2g/13

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

INTEGRACION DE FUNCIONES VALUADAS EN ESPACIOS DE RIESZ.

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de

MATEMATICO

Presenta

JOSE IGNACIO GARCIA OLVERA

México, D. F. 1984

CONTENIDO

INTRODUCCION.

R. Henstock, miembro notable de la escuela Inglesa de analistas, ha investigado durante 13 años el desarrollo de la integral, publicado en 1969 en [5], de cuyo generalización se ocupa el presente trabajo. La única innovación que éste representa, consiste en introducir dicho integral como el límite de una dirección al estilo de Moore - Smith. Para lograr este propósito, se hace necesario, primero, describir la construcción de los espacios de División de Henstock a partir de cualquier conjunto T, y segundo, desarrollar la teoría de espacios de Riesz así como los tipos de convergencia en dichos espacios. Esto se debe a que las funciones que se utilizan para nuestro desarrollo son funciones definidas sobre un conjunto T, con valores en un espacio de Riesz, K.

La bibliografía se sugiere para una profundización, sin embargo, se ha tratado de ofrecer aquí, completo y suficiente, un panorama del tema, sin diferir la atención de los lectores remitiéndolos a otros estudios.

Deseo agradecer públicamente (y dejar constancia de esa gratitud) la dirección y ayuda que me brindó, a lo largo de mi investigación, el Prof. Rodolfo Morales M., miembro del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

1. TEORIA DE ESPACIOS DE RIESZ.

Este capítulo da un panorama general de los espacios de Riesz y algunas de sus propiedades, partiendo de conceptos elementales de Teoría de Conjuntos.

I. RELACIONES

Dados dos conjuntos, podemos definir el producto cartesiano simple de uno de ellos con el otro, por ejemplo, A con B, al cual se le denota $A \times B$, haciendo:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}$$

donde $\quad (a,b) = \{ a, \{a,b\} \}$

y a cualquier subconjunto de $A \times B$ se le llama relación en $A \times B$.

Ahora, una relación R en un conjunto arbitrario Z es un subconjunto de $Z \times Z$ y decimos

$$x R y \quad \text{ssi} \quad (x,y) \in R$$

DEFINICION 1.1

Una relación R en un conjunto Z es una relación de equivalencia si

i) $\quad xRx$

ii) $\quad xRy \Rightarrow yRx$

iii) $\quad xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

$$\forall\, x,y,z \in Z.$$

II. CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

DEFINICION 1.2

Una relación R en Z es un orden parcial en Z si :

i) $x R x$

ii) $x R y \ , \ y R z \Rightarrow x R z$

iii) Si $x R y$ & $y R x \Rightarrow x = y$

$$\forall x, y, z \in Z$$

Si R es un orden parcial, usualmente escribiremos

$$x \leq y \quad , \quad y \leq x$$

y decimos :

x, y son comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$
x, y son incomparables si ni $x \leq y$ ni $y \leq x$

DEFINICION 1.3

Un orden parcial R en Z se dice que es orden - lineal si para todo $x, y \in Z$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

DEFINICION 1.4

Un conjunto parcialmente ordenado es un par $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y "$\leq$" un orden parcial en A

Si Z es un conjunto parcialmente ordenado y - $W \subset Z$ es tal que, con el orden heredado de Z, W es linealmente ordenado, se dice que W

es una cadena de Z.

Consideremos a Z, conjunto parcialmente ordenado y Y un subconjunto de Z diferente del vacío, si $z_0 \in Z$ satisface $z_0 \geq y$ para todo $y \in Y$, se dice que z_0 es cota superior de Y.

Análogamente, z_0 es cota inferior de Y si $z_0 \leq y$ para todo $y \in Y$.

DEFINICION 1.5

Si $z_0 \in Z$ es una cota superior (inferior) de $Y \subseteq Z$, y para todo z cota superior (inferior) $z_0 \leq z$ ($z_0 \geq z$), entonces z_0 es la mínima cota superior o supremo de Y (máxima cota inferior o ínfimo de Y).

DEFINICION 1.6

$z_0 \in Z$ es llamado elemento maximal (minimal) si se sigue de $z \in Z$ & $z_0 \leq z$ que $z_0 = z$. ($z_0 \geq z$ que $z_0 = z$)

Es importante recalcar el siguiente bien conocido y frecuentemente usado:

LEMA DE ZORN

Si cada cadena en un conjunto parcialmente ordenado Z tiene cota superior, entonces Z tiene al menos un elemento maximal.

Conjuntos Dirigidos.- Sea A un conjunto parcialmente ordenado, $B \subseteq A$ es dirigido hacia arriba, lo cual denotamos $B\uparrow$, si para todo $a,b \in B$, existe $c \in B$ tal que $a \leq c$ & $b \leq c$.

Escribirémos $B \uparrow a$ si $B\uparrow$ & $\sup B = a$ claramente, se tiene

$$\{a\} \uparrow a \qquad \forall a \in A$$

Si $B\uparrow$, se define:

$$F(B\uparrow) = \{\{a \in B \mid a \geq b\} \; b \in B\}$$

como el filtro de secciones del conjunto dirigido B.

En analogía con la definición anterior $B\downarrow$ si $\forall a,b \in B$, existe $c \in B$ .t. $c \leq a$ & $c \leq b$, también

$$F(B\downarrow) = \{\{a \in B \mid a \leq b\} \; b \in B\}$$

Funciones en conjuntos parcialmente ordenados.-

i) Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados, sea $F: A \longrightarrow B$ una función y $a,b \in A$ .t. $a \leq b$

a).- F es creciente, si $F(a) \leq F(b)$

b).- F es decreciente, si $F(a) \geq F(b)$

c).- F es un isomorfismo, si $F(a) \leq F(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Sea $F: A \to B$, $C \subseteq A$

a).- si $C\uparrow$, $\forall a,b \in C$, existe $c \in C$ tal que $a \leq c$ & $c \leq b$, entonces es claro que:

- si F es creciente, $F(a) \leq F(c)$ & $F(b) \leq F(c)$, es decir, $F(C)\uparrow$.

- si F es decreciente, $F(c) \leq F(a)$ & $F(c) \leq F(b)$, es decir, $F(C)\downarrow$

b).- si $C\downarrow$, $\forall a,b \in C$, existe $c \in C$ tal que $c \leq a$ & $c \leq b$, en este caso:

- si F es creciente, $F(c) \leq F(a)$ & $F(c) \leq F(b)$, es decir, $F(C)\downarrow$

- si F es decreciente, $F(a) \leq F(c)$ & $F(b) \leq F(c)$, o sea, $F(C)\uparrow$

ii).- Una función $F: A \to B$ es contínua en el orden si cuando es creciente:

1) $\sup F(C) = F(a)$ donde $C\uparrow a$, $C \neq \phi$

2) $\inf F(C) = F(a)$ donde $C\downarrow a$, $C \neq \phi$

(la definición es análoga cuando F es decreciente)

Si F sólo cumple (1) se dice que es contínua en el orden por la derecha o por la izquierda si sólo cumple (2).

iii).- F es continua en el orden por sucesiones si:

1) $\{F(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \uparrow F(a)$ cuando $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \uparrow a$

2) $\{F(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow F(b)$ cuando $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow b$

Conjuntos cerrados y acotados en el orden.-

a).- Si A es un conjunto parcialmente ordenado y - $B\subseteq A$, definimos:

$$\phi(B)=\{a\in A \mid \exists\, C\subseteq B,\ C\neq\phi,\ C\uparrow a\}$$

$$D(B)=\{a\in A \mid \exists\, C\subseteq B,\ C\neq\phi,\ C\downarrow a\}$$

obviamente, $B\subseteq\phi(B)$, $B\subseteq D(B)$, decimos que - B es cerrado en el orden si $\phi(B)=B=D(B)$.

b).- B es acotado en el orden si:

$B\subseteq[b,c]=\{a\in A \mid b\leq a\leq c\}$ para algún $[b,c]$, con $b,c\in A$.

III. LATICES

DEFINICION 1.7

Una latíz es un conjunto parcialmente ordenado A, tal que cada subconjunto que consiste de dos elementos tiene supremo e ínfimo.

Si A es una latíz, por notación escribiremos:

$$\sup\{x,y\} = x \vee y$$

$$\inf\{x,y\} = x \wedge y$$

Es muy fácil probar por inducción que si $B \subseteq A$ finito, entonces B tiene sup e inf, así:

$$\sup\{x_1, x_2, \dots x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$$

$$\inf\{x_1, x_2, \dots x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$$

DEFINICION 1.8

Una latíz A es completa de Dedekind o completa en el orden si cada subconjunto no vacio B de A, el cual tiene cota superior en A, tiene supremo.

Latices Distributivas.– Una latíz es distributiva si para toda $a,b,c \in A$:

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

esta condición es análoga a:

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \wedge c)$$

Estructura de anillo en una latíz.–

Si una latíz A tiene elemento más pequeño (es –

decir, existe $x_0 \in A$ .t. $x_0 \leq x$ $\forall x \in A$), diremos que tiene cero y lo denotomos por "θ".

Si la latíz A tiene elemento más grande (es decir, existe $x_1 \in A$ .t. $x \leq x_1$, $\forall x \in A$), diremos que tiene uno (unidad) y lo denotamos por "e".

DEFINICION 1.9

Si A es una latíz distributiva con cero y uno, y $x, x' \in A$ satisfacen

$$x \vee x' = e$$
$$x \wedge x' = \theta$$

entonces x' es llamado el complemento de x. Por supuesto, x es también complemento de x'.

TEOREMA 1.1

Si $x \in A$ latíz distributiva con cero y uno tiene complemento x', entonces x' es único.

Demostración.-

Supongamos $x^{\sim}$ es otro complemento de x

$$x^{\sim} = x^{\sim} \vee \theta = x^{\sim} \vee (x \wedge x') = (x^{\sim} \vee x) \wedge (x^{\sim} \vee x')$$
$$= e \wedge (x^{\sim} \vee x') = x^{\sim} \vee x'$$

análogamente,

$$x' = x' \vee \theta = x' \vee (x \wedge x^{\sim}) = (x' \vee x) \wedge (x' \vee x^{\sim})$$
$$= e \wedge (x' \vee x^{\sim}) = x^{\sim} \vee x'$$

$$\therefore \quad x' = x^{\sim}$$

DEFINICION 1.10
Si A es una latíz con cero, $B \subset A$ con las propiedades de:

1) $z_1, z_2 \in B \Rightarrow z_1 \vee z_2 \in B$

2) Si $z \in B \Rightarrow z' \in B \quad \forall\, z' \leq z$

entonces B es llamado un ideal en A.

DEFINICION 1.11
Un álgebra Booleana es una latíz distributiva con cero y unidad tal que cada elemento en la latíz tiene complemento.

Es obvio que el álgebra puede constar de un solo elemento.

TEOREMA 1.2
Si $x, y \in A$ álgebra booleana tal que $x \leq y$, entonces

$$A_{x,y} = \{ z \mid x \leq z \leq y \}$$

es un álgebra booleana con $x = \theta$, $y = e$

Demostración:
Evidentemente, $A_{x,y}$ es una latíz distributiva con el orden parcial heredado de A, con x como cero & y como unidad, sólo falta demostrar que cada $z \in A_{x,y}$ tiene complemento en $A_{x,y}$.

Si $z \in A_{x,y}$, sea z' el complemento de z en A sea también $z^* = (z' \wedge y) \vee x$, entonces,

$$z\wedge z^* = z\wedge\{(z'\wedge y)\vee x\} = \{z\wedge(z'\wedge y)\}\vee\{z\wedge x\} = \theta\vee x = x$$

también

$$z\vee z^* = z\vee(z'\wedge y)\vee x = z\vee(z'\wedge y) = (z\vee z')\wedge(z\vee y)$$
$$= e\wedge y = y$$

es decir, z^* es complemento de z y $z^*\in A_{x,y}$.

