$\measuredangle O + \measuredangle A + \measuredangle B = 180^\circ$$

como

$$\measuredangle O = 36^\circ, \text{ entonces:}$$

$$\measuredangle A = \measuredangle B = 72^\circ$$



En el triángulo OAB, la recta que biseeta al ángulo en A, forma dos ángulos

$$\measuredangle OAC = \measuredangle CAB = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

obtenemos entonces dos triángulos isósceles, ya que en el triángulo OAC:

$$\measuredangle O = \measuredangle A = 36^\circ$$
$$\therefore \; OC = CA = x$$

en el triángulo ACB

$$\measuredangle A + \measuredangle B = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$$
$$\therefore \; \measuredangle C = 72^\circ$$
$$\therefore \; AC = x$$

y además,

$$CB = 1 - OC$$
$$\therefore \; CB = 1 - x$$

Los triángulos OAB y ACB son semejantes, ya que tienen sus tres ángulos iguales, la razón de semejanza es:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

la solución de esta ecuación está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(La otra solución debe deshecharse por ser negativa)

Hemos calculado la longitud del lado de un pentágono en terminos del radio de la circunferencia que lo circunscribe; entonces, evidentemente podemos construirlo geometricamente de la siguiente manera:

1.- Trazamos una circunferencia y consideremos su radio como segmento unidad.

2.- Calculamos la longitud del lado x así:

i) construimos el segmento de longitud 5

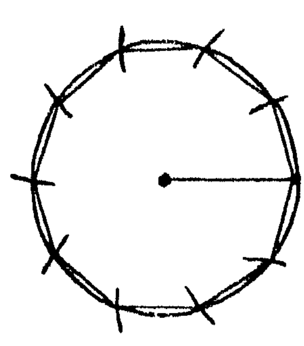
ii) construimos el segmento $\sqrt{5}$

iii) construimos el segmento $\sqrt{5}-1$

iv) construimos el segmento $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

de esta forma hemos construido el segmento x que queríamos; o sea el lado del pentágono.

3.- Construimos el decágono regular llevando la longitud x como cuerda hasta obtener diez vértices.



decágono.

Utilizando como base la construcción del decágono regular, podemos construir el pentágono regular uniendo de dos en dos los vértices del decágono, y bisectando sucesivamente los arcos de la circunferencia circunscrita obtenemos los polígonos regulares cuyo número de lados son de la forma $10(2^n)$ donde (n) es un número entero positivo.

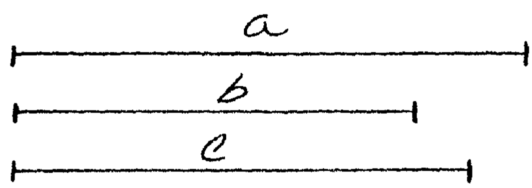
\#

Proyectos.

1.- Utilizando como base la construcción del exágono regular, construir con regla y compás el polígono regular de 12 y 24 lados

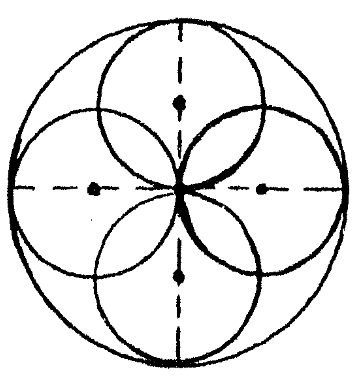
2.- Utilizando como base la construcción del decágono regular, construir con regla y compás el polígono regular de 5 lados

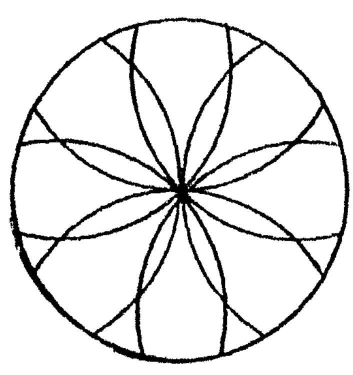
3.- Construir con regla y compás un triángulo cuyos lados sean iguales respectivamente a tres segmentos de recta dados.



4.- Construir con regla y compás un triángulo en que dos de los lados sean iguales a un segmento de recta dado.

5.- Construir las siguientes figuras con regla y compás





Bibliografía.

1.- Hirsch Christian R, Roberts Mary, Coblentz Dwight O, Samide Andrew J, Schoen Harold L.

Geometry. Scott Foresman and company Glenview, Illions 1979.

2.- Johnson Donovan A, Hansen Viggo P, Peterson Wayne H, Rudnick Jesse A, Cleveland R, Bolster Carey L.

Activities in mathematics Scott, Foresman and company. Glenview Illions 1973.

3.- Freitang Richard A.

"Construction Geometry". Mathematics teacher 74, 1 (January 1981) 11-18

4.- Alarcón B Jesus

"Área y medición" Matemáticas y enseñanza 1 (Diciembre 1974) 14-30.

5.- Rivaud Juan J.

"Algunas ideas acerca de la geometría".
Matemáticas y enseñanza
1 (octubre 1974) 31 - 43

6.- Guadalupe Lucio, Nieves Martínez,
Rodolfo San Agustín

"Un poco de geometría".
Comunicaciones internas
Facultad de ciencias UNAM 3-1979

7.- Nieves Martínez De la Escalera.
Construcciones con regla y compás.
Comunicaciones internas No. 2, 1979
serie monografías.
Facultad de Ciencias.