TEOREMA 1.3

Si A es un Algebra Booleana, para $x\in A$, denotamos por x' a su complemento, entonces:

i).- Para cualquier x, x' es el elemento más grande en A tal que $x\wedge x'=\theta$

ii).- Si $x\leq y$ entonces $y'\leq x'$

iii).- $(x\vee y)' = x'\wedge y'$ $\forall x,y\in A$
también $(x\wedge y)' = x'\vee y'$

Demostración:

i).- $x\wedge x'=\theta$ & $x\vee x'=e$
supongamos $\tilde{x}$ es tal que $x\wedge\tilde{x}=\theta$, entonces
$y=x'\vee\tilde{x}$ satisface

$$x\vee y = x\vee x'\vee\tilde{x} = e$$

& $x\wedge y = x\wedge(x'\vee\tilde{x}) = (x\wedge x')\vee(x\wedge\tilde{x}) = \theta$

entonces $y=x'$, es decir $x'\vee\tilde{x}=x'$

$\therefore$ $\tilde{x}\leq x'$

ii).- Sea $x \leq y$, entonces $y' \wedge x = y' \wedge y = \theta$
pero por (i) $y' \leq x'$

iii).- De $x \vee y \geq x$ se sigue que $(x \vee y)' \leq x'$
análogamente $(x \vee y)' \leq y'$

de donde $(x \vee y)' \leq x' \wedge y'$

Por otro lado:

$$(x' \wedge y') \wedge (x \vee y) = (x' \wedge y' \wedge x) \vee (x' \wedge y' \wedge y) = \theta \vee \theta = \theta$$

ec por la parte (i): $x' \wedge y' \leq (x \vee y)'$

$$\therefore \quad x' \wedge y' = (x \vee y)'$$

Para ilustrar un poco los conceptos de álgebra Booleana e ideal veamos el siguiente:

EJEMPLO 1.1
Sea $\mathbb{X}$ un conjunto, Λ un sigma álgebra y μ una medida, así tenemos el espacio medible $(\mathbb{X}, \Lambda, \mu)$, entonces: Λ es un álgebra Booleana con el orden por inclusión y:

$$\Lambda_0 = \{ \gamma \in \Lambda \mid \mu(\gamma) = 0 \}$$

es un ideal en Λ.

En efecto, si Λ es un sigma álgebra cumple con:

1) $\mathbb{X} \in \Lambda$

2) Si $D \in \Lambda$ entonces $D^c \in \Lambda$

3) Si $\{D_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $D_i \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_i \in \Lambda$

Ahora, el orden de D está definido por la inclusión:

Sean $E, F \in \Lambda$ entonces:

$$E \leq F \quad \text{si y sólo si} \quad E \subseteq F$$

así
$$E \vee F = E \cup F \in \Lambda$$
& $$E \wedge F = E \cap F \in \Lambda$$

$\therefore$ Λ es una latíz.

como
$$(E \vee F) \wedge G = (E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$
$$= (E \wedge G) \vee (F \wedge G)$$

Λ es una latíz distributiva.

definiendo ϕ como cero y X como uno, por la prop. (2) de Λ, Λ es álgebra Booleana.

Falta checar que Λ_0 es un ideal en Λ.

1) Si μ es una medida para Λ, entonces,
$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F)$$
si $E, F \in \Lambda_0$, $\mu(E) = \mu(F) = 0$ y como
$E \cap F \leq E \Rightarrow \mu(E \cap F) \leq \mu(E)$ $\therefore \mu(E \cap F) = 0$
$\therefore \mu(E \cup F) = 0$, es decir $E \cup F \in \Lambda_0$

2) si $E \in \Lambda_0$, $\mu(E) = 0$. ahora, si $E' \leq E$
$\mu(E') = 0$ es decir $E' \in \Lambda_0$.

$\therefore$ Λ_0 es un ideal en Λ.

DEFINICION 1.12

Sea A una latíz distributiva con cero, para cada $x \in A$ se define el segmento inicial de x como $A_{0,x}$, álgebra Booleana y así tenemos que para todo $y \in A_{\theta,x}$ existe $z \in A_{\theta,x}$ tal que

$$y \vee z = x \qquad \& \qquad y \wedge z = \theta$$

"z" es llamado el complemento de "y" respecto de "x" y lo notaremos

$$z = x \otimes y$$

claramente $x \otimes y = \theta$ si y solo si $x = y$

esto nos llevo a definir dos operaciones en A

1) $+ : A \times A \longrightarrow A$ t.q. $+(x,y) = (x \vee y) \otimes (x \wedge y)$

2) $\bullet : A \times A \longrightarrow A$ t.q. $\bullet(x,y) = xy = x \wedge y$

Estas operaciones definidas en A latíz distributiva con - cero le dan la estructura de anillo, lo cual vamos a demostrar empezando con el siguiente:

LEMA 1.1

$$(x \otimes y) z = xz \otimes yz$$

Para todo $x, y, z \in A$ latíz dist. con cero tal que $y \leq x$

Demostración:

Para simplificar la escritura, escribímos:

$$x \otimes y = L_1 \qquad \& \qquad (x \otimes y) z = L$$

es decir, $L = L_1 z$, para probar que L es el complemento de yz respecto de xz, debemos mostrar que

$L \cdot yz = \theta \qquad \& \qquad L \vee (yz) = xz$

Esto se sigue de:

1) $L y z = L_1 z\, y z = (L_1 y) z = \Theta z = \Theta$

2) $L \vee (yz) = (L_1 z) \vee (yz) = \{L_1 \vee (yz)\} \{z \vee (yz)\}$

$= (L_1 \vee y)(L_1 \vee z)\, z$

$= x\, (L_1 \vee z)\, z = xz$

así: $L = xz \otimes yz$

o sea $(x \otimes y) z = xz \otimes yz$.

Ahora, para demostrar que $(A, +, \cdot)$ es un anillo, - tenemos:

1) $x+y = y+x \quad \forall\, x,y \in A$

2) $xy = yx \quad \forall\, x,y \in A$

son obvios de las definiciones de $x+y$ & xy

3) $x+z = x \quad \forall x \in A$ si y sólo si $z = \theta$

en efecto, si $x+z = x$, por definición

$(x \vee z) \otimes (x \wedge z) = x$ de donde

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge (x \wedge z) = \Theta \\ \& \quad x \vee (x \vee z) = x \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \wedge z = \Theta \\ x \vee z = x \end{array}\right\} \Rightarrow z = \Theta;$$

si $z = \Theta$, $x + \Theta = (x \vee \Theta) \otimes (x \wedge \Theta) = x \otimes \Theta = x$

4) $x+y = \Theta$ si y sólo si $x = y$

usando $x+y = \Theta$, $(x \vee y) \otimes (x \wedge y) = \Theta$

de donde: $\Theta \vee (x \vee y) = \Theta$, $\Theta \wedge (x \wedge y) = x \vee y$.

esto implica que $\qquad x \wedge y = x \vee y$

de donde $\quad x = y$

Inversamente, si $\quad x = y$

$$x+y = x+x = (x \vee x) \otimes (x \wedge x) = x \otimes x = \theta .$$

5) $\qquad (x+y)z = xz + yz \qquad \forall x,y,z \in A$

En efecto,

$$(x+y)z = \{(x \vee y) \otimes (x \wedge y)\} z = \{(x \vee y) z\} \otimes (xyz)$$

$$= \{(xz) \vee (yz)\} \otimes (xzyz)$$

$$= xz + yz .$$

Sólo nos falta probar que la suma es asociativa:

6) $\quad (x+y)+z = x+(y+z) \qquad \forall x,y,z \in A$

Para demostrarlo, hacemos $\quad e = x \vee y \vee z$, entonces:

$A_{\theta,e}$ es álgebra Booleana y denotemos el complemento de cualquier $t \in A_{\theta,e}$ por t'

Sea $\quad \theta \leq t \leq s \leq e$, el complemento de t respecto de s es $t's$ (teorema 1.1), así:

$$x+y = (x \vee y) \otimes (x \wedge y) = xy'(x \vee y) = (x' \vee y')(x \vee y)$$

$$= (x'y) \vee (xy')$$

también:

$$(x+y)' = (x'y)'(xy')' = (x \vee y')(x' \vee y) = (xy) \vee (x'y')$$

de donde

$$(x+y)+z = \{(x+y)'z\} \vee \{(x+y)z'\}$$

$$= (xyz) \vee (x'y'z) \vee (x'yz') \vee (xy'z')$$

entonces, por simetría:

$$(x+y)+z = x+(y+z) .$$

De esta forma queda demostrado que $(A,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo, en el caso en que A fuera álgebra booleana, el elemento más grande: e, es la unidad en el anillo, es decir

$$xe = x \wedge e = x \qquad \forall\, x \in A$$

El anillo A tiene además, las propiedades

1) $x+x = \theta \qquad \forall\, x \in A$

2) $x^2 = x \cdot x = x \wedge x = x \qquad \forall\, x \in A$

TEOREMA 1.4

Si R es un anillo con elemento nulo θ, tal que cada $x \in R$ es idempotente, es decir, $x^2 = x$ $\forall x \in R$. Entonces R es conmutativo. y además $x+x = \theta \quad \forall x \in R$.

Demostración: La prueba se sigue observando que:

$$(x+y)^2 = x+y$$

implica: $\quad xy + yx = \theta$

haciendo $x=y$, $\quad x+x = \theta \quad$ esto es, $x = -x$

de donde, $\quad xy - yx = \theta$, es decir, $xy = yx$.

a cualquier anillo de esta clase se le llama Anillo Booleano, hasta ahora hemos demostrado que cualquier latíz distributiva con elemento más pequeño θ y tal que cada segmento inicial $A_{\theta,x}$ sea un álgebra Booleana, puede ser un anillo Booleano por la definición de $x+y$ & xy.

DEFINICION 1.12

Si A y B son latices, $F: A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de latices si,

- $F(a \vee b) = F(a) \vee F(b)$
- $F(a \wedge b) = F(a) \wedge F(b)$

DEFINICION 1.13

Sea A una latíz, $B \subseteq A$ es sublatíz de A si para todo $x, y \in B$ se tiene $x \vee y$, $x \wedge y \in B$.

DEFINICION 1.14

Una sublatíz B es σ-sublatíz si todo $C \subseteq B$ numerable, diferente del vacio y que además existen $\inf C$, $\sup C$ en A, entonces pertenecen a B.

IV. ESPACIOS VECTORIALES ORDENADOS.

DEFINICION 1.15

Un espacio vectorial ordenado es una cuadrupla $(E,+,\cdot,\leq)$ donde $(E,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ y $(E,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, de tal manera que el orden parcial es compatible con la estructura algebraica de E, es decir,

Si $x,y,z \in E$

1) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

2) $x \geq 0 \Rightarrow \alpha x \geq 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}^+$

El siguiente ejemplo ilustra la definición anterior.

EJEMPLO 1.2

Sea H un espacio de Hilbert (sobre $\mathbb{C}$) con elementos $x,y,\dots$ y producto interior $\langle x,y\rangle$ y sea

$$\mathcal{H} = \{A : H \to H \text{ operador autoadjunto}\}$$

El espacio $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial ordenado con respecto al orden parcial en $\mathcal{H}$ definido diciendo que $A \leq B$ cuando $\langle Ax,x\rangle \leq \langle Bx,x\rangle$ vale para todo $x \in H$

Es obvio que si $A \leq B$, $\langle Ax,x\rangle \leq \langle Bx,x\rangle$

así

$$\langle (A+C)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Cx, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle + \langle Cx, x\rangle$$
$$= \langle (B+C)x, x\rangle$$

es decir, $A+C \leq B+C$.

también, si $\alpha \geq 0$ $\langle \alpha Ax, x\rangle = \alpha \langle Ax, x\rangle \geq 0$ cuando $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

Veamos ahora algunas propiedades de los espacios vectoriales ordenados.

LEMA 1.2

Sea E un espacio vectorial ordenado, A y B subconjuntos de E y $x \in E$, entonces,

(a) $\sup(x+A) = x + \sup A$

(b) $\sup(-A) = -\inf A$

(c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

(d) Si $\alpha \geq 0$, $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$

Demostración:

(a).– Si $x+A = \{x+a \mid a \in A\}$, $M = \sup(x+A)$ y $B = \sup A$. Por demostrar $M = x+B$

Si $a \in A$, $a+x \leq M$, por ser M el $\sup(x+A)$ y también $a \leq B$ por ser B el $\sup A$ es decir, $a+x \leq B+x$ $\therefore$ $M \leq B+x$ .... (1)

Ahora, de $a+x \leq M$ $\Rightarrow$ $a \leq M-x$ y como B es el sup A, $B \leq M-x$ $\Rightarrow$ $B+x \leq M$ ....(2)

De (1) y (2):

$$M = B + x$$

(b).- Si $\sup(-A) = M$ y $N = \inf A$

sea $-a \in -A$, entonces $M \geq -a$ $\Rightarrow$ $-M \leq a$

$$\Rightarrow \quad -M \leq N \qquad \ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, $N \leq a$ $\Rightarrow$ $-N \geq -a$

por tanto, $M \leq -N$, es decir, $-M \geq N$ ..... (2)

juntando (1) y (2)

$$-M = N$$

(c).- usando el inciso (a):

$$\begin{aligned}
\sup A + \sup B &= \sup(A + \sup B) \\
&= \sup\{x + \sup B \mid x \in A\} \\
&= \sup\{\sup\{x+y : y \in B\} \mid x \in A\} \\
&= \sup\{x+y \mid x \in A, y \in B\} \\
&= \sup(A+B).
\end{aligned}$$

(d).- si $\sup(\alpha A) = M$, $M \geq \alpha a$ $\forall a \in A$

$\Rightarrow$ $\frac{M}{\alpha} \geq a$ $\Rightarrow$ $\frac{M}{\alpha} \geq \sup A$ si $\alpha > 0$

$$\therefore \quad M \geq \alpha \sup A .$$

Por otro lado, $\sup a \geq a$, si $\alpha > 0$

$$\alpha \sup a \geq \alpha a \quad \Rightarrow \quad \alpha \sup a \geq M$$

$$\therefore \quad \sup(\alpha A) = M = \alpha \sup a .$$

DEFINICION 1.16

En el espacio vectorial ordenado E, el subconjunto

$$E^+ = \{ f \mid f \in E, \ f \geq 0 \}$$

es llamado el cono positivo de E. Los elementos de E^+ son llamados elementos positivos.

El cono positivo E^+ de un espacio vectorial ordenado E, tiene las siguientes propiedades

1) $f, g \in E^+ \quad \Rightarrow \quad f + g \in E^+$

2) $f \in E^+ \quad \Rightarrow \quad af \in E^+ \quad \forall a \in \mathbb{R}, \ a \geq 0$

3) $f, -f \in E^+ \quad \Rightarrow \quad f = 0$

Inversamente, si E^+ es un subconjunto del espacio vectorial E, tal que E^+ tiene las propiedades (1), (2) y (3), entonces E se hace un espacio vectorial ordenado definiendo que $f \leq g$ si y sólo si $g - f \in E^+$, y E^+ es exactamente el cono positivo de E con respecto a este orden parcial.

Esto queda formalmente enunciado en el siguiente:

TEOREMA 1.5

Sea E un espacio vectorial ordenado con cono positivo E^+. Entonces son válidas las siguientes propiedades:

1.- $f \geq g$ si y sólo si $f-g \in E^+$

es evidente

2.- $f \geq g$ si y sólo si $f = f \vee g$ o $g = f \wedge g$

también es evidente

3.- $f \geq g$ si y sólo si $af \geq ag$ para $a > 0$

y también, si y sólo si $af \leq ag$ para $a < 0$.

Si $a > 0$, como $f \geq g$, $f = f \vee g$ usando Lema 1.2 (d), $af = af \vee ag$, es decir,

$$af \geq ag$$

Si $a < 0$, $a = (-1)|a|$ con $|a| > 0$

sea $f \geq g \Rightarrow f-g \in E^+$, pero $f-g = -g-(-f)$

$\therefore$ $-g-(-f) \in E^+$, es decir, $-g \geq -f$, así

$-g|a| \geq -f|a|$ o sea, $(-1)|a|g \geq (-1)|a|f$

de donde, $ag \geq af$ si $a < 0$.

V ESPACIOS DE RIESZ.

DEFINICION 1.17

Un espacio vectorial ordenado es llamado espacio de Riesz, si como espacio parcialmente ordenado es una latíz.

Esta terminología (espacio de Riesz) es tomada de Bourbaki. Un espacio de Riesz es también llamado latíz vectorial o en la Literatura Sovietica un k-Lineal.

Veamos algunos ejemplos de espacios de Riesz:

EJEMPLO 1.3

(i) Sea $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ el espacio de n-adas ordenadas $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $f_i \in \mathbb{R}$.
Se dice que $f \leq g$ cuando $f_k \leq g_k$ vale para todo $k \in \bar{n}$, entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Riesz con respecto a este orden introducido

En efecto, para cualquier $f, g \in \mathbb{R}^n$, sea $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ donde

$$h_k = \max\{f_k, g_k\} \qquad k \in \bar{n}$$

de esta forma $h = f \vee g$.

Análogamente, se encuentra $f \wedge g$.

(ii) Sea $X = (a,b)$ el intervalo real usual y sea L el espacio vectorial ordenado de todas las funciones lineales reales sobre X, entonces L es un espacio de Riesz.

En efecto, dados $f, g \in L$, la función $h = f \vee g$ es la función lineal determinada al definir como sus extremos a:

$$h(a) = \text{máx} \{ f(a), g(a) \}$$

$$h(b) = \text{máx} \{ f(b), g(b) \}.$$

lo cual se ilustra en la siguiente figura:

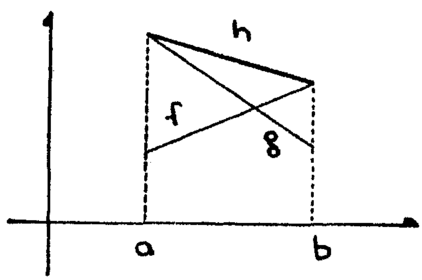

FIGURA 1.1

(iii) Consideremos ahora el conjunto de todas las funciones contínuas $x(t)$ sobre el intervalo real $[a,b]$ con el orden usual, es decir, $x < y$ si y sólo si $x(t) \leq y(t) \quad \forall\, t \in [a,b]$ de esta forma S es un espacio de Riesz.

En este caso, si $x, y \in S$ $\quad z = x \vee y$ es la función definida por:

(ii) Sea $X = (a,b)$ el intervalo real usual y sea L el espacio vectorial ordenado de todas las funciones lineales reales sobre X, entonces L es un espacio de Riesz.

En efecto, dados $f, g \in L$, la función $h = f \vee g$ es la función lineal determinada al definir como sus extremos a:

$$h(a) = \text{máx} \{ f(a), g(a) \}$$

$$h(b) = \text{máx} \{ f(b), g(b) \}.$$

lo cual se ilustra en la siguiente figura:

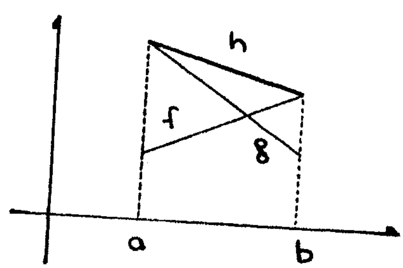

FIGURA 1.1

(iii) Consideremos ahora el conjunto de todas las funciones contínuas $x(t)$ sobre el intervalo real $[a,b]$ con el orden usual, es decir, $x < y$ si y sólo si $x(t) \leq y(t) \quad \forall\, t \in [a,b]$ de esta forma S es un espacio de Riesz.

En este caso, si $x, y \in S$ $z = x \vee y$ es la función definida por:

$$z(t) = \max \{x(t), y(t)\} \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

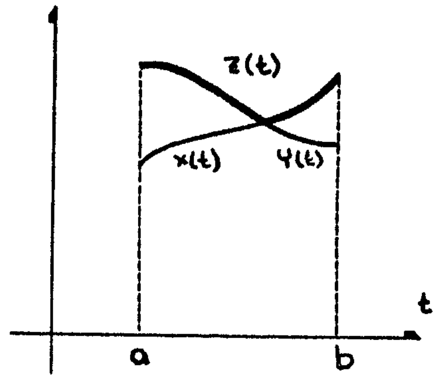

FIGURA 1.2

TEOREMA 1.6

Si E es un espacio vectorial ordenado y $f, g \in E$, entonces, $f \vee g$ existe en E si y sólo si $f \wedge g$ existe en E y además:

$$f \vee g + f \wedge g = f + g$$

Demostración :

Sea $A = \{f, g\}$ & $x = -f - g$, de esta forma

$$x + A = \{f + x, g + x\}$$

también :

$$\sup (x + A) = (f + x) \vee (g + x) = (-g) \vee (-f)$$

$$x + \sup A = -f - g + f \vee g$$

pero por el Lema 1.2 (a) :

$$x + \sup A = \sup (x + A)$$

por lo tanto : $f \vee g - f - g = (-g) \vee (-f)$ .... (1)

Ahora, supongamos que $f \vee g$ existe, si h es una cota superior de A, $-h$ es cota inferior de $-A = \{-f, -g\}$ (teorema 1.5 (3)).
Entonces, si $h = f \vee g$ existe, $-h = (-f) \wedge (-g)$ existe y como de ⊛ sabemos que $(-g) \vee (-f)$ existe, implica que $f \wedge g$ existe y además

$-(f \wedge g) = (-f) \vee (-g)$ que sustituyendo en ⊛ se obtiene:

$$f \vee g + f \wedge g = f + g.$$

Mostraremos ahora, que cada elemento de un espacio de Riesz puede representarse como la diferencia de dos elementos positivos.

DEFINICION 1.17

Para cualquier $f \in E$ espacio de Riesz, el elemento:

$f^+ = f \vee 0$ es llamado, la parte positiva, el elemento:

$f^- = (-f) \vee 0 = (-f)^+$ es llamado, la parte negativa, y el elemento:

$|f| = f \vee (-f)$ es llamado, el valor absoluto del elemento f.

De la anterior definición se sigue que para cualquier $f \in E$, los elementos f^+, f^-, $|f|$ son positivos y que $f \leq f^+ \leq |f|$

también, f^+ es el elemento positivo más pequeño que es mayor o igual que f.

Si $f \in E^+$, entonces: $f^+ = f$ y en el caso de que $-f \in E^-$, entonces: $f^- = 0$ y por tanto:

$$|f| = f.$$

Inversamente, si $f^- = 0$, entonces $-f \leq 0$ de donde $f \geq 0$.

En los espacios de Riesz funcionales mencionados en el ejemplo 1.3 (ii), (iii), los elementos: f^-, f^+ y $|f|$ son funciones las cuales son construídos de la siguiente forma: (ver figura 1.3).

$$f^+ = \begin{cases} f(t) & \text{para todo } t \text{ en donde } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{para todo } t \text{ en donde } f(t) < 0 \end{cases}$$

$$f^- = \begin{cases} 0 & \text{para todo } t \text{ en donde } f(t) > 0 \\ f(t) & \text{para todo } t \text{ en donde } f(t) \leq 0 \end{cases}$$

$$|f| = |f(t)| \quad \text{para todo } t.$$

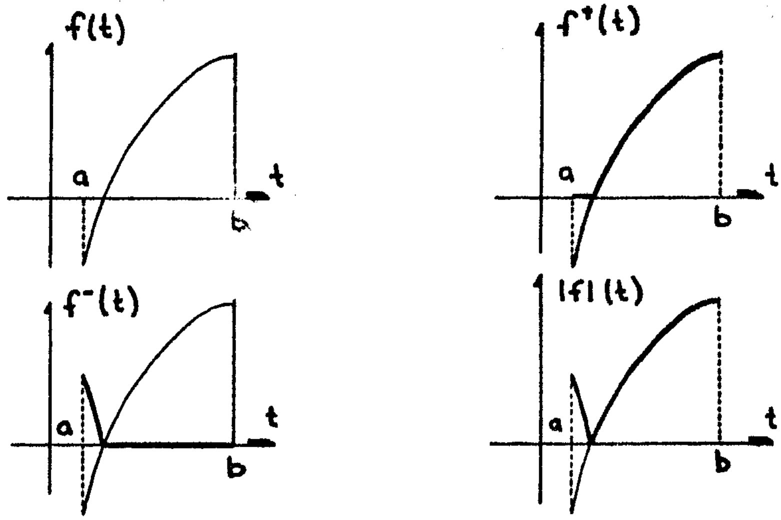

Figura 1.3

En el espacio de Riesz $\mathbb{R}^n$, para construir la parte positiva (negativa) de cualquier elemento f, es necesario reemplazar todas las coordenadas negativas por ceros (todas las coordenadas positivas por ceros y las negativas por su valor absoluto), para obtener $|f|$ es necesario reemplazar todas las coordenadas por su valor absoluto.

Algunas de las propiedades elementales de los espacios de Riesz se enuncian y demuestran en los siguientes teoremas.

TEOREMA 1.7

Sea E un espacio de Riesz, $f, g, h \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) $(f \vee g) + h = (f+h) \vee (g+h)$

(b) $(f \wedge g) + h = (f+h) \wedge (g+h)$

(c) $-(f \wedge g) = (-f) \vee (-g)$

(d) Si $\alpha \geq 0$: $\alpha f \vee \alpha g = \alpha (f \vee g)$
$\alpha f \wedge \alpha g = \alpha (f \wedge g)$

(e) $2(f \vee g) = f+g+|f-g|$
$2(f \wedge g) = f+g-|f-g|$

(f) $f = f^+ - f^-$

(g) $|f| = f^+ + f^-$

(h) $f^+ \vee f^- = |f|$

(i) $f^+ \wedge f^- = 0$

(j) $|\alpha f| = |\alpha| |f|$

(k) $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Demostración:

(a), (b), (c) y (d) ya han sido probados en el Lema 1.2 en un caso más general

(e): $$(f+g)+|f-g| = (f+g)+(f-g)\vee(+g-f)$$
$$= 2f\vee 2g = 2(f\vee g)$$

también:
$$(f+g)-|f-g| = (f+g)-[(f-g)\vee(g-f)]$$
$$= (f+g)+[(-f+g)\wedge(-g+f)]$$
$$= 2g\wedge 2f = 2(f\wedge g).$$

(f): $$f+f^- = f+(-f)\vee 0 = 0\vee f = f^+$$

(g): $$f^+ + f^- = (f+f^-)+f^- \quad \text{por (f)},$$
$$= f+2f^- = f+2[-f\vee 0]$$
$$= f+(-2f)\vee 0$$
$$= -f\vee f$$
$$= |f| \;.$$

(h): $$f^+ + f^- = (f\vee 0)+(-f\vee 0)$$
$$= [(f\vee 0)+(-f)]\vee[(f\vee 0)+0]$$
$$= [0\vee(-f)]\vee[f\vee 0]$$
$$= f^-\vee f^+$$
y usando (g), se obtiene:
$$f^+\vee f^- = |f|.$$

(i): Por el teorema 1.6, se tiene:

$f\wedge g = f+g-f\vee g$ por tanto, si hacemos

$f=f^+$, $g=f^-$, obtenemos:

$$f^+ \wedge f^- = f^+ + f^- - (f^+ \vee f^-) \quad \text{usando (h) y (g):}$$

$$= |f| - |f| = 0 .$$

(j): Si $\alpha \geq 0$:

$$|\alpha f| = \alpha f \vee -\alpha f = \alpha (f \vee -f) = \alpha |f|$$

pero si $\alpha < 0$:

$$|\alpha f| = \alpha f \vee -\alpha f = -\alpha f \vee -(-\alpha f) = -\alpha (f \vee -f)$$

$$= -\alpha |f|$$

de donde, $\quad |\alpha f| = |\alpha|\ |f|$.

(k): Como $f^+ \geq f$ & $g^+ \geq g$ tenemos que

$f^+ + g^+ \geq f+g$ y como también:

$f^+ + g^+ \geq 0$, entonces:

$$f^+ + g^+ \geq (f+g)^+ \qquad \ldots\ldots (1)$$

Ahora, haciendo $f := -f$ y $g := -g$ por (1) obtenemos:

$$-f^+ + -g^+ \geq (-f-g)^+$$

pero, $\quad -f^+ + -g^+ = -f \vee 0 + -g \vee 0 = f^- + g^-$

y también, $\quad (-f-g)^+ = (-f-g) \vee 0 = -(f+g) \vee 0 = (f+g)^-$

de donde, $\quad f^- + g^- \leq (f+g)^- \qquad \ldots\ldots (2)$

Sumando (1) y (2), obtenemos,

$$f^+ + f^- + g^+ + g^- \geq (f+g)^+ + (f+g)^-$$

y por el inciso (g):

$$|f| + |g| \geq |f+g| .$$

La parte (f) del teorema anterior nos ha mostrado que cada elemento de un espacio de Riesz puede ser representado como la diferencia de dos elementos positivos: f^+ y f^-.

Claramente, esta representación no es única, en vista de esto veamos el siguiente teorema:

TEOREMA 1.8

Si $f = g - h$, en donde $g, h \in E^+$, entonces,

$$f^+ \leq g \qquad y \qquad f^- \leq h$$

Demostración:

Como $g = f + h \geq f$ y también $g \geq 0$, tenemos que:

$$g \geq f \vee 0 = f^+$$

Análogamente, $h = -f + g \geq -f$ $\quad h \geq 0$

o sea $h \geq -f \vee 0$ de donde $h \geq f^-$

DEFINICION 1.18

Sea E un espacio de Riesz, $A \subseteq E$ es sólido si $g \in A$ y si $|f| \leq |g| \Rightarrow f \in A$.

La intersección de conjuntos sólidos es sólido.

Si $A \subseteq E$, el conjunto $\{g \mid \exists\, f \in A \text{ t.q. } |g| \leq |f|\}$ es sólido, es el sólido más pequeño que incluye a A, llamado el casco sólido de A.

Ahora, vamos a demostrar que cada espacio de Riesz E es una latiz distributiva

LEMA 1.3

Sea $\{f_\alpha\} \in E$, $\alpha \in I$ y supongamos que

$f = \bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha$ existe, entonces :

i).- $f^+ = \bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha^+$, ii).- $f^- = \bigwedge_{\alpha \in I} f_\alpha^-$

Demostración :

(i) $f^+ = f \vee 0 = \left(\bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha\right) \vee 0 = \bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha \vee 0$

$$= \bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha^+$$

Para la parte (ii), se sigue de :

si $f \geq f_\alpha$ que $f^- \leq f_\alpha^-$ para algún $\alpha \in I$.

Supongamos que $g \in E$ es tal que $g \leq f_\alpha^-$ $\forall \alpha \in I$.

Entonces, $-g \geq -f_\alpha^-$ ó $f_\alpha^+ - g \geq f_\alpha$

pasando al supremo en ambos miembros (la existencia de dicho supremo queda garantizado por (i)), obtenemos :

$$\bigvee_{\alpha \in I} (f_\alpha^+ - g) \geq \bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha$$

es decir $f^+ - g \geq f = f^+ - f^-$

de donde $\quad -g \geq -f^- \quad$ o bien $\quad g \leq f^-$

$$\therefore \quad f^- = \bigwedge_{\alpha \in I} f_\alpha^-$$

TEOREMA 1.9

Todo espacio de Riesz satisface las leyes distributivas definidas para latices.

Demostraremos que :

$$x \wedge \sup \{f_\alpha\} = \sup (x \wedge f_\alpha) \qquad \begin{array}{l} \forall x \in E \\ \forall f_\alpha \in E \\ \alpha \in I \end{array}$$

Supongamos

$$f = \sup \{f_\alpha\} \text{ existe , entonces}$$

$$f - x = \sup (f_\alpha - x)$$

usando el lema anterior

$$(f-x)^- = \inf \left[(f_\alpha - x)^- \right]$$

ahora, por lema 1.2 (b); obtenemos

$$-(f-x)^- = \sup \left[-(f_\alpha - x)^- \right]$$

o bien

$$(f-x) \wedge 0 = \sup \left[(f_\alpha - x) \wedge 0 \right]$$

sumando x, nos queda

$$f \wedge x = \sup \left[(f_\alpha - x) \wedge 0 \right] + x$$

es decir, $\quad f \wedge x = \sup \left[f_\alpha \wedge x \right].$

DEFINICION 1.19

Dos elementos $f, g \in E$ espacio de Riesz se dice que son ajenos en el orden (o-ajenos) si

$$|f| \wedge |g| = 0$$

en simbolos $f \perp g$.

Un elemento $f \in E$ se dice que es o-ajeno del conjunto $E_1 \subset E$ si $f \perp g \quad \forall g \in E_1$

Finalmente, dos conjuntos E_1 y E_2 son o-ajenos si $f \perp g \quad \forall \; f \in E_1, \; g \in E_2$; en simbolos $E_1 \perp E_2$.

De la definición anterior se sigue que $f \perp f$ si y solo si $f = 0$, de donde dos conjuntos - ajenos en el orden pueden tener un elemento en común, es decir, el cero.

2. CONVERGENCIA EN ESPACIOS DE RIESZ.

En este capítulo se definen dos tipos de convergencia en estos espacios y la relación existente entre ellos, lo cual nos llevo al concepto de espacio de Riesz regular.

En la definición de convergencia se hará uso de la generalización del concepto de sucesión, es decir, llamamos dirección (o red) a una función definida en un conjunto dirigido con valores en un espacio parcialmente ordenado, en nuestro caso espacios de Riesz.

En las demostraciones de este capítulo se usan arbitrariamente conjuntos dirigidos en ambos sentidos, esto con el objeto de ilustrar la definición de convergencia.

I CONVERGENCIA EN EL ORDEN.

Generalmente, se introduce el concepto de convergencia en el orden en una latíz de una forma natural.

DEFINICION 2.1

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de una latíz A se dice que converge en el orden al límite $x \in A$ si existen dos sucesiones monótonas de elementos de A, una creciente $\{y_n\}$ y una decreciente $\{z_n\}$ tal que:

1) $x = \inf z_n = \sup y_n$

2) $y_n \leq x_n \leq z_n$ para $n = 1, 2, \ldots$

lo cual denotaremos $x_n \xrightarrow{(o)} x$

o bien, $x = \lim\limits_{(o)} x_n$

TEOREMA 2.1

La sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in A$ si y sólo si,

$x = \sup x_n$ si x_n creciente

o

$x = \inf x_n$ si x_n decreciente

Demostración:

Supongamos primero $x_n \xrightarrow{(o)} x$ y x_n creciente, tomando las sucesiones $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ de la definición anterior, entonces $z_n \geq x_m$ para m, n arbitrarios y como $x = \inf z_n$ se tiene que - $x \geq x_m$ $\forall m$, por otro lado, si el elemento u es tal que $u \geq x_m$ $\forall m$, entonces $u \geq y_m$ $\forall m$ y así $u \geq x$, de donde $x = \sup x_n$.

Supongamos ahora que $\{x_n\}$ es creciente y que $x = \sup x_n$, haciendo $z_n = x$ $\forall n$ & $y_n = x_n$, se obtienen dos sucesiones monótonas que cumplen la definición anterior, de donde $x_n \xrightarrow{(o)} x$.

Esta definición que hemos dado de convergencia en el orden puede ser extendida a direcciones arbitrarias de elementos de una latíz

Decimos que la dirección $\{x_\alpha\}$ es creciente (decre - ciente), si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ implica $x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2}$ $(x_{\alpha_1} \geq x_{\alpha_2})$.

DEFINICION 2.2

Una dirección $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ de elementos de una latíz A converge en el orden al limite $x \in A$, ($x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, o $x = (o)\text{-Lim}\, x_\alpha$) si existen direcciones $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ decreciente y creciente respectivamente que satisfacen:

1) $x = \inf y_\beta = \sup z_\gamma$

2) Para $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$ existe $\alpha_0 \in D$ tal que

$$z_\gamma \leq x_\alpha \leq y_\beta \qquad \forall \alpha \geq \alpha_0$$

Nosotros llamaremos a $\{y_\beta\}$ y $\{z_\gamma\}$ direcciones de condensación superior e inferior de $\{x_\alpha\}$ respectivamente.

Análogamente al teorema 2.1 se puede establecer y probar la misma equivalencia de convergencia en el orden :

TEOREMA 2.2

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \xrightarrow{(o)} x$ si y solo sí

$x = \sup x_\alpha$ para x_α creciente

$x = \inf x_\alpha$ para x_α decreciente

Algunas de las propiedades básicas de convergencia en el orden análogas a las de teoría de límites son :

PROPOSICION 2.1

(a) Si $\{x_\alpha\}$ y $\{x'_\alpha\}$ $(\alpha \in D)$ son dos direcciones similares (es decir, tienen el mismo -

conjunto de índices), donde $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, - $x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x'$ & $x_\alpha \leq x'_\alpha$ $\forall \alpha \in D$, entonces

$$x \leq x'.$$

Demostración :

Considerando las direcciones de condensación superior para $\{x'_\alpha\}$ e inferior para $\{x_\alpha\}$, sean $\{y'_\beta\}_{\beta \in B}$ & $\{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ dichas direcciones, se tiene que para $\beta \in B$, existe α'_0 tal que $x'_\alpha \leq y_\beta$ si $\alpha \geq \alpha'_0$; también para $\gamma \in \Gamma$, existe α_0 tal que - $z_\gamma \leq x_\alpha$ si $\alpha \geq \alpha_0$

Entonces, si $\alpha \geq \alpha''_0 = \max\{\alpha_0, \alpha'_0\}$ se cumple

$$z_\gamma \leq x_\alpha \leq x'_\alpha \leq y_\beta$$ esto es,

$z_\gamma \leq y_\beta$ para $\gamma \in \Gamma$, $\beta \in B$ arbitrarios, entonces $\sup z_\gamma \leq \inf y'_\beta$ o bien, $x \leq x'$.

(b) Si una dirección $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ converge en el - orden al límite x, entonces, este límite es único.

Demostración :

Si suponemos que existe x' tal que $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x'$, por el inciso anterior, como $x_\alpha \leq x_\alpha$ $\forall \alpha \in D$

$x' \leq x$ & $x \leq x'$ es decir $x = x'$.

En una latiz completa de Dedekind se puede introducir el concepto de Limite superior e inferior para direcciones de la siguiente manera:

Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una dirección de elementos de la latiz completa de Dedekind A y supongamos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \geq \alpha_0}$ es acotado. Entonces, para cada $\alpha \geq \alpha_0$ se definen los elementos:

$$y_\alpha = \bigvee_{\beta \geq \alpha} x_\beta \quad , \qquad z_\alpha = \bigwedge_{\beta \geq \alpha} x_\beta \; .$$

Es claro que $\{y_\alpha\}$ es una dirección decreciente y que $\{z_\alpha\}$ es creciente, entonces, por definición:

$$\overline{\text{Lim}}\; x_\alpha = \bigwedge y_\alpha$$

$$\underline{\text{Lim}}\; x_\alpha = \bigvee z_\alpha$$

de donde

$$\underline{\text{Lim}}\; x_\alpha \leq \overline{\text{Lim}}\; x_\alpha$$

Otra caracterización de convergencia en el orden que algunos autores toman como definición es la siguiente :

PROPOSICION 2.2

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ converge en el orden a $x \in A$, latíz - completo de Dedekind si y sólo si :

$$\bigwedge_\alpha \bigvee_{\beta \geq \alpha} x_\beta = \overline{\mathrm{Lim}}\, x_\alpha = x = \underline{\mathrm{Lim}}\, x_\alpha = \bigvee_\alpha \bigwedge_{\beta \geq \alpha} x_\beta$$

Demostración :

Si suponemos $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ en el sentido de la definición 2.2, existen direcciones $\{y_\beta\}$, $\{z_\gamma\}$ tal que $y_\beta \downarrow x$, $z_\gamma \uparrow x$ y además :

$$z_\gamma \leq x_\alpha \leq y_\beta \qquad \forall\ \alpha \geq \alpha_0$$

entonces

$$z_\gamma \leq z_\alpha \leq y_\alpha \leq y_\beta$$

en donde

$$z_\alpha = \bigwedge_{\gamma \geq \alpha} z_\gamma$$

$$y_\alpha = \bigvee_{\beta \geq \alpha} y_\beta$$

pero $z_\alpha \uparrow x$, $y_\alpha \downarrow x$, es decir

$$x = \sup z_\alpha = \bigvee_\alpha \bigwedge_{\gamma \geq \alpha} z_\gamma$$

$$x = \inf y_\alpha = \bigwedge_\alpha \bigvee_{\beta \geq \alpha} y_\beta$$

Ahora, si suponemos que $\overline{\mathrm{Lim}}\, x_\alpha = x = \underline{\mathrm{Lim}}\, x_\alpha$

entonces es claro que y_α & z_α son las direcciones de condensación para la definición 2.2.

Hasta ahora, hemos introducido el concepto de convergencia en el orden para latices arbitrarias y algunas de sus equivalencias, veamos ahora las propiedades suplementarias de convergencia en el orden que poseen los espacios de Riesz.

El siguiente Lema es básico en la teoría

LEMA 2.1

$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ converge en el orden en el espacio de Riesz K si y solo sí

$$\overline{\text{Lim}}\ |x_\alpha - x_\beta| = 0$$

Si suponemos que $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$

como $$|x_\alpha - x_\beta| \leq |x_\alpha - x| + |x - x_\beta|$$

se tiene que

$$\overline{\text{Lim}}\ |x_\alpha - x_\beta| \leq \overline{\text{Lim}}\ |x_\alpha - x| + \overline{\text{Lim}}\ |x - x_\beta| = 0$$

Ahora, para probar lo inverso:

Sea $\{x_\alpha\}$ una dirección en K tal que

$$\overline{\text{Lim}}\ |x_\alpha - x_\beta| = 0$$

definamos

$$u(\beta) = \sup_{\alpha \leq \beta} x_\alpha \qquad (\text{consideramos ahora } \Delta \downarrow)$$

$$v(\beta) = \inf_{\alpha \leq \beta} x_\alpha$$

para completar la prueba debemos mostrar que

$$x = \inf u(\beta) = \sup v(\beta)$$

haciendo $\quad r(\gamma) = \sup |x_\alpha - x_\beta| \qquad \alpha, \beta \leq \gamma$

de donde es claro que

$$x_\alpha - x_\beta \leq |x_\alpha - x_\beta| \leq r(\gamma) \qquad \alpha, \beta \leq \gamma$$

así, $\quad x_\alpha \leq r(\gamma) + x_\beta$

y como $\quad u(\gamma) = \sup_{\alpha \leq \gamma} x_\alpha$, se tiene:

$$u(\gamma) \leq r(\gamma) + x_\beta$$

también $\quad v(\gamma) = \inf_{\beta \leq \gamma} x_\beta$

de donde: $\quad u(\gamma) \leq r(\gamma) + v(\gamma)$

Ahora, por otro lado

$$\overline{\text{Lim}}\, x_\alpha = \text{Lim}\, u(\gamma)$$
$$\leq \text{Lim}\left(r(\gamma) + v(\gamma)\right)$$

Es decir
$$\overline{\mathrm{Lim}}\ x_\alpha \leq \mathrm{Lim}\ r(\gamma) + \mathrm{Lim}\ v(\gamma)$$

pero
$$\mathrm{Lim}\ r(\gamma) = \overline{\mathrm{Lim}}\ |x_\alpha - x_\beta| = 0$$

&
$$\mathrm{Lim}\ v(\gamma) = \underline{\mathrm{Lim}}\ x_\alpha$$

por tanto
$$\overline{\mathrm{Lim}}\ x_\alpha = \underline{\mathrm{Lim}}\ x_\alpha .$$

es decir,
$$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x .$$

Cualquier dirección $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ tal que
$$\overline{\mathrm{Lim}}\ |x_\alpha - x_\beta| = 0$$
se dice que es de Cauchy en el orden en K.

LEMA 2.2

La dirección $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ converge a cero en K si y sólo si existen conjuntos U, W tal que

1) $\bigvee W = \bigwedge U = 0$

2) W es dirigido $\uparrow$, U dirigido $\downarrow$

3) Dado $u \in U$ & $v \in W$ existe $\alpha(u,v) \in \Delta$ tal que $v \leq x_\alpha \leq u$ si $\alpha \leq \alpha(u,v)$

Demostración :

Supongamos primero que $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$

Sean $U = \{ \sup_{\alpha \leq \beta} \{x_\alpha\} \}$

$$W = \{ \inf_{\alpha \leq \beta} \{x_\alpha\} \}$$

entonces es claro que $U \downarrow 0$, $W \uparrow 0$; para el punto 3 :

Si $u \in U \Rightarrow u = \sup_{\alpha \leq \beta_1} \{x_\alpha\}$

si $w \in W \Rightarrow w = \inf_{\alpha \leq \beta_2} \{x_\alpha\}$

y se tiene que, $w < x_\alpha$ si $\alpha \leq \beta_2$
$u > x_\alpha$ si $\alpha \leq \beta_1$

de donde,

$$w < x_\alpha < u \quad \text{si} \quad \alpha \leq \beta$$

donde $\beta \leq \beta_1$, $\beta \leq \beta_2$ ya que $\beta_1, \beta_2 \in \Delta \downarrow$

Para la segunda parte, si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ es una dirección en K tal que existen conjuntos U, W tales que cumplen 1, 2, 3 , entonces cumple con las condiciones de convergencia en el orden en $x = 0$.

Una de las propiedades de la convergencia en el orden que usaremos posteriormente es :

PROPOSICION 2.3 (a)

Si $\{x_\alpha\}$ converge en el orden a $x \in K$

$\{x'_\alpha\}$ converge en el orden a $x' \in K$

Entonces, $\{x_\alpha + x'_\alpha\}$ converge en el orden a $(x+x') \in K$.

Demostración.

Por hipotesis, para arbitrarios $\beta, \beta' \in B$; $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, existen $\alpha_0, \alpha_0' \in \Delta$ tal que

$$z_\beta \leq x_\alpha \leq y_\gamma \qquad \alpha \geq \alpha_0$$

$$z'_\beta \leq x'_{\alpha'} \leq y'_{\gamma'} \qquad \alpha \geq \alpha_0'$$

donde

$$z_\beta \uparrow x \quad , \quad z'_{\beta'} \uparrow x'$$

$$y_\gamma \downarrow x \quad , \quad y'_{\gamma'} \downarrow x'$$

Entonces, si $\delta_0 = (\alpha_0, \alpha_0')$, $\delta = (\alpha, \alpha')$

$$z_\beta + z'_{\beta'} \leq x_\alpha + x'_{\alpha'} \leq y_\gamma + y'_{\gamma'} \qquad \forall\ \delta \geq \delta_0$$

en donde $\delta \geq \delta_0$ si $\alpha \geq \alpha_0$, $\alpha' \geq \alpha_0'$

y por otro lado, usando Lema 1.2

$$\inf_{\gamma,\gamma'} (y_\gamma + y'_{\gamma'}) = x + x'$$

$$\sup_{\beta,\beta'} (z_\beta + z'_\beta) = x + x'$$

por tanto, $(x_\alpha + x_\alpha') \xrightarrow{(o)} x + x'$.

(b) Si $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, entonces $\lambda x_\alpha \xrightarrow{(o)} \lambda x$ para arbitrario λ (escalar).

Demostración

Por hipótesis, para $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$ existe $\alpha_0 \in \Delta$ tal que,

$$z_\beta \leq x_\alpha \leq y_\gamma \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_0$$

entonces, si $\lambda \geqslant 0$

$$\lambda z_\beta \leq \lambda x_\alpha \leq \lambda y_\gamma \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_0$$

y además, usando Lema 1.2

$$\inf_\gamma (\lambda y_\gamma) = \lambda \inf_\gamma y_\gamma$$

$$\sup_\beta (\lambda z_\beta) = \lambda \sup_\beta z_\beta$$

pero por hipótesis $y_\gamma \downarrow x$, $z_\beta \uparrow x$

por tanto, $\lambda y_\gamma \downarrow \lambda x$ & $\lambda z_\beta \uparrow \lambda x$

En el otro caso, si $\lambda < 0$

$$\lambda y_\gamma \leq \lambda x_\alpha \leq \lambda z_\beta \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_0$$

y también por Lema 1.2

$$\inf_\gamma (\lambda y_\gamma) = \lambda \sup_\gamma y_\gamma = \lambda x$$

$$\sup_\beta (\lambda z_\beta) = \lambda \inf_\beta z_\beta = \lambda x$$

de donde, $\lambda x_\alpha \xrightarrow{(o)} \lambda x$.

(c) Si $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ & $x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x'$ con $x, x' \in K$ entonces $x_\alpha \vee x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x \vee x'$

Demostración.

Por hipótesis se tiene lo mismo que en (a), de donde:

$$z_\beta \vee z'_{\beta'} \leq x_\alpha \vee x'_{\alpha'} \leq y_\gamma \vee y'_{\gamma'}$$

Para todo $\delta \geq \delta_0$

y usando nuevamente el Lema 1.2

$$\inf_{\gamma,\gamma'} \left[y_\gamma \vee y'_{\gamma'} \right] = \inf_\gamma y_\gamma \vee \inf_{\gamma'} y'_{\gamma'}$$

$$= x \vee x'$$

$$\sup_{\beta,\beta'} \left[z_\beta \vee z'_{\beta'} \right] = \sup_\beta z_\beta \vee \sup_{\beta'} z'_{\beta'}$$

$$= x \vee x'$$

de donde

$$x_\alpha \vee x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x \vee x'$$

(d) Si $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ entonces:

1) $x_\alpha^+ \xrightarrow{(o)} x^+$

2) $x_\alpha^- \xrightarrow{(o)} x^-$

3) $|x_\alpha| \xrightarrow{(o)} |x|$

En efecto,

1) $x_\alpha^+ = x_\alpha \vee 0 \xrightarrow{(o)} x \vee 0 = x^+$

2) $x_\alpha^- = (-x_\alpha)^+ \xrightarrow{(o)} (-x)^+ = x^-$

3) $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^- \xrightarrow{(o)} x^+ + x^- = |x|$.

(e) Si $|x_\alpha| \xrightarrow{(o)} 0$, entonces $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$

En efecto, si $|x_\alpha| \xrightarrow{(o)} 0$ existe una dirección $y_\alpha \downarrow 0$ tal que, $|x_\alpha| \leq |y_\alpha| \quad \forall \alpha$ pero $-y_\alpha \uparrow 0$ y se tiene,

$$-y_\alpha \leq -|x_\alpha| \leq x_\alpha \leq |x_\alpha| \leq |y_\alpha| \quad \forall \alpha$$

de donde, $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$.

(f) Una condición necesaria y suficiente para que $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ es que $|x_\alpha - x| \xrightarrow{(o)} 0$

Demostración.

Si suponemos que $|x_\alpha - x| \xrightarrow{(o)} 0$ entonces $x_\alpha - x \xrightarrow{(o)} 0$ de donde,

$$x_\alpha - x + x \xrightarrow{(o)} 0 + x$$

es decir $\quad x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$

Ahora, si suponemos $\quad x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$

también $\quad x_\alpha - x \xrightarrow{(o)} x - x = 0$

de donde $\quad |x_\alpha - x| \xrightarrow{(o)} 0$

(g). Si $\quad x_\alpha \xrightarrow{(o)} x \quad , \quad x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x'$

y además $\quad x_\alpha \perp x'_\alpha \quad \forall \alpha$

entonces $\quad x \perp x'$

Demostración.

Si suponemos que igual que en el inciso (b) se demuestra que

$$x_\alpha \wedge x'_\alpha \xrightarrow{(o)} x \wedge x'$$

entonces

$$|x_\alpha| \wedge |x'_\alpha| \xrightarrow{(o)} |x| \wedge |x'|$$

y como $\quad |x_\alpha| \wedge |x'_\alpha| = 0 \quad \forall \alpha$

entonces también,

$$|x| \wedge |x'| = 0$$

de donde,

$$x \perp x' \quad .$$

II ESPACIOS DE RIESZ ARQUIMIDIANOS.

El axioma de Arquímedes tan bien conocido para números reales, puede formularse para un espacio de Riesz arbitrario.

DEFINICION 2.3

Un espacio de Riesz es llamado Arquimidiano si para los $x \in K$, tales que $x \geq 0$ y el conjunto $\{nx\}_{n=1,2,\dots}$ es acotado, se sigue que $x = 0$.

Todos los espacios de Riesz mostrados en el ejemplo 1.3 son Arquimidianos, un ejemplo de espacio de Riesz que no es Arquimidiano es el siguiente:

EJEMPLO 2.1

Sea K el espacio $\mathbb{R}^2$ con las operaciones algebraicas usuales pero con el orden siguiente:

$x < y$ donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

si $x_1 < y_1$ (x_2, y_2 arbitrarios)

o bien $x_1 = y_1$ pero $x_2 < y_2$

entonces para $x = (0,1)$ & $y = (1,0)$

se tiene $nx < y$ $\forall\, n = 1,2,\dots$

Algunas consecuencias del axioma de Arquímedes son:

PROPOSICION 2.4

Sea K un espacio de Riesz Arquimidiano

(a). Si $nx \leq y$ $\forall$ $n=1,2,\ldots$, entonces $x \leq 0$

como $nx^+ = n(x \vee 0) = nx \vee 0 = (nx)^+$ se tiene que,

$$nx^+ = (nx)^+ \leq y^+ \qquad \forall \; n=1,2,\ldots.$$

entonces, $\qquad x^+ = 0$

por tanto, $x \leq 0$.

(b). Si $\lambda = \sup \lambda_\xi$ $(\lambda = \inf \lambda_\xi)$ (λ_ξ escalares) & $x \geq 0$, entonces, $\lambda x = \sup \lambda_\xi x$ $(\lambda x = \inf \lambda_\xi x)$.

Como $(\lambda - \lambda_\xi)x \geq 0$, entonces $\lambda_\xi x \leq \lambda x$ $\forall \xi$ y para un arbitrario n se puede encontrar ξ tal que $\lambda_\xi \geq \lambda - \frac{1}{n}$, entonces $[\lambda - \frac{1}{n}]x \leq y$ de donde se sigue que, $n(\lambda x - y) \leq x$, $\forall n$ usando (a) se tiene, $\lambda x - y \leq 0$ o bien, $\lambda x \leq y$ En el caso de $\lambda = \inf \lambda_\xi$ se procede análoga-mente.

(c). Si $|x_n| \leq \varphi$ $(n=1,2,\ldots)$ & $\lambda_n \longrightarrow 0$

Entonces

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} \bar{0} \qquad \bar{0} \in K$$

Como $\lambda_n \longrightarrow 0$, existe una sucesión de números μ_n tal que,

$$|\lambda_n| \leq \mu_n \quad \& \quad \mu_n \downarrow 0$$

pero por (b): $\mu_n \varphi \downarrow 0$

además, $|\lambda_n x_n| \leq \mu_n \varphi$

de donde, $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} \bar{0}$.

III CONVERGENCIA RESPECTO A UN REGULADOR.

En un espacio de Riesz Arquimidiano se puede introducir el concepto de r-convergencia o convergencia con respecto a un regulador.

DEFINICION 2.4

La direoción $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ converge respecto a un regulador ($x_\alpha \xrightarrow{(r)} x$) al límite $x \in K$, si existe un elemento $u \in K^+$, llamado regulador de convergencia con la propiedad de que, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe, $\alpha_0 \in \Delta$ tal que, $|x_\alpha - x| \leq \varepsilon u$, para $\alpha \geq \alpha_0$

LEMA 2.3

Si $x_\alpha \xrightarrow{(r)} x$ entonces, $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$

Demostración.

Considerando a las sucesiones

$$y_n = x + \left(\frac{1}{n}\right)u$$

$$z_n = x - \left(\frac{1}{n}\right)u$$

en donde $u \in K^+$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, existe - $\alpha_0 \in \Delta$ tal que

$$|x_\alpha - x| \leq \varepsilon u \quad \text{para } \alpha \geq \alpha_0$$

si consideramos $u_n = u$ $\forall n = 1, 2, \dots$

se tiene, $|u_n| \leq u$ y como $\frac{1}{n} \xrightarrow{(o)} 0$

entonces, $\left(\frac{1}{n}\right)u \xrightarrow{(o)} \bar{0}$

de esta forma, usando la proposición 2.3

$$y_n \xrightarrow{(o)} x \quad , \quad (y_n \downarrow x)$$

y análogamente $z_n \xrightarrow{(o)} x$ $\quad (z_n \uparrow x)$

Por otro lado, como $|x_\alpha - x| \leq \varepsilon u$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$

se tiene $-\varepsilon u \leq x_\alpha - x \leq \varepsilon u$

es decir, $x - \varepsilon u \leq x_\alpha \leq x + \varepsilon u$ $\quad \forall \alpha \geq \alpha_0$

pero si $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe α_n tal que

$$x - \frac{1}{n}u \leq x_\alpha \leq x + \frac{1}{n}u \qquad \forall \alpha \geq \alpha_n$$

o sea
$$z_n \leq x_\alpha \leq y_n \qquad \forall\, \alpha \geq \alpha_n$$
es decir,
$$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$$

Con el propósito de establecer bajo que condiciones se cumple el recíproco de este último resultado, pasemos a ver un tipo especial de espacios de Riesz.

IV ESPACIOS DE RIESZ REGULARES

Recordando la definición 1.8, decimos que un espacio de Riesz es completo de Dedekind si como latíz lo es; el espacio de Riesz K es σ-completo de Dedekind si cada subconjunto numerable tiene supremo e ínfimo.

DEFINICION 2.6

El espacio de Riesz σ-completo de Dedekind K es llamado "espacio del tipo numerable" si cada subconjunto acotado de elementos o-ajenos por pares y distintos de cero es a lo más numerable.

Otra definición importante es:

DEFINICION 2.7

Se dice que la convergencia en el orden es estable en el espacio de Riesz completo de Dedekind si para cada sucesión $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ existe $\{\lambda_n\}$ de números reales tal que $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ y además;

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0 \quad .$$

Es claro que la convergencia ordinaria en $\mathbb{R}$ es estable así como la convergencia en el orden en $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.4

En un espacio de Riesz Arquimidiano completo de Dedekind, la convergencia en el orden es estable si y sólo si la convergencia con respecto a un regulador y la convergencia en el orden son equivalentes.

Demostración

Primero supongamos la convergencia en el orden es estable:

Si $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ entonces también $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$ para alguna sucesión $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ y podemos suponer que toda $\lambda_n > 0$, entonces $\{\lambda_n|x_n|\}$ es acotada, es decir, existe $u \in K$ tal que

$$\lambda_n |x_n| < u$$

De donde

$$|x_n| \leq (1/\lambda_n)\, u$$

así

$$x_n \xrightarrow{(r)} 0$$

El otro sentido de la equivalencia de las convergencias lo da el Lema 2.3.

Para la segunda parte, basta demostrar que la convergencia con respecto a un regulador es estable; en efecto, si $x_n \xrightarrow{(r)} 0$ se tiene que para $\varepsilon^2 = (1/\lambda_n)^2$ existe α tal que

$$|x_n| < \varepsilon^2 u = \left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) u \quad \forall n \geq \alpha$$

como $\lambda_n > 0$ & $\lambda_n \to +\infty$ (igual que en la primera parte), entonces

$$|\lambda_n x_n| < \frac{1}{\lambda_n} u = \varepsilon u \quad \forall n \geq \alpha$$

es decir,

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{(r)} 0$$

por tanto la convergencia con respecto a un regulador es estable.

Por tanto, como si suponemos equivalencia entre convergencias, tenemos convergencia respecto a un regulador y por tanto estabilidad.

DEFINICION 2.8

Un espacio de Riesz completo de Dedekind se dice que es Regular si satisface :

1) La convergencia en el orden es estable en él

2) Para cada sucesión de elementos $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $x_n \in K$, existe otra sucesión de números reales $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$ tal que la sucesión $\{\lambda_n x_n\}$ es acotada.

Una de las propiedades interesantes de los espacios de Riesz regulares es :

TEOREMA 2.4

En un espacio de Riesz regular K, para cada sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in K$, se puede encontrar la sucesión de números reales $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$ tal que

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$$

(A esta propiedad, se le llama de aniquilación en el orden).

Demostración.

Por la regularidad del espacio K, existen, $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$ & $y \in K$ tal que

$$\mu_n |x_n| \leq y \qquad \forall n = 1, 2, \ldots\ldots$$

haciendo $\lambda_n = \mu_n / n$

se tiene $\lambda_n |x_n| \leq (1/n)\, y \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$

es decir, $\lambda_n x_n \xrightarrow{(r)} 0$

por Lema 2.3 $\lambda_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$.

3. EL ESPACIO DE DEFINICION.

Como se mencionó anteriormente, una de las innovaciones en la definición de la integral-es la introducción de los espacios de división de Henstock sobre un conjunto arbitrario T.

En este capítulo se generaliza el concepto-de partición usada en la teoría de Rie--mann, introduciendo intervalos generalizados sobre el conjunto de definición T, hasta llegar a la definición de "espacio de división" dado por Henstock en [6] y probar algunas propiedades de estos espacios - con algunos ejemplos.

I INTERVALOS GENERALIZADOS

Como se indicó anteriormente, necesitamos a un espacio general T como espacio de definición.

Necesitamos definir también ciertos conjuntos no vacíos $I \subseteq T$, llamados intervalos generalizados y denotamos a su familia por $\mathcal{X}$, es conveniente excluir al vacio de $\mathcal{X}$.

Decimos que dos intervalos $I_1, I_2 \in \mathcal{X}$ son no traslapados si no existe $I_3 \in \mathcal{X}$ que este contenido en ambos.

DEFINICION 3.1

Un conjunto $L \subseteq T$ es un conjunto elemental si L es un intervalo o la unión finita de intervalos no traslapados.

Es claro que si L_1, L_2 son conjuntos elementales no traslapados, entonces $L_1 \cup L_2$ también es un conjunto elemental.

DEFINICION 3.2

Una división $D = D(I)$ de un conjunto $L \subseteq T$, es cualquier intervalo o un número finito de intervalos no traslapados con unión L.

De este modo L es un conjunto elemental.

Una sub-familia $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}$ divide L si existe una división D de L tal que $D \subseteq \mathcal{X}_1$. En este caso decimos que D viene de $\mathcal{X}_1$.

Usualmente, para definir una integral de $f(t)$, $t \in T$ con respecto a $\mu(I)$, $I \in \mathcal{X}$; multiplicamos $\mu(I)$ por $f(x)$, donde x está asociado con I de alguna forma. Por ejemplo, x puede ser un punto arbitrario de I, de la cerradura de I, etc..

Para generalizar esta idea, supongamos que a cada intervalo $I \in \mathcal{X}$, le corresponde uno o más puntos asociados x, de esta forma consideramos a los pares ordenados (I, x).

DEFINICION 3.3

Sea $\mathcal{A} = \{S : S = \{(I,x) \mid I \in \mathcal{X}, x \in T\}\}$

Decimos que una familia $S \in \mathcal{A}$ divide a $L \subseteq T$, si la correspondiente familia $\mathcal{X}_1 = \{I : (I,x) \in S\}$ divide a L.

Como la forma de la integral que vamos a definir requiere una particular $\mathcal{A}$, pasemos ahora a definir estos requerimientos básicos en nuestra teoría.

DEFINICION 3.4

$\mathcal{A}$ es parcialmente ordenada en el sentido de las divisiones, si dados $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$, tales que ambos dividen a L, entonces existe $S_3 \in \mathcal{A}$ que divide a L y contenido en $S_1 \cap S_2$.

DEFINICION 3.5

$\mathcal{A}$ es aditivo, si cuando tenemos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervalos no traslapados de $\mathcal{X}$ y si $S_i \in \mathcal{A}$ divide a I_i $\forall i \in \bar{n}$, entonces existe $S \in \mathcal{A}$ que divide a I, en donde

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \qquad y \qquad S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i .$$

DEFINICION 3.6

$\mathcal{A}$ tiene la propiedad de restricción, si cuando tenemos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ elementos no traslapados de $\mathcal{X}$, con $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I \in \mathcal{X}$, si $S \in \mathcal{A}$ divide a I y $R_i = \{(J,x) \in S : J \subseteq I_i\}$, podemos encontrar $S_i \subseteq R_i$ con $S_i \in \mathcal{A}$ y S_i dividiendo a I_i.

Ahora, ya estamos en posibilidad de definir lo que a la postre será una de las definiciones fundamentales de esta teoría.

II ESPACIOS DIVISION.

DEFINICION 3.7

Decimos que la tripleta $(T, \mathcal{I}, \mathcal{a})$ es un espacio - División, si cumple las cuatro condiciones siguientes:

1) $\mathcal{a}$ divide a todos los conjuntos elementales, es decir, $\forall\, I \in \mathcal{I}$, existe $S \in \mathcal{a}$ que divide a I.

2) $\mathcal{a}$ es parcialmente ordenada en el sentido de - las divisiones.

3) $\mathcal{a}$ es aditiva

4) $\mathcal{a}$ tiene la propiedad de restricción.

Sobre un espacio División, nosotros vamos a estable- cer una integral con algunas propiedades análogas a la integral de Riemann, pero antes de ver algún ejemplo de espacios División, probaremos algunos re- sultados simples.

Primero, si L_1, L son conjuntos elementales con $L_1 \subset L$, no siempre podemos encontrar un conjunto elemental L_2 que no sea traslapado con L_1 y tal que

$$L_1 \cup L_2 = L$$

Sin embargo, los conjuntos parciales que vamos a - definir, tienen esta propiedad.

DEFINICION 3.8

Una división parcial δ de un conjunto elemental L es una colección de $I \in D$, donde D es una división $D(I)$ de L que viene de algún $s \in \mathcal{A}$ que divide a L.

Un conjunto parcial L_1 de L es la unión de los - elementos I de uno división parcial de L

Observamos que $L \setminus L_1$ es la unión de los I en $D \setminus \delta_1$, (δ_1 es la división parcial que da origen a - L_1). Entonces, L_1, $L \setminus L_1$ son conjuntos parciales y - elementales con unión L.

DEFINICION 3.9

Sean D, D' dos divisiones de un conjunto elemental L. Decimos que $D' \leq D$, (D' refina D), si - cada $I \in D$ es la unión finito de elementos - $I \in D'$.

TEOREMA 3.1

Sea $(T, \mathcal{X}, \mathcal{A})$ un espacio División

(a) Si L_1 es un conjunto parcial de L y si - $s \in \mathcal{A}$ divide a L, entonces s divide a L_1.

(b) Si D es una división de L que viene de un $s \in \mathcal{A}$ que divide a L, entonces existe un $s^* \in \mathcal{A}$ que divide a L, tal que $D' \leq D$, para cada - división D' de L que venga de s^*.

Demostración :

(a) Sea L_1 el conjunto parcial que viene de la división D_1 de L y sea $L_2 = L \setminus L_1$.

Como $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de restricción, $R_1 = \{(I,x) \in S : I \subseteq L_1\}$ que es la restricción de S a L_1, divide a L_1, y por tanto S también.

(b) Como $D = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ y $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de restricción, si $R_i = \{(J,x) \mid J \subseteq I_i\}$, existe $S_i \subseteq R_i$ que divide a I_i, para toda $i \in \bar{n}$, pero $\mathcal{A}$ es aditiva, existe $S^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ que divide a $D = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, por tanto divide a L y por construcción, si D' es una división de S^*, se tiene $D' \leq D$.

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios de División

EJEMPLO 3.1

Si T es la recta real, $\mathcal{X}$ la familia de intervalos $[a,b)$ cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha y $\mathcal{A}$ la familia que se usa en la integral ordinario de Riemann con puntos asociados en el valor mínimo del intervalo, entonces, $(T, \mathcal{X}, \mathcal{A})$ es un espacio División.

EJEMPLO 3.2

Sean D, D' dos divisiones de un conjunto elemental L en un espacio general T de puntos. Si consideramos que $D' \leq D$ como en la definición 3.9 y si $\mathcal{a}$ está formado de aquellos S y únicamente aquellos para los cuales existe una división D de un conjunto elemental L, tal que todo D' división de L con $D' \leq D$ viene de S, de esta forma se obtiene la integración de Moore - Pollard.

En un espacio División, si $I \in \mathcal{X}$, decimos que un intervalo $J \leq I$ es un intervalo divisor de I si existe una división $\{I_i\}$, $i \in \bar{n}$ de I, tal que $J = I_k$ para algún $k \in \bar{n}$

Consideremos también, para cada $I \in \mathcal{X}$, al conjunto

$$N(I) = \{(S, D) : S \in \mathcal{a} \text{ y } D \leq S \text{ división de } I\}$$

el cual es parcialmente ordenado por el orden :

Decimos que $(S_1, D_1) \leq (S_2, D_2)$ si y sólo si

$$S_1 \leq S_2$$

Es fácil ver que $N(I)$ es dirigido hacia abajo en un espacio División.

En efecto, si $(S_i, D_i) \in N(I)$, $i=1,2$ sabemos que S_i divide a I y como $\mathcal{a}$ es parcialmente ordenado en el sentido de las divisiónes, existe S_3 que divide a I con $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$, es decir, $S_3 \subseteq S_1$ y $S_3 \subseteq S_2$, por tanto $N(I)\downarrow$.

4. DEFINICION DE LA INTEGRAL Y ALGUNAS PROPIEDADES.

A pesar de que se consideran igualmente necesarios todos los capítulos de este trabajo, se puede pensar en éste como en el más importante porque en el se introduce el concepto mas interesante del trabajo que es la integral de Henstock.

I DEFINICION DE LA INTEGRAL

Consideremos al espacio división $(T, \mathcal{X}, a)$, al conjunto $N(I)$ definido en el capítulo anterior y al espacio de Riesz completo de Dedekind K.

Entonces, para cada $(S,D) \in N(I)$ en donde D es la división $\{(I_i, x_i)\}$ $i=1,2,\ldots,n$ se define:

$$h(S,D) = \sum_{i=1}^{n} h(I_i, x_i) \qquad (1)$$

$$|h|(S,D) = \sum_{i=1}^{n} |h(I_i, x_i)| \qquad (2)$$

En donde h es una función adecuada definida sobre el espacio división $(T, \mathcal{X}, a)$ y toma valores en K.

En general, las funciones que cumplen (1) se denominan finitamente aditivas, mientras que las que únicamente cumplen

$$h(S,D) \leq \sum_{i=1}^{n} h(I_i, x_i)$$

se denominan finitamente sub-aditivas.

DEFINICION 4.1

Decimos que la función h es integrable en el sentido de Henstock sobre I si h(S,D) - converge en el orden para $(S,D) \in N(I)$, en - este caso escribimos :

$$\text{Lim } h(S,D) = (H)\int_I h$$

Esta definición tiene como innovación el pre - sentar la integral como el límite de un conjun - to dirigido

II PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

Como propiedad inmediata a partir de la defini - ción :

LEMA 4.1

Sean h & g funciones Henstock integra - bles sobre I, entonces, para α, β escalares se tiene

$$(H)\int_I (\alpha h + \beta g) = \alpha \ (H)\int_I h + \beta \ (H)\int_I g$$

En efecto, de la proposición 2.3, se tiene:

$$\lim_{(S,D)} (\alpha h + \beta g) = \lim_{(S,D)} \alpha h + \lim_{(S,D)} \beta g$$

$$= \alpha \lim_{(S,D)} h + \beta \lim_{(S,D)} g$$

es decir,

$$(H)\int_I \alpha h + \beta g = \alpha \, (H)\int_I h + \beta \, (H)\int_I g$$

LEMA 4.2

Supongamos que $(H)\int_I h$ existe. Entonces, para cada J intervalo divisor de I,

$$(H)\int_J h \quad \text{existe.}$$

Demostración.

Sea D' la división de I la cual define a J como intervalo divisor de I, por el teorema 3.1 existe $S \in \mathcal{A}$ dividiendo a I tal que cada división de I que venga de S refina a D', tomemos $(S,D) \in N(I)$.

Ahora, sea D_0 la división del conjunto parcial P

de I obtenido de quitar J de D'.

Entonces es claro que D divide a $D_0 \cup D''$ donde D'' es una división de J.

Considerando ahora a

$$(S_i, D_i) \leq (S, D'') \in N(J) \qquad i = 1, 2.$$

se tiene que

$$\left|h(S_1,D_1) - h(S_2,D_2)\right| \leq \left|h(S_1,D_1) + h(S,D_0) - (H)\int_I h\right|$$

$$+ \left|h(S_2,D_2) + h(S,D_0) - (H)\int_I h\right|$$

Entonces, para $(S_k, D_k) \leq (S,D) \in N(I)$ se tiene:

$$\sup\left|h(S_1,D_1) - h(S_2,D_2)\right| \leq 2\sup\left|h(S_k,D_k) - (H)\int_I h\right|$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\text{Lim}}\left|h(S_1,D_1) - h(S_2,D_2)\right| = 0$$

por tanto, la dirección

$$\{h(S,D) : (S,D) \in N(J)\}$$

es de Cauchy en el orden y por el Lema 2.1 converge en el orden, es decir h es Henstock Integrable en J.

TEOREMA 4.1

Sea I un intervalo y $F \geq 0$ una función finitamente sub-aditiva sobre los intervalos divisores de I. Si para algún $s_0 \in \mathcal{a}$, el conjunto:

$$R_0 = \{F(s_0, D) : (s_0, D) \in N(I)\}$$

es acotado, entonces $(H)\int_I F$ existe.

Demostración:

Como R_0 es acotado, existe M tal que $M \in K$,

$$M = \sup R_0$$

Ahora, para algún $(s, D) \in N(I)$ fijo, encontramos $s_1 \in \mathcal{a}$ tal que $(s_1, D_1) \in N(I)$ implica que D_1 refina a la división D y por la sub-aditividad de F:

$$F(s, D) \leq F(s_1, D_1)$$

así encontramos que.

$$F(s, D) \leq \underline{\text{Lim}}\ F(s, D)$$

lo cual implica: $\underline{\text{Lim}}\ F(s, D) \geq M$

y como $M \geq \overline{\text{Lim}}\ F(s, D)$ se tiene que

$\underline{\text{Lim}}\ F(s, D) = \overline{\text{Lim}}\ F(s, D)$.

LEMA 4.3

Supongamos $(H)\int_I h$ existe, con U y V los conjuntos que determinan la convergencia de

$$h(S,D) - (H)\int_I h$$

a cero como en Lema 2.2. Sea $S \in \mathcal{a}$ con la propiedad que para $(S,D) \in N(I)$

$$v \leq h(S,D) - (H)\int_I h \leq u \qquad (3)$$

se sigue entonces que para cualquier división (I_i, x_i) $i=1,2,\ldots n$ de I que viene de S

$$v \leq \sum_{i\in L} \left[h(I_i,x_i) - H(I_i) \right] \leq u$$

donde $L \subseteq \{1,2,\ldots n\}$ y $H(J) = (H)\int_J h$

es la función intervalo, la cual esta bien - definida (Lema 4.2) para cualquier J intervalo divisor de I.

Demostración.

Sea $i \notin L$ y $S_i \subseteq S$, S_i dividiendo a I_i, de donde $(S_i, D_i) \in N(I_i)$ se sigue que $\{D_i\}$ $i \notin L$ junto - con (I_i, x_i) $i \in L$ forman una división de I que viene de S, de donde

$$h(S,D) - (H)\int_I h = \sum_{i\in L} h(I_i,x_i) - H(I_i) + \sum_{i\notin L} h(I_i,x_i) - H(I_i)$$

que usandolo en (3) se obtiene :

$$v - \sum_{i\notin L} h(S_i,D_i) - H(I_i) \leq \sum_{i\in L} h(I_i,x_i) - H(I_i)$$

$$\leq u - \sum_{i\notin L} h(S_i,D_i) - H(I_i)$$

tomando límite sobre $N(I_i)$, encontramos :

$$\sum_{i\in L} h(I_i,x_i) - H(I_i) \leq u - \sum_{i\notin L} \underline{\lim} \left[h(S_i,D_i) - H(I_i)\right]$$

$$= u$$

De una manera análoga se acota inferior--mente.

En el mismo contexto en que se definió la integral de Henstock se puede introducir los conceptos de "variación" y de "variacional--mente integrable" para la anteriormente mencionada función h.

Esta definición que vamos a dar generaliza la definición dada por Henstock en [4].

DEFINICION 4.2

La variación de una función h en el intervalo I se define como:

$$V(h;I) = \overline{\text{Lim}}\ |h|(S,D)$$

para $(S,D) \in N(I)$.

Si el conjunto $\{|h|(S,D)\}$ no es acotado, escribimos:

$$V(h;I) = +\infty$$

DEFINICION 4.3

Decimos que la función h es variacionalmente integrable sobre I si y sólo si existe una función finitamente aditiva sobre los intervalos divisores de I tal que:

$$V(h-H;I) = 0$$

El valor de la integral es denotada por

$$H(I) = (V)\int_I h$$

Se pueden demostrar algunos resultados interesantes sobre esta definición, pero no entran dentro de los objetivos de este trabajo.

Con el objeto de ilustrar la definición de integral de Henstock, consideremos el caso particular de la función h en la forma

$$h(J,x) = f(x)\ \mu(J,x)$$

en donde f es una función con valores escalares y $\mu(J,x)$ es una función fija con valores en K.

La integral de tales funciones la podemos escribir como

$$(H)\int_I f\, d\mu$$

que se puede particularizar aun más y llegar a la integral de Riemann en la siguiente forma:

EJEMPLO 4.1

Consideremos una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua en $I \subset \mathbb{R}^n$.

Sea μ la medida usual en $\mathbb{R}^n$.

Sea $P = \{ \gamma \mid \gamma$ es partición de $I \}$

(es claro que entonces γ es división de I).

Si definimos a los conjuntos dirigidos:

$N(I) = \{ (s,\gamma) : s = (I_i, x_i)$ con x_i punto medio de I_i, γ división de I que viene de $s \}$.

$\bar{N}(I) = \{ (s,\gamma) : s = (I_i, x_i)$ con $x_i \in I_i$ tal que $f(x_i)$ es el valor máximo de f en I_i, γ división de I que viene de $s \}$.

$\underline{N}(I) = \{ (s,\gamma) : s = (I_i, x_i)$ con $x_i \in I_i$ tal que $f(x_i)$ es el valor mínimo de f en I_i, γ división de I que viene de $s \}$.

si definimos también a la función h como:

$$h(I_i, x_i) = \mu(I_i) f(x_i)$$

consideremos las direcciones:

$$h = \{ h(s,\gamma) \} \quad (s,\gamma) \in N(I)$$

$$\bar{h} = \{ h(s,\gamma) \} \quad (s,\gamma) \in \bar{N}(I)$$

$$\underline{h} = \{ h(s,\gamma) \} \quad (s,\gamma) \in \underline{N}(I)$$

En la integral de Riemann, f es integrable si:

$$\overline{\int_I} f\, d\mu = \underline{\int_I} f\, d\mu$$

pero:

$$\overline{\int_I} f\, d\mu = \bigwedge \overline{h} = \bigwedge_{\overline{N}(I)} h(s,\gamma)$$

$$\underline{\int_I} f\, d\mu = \bigvee \underline{h} = \bigvee_{\underline{N}(I)} h(s,\gamma)$$

Por otro lado, h es Henstock integrable si $h(s,\gamma)$ converge en el orden, pero es claro que:

$$\underline{h} \leq h \leq \overline{h}$$

por tanto $h(s,\gamma)$ converge en el orden si

$$\bigvee \underline{h} = \bigwedge \overline{h}$$

es decir, f es Riemann integrable si y - sólo si h es Henstock integrable.

BIBLIOGRAFIA

1. S. BOCHNER AND K. FAN, "Distributive order pre-serving operations in partially ordered vector sets", Ann. Math., 48 (1947), 168-179.

2. R. COGBURN, "Conditional probability operators", Ann, Math..Stat., 33 (1962), 634-658.

3. FREMLIN. "Topological Riesz Spaces and Measure - Theory".

4. R. HENSTOCK, "Theory of integration" (Butterworths) London, 1962.

5. R. HENSTOCK, "Generalised integrals of vector-valued functions", Proc. Lond. Math. Soc., 19 (1969), 509-536.

6. R. HENSTOCK, "Linear Analysis", (Butterworths, London, 1968).

7. P. Mc. GILL, "Integration in vector lattices"., London - Math. Soc.

8. A. L. PERESSINI, "Ordered Topological Vector Spaces" - - (Harper and Row, London, 1967).

9. B.Z. VULIKH, "Introductión to the theory of partially-ordered Spaces" (Groningen, Wolters-Noord-hoff, 1967).

10. T. D.M. WRIGHT, "Stone-algebra-valued measures and integrals", Proc. Lond. Math. Soc. 19 (1969), 107-122.

11. T.D. M. WRIGHT, "Measures with values in a partially ordered vector space", Proc. Lond. Math. Soc., 25 (1972), 675-688.

12. A.C. ZAANEN AND W. A. T. LUXEMBOURGH, "Riesz Spaces", - Vol. I (North Holland Publishing Co. 1971).